

ASSOCIAZIONE ELETTROTECNICA ITALIANA

(Estratto dagli Atti)

TEORIA GENERALE

DEL

MOTO PERTURBATO DELL'ACQUA

NEI TUBI IN PRESSIONE

(COLPO D'ARIETE)

MEMORIA

dell'Ing. L. ALLIEVI letta alla Sezione di Roma

(Seduta del 30 gennaio 1903)

ROMA

TIP. DELL' UNIONE COOPERATIVA EDITRICE

Via di Porta Salaria, 23-A

—
1903

TEORIA GENERALE
DEL MOTO PERTURBATO DELL'ACQUA NEI TUBI IN PRESSIONE
(COLPO D'ARIEETE)

MEMORIA

*dell'Ing. L. ALLIEVI, letta alla Sezione di Roma
nella seduta del 30 gennaio 1903.*

PREFAZIONE.

Il problema del moto perturbato dell'acqua nei tubi in pressione non era stato fino agli ultimi tempi oggetto d'investigazioni sistematiche, ed i trattatisti d'idraulica si limitavano a deduzioni e sviluppi della unica formola del moto permanente.

Non mancavano invero frequenti accenni al più grave dei fenomeni di moto perturbato, noto *ab antiquo* col nome di colpo d'ariete, ma in mancanza di attendibili teorie le cautele da usarsi per dominare simili fenomeni, non di rado pericolosi, erano piuttosto abbandonate alla prudenza empirica.

In una nota del generale Menabrea ⁽¹⁾ e in altra del Castigliano ⁽²⁾ si trova discusso il problema dello sforzo cui va soggetto un tratto di tubo quando si ponga la condizione che il lavoro della sua dilatazione elastica insieme a quello della compressione elastica del liquido contenuto debbano assorbire una data quantità di energia, per esempio la forza viva posseduta dalla stessa colonna liquida in movimento con una data velocità.

Ma simile modo di porre il problema non ha relazione col fenomeno fisico se non in quanto il fenomeno stesso si supponga istantaneo ed uniformemente distribuito lungo il tubo, ipotesi evidentemente troppo disforme dalla realtà.

⁽¹⁾ *Comptes-rendus de l'Academie des Sciences*, 1858.

⁽²⁾ *Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino*, 1874.

Le numerose utilizzazioni di alte cadute per forza motrice mediante sifoni metallici convoglianti acqua a forti velocità (la velocità di m 2 indicata nei manuali come massimo eccezionale si trova ora frequentemente superata e non sono rare le velocità di 3 m) hanno dato negli ultimi anni nuova e maggiore importanza al problema, che da punti di vista speciali e con diverse ipotesi semplificative non sempre plausibili formò oggetto di monografie tecniche.

Un riassunto e una trattazione abbastanza estesa, sempre coi medesimi metodi, ne fa il Rateau nel suo recente e importante *Traité des turbo-machines* (1), al quale rimando il lettore che avesse vaghezza di confrontare i risultati di tali metodi approssimati, e limitati a casi speciali, coi risultati del metodo generale e rigoroso da me seguito per la trattazione del problema.

Considerando le equazioni differenziali dei fenomeni di moto perturbato io fui tratto a riconoscere che le loro leggi rientrano fra quelle dei fenomeni di vibrazione (ciò che in un certo senso è anche intuitivo), ed è questo punto di vista nuovo che mi ha suggerito un metodo altrettanto semplice quanto rigoroso per la investigazione dei problemi tecnici che si connettono a simili fenomeni (2).

CAPO I.

FORMOLE GENERALI.

§ 1. **Equazioni differenziali del moto perturbato.** — Abbiassi un tubo cilindrico orizzontale di diametro e spessore costanti, di lunghezza che per ora supporrò indeterminata, ed alimentato da un serbatoio per modo che nelle condizioni iniziali l'acqua vi fluisca con velocità e pressione costanti.

Suppongo ora che in una sezione del tubo vengano perturbate comunque le condizioni del flusso in modo da produrre una brusca

(1) Dunod, 1900.

(2) Una prima redazione di questa memoria fu pubblicata negli *Annali della Società degli ingegneri e architetti italiani* (dicembre 1902). L'A. vi ha ora arrecato numerose e importanti modifiche segnatamente ai §§ 2, 5, 9, 11, 13 e 14, sviluppando e completando alcune teorie che nella prima redazione erano appena accennate, e specialmente quanto riguarda i fenomeni di oscillazione del carico e le camere d'aria.

variazione di velocità e corrispondentemente di pressione (o viceversa), quale variazione si propaga rapidamente lungo il tubo, dando luogo al fenomeno di moto perturbato che forma oggetto di questa investigazione.

Denomino:

r, d, e il raggio, il diametro e lo spessore del tubo;

E il modulo di elasticità della materia di cui è composto il tubo;

ε, ω il modulo di elasticità (compressibilità) e il peso specifico del liquido fluente;

v_0, p_0 la velocità e a pressione di regime prima della perturbazione;

v, p la velocità e la pressione in un istante qualunque ed in una sezione qualunque;

y, y_0 le altezze idrauliche corrispondenti alle pressioni p e p_0 in modo che:

$$p = \omega y \quad p_0 = \omega y_0$$

Assumo l'asse del tubo come asse di ascisse x individuanti le singole sezioni e falde liquide, e fisso la direzione positiva delle x in senso contrario al senso positivo delle v e v_0 .

Avendo a base la nota ipotesi del movimento del liquido per falde parallele procedo quindi a formare le equazioni differenziali del moto perturbato.

Una prima equazione è la nota equazione fornita dal principio delle forze vive, pel quale (trascurando le resistenze di attrito liquido) l'accelerazione della falda di ascissa x è data dalla differenza di pressione sulle sue due facce, e cioè, tenendo conto dei segni come sopra definiti:

$$\frac{\omega \pi r^2 \delta x}{g} \left(\frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \pi r^2 \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \right) - \pi r^2 p$$

ovvero:

$$\frac{\omega}{g} \left(\frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} \quad [1]$$

nella quale i simboli δ indicano derivate parziali rispetto alle variabili indipendenti x e t .

Una seconda equazione differenziale ci è fornita dalla considerazione della differenza di velocità che si ha fra due sezioni successive di ascisse x e $x + \delta x$ in conseguenza della deformazione della falda interposta dovuta all'aumento di pressione δp che vi ha luogo nel tempuscolo δt e che genera:

- 1° compressione della falda liquida ;
 2° dilatazione dell'anello elementare di tubo che racchiude la falda ;

fenomeni la cui azione è ovviamente concomitante a produrre accorciamento (o allungamento) della falda nel senso dell'asse.

La parte di tale variazione, dovuta alla compressione del liquido, risulta senz'altro:

$$\delta_1 = \frac{\partial x}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial t} \delta t \quad [2]$$

mentre la parte dovuta alla dilatazione del tubo può determinarsi come segue, nella consueta ipotesi che lo spessore del tubo sia, rispetto al diametro, abbastanza piccolo perchè le sue fibre possano ritenersi uniformemente sollecitate.

L'allungamento elastico periferico dell'elemento di tubo soggetto alla pressione interna p essendo ovviamente:

$$\frac{2\pi r}{e} \frac{pr}{E} = \frac{2\pi r^2}{Ee} p$$

il corrispondente allungamento ρ del raggio sarà:

$$\rho = \frac{r^2}{Ee} p$$

Onde nel tempuscolo δt sarà la variazione di ρ per effetto di δp :

$$\delta \rho = \frac{r^2}{Ee} \frac{\delta p}{\delta t} \delta t$$

e quindi (trascurando il prodotto $\rho \delta \rho$ che introdurrebbe un termine avente E^2 al denominatore) la corrispondente dilatazione cubica elementare dell'anello di tubo di lunghezza δx risulterà:

$$2\pi r \delta \rho \delta x = \frac{2\pi r^3}{Ee} \frac{\delta p}{\delta t} \delta t \delta x$$

onde, dividendo per πr^2 , la parte di accorciamento assiale della falda liquida dovuta alla dilatazione del tubo risulta:

$$\delta_2 = \frac{1}{E} \frac{d}{e} \frac{\delta p}{\delta t} \delta t \delta x \quad [3]$$

La differenza di velocità nel medesimo istante t fra le due sezioni che limitano la falda liquida ci dà quindi la relazione:

$$\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x \right) \delta t - v \delta t = \delta_1 + \delta_2$$

cioè per le [2] e [3]:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{E} \frac{d}{e} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \quad [4]$$

che è la seconda equazione differenziale cercata.

Sostituendo l'altezza idraulica y in luogo di p : ω e ponendo inoltre:

$$\frac{\omega}{g} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{E} \frac{d}{e} \right) = \frac{1}{a^2} \quad [5]$$

scrivo le equazioni differenziali [1] e [4] caratteristiche del fenomeno nella forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial v}{\partial x} &= g \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{g}{a^2} \frac{\partial y}{\partial t} \end{aligned} \right\} [6]$$

§ 2. Integrazione delle equazioni differenziali del moto perturbato. —

Non credo superfluo permettere alcune osservazioni sul grado di approssimazione delle [6].

Ed anzitutto il prescindere nella 1^a [6] dalle resistenze di attrito liquido è certo giustificato in tutti quei casi in cui le altezze di carico perdute per tale causa sono trascurabili rispetto all'entità dei fenomeni di moto perturbato. Ciò può senz'altro affermarsi, in condizioni ordinarie, per tubi di non eccessiva lunghezza (per esempio qualche centinaio od anche un migliaio di metri), e così pure per, tubi di qualsiasi lunghezza quando si tratti di perturbazioni idrodinamiche brevissime e che non modifichino durevolmente ed in modo notevole le condizioni di regime. Ma lo stesso non potrebbe affermarsi in ogni caso per tubi di molti chilometri di lunghezza, nei quali, per esempio, il solo stabilirsi della pressione statica per chiusura dell'efflusso può rendere sensibili delle altezze di carico di molte decine di metri. In tali casi adunque i risultati che andiamo a dedurre non potranno applicarsi che con molte riserve e correzioni, e la questione dovrà discutersi caso per caso.

Il lettore avrà altresì rilevato come nel procedimento con cui è dedotta la 2^a [6] si riguardi il tubo come costituito di una serie di elementi anulari suscettibili di dilatarsi ciascuno indipendentemente, ciò che in realtà non è. Deve però ritenersi legittima la ipotesi assunta, ove si consideri che le variazioni di pressione si propagano ungo il tubo con tale velocità (vedi § 3) che in un dato istante la

differenza di pressione fra due falde liquide, distanti fra loro anche di molti multipli del diametro, non può essere che assai piccola. L'influenza della rigidità longitudinale del tubo non può quindi mai essere tale da infirmare sensibilmente i risultati che possono dedursi dalle [6].

Le equazioni differenziali [6] non sono tuttavia, nella forma esibita, suscettibili d'integrazione, ma possono rendersi tali osservando che, siccome la velocità v dell'acqua è numericamente trascurabile rispetto alla velocità di propagazione delle pressioni variabili, così negli stessi limiti di approssimazione è lecito trascurare nel primo membro della 1^a [6] il termine che ha v come fattore (1).

Ed infatti, dicendo η tale velocità di propagazione e considerando la falda liquida elementare a cui nel tempuscolo δt si propaga la perturbazione, e cioè la falda di spessore $\delta x = \eta \delta t$, il primo membro della 1^a [1] potrebbe per essa scriversi $\frac{\partial v}{\partial t} \left(1 - \frac{v}{\eta}\right)$, espressione che differisce pochissimo da $\frac{\partial v}{\partial t}$ se v è molto piccolo rispetto a η .

Mentre infatti la velocità v raggiunge al massimo 2 o 3 m. al 1", possiamo invece dimostrare che negli accennati limiti di approssimazione la velocità di propagazione η è uguale alla quantità a definita dalla [5], il cui valore numerico pei tubi metallici si aggira intorno a un migliaio di metri (vedi § 3).

Sopprimendo infatti l'accennato termine, le due equazioni [6] diventano:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= g \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{g}{a^2} \frac{\partial y}{\partial t} \end{aligned} \right\} [7]$$

Ora se noi supponiamo di muoverci lungo il tubo con la velocità a ponendo $x = at + \text{cost.}$

$$\text{onde } \delta x = a \delta t,$$

e trasformiamo la 2^a [7] sostituendo nel primo membro $a \delta t$ in luogo di δx e nel secondo membro δx in luogo di $a \delta t$, essa perde ogni senso proprio e coincide con la 1^a [7].

(1) È d'altronde noto che base alle teorie matematiche delle propagazioni vibratorie è appunto l'ipotesi semplificativa di trascurare nelle equazioni differenziali del movimento i termini della forma $v \frac{\partial v}{\partial s}$, essendo s la variabile lineare.

La condizione $x = at + \text{cost.}$ annulla dunque *apparentemente* ogni fenomeno dipendente dalla elasticità del tubo e del liquido, laonde un osservatore moventesi nel tubo con velocità a constaterrebbe nella falda liquida, in cui ad ogni istante si trova, sempre la identica pressione. Ciò significa che qualsiasi variazione di pressione si propaga nel senso $+x$ con la velocità costante a (1).

La condizione $x = at + \text{cost.}$ deve dunque rendere costante la funzione di a e t che dà in ogni istante e per ciascuna sezione il valore dell'altezza di carico variabile y , e cioè la y deve essere funzione di $at - x$, ovvero, prendendo t come variabile esplicita, funzione di $t - \frac{x}{a}$.

È infatti facile constatare che le [7] sono soddisfatte dalle:

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) \\ v &= v_0 - \frac{g}{a} F\left(t - \frac{x}{a}\right) \end{aligned} \right\} [8]$$

essendo F una funzione da determinarsi mediante le condizioni limiti, la quale rappresenta un'altezza di carico variabile propagantesi nel senso $+x$ con velocità a .

Le [8] non costituiscono però gl'integrali generali delle [7], la cui generalità non soffre ovviamente restrizione alcuna rispetto al senso in cui può propagarsi una perturbazione idrodinamica.

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \\ v &= v_0 - \frac{g}{a} f\left(t + \frac{x}{a}\right) \end{aligned} \right\} [9]$$

(1) Differenziando opportunamente le [7] si ricava:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{ovvero:} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

nella quale forma vengono più spesso esibite le equazioni differenziali caratteristiche dei fenomeni di vibrazione.

La costante a , velocità di propagazione, è una nota funzione, assai semplice, della elasticità e densità del mezzo omogeneo vibrante, mentre nel caso nostro tale funzione, assai più complessa, è definita dalla [5], la quale ci dà, per così dire, la legge della *apparente* elasticità longitudinale della colonna liquida, che risulta dal gioco concomitante delle due elasticità del liquido e del tubo.

Ed infatti è facile constatare che le [7] sono egualmente soddisfatte da funzioni di $t + \frac{x}{a}$, e cioè da:

essendo f una funzione omogenea ad F e che rappresenta un'altezza di carico variabile propagantesi nel senso $-x$ con velocità a .

È indifferente dare alle f nelle [9] un segno esplicito positivo o negativo, ma ho prescelto il segno negativo perchè esso corrisponde alle condizioni del colpo d'ariete tipico (vedi capo III).

Gl'integrali generali delle [7] sono dunque dati da:

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 + F - f \\ v &= v_0 - \frac{g}{a} (F + f) \end{aligned} \right\} [10]$$

nelle quali F ed f indicano funzioni di x e t della forma $F\left(t - \frac{x}{a}\right)$ e $f\left(t + \frac{x}{a}\right)$ rispettivamente, e cioè le [10] altro non sono che le notissime formole generali della propagazione dei fenomeni vibratorii, fra i quali devono perciò classificarsi i fenomeni di moto perturbato dei tubi in pressione. Essi sono dunque caratterizzati dalla coesistenza di due sistemi di pressioni variabili propagantisi lungo il tubo in sensi contrari con la velocità costante a ed attraversantisi senza mutuamente perturbarsi pel principio della sovrapposizione degli effetti, in modo che lo stato idrodinamico di ciascuna falda è in ogni istante determinato dalla risultante algebrica delle loro intensità rispettive.

Tale è il significato intrinseco delle [10], la prima delle quali non è che l'enunciato analitico di una legge fisica assai semplice, suscettibile di dimostrazione sperimentale.

Partendo da tale legge, come dato di esperienza potremmo dunque stabilire senz'altro la 1^a [10], e mediante la sola equazione differenziale delle accelerazioni (semplificata trascurando il termine che ha v come fattore) potremmo passare da essa alla 2^a [10] e quindi a tutte le deduzioni che sono esposte nei capitoli seguenti.

L'importanza specifica delle ricerche precedenti sta dunque soprattutto nella formola [5], la quale ci permette la determinazione razionale del parametro a quando siano note le dimensioni del tubo e la materia di cui esso è costituito.

La presenza di una sola o di entrambe le pressioni variabili, le loro leggi di variazione nel tempo e lungo l'asse del tubo, ed i conseguenti valori della pressione risultante e della velocità dipendono

esclusivamente dal modo con cui il fenomeno è provocato e dalle altre condizioni limiti, da investigare caso per caso.

I casi più tipici ed interessanti per la tecnica formano argomento dei capitoli successivi; ma prima d'iniziare questo studio conviene investigare e illustrare numericamente il parametro a (velocità di propagazione), nel quale si assorbono tutte le costanti fisiche e geometriche che individuano il fenomeno, e cioè diametro e spessore del tubo, moduli di elasticità del tubo e del liquido, i quali non figurano altrimenti nelle formole, inducendo così una straordinaria semplicità nelle loro applicazioni numeriche.

§ 3. **Parametro del moto perturbato.** — Il parametro a definito dalla [5]:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\omega}{g} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{E} \frac{d}{e} \right) \quad [5]$$

rappresenta, come abbiamo dimostrato, la velocità di propagazione delle pressioni variabili.

Esso deve quindi avere le dimensioni di una velocità; ed infatti poichè le dimensioni di ω , g , ε ed E sono rispettivamente FL^{-3} , LT^{-2} , FL^{-2} , le dimensioni di a risultano LT^{-1} .

Se poi noi supponiamo che il tubo sia costituito di materia assolutamente rigida, la [5] ci deve fornire la nota espressione della velocità di propagazione di un'azione vibratoria in un mezzo elastico di compressibilità ε e densità ω : g . Ed infatti ponendo nella [5] $E = \infty$ si ottiene:

$$a = \sqrt{\frac{g}{\omega \varepsilon}}$$

Per l'acqua essendo la velocità a sperimentalmente misurata (propagazione del suono) eguale a circa m 1425 alla temperatura ordinaria, posto $\omega = 1000$, si ha:

$$\varepsilon = 2,07 \cdot 10^8$$

valore che adotterò nei calcoli numerici.

Il termine $\frac{1}{E} \frac{d}{e}$ nel secondo membro della [5] rappresenta dunque l'influenza della elasticità del tubo, e dal valore che esso assume in confronto di $\frac{1}{\varepsilon}$ per le usuali tubazioni idrauliche è facile concludere che l'influenza della compressibilità dell'acqua, ben lungi dall'essere trascurabile, è in alcuni casi preponderante, come, per esempio, nelle tubazioni di ghisa di ordinarie dimensioni.

Pel calcolo numerico della a la [5] può scriversi:

$$a = \frac{9900}{\sqrt{48,3 + k \frac{d}{e}}} \quad [11]$$

essendo: $k = 10^{10} E^{-1}$, e cioè: $k = 0,5$ per ferro e acciaio;

$$\begin{aligned} k &= 1 && \text{per ghisa;} \\ k &= 5 && \text{per piombo.} \end{aligned}$$

Applicando la [11] per alcuni tubi di ghisa tipo normale Terni, si ha:

$d = 0,10$	$e = 0,010$	$a = 1296$
»	$e = 0,014$	$a = 1330$
$d = 0,20$	$e = 0,011$	$a = 1215$
»	$e = 0,019$	$a = 1291$
$d = 0,50$	$e = 0,016$	$a = 1110$
»	$e = 0,040$	$a = 1270$
$d = 1,00$	$e = 0,022$	$a = 1023$
»	$e = 0,080$	$a = 1270$

Per tubi di lamiera di ferro od acciaio calcolati in base ad uno sforzo unitario R e ad un carico H , si ha:

$$\frac{d}{e} = \frac{2R}{\omega H}$$

e ponendo:

$$R = 7 \cdot 10^6 \quad E = 2 \cdot 10^{10}$$

si avrebbe per:

$H = 60$	$a = 798$
$H = 80$	$a = 846$
$H = 100$	$a = 903$
$H = 150$	$a = 1015$
$H = 200$	$a = 1084$

Per tubi di piombo di tipo normale la [11] dà:

$d = 20^{mm}$	$e = 2,5^{mm}$	$a = 1053$
$d = 40$	$e = 5$	$a = 1053$
$d = 60$	$e = 5$	$a = 952$
$d = 80$	$e = 5$	$a = 874$

In conclusione adunque il valore numerico di a per tubi metallici si aggira intorno al valore 1000, essendo piuttosto superiore a questa cifra pei tubi normali in ghisa ed inferiore per tubi di ferro ed acciaio.

Aggiungo infine che per tubi di cautchouc del commercio, di piccolo diametro ($d = 7. e$) ha riscontrato:

$$\begin{array}{rcccl} & E & \text{fra } 2 \cdot 10^5 & e & 6 \cdot 10^5 \\ \text{e quindi:} & a & \text{fra } 17^m & e & 29^m. \end{array}$$

Di analogo ordine di grandezza dovrebbe dunque essere la velocità con cui l'effetto delle pulsazioni cardiache si propaga nei vasi sanguigni ⁽¹⁾.

Non è però inopportuno osservare che per velocità di propagazione così piccole l'approssimazione delle formole deve ritenersi meno soddisfacente, secondo quanto fu osservato per giustificare la semplificazione delle [6] nella forma [7].

CAPO II.

COLPO D'ARIETE SEMPLICE.

§ 4. **Leggi generali del colpo d'ariete semplice.** — Suppongo il tubo di lunghezza indefinita e munito alla sua estremità, che assumo come origine delle x , di una bocca di efflusso comandata da un intercettatore che può variarne la luce, e suppongo altresì che le y indichino altezze di carico effettive e che l'efflusso abbia luogo nell'aria libera, facile essendo modificare le formole in caso diverso.

Indicando, per maggior chiarezza, con Y, V i valori variabili di y e v per $x = 0$, e cioè nella sezione presso l'intercettatore, avremo per l'efflusso in un istante qualunque del fenomeno di moto perturbato:

$$u^2 - V^2 = 2gY$$

e per l'efflusso di regime:

$$u_0^2 - v_0^2 = 2gy_0.$$

Indicherò inoltre con $\psi(t)$ la funzione di t che dà il rapporto variabile (mediante manovra dell'intercettatore) fra la luce di efflusso e la sezione del tubo, e quindi fra le velocità V ed u , cioè:

$$V = u\psi(t)$$

(1) È notevole il fatto che la velocità di propagazione delle azioni nervose è una quantità di questo medesimo ordine di grandezza.

ed in regime:

$$v_0 = u_0 \psi(0)$$

essendo $\pi r^2 \psi(0)$ la luce normale di efflusso.

Avendosi dunque il tubo in condizioni di regime, suppongo che a partire da un dato istante, che assumo come origine di t , si restringa *rapidamente* ⁽¹⁾ la luce di efflusso secondo la legge $\psi(t)$. Effetto di tale manovra sono, come è noto, un brusco aumento di pressione e diminuzione di velocità dell'acqua nel tubo, che si propagano lungo il tubo medesimo con una velocità a di cui la [5] individua il valore. Denominerò questa fenomeno *Colpo d'ariete semplice*.

Poichè per dato qui abbiamo soltanto una perturbazione idrodinamica propagantesi nel senso $+x$, le equazioni generali [10] del moto perturbato si riducono alla forma [8]:

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) \\ v &= v_0 - \frac{g}{a} F\left(t - \frac{x}{a}\right) \end{aligned} \right\} [8]$$

In realtà nessun tubo è di lunghezza indefinita, onde dopo un tempo $l:a$, essendo l la lunghezza del tubo, la perturbazione avrà raggiunta la sezione di origine del tubo (imbocco), provocando una reazione di *contraccolpo*, di cui per ora possiamo affermare soltanto che impiegherà un secondo tempo $l:a$ per rendersi sensibile allo sbocco, ed un tempo $(l-x):a$ per rendersi sensibile nella sezione di ascissa x , per cui, ad ogni modo, durante il tempo $(2l-x):a$, per la sezione di ascissa x , e $2l:a$ per la sezione di sbocco, la limitazione di lunghezza del tubo non ha influenza sul fenomeno, il quale ha luogo come se il tubo fosse illimitato, ed è definito dalle formole [8].

Limitandoci dunque per ora allo studio di questa, che diremo *fase di colpo semplice*, procediamo a investigare le interessanti conseguenze che possono ricavarsi dalle [8].

Eliminando dalle [8] la F :

$$y - y_0 = \frac{a}{g} (v_0 - v) \quad [12]$$

(1) E cioè in un tempo tale che l'influenza delle resistenze passive (perdite di carico per attrito liquido, ecc.) riesca trascurabile rispetto all'entità dei fenomeni di moto perturbato.

relazione, notevole per la sua semplicità, fra la soprapressione $y - y_0$ dovuta al colpo d'ariete e la velocità perduta, e che si verifica in ogni istante della fase di colpo semplice per una sezione qualunque.

Il valore massimo di tale soprapressione si ha ovviamente per l'annullamento di v , e tenuto conto dei limiti di valore numerico del parametro a , tale massimo si aggira fra 8 e 12 atm. per ogni metro di velocità perduta. La rapidità di chiusura dell'intercettatore non vi ha evidentemente influenza purchè si supponga il tubo indefinito, ovvero purchè sia il tempo totale di chiusura τ inferiore a $2l/a$, secondo quanto fu detto innanzi.

Indicheremo in seguito con H la pressione massima dovuta al colpo d'ariete semplice, e cioè:

$$H = y_0 + \frac{av_0}{g} \quad [13]$$

§ 5. **Determinazione della linea di carico pel colpo d'ariete semplice.** — Per la determinazione dei valori di y in qualsiasi sezione di ascissa x nei successivi istanti del fenomeno è necessario conoscere la funzione F , od almeno i suoi valori numerici nei singoli istanti, al che è sufficiente la condizione limite data dalla equazione di efflusso (¹):

$$u^2 - V^2 = 2gY$$

Eliminandone infatti la u mediante la $V = u\psi(t)$ e sostituendovi:

$$\left. \begin{aligned} Y &= y_0 + F(t) \\ V &= v_0 - \frac{g}{a} F(t) \end{aligned} \right\} [8^{\text{bis}}]$$

che si ottengono dalle [8] col porvi $x = 0$, se ne ricava una equazione di 2° grado in $F(t)$; e sostituendo nella espressione di $F(t)$ così ottenuta $t - \frac{x}{a}$ in luogo di t si ottiene la cercata espressione di $F\left(t - \frac{x}{a}\right)$ da sostituire nelle [8], con che il problema è interamente risoluto.

(¹) In tutto questo studio dei fenomeni di moto perturbato io non ho, per maggior chiarezza e semplicità delle formule, creduto opportuno introdurre alcun coefficiente di restringimento della vena fluida e di perdite dovute all'attrito di efflusso, ecc. Simili coefficienti, variabili caso per caso, possono introdursi nelle applicazioni numeriche a ciascun caso singolo, a seconda delle condizioni specifiche, sia come coefficiente di riduzione delle altezze di carico, sia come coefficiente inerente alla $\psi(t)$, ma la loro assenza non infirma alcuna delle conclusioni di queste ricerche.

È però preferibile prendere per incognita la Y (che è anche la quantità tecnicamente più interessante), nella quale ipotesi, con facili trasformazioni, tenuto conto della [13], si ottiene:

$$Y^2 - 2Y(H + \Gamma(t)) + H^2 = 0 \quad [14]$$

essendo:

$$\Gamma(t) = \frac{1}{g} \frac{a^2 \psi^2(t)}{1 - \psi^2(t)}$$

la quale si riduce a $\Gamma(t) = \frac{a^2 \psi^2(t)}{g}$ quando si trascuri V^2 nella equazione di efflusso e si ritenga cioè la velocità di efflusso u dovuta soltanto all'altezza Y .

È facile constatare che nel caso considerato di diminuzione della luce di efflusso, e cioè per $\psi(t) < \psi(0)$, la [14] dà: $Y > y_0$, mentre nel caso inverso, e cioè per $\psi(t) > \psi(0)$, essa darebbe $Y < y_0$ (colpo d'ariete negativo) (vedi § 13).

È anche evidente che se noi poniamo nella [14] y in luogo di Y e $t - \frac{x}{a}$ in luogo di t , essa ci dà in coordinate cartesiane l'equazione della linea di carico del colpo d'ariete semplice in ciascun istante del fenomeno definito dalla serie dei valori di t .

Ma poichè queste diverse linee di carico altro non sono che posizioni successive di una stessa linea moventesi nel senso $+x$ con velocità a , così, per avere la completa sinossi del fenomeno, conviene considerare lo stato idrodinamico nell'istante $t = \tau$ di completa chiusura dell'intercettatore, essendo $\psi(\tau) = 0$.

L'equazione della linea di carico *completa* del colpo d'ariete semplice risulta dunque:

$$y^2 - 2y \left[H + \Gamma \left(\tau - \frac{x}{a} \right) \right] + H^2 = 0 \quad [15]$$

la quale per $x = 0$ dà: $y = H$, e per $x = a\tau$ dà $y = y_0$, come doveva essere.

Se inoltre supponiamo, ciò che è il caso più frequente, che la chiusura abbia luogo con legge lineare:

$$\psi(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) \psi(0) \quad [16]$$

ed osserviamo che, per la [13], può scriversi:

$$2a^2 = \frac{1}{y_0} \left(\frac{H - y_0}{\psi(0)} \right)^2 \quad [17]$$

le [14] e [15] acquistano la forma elegantemente simmetrica:

$$\left. \begin{aligned} \frac{t}{\tau} &= 1 - \frac{H-Y}{H-y_0} \sqrt{\frac{y_0}{Y}} \\ x &= a\tau \frac{H-y}{H-y_0} \sqrt{\frac{y_0}{y}} \end{aligned} \right\} [18]$$

e cioè la linea di carico del colpo d'ariete è in questo caso una curva di 3°, assai facile a tracciare. Dando nelle [18] ad Y e ad y la serie dei valori y_1, y_2, y_3, \dots , compresi fra y_0 e H , otteniamo dalla prima di esse la serie dei tempi t_1, t_2, t_3, \dots , nei quali le rispettive altezze di carico si realizzano alla sezione di sbocco; e dalla seconda le ascisse x_1, x_2, x_3, \dots , corrispondenti alle ordinate y_1, y_2, y_3, \dots della linea di carico completa del colpo d'ariete che ha luogo nell'istante in cui $t = \tau$.

La investigazione di simile linea di carico non ha però molta importanza tecnica se si considera il solo fenomeno del colpo d'ariete semplice, perchè dopo la chiusura dell'intercettatore, e cioè per $t > \tau$, la linea di carico continuando a trasportarsi nel senso $+x$ con velocità a la pressione massima H si propagherebbe a tutte le sezioni del tubo. Essa ha invece qualche importanza per lo studio della prima fase di contraccolpo in un tubo di lunghezza limitata e per le sezioni lontane dallo sbocco, come vedremo nel capo III.

Quando si trascuri V^2 nella equazione di efflusso, e si ritenga cioè: $\Gamma(t) = \frac{a^2 \psi^2(t)}{g}$, è facile ricavare dalla [14]:

$$\psi(t) = \frac{H-Y}{a} \sqrt{\frac{g}{2Y}} \quad [14^{bis}]$$

la quale ci dà modo di calcolare ψ in funzione di Y , e cioè di determinare con quale velocità sia lecito chiudere l'intercettatore nei primi $2t: a$ minuti secondi della manovra, affinchè l'altezza di carico prodotta dal colpo d'ariete non superi un dato valore limite Y .

È infine non privo d'interesse il desumere dalla [15] quale sia la condizione cui deve soddisfare la legge di chiusura dell'intercettatore, e cioè la funzione $\psi(t)$, perchè nell'istante in cui si annulla v si annulli anche $\frac{\partial v}{\partial t}$, condizione che, realizzata, può giovare ad addolcire l'effetto del colpo, togliendogli il carattere di un fenomeno di urto, che esso avrebbe invece nel caso contrario.

Per la equazione differenziale [6] la condizione $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ equivale

alla $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, e poichè nell'istante $t = \tau$ la velocità v si annulla presso l'intercettatore, così differenziando la [15] rispetto ad x e ponendovi:

$$x = 0 \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

otteniamo:

$$\psi(\tau)\psi'(\tau) = 0$$

la quale condizione, essendo $\psi(\tau) = 0$, è in generale soddisfatta purchè $\psi'(\tau)$ abbia un valore finito.

Ciò si verifica, per esempio, nel caso di chiusura dell'intercettatore con legge lineare, ma non si verificherebbe invece se, per

esempio, fosse $\psi(t) \equiv \sqrt{1 - \frac{t}{\tau}}$.

§ 6. **Forza viva del getto fluente.** — Mentre l'altezza di carico dovuta al colpo d'ariete va crescendo da y_0 fino (eventualmente) al massimo H , la velocità u del getto fluente va pure corrispondentemente crescendo, ed è lecito porsi il quesito se questo aumento di u può avere per effetto che la forza viva del getto fluente vada aumentando fino ad un certo limite, malgrado la diminuzione di portata.

La constatazione di questo fatto e lo studio delle sue leggi sono specialmente interessanti per la regolazione delle turbine montate su lunghe condutture; e quindi, tenuto conto della natura specifica del problema tecnico, è affatto legittimo semplificare la equazione di efflusso, ritenendo che la velocità di efflusso sia dovuta esclusivamente all'altezza di carico, e ponendo cioè:

$$u^2 = 2gY$$

la quale, sostituendo dalla [12]:

$$Y = y_0 + \frac{a}{g}(v_0 - V)$$

tenuto conto della [13] e della relazione $V = u\psi(t)$, diventa:

$$u^2 = 2gH - 2au\psi(t) \quad [19]$$

Ora la forza viva dell'elemento liquido $\pi r^2 u \psi(t) dt$ che fluisce in un dato istante è proporzionale alla:

$$u^3 \psi(t) \quad [20]$$

e la condizione che questa sia un massimo conduce, differenziando, alla:

$$3\psi(t) \frac{\partial u}{\partial t} = -u\psi'(t)$$

mentre, differenziando la [19]:

$$[u + a\psi(t)] \frac{\partial u}{\partial t} = -au\psi'(t) \quad [21]$$

dalle quali, dividendo membro a membro e dopo riduzione:

$$u = 2a\psi(t) \quad [22]$$

ed eliminando con questa la $\psi(t)$ dalla [19] si ottiene infine:

$$u = \sqrt{gH} \quad [23]$$

e possiamo concludere: *il massimo della forza viva del getto fluente ha luogo nell'istante in cui l'altezza di carico Y dovuta al colpo di ariete è eguale alla metà dell'altezza massima di carico H .*

Affinchè questo massimo possa effettivamente avere luogo è ovvio che deve essere:

$$H > 2y_0$$

condizione che equivale, per la [13], a:

$$v_0 > \frac{g}{a} y_0$$

e poichè nei casi ordinari si può ritenere che sia all'incirca $g:a=0,01$, è chiaro che la indicata condizione quasi sempre si verifica negli impianti di tubazioni per forza motrice.

Per determinare il momento in cui ha luogo il massimo di forza viva del getto, ovvero la corrispondente apertura percentuale residua dell'intercettatore:

$$\xi = \psi(t) : \psi(0)$$

le [22] e [23] ci danno, eliminando u e tenuto conto della [17]:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{Hy_0}}{H - y_0} \quad [24]$$

mentre il rapporto σ fra la forza viva massima e la forza viva di regime risulta:

$$\sigma = \frac{u^3 \psi(t)}{u_0^3 \psi(0)} = \frac{1}{4} \frac{H}{y_0} \frac{H}{H - y_0} \quad [25]$$

relazioni di qualche interesse tecnico.

Così per un tubo caratterizzato da:

$$y_0 = 100 \quad v_0 = 2 \quad a = 1000$$

si avrebbe:

$$H = 304,1$$

e quindi dalla [24] $\xi = 0,60$, e cioè la forza viva del getto, andrebbe crescendo fino a che sono chiusi $\frac{4}{10}$ della luce normale di efflusso, e raggiungerebbe allora il valore percentuale dato dalla [25] $\sigma = 1,13$.

Una turbina montata su simile tubo e regolata mediante occlusione delle luci del distributore potrebbe quindi trovarsi in mediocri condizioni ai funzionamento.

Benvero è difficile realizzare nei casi ordinari (e salvo per tubi di limitato diametro e grande lunghezza) una velocità di chiusura tale da dare effettivamente luogo a detto massimo prima che si produca la depressione di contraccolpo dovuta alla limitata lunghezza del tubo, perchè la chiusura parziale dovrebbe avvenire in tempo non maggiore di $2l : a$, e così per l'esempio citato in meno di 1" se l è inferiore a 500 *m*.

Tecnicamente, per ciò che concerne la regolazione delle turbine, è forse più utile conoscere la ragione di variazione della forza viva del getto nel primo istante della manovra di chiusura e cioè il valore di:

$$\sigma = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^3 \psi(t)}{u_0^3 \psi(0)} \right)_{t=0}$$

Eseguendo la differenziazione della [25], posto $t = 0$, $u = u_0$, ed eliminandone $\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_0$ mediante la [21], tenuto conto della [17], si ottiene:

$$\sigma' = -2 \frac{H - 2y_0 \psi'(0)}{H + y_0 \psi(0)} \quad [26]$$

in cui il segno negativo del 2° dipende ovviamente dal fatto che $\psi'(0)$ è negativo nella manovra di chiusura. Nel caso dell'esempio citato e nella ipotesi di chiusura con legge lineare secondo la [16] si avrebbe:

$$\frac{\psi'(0)}{\psi(0)} = -\frac{1}{\tau}, \quad \text{e quindi:} \quad \sigma' = \frac{0,51}{\tau}$$

con la quale si possono calcolare le variazioni di forza viva che hanno luogo per piccoli movimenti dell'intercettatore.

Quest'ordine di fenomeni è stato finora forse imperfettamente apprezzato, poichè nelle ricerche analitiche riferentisi alla regolazione delle turbine si parte spesso dall'ipotesi arbitraria ed assolutamente infondata che il carico Y che genera l'efflusso resti costante durante le manovre degli organi regolatori.

CAPO III.

COLPO E CONTRACCOLPO D'ARIETE IN UN TUBO DI LUNGHEZZA l .

§ 7. **Contraccolpo d'ariete.** — I risultati e le formole precedenti relativi a un tubo di lunghezza indefinita valgono per un tubo di lunghezza finita l durante il solo periodo nel quale la pressione variabile si propaga nel senso $+x$ senza essere disturbata dalla reazione che si produce per effetto della limitazione del tubo.

Mi propongo ora lo studio di questo secondo fenomeno, il quale sussegue inevitabilmente al colpo d'ariete semplice o diretto, e ne modifica ed attenua l'intensità nelle fasi che diremo di *contraccolpo*.

Suppongo adunque che il tubo orizzontale di lunghezza l origini da un serbatoio alimentatore a pressione costante y_0 non influenzata sensibilmente dalle perturbazioni idrodinamiche che si producono nella sezione d'imbocco.

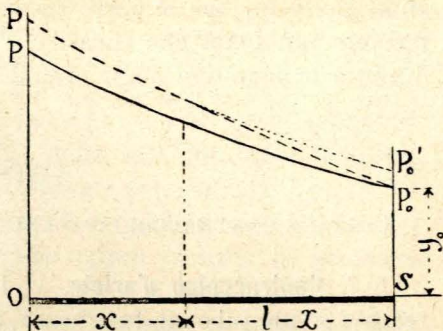
Come già ho osservato nel § 4, le leggi generali di colpo semplice espresse dalle [8] valgono per un simile tubo *ed in qualunque sua sezione* fino all'istante $t = l : a$; ma ciò non si verifica ulteriormente per $t > l : a$, poichè nella sezione d'imbocco invece della y variabile espressa dalla 1^a [8] dobbiamo avere, per qualunque valore di t , e trascurando rispetto a y_0 l'altezza di carico corrispondente alla velocità dell'acqua in detta sezione:

$$y = y_0 = \text{costante.}$$

Le équazioni [8] cessano quindi di rappresentare il fenomeno, ma tale cessazione non ha luogo che progressivamente nel senso $-x$ a partire dall'imbocco.

Per meglio chiarire la cosa, rappresentando PP_0 la linea piezometrica nell'istante in cui $t = l : a$, è chiaro che se il tubo fosse indefinito al di là del serbatoio S , la linea piezometrica diventerebbe nel successivo istante la $P'P'_0$. Ma ciò non è per dato possibile, perchè le linee piezometriche devono passare sempre per P_0 , essendo in S : $y = y_0 = \text{costante}$, onde la nuova linea piezometrica dovrà disporsi intermedia fra le due, come è segnato in figura.

Possiamo concepire il fenomeno come determinato dal fatto che nella sezione d'imbocco l'aumento di pressione $+ \delta y$ dovuto al colpo provoca una eguale depressione di contraccolpo $- \delta y$, la quale si propaga da S verso O con la velocità a , seguita da altre successive nei successivi istanti, per modo che la pressione si mantiene in S eguale a y_0 , mentre lungo il tubo le condizioni idrodinamiche create dal colpo vengono progressivamente modificate.



Il contraccolpo di depressione raggiungerà dunque la sezione di ascissa x dopo il tempo $(l-x) : a$ a partire da $t = l : a$, e cioè dopo il tempo $t = (2l-x) : a$ a partire dall'istante in cui cominciò la manovra dell'intercettatore allo sbocco.

Da detto istante adunque cessano le [8] di rappresentare il fenomeno che, secondo quanto si è detto nel § 1, non può invece essere rappresentato che dalle formole [10], integrali generali delle equazioni differenziali del moto perturbato, e corrispondenti al caso più generale della coesistenza di due azioni vibratorie di senso contrario. Avremo cioè per la sezione di ascissa x a partire da

$$t = \frac{2l-x}{a} :$$

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 + F - f \\ v &= v_0 - \frac{g}{a}(F + f) \end{aligned} \right\} [10]$$

e la determinazione delle F e f deve farsi mediante le condizioni limiti di pressione costante all'imbocco e di efflusso allo sbocco.

§ 8. **Condizione limite di pressione costante all'imbocco.** — Introducendo nella 1^a [10] la condizione che per $x=l$ deve essere: $y = y_0$, qualunque sia il valore di t , si ottiene:

$$f\left(t + \frac{l}{a}\right) = F\left(t - \frac{l}{a}\right) \quad [27]$$

Questa relazione, che lega f ed F per valori variabili delle quantità racchiuse sotto il segno di funzione può legittimamente applicarsi ad una sezione qualunque di ascissa x nel tempo t^* purchè si scelga t^* in modo che sia:

$$\left. \begin{aligned} t + \frac{l}{a} &= t^* + \frac{x}{a} \\ t - \frac{l}{a} &= t^* + \frac{x}{a} - \frac{2l}{a} \end{aligned} \right\} [28]$$

e cioè con la sola condizione limitativa che sia:

$$t^* = t + \frac{l-x}{a}$$

Ora poichè la [27] è applicabile a partire dall'istante in cui il colpo d'ariete raggiunge la sezione d'imbocco, e cioè a partire da $t = l/a$, così l'accennata condizione limitativa diventa:

$$t^* \begin{matrix} \geq \\ > \end{matrix} \frac{2l-x}{a}$$

ossia essa non costituisce in realtà limitazione alcuna, perchè l'accennato limite di t^* corrisponde appunto all'istante in cui il contraccolpo raggiunge la sezione di ascissa x , istante a partire dal quale appunto le [10] cominciano ad essere ivi rappresentative del fenomeno idrodinamico.

Sostituendo adunque le quantità sotto il segno di funzione nelle [27] mediante le [28] e togliendo gli asterischi abbiamo:

$$f\left(t + \frac{x}{a}\right) = F\left(t + \frac{x}{a} - \frac{2l}{a}\right) \quad [29]$$

relazione caratteristica delle fasi di contraccolpo.

Per bene intendere l'intimo significato della [29] scriviamola nella forma:

$$f\left(t + \frac{x}{a}\right) = F\left(\mathfrak{S} - \frac{x}{a}\right)$$

ponendo:

$$\mathfrak{S} = t - 2\frac{l-x}{a}$$

Ora la $F\left(\mathfrak{S} - \frac{x}{a}\right)$ è l'espressione della soprappressione dovuta al colpo d'ariete semplice nell'istante definito da $t = \mathfrak{S}$, e cioè nell'istante che ha preceduto l'istante che si considera di un intervallo $2\frac{l-x}{a}$. Ciò significa che per ogni sezione del tubo la f ha in un determinato istante il valore che la F vi aveva $2\frac{l-x}{a}$ minuti secondi

prima; e poichè questo intervallo è appunto il tempo necessario perchè un'azione vibratoria partendo dalla sezione di ascissa x arrivi fino alla sezione d'imbocco, e ritorni da questa alla sezione considerata percorrendo due volte lo spazio $l-x$ con velocità a , così possiamo concludere che il fenomeno si svolge *come se la linea di carico del colpo d'ariete propagantesi nel senso $+x$ venisse dalla sezione d'imbocco riflessa nel senso $-x$.*

Poiche inoltre la f si presenta di segno contrario alla F nella espressione di y e dello stesso segno nella espressione di v , è chiaro che le due azioni:

a) di pressione propagantesi nel senso $+x$,

b) di depressione propagantesi nel senso $-x$,

hanno effetti contrari sulla variazione di y ed effetti concomitanti sulla variazione di v , ciò che è altresì fisicamente intuitivo.

Mercè la [29] le [10] danno dunque le espressioni di y e v per le fasi di contraccolpo:

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) - F\left(\varepsilon + \frac{x}{a}\right) \\ v &= v_0 - \frac{g}{a} \left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) + F\left(\varepsilon + \frac{x}{a}\right) \right] \end{aligned} \right\} [30]$$

nelle quali figura una sola funzione incognita F coi due valori che essa assume per la sezione di ascissa x in due tempi che differiscono di un intervallo $2(l-x):a$.

È opportuno ricordare che le [30] valgono nei limiti di approssimazione della ipotesi che nella sezione d'imbocco regni la pressione y_0 , e cioè che l'altezza di carico $v^2:2g$ sia ivi trascurabile rispetto a y_0 .

Per detta sezione l'intervallo $2(l-x):a$ è nullo, onde le [30] danno:

$$y = y_0 \quad v = v_0 - 2\frac{g}{a} F\left(t - \frac{l}{a}\right) \quad [30^{\text{bis}}]$$

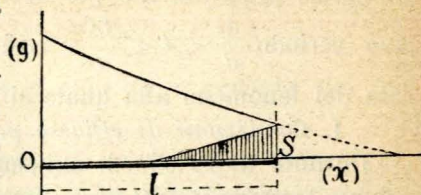
Le [30], come osservai, sono applicabili, per una sezione di ascissa x , a partire da $t = (2l-x):a$; ma pel periodo susseguente definito da:

$$\frac{2l-x}{a} < t < \frac{2l+x}{a}$$

i valori numerici della funzione F che vi figurano sono ancora quelli determinati dalla condizione di colpo d'ariete semplice di cui la

linea di carico viene riflessa dalla sezione d'imbocco, le ordinate della linea riflessa venendo a sottrarsi dalle ordinate della linea diretta, come è indicato nell'annessa figura schematica.

Sostanzialmente il problema consiste nel determinare una serie di valori di $F(t)$ corrispondenti a una serie $t_1 t_2 t_3 \dots$ di valori della variabile t , mediante quali serie (e adatte



interpolazioni) noi possiamo, per semplice somma e differenza, costruire i valori di y e v per qualunque sezione del tubo ed in qualunque istante. Basterà infatti scegliere due valori t_i e t_j che soddisfino le:

$$t_i = t - \frac{x}{a} \qquad t_j = \vartheta + \frac{x}{a}$$

per potere mediante i corrispondenti valori $F(t_i)$ e $F(t_j)$ costruire i valori di y e v per la sezione di ascissa x nell'istante t .

Ora la determinazione dei valori di $F(t)$ per il periodo $0 < t < 2l : a$ può farsi in base alle condizioni di colpo d'ariete semplice mediante la formola [14] e le altre da essa derivate e discusse nel § 5, mentre per $t > 2l : a$ la determinazione può farsene mediante l'equazione di efflusso e con metodo affatto analogo che forma oggetto del paragrafo seguente.

§ 9. **Condizioni limiti allo sbocco.** — Ponendo nelle [30] $x = 0$ si ha:

$$\left. \begin{aligned} Y &= y_0 + F(t) - F\left(t - \frac{2l}{a}\right) \\ V &= v_0 - \frac{g}{a} \left[F(t) + F\left(t - \frac{2l}{a}\right) \right] \end{aligned} \right\} \text{[31]}$$

le quali sono applicabili a partire da $t = 2l : a$. Ora è chiaro che applicando le [31] per il periodo $\frac{2l}{a} < t < \frac{4l}{a}$ i valori della $F\left(t - \frac{2l}{a}\right)$ che vi figurano altro non sono che i valori della $F(t)$ per precedente periodo $0 < t < \frac{2l}{a}$, e questi noi sappiamo calcolare con le formole del § 5 e in base alle leggi di colpo semplice.

La sola incognita nelle [31] è dunque la $F(t)$, la quale può quindi determinarsi con le condizioni di efflusso in modo affatto analogo ed altrettanto semplice di quello seguito nel § 5.

Determinati i valori di $F(t)$ per il periodo $\frac{2l}{a} < t < \frac{4l}{a}$ si ripete l'identico procedimento per determinare i valori di $F(t)$ pel successivo periodo $\frac{4l}{a} < t < \frac{6l}{a}$ e così di seguito per la porzione di durata del fenomeno alla quale si vuole estendere la ricerca (1).

I. *Condizioni di efflusso per $t < \tau$.*

Durante il periodo di chiusura dell'intercettatore l'equazione di efflusso trasformata col procedimento seguito nel § 5 sostituendovi Y e V mediante le [31] ci fornirebbe adunque la equazione di 2° grado per la determinazione di $F(t)$.

È però preferibile anche in questo caso prendere per incognita la Y , ed in tale ipotesi, ponendo per brevità ed in armonia con le notazioni iniziali: $F\left(t - \frac{2l}{a}\right) = f =$ quantità nota, e trascurando nell'equazione di efflusso V^2 rispetto a u^2 in armonia col grado di approssimazione delle [30] si ottiene:

$$Y^2 - 2Y\left(H - 2f + \frac{a^2\psi^2(t)}{g}\right) + (H - 2f)^2 = 0 \quad [32]$$

che dalla [14] non differisce che per la presenza di $2f$ nel 2° e 3° termine. Dalla [32] si può evidentemente ricavare l'equazione della linea di carico che si verifica in un dato istante, ecc., ma non credo opportuno nè utile dilungarmi in questo senso.

II. *Arresto dell'intercettatore.*

Supponendo che l'intercettatore si arresti per $t = t_1$, lasciando aperta la bocca di efflusso si avrà nella [32] dopo l'arresto $\psi = \psi_1 = \text{cost.}$

Il carico variabile Y tende quindi al valore di regime y_0 , ed è facile vedere che la sua legge di variazione dipende esclusivamente dalla serie dei valori che ha avuto la funzione F negli ultimi $(2l:a)''$ della manovra.

Differenziando rispetto a t la [32], in cui si suppongono Y e f funzioni di t , mentre $\psi = \psi_1 = \text{cost.}$, si ottiene facilmente:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{-2u}{a\psi_1 + u} \frac{\partial f}{\partial t} \quad [\alpha]$$

(1) È ovvio che le formole danno pei fenomeni di moto perturbato una durata indefinita, e che la loro legge deve essere in qualche modo assintotica alla legge di regime nei casi in cui l'efflusso permanga (chiusura parziale), mentre deve avere ha carattere di oscillazione nei casi in cui l'efflusso venga soppresso.

È ovvio altresì che tali oscillazioni si estinguono progressivamente per l'influenza delle resistenze passive.

e quindi per le [10]:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{a\psi_1 - u}{a\psi_1 + u} \frac{\partial f}{\partial t} \quad [\beta]$$

relazioni che ci permettono d'investigare le leggi generali del fenomeno.

Ed anzitutto, essendo $a\psi_1$ una quantità costante positiva ed u una quantità variabile, ma sempre positiva, si deduce dalle $[\alpha]$ e $[\beta]$:

1° che $\frac{\partial Y}{\partial t}$ è sempre di segno contrario a $\frac{\partial f}{\partial t}$, e cioè che Y varia in senso contrario ad f , e cioè a $F\left(t - \frac{2l}{a}\right)$;

2° che $\frac{\partial F}{\partial t}$ è sempre più piccolo di $\frac{\partial f}{\partial t}$, e cioè che la differenza $F - f$ va continuamente diminuendo. In altri termini e secondo [10], una serie di valori di Y relativi ad una serie di valori di t che differiscono dell'intervallo costante $2l:a$, è una serie regolarmente decrescente (o crescente se si tratta di colpo negativo) verso il valore di regime y_0 .

Può tuttavia negl'intervalli il carico Y presentare delle oscillazioni ritmiche di ampiezza decrescente (periodo $4l:a$) che lo avvicinano e lo allontanano periodicamente da y_0 . Ciò dipende dal segno del coefficiente di $\frac{\partial f}{\partial t}$ nella $[\beta]$, e cioè dal segno $a\psi_1 - u$, la cui legge dipende dalle leggi di variazione di u , e cioè \sqrt{Y} .

Ora poichè Y tende in definitiva a y_0 , la u tende in definitiva ad u_0 , e dopo un certo tempo il valore di u sarà costantemente più grande o più piccolo di $a\psi_1$, secondo che $a\psi_1 \leq u_0$.

Nel primo caso ($a\psi_1 < u_0$) si deduce dalla $[\beta]$ che la funzione F sarà alternativamente crescente e decrescente con un ritmo il cui periodo è $4l:a$ e l'ampiezza progressivamente decrescente. Il carico Y seguirà quindi analoga legge, tendendo verso il carico di regime y_0 .

Nel secondo caso ($a\psi_1 > u_0$) si deduce invece da $[\beta]$ che la funzione F è in definitiva costantemente crescente (e decrescente), onde Y risulterà semplicemente assintotico a y_0 .

Se però, pur essendo $a\psi_1 > u_0$, si abbia al momento dell'arresto $a\psi_1 < u_1$, in tal caso può avvenire che il carico subisca una, ma non più di una, oscillazione, per divenire poi semplicemente assintotico a y_0 .

La condizione perchè si abbia una prima oscillazione è ovviamente che per $t = t_1 + 2l : a$ si abbia $Y < y_0$, e questa condizione, mediante opportuno uso delle formole, si risolve nella $a\psi_1 < \frac{u_0 + u_1}{2}$.

Ma non può aver luogo una seconda oscillazione, poichè in tal caso per $t = t_1 + 4l : a$ dovremmo avere $Y > y_0$, e questa condizione si risolve analogamente nella $a\psi_1 < \frac{u_0 + u_2}{2}$, essendo u_2 la velocità di efflusso per $t = t_1 + 2l : a$.

Ora tale condizione contraddice al dato che $u_2 < u_0$ mentre $a\psi_1 > u_0$. Dopo la prima oscillazione il fenomeno deve dunque avere andamento semplicemente assintotico allo stato di regime.

Supposto dunque un colpo d'ariete positivo ($u_1 > u_0$), i tre diversi casi che possono presentarsi dopo l'arresto si riassumono:

$$1^\circ \quad a\psi_1 > \frac{u_0 + u_1}{2} > u_0$$

Il carico Y è semplicemente assintotico a y_0 ;

$$2^\circ \quad \frac{u_0 + u_1}{2} > a\psi_1 > u_0$$

il carico Y compie una, ed una sola, oscillazione, per divenire poi semplicemente assintotico a y_0 ;

$$3^\circ \quad \frac{u_0 + u_1}{2} > u_0 > a\psi_1$$

il carico Y è assintotico a y_0 attraverso una serie indefinita di oscillazioni ritmiche decrescenti a periodo $4l : a$.

III. Chiusura completa dell'intercettatore.

Nell'istante $t = \tau$, in cui ha luogo chiusura completa, si ha $\psi(\tau) = 0$, e la [32] si riduce a:

$$Y = H - 2f \tag{33}$$

Ora è facile constatare che la [33] vale indefinitamente per $t > \tau$, poichè essa si deduce direttamente dalle [31], facendosi $V = 0$ ed eliminandone $F(t)$.

Il fenomeno idrodinamico entra allora in una fase di oscillazioni ritmiche di amplitudine costante (salvo l'influenza delle resistenze passive), ed infatti la la 2^a [31] per $x = 0 \quad V = 0$ ci dà:

$$F(t) + F\left(t - \frac{2l}{a}\right) = \frac{av_0}{g}$$

la quale esprime essere F una funzione tale che la somma dei due

valori che essa assume per due valori di t , i quali differiscono di $2l:a$, è una quantità costante.

Se ne conclude quindi che la F è una funzione periodica che riprende gli stessi valori a intervalli di $4l:a$, e dalla 1^a [31] si conclude altresì che Y deve essere una funzione della stessa natura.

A partire da $t = \tau$ adunque la pressione decresce e cresce alternativamente, mentre fra il serbatoio e la condotta l'acqua alternativamente rifluisce e fluisce con una pulsazione ritmica il cui periodo è $4l:a$.

Dicendo Y_1 e f_1 i valori di Y e f all'istante della chiusura, e cioè:

$$f_1 = F\left(\tau - \frac{2l}{a}\right)$$

$$Y_1 = H - 2f_1$$

si ha per la [33^{bis}]:

$$F\left(\tau + \frac{(4n-2)l}{a}\right) = f_1$$

$$F\left(\tau + \frac{4nl}{a}\right) = \frac{av_0}{g} - f_1 = H - y_0 - f_1$$

e quindi la serie dei valori di Y si presenta:

$t = \tau$	$Y = + Y_1$
$t = \tau + \frac{2l}{a}$	$Y = - Y_1 + 2y_0$
$t = \tau + \frac{4l}{a}$	$Y = + Y_1$
$t = \tau + \frac{6l}{a}$	$Y = - Y_1 + 2y_0$
$t = \tau + \frac{8l}{a}$	$Y = + Y_1$
ecc.,	ecc.

La Y oscilla dunque dopo la chiusura fra Y_1 e $2y_0 - Y_1$, e si può dimostrare che questi sono i valori massimo e minimo di Y durante la fase oscillatoria, purchè la chiusura dell'intercettatore negli ultimi $(2l:a)''$ abbia avuto luogo in modo progressivo senza arresti o regressi.

Ed infatti la chiusura dando luogo ad un colpo positivo, sarà $Y_1 > y_0$, e quindi dalla 1^a [31]:

$$F(\tau) > F\left(\tau - \frac{2l}{a}\right)$$

Nella cennata ipotesi di chiusura progressiva la funzione F deve dunque essere continuamente crescente da $t = \tau - 2l : a$ fino a $t = \tau$. Essa deve quindi essere continuamente decrescente nei successivi $(2l : a)''$, e di nuovo crescente in un successivo eguale periodo, e così di seguito; onde a partire dall'istante della chiusura la F oscilla fra il massimo $F(\tau) = H - y_0 - f_1$ ed il minimo $F\left(\tau - \frac{2l}{a}\right) = f_1$.

I massimi e minimi di Y dovendo coincidere coi massimi e minimi di F , saranno rispettivamente Y_1 e $2y_0 - Y_1$, come sopra enunciato.

Osservo ancora che tale legge di variazione ritmica di Y non è in generale simmetrica, dipendendo esclusivamente dalla serie dei valori di F negli ultimi $(2l : a)''$ della manovra, ed osservo infine che qualsiasi ricerca differenziale rispetto ai suoi massimi e minimi sarebbe affatto fuor di luogo, poichè al momento della chiusura si ha discontinuità algebrica della funzione che ci dà il valore di Y .

È infine interessante rilevare che se:

$$H - 2f_1 > 2y_0$$

e cioè se:

$$av_0 > g(y_0 + 2f_1)$$

il minimo $2y_0 - Y_1$ diventerebbe negativo, ciò che significa che in tal caso, dopo la chiusura, la colonna liquida sarebbe respinta dalla contrazione elastica del tubo con tale violenza da prodursi vuoti e discontinuità in vicinanza dell'intercettatore. Questa eventualità non è in molti casi tanto lungi dal verificarsi quanto potrebbe a prima vista sembrare.

Il fenomeno di carico oscillante dopo la chiusura e di flusso e riflusso dell'acqua fra tubo e serbatoio fu sovente osservato e misurato, ed i dati che sono a mia notizia soddisfano alla legge del ritmo con periodo $4l : a$.

Prima di procedere a ulteriori investigazioni teoriche credo utile illustrare le formole e risultati finora esposti con un esempio numerico.

Esempio numerico. — Abbiasi un tubo caratterizzato da:

$$l = 400 \quad a = 1000 \quad y_0 = 90 \quad v_0 = 2,50$$

e supponiamo che l'intercettatore allo sbocco venga chiuso con legge lineare nel tempo $\tau = 3''$. La durata della fase di colpo semplice alla sezione di sbocco è dunque $2l : a = 0,8''$ e si ha inoltre:

$$H = 345,10 \quad \psi(0) = \frac{v_0}{u_0} = \frac{2,50}{42,02} = 0,0595$$

$$\psi(t) = 0,0595 \left(1 - \frac{t}{3}\right) \quad \Gamma(t) = \frac{a^2 \psi^2(t)}{g} = 40,17 (3 - t)^2$$

La [14] ci dà dunque per la fase di colpo semplice (durata 0,8"):

$$Y^2 - 2Y(345,1 + 40,17(3 - t)^2) + 119094 = 0$$

e la [32] per le successive fasi di contraccollo:

$$Y^2 - 2Y(345,1 - 2f + 40,17(3 - t)^2) + (345,1 - 2f)^2 = 0$$

nella quale i valori di f relativi a un valore qualunque di t sono i valori di $F(t)$ calcolati per $t - 0,8''$ mediante i valori delle Y .

Infine, a partire da $t = 3''$, la [33] ci dà per la determinazione di Y :

$$Y = 345,1 - 2f$$

Si sono così calcolati per la durata di 5,4" a intervalli di 0,2" i valori di $F(t)$, Y , V , di y e v per la sezione centrale del tubo, e di v per la sezione d'imbocco:

$t =$	Valori di $F(t)$	Sezione di sbocco		Sezione centrale		Sezione di imbocco
		V	Y	v	y	v
0"	0	2,50	90	2,50	90	2,50
0,2	7,41	2,427	97,41	2,50	90	2,50
0,4	15,61	2,347	105,61	2,427	97,41	2,50
0,6	24,78	2,257	114,78	2,347	105,61	2,355
0,8	34,81	2,159	124,81	2,184	107,37	2,194
1"	45,11	1,985	128,70	2,006	109,20	2,014
1,2	55,89	1,799	130,28	1,815	110,33	1,818
1,4	66,02	1,610	131,24	1,611	111,08	1,616
1,6	76,34	1,411	131,53	1,411	110,91	1,405
1,8	86,64	1,209	131,53	1,204	110,45	1,206
2"	96,70	1,004	130,81	1,004	110,62	1,004
2,2	107,01	0,804	130,99	0,804	110,36	0,802
2,4	117,23	0,602	130,89	0,602	110,37	0,602
2,6	127,45	0,401	130,81	0,404	110,53	0,403
2,8	137,85	0,202	131,15	0,202	110,44	0,202
3"	148,09	0	131,08	0	110,62	0
3,2	137,87	—	110,64	- 0,202	110,64	- 0,202
3,4	127,65	—	90,20	- 0,202	90,02	- 0,403
3,6	117,25	—	69,40	- 0,202	69,56	- 0,202
3,8	107,01	—	48,92	0	69,38	0
4"	117,23	—	69,38	+ 0,202	69,36	+ 0,202
4,2	127,45	—	89,80	+ 0,202	89,98	+ 0,403
4,4	137,85	—	110,60	+ 0,202	110,44	+ 0,202
4,6	148,09	—	131,08	0	110,62	0
4,8	137,87	—	110,64	- 0,202	110,64	- 0,202
5"	127,65	—	90,20	- 0,202	90,02	- 0,403
5,2	117,25	—	69,40	- 0,202	69,56	- 0,202
5,4	107,01	—	48,92	0	69,38	0
	ecc.	—	ecc.	ecc.	ecc.	ecc.

Da questa tabella risulta chiaramente il fenomeno di pulsazione oscillatoria a periodo $4l: a = 1'',6$ che sussegue alla chiusura completa. Per effetto di esso l'altezza di carico allo sbocco oscilla fra $Y_1 = 131,08$ e $2y_0 - Y_1 = 48,92$ e la velocità all'imbocco fra $+0,403$ e $-0,403$, mentre nella sezione centrale altezza di carico e velocità hanno valori intermedi fra quei limiti.

Se invece la chiusura dell'intercettatore non fosse stata completa avremmo potuto avere dopo l'arresto l'oscillazione ritmica decrescente ed assintotica al nuovo stato di regime, purchè l'intercettatore avesse chiuso almeno $\frac{1}{3}$ della luce di efflusso, essendo in tal caso $a\psi_1 < u_0$.

Così supponendo nel nostro *Esempio* che l'intercettatore si arresti per $t = 2''$, e cioè dopo aver chiuso $\frac{2}{3}$ della luce di efflusso, la serie successiva dei valori di Y si presenterebbe:

$t = 2''$	$Y = 130,81$		
2,2	116,37	$t = 3,8$	$Y = 93,46$
2,4	101,93	4''	91,55
2,6	87,82	2,2	89,77
2,8	74,39	4,4	88,04
3''	80,10	4,6	88,75
3,2	85,62	4,8	89,45
3,4	90,64	5''	90,07
3,6	95,38	5,2	90,71

ecc., ecc.

dove è chiaro che la serie tende in modo oscillatoriamente assintotico all'altezza di regime $y_0 = 90$, mentre i minimi che hanno luogo per $t = 2'',8$ e $t = 4'',4$ ne individuano il periodo $4l: a = 1'',6$.

Ma assai più importanti sono le osservazioni che ci suggerisce la tabella a pagina precedente relativamente al periodo che intercede fra l'inizio del contraccolpo e la chiusura completa dell'intercettatore.

Ed infatti dopo circa $1''$ e fino a $t = \tau = 3''$ si verifica che:

a) la pressione allo sbocco si mantiene sensibilmente costante in circa $m = 131$;

b) la soprappressione nella sezione centrale è la metà di quella della sezione di sbocco in modo che la pressione parrebbe variare linearmente con x , mantenendosi costante in ciascuna sezione;

c) la velocità della colonna liquida è eguale nelle tre sezioni e quindi anche in ogni altra sezione del tubo.

In conclusione sembrerebbero con sensibile approssimazione realizzate le condizioni:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

È prezzo dell'opera investigare più da vicino le condizioni per cui possono realizzarsi le accennate proprietà.

§ 10. **Condizione di pressione costante durante le fasi di contraccolpo.** — Pel teorema di Taylor possiamo evidentemente scrivere:

$$\left. \begin{aligned} F\left(t - \frac{x}{a}\right) &= F(t) - \frac{x}{a} F'(t) + \Sigma_1 \\ F\left(\vartheta + \frac{x}{a}\right) &= F(t) - \frac{2l-x}{a} F'(t) + \Sigma_2 \end{aligned} \right\} [34]$$

nelle quali Σ_1 e Σ_2 rappresentano termini contenenti derivate di $F(t)$ superiori alla prima.

Se quindi noi supponiamo che Σ_1 e Σ_2 siano nulle per essere nulle simili derivate, sostituendo le [34] nelle espressioni generali [30] delle y e v otteniamo:

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 + 2 \frac{l-x}{a} F'(t) \\ v &= v_0 - \frac{2g}{a} \left(F(t) + \frac{l}{a} F'(t) \right) \end{aligned} \right\} [35]$$

espressioni le quali realizzano le proprietà riscontrate nell'esempio numerico, e cioè che la v è indipendente da x e quindi eguale nelle diverse sezioni, mentre la y varia linearmente lungo il tubo mantenendosi costante in ciascuna sezione per essere la $F'(t) = \text{cost.}$

Ora si può dimostrare che la legge lineare di chiusura dell'intercettatore realizza appunto la condizione $F''(t) = F'''(t) = \dots = 0$ negli stessi limiti di approssimazione entro i quali valgono le [30] e [35], e cioè trascurando l'altezza di carico corrispondente alla velocità dell'acqua nel tubo rispetto all'altezza di carico che regna nel tubo stesso.

Ponendo infatti nelle [35] $x=0$ e sostituendo Y e V in luogo di y e v è chiaro che la condizione $F'(t) = \text{cost.}$ equivale alle:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

Differenziando dunque tre volte con queste condizioni l'equazione di efflusso approssimata:

$$u^2 = \frac{V^2}{\psi^2(t)} = 2gY$$

si giunge alla:

$$3\psi'(t)\psi''(t) + \psi(t)\psi'''(t) = 0$$

la quale è sempre soddisfatta se $\psi(t)$ è un funzione lineare, per essere:

$$\psi''(t) = \psi'''(t) = 0$$

Se dunque, come d'ordinario ha luogo, la chiusura dell'inteccatore si effettua in modo sensibilmente uniforme, la fase di contraccolpo diventa, per così dire, una *fase di regime* del moto perturbato, l'altezza di carico distribuita linearmente lungo il tubo mantenendosi in ogni sezione costante fino al momento della chiusura completa.

Il valore Y_1 che ha tale altezza di carico presso lo sbocco è dunque praticamente il *valore massimo della pressione prodotta dal colpo d'ariete in un tubo di lunghezza limitata*, ed è l'incognita tecnicamente di maggior importanza pel problema che stiamo trattando.

Tale pressione massima può determinarsi direttamente e senza passare attraverso la trafila di una serie di equazioni di 2° grado in modo assai semplice, come vado a dimostrare.

§ 11. **Calcolo diretto della pressione massima dovuta al colpo d'ariete in un tubo limitato.** — Differenziando una volta l'equazione di efflusso:

$$u^2 = \frac{V^2}{\psi^2(t)} = 2gY$$

e posto, per l'ipotesi di legge lineare, $\frac{\partial Y}{\partial t} = 0$, si ottiene:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \psi'(t)\sqrt{2gY}$$

e differenziando la 2^a [35] per la sezione $x = 0$ in cui $v = V$, si ha:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{2g}{a} F'(t)$$

ed eguagliando i secondi membri di queste due equazioni si ricava una espressione di $F'(t)$ che sostituita nella 1^a [35] ci fornisce una equazione di 2° grado in Y per la determinazione del richiesto valore massimo di Y_1 .

Ora ricordando che per la manovra con legge lineare:

$$\psi(t) = \pm \frac{v_0}{\tau \sqrt{2g y_0}}$$

e posto inoltre: $\frac{Y_1}{y_0} = z$, tale equazione risulta:

$$z^2 - 2z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{lv_0}{g\tau y_0} \right)^2 \right] + 1 = 0 \quad [36]$$

e costituisce senza dubbio il risultato praticamente più importante di tutte queste ricerche ⁽¹⁾, di cui l'obbietto principale è appunto la determinazione della pressione massima dovuta al colpo d'ariete in tubi di lunghezza limitata quali in pratica si presentano.

⁽¹⁾ Nell'opera del Rateau (*Traité des turbo-machines*, Dunod, 1900) s'incontra una formola per la determinazione della pressione massima dovuta al colpo d'ariete, desunta con investigazioni approssimate, che può rappresentare, entro certi limiti dei dati numerici del problema, una soluzione approssimata della [36]. Si deduce infatti dalla sua formola [149], a pag. 245, che, adottando le mie notazioni e posto per brevità:

$$\frac{lv_0}{g\tau y_0} = n$$

tale pressione massima sarebbe data da:

$$z = \frac{2+n}{2-n}$$

e questa espressione può con una certa approssimazione rappresentare una soluzione della [36] quando $\frac{n^2}{2}$ sia abbastanza piccolo rispetto all'unità.

Così nel caso del nostro esempio numerico la formola corrisponde con sufficiente approssimazione e darebbe $z = 1,466$.

Ma se fosse n poco diverso dall'unità, e così se nel nostro esempio numerico avessimo:

$$\begin{aligned} y_0 &= 60 \text{ in luogo di } 90 \\ l &= 700 \text{ in luogo di } 400 \end{aligned}$$

si avrebbe:

$$n = 0,992$$

onde dalla [36]:

$$z^2 - 2,984 z + 1 = 0$$

e quindi:

$$z = 2,107$$

mentre dalla formola approssimata del Rateau si avrebbe $z = 2,967$, con errore non trascurabile.

È anche ovvio che le due radici della [36] sono l'una maggiore e l'altra minore dell'unità, e che dovrà adottarsi la prima quando si tratti di una manovra di chiusura e la seconda quando si tratti di una manovra di apertura, nel qual caso anzi che soprappressione si ha depressione e quindi: $Y < y_0$ (vedi § 13).

Coi dati dell'esempio numerico la [36] dà:

$$z^2 - 2,143 z + 1 = 0$$

da cui:

$$z = 1,456 \quad \text{e} \quad Y_1 = 131,04$$

cifra che corrisponde esattamente ai valori che sono dati dalla precedente tabella fra $t = 1''$ e $t = 3''$.

È degno di nota il fatto che la [36] è indipendente da a , e tale fatto ripete la sua intrinseca origine da ciò che la deformazione elastica sia del tubo che del liquido non entra ne deve entrare in giuoco finchè la pressione si mantiene costante in ciascuna sezione, come ha luogo per la ipotesi implicita nelle deduzioni che ci hanno condotto alla [36].

Per l'uso della [36] non sarà inopportuno osservare:

1° che la condizione necessaria affinchè si verifichi l'altezza di carico massima Y_1 desunta dalla [36] è che la manovra dell'intercettatore duri almeno fino a che il fenomeno idrodinamico entra in piena fase di contraccolpo e cioè per un tempo maggiore di $2l : a$;

2° che in tal caso il valore numerico τ da introdurre nella [36] è il tempo che sarebbe necessario alla chiusura completa se l'intercettatore continuasse a muoversi con la stessa velocità.

Ed a questo proposito è bene chiarire una obiezione che potrebbe presentarsi alla mente del lettore. Si può infatti obiettare che per $t = 2l : a$ la [36] non coincide con la [14], e quindi applicandola nei primi istanti della fase di contraccolpo si avrebbe discontinuità nei valori di Y . Questa obiezione è fondata. Ed infatti lo stato di regime del colpo di ariete supposto dalla [36], cui corrisponde un carico lineare ed egual velocità delle diverse falde è uno stato che non esiste nell'istante $t = 2l : a$. Poichè in questo istante lo stato idrodinamico è determinato dalla serie dei valori di F forniti dalla [14], e secondo i §§ 5 e 7 risulta anzi che nella ipotesi di manovra con legge lineare la linea di carico per $t = 2l : a$ è data dalla differenza fra le ordinate di due tratti di una stessa curva di 3°, di cui la seconda metà è ribaltata sulla prima per effetto della reazione del serbatoio (vedi la fig. a pag. 162).

Ma a partire da $t = 2l : a$ lo stato idrodinamico tende rapidamente allo stato di regime supposto da [36], ed a questa transizione alludevo dicendo che per l'impiego di [36] bisogna essere entrati *in piena fase* di contraccollo.

I diversi esempi numerici ci precisano meglio questa frase un po' vaga, e così nella tabella a pag. 168 per $t = 2l : a = 0''{,}8$ si ha ancora qualche differenza di velocità fra le diverse falde e il carico è un po' minore di 131, mentre per $t = 1''$ le condizioni idrodinamiche corrispondono alla [36].

Non si può però spingere molto innanzi l'analisi di simili risultati numerici, perchè non dobbiamo dimenticare che le nostre formule sono inficiate di una inesattezza congenita derivante dall'aver trascurato l'altezza di carico corrispondente a v nella sezione d'imbocco; nei limiti ordinari le differenze sono abbastanza piccole, ma non sempre del tutto trascurabili. E così se nel citato esempio numerico si supponesse di chiudere l'intercettatore in tempo $t = 2l : a = 0''{,}8$ l'equazione [14] ci darebbe $Y = H = 345,1$, mentre la [36] darebbe $Y = 336,7$. Tali differenze sarebbero più sensibili, quando si trattasse di un tubo in cui l'acqua fluisce a grande velocità e sotto piccolo carico.

Un'applicazione interessante della [36] dal punto di vista tecnico consiste nella determinazione della velocità di chiusura, e cioè di τ , in modo che i fenomeni idrodinamici causati dalla manovra soddisfino a certe condizioni. Si possono, per esempio, proporre e risolvere i problemi:

A) *Determinare τ in modo che il carico massimo Y_1 abbia un dato valore.*

Si ottiene all'uopo facilmente dalla [36]:

$$\tau = \frac{lv_0}{gy_0} \cdot \frac{\sqrt{z}}{z-1} \quad \text{essendo } z = Y_1 : y_0$$

B) *Nell'ipotesi di chiusura completa determinare τ in modo che il carico minimo di depressione $2y_0 - Y_1$ nella fase oscillatoria che sussegue la chiusura non diventi negativo.*

La condizione $2y_0 - Y_1 > 0$ può scriversi $z < 2$, e questa combinata con la [36] ci conduce alla:

$$\tau > \frac{lv_0}{gy_0} \sqrt{2}$$

ovvero numericamente:

$$\tau > 0,144 \frac{lv_0}{y_0}$$

Così pel nostro esempio numerico essendo: $l = 400$ $v_0 = 2.50$
 $y_0 = 90$, la formola precedente darebbe $\tau = > 1''.6$.

La semplicità delle formole che esprimono le leggi di simili fenomeni, in apparenza assai complessi, è certamente degna di nota.

Osservazioni ai capi II e III.

Nei due capi precedenti io ho analizzato le leggi del colpo di ariete *tipico*, il quale si svolge per fasi distinte e successive, che possiamo riassumere:

I. *Fase di colpo semplice o diretto durante il movimento dell'intercettatore.* — Tale fase è caratterizzata dalla presenza di una sola azione vibratoria propagantesi dall'intercettatore nel senso $+x$ e la sua durata per la sezione di ascissa x è eguale a $(2l - x) : a$.

II. *Fase di contraccolpo durante il movimento dell'intercettatore.* — Tale fase, di cui la durata dipende dalla manovra, è caratterizzata dalla coesistenza di due azioni vibratorie propagantesi in sensi contrari $\pm x$, e prodotte l'una dal movimento dell'intercettatore e l'altra dalla reazione del serbatoio a pressione costante. Se la manovra dell'intercettatore si fa con moto uniforme, questa fase si svolge come una *fase di regime* del moto perturbato, a carico costante in ciascuna sezione ed egual velocità lungo tutta la colonna liquida.

III. *Fasi di contraccolpo dopo l'arresto dell'intercettatore*, durante le quali le due azioni vibratorie possono generare delle oscillazioni ritmiche del carico e della velocità, di cui il periodo è $4l : a$. Tali oscillazioni hanno necessariamente luogo se $a\psi_1 < u_0$ e sono di ampiezza decrescente se ψ_1 è diverso da 0, e cioè se l'intercettatore resta aperto, mentre sono di ampiezza costante (salvo l'effetto delle resistenze passive) nel caso di chiusura completa. Se invece $a\psi_1 > u_0$ il fenomeno assume un andamento semplicemente assintotico al nuovo stato di regime

Ora è evidente che se la chiusura completa dell'intercettatore avesse luogo in tempo $\tau < 2l : a$ la fase II sarebbe soppressa su una lunghezza di tubo eguale a $l - \frac{1}{2}a\tau$, a partire dall'intercettatore, ed in ciascuna sezione di essa il carico raggiungerebbe il valore massimo H nell'istante determinato da $t = \tau + \frac{x}{a}$.

Si avrebbe dunque per quel tratto di tubo il fenomeno di pausa a carico costante H durante una parte della fase di colpo semplice eguale a $2(l - x) : a - \tau$, ed a tale pausa seguirebbe la fase di con-

traccolpo oscillatorio, variando il carico fra H e $2y_0 - H$ con intervalli di pausa a pressione costante.

La depressione massima sarà dunque negativa se $H > 2y_0$, e cioè se si verifica la condizione medesima che abbiamo trovato nel § 6, perchè la forza viva del getto fluente vada aumentando nel primo periodo della manovra.

Abbiamo allora osservato che tale condizione è in generale soddisfatta nelle installazioni di tubazione per forza motrice, ma sarebbe difficile, per non dire impossibile, che in simili installazioni si eseguano manovre di chiusura completa in tempo minore di $2l : a$.

CAPO IV.

APPLICAZIONI DIVERSE.

§ 12. **Colpo d'ariete in un tubo inclinato.** — Le tubazioni per forza motrice sono nella maggior parte dei casi inclinate e disposte per convogliare acqua da un serbatoio superiore a pelo libero ai distributori di turbine situate all'estremo inferiore; e parimenti sono inclinati i sifoni di attraversamento nelle condotture di alimentazione.

Interessa adunque dal punto di vista tecnico generalizzare al caso del tubo inclinato le formole trovate pel caso del tubo orizzontale.

Suppongo rettilineo l'asse del tubo, ed indicando con α l'angolo che esso forma con la orizzontale, assumo l'estremo inferiore come origine delle x .

Ed anzitutto è facile persuadersi che le equazioni differenziali [7], pel modo con cui furono ottenute, sono identicamente applicabili al caso, purchè la prima di esse venga completata coll'aggiunta di un termine, di ovvia determinazione, rappresentante il lavoro della gravità. Si ha cioè:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= g \frac{\partial y}{\partial x} + g \sin \alpha \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{g}{a^2} \frac{\partial y}{\partial t} \end{aligned} \right\} [37]$$

Per l'integrazione delle [37] è altresì necessario supporre che il parametro a sia costante, ciò che di fatto in generale non è, perchè in un tubo inclinato lo spessore e si fa decrescente dal basso verso

l'alto; ma tenuto conto dei ristretti limiti entro i quali varia ⁽¹⁾ generalmente il parametro α , si potrà con sufficiente approssimazione assumere un valore medio.

Premessa questa osservazione, gl'integrali generali delle [37] risultano espressi dalle:

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 - x \sin \alpha + F - f \\ v &= v_0 - \frac{g}{\alpha} (F + f) \end{aligned} \right\} [38]$$

che non differiscono dalle [10] se non per l'aggiunta del termine $-x \sin \alpha$ nella espressione di y .

Dalle [38] si può senz'altro concludere che per la fase di colpo semplice ($f=0$) tutte le formole e leggi idrodinamiche dedotte pel tubo orizzontale valgono anche pel tubo inclinato. Ed infatti sia i procedimenti analitici per la determinazione di Y e $F(t)$, sia le indagini sulla forza viva del getto fluente contemplan le condizioni idrodinamiche allo sbocco, e cioè implicano la condizione $x=0$ che riduce le formole dell'un caso identiche a quelle dell'altro. Sola differenza si ha dunque nella linea di carico lungo il tubo, le cui ordinate, nel caso del tubo inclinato, sono diminuite di $x \sin \alpha$.

Per le fasi di contraccolpo la condizione di pressione costante all'imbocco (cioè per $x=l$) diventa in questo caso $y=0$, e tenuto conto che $l \sin \alpha = y_0$, la 1^a [38] ci conduce identicamente alla [29]. Come per la fase di colpo semplice adunque anche per le fasi di contraccolpo sono identicamente applicabili al caso del tubo inclinato tutte le deduzioni e formole del capo III relative al tubo orizzontale, con la solita riserva che le ordinate della linea di carico lungo il tubo devono diminuirsi di $x \sin \alpha$.

È superfluo rilevare il facile graficismo cui dà luogo quest'ultima condizione.

§ 13. **Colpo d'ariete negativo.** — Si designa col nome di colpo d'ariete negativo il fenomeno di depressione o caduta di carico che si genera e si propaga lungo il tubo per effetto di una manovra dell'intercettatore che produca aumento anzichè diminuzione della luce di efflusso.

Caso tipico ne è l'apertura di un intercettatore per la messa in funzione di un tubo, e caso estremo la rottura del tubo. La generalità delle leggi del moto perturbato esposte nei capi precedenti ci

(¹) Vedasi il § 3.

permette di risolvere questa classe di problemi senza istituire nuove indagini teoriche, ma solo con una retta interpretazione e applicazione delle formole già ottenute e discusse.

Espongo a titolo di esempio del metodo le calcolazioni e formole relative:

A) All'apertura di un intercettatore per la messa in funzione di un tubo;

B) Alla manovra di un intercettatore situato in una sezione intermedia qualsiasi di un tubo;

illustrando altresì il caso A) con qualche esempio numerico.

A) *Messa in funzione di un tubo.*

Mantenendo tutte le notazioni e simboli adottati, le condizioni da introdurre nelle formole sono evidentemente:

$$\psi(0) = 0 \quad v_0 = 0 \quad \text{e quindi: } H = y_0$$

assumendo per $t = 0$ l'istante in cui comincia la manovra di apertura.

L'equazione [14] ci dà quindi per la determinazione di Y durante la fase di colpo semplice ($t < 2l : a$):

$$Y^2 - 2Y \left(y_0 + \frac{a^2 \psi^2}{g} \right) + y_0^2 = 0 \quad [39]$$

che può anche scriversi:

$$a\psi = (y_0 - Y) \sqrt{\frac{g}{2Y}} \quad [39^{\text{bis}}]$$

mentre la [32] ci dà per le fasi di contraccollo:

$$Y^2 - 2Y \left(y_0 - 2f + \frac{a^2 \psi^2}{g} \right) + (y_0 - 2f)^2 = 0 \quad [40]$$

nelle quali ho scritto per semplicità ψ in luogo di $\psi(t)$.

Se l'apertura ha luogo con velocità uniforme si ha:

$$\psi = \psi_1 \frac{t}{\tau} = \frac{v_1}{\sqrt{2gy_0}} \frac{t}{\tau} \quad [41]$$

essendo ψ_1 il valore di ψ al termine della manovra e v_1 la velocità di regime corrispondente.

In tale ipotesi di legge lineare e se la manovra abbia durata $> 2l : a$, possiamo, ripetendo i ragionamenti del § 11, concludere che per $t > 2l : a$ e fino al momento dell'arresto, l'altezza di carico

rimane sensibilmente costante in ciascuna sezione ed il suo valore allo sbocco Y_1 è dato dalla radice < 1 della equazione identica alla [36]:

$$z^2 - 2z \left(1 + \frac{1}{2} \left[\frac{lv_1}{g^\tau y_0} \right]^2 \right) + 1 = 0 \quad [42]$$

essendo $z = Y_1 : y_0$.

Se inoltre vogliasi determinare la durata τ della manovra in modo che la caduta di carico al termine della fase di colpo semplice (che è evidentemente la caduta massima che ha luogo durante la manovra) non oltrepassi un certo limite Y_s , sarà per le [39^{bis}] e [41], postovi $t = 2l : a$:

$$\tau = \frac{lv_1}{gy_0} \frac{2\sqrt{s}}{1-s} \quad [43]$$

essendo $s = Y_s : y_0$.

Se invece l'arresto dell'intercettatore abbia luogo prima della fine della fase di colpo semplice ($\tau < 2l : a$) il carico allo sbocco si mantiene costante per resto della fase ed eguale al valore Y_1 dato dalla [39] facendovi $\psi = \psi_1$.

A partire dunque dall'arresto dell'intercettatore nel caso in cui $\tau > 2l : a$, ovvero dal principio della fase di contraccolpo nel caso in cui $\tau < 2l : a$, il carico comincia a risalire tendendo verso il valore y_0 , mentre le condizioni idrodinamiche lungo il tubo tendono al nuovo stato di regime.

La legge di questa fase è data dalla [40], e per considerazioni analoghe a quelle esposte nel § 9 possiamo enunciare:

1° Se $a\psi_1 > u_0$ il fenomeno idrodinamico ha un andamento semplicemente assintotico al nuovo stato di regime (salvo l'eventualità di una singola oscillazione iniziale);

2° Se $a\psi_1 < u_0$ il fenomeno assume invece un andamento oscillatoriamente assintotico al nuovo stato di regime, e si verificano in tal caso dei contraccolpi positivi d'intensità progressivamente decrescente a periodi di $4l : a$.

La condizione $a\psi_1 \geq u_0$ essendo $\psi_1 u_0 = v_1$, si riduce facilmente a:

$$av_1 \geq 2gy_0$$

e numericamente circa:

$$v_1 \geq 0,02 \cdot y_0$$

laonde, dati i limiti numerici dei valori di v_1 e y_0 , entrambi i casi possono praticamente verificarsi.

Nel secondo caso, e cioè per $a\psi_1 < u_0$, il contraccolpo positivo più forte è il primo della serie ed ha luogo $(2l:a)''$ dopo l'arresto dell'intercettatore (o dopo la fase di colpo semplice se $\tau < 2l:a$), ed è interessante ricercare quale sia il valore di ψ_1 per cui tale contraccolpo ha l'intensità massima.

Poichè nell'istante dell'arresto dell'intercettatore si ha $Y_1 < y_0$ è chiaro che il valore da sostituire per f nella [40] è una quantità negativa, onde il carico di contraccolpo Y per un dato valore di ψ_1 risulterà dalla [40] tanto maggiore quanto maggiore è $-f$, e cioè quanto più forte è stata la caduta di carico all'istante dell'arresto.

Prima condizione pel massimo cercato è dunque che la manovra di apertura cada tutta in fase di colpo semplice, e sia cioè:

$$\tau \leq 2l:a.$$

Detto quindi Y_s il carico alla fine della fase di colpo semplice, sarà per la [39^{bis}]:

$$a\psi_1 = (y_0 - Y_s) \sqrt{\frac{g}{2Y_s}}$$

mentre per $t = 4l:a$ sarà:

$$f = Y_s - y_0$$

onde sostituendo tali valori nella [40] e ponendo inoltre:

$$Y_s : y_0 = s \qquad Y : y_0 = 2$$

si ottiene per determinare il carico di contraccolpo nell'istante $t = 4l:a$:

$$z^2 - 2z \left(3 - 2s + \frac{(1-s)^2}{2s} \right) + (3-2s)^2 = 0 \quad [44]$$

equazione che esprime la legge con cui la intensità del contraccolpo positivo dipende dalla caduta di carico alla fine della fase di colpo semplice.

Differenziando [44] rispetto a s con la condizione $\frac{\partial z}{\partial s} = 0$ si ottiene per la determinazione del valore di s che rende massimo z l'equazione di 3° grado:

$$12 \cdot s^3 - 20 \cdot s^2 + 2 \cdot s + 3 = 0$$

la quale ha la sola radice reale $s = 0,555$. Onde [44] dà per z_{max} :

$$z_{max} = 1.228$$

e [39^{bis}] pel corrispondente valore di ψ_1 :

$$a\psi_1 = 0,3 u_0$$

Possiamo dunque enunciare:

Se nella messa in funzione di un tubo si apre l'intercettatore di $\psi_1 = 0,03 u_0$: a in tempo $\tau \ll 2l$: a e quindi lo si lascia immobile ha luogo, per $t = 4l$: a, un contraccolpo positivo, pel quale si verifica il carico $Y = 1,228 y_0$ e tale carico è il massimo che può ottenersi con simile manovra.

Più che la determinazione esatta di tale massimo ha però importanza l'osservazione che finchè s è compreso fra 0,5 e 0,7, e quindi $a\psi_1$ fra $0,35 u_0$ e $0,18 u_0$, si ha sempre $z > 1,2$ e quindi un sensibile contraccolpo positivo.

È infine interessante constatare che se dopo aver aperto l'intercettatore di $\psi_1 = 0,3 u_0$: a in un primo tempo $2l$: a, lo si richiude in un successivo tempo $2l$: a, l'intensità del colpo d'ariete positivo che così si produce è maggiore della intensità di colpo che si può realizzare con una chiusura rapida partendo dallo stato di regime relativo all'accennata apertura.

Ed infatti pel primo caso ponendo nella [40]:

$$\psi = 0 \quad f = Y_s - y_0 = -0,445 y_0$$

si ottiene:

$$Y_1 = 1.89 y_0$$

mentre nel secondo caso, essendo la velocità di regime $v_1 = \psi_1 u_0$, la [13] ci dà:

$$Y_1 = 1.6 y_0.$$

Questo genere d'investigazioni può mettere in guardia contro manovre pericolose, come, per esempio, quella di manovrare l'intercettatore con moto discontinuo, e, quando tali manovre si eseguano, precisare l'entità del pericolo. Esse sono ad ogni modo una ulteriore riprova della inesauribile fecondità delle formole razionali del moto perturbato, che ci permettono di padroneggiare completamente simili fenomeni.

Esempi numerici. — Abbiasi una condotta in carico caratterizzata da:

$$l = 5000 \quad a = 1000 \quad y_0 = 50 \quad \text{onde } 2l : a = 10''$$

e la si voglia mettere in funzione aprendo con legge lineare l'intercettatore d'estremità per una velocità di regime di $v_1 = 1,565$ onde

$\psi_1 = 0,05$ ed $a\psi_1 > u_0$, per cui non si avranno oscillazioni di carico dopo l'arresto dell'intercettatore, qualunque sia la velocità di manovra.

1° caso:

Pongasi inoltre la condizione che la velocità di manovra sia tale che la caduta di carico alla fine della fase di colpo semplice eguagli la metà del carico iniziale, e sia cioè $s = 0,5$ per $t = 10''$.

La [43] ci dà quindi per la durata della manovra $\tau = 45''$.

Prendiamo ora a calcolare i valori di Y a intervalli di $5''$, calcolazione che deve farsi per $t < 10''$ con la [39] e per $t > 10''$ con la [40], sostituendovi $\psi = 0,05 t : 45 = 0,0011 t$ fino a $t = 45''$ e $\psi = \psi_1 = 0,05$ per $t > 45''$.

Sono esibiti per maggior chiarezza anche i valori di $F(t)$ calcolati mediante:

$$\begin{aligned} F(t) &= Y - y_0 && \text{fino a } t = 10'' \\ F(t) &= Y - y_0 + F(t - 10) && \text{per } t > 10'' \end{aligned}$$

quali valori risultano ovviamente negativi.

Si ottiene così:

$t =$	$Y =$	$F(t) =$
$0''$	50	0
$5''$	31,97	- 18,03
$10''$	25,00 (per dato)	- 25,00
$15''$	39,03	- 29,00
$20''$	38,24	- 36,76
$25''$	34,92	- 44,08
$30''$	34,75	- 52,01
$35''$	34,68	- 59,40
$40''$	35,09	- 66,92
$45''$ (arresto)	35,07	- 74,33
$50''$	40,36	- 76,56
$55''$	45,81	- 78,52
$60''$	47,63	- 78,88

I valori di questa tabella ci confermano che dopo l'arresto dell'intercettatore la Y è semplicemente assintotica a y_0 senza oscillazioni.

Osservo inoltre che durante le fasi di contraccolpo e prima dell'arresto dell'intercettatore la Y si mantiene quasi costante intorno a 35, ed infatti la [42] darebbe:

$$z - 2,1202 \cdot z + 1 = 0 \quad \text{da cui: } z = 0,708 \quad Y = zy_0 = 35,4$$

2° caso:

Suppongasi invece che l'intercettatore venga aperto per la stessa velocità di regime e cioè di $\psi_1 = 0,05$ in tempo $\tau < 10''$.

Si ha in tal caso una fortissima caduta di carico, ed il fenomeno è caratterizzato da pause a pressione costante della durata di $10'' - \tau$, che si succedono a periodi di $10''$, tra l'una e l'altra delle quali la Y aumenta tendendo verso y_0 .

Supposto, per esempio, $\tau = 5''$ si avrebbe, mediante la [39] per $t < 10''$ e la [40] per $t > 10''$, che la serie dei valori di Y risulta di $1''$ in $1''$:

$t =$	$Y =$	$t =$	$Y =$	$t =$	$Y =$	$t =$	$Y =$
$0''$	50	$11''$	13,54	$21''$	35,20	$31''$	46,01
$1''$	26,67	$12''$	19,71	$22''$	39,05	$32''$	47,23
$2''$	15,01	$13''$	23,58	$23''$	40,63	$33''$	47,57
$3''$	9,11	$14''$	25,05	$24''$	41,87	$34''$	47,92
$4''$	5,95	$15''$	26,18	$25''$	42,36	$35''$	48,07
$5''$	4,13	$16''$	»	$26''$	»	$36''$	»
$6''$	»	$17''$	»	$27''$	»	$37''$	»
$7''$	»	$18''$	»	$28''$	»	$38''$	»
$8''$	»	$19''$	»	$29''$	»	$39''$	»
$9''$	»	$20''$	»	$30''$	»	$40''$	»
$10''$	»						

ecc.

3° caso:

Ed infine se nella ipotesi di manovra contemplata nel 1° caso noi supponiamo che l'intercettatore si arresti alla fine della fase di di colpo semplice ($t = 10''$) dopo aver aperto $\frac{2}{9}$ della luce di regime, si sarebbe allora $a\psi_1 = \frac{2}{9} 50 = 11,1$, mentre $u_0 = 31,3$, onde $a\psi_1 < u_0$.

Il carico Y assumerebbe dunque nelle fasi di contraccolpo un andamento oscillatorio a ritmo decrescente, avendosi per $t = 20''$ un contraccolpo positivo assai vicino al massimo, poichè $a\psi_1$ è appunto poco diverso da $0,3 u_0$.

Si ottiene infatti mediante la [40]:

$t = 0''$	$Y = 50$	$F(t) = 0$
$5''$	31,97	— 18,03
$10''$	25,00	— 25,00
$15''$	50,42	— 17,61
$20''$	60,93 (max.)	— 14,07
$25''$	49,80	— 17,81
$30''$	44,61 (min.)	— 19,46
$35''$	50,09	— 17,72
$40''$	52,53 (max.)	— 16,93
$45''$	49,97	— 17,75
$50''$	48,10 (min.)	— 18,83
$55''$	50,00	— 17,75
$60''$	51,60 (max.)	— 17,23
	ecc.	ecc.

risultati numerici che confermano le accennate leggi, e specialmente che per $t = 20''$ si ha $Y > 1,2 \cdot y_0$.

B) Intercettatore situato in una sezione intermedia del tubo.

La manovra di chiusura di un intercettatore situato in una sezione intermedia di un tubo nel quale l'acqua fluisce in condizioni di regime dà evidentemente luogo a un colpo d'ariete positivo a monte e ad un colpo negativo a valle dell'intercettatore medesimo, ed è facile dimostrare che nella fase di colpo semplice il sopraccarico del colpo positivo a monte è eguale alla caduta di carico del colpo negativo a valle.

Distinguendo infatti con un asterisco i simboli relativi al tronco a valle, si ha a monte:

$$Y = y_0 + F \qquad V = v_0 - \frac{g}{a} F$$

ed a valle:

$$Y^* = y_0 - f^* \qquad V^* = v_0 - \frac{g}{a} f^*$$

e siccome per la continuità deve essere: $V = u\psi = V^*$

se ne conclude facilmente: $f^* = F = \frac{1}{2}(Y - Y^*)$

e quindi l'equazione di efflusso: $u^2 - V^2 = 2g(Y - Y^*)$ fornisce una equazione di 2° grado, per determinare la F , analoga alla [14].

La trattazione del fenomeno dei contraccolpi, sia dal serbatoio a monte, sia dal variato funzionamento di una luce di efflusso a valle, risulta alquanto più complicata.

Caso particolare più semplice è quello dell'intercettatore situato fra il serbatoio e la condotta, e caso pure degno di nota è infine quello della manovra contemporanea di due intercettatori.

Il dilungarci nella trattazione analitica di tali problemi eccederebbe i limiti di questo scritto, e ci basti rilevare che, comunque complicate siano le condizioni del fenomeno, la calcolazione numerica dei carichi variabili non offre in generale difficoltà.

§ 14. Camere d'aria e loro limitata utilità. — Uno dei rimedi empiricamente escogitati per attenuare gli effetti dei colpi d'ariete consiste nel munire il tubo di una camera d'aria in prossimità dell'intercettatore, e ciò nel presupposto che, assorbendosi con tale dispositivo una parte della forza viva della colonna liquida, la soprappressione dovuta al colpo d'ariete ne riesca diminuita.

I mediocri risultati di tale dispositivo, che omai si vanno anche sperimentalmente constatando, sono messi in chiara luce dalle investigazioni analitiche che seguono.

Osservo anzitutto che anche per un tubo munito di camera d'aria valgono identicamente le espressioni generali di y e v , Y e V , definite dalle [8], [10] e [30], nonchè l'equazione di efflusso, mentre non vale la equazione di continuità: $V = u\psi(t)$, la quale dev'essere sostituita da altra esprimente che la portata istantanea del tubo alla sua estremità è uguale alla somma della portata di efflusso e del volume che nell'istante considerato penetra nella camera d'aria.

Indicando con $\pi r^2 c_0$ il volume interno utile della camera d'aria alla pressione y_0 , onde c_0 è la lunghezza che essa avrebbe se la sua sezione traversa fosse eguale a quella del tubo, e ritenendo che la compressione dell'aria nella camera si faccia a temperatura costante sarà il suo volume per l'altezza di carico Y :

$$U = \pi r^2 c_0 \frac{y_0 + h}{Y + h}$$

avendo indicato con h il carico corrispondente alla pressione atmosferica, e cioè circa $h = 10$. Si ha quindi:

$$- \delta U = \pi r^2 c_0 \frac{y_0 + h}{(Y + h)^2} \frac{\delta Y}{\delta t} \delta t$$

onde l'equazione che esprime la suddivisione della portata istantanea fra l'efflusso e la camera d'aria risulta facilmente:

$$V = u\psi + c_0 \frac{y_0 + h}{(Y + h)^2} \frac{\delta Y}{\delta t} \quad [45]$$

Fase di colpo semplice. — Il carico Y e la velocità V sono per la fase di colpo semplice espressi dalle [8], fra le quali, eliminando F , si ricava, come già noto:

$$V = \frac{g}{a} (H - Y)$$

mediante la quale e la equazione di efflusso, eliminando V ed u dalla [45], si ottiene:

$$\frac{ac_0(y_0 + h)}{(Y + h)^2} \frac{\delta Y}{\delta t} = g(H - Y) - a\psi \sqrt{2gY} \quad [46]$$

equazione differenziale caratteristica della fase di colpo semplice in un tubo munito di camera d'aria.

Fase di contraccolpo. — Il carico Y e la velocità V sono per le fasi di contraccolpo espresse dalle [10], fra le quali eliminando F si ottiene:

$$V = \frac{g}{a} (H - 2f - Y)$$

avendo indicato con f_c il valore di $f = F\left(t - \frac{2l}{a}\right)$ relativo al tubo munito di camera d'aria.

Coll'antecedente e con la equazione di efflusso, eliminando V ed u dalla [45]:

$$\frac{ac_0(y_0 + h)}{(Y + h)^2} \frac{\partial Y}{\partial t} = g(H - 2f_c - Y) - a\psi\sqrt{2gY} \quad [47]$$

equazione differenziale caratteristica delle fasi di contraccolpo in un tubo munito di camera d'aria.

A) Manovra dell'intercettatore in fase di colpo semplice:

Osservo anzitutto che ponendo nella [46] per $t = 0$:

$$Y = y_0 \quad \psi = \psi_0 = v_0 : \sqrt{2gy_0}$$

si ottiene $\left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)_0 = 0$.

Tale proprietà, che non si verifica quando manchi la camera d'aria (come può constatarsi differenziando la [14]), caratterizza l'attenuazione del colpo che la presenza della camera d'aria produce nei primi istanti della manovra; onde la curva-diagramma delle Y , assunte le t (ovvero le ψ) come ascisse, risulterebbe tangente all'asse delle ascisse.

L'equazione differenziale [46] che darebbe l'equazione di simile curva-diagramma non è rigorosamente integrabile se non nel caso che sia $\psi = 0$, e cioè, dopo la chiusura completa, per l'intervallo fra la chiusura ed il termine della fase. Essa è pure approssimativamente integrabile (e cioè trascurando la pressione atmosferica) quando sia $\psi = \psi_1 = \text{cost.}$, e cioè, dopo l'arresto dell'intercettatore, per l'intervallo fra l'arresto e il termine della fase.

Ma per conoscere numericamente la legge con cui varia il carico Y durante la manovra, ed il suo valore Y_1 al termine della manovra stessa, non abbiamo altra via che la integrazione approssimata col noto metodo dello sviluppo in serie, ponendo:

$$Y = y_0 + \left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)_0 t + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}\right)_0 \frac{t^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 Y}{\partial t^3}\right)_0 \frac{t^3}{2 \cdot 3} + \text{ecc.}$$

nella quale i coefficienti delle successive potenze di t devono ricavarsi differenziando la [46], in cui ψ è funzione lineare di t , e ponendovi quindi $\psi = \psi_0 \quad Y = y_0$.

Ricordando che $\left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)_0 = 0$ ed eseguendo le accennate differenziazioni e sostituzioni, si ricava facilmente:

$$Y = y_0 + \frac{v_0(y_0 + h)}{2c_0\tau} t^2 - \frac{g v_0(y_0 + h)(y_0 + h)^2}{2a\tau y_0 c_0^2} t^2 \quad [48]$$

Per manovre di limitata entità può anche essere sufficiente tener conto dei due soli primi termini della [48], assimilando così la curva-diagramma delle Y ad una parabola coll'asse verticale, e porre cioè:

$$Y = y_0 + \frac{v_0(y_0 + h)}{2c_0\tau} t^2 \quad [49]$$

espressione indipendente da a , e che suppone quindi di trascurare l'elasticità del tubo e del liquido.

Mediante la [48] (o la [49]) si può dunque calcolare il carico Y_1 , che ha luogo nel momento dell'arresto $t = t_1$, e se siasi effettuata chiusura completa si dovrà porvi $t = \tau$. Se infine la manovra dura fino al termine della fase si porrà $t = \frac{2l}{a}$, oltre il quale momento cessano le [46] e [48] di rappresentare il fenomeno.

Non è ovviamente lecito imbastire rigorose deduzioni algebriche sui limiti dei valori forniti dalle [48] e [49], che, pel modo con cui furono ottenute, rappresentano espressioni approssimate da impiegarsi, anche numericamente, con qualche cautela.

B) Legge del carico nell'intervallo fra l'arresto dell'intercettatore e il termine della fase di colpo semplice.

Ma il carico Y_1 , che si verifica nell'istante dell'arresto dell'intercettatore non è il carico massimo della fase di colpo semplice, perchè dopo l'arresto e durante il resto della fase il carico stesso continua ad aumentare.

Possiamo anzi dedurre dalla [46] che ove si supponga il tubo di lunghezza indefinita, e quindi indefinita la durata della fase, il carico (a intercettatore fermo) cresce durante la fase *in modo asintotico al valore che esso avrebbe immediatamente raggiunto per effetto della stessa manovra nel tubo supposto sfornito di camera d'aria.*

Risulta infatti dalla [46], ponendovi $\psi = \psi_1 = \text{cost.}$, che $\frac{\partial Y}{\partial t}$ sarebbe sempre positivo, e quindi Y sempre crescente, fino all'istante in cui si verifichi la:

$$g(H - Y) = a\psi_1 \sqrt{2gY}$$

e cioè la [14] del § 5, che dà appunto il valore del carico di colpo semplice per una chiusura dell'intercettatore da ψ_0 a ψ_1 , in un tubo fornito di camera d'aria.

Ma il tempo necessario a che Y raggiunga tale valore sarebbe ∞ , e di ciò possiamo dare una dimostrazione rigorosa per il caso di chiusura completa. Posto infatti nella [46] $\psi = 0$, si ha:

$$\frac{ac_0(y_0 + h)}{g} \cdot \frac{\partial Y}{(H - Y)(Y + h)^2} = \partial t$$

equazione facilmente integrabile mediante il cambiamento di variabile definito da $\frac{H + h}{Y + h} = 1 - \xi$, e di cui l'integrale è:

$$\frac{ac_0(y_0 + h)}{g(Y + h)^2} \left(\text{Log} \frac{Y + h}{H - Y} - \frac{H - Y}{Y + h} \right)_{Y_1}^Y = t - \tau \quad [50]$$

relazione che vale a rappresentare la legge del fenomeno a partire da $t = \tau$ fino al termine della fase $t = 2l : a$.

Risulta quindi dalla [50] che se il tubo fosse di lunghezza indefinita, per $t = \infty$ si avrebbe $Y = H$, ciò che dimostra rigorosamente la verità dell'enunciato precedente per il caso di chiusura completa dell'intercettatore in fase di colpo semplice.

Non si può invece dare una dimostrazione egualmente rigorosa per il caso di chiusura parziale, perchè ponendo nella [46] $\psi = \psi_1 = \text{cost.}$, essa non può esattamente integrarsi che trascurando la pressione atmosferica e ponendovi cioè $h = 0$.

In tale ipotesi invece l'integrale del termine in ∂Y si riduce alla somma di quattro integrali noti, e l'espressione di t in funzione di Y che così si ricava contiene due funzioni logaritmiche che diventano ∞ quando il valore di Y soddisfi ad una condizione che in sostanza si risolve nella stessa equazione [14] del § 5.

Data la difficoltà d'impiegare anche numericamente gl'integrali della [46] (esatto nel caso $\psi = 0$ e approssimato nel caso $\psi = \psi_1 = \text{cost.}$) che si presentano in forma di equazioni trascendenti, siamo anche in questo caso ridotti al solito metodo dello sviluppo in serie. E, anche in questo caso, tenuto conto della natura del problema tecnico, nonchè della brevità dell'intervallo che può intercedere fra il termine della manovra e il termine della fase, possiamo limitare lo sviluppo ai soli due primi termini ponendo:

$$Y = Y_1 + \left(\frac{\partial Y}{\partial t} \right)_1 (t - t_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \right)_1 (t - t_1)^2 \quad [51]$$

nella quale $\left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)_1$ e $\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}\right)_1$ devono essere sostituiti mediante la [46] facendo in essa: $\psi = \psi_1$, $Y = Y_1 =$ valore numerico dato da [48].

Facendo nella [51] $t = 2l : a$ si ottiene il valore Y_s del carico Y al termine della fase di colpo semplice.

Ma neppure Y_s rappresenta il carico massimo di moto perturbato prodotto dalla manovra, atteso che, siccome $\frac{\partial Y}{\partial t}$ è tuttavia positivo al termine della fase e *non subisce discontinuità nel passare alla fase di contraccolpo* (a differenza di quanto succede per tubo senza camera d'aria) deve presumersi che il carico Y continuerà ad aumentare per un certo periodo in fase di contraccolpo.

C) *Fase di contraccolpo susseguente ad una manovra eseguita in fase di colpo semplice.*

A partire da $t = 2l : a$ cessa l'equazione differenziale [46] dal rappresentare il fenomeno e vi subentra l'equazione differenziale [47], la quale da essa non differisce che per la sostituzione di $H - 2f_c$ in luogo di H .

Ed anzitutto è facile constatare che nel passaggio dalla fase di colpo semplice alla fase di contraccolpo non si ha discontinuità nel valore di $\frac{\partial Y}{\partial t}$, che per $t < 2l : a$ è dato dalla [46] e per $t > 2l : a$ è dato dalla [47]; poichè nell'istante $t = 2l : a$ si ha $f_c = 0$, ciò che è chiaro ove si consideri che f_c non è allora altro che il sopraccarico dovuto al colpo nell'istante $t = \frac{2l}{a} - \frac{2l}{a} = 0$ che è nullo.

Si può anzi osservare che, essendo $\left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)_0 = 0$, si avrà altresì al principio del contraccolpo: $\left(\frac{\partial f_c}{\partial t}\right)_{2l:a} = 0$, onde nel passaggio dall'una fase all'altra non si avrà discontinuità neppure nel valore di $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$.

Se ne deduce quindi che Y continua a crescere anche in fase di contraccolpo, e cresce fino all'istante in cui si ha nuovamente $\frac{\partial Y}{\partial t} = 0$, e cioè per la [47]:

$$g(H - 2f_c - Y) = a\psi_1 \sqrt{2gY} \quad [52]$$

equazione identica alla [32], e cioè alla equazione che determina il valore di Y in fase di contraccolpo per un tubo senza camera d'aria, salvo la sostituzione di f_c in luogo di f .

Ma [52] non può servire a una rigorosa determinazione di Y_{max} , perchè f_c è pure una funzione incognita di t , dipendendo dalla legge di variazione di Y , e precisamente dal valore di Y nell'istante di $(2l:a)''$ precedente l'istante in cui $Y = Y_{max}$.

Quando si possa presumere che il massimo di Y si verifica nei primi $(2l:a)''$ della fase di contraccolpo, allora possiamo impiegare [52] per la determinazione di questo massimo, perchè conosciamo con una certa approssimazione f_c dalla legge approssimata di Y in fase di colpo semplice espressa dalle [48] e [51]; mentre la continuità di $\frac{\partial Y}{\partial t}$ e $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$ nel passaggio di fase ci permette di avere una espressione approssimata di Y pei primi istanti del contraccolpo mediante $\left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)_s$ e $\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}\right)_s$.

Se poi la manovra eseguita in fase di colpo semplice fosse stata di chiusura completa si avrebbe $\psi = 0$, e la [47] diventerebbe per la fase di contraccolpo:

$$ac_0(y_0 + h) \frac{\partial Y}{\partial t} = g(H - 2f_c - Y)(Y + h)^2 \quad [53]$$

onde Y aumenterebbe fino all'istante in cui si verifica la:

$$Y = H - 2f_c$$

relazione identica alla [33], salvo sostituzione di f_c in luogo di f .

Le [52] e [54] definiscono chiaramente quale sia l'azione della camera d'aria nell'attenuare l'effetto di una manovra eseguita in fase di colpo semplice, azione che è assimilabile a quella di un *ralentamento della manovra di chiusura*.

Mentre infatti pel tubo sfornito di camera d'aria una manovra di chiusura in fase di semplice avrebbe prodotto:

a) se parziale da ψ_0 a ψ_1 , il carico massimo dato dalla:

$$g(H - Y) = a\psi_1 \sqrt{2gY};$$

b) se totale da ψ_0 a 0, il carico massimo dato dalla $Y = H$; le analoghe manovre pel tubo fornito di camera d'aria danno luogo invece ai carichi massimi rispettivamente determinati dalle [52] e [54], e quindi uguali a quelli che nel tubo sfornito di camera d'aria avrebbero prodotto manovre di chiusura protrate (con legge ψ incognita) durante una parte della fase di contraccolpo.

Raggiunto il massimo determinato da [52] o, nel caso di chiusura totale, da [54], il carico Y assume andamento oscillatorio assintotico al nuovo stato di regime, di cui il periodo e l'ampiezza (de-

crescente) dipendono altresì dalla grandezza c_0 della camera d'aria; ma le difficoltà analitiche dello studio generale di simile fenomeno sono quasi insuperabili.

Nel caso in cui abbia avuto luogo chiusura completa, si potrebbe tentarne uno studio approssimato scindendo l'effetto della camera d'aria da quello della elasticità propria della colonna liquida, e ciò in base al fatto che il periodo della oscillazione dovuta *alla sola camera d'aria isolatamente considerata* è sempre molto maggiore del periodo $4l : a$ della oscillazione dovuta alla elasticità della colonna liquida.

Considerando infatti la colonna liquida come anelastica si ricava da noti principî di meccanica razionale che il periodo di una *piccola oscillazione* di simile massa frenata nel suo movimento dal cuscino elastico costituito dalla camera d'aria, e dalla contropressione $y_0 + h$ del serbatoio, sarebbe eguale a

$$2\pi \sqrt{\frac{c_0 l}{g(y_0 + h)}} \quad [55]$$

e tale periodo risulta praticamente molto maggiore di $4l : a$ per essere sempre $c_0 : l$ molto $> \frac{4g(y_0 + h)}{\pi^2 a^2}$, e numericamente $c_0 : l > 0,000004 (y_0 + h)$.

Si può quindi presumere che il fenomeno si svolgerebbe in forma di una oscillazione principale dal ritmo più ampio, determinato approssimativamente dalla [55] e perturbata da una serie di oscillazioni a ritmo più breve, dovute alla elasticità complessa della colonna liquida.

Questi argomenti, di cui io non ho che segnato le linee generali, esigerebbero assai più ampia trattazione.

D) *Manovra dell'intercettatore protratta in fase di contraccolpo.*

È questo il caso praticamente più frequente negl'impianti di condutture per forza motrice, di cui la lunghezza raramente raggiunge un migliaio di metri, onde la durata della fase di colpo semplice raramente può eccedere 2", mentre la durata delle manovre di chiusura, anche parziali, è notevolmente maggiore.

Limitandoci al caso di manovra con legge lineare possiamo senza altro affermare che, se la manovra è protratta in fase di contraccolpo, *l'influenza della camera d'aria sul valore massimo del carico risulta assolutamente nulla.*

Ed invero, le considerazioni e formule svolte nel § 10 intorno alla fase di contraccolpo a pressione costante, che abbiamo designato come *fase di regime* al modo perturbato, sono identicamente

applicabili anche al tubo munito di camera d'aria, la linearità di ψ che dà luogo alla condizione $\frac{\partial Y}{\partial t} = 0$ annullando evidentemente la influenza della camera d'aria e di qualunque organo elastico, e riducendo il fenomeno a svolgersi come una fase di regime a carico costante.

Abbiamo infatti allora osservato che la equazione [36] con cui si determina Y_1 è indipendente da a , e cioè dalla elasticità del tubo e del liquido, onde la presenza di una camera d'aria (e in genere di una parete elastica) deve essere del tutto indifferente allo svolgimento del fenomeno.

La condizione $\frac{\partial Y}{\partial t} = 0$ riduce dunque l'equazione di continuità [46] alla semplice $V = w\psi$, in modo che il fenomeno e le formole che ne definiscono le leggi si svolgono come se la camera d'aria non esistesse.

E) Fasi di contraccolpo a intercettatore fermo dopo una manovra protratta in fase di contraccolpo.

Le considerazioni espote sub C) per le fasi di contraccolpo susseguenti a una manovra eseguita in fase di colpo semplice si modificano in questo caso pel fatto che nell'istante $t = t_1$ in cui cessa la manovra e comincia la fase che consideriamo si ha $\left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)_1 = 0$, e quindi non occorre alcuna ulteriore ricerca per determinare l'inizio della fase oscillatoria.

La conoscenza dei valori di Y per $t < t_1$ ci fa conoscere la corrispondente serie dei valori di f_c , onde si possono tentare delle integrazioni approssimate di [47] o [53] per un ulteriore periodo t_1 susseguente all'arresto, ma il problema non ha evidentemente molta importanza tecnica.

F) Esempio numerico.

Ad illustrazione delle formole e deduzioni espote aggiungo un esempio di calcolazioni numeriche relative agli effetti di una manovra in fase di colpo semplice.

Abbiasi un tubo caratterizzato da:

$$a = 1000 \quad l = 1500 \quad y_0 = 100 \quad r_0 = 2$$

e munito di camera d'aria per cui $c_0 = 5$. Si ricava quindi:

$$\psi_0 = 0,045 \quad H = 304 \quad 2l : a = 3''$$

Proponiamoci d'investigare l'influenza della camera d'aria sugli effetti della manovra di chiusura di $\frac{1}{3}$ della luce di efflusso in tempo $t_1 = 1''$, e quindi in fase di colpo semplice.

1° *Calcolo di Y_1 al termine della manovra*: Sostituendo nella [48] gli esibiti valori ed inoltre $t = t_1 = 1''$, $\tau = 3''$ si ottiene:

$$Y_1 = 106,27$$

2° *Calcolo di Y_s al termine della fase di colpo semplice*: Con le sostituzioni di valori numerici, ed inoltre posto $\psi_1 = \frac{2}{3}\psi_0 = 0,03$ si ottiene dalla [46] e dal suo differenziale:

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)_1 = 13,98 \quad \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}\right)_1 = -1,57$$

onde la legge del carico dopo l'arresto e fino a $t = 3''$ è espressa da:

$$Y = 106,27 + 13,98(t - 1) - 0,785(t - 1)^2$$

che per $t = 3''$ ci dà:

$$Y_s = 131,05$$

aumento di carico veramente notevole, rispetto a quello che si è verificato durante e al termine della manovra.

3° *Calcolo del carico massimo*: Coll'accennato valore di Y_s e ricordando che al termine della fase di colpo semplice deve essere

$f_c = \frac{\partial f_c}{\partial t} = 0$, si ottiene:

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)_s = 4,28 \quad \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}\right)_s = -1,86$$

onde la legge del carico nei primi istanti del contraccolpo può rappresentarsi con:

$$Y = 131,05 + 4,28(t - 3) - 0,93(t - 3)^2$$

Adottando inoltre per f_c l'espressione $Y - y_0$ desunta da [49]:

$$f_c = 7,33(t - 3)^2$$

E sostituendo queste espressioni di Y e f_c nella condizione di massimo [52], posto inoltre $t - 3 = \mathfrak{S}$ si ottiene:

$$g(174 - 18,9\mathfrak{S} + 0,93\mathfrak{S}^2)^2 = 1800(131 + 4,3\mathfrak{S} - 0,93\mathfrak{S}^2)$$

equazione di 4° grado che con facili tentativi si constata essere molto prossimamente soddisfatta da $\mathfrak{S} = 0'',9$ e cioè $t = 3'',9$, con che l'ultima espressione di Y ci dà pel valore del carico massimo

$$Y_{max} = 134,20$$

Nel medesimo tubo, se sfornito di camera d'aria, la medesima manovra avrebbe generato un carico di 142 m., onde l'effetto di attenuazione dovuto alla camera d'aria risulta abbastanza esiguo.

G) Forza viva del getto fluente in un tubo con camera d'aria.

Risulta dalla precedenti ricerche che la presenza di una camera d'aria ha prevalentemente per effetto di ritardare il fenomeno della soprappressione del colpo, e che tale ritardo produce effettivamente attenuazione del colpo quando si tratti di manovre la cui durata sia sensibilmente $< 2l : a$. In questi casi soltanto sarebbe dunque plausibile (salvo altre considerazioni tecniche) di munire un tubo di camera d'aria allo scopo di attenuare la soprappressione del colpo, mentre, se tale condizione non sia soddisfatta, la camera d'aria diventa, rispetto a tale obbiettivo, un vero nonsenso tecnico.

Per manovre brevi e rapide come quelle degli organi intercettatori che servono alla regolazione dei motori idraulici, potrebbesi tuttavia assegnare alle camere d'aria il razionale compito di attenuare nei primi istanti della manovra la forza viva del getto fluente. Possiamo anzi risolvere in modo rigoroso il problema di calcolare la dimensione della camera d'aria, perchè a partire dal principio della manovra la forza viva del getto fluente vada certamente diminuendo.

Differenziando la equazione di efflusso e combinandola con la condizione di massimo della forza viva del getto esibito nel § 6 si ottiene una espressione di $\frac{\partial Y}{\partial t}$ che sostituita nella [46] ci dà:

$$\psi^2 - \psi \frac{H - Y}{a} \sqrt{\frac{g}{2Y} + \frac{c_0 v_0 (y_0 + h)}{3g\tau(Y + h)^2}} \sqrt{\frac{Y}{y_0}} = 0 \quad [56]$$

Possiamo ora desumere dalla [56] quale sia la condizione perchè nessun massimo della forza viva si verifichi, e cioè la forza viva del getto sia continuamente decrescente. Ciò ha luogo evidentemente quando le radici della [56], considerata come una equazione di secondo grado in ψ , siano immaginarie, ciò che conduce alla condizione:

$$c_0 > \frac{3}{8} \frac{\tau}{v_0} \frac{g^2 (H - Y)^2 (Y + h)^2}{a^2 Y (y_0 + h)} \sqrt{\frac{y_0}{Y}} \quad [57]$$

E poichè è facile dimostrare che in condizioni ordinarie il secondo membro della disuguaglianza [57] è decrescente col crescere di Y , così il suo valore massimo avrà luogo per $Y = y_0$, e cioè al principio della manovra. Con tale condizione la [57] si semplifica nella forma:

$$c_0 > \frac{3}{8} \left(1 + \frac{h}{y_0}\right) v_0 \tau \quad [58]$$

fornendoci una elegante soluzione del problema proposto.

Nel caso dell'esempio numerico precedente, per $\tau = 3''$ dovrebbe, secondo [58], essere $c_0 > 2,47$.

È però dubbia la convenienza tecnica di simile organo, mentre lo stesso obbiettivo può raggiungersi collocando l'intercettatore di regolazione ad una certa distanza a monte della luce del distributore.

§ 15. **Riassunto dei risultati e formole di uso pratico.** — Non credo inopportuno di chiudere la presente memoria riassumendo e mettendo in evidenza i principali risultati e le formole più caratteristiche che potrebbero divenire di uso corrente per la valutazione numerica dei fenomeni di moto perturbato.

I. *Parametro del moto perturbato.*

I fenomeni di moto perturbato dell'acqua nei tubi in pressione sono di natura vibratoria e si pagano con la velocità a data dalla:

$$a = \frac{9900}{\sqrt{48,3 + k \frac{d}{e}}}$$

essendo $k = 10^{10} E^{-1}$, in cui E è il modulo di elasticità della materia di cui è costituito il tubo.

II. *Colpo d'ariete semplice.*

Per un colpo d'ariete positivo o negativo prodotto da manovra di chiusura od apertura di un intercettatore, la cui durata sia $< 2l : a$, l'altezza di carico massima Y è data dalla:

$$Y^2 - 2Y \left(H + \frac{a^2 \psi^2}{g} \right) + H^2 = 0$$

nella quale: $H = y_0 + \frac{av_0}{g}$;

ψ = rapporto fra la luce di efflusso e la sezione del tubo al termine della manovra.

Il valore Y risulta $\begin{matrix} > \\ < \end{matrix} y_0$, secondo che sia $\psi \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \psi(0)$, e cioè secondo che si tratti di manovra di chiusura (colpo positivo) o di apertura (colpo negativo).

Se invece è fissato il valore di Y l'antecedente dà pel corrispondente valore di ψ :

$$\psi = \frac{H - Y}{a} \sqrt{\frac{g}{2Y}}$$

Quando si operi chiusura completa, e cioè sia $\psi = 0$, si ha $Y = H$, onde H è l'altezza di carico massima cui può dar luogo un colpo d'ariete positivo, e si verifica per la chiusura completa in tempo $< 2l : a$.

III. *Contraccolpo d'ariete.*

Se invece la manovra di chiusura od apertura dell'intercettatore abbia una durata $> 2l : a$ e sia eseguita con legge sensibilmente uniforme, l'altezza di carico Y tende immediatamente a un valore costante Y , il quale permane finchè dura la manovra, ed è dato da una delle due radici della:

$$z^2 - 2z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{w_0}{g\tau y_0} \right)^2 \right] + 1 = 0$$

e precisamente:

a) dalla radice > 1 in caso di chiusura;

b) dalla radice < 1 in caso di apertura;

essendo $z = Y_1 : y_0$

Per determinare la velocità di chiusura dell'intercettatore in modo che il carico non superi un dato limite si ha dalla precedente relazione:

$$\tau = \frac{w_0}{gy_0} \cdot \frac{\sqrt{z}}{z-1}$$

IV. *Arresto dell'intercettatore.*

Depo l'arresto dell'intercettatore se l'efflusso non è annullato il fenomeno idrodinamico di moto perturbato si svolge con legge assintotica al nuovo stato di regime, e precisamente:

con legge semplicemente assintotica se $a\psi_1 > u_0$

» oscillatoriamente » se $a\psi_1 < u_0$

il periodo dell'oscillazione essendo $4l : a$.

Se la chiusura è completa e l'efflusso annullato, la legge del fenomeno idrodinamico susseguente è di semplice oscillazione a periodo $4l : a$, variando Y fra il massimo Y_1 , che ha luogo nell'istante della chiusura, e il minimo $2y_0 - Y_1$.

V. *Camere d'aria.*

Simili organi sarebbero razionalmente applicabili soltanto per attenuare i fenomeni di moto perturbato dovuti a manovre aventi una durata $< 2l : a$.

Se si pone la condizione che la forza viva del getto fluente sia decrescente durante la chiusura, deve c_0 soddisfare la:

$$c_0 \geq \frac{3}{8} \left(1 + \frac{h}{y_0} \right) v_0 \tau$$

Il significato dei diversi simboli risultando chiaramente dalla trattazione esposta, non ho creduto farne in questo riassunto una inutile ripetizione.