Capitolo X.

Formole di Mac-Laurin e Taylor.

§.1. Definizioni - Lemma.

1° Sia $f(x)$ una funzione derivabile. La sua derivata $f'(x)$ si chiama *prima derivata* della funzione $f(x)$. Ricordiamo che (pag. 209) si chiama *seconda derivata* della funzione $f(x)$ la prima derivata della funzione $f'(x)$, e si indica con $f''(x)$; *terza derivata* della funzione $f(x)$ la prima derivata della funzione $f''(x)$, ecc.

Ricordiamo poi che il differenziale di una funzione $f(x)$ è

$$[1] \qquad df = f'dx.$$

Noi lo chiameremo anche il *differenziale primo* della funzione $f(x)$; porremo poi per definizione

$$[2] \qquad \left\{ \begin{array}{l} d^2f = f''\,dx^2 \\ d^3f = f'''\,dx^3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

che chiameremo rispettivamente *differenziale secondo*, terzo, ecc. della funzione $f(x)$.

Questi differenziali hanno però poca importanza, e si mantengono più per ragioni storiche che per altro; essi portano un inconveniente grave, perchè (a differenza del differenziale primo di una funzione, che non cambia comunque si cambi la variabile) questi differenziali mutano valore col mutare della variabile. Infatti, prendiamo per es. come funzione la variabile indipendente x, e troviamone il differenziale secondo. Avremo:

$$d^2x = x'' \, dx^2 = 0,$$

perchè la derivata seconda di x è 0. Ora, se poniamo $x = \operatorname{sen} z$, cioè mutiamo variabile, il differenziale secondo diventa

$$d^2x = -\operatorname{sen} z \, dx^2$$

(perchè la seconda derivata di $\operatorname{sen} z$ è $-\operatorname{sen} z$) che non è lo 0.

Dunque, in un calcolo in cui si è fatto uso delle formole [2] non si può cambiare variabile, artificio questo che si adopera invece spesso nel Calcolo.

2° – Se $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ è il quoziente di due funzioni che per $x=0$ si annullano, allora

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(0)}{\varphi(x) - \varphi(0)};$$

ma, per il teorema della Media, il secondo membro è uguale al rapporto delle derivate di f e φ calcolate in un certo punto interno all'intervallo dei due punti $0, x$, perciò:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(y)}{\varphi'(y)},$$

dove y è un punto interno all'intervallo $(0, x)$.

§ 2 — Formule di Mac-Laurin e Taylor per le funzioni di una variabile.

Sia $F(x)$ una funzione che ammetta le prime $n+1$ derivate e supponiamo che tanto $F(x)$ quanto le prime n derivate si annullino per $x=0$:

$$F(0)=F'(0)=F''(0)=\dots F^{(n)}(0).$$

Studiamo il rapporto

$$\frac{F(x)}{x^{n+1}}$$

Per $x=0$ il numeratore e il denominatore di questo rapporto sono entrambi uguali a 0, quindi, per il lemma precedente, esiste un certo punto x_1 interno allo intervallo $(0, x)$ tale che $0 < x_1 < x$ Th. Cauchy-De l'Hosp

$$\frac{F(x)}{x^{n+1}}=\frac{F'(x_1)}{(n+1)x_1^{n}}.$$

Il secondo membro di quest'ultima eguaglianza è un nuovo quoziente di funzioni, che si annullano per $x_1=0$, quindi, per il lemma, sarà

$$[3] \qquad \frac{F'(x_1)}{(n+1)x_1^{n}}=\frac{F''(x_2)}{(n+1)n\,x_2^{n-1}}, \qquad 0 < x_2 < x_1$$

dove x_2 è un punto interno all'intervallo $(0, x_1)$.

Essendo nulle per $x=0$ tutte le derivate di $F(x)$ fino all'n^{ma} inclusa, possiamo evidentemente applicare questo ragionamento $n+1$ volte; con ciò otteniamo

$$\frac{F(x)}{x^{n+1}}=\frac{F'(x_1)}{(n+1)x_1^{n}}=\frac{F''(x_2)}{(n+1)n\,x_2^{n-1}}=\dots$$

$$= \frac{F^{(n)}(x_n)}{(n+1)\,n(n-1)\,\ldots\,2x_n} = \frac{F^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)\cdot n(n-1)\ldots 2.1},$$

dove x_{n+1} è interno all'intervallo $(0, x_n)$ e quindi anche all'intervallo $(0,x)$.

Sarà quindi

$$\frac{F(x)}{x^{n+1}} = \frac{F^{(n+1)}(x_{n+1})}{\underline{\lfloor n+1}},$$

essendo x_{n+1} non completamente conosciuto, perchè sappiamo soltanto che esso è interno all'intervallo $(0,x)$.

Possiamo pertanto porre

$$x_{n+1} = \theta x,$$

essendo θ un numero (sconosciuto) compreso tra 0 ed 1; con ciò abbiamo

$$\frac{F(x)}{x^{n+1}} = \frac{F^{(n+1)}(\theta x)}{\underline{\lfloor n+1}},$$

da cui

$$\boxed{F(x) = \frac{x^{n+1}}{\underline{\lfloor n+1}} F^{(n+1)}(\theta x)},$$

1ª formula di Mac-Laurin e Taylor

che è la prima delle formole di Mac-Laurin e Taylor.

Questa formola ci dice che quando si vuol rappresentare approssimativamente una quantità che dipende da un'altra (cioè una funzione), il metodo migliore è di rappresentarla mediante un polinomio.

Ora potremo vedere come una funzione si può rappresentare approssimativamente con un polinomio ordinato secondo le potenze crescenti di una variabile, e qual'è l'errore che si commette con questa rappresentazione.

Sia data una funzione $\varphi(x)$. Volendo rappresentarla con un polinomio di grado n, dovremo porre

$$[4] \quad \varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + R_n(x)$$

dove il resto $R_n(x)$ è l'errore che si commette rappresentando $\varphi(x)$ col polinomio che precede $R_n(x)$. Si tratta di determinare le costanti $a_0, a_1, \dots$

Poniamo

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = p(x).$$

Il modo migliore per scegliere le costanti a_0, a_1, ecc. è di prenderle in modo che la funzione $\varphi(x)$ e le sue prime n derivate abbiano per $x = 0$ gli stessi valori che hanno rispettivamente il polinomio $p(x)$ e le sue prime n derivate, cioè in modo che sia:

$$[5] \quad \begin{cases} \varphi(0) = p(0), \\ \varphi'(0) = p'(0), \\ \varphi''(0) = p''(0), \\ \dots\dots = \dots\dots \\ \varphi^{(n)}(0) = p^{(n)}(0). \end{cases}$$

Si hanno così $n+1$ condizioni per calcolare le costanti $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Intanto si ha:

$$p'(x) = 1.a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + n a_n x^{n-1},$$

$$p''(x) = 1.2.a_2 + 2.3 a_3 x + \dots + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + \\ + n(n-1) a_n x^{n-2},$$

e così via; si arriverà alla derivata $p^{(n)}(x)$, di grado 0, che sarà perciò una costante $p^{(n)}(x) = 1.2.3.\dots(n-1)\,n.a_n$; tutte le derivate successive $p^{(n+1)}$, $p^{(n+2)}$, ecc. saranno nulle.

Ponendo in queste $x=0$ e sostituendo in [5], si ha

$$\varphi(0) = a_0 \qquad = p(0)$$
$$\varphi'(0) = 1.a_1, \qquad = p'(0)$$
$$\varphi''(0) = 1.2.a_2, \qquad = p''(0)$$
$$\varphi'''(0) = 1.2.3.a_3, \qquad = p'''(0)$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\varphi^{(n)}(0) = 1.2.3.\dots.n.a_n \qquad = p^{(n)}(0)$$

e da queste si ha

$$a_0 = \varphi(0), \qquad a_1 = \frac{\varphi'(0)}{\underline{\lfloor 1}}, \qquad a_2 = \frac{\varphi''(0)}{\underline{\lfloor 2}},$$

$$a_3 = \frac{\varphi'''(0)}{\underline{\lfloor 3}}, \qquad \dots\dots\dots, \qquad a_n = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{\underline{\lfloor n}}.$$

Per tali valori delle costanti, la [4] diventa

[6] $$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{\underline{\lfloor 1}}x + \frac{\varphi''(0)}{\underline{\lfloor 2}}x^2 + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{\underline{\lfloor n}}x^n + R_n(x).$$ di Lagrange

Esaminiamo il resto

$$R_n(x) = \varphi(x) - p(x)$$

Per $x=0$, avremo

$$R_n(0) = \varphi(0) - p(0);$$

ma noi abbiamo calcolato le costanti $a_0, a_1, a_2, \dots a_n$ del polinomio $p(x)$ in modo che $\varphi(0) - p(0)$ fosse eguale a 0 [vedi [5]], quindi

$$R_n(0) = 0.$$ 2ª formula di Mac Laurin

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1}x + \frac{\varphi''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n}x^n + \frac{x^{(n+1)}}{\dots}\varphi^{(n+1)}\dots$$

La prima derivata di $R_n(x)$ per $x=0$ è

$$R'_n(0) = \varphi'(0) - p'(0);$$

ma per le [5], $\varphi'(0) - p'(0) = 0$, quindi

$$R'_n(0) = 0.$$

Analogamente

$$\left\{\begin{aligned} &R''_n(0) = 0, \\ &R'''_n(0) = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ &R^{(n)}_n(0) = 0. \end{aligned}\right.$$

La funzione $R_n(x)$ è dunque una funzione che per $x=0$ è nulla insieme con le sue prime n derivate, ossia gode della stessa proprietà di cui gode la funzione $F(x)$ che ci è servita per il calcolo della prima formola di Taylor, quindi essa si può esprimere mediante quella stessa formola:

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{\lfloor n+1} R_n^{(n+1)}(\theta x),$$

dove

$$0 < \theta < 1.$$

Nel secondo membro compare la derivata $(n+1)^{ma}$ di R_n che sarà

$$R_n^{(n+1)}(x) = \varphi^{(n+1)}(x) - p^{(n+1)}(x);$$

ma la derivata $(n+1)^{ma}$ di p abbiamo visto essere nulla, quindi

$$R_n^{(n+1)}(x) = \varphi^{(n+1)}(x),$$

percui

$$\boxed{R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{\lfloor n+1} \varphi^{(n+1)}(\theta x)}$$

È questa l'espressione del resto della formola [6] di Mac-Laurin e Taylor, sotto la forma datagli da Lagrange.

Ricordiamo che a questa formola si è giunti mediante la sola ipotesi che la funzione $\varphi(x)$ abbia le sue prime $n+1$ derivate.

Alla formola di Taylor si suol dare anche un altro aspetto. Sia $f(x)$ una funzione ed a un punto interno all'intervallo in cui essa è definita. Ponendo $\varphi(x)=f(a+x)$, allora è ancora $\varphi(x)$

$$\varphi'(x)=f'(a+x),$$
$$\varphi''(x)=f''(a+x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e poi per $x=0$

$$\varphi(0)=f(a),\ \varphi'(0)=f'(a),\ \varphi''(0)=f''(a), \ldots\ldots$$

Sostituendo in [6], si ha

$$f(a+x)=f(a)+xf'(a)+\frac{x^2}{\underline{|2}}f''(a)+\ldots+\frac{x^n}{\underline{|n}}f^{(n)}(a)+\frac{x^{n+1}}{\underline{|n+1}}f^{(n+1)}(a+\theta x),$$

ove $$0<\theta<1.$$

abitualmente si suole scriverla così:

$$\boxed{f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{\underline{|2}}f''(a)+\ldots+\frac{h^n}{\underline{|n}}f^{(n)}(a)+\frac{h^{n+1}}{\underline{|n+1}}f^{(n+1)}(a+\theta h)}$$

§. 3. Applicazioni

1° Calcolare numericamente il valore di $\operatorname{sen} x$ (ove x è la misura di un angolo in radianti)

Per applicare la formola [6], occorre cercare anzitutto le prime n derivate della funzione

$$\varphi(x) = \operatorname{sen} x$$

Si ha

$$\left.\begin{aligned} \varphi'(x) &= \cos x, \\ \varphi''(x) &= -\operatorname{sen} x, \\ \varphi'''(x) &= -\cos x, \\ \varphi^{IV}(x) &= \operatorname{sen} x, \end{aligned}\right\}$$

. . . .

Essendo $\varphi^{IV} = \varphi(x)$, sarà $\varphi^{V}(x) = \varphi'(x), \ldots$; sicchè le derivate di $\varphi(x) = \operatorname{sen} x$ si riproducono a quattro a quattro periodicamente. Ne segue che

$$\varphi(0)=0, \quad \varphi'(0)=1, \quad \varphi''(0)=0, \quad \varphi'''(0)=-1,$$
$$\varphi^{IV}(0)=0, \quad \varphi^{V}(0)=1, \quad \varphi^{VI}(0)=0, \quad \varphi^{VII}(0)=-1,$$

Quindi, supponendo n pari (eguale a $2m$), si ha per la [6]

$$\boxed{[7] \quad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} - \frac{x^7}{\underline{|7}} + \ldots \pm \frac{x^{2m-1}}{\underline{|2m-1}} + R_n(x),}$$

dove

$$R_n = \mp \frac{x^{2m+1}}{\underline{|2m+1}} \cos(\theta x).$$

È questa la formola per il calcolo di $\operatorname{sen} x$.

Osserviamo che, essendo

$$|\cos(\theta x)| \leq 1,$$

si ha

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{2m+1}}{\underline{|2m+1}}.$$

Calcoliamo per es. il seno dell'angolo di un grado. In radianti l'angolo di un grado è misurato da

$$x = \frac{\pi}{180};$$

quindi, essendo $\pi<4$, si ha

$$x<\frac{4}{180}=\frac{1}{45},$$

e però

$$R_n \leqq \frac{|x|^{2m+1}}{\lfloor 2m+1} < \frac{1}{45^{2m+1}\lfloor 2m+1}$$

Prendendo $m=3$, si ha

$$R_n < \frac{1}{45^7 . 7!} < \frac{1}{45^7 . 5000}.$$

Come si vede R_n è piccolissimo, quindi sen 1° è dato con grande approssimazione dalla formola [7] arrestandovi il 2° membro ai primi tre termini:

$$\operatorname{sen} 1^\circ = \frac{\pi}{180} - \frac{\pi^3}{180^3\lfloor 3} + \frac{\pi^5}{180^5 \lfloor 5}.$$

2° Sia ora $\varphi(x)=\cos x$.

Si ha

$$\begin{array}{ll} & \varphi(0)=1, \\ \varphi'(x)=-\operatorname{sen} x & \varphi'(0)=0, \\ \varphi''(x)=-\cos x & \varphi''(0)=-1, \\ \varphi'''(x)=\operatorname{sen} x & \varphi'''(0)=0, \\ \varphi^{IV}(x)=\cos x=\varphi(x) & \varphi^{IV}(0)=1, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

quindi, per la [6] ove si prenda $n=2m$, n = 2m

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^4}{\lfloor 4} - \frac{x^6}{\lfloor 6} + \ldots \pm \frac{x^{2m}}{\lfloor 2m} + R_n(x),}$$

ove

$$R_n(x) = \mp \frac{x^{2m+1}}{\lfloor 2m+1} \operatorname{sen}(\theta x),$$

e quindi

$$\left|R_n(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{2m+1}}{\lfloor\underline{2m+1}}.$$

3°. Sia $\varphi(x) = e^x$.

Si ha

$$\varphi(x) = \varphi'(x) = \varphi''(x) = \varphi'''(x) = \ldots\ldots = e^x$$

quindi

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \ldots\ldots = 1,$$

onde per la [6]

$$e^x = 1 + \frac{x}{\lfloor\underline{1}} + \frac{x^2}{\lfloor\underline{2}} + \frac{x^3}{\lfloor\underline{3}} + \cdots + \frac{x^n}{\lfloor\underline{n}} + R_n(x)$$

ove

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{\lfloor\underline{n+1}}\, e^{\theta x}.$$

§. 4. Formola del binomio di Newton.

Facciamo un'altra applicazione notevolissima della formola di Taylor. Consideriamo la funzione x^n della variabile x, ove n indica un numero intero positivo; le sue derivate successive sono

x^n

$$f'(x) = n x^{n-1},$$
$$f''(x) = n(n-1) x^{n-2},$$
$$f'''(x) = n(n-1)(n-2)\, x^{n-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n-1)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2\,x,$$
$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1 = n!,$$
$$f^{(n+1)}(x) = f^{(n+2)}(x) = \ldots\ldots = 0.$$

Esse si possono esprimere tutte mediante l'unica formula

$$f^{(r)}(x) = n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)x^{n-r},$$

da cui, dividendo per $r!$ e ricordando la formola che dà il numero $\binom{n}{r}$ delle combinazioni di n elementi ad r ad r, si ottiene

$$\frac{f^{(r)}(x)}{r!} = \binom{n}{r} x^{n-r}.$$

Sostituendo ora $a+h$ ad x in x^n e applicando la formola di Taylor, siccome le derivate di x^n di ordine superiore ad n sono tutte nulle, lo sviluppo di $(a+h)^n$ si arresterà all'n-esima potenza di h e sarà

[1] $$(a+h)^n = a^n + na^{n-1}h + \binom{n}{2}a^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{r}a^{n-r}h^r + \ldots + nah^{n-1} + h^n.$$

Questa formola dicesi la formola del binomio di Newton ed è caso particolare di una più generale dovuta appunto a Newton; ma pel caso qui considerato, di n intero positivo, era già nota ai Cinesi fin dal secolo decimoquarto e fu data per la prima volta in Italia da Niccolò Tartaglia (anno 1556).

Essa è un'identità formale rispetto ad a e h, quindi continua a sussistere anche se essi sono numeri complessi, (poichè in essa sui numeri a e h si applicano delle sole operazioni di addizione, moltiplicazione ed elevazione a potenza con esponente intero, le quali si eseguiscono colle stesse regole tanto nel campo dei numeri reali quanto nel campo dei numeri complessi)

In particolare, ponendo $a+h=x+iy$, avremo:

$$(x+iy)^n = x^n + nx^{n-1}iy + \binom{n}{2}x^{n-2}i^2y^2 + \dots + nxi^{n-1}y^{n-1} + i^ny^n.$$

Sostituendo ad $i^2, i^3, i^4, i^5, \dots$ i loro valori $-1, -i, 1, i, \dots$ potremo separare i termini reali dai termini aventi per fattore i: e precisamente, se per fissare le idee supponiamo n pari, avremo:

$$(x+iy)^n = x^n - \binom{n}{2}x^{n-2} + \binom{n}{4}x^{n-4} - \dots \pm y^n + i\left[nx^{n-1}y - \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \binom{n}{5}x^{n-5}y^5 - \dots \mp nxy^{n-1}\right]$$

Osservazione — Nello scrivere la [1] abbiamo tenuto conto che (pag. 9)

$$\binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n,$$

$$\boxed{\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1}$$

In generale

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r},$$

quindi nella [1] sono eguali i coefficienti estremi e gli equidistanti dagli estremi.

Il numero totale dei termini del secondo membro della [1] è $n+1$. Quindi, se n è dispari, i primi $\frac{n+1}{2}$ coefficienti numerici sono rispettivamente eguali ai rimanenti $\frac{n+1}{2}$ ma in ordine inverso; se n è pari, i primi $\frac{n}{2}$ sono rispettivamente eguali agli ultimi $\frac{n}{2}$ in ordine inverso (ma vi è un coefficiente intermedio isolato.)

Di ciò è bene tener conto nelle applicazioni:

1° — $(a+h)^5 = a^5 + 5a^4h + \binom{5}{2}a^3h^2 + \dots$

$= a^5 + 5a^4h + 10a^3h^2 + 10a^2h^3 + 5ah^4 + h^5,$

2° — $(a+h)^6 = a^6 + 6a^5h + \binom{6}{2}a^4h^2 + \binom{6}{3}a^3h^3 + \dots\dots$

$= a^6 + 6a^5h + 15a^4h^2 + 20a^3h^3 + 15a^2h^4 + 6ah^5 + h^6.$

3° — $(2x-1)^7 = (2x)^7 - 7(2x)^6 + \binom{7}{2}(2x)^5 - \binom{7}{3}(2x)^4 + \dots\dots$

$= (2x)^7 - 7(2x)^6 + 21.(2x)^5 - 35.(2x)^4 + 35(2x)^3 - 21(2x)^2 + 7(2x) - 1$

$= 128x^7 - 448x^6 + 672x^5 - 560x^4 + 280x^3 - 84x + 14x - 1.$

§.5. Formola di Taylor per le funzioni intere.

Sia $P(z)$ una funzione razionale intera del grado n in z, ossia un polinomio di grado n nella variabile z. Ordinandola secondo le potenze discendenti di z, essa assume la forma

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots\dots + a_{n-1} z + a_n,$$

dove $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ sono delle costanti qualunque e $a_0 \neq 0$, se vogliamo che $P(z)$ sia del grado n.

Le sue derivate successive sono

$$P'(z) = na_0 z^{n-1} + (n-1)a_1 z^{n-2} + \dots + 2a_{n-2} z + a_{n-1},$$

$$P''(z) = n(n-1)a_0 z^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1 z^{n-3} + \dots + 2a_{n-2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P^{(n-1)}(z) = n(n-1)(n-2)\dots 3.2a_0 z + (n-1)(n-2)\dots\dots 2.1.a_1,$$

$$P^{(n)}(z) = n(n-1)\dots\dots 3.2.1.a_0 = n!\,a_0,$$

$$P^{(n+1)}(z) = P^{(n+2)}(z) = \dots\dots = 0.$$

Sostituendo quindi $a+h$ a z in $P(z)$ e sviluppando $P(a+h)$ secondo la formola di Taylor, si ottiene

$$P(a+h) = P(a) + hP'(a) + h^2\frac{P''(a)}{2!} + \dots + h^r\frac{P^{(r)}(a)}{r!} + \dots + h^n\frac{P^{(n)}(a)}{n!}$$

Per l'osservazione fatta poc'anzi questa formola vale anche se a e h sono dei numeri complessi. Notiamo poi che il coefficiente $\frac{P^{(n)}(a)}{n!}$ di h^n è sempre uguale alla costante a_0.

Ponendo nella formola precedente $a+h=z$, donde $h=z-a$, ne risulta la formola equivalente.

$$P(z)=P(a)+(z-a)P'(a)+(z-a)^2\frac{P''(a)}{2!}+\dots+(z-a)^n\frac{P^{(n)}(a)}{n!}$$

§ 6 - Divisione per ~~x-a~~ $z-a$ - Regola di Ruffini.

La formola precedente può scriversi

$$P(z)=(z-a)\left[P'(a)+(z-a)\frac{P''(a)}{2!}+\dots+(z-a)^{n-1}\frac{P^{(n)}(a)}{n!}\right]+P(a)$$

ed essendo $P(a)$ di grado zero in z e quindi di grado minore di $z-a$, ci mostra che dividendo $P(z)$ per $z-a$ si ottiene come quoziente il polinomio

$$P_1(z)=P'(a)+(z-a)\frac{P''(a)}{2!}+(z-a)^2\frac{P'''(a)}{3!}+\dots+(z-a)^{n-1}\frac{P^{(n)}(a)}{n!},$$

di grado $n-1$ in z, e come resto il numero $P(a)$, cioè il valore che la funzione $P(z)$ assume per $z=a$. Ne consegue pertanto che: il resto della divisione di un polinomio $P(z)$ per $z-a$ è uguale al valore che prende il polinomio per $z=a$.
E in conseguenza: affinché una funzione intera $P(z)$ della variabile z si annulli per $z=a$, è necessario e sufficiente che essa sia divisibile per $z-a$. (Risultati ben noti dall'Algebra elementare).

Ora il polinomio $P_1(z)$ a sua volta si può scrivere così

$$P_1(z)=(z-a)\left[\frac{P''(a)}{2!}+(z-a)\frac{P'''(a)}{3!}+\dots+(z-a)^{n-2}\frac{P^{(n)}(a)}{n!}\right]+P'(a)$$

ciò è chiaro che, dividendolo per $z-a$, si ottiene come resto $P'(a)$ e come quoziente il polinomio:

$$P_2(z) = \frac{P''(a)}{2!} + (z-a)\frac{P'''(a)}{3!} + \dots + (z-a)^{n-2}\frac{P^{(n)}(a)}{n!}.$$

Se questo quoziente si divide anch'esso per $z-a$, si otterrà analogamente per resto $\frac{P''(a)}{2!}$ e per quoziente

$$P_3(z) = \frac{P'''(a)}{3!} + (z-a)\frac{P^{IV}(a)}{4!} + \dots + (z-a)^{n-3}\frac{P^{(n)}(a)}{n!}$$

Così proseguendo sino ad ottenere per resto $\frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$ e per quoziente $\frac{P^{(n)}(a)}{n!}$, cioè a_0, si deduce il

Teorema - I successivi n resti e l'n^o quoziente ottenuti dividendo $P(z)$ per $z-a$ e poi il quoziente per $z-a$, e così via, sono uguali ai valori che assumono per $z=a$ le funzioni

$$P(z),\ P'(z),\ \frac{P''(z)}{2!},\ \frac{P'''(z)}{3!},\ \dots,\ \frac{P^{(n-1)}(z)}{(n-1)!},\ \frac{P^{(n)}(z)}{n!}.$$

Osservando ora che quando i primi r resti delle divisioni indicate sono nulli allora e solo allora $P(z)$ è divisibile per $(z-a)^r$, segue che:

Affinché una funzione intera $P(z)$ sia divisibile per $(z-a)^r$ è necessario e sufficiente che si abbia

$$P(a)=0,\ P'(a)=0,\ P''(a)=0,\ \dots,\ P^{(r-1)}(a)=0;$$

cioè che per $z=a$ si annullino la funzione e le sue prime $r-1$ derivate.

Allora $P'(z)$ è divisibile per $(z-a)^{r-1}$, $P''(z)$ per $(z-a)^{r-2}$, e così via.

Le successive divisioni di $P(z)$, $P_1(z)$, ... per $z-a$ si eseguono praticamente mediante l'applicazione ripetuta della

Regola di Ruffini. Il quoziente di una funzione intera $P(x)$ di z, di grado n, ordinata secondo le potenze discendenti di z, per il binomio $z-a$, è una funzione intera di grado $n-1$ ordinata secondo le potenze discendenti di z. Il primo coefficiente del quoziente è eguale al primo coefficiente del dividendo, e ciascun altro coefficiente del quoziente è eguale al suo precedente moltiplicato per a, più il coefficiente suo omologo nel dividendo. Il resto poi è eguale all'ultimo coefficiente del quoziente moltiplicato per a, più l'ultimo coefficiente del dividendo.

Infatti si ha:

$$P(z)-P(a)=(a_0z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_n)-(a_0a^n+a_1a^{n-1}+\dots+a_n)$$
$$=a_0(z^n-a^n)+a_1(z^{n-1}-a^{n-1})+\dots+a_{n-1}(z-a)$$

quindi

$$\frac{P(z)-P(a)}{z-a}=a_0\frac{z^n-a^n}{z-a}+a_1\frac{z^{n-1}-a^{n-1}}{z-a}+\dots+a_{n-2}\frac{z^2-a^2}{z-a}+a_{n-1}$$

ossia

$$\frac{P(z)-P(a)}{z-a}=a_0\left(z^{n-1}+az^{n-2}+a^2z^{n-3}+\dots+a^{n-2}z+a^{n-1}\right)+$$
$$+a_1\left(z^{n-2}+az^{n-3}+a^2z^{n-4}+\dots+a^{n-3}z+a^{n-2}\right)+$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+a_{n-2}(z+a)$$
$$+a_{n-1}$$
$$=a_0z^{n-1}+(a_0a+a_1)z^{n-2}+(a_0a^2+a_1a+a_2)z^{n-3}+\dots$$
$$+(a_0a^{n-2}+a_1a^{n-3}+\dots+a_{n-2})z+(a_0a^{n-1}+a_1a^{n-2}+\dots+a_{n-2}a+a_{n-1})$$

Ora il secondo membro è il quoziente di $P(z)$ per $z-a$, e si vede facilmente che i suoi coefficienti si formano nel modo detto nell'enunciato.

Anche il resto $P(a)$ si può formare come è detto nell'enunciato, perchè

$$P(a) = (a_0 a^{n-1} + a_1 a^{n-2} + \dots + a_{n-1})a + a_n .$$

Per esempio vogliasi dividere la funzione

$$P(z) = 3z^4 - 6z^2 - 12z - 1$$

per $z-2$. Le operazioni da eseguire sono tutte indicate nel seguente schema:

$$\begin{array}{r|ccccc} 2 & 3 & 0 & -6 & -12 & -1 \\ & & 3.2=6 & 6.2=12 & 6.2=12 & 0.2=0 \\ \hline & 3 & 6+0=6 & 12-6=6 & 12-12=0 & \multicolumn{1}{|c}{0-1=-1} \end{array} .$$

In pratica si scriverà

$$\begin{array}{r|ccccc} 2 & 3 & 0 & -6 & -12 & -1 \\ & & 6 & 12 & 12 & 0 \\ \hline & 3 & 6 & 6 & 0 & \multicolumn{1}{|c}{-1} \end{array} .$$

I primi quattro numeri dell'ultima orizzontale sono i coefficienti del quoziente

$$3z^3 + 6z^2 + 6z,$$

il quinto -1 è il resto della divisione.

Naturalmente si può fare anche a meno di scrivere i numeri della seconda orizzontale dello schema, e si può fare a meno di scrivere addirittura lo schema stesso, ed eseguire i calcoli mentalmente, quando questi non siano complicati.

Notiamo che il resto -1 è il valore della funzione $P(z)$ per $z=2$, cioè

$$P(2) = -1 .$$

Anzi la regola di Ruffini è il mezzo più rapido per il calcolo di $P(2)$. $P(2)$ è il primo dei coefficienti dello sviluppo di $P(2+h)$ con la formola di Taylor:

$$P(2+h)=P(2)+hP'(2)+h^2\frac{P''(2)}{2!}+h^3\frac{P'''(2)}{3!}+h^4\frac{P^{IV}(2)}{4}$$

Volendo calcolare i rimanenti, basterà dividere il quoziente ottenuto per $z-2$ con la regola di Ruffini, il nuovo quoziente per $z-2$, e così via.

L'operazione si dispone allora secondo il seguente schema che è un'estensione di quello poc'anzi adoperato (e che è anche conosciuto sotto il nome di regola di Horner):

2	3	0	-6	-12	-1
	3	6	6	0	-1
	3	12	30	60	
	3	18	66		
	3	24			

Si ha dunque

$$P(2+h)=-1+60h+66h^2+24h^3+3h^4.$$

In generale è questa la via che si segue quando in un polinomio $P(z)$ si vuole eseguire la sostituzione

$$z=a+h$$

e si vuole ordinare il risultato secondo le potenze di h.

Tale sostituzione è di uso frequente.

Per es. se nella funzione

$$f(z)=az^2+bz+c$$

poniamo

$$z = x + h,$$

otteniamo (*)

$$f(z) = a(x+h)^2 + b(x+h) + c$$
$$= ax^2 + (2ha+b)x + (ah^2 + bh + c);$$

quindi, assumendo

$$2ha + b = 0 \quad \text{o} \quad h = -\frac{b}{2a},$$

abbiamo

$$f(z) = ax^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = ax^2 - \frac{b^2-4ac}{4a},$$

eguagliando $f(x)$ a zero, si ricava

$$x = \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

ma

$$z = x + h = x - \frac{b}{2a},$$

quindi

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

sono le radici dell'equazione del secondo grado

$$az^2 + bz + c = 0.$$

(*) In un caso tanto semplice è inutile ricorrere alla regola precedente per effettuare la sostituzione.

Capitolo XI.

§.1 – Osservazioni su $P(z)$ con z complesso.

Se nella funzione intera $P(z)$ poniamo $z = x + iy$, con x e y reali, essa diviene

$$P(x+iy) = a_0(x+iy)^n + a_1(x+iy)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x+iy) + a_n.$$

Sviluppando le potenze n^a, $(n-1)^a$, ... di $x+iy$ secondo la formola del binomio di Newton e raccogliendo separatamente i termini reali e i termini col fattore i, si ottiene:

$$P(x+iy) = R(x,y) + i\,I(x,y),$$

in cui $R(x,y)$ e $I(x,y)$, sono funzioni reali delle due variabili reali x e y; anzi sono funzioni (algebriche razionali) intere di grado n rispetto ad x e y complessivamente, cioè polinomii formati dalla somma di termini del tipo $Cx^r y^s$, ove C è una costante reale e r, s sono numeri interi positivi tali che $r+s \leq n$.

Ciò premesso, per definizione, si ha $P(x+iy) = 0$ quando sono nulle separatamente $R(x,y)$ e $I(x,y)$; ne segue che sarà pure

$$|P(x+iy)| = \left|\sqrt{[R(x,y)]^2 + [I(x,y)]^2}\right| = 0. \quad [1]$$

Viceversa, se è vera la [1] saranno nulle separatamente $R(x,y)$ ed $I(x,y)$, essendo esse reali, e quindi anche $P(x+iy)$.

V. n. r. 151 in [illegible]

Quindi l'annullarsi di $P(x+iy)$ equivale allo annullarsi della funzione reale $[R(x,y)]^2+[I(x,y)]^2$ delle due variabili reali x e y.

Osserviamo pure che, essendo $R(x,y)$ ed $I(x,y)$ funzioni continue di x e y, è pure funzione continua di x e y la funzione

$$[R(x,y)]^2+[I(x,y)]^2.$$

§2. Teorema di Weierstrass per le funzioni di due variabili.

Il teorema di Weierstrass (Cfr. pag. 157) sull'esistenza del massimo e minimo di una funzione continua di una variabile si estende a una funzione di due variabili nel modo seguente:

Se una funzione di due variabili indipendenti x e y è continua in un'area piana A limitata da un contorno chiuso, esiste allora almeno un punto del campo A in cui essa assume il suo maggior valore e almeno un punto in cui essa assume il suo minor valore.

Sia $z=f(x,y)$ la funzione data, continua in un campo A che, per semplicità, supponiamo essere un'area rettangolare $ABCD$ compresa tra le rette di equazioni $x=a$, $x=b$, e le rette di equazioni $y=c$, $y=d$.

Dando a y un valore costante, compreso tra c e d, e facendo variare x, la $z=f(x,y)$ diventa una funzione della sola x, definita e continua nell'intervallo $a \leq x \leq b$, e assumerà quindi in un punto almeno di quest'intervallo il

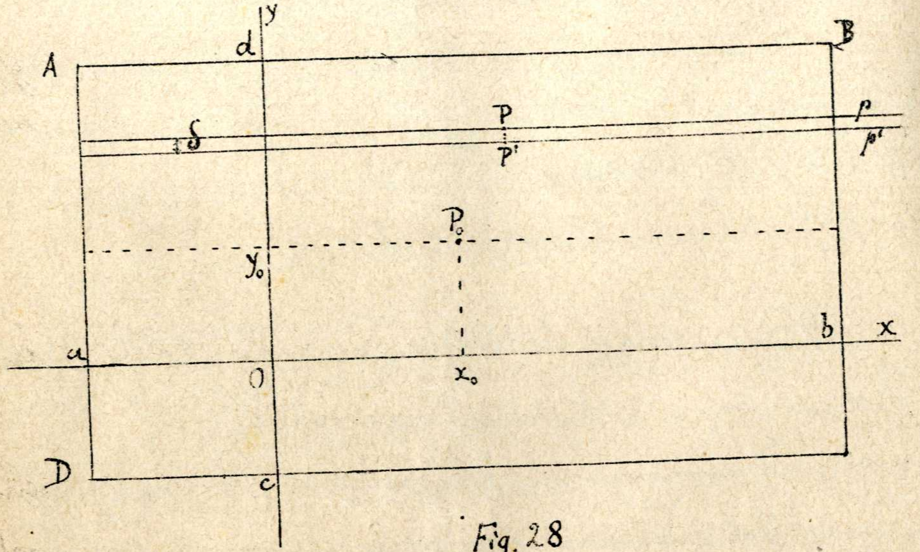

Fig. 28

suo massimo e il suo minimo valore, cioè: su ogni parallela all'asse x compresa tra le rette $y=c$, $y=d$, la $z=f(x,y)$ ammette un massimo M e un minimo m. Questi variano quando varia la parallela stessa cioè sono funzioni di y nell'intervallo (c,d). Dico che esse sono continue nell'intervallo stesso. Infatti per la continuità di $f(x,y)$ (Cfr. pag. 156), preso un ε piccolo ad arbitrio, esiste un δ tale che comunque presi in A due punti P e P' distanti tra loro per meno di δ, i valori corrispondenti della funzione differiscono tra loro per meno di ε.

Perciò comunque prese due rette p e p' parallele all'asse x distanti tra loro meno di δ, e comunque preso sulla p un punto $P(x,y)$, si troverà sulla p' un punto $P'(x,y')$ (quello situato con P su una stessa parallela all'asse y).

tale che

$$|f(x,y)-f(x,y')|<\varepsilon,$$

ossia tale che $f(x,y')$ è compreso tra $f(x,y)-\varepsilon$ e $f(x,y)+\varepsilon$, e quindi anche compreso tra $m-\varepsilon$ e $M+\varepsilon$, se indichiamo con m e M il minimo e il massimo di $f(x,y)$ sulla retta p. Di qui si deduce che la funzione f sulla retta p' non può avere un massimo superiore a $M+\varepsilon$, perchè se in un punto P' di p' la f avesse un valore maggiore, ad es. $M+2\varepsilon$, essendoci sulla p un punto P per cui $f(x,y)$ differisce da $f(x,y')$ per meno di ε, in P la funzione avrebbe un valore almeno eguale a $M+\varepsilon$, il che non può darsi, perchè M è il massimo della f sulla p.

Dunque dato ε, esiste un δ tale che, prese due parallele p e p' qualunque distanti tra loro meno di δ, il massimo sulla p e il massimo sulla p' differiscono tra loro per meno di ε; ciò equivale a dire che il massimo M della funzione su una parallela all'asse x compresa tra le rette $y=c$ e $y=d$, è funzione continua di y nell'intervallo (c,d).

Vi sarà quindi, per lo stesso teorema di Weierstrass, almeno un punto dell'intervallo (c,d) in cui M assumerà il suo massimo valore. Sia y_0 questo valore, e sia x_0 il punto della retta $y=y_0$ in cui la $f(x,y_0)$ assume il suo maggior valore; sarà evidentemente $P_0(x_0,y_0)$ un punto in cui la $f(x,y)$ assume il suo maggior valore. Analogamente si dimostra che esiste un punto in cui essa assume il suo minor valore, dimodochè il teorema è dimostrato.

La dimostrazione va leggermente modificata se l'area A, in cui $f(x,y)$ è definita e continua, non è un rettangolo coi lati paralleli agli assi coordinati: giacchè se anche la distanza tra due rette p e p' parallele all'asse x. è minore di δ, può darsi però che per un punto P della p, vicino al contorno, non vi sia il corrispondente P' sulla p' distante da P meno di δ.

Perchè ciò accada, bisogna che la distanza tra le due rette p e p' sia minore di un certo δ' che dipende dalla forma del contorno e che per i contorni usuali (circolare, ellittico, ...) si può sempre determinare, com'è facile comprendere.

Se, per esempio, il contorno è un circolo C, basterà assumere δ' uguale alla corda di un arco del Circolo C avente per lunghezza δ: saremo allora sicuri che, comunque si scelga sulla p un punto P, ci sarà sulla p' un punto P' il quale disterà da P meno di δ, e quindi la dimostrazione data continuerà a sussistere.

Capitolo XII.

Equazioni intere ad una incognita.

§. 1° Definizioni.

Sia data una funzione intera di grado n di una variabile z

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\dots+a_{n-1}z+a_n,$$

a coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_n$ reali o complessi.

Eguagliando a zero questa funzione, si ottiene il tipo di una equazione (algebrica, razionale) intera ad una incognita.

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\dots+a_{n-1}z+a_n=0.$$

o in breve

$$f(z)=0.$$

Il grado n e i coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_n$ della funzione si dicono grado e coefficienti dell'equazione.

I valori di z che la soddisfanno, cioè che annullano la funzione $f(z)$, si dicono radici o soluzioni dell'equazione.

Risolvere l'equazione vuol dire calcolarne le radici.

Alcuni coefficienti, ma non tutti, possono anche essere nulli. Non può essere nullo il primo a_0, se l'equazione è di grado n (e non di grado inferiore).

Si può quindi sempre dividere l'equazione per a_0, e supporla ridotta al tipo

$$f(z)=0,$$

ove

$$f(z)=z^n+a_1 z^{n-1}+a_2 z^{n-2}+\dots+a_{n-1}z+a_n$$

No però

§.2 - Esistenza delle radici.

Lemma 1° - Se A è la massima delle quantità

$$|a_1|,\ |a_2|,\ \dots,\ |a_{n-1}|,\ |a_n|+K,$$

dove K è una quantità qualsiasi positiva, allora per

$$|z|>A+1$$

si ha

$$|f(z)|>K.$$

Infatti

$$|f(z)|=|z^n+a_1 z^{n-1}+\dots+a_{n-1}z+a_n|,$$

e quindi (p. 145).

$$|f(z)|\geq|z|^n-|a_1||z|^{n-1}-\dots-|a_{n-1}||x|-|a_n|,$$

da cui

$$|f(z)|-K\geq|z|^n-|a_1||z|^{n-1}-\dots-|a_{n-1}||z|-(|a_n|+K).$$

Sostituendo ad $|a_1|,\dots,|a_{n-1}|,\ |a_n|+K$ la massima A fra esse, si ha a fortiori

$$|f(z)|-K\geq|z|^n-A\left\{|z|^{n-1}+|z|^{n-2}+\dots+|z|+1\right\}$$

ossia se $|z| \neq 1$,

$$|f(z)| - K \geq |z|^n - A\,\frac{|z|^n - 1}{|z| - 1}$$

$$|f(z)| - K \geq \frac{|z|^n\{|z| - A - 1\} + A}{|z| - 1}.$$

Se $|z| \geq A+1$, è anche $|z| > 1$, e quindi ambo i termini del secondo membro sono positivi; sarà quindi positivo anche il primo, cioè

$$|f(z)| > k. \qquad \text{c.d.d.}$$

<u>Corollario</u>. Ponendo $k = 0$, si ha che: i valori di z per cui $f(z) = 0$, ossia le radici di $f(z) = 0$, non possono superare in modulo la massima delle quantità

$$|a_1|, |a_2|, \dots |a_n|.$$ aumentata di 1

<u>Lemma II°</u>. – Se $z = \alpha$ è un punto tale che $f(\alpha) \neq 0$, esiste almeno un punto $\alpha + h$ tale che

$$|f(\alpha+h)| < |f(\alpha)|.$$

Infatti, si ha (Cap. X, § 5)

$$f(\alpha+h) = f(\alpha) + hf'(\alpha) + \frac{h^2}{\lfloor 2}f''(\alpha) + \dots + \frac{h^n}{\lfloor n}f^{(n)}(\alpha).$$

Nel secondo membro, una almeno delle

$$h, h^2, \dots, h^n$$

ha un coefficiente non nullo, perché per es. il coefficiente di h^n è eguale ad 1. (Cfr. X, § 5 in fine). Il primo di questi coefficienti diversi da zero sia quello di h^m. Avremo

$$f(\alpha+h) = f(\alpha) + \frac{h^m}{\lfloor m}f^{m}(\alpha) + \dots + \frac{h^n}{\lfloor n}f^{(n)}(\alpha)$$

e, dividendo per $f(\alpha)$ (che per ipotesi non è zero),

$$\frac{f(\alpha+h)}{f(\alpha)} = 1 + b_m h^m + b_{m+1} h^{m+1} + \dots + b_n h^n,$$

ove si è posto

$$b_i = \frac{1}{\lfloor i}\,\frac{f^{(i)}(\alpha)}{f(\alpha)} \qquad (i = m, m+1, \ldots,) \quad \text{e } b_m \neq 0.$$

b_m è un numero, reale o complesso, che possiamo ~~sotto~~ porre la forma trigonometrica.

$$b_m = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

Inoltre h è arbitrario, e noi porremo

$$h = \rho\left(\cos\frac{\pi-\theta}{m} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi-\theta}{m}\right).$$

Sarà, per la regola di Moivre.

$$h^m = \rho^m[\cos(\pi-\theta) + i\,\mathrm{sen}(\pi-\theta)],$$

e quindi

$$b_m h^m = r\rho^m(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi) = -r\rho^m,$$

e però

$$\frac{f(\alpha+h)}{f(\alpha)} = 1 - r\rho^m + b_{m+1}h^{m+1} + \cdots + b_n h^n,$$

donde (pag. 145)

$$\left|\frac{f(\alpha+h)}{f(\alpha)}\right| \leq |1 - r\rho^m| + |b_{m+1}|\rho^{m+1} + \cdots + |b_n|\rho^n,$$

essendo

$$|h| = \rho.$$

Ora ρ è arbitrario, tale essendo h. Per ρ abbastanza piccolo è

$$\rho^m < \frac{1}{r} \qquad 1 - r\rho^m > 0,$$

e quindi

$$|1 - r\rho^m| = 1 - r\rho^m.$$

Dunque, per ρ abbastanza piccolo,

$$\left|\frac{f(\alpha+h)}{f(\alpha)}\right| \leq 1 - r\rho^m + |b_{m+1}|\rho^{m+1} + \dots + |b_n|\rho^n$$

ossia

$$\left|\frac{f(\alpha+h)}{f(\alpha)}\right| \leq 1 - r\rho^m\left\{1 - \frac{|b_{m+1}|}{r}\rho - \dots - \frac{|b_n|}{r}\rho^{n-m}\right\}. \quad [1]$$

Ora, se facciamo tendere ρ a 0, tutti i termini della espressione tra $\{\ \}$ tendono a 0, tranne il primo, quindi detta espressione tende ad 1; or se una quantità tende ad un limite positivo, essa finisce per diventare e restare positiva, quindi, per ρ abbastanza piccolo, la quantità tra $\{\ \}$ è positiva. Ne segue che

$$r\rho^m\left\{1 - \frac{|b_{m+1}|}{r}\rho - \dots - \frac{|b_n|}{r}\rho^{n-m}\right\}$$

tende a zero assumendo valori positivi, e però il secondo membro di [1] finirà per diventare minore di 1 per ρ abbastanza piccolo. Per tali valori di ρ sarà quindi a fortiori

$$\left|\frac{f(\alpha+h)}{f(\alpha)}\right| < 1,$$

ossia

$$|f(\alpha+h)| < |f(\alpha)| \qquad \text{c. d. d.}$$

Teorema di D'Alembert. Esiste almeno un punto $z=\alpha$ ove $f(\alpha)=0$, ossia esiste almeno una radice dell'equazione $f(z)=0$.

Infatti, se $f(1)=0$, il teorema è dimostrato

Se così non è, e nel lemma I° poniamo $|f(1)|=k$, determinando la corrispondente quantità A, deduciamo che per

$$z > A+1$$

è

$$|f(z)| > |f(1)| = k > 0.$$

Sia C il cerchio $|z| = A+1$(*) del piano rappresentativo della variabile complessa

$$z = x + iy.$$

Fuori di C la $|f(z)|$ ha valori tutti più grandi di $|f(1)|$, quindi il punto $z=1$ è interno a C.

Ora, per il teorema di Weierstrass (pag. 247) esiste in C almeno un punto $z=\alpha$, ove $|f(z)|$ (che è funzione continua di x, y nel campo finito C, cfr. p. 247) assume il valore μ più piccolo tra tutti i valori che essa assume in C. In particolare

$$\mu < |f(1)|,$$

e quindi a fortiori μ è più piccolo anche di tutti i valori che $|f(z)|$ assume fuori di C. Quindi μ è il più piccolo valore che $|f(z)|$ assume in tutto il piano.

Ed ora $\mu = 0$, perchè, se così non fosse, per il lemma II° esisterebbe un punto $\alpha + h$ tale che

$$|f(\alpha + h)| < |f(\alpha)|;$$

ciò che è assurdo, perchè

$$\mu = |f(\alpha)|$$

è il valore minimo di $|f(z)|$.

(*) Tale equazione rappresenta un cerchio, perchè tutti i punti z il cui modulo è $A+1$ distano dall'origine 0 della quantità costante $A+1$.

Dunque $z=\alpha$ è radice di $f(z)=0$.

§.3 - Scomposizione in fattori lineari.

Abbiamo assodato che un'equazione intera
$$f(z)=a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$
ha almeno una radice. Chiamiamola z_1.

Essendo $f(z_1)=0$, la funzione $f(z)$ sarà divisibile esattamente per $z-z_1$ (Cap. X §.6), e il quoziente sarà una funzione $f_1(z)$ di grado $n-1$ in z il cui primo termine sarà $a_0 z^{n-1}$;
$$f_1(z)=a_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \dots + b_{n-1}.$$

Avremo quindi
$$f(z)=(z-z_1) f_1(z).$$

Ora l'equazione $f_1(z)=0$, per il teorema di d'Alembert, ammette a sua volta almeno una radice, e sia z_2; sarà $f_1(z)$ divisibile esattamente per $z-z_2$ e il quoziente sarà una funzione intera $f_2(z)$ di grado $n-2$ in z col primo termine $a_0 z^{n-2}$, quindi sarà
$$f_1(z)=(z-z_2) f_2(z).$$

L'equazione $f_2(z)=0$ avrà a sua volta almeno una radice z_3, ecc. Così continuando, si ottengono funzioni $f, f_1, f_2 \dots$ di grado decrescente, sicchè si giungerà certamente (dopo $n-1$ divisioni) ad una funzione $f_{n-1}(z)$ di primo grado in z, col primo termine $a_0 z$.

L'equazione $f_{n-1}(z)=0$ ammetterà una radice (ed una sola) z_n, quindi $f_{n-1}(z)$ sarà divisibile per $z-z_n$ e il quoziente sarà una funzione di grado zero in z col primo termine $a_0 z^0$ cioè sarà eguale ad a_0, quindi

$$f_{n-1}(z) = (z - z_n)\, a_0 .$$

Essendo evidentemente

$$f(z) = (z - z_1) f_1(z),\; f_1(z) = (z - z_2)\, f_2(z), \ldots, f_{n-1}(z) = (z - z_n)\, a_0$$

si avrà per successiva sostituzione

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2) f_2(z) = \ldots = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)\, a_0$$

ossia

$$f(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n) .$$

Or si osservi che per $z = z_1$, per $z = z_2, \ldots$, per $z = z_n$ si annullano rispettivamente i fattori

$$z - z_1,\; z - z_2, \ldots, z - z_n$$

di cotesto prodotto e quindi anche il prodotto, e quindi anche $f(z)$ sicchè $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sono radici dell'equazione $f(z) = 0$. Ma per z diverso da $z_1, z_2, \ldots, z_n$ non si annulla nessun fattore, quindi neanche $f(z)$. Nè $f(z)$ ammette nessun fattore del tipo $z - a$ e diverso da $z - z_1, \ldots, z - z_n$, altrimenti $f(z)$ si annullerebbe anche per $z = a$. Dunque

Ogni equazione intera di grado n

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

ammette n radici e non più. La funzione intera $f(z)$ è eguale al prodotto degli n fattori lineari ottenuti sottraendo dalla variabile z ciascuna delle radici dell'equazione, oltre ad un fattore costante, che è il coefficiente a_0 del termine di grado n. E questi sono i soli fattori lineari della funzione; ossia la decomposizione di una funzione intera in fattori lineari è unica.

Un equaz. intera di grado n ammette tante radici quante [illegible] [illegible] distinte se entrano n volte uno fattore [illegible]

Pel caso di $n=2$, ciò era già noto dall'Algebra elementare.

§. 11 - Radici semplici e multiple.

Nulla vieta che fra i numeri $z_1, z_2, \ldots z_n$ ve ne siano degli eguali, e quindi che fra i fattori lineari $z-z_1, z-z_2, \ldots, z-z_n$ ve ne siano degli eguali, per esempio:

$$z^2-2z+1=(z-1)(z-1)=(z-1)^2 .$$

Allora le radici della equazione sono effettivamente in numero minore di n; tuttavia, per uniformità di linguaggio e per tener conto che i fattori lineari di $f(z)$ sono sempre n, si dice che le radici di una equazione intera di grado n sono sempre n, ma che fra esse possono esservene delle eguali.

Per esempio le equazioni

[1] $\quad (z-1)(z-2)=0, \quad (z-1)^2(z-2)=0, \quad (z-1)(z-2)^3=0$

hanno le stesse radici 1 e 2, pur essendo di grado differente (2°, 3° e 4°). Per tener conto di quest'ultimo fatto, diremo che la prima equazione ha due radici 1, 2; che la seconda ha tre radici 1, 1, 2 (delle quali però due sono eguali); che la terza ha quattro radici 1, 2, 2, 2 (delle quali però tre sono eguali).

Una radice si dice semplice, doppia, tripla, ... $h$pla ... r^{pla} secondo che essa entra in uno, due, tre, ... r fattori lineari di $f(z)$, vale a dire secondo che $f(z)$ è divisibile per la potenza prima, seconda, terza, ... r^{esima}

del corrispondente fattore lineare, il quale dicesi pure semplice, doppio, triplo, ..., r^{plo}. Dimostrare!

Il numero r dicesi ordine della radice in questione. Per es. 1 è radice semplice per la prima equazione [1], doppia per la seconda, semplice per la terza; 2 è radice semplice per le prime due equazioni, tripla per la terza.

Segue dal §. 3 e dal presente che: affinchè due equazioni intere

$$f(z)=a_0z^n+\dots=0 \quad , \quad g(z)=b_0z^m+\dots=0$$

abbiano le stesse radici e degli stessi ordini, è necessario e sufficiente che i loro primi membri $f(z)$, $g(z)$ differiscano solo per un fattore costante.

Ricordando i risultati del cap. X. §. 6, troviamo che: Affinchè un dato numero α sia radice r^{pla} di una equazione intera $f(z)=0$, cioè affinchè $z-\alpha$ sia fattore r^{plo} di $f(z)$, è necessario e sufficiente che siano nulli i primi r resti forniti dalla regola delle divisioni successive di Ruffini-Horner applicata rispetto a quel numero α.

Sotto altra forma: è necessario e sufficiente che sia

$$f(\alpha)=0\,,\ f'(\alpha)=0,\dots\dots,f^{(r-1)}(\alpha)=0;$$

o anche: è necessario e sufficiente che α sia radice dell'equazione $f(z)=0$ e delle equazioni

$$f'(z)=0,\ f''(z)=0,\dots f^{(r-1)}(z)=0,$$

che si ottengono eguagliando a zero le prime $r-1$ derivate della funzione $f(z)$.

In particolare: affinchè il numero zero sia una radice di ordine r per l'equazione $f(z)=0$, è necessario e sufficiente che in $f(z)$ manchino i termini di grado inferiore ad r.

Ciò consegue dal precedente teorema per $\alpha=0$ e tenendo presente le espressioni di $f'(z)$, $f''(z)$, ... (Cfr. Cap. X. §.5).

Del resto è evidente che il numero 0 è radice r^{pla} di $f(z)=0$ allora e solo allora, quando $f(z)$ si può ridurre alla forma

$$z^r(a_0 z^{n-r}+a_1 z^{n-r-1}+\dots+a_{n-r}).$$

Siccome ciascuna delle funzioni

$$f(z),\ f'(z),\ f''(z),\dots,f^{(r-1)}(z)$$

ha per prima derivata la consecutiva, così è chiaro che:

Ogni radice α che sia r^{pla} per l'equazione $f(z)=0$, è $(r-1)^{pla}$ per $f'(z)=0$, e così via, fino ad essere radice semplice per $f^{(r-1)}(z)=0$.

Esempio: L'equazione

$$f(z)=27z^5+54z^4+117z^3+170z^2+108z+24=0$$

ha la radice tripla $-\frac{2}{3}$, ossia $f(z)$ è divisibile per $\left(z+\frac{2}{3}\right)^3$, come risulta dal seguente calcolo;

$-\frac{2}{3}$	27	54	117	170	108	24
	27	36	93	108	36	0
	27	18	81	54	0	
	27	0	81	0		
	27	−18	93			
	27	36				

Sarà $f(z) = \left(z + \frac{2}{3}\right)^3 (27z^2 + 81)$,

quindi le altre due radici dell'equazione sono quelle dell'equazione del secondo grado

$$27z^2 + 81 = 0.$$

cioè sono

$$z = \pm\sqrt{-\frac{81}{27}} = \pm\, i\sqrt{3}\,.$$

Osservazione – Terminiamo con due osservazioni molto utili.

Quanto precede lo abbiamo dedotto tenendo sempre presente l'ipotesi fatta nel §2, cioè che i coefficienti $a_0\, a_1 \ldots a_n$ non siano tutti nulli. In particolare abbiamo dimostrato che in tal caso l'equazione ha tante radici quanto è il suo grado. Se dunque vogliamo che l'equazione, del grado n, abbia più di n radici, è necessario ammettere che siano nulli tutti i suoi coefficienti; ma ciò è pur sufficiente, perchè essa allora si riduce all'identità $0 = 0$, qualunque sia il valore attribuito a z, cioè ammette effettivamente più di n (infinite) radici.

Se ne deduce che: affinché due funzioni intere

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_n,$$

$$g(z)=b_0z^m+b_1z^{m-1}+\dots+b_m$$

sieno uguali per ogni valore di z è necessario e sufficiente che esse siano identicamente eguali, cioè che siano dello stesso ordine ($m=n$) e che siano eguali i coefficienti dei termini dello stesso grado.

Infatti, affinché sia per ogni valor di z

$$f(z)=g(z)$$

occorre e basta che l'equazione

$$f(z)-g(z)=0$$

ammetta infinite radici, e quindi che abbia nulli tutti i suoi coefficienti.

Intanto, supponendo $n>m$, questa equazione può scriversi

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_{n-m-1}z^{m+1}+(a_{n-m}-b_0)z^m+\dots+(a_n-b_m)=0;$$

quindi dev'esser

$$a_0=0,\ a_1=0,\dots,a_{n-m-1}=0,$$

$$a_{n-m}=b_0,\dots\dots,a_n=b_m,$$

ciò che prova l'enunciato.

§. 5. Relazioni tra i coefficienti e le radici.

Tra i coefficienti

$$a_0,a_1,\dots,a_n$$

e le radici

$$z_1, z_2, \dots, z_n$$

di un'equazione (Σ)

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

passano delle relazioni semplici e notevoli.

Si ha (X)

$$f(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n),$$

quindi

$$\frac{f(z)}{a_0} = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n).$$ Primo $a_0 z^n$ ter...

Per eseguire il prodotto degli n fattori del secondo membro, conviene moltiplicare un termine del primo per uno del secondo, per uno del terzo, e così via sino all'ultimo, e ciò in tutti i modi possibili; la somma di tutti i possibili prodotti di n fattori così ottenuti sarà lo sviluppo del prodotto cercato.

Ora, moltiplicando fra loro i primi termini di ciascun fattore, si ha z^n.

Prendendo i primi termini in tutti i fattori meno uno, e il secondo termine nel fattore escluso; se abbiamo escluso il primo fattore, abbiamo $-z_1 z^{n-1}$; se il secondo, $-z_2 z^{n-1}, \dots$; se l'ultimo, $-z_n z^{n-1}$; sicchè, sommando tutti questi termini, avremo

$$-(z_1 + z_2 + \dots + z_n) z^{n-1}.$$

Se prendiamo il primo termine in tutti i fattori meno due, e il secondo termine nei due fattori esclusi, abbiamo i termini

$$z_1 z_2 z^{n-2},\ z_1 z_3 z^{n-2},\ \dots,\ z_{n-1} z_n z^{n-2},$$

onde, sommando abbiamo

$$(z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n) z^{n-2},$$

dove il coefficiente di z^{n-2} è la somma dei prodotti dei secondi termini dei fattori combinati a due a due.

Analogamente, moltiplicando fra loro i primi termini di tutti i fattori meno tre, e i secondi termini in quelli esclusi, si ha:

$$-(z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + \dots + z_1 z_3 z_n + \dots + z_{n-2} z_{n-1} z_n) z^{n-3}$$

dove il coefficiente di z^{n-3} è la somma dei prodotti dei secondi termini dei fattori combinati a tre a tre.

In generale, è chiaro che il coefficiente di z^{n-r} è la somma dei prodotti dei secondi termini dei fattori combinati ad r ad r. prodotto a 1 a 1 di 2, 3, 5 è [illegible]

Finalmente l'ultimo termine è il prodotto di tutti i secondi termini degli n fattori, cioè

$$(-z_1)(-z_2)\dots(-z_n) = (-1)^n z_1 z_2 \dots z_n .$$

Insomma

$$\frac{f(z)}{[illegible]} = z^n a_0$$

$$-(z_1 + z_2 \overset{p_1}{+} \dots + z_n) z^{n-1}$$

$$+(z_1 z_2 + z_1 z_3 \overset{p_2}{+} \dots + z_1 z_n + z_2 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n) z^{n-2} -$$

$$-(z_1 z_2 z_3 + z_1 \overset{p_3}{z_2} z_4 + \dots + z_1 z_2 z_n + \dots) z^{n-3} +$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+(-1)^n z_1 z_2 \dots\dots z_n .$$

D'altra parte si ha

$$\frac{f(z)}{a_0} = z^n + \frac{a_1}{a_0} z^{n-1} + \frac{a_2}{a_0} z^{n-2} + \dots + \frac{a_n}{a_0}.$$

I secondi membri dei due ultimi sviluppi debbono essere eguali per qualunque valor di z, epperò (§ 4 - Osserv.) i coefficienti omologhi debbono essere eguali; dunque sarà

Formole F. Girard

$$\left\{\begin{aligned} &z_1 + z_2 + \dots\dots + z_n = -\frac{a_1}{a_0} \\ &z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n = \frac{a_2}{a_0}, \\ &z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + \dots\dots = -\frac{a_3}{a_0}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &z_1 z_2 \dots\dots z_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}. \end{aligned}\right.$$

Son queste le notevoli relazioni (di Girard, 1829) tra le radici e i coefficienti di un'equazione.

Dunque: *In una equazione intera ad un'incognita ordinata secondo le potenze discendenti dell'incognita, la somma delle radici è uguale al coefficiente del secondo termine cambiato di segno e diviso per il coefficiente del primo termine; la somma dei prodotti a due a due delle radici è uguale al coefficiente del terzo termine diviso per il coefficiente del primo; in generale la somma dei prodotti ad r ad r delle radici è uguale al coefficiente del termine $(r+1)^{mo}$, cambiato di segno se r è dispari, diviso pel coefficiente del primo; e finalmente il prodotto di tutte*

[illegible] formule si potrebbero ottenere [illegible]. Derivare quanto [illegible]

(X) [illegible] la 2ª derivata [illegible] somma di [illegible] le radici è uguale all'ultimo coefficiente col segno cambiato se n è dispari, diviso pel coefficiente del primo termine.

È bene avvertire che qui ciascuna radice si intende contata tante volte quanto è il suo ordine.

Dunque data l'equazione, non occorre conoscere le radici, per conoscere di esse la somma, la somma dei prodotti a due a due, e così via.

Esempî. 1° Dette z_1, z_2, z_3, z_4 le radici dell'equazione

$$2z^4-2z^3+z+3=0,$$

si ha

$$\begin{cases} z_1+z_2+z_3+z_4=1, \\ z_1z_2+z_1z_3+z_1z_4+z_2z_3+z_2z_4+z_3z_4=0, \\ z_1z_2z_3+z_1z_2z_4+z_1z_3z_4+z_2z_3z_4=-\frac{1}{2}, \\ \qquad z_1z_2z_3z_4=\frac{3}{2}. \end{cases}$$

2° Viceversa, è facile formare l'equazione quando son date le radici. Se per es.

$$z_1=1,\quad z_2=-1,\quad z_3=0,\quad z_4=2$$

sono le radici di un'equazione di quarto grado, si ha

$$z_1+z_2+z_3+z_4=2,$$
$$z_1z_2+z_1z_3+\dots+z_3z_4=-1+0+2+0-2+0=-1,$$
$$z_1z_2z_3+\dots+z_2z_3z_4=0-2+0+0=-2,$$
$$z_1z_2z_3z_4=0;$$

quindi l'equazione è

$$z^4-2z^3-z^2+2z=0.$$

Allo stesso risultato si giunge più rapidamente formando l'equazione del terzo grado che ha per radici 1, -1, 2, ed è

$$z^3-2z^2-z+2=0,$$

e poi moltiplicandola per z.

3° - L'equazione che ha per radici le radici n^{me} dell'unità (pag. 154)

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_{n-1}$$

è

$$z^n-1=0;$$

quindi, per le formole di Girard,

$$\varepsilon_0+\varepsilon_1+\ldots\ldots+\varepsilon_n=\varepsilon_0\varepsilon_1+\varepsilon_0\varepsilon_2+\ldots\ldots=\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2+\ldots\ldots=\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3+\ldots\ldots=$$
$$=\varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\ldots\varepsilon_{n-1}+\ldots\ldots=0,$$
$$\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\ldots\varepsilon_{n-1}=(-1)^{n+1}$$

§.6 - Funzioni simmetriche.

Una funzione di più variabili $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$ si dice simmetrica quando essa non si altera comunque si permutino tra loro queste variabili.

Sono per esempio funzioni simmetriche di x, y, z le seguenti

$$x+y+z \quad , \quad x^2+y^2+z^2, \quad \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x},$$

ma non sono simmetriche le seguenti:

$$x-y-z \quad , \quad 2x+y+3z,$$

I primi membri delle formole di Girard sono funzioni simmetriche delle radici $z_1, z_2, \dots, z_n$ dell'equazione, ed appunto alla loro simmetria è dovuto il fatto che noi possiamo calcolarle, pur non conoscendo le radici stesse. Sussiste infatti il teorema: ogni funzione simmetrica razionale delle radici di un'equazione intera si può esprimere come funzione razionale dei coefficienti.

Noi però non ci fermeremo a dimostrarlo, ma ci limiteremo a considerare alcune funzioni simmetriche delle radici che, dopo quelle espresse dai primi membri delle relazioni di Girard (e che diconsi funzioni simmetriche elementari o fondamentali) sono le più semplici.

§. 7- Somma delle potenze simili delle radici.

Le somme delle potenze p^{me} delle radici (ove p è un numero intero qualunque) si indicano con S_p,

$$S_p = z_1^p + z_2^p + \dots + z_n^p = \sum z_r^p \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

e si chiamano somme delle potenze simili delle radici.

Già conosciamo

$$S_0 = z_1^0 + z_2^0 + \dots + z_n^0 = 1 + 1 + \dots + 1 = n,$$

$$S_1 = z_1 + z_2 + \dots + z_n = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Per calcolare $S_2, S_3, \dots,$ stabiliremo delle formole do, vute a Newton. Ma prima dimostreremo un

Lemma. Si ha

$$\boxed{f'(z) = \frac{f(z)}{z-z_1} + \frac{f(z)}{z-z_2} + \dots + \frac{f(z)}{z-z_n}.} \qquad [1]$$

Derivare $z-z_1$ è di due $f(z-z_1)$ e per tutte le altre ... onde $\frac{f(z)}{z-z_1}$

Infatti, derivando il prodotto

$$f(z) = a_0(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n),$$

si ha $a_0' = 0$, $(z-z_2)'$ p.es. $= 1$. per tutti gli altri non derivati.

$$f'(z) = a_0(z-z_2)\dots(z-z_n) + a_0(z-z_1)(z-z_3)\dots(z-z_n) + \dots + a_0(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_{n-1});$$

ma

$$a_0(z-z_2)\dots(z-z_n) = \frac{f(z)}{z-z_1}, \dots$$

quindi sostituendo, si ha la [1] c.d.d.

Ora

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

è divisibile per $z-z_1$ ed il quoziente è, per la regola di Ruffini (pag. 241),

$$a_0 z^{n-1} + (a_0 z_1 + a_1) z^{n-2} + (a_0 z_1^2 + a_1 z_1 + a_2) z^{n-3} + \dots + (a_0 z_1^{n-1} + a_1 z_1^{n-2} + \dots + a_{n-2} z_1 + a_{n-1})$$

poi, cambiando z_1 in $z_2, z_3, \dots, z_n$, si hanno i quozienti di $f(z)$ per $z-z_2$, $z-z_3, \dots, z-z_n$; dunque la [1] può scriversi:

$$\begin{aligned} f'(z) = {} & \\ = {} & a_0 z^{n-1} + (a_0 z_1 + a_1) z^{n-2} + (a_0 z_1^2 + a_1 z_1 + a_2) z^{n-3} + \dots + (a_0 z_1^{n-1} + a_1 z_1^{n-2} + \dots + a_{n-2} z_1 + a_{n-1}) + \\ & + a_0 z^{n-1} + (a_0 z_2 + a_1) z^{n-2} + (a_0 z_2^2 + a_1 z_2 + a_2) z^{n-3} + \dots + (a_0 z_2^{n-1} + a_1 z_2^{n-2} + \dots + a_{n-2} z_2 + a_{n-1}) + \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + a_0 z^{n-1} + (a_0 z_n + a_1) z^{n-2} + (a_0 z_n^2 + a_1 z_n + a_2) z^{n-3} + \dots + (a_0 z_n^{n-1} + a_1 z_n^{n-2} + \dots + a_{n-2} z_n + a_{n-1}) \end{aligned}$$

Raccogliendo i termini simili, cioè quelli di ciascuna verticale, il coefficiente di z^{n-1} è $\underline{n a_0}$; quello di z^{n-2} è

$$a_0(z_1 + z_2 + \dots + z_n) + n a_1 = \underline{a_0 s_1 + n a_1};$$

quello di z^{n-3} è

$$a_0(z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2)+a_1(z_1+z_2+\cdots+z_n)+na_2=a_0s_2+a_1s_1+na_2;$$

e così via: l'ultimo coefficiente è

$$a_0(z_1^{n-1}+z_2^{n-1}+\cdots+z_n^{n-1})+a_1(z_1^{n-2}+\cdots+z_n^{n-2})+\cdots+a_{n-2}(z_1+\cdots+z_n)+na_{n-1}$$

ossia

$$a_0s_{n-1}+a_1s_{n-2}+\cdots+a_{n-2}s_1+na_{n-1};$$

dunque

$$f'(z)=$$

$$=na_0z^{n-1}+(a_0s_1+na_1)z^{n-2}+(a_0s_2+a_1s_1+na_2)z^{n-3}+\cdots+(a_0s_{n-1}+a_1s_{n-2}+\cdots+a_{n-2}s_1+na_{n-1})$$

D'altra parte si ha

$$f'(z)=na_0z^{n-1}+(n-1)a_1z^{n-2}+(n-2)a_2z^{n-3}+\cdots+a_{n-1};$$

dunque (§4. osserv.) i coefficienti delle singole potenze di z in queste due espressioni di $f'(z)$ debbono essere eguali, cioè si hanno le relazioni

$$\left.\begin{aligned}
1^\circ;\ & na_0=na_0\\
2^\circ;\ & a_0s_1+na_1=(n-1)a_1,\\
3^\circ\ & a_0s_2+a_1s_1+na_2=(n-2)a_2,\\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\\
& a_0s_{n-1}+a_1s_{n-2}+\cdots+a_{n-2}s_1+na_{n-1}=a_{n-1},
\end{aligned}\right\}\quad a_0s_1=-na_1+(n-\ \ \boxed{1}$$

ossia

a_0s_1 = $\quad s_1=-\dfrac{a_1}{a_0}$

$$\left.\begin{aligned}
a_0s_1+a_1&=0,\\
a_0s_2+a_1s_1+2a_2&=0,\\
a_0s_3+a_1s_2+a_2s_1+3a_3&=0,\\
\cdots\cdots\cdots&\cdots\\
a_0s_{n-1}+a_1s_{n-2}+\cdots+a_{n-2}s_1+(n-1)a_{n-1}&=0.
\end{aligned}\right\}$$

Si può pensare ... [illegible]
s_2 = somma dei quadrati $z_1^2+z_2^2+\cdots$
per la nota regola $(z_1+z_2+z_3)^2$
$z_1^2+z_2^2+z_3^2+2(z_1z_2+z_1z_3+\cdots$
[illegible] $\boxed{2}$ [illegible]
[illegible] $=\dfrac{a_2}{a_0}$ [illegible]!
$=$ [illegible] $=z_1^2-2a_2$ (1)

Son queste le *formole di Newton* che volevamo stabilire. (Veramente Girard aveva già dato, 60 anni prima,

[illegible] Newton [illegible]. $s_1+a_1=0$ $s_1=-a_1$. $s_2+a_1s_1+2a_2=-s_2=-a_1^2-2a$
le formole [illegible] l'espressione è [illegible]

le espressioni di s_1, s_2, s_3, s_4 in funzione dei coefficienti).

Esse contengono $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ e permettono di calcolarle successivamente: la prima dà

$$s_1 = \frac{-a_1}{a_0},$$

come era già noto; indi la seconda dà

$$s_2 = -\frac{a_1}{a_0} s_1 - 2\frac{a_2}{a_0} = \frac{a_1^2}{a_0^2} - 2\frac{a_2}{a_0} = \frac{a_1^2 - 2a_0 a_2}{a_0^2},$$

e così via fino ad s_{n-1}

Per proseguire, cioè per calcolare $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$ si hanno altre formole analoghe alle precedenti. + spiegare.

Si osservi che, essendo

$$f(z_1) = 0 \quad , \; f(z_2) = 0, \ldots f(z_n) = 0$$

si ha pure moltipl. per z^k dove k è 0.1.2. ?

$$z_1^k f(z_1) = 0 \quad , \; z_2^k f(z_2) = 0, \ldots, z_n^k f(z_n) = 0$$

ossia

$$\begin{cases} a_0 z_1^{n+k} + a_1 z_1^{n+k-1} + \ldots + a_{n-1} z_1^{1+k} + a_n z_1^k = 0, \\ a_0 z_2^{n+k} + a_1 z_2^{n+k-1} + \ldots + a_{n-1} z_2^{1+k} + a_n z_2^k = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 z_n^{n+k} + a_1 z_n^{n+k-1} + \ldots + a_{n-1} z_n^{1+k} + a_n z_n^k = 0; \end{cases}$$

$f(z') = a_0 z_1^n + a_1 \ldots$

sommando risulta

$$a_0(z_1^{n+k} + z_2^{n+k} + \ldots + z_n^{n+k}) + a_1(z_1^{n+k-1} + z_2^{n+k-1} + \ldots + z_n^{n+k-1}) + \ldots$$
$$+ a_{n-1}(z_1^{1+k} + z_2^{1+k} + \ldots + z_n^{1+k}) + a_n(z_1^k + z_2^k + \ldots + z_n^k) = 0$$

ossia

$$a_0 s_{n+k} + a_1 s_{n+k-1} + \ldots + a_{n-1} s_{1+k} + a_n s_k = 0.$$

Ora k è arbitrario: ponendo successivamente $k = 0, 1, 2, \ldots$

si ha la prosecuzione delle formole di Newton

$$\left.\begin{array}{l} a_0 s_n + a_1 s_{n-1} + \dots + a_{n-1} s_1 + n a_n = 0, \\ a_0 s_{n+1} + a_1 s_n + \dots + a_{n-1} s_2 + a_n s_1 = 0, \\ a_0 s_{n+2} + a_1 s_{n+1} + \dots + a_{n-1} s_3 + a_n s_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad [3]$$

Si osservi che una qualunque delle [2], la p^{ma}, è

$$a_0 S_p + a_1 S_{p-1} + a_2 S_{p-2} + \dots + a_{p-1} S_1 + p a_p = 0$$

$$(p = 1, 2, \dots, n-1).$$

Anche la prima delle [3] è dello stesso tipo, per $p = n$. Non sono invece di questo tipo le seguenti. Tuttavia esse rientrano in questo tipo, per $p = n+1, n+2, \dots,$ se conveniamo di porre

$$a_{n+1} = 0, \quad a_{n+2} = 0, \dots :$$

Esempio - Sia l'equazione del quarto grado

$$z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 1 = 0.$$

Qui, essendo

$$a_0 = 1, \ a_1 = -2, \ a_2 = 4, \ a_3 = 0, \ a_4 = -1,$$

le [3] si riducono a tre:

$$\left.\begin{array}{r} S_1 - 2 = 0, \\ S_2 - 2S_1 + 8 = 0, \\ S_3 - 2S_2 + 4S_1 = 0, \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a_0 s_1 + a_1 = 0 \\ a_0 s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 = 0 \\ a_0 s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3 = 0 \end{array}$$

La prima dà

$$S_1 = 2;$$

onde la seconda diventa $S_2 - 4 + 8 = 0$ e dà

$$S_2 = -4;$$

poi la terza diventa $s_3 + 8 + 8 = 0$ e dà

$$s_3 = -16.$$

Inoltre, essendo

$$a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = \cdots\cdots = 0,$$

le [3] diventano

$$s_4 - 2s_3 + 4s_2 - 4 = 0,$$
$$s_5 - 2s_4 + 4s_3 - s_1 = 0,$$
$$s_6 - 2s_5 + 4s_4 - s_2 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Per i valori trovati di s_1, s_2, s_3, la prima diventa $s_4 + 32 - 16 - 4 = 0$ e dà

$$s_4 = -12;$$

sostituendo nella seconda, si ha

$$s_5 = 18,$$

sostituendo nella terza, si ha

$$s_6 = -80;$$

e così via.

Si può anche risolvere il problema inverso. Infatti n equazioni successive qualunque scelte tra le [2] e [3] possono considerarsi come n equazioni lineari ed omogenee nelle $n+1$ quantità $a_0, a_1, \ldots, a_n$, e permettono di calcolare i rapporti $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}$, quando siano dati i valori delle n quantità s_p che compaiono in quelle equazioni.

Per esempio, si voglia costruire un'equazione del terzo grado, per la quale risulti

$$s_1=1,\ s_2=3,\ s_3=-5. \qquad [4]$$

Sia

$$\alpha_0 z^3+\alpha_1 z^2+\alpha_2 z+\alpha_3=0$$

l'equazione richiesta; allora le prime tre formole [2] per i valori [4] diventano

$$\alpha_0+\alpha_1=0$$
$$3\alpha_0+\alpha_1+2\alpha_2=0$$
$$-5\alpha_0+3\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=0.$$

$a_0 s_1 + a_1 = 0$
$a_0 s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 = 0$
$a_0 s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3 =$

La prima dà

$$\alpha_1=-\alpha_0,$$

onde la seconda diventa $2\alpha_0+2\alpha_2=0$ e dà

$$\alpha_2=-\alpha_0;$$

poi la terza diventa $-9\alpha_0+3\alpha_3=0$ e dà

$$\alpha_3=3\alpha_0.$$

α_0 è arbitrario, ma non zero, se si vuole che l'equazione sia del terzo grado; assumendo $\alpha_0=1$, si ha

$$\alpha_0=1,\ \alpha_1=-1,\ \alpha_2=-1,\ \alpha_3=3;$$

quindi l'equazione cercata è

$$z^3-z^2-z+3=0.$$

Osservazione - Si possono anche calcolare le somme s_p con p negativo, cioè le somme

$$s_{-1}=z_1^{-1}+z_2^{-1}+\cdots+z_n^{-1}=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\cdots+\frac{1}{z_n},$$

$$s_{-2}=z_1^{-2}+z_2^{-2}+\cdots+z_n^{-2}=\frac{1}{z_1^2}+\frac{1}{z_2^2}+\cdots+\frac{1}{z_n^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ciò naturalmente nell'ipotesi che nessuna delle radici $z_1, z_2, \dots, z_n$ sia nulla, cioè nell'ipotesi che sia $a_n \neq 0$ (§. 4).

Basta riflettere che, ponendo

$$z = \frac{1}{y} \quad \text{o} \quad y = \frac{1}{z}, \qquad [5]$$

l'equazione data

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0 \quad [6]$$

diventa

$$\frac{a_0}{y^n} + \frac{a_1}{y^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{y} + a_n = 0$$

ossia, moltiplicando per y^n,

$$a_0 + a_1 y + \dots + a_{n-1} y^{n-1} + a_n y^n = 0.$$

oppure

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y + a_0 = 0. \quad [7]$$

Le radici delle due equazioni [6] e [7] sono legate dalla relazione [5], quindi le radici della [7] sono

$$y_1 = \frac{1}{z_1}, \quad y_2 = \frac{1}{z_2}, \dots, y_n = \frac{1}{z_n},$$

e però

$$S_{-1} = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$
$$S_{-2} = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Queste si calcolano applicando le formole [3] di Newton all'equazione [7], ossia si calcolano mediante le formole:

$$a_n s_{-1} + a_{n-1} = 0$$
$$a_n s_{-2} + a_{n-1} s_{-1} + 2a_{n-2} = 0$$
$$a_n s_{-3} + a_{n-1} s_{-2} + a_{n-2} s_{-1} + 3a_{n-3} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

3° [illegible] discrimin. = 0 [illegible] f(z) e f'(z) hanno fattori [illegible] f(z) ha radici mu[illegible] altro Metodo col M.C.D.

L'esame del discrim. è [illegible] quadrato del determ. Vandermond è un [illegible] per vedere se ci sono [illegible] multiple

Si prende il quadrato perchè esso è simmetrico mentre altrimenti scambiando 2 radici qualunque [illegible]

---

§ 8 Discriminante.

In generale le n radici di un'equazione

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

sono tra loro distinte; ma può darsi in particolare che due almeno di esse siano eguali tra loro, cioè può darsi che l'equazione abbia una radice doppia o tripla, ecc (§ 4).

Naturalmente, affinchè ciò accada è necessario che i coefficienti

$$a_0, a_1, \ldots, a_n$$

siano legati tra loro da una relazione:

$$F(a_0, a_1, \ldots a_n) = 0.$$

La funzione $F(a_0, a_1, \ldots a_n)$ si chiama *discriminante* dell'equazione $f(z) = 0$.

Dunque: *discriminante* di una equazione intera

$$f(z) = 0$$

è quella funzione dei coefficienti della equazione il cui annullarsi è condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione abbia due radici eguali.

[illegible] funzione [illegible]

Per cercare il discriminante procederemo come segue.

Affinchè due delle radici

$$z_1, z_2, \dots, z_n$$

dell'equazione sieno eguali è necessario che almeno una delle differenze delle radici combinate a due a due

$$z_1 - z_2,\ z_1 - z_3, \dots, z_1 - z_n,\ z_2 - z_3, \dots, z_2 - z_n, \dots z_{n-1} - z_n$$

sia eguale a zero, e quindi è necessario che sia nullo il prodotto di queste differenze $n(n-1)$ prodotto delle differenze

$$(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) \dots (z_1 - z_n)(z_2 - z_3) \dots (z_2 - z_n)^h \dots (z_{n-1} - z_n) \quad \boxed{8}$$

e quindi anche il quadrato di questo prodotto. [illegible]

$$D = (z_1 - z_2)^2 (z_1 - z_3)^2 \dots (z_1 - z_n)^2 (z_2 - z_3)^2 \dots (z_2 - z_n)^3 \dots (z_{n-1} - z_n)$$

[illegible] $0 = \rho^2$ il quadrato è [illegible] [illegible] [illegible]

Viceversa, se questo è nullo, è nullo uno almeno dei suoi fattori, e quindi due almeno delle radici $z_1, z_2, \dots, z_n$ sono eguali. e vel Determ. 2 almeno righe eguali –

Quindi l'annullarsi di D è condizione necessaria e sufficiente affinchè due radici dell'equazione siano eguali.

Se dunque il prodotto D è esprimibile in funzione dei coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_n$ dell'equazione, esso è il discriminante cercato.

Or ricordiamo (cfr. Esercizi di Analisi p. 35) che il prodotto [8], a parte il segno, è lo sviluppo del determinante di potenze Vandermonde

$$\begin{vmatrix} z_1^{n-1} & z_1^{n-2} & \ldots\ldots & z_1 & 1 \\ z_2^{n-1} & z_2^{n-2} & \ldots\ldots & z_2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_n^{n-1} & z_n^{n-2} & \ldots\ldots & z_n & 1 \end{vmatrix},$$

quindi D è il quadrato di questo determinante:

$$D = \begin{vmatrix} z_1^{n-1} & z_1^{n-2} & \ldots\ldots & z_1 & 1 \\ z_2^{n-1} & z_2^{n-2} & \ldots\ldots & z_n & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_n^{n-1} & z_n^{n-2} & \ldots\ldots & z_n & 1 \end{vmatrix}^2 .$$

Se eseguiamo il quadrato per verticali (p.51) e poniamo, come al §6,

$$s_p = z_1^p + z_2^p + \ldots + z_n^p ,$$

otteniamo

D simmetrico

$$D = \begin{vmatrix} s_{2n-2} & s_{2n-3} & s_{2n-4} & \ldots\ldots & s_{n-1} \\ s_{2n-3} & s_{2n-4} & s_{2n-5} & \ldots\ldots & s_{n-2} \\ s_{2n-4} & s_{2n-5} & s_{2n-6} & \ldots\ldots & s_{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-3} & \ldots\ldots & s_0 \end{vmatrix} .$$

$s_0 = n = 1.1.1.$

Ma al §6 abbiamo date le formole di Newton [2] e [3] che permettono di calcolare le somme delle potenze simili delle radici

$$s_1 , \ s_2 , \ s_3 , \ \ldots\ldots$$

in funzione dei coefficienti dell'equazione; ed essendo esse lineari tanto nelle s_p quanto nei coefficienti, le s_p risultano essere funzioni razionali dei coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ (funzioni razionali in tere nei rapporti $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0} \dots \frac{a_n}{a_0}$). Inoltre $s_0 = n$, evidentemente.

Se quindi sostituiamo questi valori delle s_p nell'ultimo determinante, che è funzione intera delle s_p, otteniamo D espresso come funzione razionale dei coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_n$ (e come funzione intera dei rapporti $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \dots \frac{a_n}{a_0}$).

<u>Dunque D è precisamente il discriminante dell'equazione proposta.</u>

Applicazioni: 1ª Il discriminante dell'equazione del secondo grado ($n=2$)

$$a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0$$

è

$$D = \begin{vmatrix} s_2 & s_1 \\ s_1 & s_0 \end{vmatrix} = s_0 s_2 - s_1^2 .$$

Ora $s_0 = 2$ e, per le formole di Newton

$$\begin{cases} a_0 s_1 + a_1 = 0 \\ a_0 s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 = 0, \end{cases}$$

si ha

$$\begin{cases} s_1 = -\frac{a_1}{a_0}, \\ s_2 = \frac{a_1^2 - 2a_0 a_2}{a_0^2}, \end{cases}$$

quindi

$$D = 2 \cdot \frac{a_1^2 - 2a_0 a_2}{a_0^2} - \frac{a_1^2}{a_0^2} = \frac{a_1^2 - 4a_0 a_2}{a_0^2},$$

Essendo $a_0 \neq 0$, si può anche prendere come discriminante

$$a_0^2 D = a_1^2 - 4a_0 \cdot a_2 .$$

Dunque $a_1^2 - 4a_0 a_2 = 0$ è condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione abbia le due radici eguali (come è ben noto dall'algebra elementare).

2° Il discriminante dell'equazione del terzo grado ($n = 3$)

$$a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0.$$

è

$$D = \begin{vmatrix} s_4 & s_3 & s_2 \\ s_3 & s_2 & s_1 \\ s_2 & s_1 & s_0 \end{vmatrix} .$$

Sviluppando il determinante e nello sviluppo sostituendo per s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 i loro valori, tratti dalle formole di Newton

$$[10] \quad \begin{cases} a_0 s_1 + a_1 = 0 \\ a_0 s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 = 0 \\ a_0 s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3 = 0 \\ a_0 s_4 + a_1 s_3 + a_2 s_2 + a_3 s_1 = 0, \end{cases}$$

si ha il discriminante espresso in funzione di coefficienti.

Ma in tal modo si incontrano calcoli laboriosi. Essi possono in parte evitarsi, trasformando opportunamente il determinante D e tenendo conto delle [10].

Si ha

$$a_0 D = \begin{vmatrix} a_0 s_4 & s_3 & s_2 \\ a_0 s_3 & s_2 & s_1 \\ a_0 s_2 & s_1 & s_0 \end{vmatrix},$$

ed aggiungendo alla prima colonna le altre due moltiplicate rispettivamente per a_1 ed a_2,

$$a_0 D = \begin{vmatrix} a_0 s_4 + a_1 s_3 + a_2 s_2 & s_3 & s_2 \\ a_0 s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 & s_2 & s_1 \\ a_0 s_2 + a_1 s_1 + a_2 s_0 & s_1 & s_0 \end{vmatrix};$$

moltiplicando la seconda verticale per a_0 ed aggiungendo ad essa la terza moltiplicata per a_1 si ha

$$a_0^2 D = \begin{vmatrix} a_0 s_4 + a_1 s_3 + a_2 s_2 & a_0 s_3 + a_1 s_2 & s_2 \\ a_0 s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 & a_0 s_2 + a_1 s_1 & s_1 \\ a_0 s_2 + a_1 s_1 + a_2 s_0 & a_0 s_1 + a_1 s_0 & s_0 \end{vmatrix};$$

tenendo conto delle [10] e che $s_0 = 3$, si ha

$$a_0^2 D = \begin{vmatrix} -a_3 s_1 & -a_2 s_1 - 3a_3 & s_2 \\ -3a_3 & -2a_2 & s_1 \\ a_2 & 2a_1 & 3 \end{vmatrix};$$

aggiungendo la seconda orizzontale moltiplicata per a_1 alla prima moltiplicata per a_0, si ha.

$$a_0^3 D = \begin{vmatrix} -a_3 a_0 s_1 - 3a_1 a_3 & -a_2 a_0 s_1 - 3a_0 a_3 - 2a_1 a_2 & a_0 s_2 + a_1 s_1 \\ -3a_3 & -2a_2 & s_1 \\ a_2 & 2a_1 & 3 \end{vmatrix};$$

moltiplicando la seconda orizzontale per a_0 e tenendo conto che, per le [10],

$$\begin{cases} a_0 s_1 = -a_1 \\ a_0 s_2 + a_1 s_1 = -2a_2, \end{cases}$$

Si ha

$$a_0^4 D = \begin{vmatrix} -2a_1a_3 & -3a_0a_3 - a_1a_2 & -2a_2 \\ -3a_0a_3 & -2a_0a_2 & -a_1 \\ a_2 & 2a_1 & 3 \end{vmatrix},$$

ossia, sviluppando secondo la prima orizzontale,

$$a_0^4 D = -2a_1a_3(2a_1^2 - 6a_0a_2) + (3a_0a_3 + a_1a_2)(a_1a_2 - 9a_0a_3) - 2a_2(2a_0a_2^2 - 6a_0a_1a_3).$$

Essendo $a_0 \neq 0$, possiamo prendere come discriminante $a_0^4 D$, cioè

[11] $$\underline{18a_0a_1a_2a_3 - 27a_0^2a_3^2 - 4a_0a_2^3 + a_1^2a_2^2 - 4a_1^3a_3}.$$

In particolare, se l'equazione è del tipo

$$z^3 + pz + q = 0,$$

allora

$$a_0 = 1,\quad a_1 = 0,\quad a_2 = p,\quad a_3 = q,$$

e l'ultima espressione diventa

$$-27q^2 - 4p^3.$$

Si può anche assumere come espressione del discriminante questa divisa per $-27 \cdot 4$, cioè

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

Osservazione - Ben più complicati sono i calcoli necessari per la ricerca del discriminante di una equazione di quarto grado o di grado superiore, e però non ce ne occuperemo

Ci si può domandare: quali vantaggi offre il <u>conoscere che il discriminante di una equazione è nullo, e quindi che l'equazione ha radici multiple</u>?

Vedremo che allora per risolvere l'equazione basta risolvere altre equazioni di grado inferiore. Ma per dimostrarlo è necessario premettiamo alcuni cenni sul

§. 9. Massimo comun divisore di due funzioni intere di una variabile.

Due funzioni intere di una variabile z possono essere divisibili per una stessa funzione intera di z la quale allora si dice *divisore comune* (esatto) di quelle due funzioni.

La teoria dei divisori comuni delle funzioni intere di una variabile procede in modo strettamente analogo a quella dei divisori comuni dei numeri interi.

Sieno date due funzioni intere di z dei gradi n ed m;

$$f(z)=a_0 z^n+a_1 z^{n-1}+\dots\dots+a_n,$$
$$g(z)=b_0 z^m+b_1 z^{m-1}+\dots\dots+b_m$$

e sia $n \geq m$. Indicando con $q(z)$ il quoziente e con $r(z)$ il resto della divisione di $f(z)$ e $g(z)$; si ha identicamente

$$f(z)=g(z)\,q(z)+r(z)$$

ovvero

$$f(z)-g(z)\,q(z)=r(z).$$

Se $d(z)$ è un divisore comune di $f(z)$ e $g(z)$, lo sarà anche di $g(z)\,q(z)$ e quindi anche di

$f(z) - g(z)\,q(z)$, cioè di $r(z)$. Dunque:

Ogni divisore comune di $f(z)$ e $g(z)$ è divisore del resto $r(z)$ della loro divisione.

Viceversa, se $d(z)$ è un divisore comune di $g(z)$ ed $r(z)$, lo sarà anche di $g(z)\,q(z)$ ed anche di $g(z)\,q(z) + r(z)$ cioè di $f(z)$. Dunque:

Ogni divisore comune di $g(z)$ ed $r(z)$ è divisore di $f(z)$.

Da queste due proprietà segue che:

I divisori comuni di $f(z)$ e $g(z)$ sono gli stessi che quelli di $g(z)$ ed $r(z)$.

Essendo intanto $r(z)$ di grado inferiore a quello di $g(z)$, si può dividere $g(z)$ per $r(z)$, e sia $r_1(z)$ il resto della divisione; i divisori comuni di $g(z)$ e $r(z)$ saranno gli stessi che quelli di $r(z)$ ed $r_1(z)$; e perciò i divisori comuni di $f(z)$ e $g(z)$ sono gli stessi che quelli di $r(z)$ ed $r_1(z)$.

Del pari, essendo $r_1(z)$ di grado inferiore a quello di $r(z)$, si può dividere $r(z)$ per $r_1(z)$, e sia $r_2(z)$ il resto; i divisori comuni di $f(z)$ e $g(z)$ saranno gli stessi che quelli di $r_1(z)$ e $r_2(z)$.

Così proseguendo, poichè i gradi dei resti successivi

$$r(z)\,,\ r_1(z)\,,\ r_2(z)\,,\ \ldots$$

sono decrescenti, tali resti saranno in numero finito, e però dovrà giungersi ad un resto identicamente nullo.

Ora possono darsi due casi:

O il resto $r_k(z)$, precedente questo nullo, è di grado maggiore di zero, cioè funzione di z; ed allora $r_k(z)$ è divisore di $r_{k-1}(z)$, e quindi fra i divisori comuni di $r_{k-1}(z)$ e $r_k(z)$ quelli di grado più alto saranno della forma $cr_k(z)$, dove c è una costante arbitraria.

Ritenendo come equivalenti due divisori differenti solo per un fattore costante, potremo dunque considerare $r_k(z)$ come il comune divisore di $f(z)$ e $g(z)$ di massimo grado, e definirlo perciò come *massimo comun divisore di $f(z)$ e $g(z)$*.

O il resto $r_k(z)$, precedente quello nullo, è di grado zero, cioè una costante; ed allora $f(z)$ e $g(z)$ non ammettono divisori comuni funzioni di z, e possiamo chiamare la costante $r_k(z)$, o un'altra qualunque costante, *massimo comun divisore* di $f(z)$ e $g(z)$.

Allora le due funzioni $f(z)$ e $g(z)$ si dicono *prime fra loro*.

Di qui la regola: *Date due funzioni intere di z, si divida quella di grado non inferiore per l'altra, e poi quest'altra pel resto della fatta divisione, e così via finché si giunga ad un resto identicamente nullo; il resto precedente questo sarà il massimo comun divisore delle due date funzioni.*

In pratica per agevolare i calcoli, è permesso di moltiplicare qualsiasi dividendo o divisore far-

M.C.D. [illegible] dei [illegible] primi. prodotto dei fattori primi comuni col minimo esponente ziale che si incontri nell'algoritmo suesposto, per una costante qualunque, senza che ciò alteri il massimo comun divisore, altrimenti che per un fattore costante.

Infatti è chiaro che, moltiplicando un dividendo (o divisore) parziale per una costante c, il quoziente corrispondente si moltiplica per c (o per $\frac{1}{c}$) e il resto per c (o per 1), il che produce nei successivi dividendi e divisori solo la intrusione di fattori costanti.

Valendosi di codeste facoltà, se i coefficienti sono interi, si può evitare d'introdurre dei coefficienti fratti durante l'algoritmo. Non si tien conto delle costanti

Esempio 1°. Sia dato a cercare il massimo comun divisore fra

$$f(z) = z^4 - z^3 + z - 1 \quad \text{e} \quad g(z) = 2z^3 - z^2 + z + 1.$$

Dividiamo $f(z)$ per $g(z)$, o meglio dividiamo $2f(z)$ per $g(z)$ per evitare i fratti. Avremo: Posso moltipl. e dividere tutti i termini per stesso numero

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2z^4 & -2z^3 & & +2z & -2 & 2z^3 - z^2 + z + 1 \\
\cline{6-6}
-2z^4 & +z^3 & -z^2 & -z & & z - 1 \\
\cline{1-5}
& -z^3 & -z^2 & +z & -2 &
\end{array}$$

e moltiplicando per 2

$$\begin{array}{rrrr}
-2z^3 & -2z^2 & +2z & -4 \\
2z^3 & -z^2 & +z & +1 \\
\hline
& -3z^2 & +3z & -3
\end{array}$$

Ora bisogna dividere $g(z)$ per il resto ottenuto $-3z^2 + 3z - 3$, oppure per questo resto diviso per -3 cioè per $z^2 - z + 1$) si ha:

$2z^3 - z^2 + z + 1$	$z^2 - z + 1$
$-2z^3 + 2z^2 - 2z$	$2z + 1$
$z^2 - z + 1$	
$-z^2 + z - 1$	
0	

Dunque il massimo comun divisore tra le due funzioni date è $z^2 - z + 1$.

In pratica l'operazione si suol disporre come segue:

	$z - 1$	$2z + 1$
$z^4 - z^3 \quad + z - 1$	$2z^3 - z^2 + z + 1$	$z^2 - z + 1$
moltiplicando per 2	$-2z^3 + 2z^2 - 2z$	
$2z^4 - 2z^3 \quad + 2z - 2$	$z^2 - z + 1$	
$-2z^4 + z^3 - z^2 - z$	$-z^2 + z - 1$	
$-z^3 - z^2 + z - 2$	0	
moltiplicando per 2		
$-2z^3 - 2z^2 + 2z - 4$		
$2z^3 - z^2 + z + 1$		
$-3z^2 + 3z - 3$		
dividendo per -3		
$z^2 - z + 1$		

Dal ragionamento fatto per definire il massimo comun divisore, segue che: ogni divisore comune ad $f(z)$ e $g(z)$ divide il massimo comun divisore, e viceversa. Segue che, se immaginiamo scomposte $f(z)$ e $g(z)$ nei loro fattori lineari (pag. 258) esse ammetteranno un massimo comun divisore non costante solo quando hanno qualche fattore lineare comune; e questo massimo comun divisore sarà costituito dal prodotto dei fattori lineari comuni.

Per esempio, le due funzioni:

$$f(z) = 3(z-1)^3(z+1)(z-2)^4, \quad g(z) = (z-1)(z+1)^2(z-2)^2(z-3)$$

hanno a comune il fattore lineare $z-1$, il fattore $z+1$, ed il fattore $z-2$ contato due volte, cioè il fattore $(z-2)^2$; dunque il loro massimo comun divisore è

$$(z-1)(z+1)(z-2)^2.$$ v. fatt. r. primi

In particolare: il massimo comun divisore fra una funzione intera e la sua derivata è il prodotto dei fattori lineari della funzione, ciascuno preso con l'esponente che ha nella funzione diminuito di un'unità.

Infatti se $(z-\alpha)^r$ è fattore di $f(z)$, sappiamo che allora $(z-\alpha)^{r-1}$ è fattore di $f'(z)$ (pag. 241) e quindi anche del massimo comun divisore di $f(z)$ ed $f'(z)$.

§.10. Equazioni dotate di radici multiple.

Ed ora passiamo ad esaminare la questione accennata alla fine del §.8.

Supponiamo cioè di aver constatato che il discriminante di un'equazione

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

è nullo, cioè di aver constatato che l'equazione ha radici multiple.

Allora il suo primo membro $f(z)$ scomposto in fat tori lineari, avrà almeno due fattori lineari eguali tra loro.

Per maggior chiarezza ragioniamo sull'equazione

$$f(z)=(z-a)(z-b)(z-c)^2(z-d)^2(z-e)^3(z-f)^4,$$

dotata di radici multiple; ma i nostri ragionamenti valgono in generale.

Il massimo comun divisore fra la funzione $f(z)$ e la sua prima derivata sarà (cfr. la fine del § 9):

$$\varphi(z)=(z-c)(z-d)(z-e)^2(z-f)^3.$$

Del pari il massimo comun divisore tra $\varphi(z)$ e la sua prima derivata sarà

$$\varphi_1(z)=(z-e)(z-f)^2;$$

il massimo comun divisore tra $\varphi_1(z)$ e la sua prima derivata sarà

$$\varphi_2(z)=z-f;$$

infine il massimo comun divisore tra $\varphi_2(z)$ e la sua prima derivata sarà

$$\varphi_3(z)=1.$$

Ciò posto si formino i quozienti

$$\psi(z)=\frac{f(z)}{\varphi(z)}=(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)(z-e)(z-f),$$

$$\psi_1(z)=\frac{\varphi(z)}{\varphi_1(z)}=(z-c)(z-d)(z-e)(z-f),$$

$$\psi_2(z)=\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}=(z-e)(z-f)$$

$$\psi_3(z)=\frac{\varphi_2(z)}{\varphi_3(z)}=z-f.$$

Indi si formino ancora i quozienti

$$\chi(z) = \frac{\psi(z)}{\psi_1(z)} = (z-a)(z-b),$$

$$\chi_1(z) = \frac{\psi_1(z)}{\psi_2(z)} = (z-c)(z-d),$$

$$\chi_2(z) = \frac{\psi_2(z)}{\psi_3(z)} = z-e,$$

$$\chi_3(z) = \frac{\psi_3(z)}{1} = z-f.$$

Eguagliando a zero questi quattro quozienti si hanno quattro equazioni: la prima ha per radici le radici semplici della proposta $f(z)=0$, la seconda ha per radici le radici doppie, la terza ha per radici le radici triple, la quarta ha per radici le radici quadruple (ma tutte come radici semplici).

Generalizzando, avremo la regola:

Sia data un'equazione intera ad una incognita

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0,$$

e si sappia che essa è dotata di radici multiple. Del suo primo membro e della sua prima derivata si calcoli il massimo comun divisore; indi di questo e della sua prima derivata si calcoli il massimo comun divisore; e così si prosegua fino ad ottenere una costante.

Ciò fatto, si divida il primo membro dell'equazione pel primo massimo comun divisore trovato; indi

[illegible] costante [illegible] $f(z)$ e $f'(z)$ [illegible]
non ci sono radici multiple [illegible] Io ho provato [illegible]
te almeno radici doppie ecc

questo pel secondo; e così via, sino a dividere il penultimo massimo comun divisore trovato per l'ultimo.

Finalmente si divida il primo quoziente pel secondo il secondo pel terzo, e così via, sino a dividere l'ultimo per l'unità.

I quozienti ottenuti, eguagliati a zero, avranno per radici rispettivamente le radici semplici, doppie, ecc. della equazione data, tutte come radici semplici.

Esempio - Supponiamo di sapere che l'equazione

$$f(z) = z^6 - z^5 - 7z^4 + 9z^3 + 10z^2 - 20z + 8 = 0$$

ha radici multiple.

Calcolando il massimo comun divisore $\varphi(z)$ tra $f(z)$ e la sua prima derivata

$$f'(z) = 6z^5 - 5z^4 - 28z^3 + 27z^2 + 20z - 20$$

si trova

$$\varphi(z) = z^3 - 3z + 2.$$

(L'essere $\varphi(z)$ una funzione di z e non una costante, conferma che l'equazione proposta ha radici multiple).

Calcolando il massimo comun divisore $\varphi_1(z)$ tra $\varphi(z)$ e la sua prima derivata

$$\varphi'(z) = 3z^2 - 3$$

si trova

$$\varphi_1(z) = z - 1.$$

Infine calcolando il massimo comun divisore tra $\varphi_1(z)$ e $\varphi_1'(z)$ si trova

$$\varphi_2(z) = 1.$$

$y = (x-1)^3(x-2)^3(x-5)^2(x-6)(x-8)(x-3)^2$; $y' = (x-1)^2(x-2)^2$
di grado 11 [illegible] M.C.D. [illegible] $(x-1)(x-2)$

Or dividendo ciascuna delle funzioni

$$f(z),\ \varphi(z),\ \varphi_1(z),\ \varphi_2(z)$$

per la seguente, si hanno le altre

$$\psi(z) = \frac{f(z)}{\varphi(z)} = z^3 - z^2 - 4z + 4,$$

$$\psi_1(z) = \frac{\varphi(z)}{\varphi_1(z)} = z^2 + z - 2,$$

$$\psi_2(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} = z - 1.$$

Infine, dividendo ciascuna delle funzioni

$$\psi(z),\ \psi_1(z),\ \psi_2(z),\ 1$$

per la seguente si hanno le altre

$$\chi(z) = \frac{\psi(z)}{\psi_1(z)} = z - 2,$$

$$\chi_1(z) = \frac{\psi_1(z)}{\psi_2(z)} = z + 2,$$

$$\chi_2(z) = \frac{\psi_2(z)}{1} = z - 1.$$

Eguagliando a zero queste funzioni, si hanno tre equazioni

$$z - 2 = 0\ ,\ z + 2 = 0\ ,\ z - 1 = 0\ ;$$

che hanno per radici rispettivamente le radici semplici, doppie e triple della proposta (ma tutte come semplici).

Dunque l'equazione proposta ha una radice semplice 2, una radice doppia -2, una radice tripla 1.

+ altri fattori [illegible]

$(x-6)(x-7)$ [illegible] radici multiple — [illegible]

Capitolo XIII

Equazioni intere a coefficienti reali.

§.1. Radici complesse coniugate.

Nel capitolo precedente abbiamo supposto che i coefficienti dell'equazione

di x qui $$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0 \qquad [1]$$ $x^2+1 = (x+i)(x-$

fossero qualunque, cioè reali o complessi.

In questo vogliamo esaminare più da vicino il caso, assai frequente in pratica, in cui i coefficienti

$$a_0, a_1, \dots, a_n$$

son tutti reali. senza i – secondi in – i [illegible]

Abbiamo visto che l'equazione [1] ha n radici

$$z_1, z_2, \dots z_n \qquad [2]$$

distinte o non, reali o complesse. Nel caso particolare dei coefficienti reali vi è questa notevole particolarità: che se fra le [2] vi è un numero complesso, vi è pure il numero complesso coniugato, e quante volte vi è il primo, tante volte vi è il secondo. Ossia:

Se un'equazione intera a coefficienti reali ha per radice un numero complesso, avrà per radice anche il coniugato di esso; e queste due radici saranno dello stesso ordine.

Sia $z = \alpha + \beta i$ (α e β reali) un numero complesso.

Se calcoliamo

$$f(\alpha+\beta i) = a_0(\alpha+\beta i)^n + a_1(\alpha+\beta i)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(\alpha+\beta i) + a_n$$

sviluppando le varie potenze di $\alpha+\beta i$ con la formola del binomio di Newton, avremo evidentemente per risultato un numero complesso, cioè del tipo

$$f(\alpha+\beta i) = A + Bi,$$

ove A e B saranno funzioni (precisamente polinomii) a coefficienti interi dei numeri reali:

$$a_0, a_1, \ldots, a_n, \alpha, \beta.$$

Ne segue che $f(\alpha-\beta i)$ si otterrà dal precedente sviluppo cambiandovi semplicemente i in $-i$:

$$f(\alpha-\beta i) = A - Bi.$$

Ora se $\alpha+\beta i$ è radice dell'equazione $f(z)=0$, si avrà

$$f(\alpha+\beta i)=0 \qquad \text{o} \qquad A+Bi=0,$$

e quindi

$$A=0, \quad B=0;$$

ne segue che sarà pure

$$A-Bi=0 \qquad \text{o} \qquad f(\alpha-\beta i)=0$$

Dunque se $\alpha+\beta i$ è radice dell'equazione [1], anche $\alpha-\beta i$ è radice. Ciò prova la prima parte del teorema enunciato, cioè che, se un'equazione intera a coefficienti reali ha per radice un numero complesso, ha anche per radice il numero coniugato.

Ora è facile dimostrare la seconda parte.

Infatti se $\alpha+\beta i$ è radice doppia della $\boxed{1}$, essa è anche radice dell'equazione $f'(z)=0$; ma questa ha i coefficienti reali, quindi ha per radice anche $\alpha-\beta i$, per ciò che si è dimostrato; ossia $\alpha-\beta i$ è anche doppia per la $\boxed{1}$. Che se $\alpha+\beta i$ è tripla per la $\boxed{1}$, essa sarà anche radice di $f''(z)=0$; questa essendo a coefficienti reali, ha pure come radice $\alpha-\beta i$, ossia $\alpha-\beta i$ è anche tripla, per la $\boxed{1}$. E così via. Dunque $\alpha+\beta i$ e $\alpha-\beta i$ sono radici dello stesso ordine.

c.d.d.

Per questo resta stabilito che un'equaz. [illegible] grado dispari [illegible] p. es. ha almeno 1 [illegible] se no ammetterebbe [illegible] n+1, (4)

Esempio - L'equazione

$$z^3+2z^2+z+2=0,$$

ha per radice i, come è facile verificare con sostituzione diretta, quindi ha pure come radice $-i$; esse sono certamente radici semplici, perchè se l'una fosse doppia, tale sarebbe l'altra e quindi l'equazione avrebbe quattro radici; ciò che è assurdo, essendo essa del terzo grado.

Il suo primo membro sarà divisibile per

$$z-i \quad \text{e per} \quad z+i$$

e quindi anche per il prodotto

$$(z-i)(z+i)=z^2+1;$$

si trova per quoziente

$$z+2,$$

quindi l'altra radice dell'equazione è -2.

Dal teorema dimostrato, segue che: un'equa zione di grado dispari a coefficienti reali, ha almeno una radice reale

Perchè il numero delle sue radici è dispari e le sue radici complesse, se ne ha, sono in numero pari, ciascuna avendo la sua coniugata.

Così, supponendo i coefficienti reali, un'equazione del secondo grado può avere le radici o ambedue reali o ambedue complesse, una del terzo grado o ha tre radici reali o una radice reale e due complesse coniugate, una di quarto grado o ha quattro radici reali, o due reali e due complesse, o quattro radici complesse; e così via.

Sappiamo che la funzione $f(z)$ si scompone in fattori lineari:

$$f(z) = a_0(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n) \quad [3].$$

I ~~suoi~~ fattori lineari corrispondenti a radici reali sono a coefficienti reali, quelli corrispondenti a radici complesse sono a coefficienti complessi.

Però nel caso in cui i coefficienti della [1] sono reali, si può scomporre $f(z)$ in fattori a coefficienti reali anche se la [1] ha radici complesse; però questi fattori non saranno tutti lineari, ma alcuni saranno del secondo grado.

Se per es. z_1 è complessa,

$$z_1 = a_1 + ib_1,$$

vi sarà fra le rimanenti radici il numero complesso coniugato, e sia

$$z_2 = a_1 - ib_1;$$

allora

$$(z-z_1)(z-z_2) = (z-a_1-ib_1)(z-a_1+ib_1) = [(z-a_1)^2 - i^2b_1^2]$$
$$= (z-a_1)^2 + b_1^2;$$

dunque in [3] potremo sostituire al prodotto dei primi due fattori lineari a coefficienti complessi l'unico fattore $(z-a_1)^2+b_1^2$ a coefficienti reali, ma del secondo grado. imp-i

Lo stesso può ripetersi per ogni altra coppia di radici complesse coniugate della [1].

polinomi

Dunque: ogni funzione intera $f(z)$ a coefficienti reali può scomporsi in fattori di primo e secondo grado, a coefficienti reali; i primi corrispondono alle radici reali dell'equazione $f(z)=0$, ed i secondi alle coppie di radici complesse coniugate.

Per esempio, l'equazione

$$f(z) = z^6 - 2z^5 + 2z^4 - z^2 + 2z - 2 = 0$$

ha le due radici reali 1, -1 e le due radici complesse i, $1-i$ quindi ha pure le altre $-i$, $1+i$; dunque

$$f(z) = (z-1)(z+1)(z-i)(z-1+i)(z+i)(z-1-i)$$
$$= (z-1)(z+1)[(z-i)(z+i)]\cdot[(z-1+i)(z-1-i)]$$
$$= (z-1)(z+1)(z^2+1)[(z-1)^2+1]$$

e infine

$$f(z) = (z-1)(z+1)(z^2+1)(z^2-2z+2)$$

§.2. Equazioni intere a coefficienti razionali.

Particolareggiamo ancora di più i coefficienti della equazione

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} \ldots\ldots + a_{n-1} z + a_n = 0, \quad [1].$$

supponendo che essi sieno numeri razionali (cioè numeri interi o fratti). $\frac{\alpha}{\beta}$ se poi sono interi $\beta = 1$.

Allora, senza scapito della generalità, possiamo supporli interi: perchè qualora fra essi ve ne fossero dei fratti, basterebbe moltiplicare ambo i membri dell'equazione per il minimo comune multiplo dei denominatori dei coefficienti fratti, per ottenere un'altra equazione (avente le stesse radici della prima) ed a coefficienti tutti interi. $\frac{3}{5}x^3 + \frac{3}{6}x^2 + \frac{1}{3} = 0 \quad 18x^3 + 15x^2 + 10 = 0$

Supponiamo dunque che i coefficienti

$$a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n$$

sieno numeri interi, positivi o negativi.

Radici intere. In tal caso è facile cercare le eventuali radici intere dell'equazione.

Premettiamo perciò il teorema.

Affinché un numero intero sia radice di una equazione intera a coefficienti interi è necessario che questo numero divida esattamente il coefficiente del termine di grado zero dell'equazione (che suol dirsi anche termine noto o ultimo termine).

Infatti, se un numero z soddisfa la [1], esso rende

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} z = -a_n$$

ossia

$$z(a_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + \dots\dots + a_{n-1}) = -a_n; \quad \boxed{2}$$

or se detto numero z è ~~positivo~~ intero, essendo $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ interi, sarà pure un numero intero

$$a_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + \dots + a_{n-1},$$

e quindi il primo membro della $\boxed{2}$; ma questo è evidentemente divisibile esattamente per z (perchè è il prodotto di z per un numero intero); dunque z deve dividere esattamente anche il secondo membro $-a_n$, che è eguale al primo, e quindi anche a_n. c.d.d.

Questo teorema permette di calcolare tutte le eventuali radici intere dell'equazione $\boxed{1}$.

Infatti per esso dovremo cercare le radici intere fra i divisori, positivi o negativi, di a_n. Preso uno di questi divisori, e sia α, esso può essere radice dell'equazione. Per decidere, basta porre $z = \alpha$ nel primo membro dell'equazione, cioè, basta calcolare $f(\alpha)$: se questa è zero, α è radice.

Per calcolare rapidamente $f(\alpha)$, si può applicare la regola di Ruffini, dividendo $f(z)$ per $z - \alpha$; il resto della divisione sarà appunto $f(\alpha)$.

In pratica si metteranno a prova tutti i divisori di a_n, incominciando dai più piccoli in valore assoluto. I primi saranno $+1$ e -1, che sono sempre divisori di a_n. Si osservi anche che, constatato che un numero α è radice, è inutile continuare l'operazione sull'equazione primitiva, ma basta operare sull'equazione di grado inferiore.

$$\frac{f(z)}{z-\alpha}=a_0 z^{n-1}+b_1 z^{n-2}+\dots+b_{n-1}=0,$$

mettendo a prova i divisori di b_{n-1} ma non quelli di modulo minore di α (perchè se uno di questi fosse stato radice dell'equazione, lo avremmo già incontrato prima di α); invece non bisogna trascurare di porre nuovamente a prova il numero α perchè esso potrebbe essere anche radice della nuova equazione, e quindi radice (almeno) doppia della [1].

Esempio 1° Sia l'equazione

$$f(z)=z^5-5z^4-8z^3+40z^2-9z+45=0.$$

I divisori dell'ultimo termine 45 sono

$$1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 15,\ 45$$
$$-1,\ -3,\ -5,\ -9,\ -15,\ -45,$$

e però tra questi numeri dobbiamo cercare le eventuali radici intere dell'equazione.

Incominceremo a mettere a prova 1, dividendo $f(z)$ per $z-1$ con la regola di Ruffini

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -5 & -8 & 40 & -9 & 45 \\ 1 & 1 & -4 & -12 & 28 & 19 & \overline{|64} \end{array}$$

Il resto della divisione è 64 dunque $f(1)=64\neq 0$ e però non è radice.

Mettiamo a prova il numero -1:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -5 & -8 & 40 & -9 & 45 \\ -1 & 1 & -6 & -2 & 42 & -51 & \overline{|96} \end{array}$$

Essendo

$$f(-1)=96\neq 0.$$

-1 non è radice.

Mettiamo a prova 3:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -5 & -8 & 40 & -9 & 45 \\ 3 & 1 & -2 & -14 & -2 & -15 & \overline{|0} \end{array}$$

Essendo

$$f(3)=0,$$

3 è radice. I numeri della seconda orizzontale, escluso l'ultimo sono i coefficienti della divisione di $f(z)$ per $z-3$, quindi l'equazione proposta, privata della radice 3, è

$$\varphi(z)=z^4-2z^3-14z^2-2z-15=0.$$

Ora operiamo su questa come sulla proposta, mettendo a prova i divisori dell'ultimo termine -15, esclusi però quelli in valore assoluto minori di 3, cioè incominciando da 3:

	1	−2	−14	−2	−15
3	1	1	−11	−35	−120

Essendo

$$\varphi(3)=-120\neq 0,$$

3 non è radice dell'equazione $\varphi(z)=0$, ossia 3 non è più radice dell'equazione proposta.

Mettiamo a prova -3.

	1	−2	−14	−2	−15
−3	1	−5	1	−5	0

Essendo

$$\varphi(-3)=0$$

-3 è radice dell'equazione $\varphi(z)=0$, e quindi della proposta. L'equazione $\varphi(z)=0$, privata della radice -3, diventa

$$\psi(z)=z^3-5z^2+z-5=0.$$

Operiamo su questa come sulle precedenti, mettendo a prova i divisori dell'ultimo termine -5, esclusi però quelli già messi a prova, ossia mettendo a prova i numeri 5 e -5.

Dividendo $\psi(z)$ per $z-5$ si ha:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 1 & -5 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Essendo

$$\psi(5)=0,$$

5 è radice dell'equazione $\psi(z)=0$, e quindi anche della proposta. L'equazione $\psi(z)=0$, privata della radice 5, diventa

$$z^2+1=0 \qquad z^2=-1 \quad z=\sqrt{1}=1$$

che ha per radice i e $-i$.

Dunque l'equazione proposta ha le radici intere

$$3,\ -3,\ 5$$

e le radici complesse-coniugate

$$i \text{ e } -i$$

Tutti i calcoli eseguiti sono compendiati nel seguente schema:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -5 & -8 & 40 & -9 & 45 \\ 1 & 1 & -4 & -12 & 28 & 19 & \boxed{64} \\ -1 & 1 & -6 & -2 & 42 & -51 & \boxed{96} \\ 3 & 1 & -2 & -14 & -2 & -15 & \boxed{0} \\ 3 & 1 & 1 & -11 & -35 & \boxed{-120} & \\ -3 & 1 & -5 & 1 & -5 & \boxed{0} & \\ 5 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

1 non è radice
-1 " " "
3 è radice
3 non è più radice
-3 è radice
5 è radice

Esempio 2° Sia l'equazione

$$z^4-2z^3-19z^2+68z-60=0.$$

Mettiamo a prova i divisori di 60, cioè

$$1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 5,\ -5,\ \ldots\ldots$$

	1	−2	−19	68	−60	
1	1	−1	−20	48	−12	1 non è radice
−1	1	−3	−16	84	−144	−1 " " "
2	1	0	−19	30	0	2 è radice
2	1	2	−15	0		2 è radice doppia
3	1	5	0			3 è radice
5	1	10				5 non è radice
−5	1	0				−5 è radice

Riassumendo: l'equazione ha le radici semplici 3, −5 e la radice doppia 2, ossia

$$f(z)=(z-2)^2(z-3)(z+5).$$

Radici fratte. Di una equazione [1] a coefficienti interi (e quindi anche di una equazione a coefficienti razionali) si possono anche cercare facilmente tutte le eventuali radici fratte.

La ricerca è fondata sul seguente teorema:

Un equazione intera a coefficienti interi e col coefficiente del termine di grado massimo(*) eguale all'unità non ha radici fratte.

Sia infatti l'equazione

---

* che suol dirsi anche *primo coefficiente*.

$\alpha \pm$
$\beta +$

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0,$$

ove $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ sono interi. Un fratto irriducibile $\frac{\alpha}{\beta}$
per essere radice dell'equazione deve rendere

$$\frac{\alpha^n}{\beta^n} + a_1 \frac{\alpha^{n-1}}{\beta^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{\alpha}{\beta} + a_n = 0$$

ossia, liberando dai fratti,

$$\alpha^n + \cancel{a_1 \alpha^{n-1}\beta} + \dots + a_{n-1}\alpha\beta^{n-1} + a_n \beta^n = 0$$

$a_1 \alpha^{n-1}\beta$

oppure

$$\alpha^n = -a_1 \alpha^{n-1}\beta - \dots - a_{n-1}\alpha\beta^{n-1} - a_n\beta^n.$$

Il secondo membro è un numero intero (tali essendo $a_1, \dots, a_n, \alpha, \beta$) che è certamente divisibile per β (essendo divisibili per β tutti i suoi termini); sarà quindi divisibile per β anche il primo membro α^n; ma per ipotesi β è primo con α e quindi anche con α^n, dunque l'unica ipotesi possibile è che sia $\beta = \pm 1$, ma allora la supposta radice fratta $\frac{\alpha}{\beta}$ si riduce all'intero $\pm\alpha$. c.d.d.

Dunque le sole radici razionali di una equazione a coefficienti interi e col primo coefficiente eguale all'unità sono quelle intere.

Ciò posto, data una equazione (1) a coefficienti interi, eseguiamo la sostituzione

$$z = \frac{y}{K}, \qquad \boxed{3}$$

ove K è un numero intero arbitrario. Essa diventa

$$a_0 \frac{y^n}{K^n} + a_1 \frac{y^{n-1}}{K^{n-1}} + \dots + a_{n-1}\frac{y}{K} + a_n = 0$$

ossia

$$a_0 y^n + a_1 K y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} K^{n-1} y + a_n K^n = 0$$

oppure

$$y^n + \frac{a_1 K}{a_0} y^{n-1} + \cdots + \frac{a_{n-1} K^{n-1}}{a_0} y + \frac{a_n K^n}{a_0} = 0 .$$

K è arbitrario. Possiamo sempre determinarlo in modo che i coefficienti

$$\frac{a_1 K}{a_0}, \frac{a_2 K^2}{a_0}, \ldots, \frac{a_{n-1} K^{n-1}}{a_0}, \frac{a_n K^n}{a_0}$$

dell'ultima equazione risultino interi: basta assumere per es.

$$K = a_0 ,$$

chè allora essi diventano

$$a_1, a_2 a_0, \ldots, a_{n-1} a_0^{n-2}, a_n a_0^{n-1},$$

cioè diventano interi; ma in molti casi sarà sufficiente assumere K eguale ad un divisore di a_0.

In ogni caso otterremo un'equazione

$$y^n + b_1 y^{n-1} + \cdots + b_n = 0 \qquad [4]$$

a coefficienti interi e col primo coefficiente eguale all'unità.

Questa non potrà avere radici fratte, ma radici intere, irrazionali e complesse. Ma, per la [3], le radici della [1] si ottengono dalle radici della [4], dividendole per k, dunque le radici fratte della [1] sono le radici intere della [4] divise per k.

Da tutto ciò raccogliamo la seguente regola per cercare le radici fratte di una equazione [1] a coefficienti interi: mediante una sostituzione del tipo (3) ($x = \frac{y}{K}$

$$z = \frac{y}{K},$$

ove K è un numero intero opportunamente scelto (per es. $K = a_0$), si trasformi l'equazione data [1] in un'altra [4] a coefficienti interi e col primo coefficiente eguale all'unità e poi si cerchino le radici intere di questa equazione; queste radici, divise per K saranno le radici fratte della [1].

Osservazione - Prima di applicare questa regola, conviene cercare le radici intere dell'equazione, privarla di queste radici, e poi applicare la regola precedente.

Esempio 1°. Sia l'equazione

$$z^3 - 4z^2 + 5z - 1 = 0.$$

Le eventuali radici intere di questa equazione non possono essere che 1 e -1, che sono i soli divisori dell'ultimo termine -1; ma questi non soddisfanno l'equazione, come si vede subito con sostituzione diretta; dunque l'equazione non ha radici intere.

E non ha nemmeno radici fratte, perchè il suo primo coefficiente è eguale ad 1 e gli altri sono interi.

Dunque l'equazione non ha radici razionali. Essendo di grado dispari, ha almeno una radice reale; le rimanenti possono essere o entrambe reali o entrambe complesse e coniugate (§1).

In ogni caso le radici reali sono irrazionali.

Esempio 2° Sia l'equazione

$$6z^6-7z^5-51z^4+56z^3-30z^2+63z+27=0.$$

Cerchiamo dapprima le radici intere (fra i divisori

$$1, -1, 3, -3, 9, -9, 27, -27$$

dell'ultimo termine 27).

	6	−7	−51	56	−30	63	27	
1	6	−1	−52	4	−26	37	64	1 non è radice
−1	6	−13	−38	94	−124	187	−160	−1 " "
3	6	11	−18	2	−24	−9	0	3 è radice
3	6	29	69	209	603	1800		3 non è più radice
−3	6	−7	3	−7	−3	0		−3 è radice
−3	6	−25	78	−241	720			−3 non è più radice

Non vi sono altre radici intere oltre 3 e −3; l'equazione privata di queste radici (cioè divisa per $z-3$ e per $z+3$), è diventata

$$6z^4-7z^3+3z^2-7z-3=0.$$

Cerchiamo le eventuali radici fratte di questa equazione.

Ponendo

$$x=\frac{y}{K},$$

essa diventa

$$6\frac{y^4}{K^4}-7\frac{y^3}{K^3}+3\frac{y^2}{K^2}-7\frac{y}{K}-3=0$$

ossia

$$y^4-\frac{7K}{6}y^3+\frac{3K^2}{6}y^2-\frac{7K^3}{6}y-\frac{K^4}{2}=0$$

per renderne interi i coefficienti basta porre

$$K=6\,,$$

e con ciò essa diventa

$$y^4-7y^3+18y^2-252y-648=0\,. \quad [5]$$

Cerchiamo le radici intere di questa equazione:

	1	−7	18	−252	−648	
1	1	−6	12	−240	−888	1 non è radice
−1	1	−8	26	−278	−370	−1 " "
2	1	−5	8	−236	−1120	2 " "
−2	1	−9	36	−324	0	−2 è radice
−2	1	−11	58	−440		−2 non è più radice
3	1	−6	18	−270		3 non è radice
−3	1	−12	72	−540		−3 " "
4	1	−5	16	−260		4 " "
−4	1	−13	88	−676		−4 " "
6	1	−3	18	−216		6 " "
−6	1	−15	126	−1280		−6 " "
9	1	0	36	0		9 è radice

Così abbiamo trovate le radici −2 e 9 e l'equazione, privata di queste radici, si riduce a

$$y^2+36=0 \quad \text{o} \quad y^2=-36$$

che fornisce le altre due radici

$$6i, \quad -6i.$$

Dunque le radici dell'equazione [5] sono

$$-2,\ 9\ ,\ 6i,\ -6i;$$

queste, divise per 6

$$-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, i, -i$$

sono radici dell'equazione proposta.

Concludendo, l'equazione proposta ha per radici

$$\boxed{3, -3, -\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, i, -i.}$$

4 *Esempio 3°* – Sia l'equazione

$$4z^4 - 11z^2 + 7z - 6 = 0.$$

Cerchiamo le radici intere fra i divisori

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$$

dell'ultimo termine:

	4	0	−11	7	−6	
1	4	4	−7	0	−6	
−1	4	−4	−7	14	−20	
2	4	8	5	17	28	
−2	4	−8	5	−3	0	−2 è radice
3	4	4	17	48		
−3	4	−20	65	−198		

L'equazione ha l'unica radice intera −2; privata di questa radice, cioè divisa per $z+2$, è diventata

$$4z^3 - 8z^2 + 5z - 3 = 0 \qquad [6]$$

Ponendo

$$z = \frac{y}{K},$$

questa diventa

$$4\frac{y^3}{K^3} - 8\frac{y^2}{K^2} + 5\frac{y}{K} - 3 = 0$$

ossia $4y^3 - 8y^2K + 5yK^2 - 3K^3$

$y^3 - 2y^2K + \cdot$

$$y^3 - 2ky^2 + \frac{5K^2}{4} y - \frac{3K^3}{4} = 0.$$

Per rendere interi i coefficienti, basta assumere

$$K = 2,$$

con ciò essa diventa

$$y^3 - 4y^2 + 5y - 6 = 0. \qquad [7]$$

Cerchiamo le radici intere di questa, fra i divisori dell' ultimo termine 6.

	1	-4	5	-6
1	1	-3	2	-4
-1	1	-5	10	-16
2	1	-2	1	-4
-2	1	-6	17	-40
3	1	-1	2	0

L'equazione ha la radice intera 3 e, privata di questa radice, diventa:

$$y^2 - y + 2 = 0$$

e dà

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}.$$

Le radici della [7] sono

$$3, \quad \frac{1+i\sqrt{7}}{2}, \quad \frac{1-i\sqrt{7}}{2}$$

quindi le radici della [6] sono

$$-2 \qquad \frac{3}{2}, \quad \frac{1+i\sqrt{7}}{4}, \quad \frac{1-i\sqrt{7}}{4}$$

e con -2 sono anche le radici dell'equazione proposta.

Osservazione – Le regole precedenti non sono applicabili se l'equazione in esame non ha i coefficienti razionali (ma reali). Allora le radici intere e le radici fratte si calcoleranno come le radici irrazionali con i metodi che esporremo in seguito.

§.3 – Limiti superiori ed inferiori delle radici reali

Or torniamo al caso generale di una equazione

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} \dots + a_{n-1} z + a_n = 0 \quad [1].$$

a coefficienti reali.

Per cercare le radici reali dell'equazione, dovremmo esplorare tutto il campo dei numeri reali da $-\infty$ a $+\infty$; ma è evidente che, essendo queste radici in numero finito (n al più), dev'essere possibile limitare questo campo ad un intervallo finito, ossia dev'essere possibile trovar due numeri α e β $(\alpha < \beta)$ tali che sia [illegible]

$$\alpha \leq z_i \leq \beta,$$

essendo z_i una qualunque radice reale della [1].

[illegible] è possibile

I numeri α e β si dicono rispettivamente *limite inferiore* e *limite superiore* delle radici dell'equazione [1].

È chiaro che ogni numero α_1 minore di α è anche un limite inferiore, come ogni numero β_1

maggiore di β è anche un limite superiore; ma è pure evidente che α e β sono preferibili, perchè l'intervallo (α, β) è più piccolo di (α_1, β_1) quindi minore è il campo di esplorare per la ricerca delle radici reali.

Ora il lemma di pag. 252 ci fornisce subito due di tali numeri. Infatti, se in esso poniamo $K=0$, otteniamo che: il valore assoluto della funzione intera $f(z)$ risulta positivo per ogni valore della variabile z il cui modulo ρ sia maggiore o eguale a

$$B = A + 1$$

ove A è un numero positivo non minore di

$$\left|\frac{a_1}{a_0}\right|, \quad \left|\frac{a_2}{a_0}\right|, \ldots\ldots \left|\frac{a_n}{a_0}\right| \qquad [2]$$

Evidentemente conviene prendere per A la massima fra le quantità positive [2]. Dunque: $B = A+1$, ove A è la massima delle quantità [2] è un limite superiore del modulo delle radici reali.

Questo teorema ci dice che $f(z)$ non può mai annullarsi per i valori di z il cui modulo sia esterno all'intervallo $(-B, B)$, ed in particolare che: le radici reali dell'equazione [1] sono tutte interne all'intervallo $(-B, B)$.

In altre parole $-B$ e B sono rispettivamente un limite inferiore ed un limite superiore delle radici reali dell'equazione [1].

Per es. per l'equazione

$$f(z) = z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0 \quad [3]$$

un limite superiore del modulo delle radici è $B = 11 + 1 = 12$, quindi -12 e 12 sono rispettivamente un limite inferiore ad un limite superiore delle radici reali dell'equazione, ossia queste sono tutte comprese nell'intervallo $(-12, 12)$.

Ci si potrebbe domandare di determinare anche due limiti, uno inferiore ed uno superiore delle radici positive dell'equazione [1], e due limiti analoghi per le sole radici negative.

Ebbene è evidente che per i primi due possiamo assumere 0 e B e per gli altri due $-B$ e 0 (*).

Vi sono moltre altre regole, tutte più soddisfacenti. Citeremo quella di Newton: si cerchi un numero reale che, sostituito all'incognita ~~x~~ z, renda dello stesso segno il primo membro $f(z)$ dell'equazione e le sue successive derivate (senza escludere che annulli alcune di queste); esso sarà un limite superiore delle radici reali. Per avere un limite inferiore, si cambi nell'equazione z in $-z$ e si cerchi un limite su-

(*) Evidentemente queste regole dànno limiti delle radici reali un pò grossolani; per es. l'equazione [3] ha per radici 1, 2, 3 ed intanto abbiamo trovato come limiti inferiore e superiore di queste radici -12, 12.

periore α delle radici dell'equazione trasformata $f(-z)=0$; $-\alpha$ sarà un limite inferiore delle radici reali dell'equazione data $f(z)=0$.

Infatti supponiamo che per $z=\alpha$, $f(z), f'(z), \dots, f^{(n)}(z)=n!\,a_0$ prendano tutte lo stesso segno, allora, siccome per la formola di Taylor (pag. 240)

$$f(z)=f(\alpha)+(z-\alpha)f'(\alpha)+(z-\alpha)^2\frac{f''(\alpha)}{\lfloor 2}+\dots+(z-\alpha)^n\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!},$$

per $z>\alpha$ $f(z)$ conserverà un segno costante quello di $f(\alpha)$, perchè tutti i termini del secondo membro avranno lo stesso segno [quello di $f(\alpha)$]; dunque $f(z)$ non si annullerà mai per $z>\alpha$, ossia α sarà un limite superiore delle radici reali di $f(z)$. Inoltre, posto $z=-y$ sia α un limite superiore delle radici reali dell'equazione $f(-y)=0$. Vuol dire che per $y>\alpha$ è $|f(-y)|\neq 0$ ossia che per $z<-\alpha$ è $|f(z)|\neq 0$, e quindi che $-\alpha$ è un limite inferiore delle radici di $f(z)=0$.

Esempio - Sia l'equazione

$$f(z)=z^3+2z^2-4z+1=0.$$

Qui

$f(z)$, $f'(z)=3z^2+4z-4$, $f''(z)=6z+4=2(3z+2)$, $f'''(z)=6$ risultano dello stesso segno per $z=1$, quindi 1 è un limite superiore delle radici reali dell'equazione. Poi $f(z)=-z^3+2z^2+4z+1$ e le sue derivate $-3z^2+4z+4$, $2(-3z+2)$, -6, risultano dello stesso segno per $z=3$, quindi -3 è un limite inferiore delle radici reali

Dunque le radici reali dell'equazione cadono nell'intervallo $(-3,1)$. Invece, applicando la prima regola $(B=A+1)$, troviamo che le radici reali cadono nell'intervallo $(-5,5)$ più lungo del precedente, e perciò meno conveniente.

§. 4 – Sul numero delle radici reali di una equazione che cadono in un dato intervallo.

Teorema – Se due numeri reali, sostituiti all'incognita z nel primo membro di una equazione a coefficienti reali

$$f(z)=a_0 z^n + a_1 z^{n-1} \dots + a_{n-1} z + a_n = 0,$$

dànno risultati di segno contrario, fra i due numeri è compreso un numero dispari di radici reali della equazione; e se dànno risultati dello stesso segno, fra i due numeri è compreso un numero pari (zero incluso) di radici reali.

Sieno

$$z_1, z_2, \dots, z_k \qquad (0 \leq k \leq n)$$

le radici reali dell'equazione data; allora il primo membro si può scomporre nel prodotto di k fattori lineari

$$z-z_1,\ z-z_2, \dots, z-z_k$$

e di $\frac{n-k}{2}$ fattori del secondo grado a coefficienti reali del tipo

$$(z-a)^2+b^2$$

corrispondenti alle coppie di radici complesse-coniugate $a \pm bi$ (cfr. pag. 298).

$$f(z = a_0(z-z_1)(z-z_2)\ldots\ldots(z-z_k)[(z-a)^2+b^2]\ldots\ldots$$

I detti fattori di secondo grado risultano evidentemente positivi per ogni valore reale di z, quindi il loro prodotto risulterà positivo per ogni valore reale di z; indicandolo con $\varphi(z)$, avremo

$$f(z) = a_0(z-z_1)(z-z_2)\ldots\ldots(z-z_k)\,\varphi(z).$$

Sieno α e β due numeri reali qualunque e sia $\alpha < \beta$. Si avrà

$$f(\alpha) = a_0(\alpha-z_1)(\alpha-z_2)\ldots\ldots(\alpha-z_k)\,\varphi(\alpha),$$
$$f(\beta) = a_0(\beta-z_1)(\beta-z_2)\ldots\ldots(\beta-z_k)\,\varphi(\beta),$$

epperò

$$\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = \frac{\alpha-z_1}{\beta-z_1}\cdot\frac{\alpha-z_2}{\beta-z_2}\cdots\cdots\frac{\alpha-z_k}{\beta-z_k}\cdot\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)},$$

supponendo, d'accordo con l'enunciato, che α e β non annullino $f(z)$.

Ora, se $f(\alpha)$ e $f(\beta)$ hanno segno opposto, $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}$ è negativo, e siccome $\varphi(\alpha)$ e $\varphi(\beta)$ sono positivi, così tra i fattori

$$\frac{\alpha-z_1}{\beta-z_1},\ \frac{\alpha-z_2}{\beta-z_2},\ \ldots\ldots,\frac{\alpha-z_k}{\beta-z_k}$$

del secondo membro i negativi saranno in numero dispari. Ma se per es.

$$\frac{\alpha-z_1}{\beta-z_1}$$

è negativo, $\alpha-z_1$ e $\beta-z_1$ dovranno avere segno opposto, quindi o sarà

$$\alpha - z_1 < 0, \quad \beta - z_1 > 0 \qquad \boxed{1}$$

o sarà

$$\alpha - z_1 > 0 \quad , \quad \beta - z_1 < 0;$$

ma nel secondo caso sarebbe $z_1 < \alpha$ e $z_1 > \beta$, ciò che è assurdo, essendo $\alpha < \beta$; dunque necessariamente sussisteranno le [1], cioè sarà:

$$\alpha < z_1 < \beta,$$

vale a dire che z_1 sarà compresa tra α e β. Dunque fra α e β sarà compreso un numero dispari di radici dell'equazione (una almeno).

Se invece $f(\alpha)$ ed $f(\beta)$ hanno lo stesso segno, fra i detti fratti i negativi saranno in numero pari (zero incluso), epperò fra α e β cadrà un numero pari (zero incluso) di radici.

Per la ben nota legge delle inverse, si ha il

Teorema (inverso). *Se fra due numeri reali è compreso un numero dispari di radici dell'equazione, sostituendo i due numeri nel primo membro dell'equazione si hanno risultati di segno opposto; e, se fra i due numeri è compreso un numero pari di radici (zero incluso), si hanno risultati dello stesso segno.*

Osservazione - Conviene notare che nei teoremi ora enunciati, ciascuna radice multipla va contata tante volte quanto è il suo ordine di multiplicità.

Esempio. Sia l'equazione

$$f(z)=24z^4-68z^3+62z^2-23z+3=0.$$

Il massimo tra i valori assoluti dei rapporti dei singoli coefficienti al primo è $\frac{68}{24}=\frac{17}{6}$, quindi $B=\frac{17}{6}+1$ ed a fortiori $3+1=4$ è un limite superiore del modulo delle radici dell'equazione; dunque le radici reali dell'equazione cadono nell'intervallo $(-4,4)$ (Cfr. § 3).

Se vogliamo conoscere quante radici positive ha l'equazione, basterà vedere quante radici reali cadono nell'intervallo $(0,4)$; ma $f(0)=3$, $f(4)=2695$ hanno lo stesso segno, dunque, le radici positive sono in numero pari (0, 2 o 4). Poi $f(0)=3$ ed $f(1)=-2$ hanno segno opposto, quindi tra 0 ed 1 cade un numero dispari di radici dell'equazione (1 o 3). Inoltre $f(1)=-2$, $f(2)=45$ hanno segno opposto, quindi fra 1 e 2 cade un numero dispari di radici dell'equazione (1 o 3).

Ciò è d'accordo col fatto che le radici dell'equazione sono $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{2}$ e che la prima è doppia.

§ 5 - Separazione delle radici reali.

Separare le radici reali di una equazione intera

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_n=0$$

a coefficienti reali vuol dire: assegnare per ciascuna radice reale due numeri reali α e β tra i quali sia compresa quella radice e nessun'altra.

Si hanno varii metodi per separare le radici reali. Noi ne esporremo uno solo, dovuto a Waring e Lagrange, e notevolmente semplificato da Cauchy.

Esso suppone l'equazione priva di radici multiple, o almeno ridotta tale mediante il noto procedimento del §10, capitolo precedente; e si fonda sulla osservazione che qualora si conosca un numero positivo δ minore dei valori assoluti di tutte le differenze tra le radici reali combinate a due a due, formando una progressione aritmetica indefinita in ambo i sensi, che abbia per ragione codesto numero δ, tra due termini consecutivi della progressione potrà essere compresa una sola radice o nessuna.

Sarà facile assicurarsi se fra due termini consecutivi della progressione sia compresa o no una radice; poichè nel primo caso essi, sostituiti all'incognita z, faranno prendere al primo membro $f(z)$ dell'equazione segni opposti, e nel secondo caso lo stesso segno.

Evidentemente è inutile protrarre la progressione indefinitamente; basta tener conto solo di quei termini della progressione che cadono nell'intervallo compreso tra un limite inferiore ed un limite superiore delle radici reali dell'equazione.

Ora procuriamoci l'accennato numero δ.

Noi sappiamo calcolare il discriminante

D dell'equazione in funzione dei coefficienti (pag. 280) e sappiamo pure che si ha.

$$D = (z_1 - z_2)^2 (z_1 - z_3)^2 \cdots (z_1 - z_n)^2 (z_2 - z_3)^2 \cdots (z_{n-1} - z_n)^2; \quad \boxed{1}$$

ove

$$z_1, z_2, \ldots, z_n$$

sono le radici dell'equazione.

Sappiamo inoltre trovare (§3) un limite superiore B dei valori assoluti di queste radici.

Ciò posto, se z_1 e z_2 sono due radici reali, $(z_1 - z_2)^2$ è un numero positivo; e perchè

$$|z_r - z_s| \leqq |z_r| + |z_s| < B + B = 2B,$$

sostituendo nell'uguaglianza [1] al fattore $(z_1 - z_2)^2$ e seguenti il numero maggiore $(2B)^2$, si avrà

$$|D| < (z_1 - z_2)^2 (2B)^{2\left(\frac{n(n-1)}{2} - 1\right)},$$

onde

$$\sqrt{|D|} < |z_1 - z_2| (2B)^{\frac{n(n-1)}{2} - 1},$$

epperò

$$|z_1 - z_2| > \frac{\sqrt{|D|}}{(2B)^{\frac{n(n-1)}{2} - 1}}.$$

Il secondo membro è minore del modulo della differenza tra le due radici reali z_1, z_2, che del resto sono due radici reali qualunque della equazione; dunque possiamo assumere

$$\boxed{\lambda = \frac{\sqrt{|D|}}{(2B)^{\frac{n(n-1)}{2} - 1}}} \quad \boxed{2}$$

Supponiamo in particolare che i coefficienti dell'equazione siano interi ed il primo a_0 sia eguale all'unità. Allora il discriminante, essendo una funzione intera dei rapporti (cfr. pag. 280)

$$\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots\ldots, \frac{a_n}{a_0}$$

che sono numeri interi, sarà un numero intero, e quindi certamente sarà:

$$\sqrt{|D|} \geq 1 \text{ (*)};$$

dunque possiamo assumere

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{(2B)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}}}\,. \qquad [2']$$

Che se poi i coefficienti fossero razionali potremo sempre ridurci al caso precedente con una trasformazione del tipo

$$z = \frac{y}{k}\,.$$

Dunque, quando l'equazione ha i coefficienti razionali, possiamo fare a meno di calcolarne il discriminante

Osservazione 1ª — Separando le radici reali, nel modo spiegato, noi veniamo anche a calcolarle con una prima approssimazione; infatti,

---

(*) Non può essere $D = 0$, perchè l'equazione è priva di radici multiple, come si è supposto in principio separata una radice z mediante due numeri α, β è

$$\alpha < z < \beta;$$

quindi α e β sono due valori approssimati di z, il primo in difetto, il secondo in eccesso.

Per approssimare maggiormente la radice z, bisognerebbe cercare altri due numeri α_1 e β_1 compresi nell'intervallo (α, β) e tali che nell'intervallo (α_1, β_1) cada ancora la radice z; saranno α_1, β_1 altri due valori ancora più approssimati di z il primo in difetto, il secondo in eccesso. E così via.

Senza occuparci per ora dei varî metodi che si possono adoperare per calcolare i nuovi numeri, accenneremo a quello che più spontaneamente si presenta.

Fissiamo nell'intervallo (α, β) alcuni numeri

$$c_1, c_2, \ldots . c_k,$$

(per es. quelli che lo dividono in k parti eguali

$$\alpha + \frac{\beta-\alpha}{k}, \quad \alpha + 2\frac{\beta-\alpha}{k}, \ldots, \alpha + (k-1)\frac{\beta-\alpha}{k}.$$

In uno degli intervalli successivi

$$(\alpha, c_1), \; (c_1, c_2), \ldots, (c_k, \beta)$$

dovrà cadere la radice separata in questione; precisamente, essa cadrà in quell'intervallo negli estremi del quale la funzione $f(z)$ prenderà valori di segno opposto. Se questa è per esempio (c_1, c_2), saranno c_1 e c_2

due valori approssimati della radice, il primo in difetto e il secondo in eccesso (e preferibili ad α e β) sull'intervallo (c_1, c_2) si può operare come su (α_1, β); e così via.

imp

Esempio – Sia l'equazione

$$f(z) = z^3 + z - 1 = 0 .$$ 3° grado [3]

Questa equazione ha tre radici; essendo i coefficienti reali, esse possono essere o tutte reali o una reale e due complesse coniugate.

Essendo i coefficienti interi, le sole eventuali radici intere potrebbero essere i divisori $+1$ e -1 dell'ultimo termine, ma questi non soddisfano l'equazione.

Essendo inoltre eguale all'unità il coefficiente del primo termine, non vi sono radici fratte.

Ne segue che le radici reali dell'equazione (una o tre) sono necessariamente irrazionali.

Conviene separarle, col metodo spiegato; ma per farlo bisogna anzitutto assicurarsi che non vi sono radici multiple.

A tale scopo calcoliamo il discriminante

$$D = \begin{vmatrix} s_4 & s_3 & s_2 \\ s_3 & s_2 & s_1 \\ s_2 & s_1 & s_0 \end{vmatrix}$$ 3

ove $s_0 = 3$ ed s_1, s_2, s_3, s_4 si calcolano con le formole di Newton (pag. 271).

$a_0 s_1 + a_1 = 0$
$a_0 s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 = 0$

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 + 2 = 0 \\ s_3 + s_1 - 3 = 0 \\ s_4 + s_2 - s_1 = 0 \end{cases}$$

Queste dànno successivamente

$$s_1=0,\ s_2=-2\ ,\ s_3=3\ ,\ s_4=2,$$

e però

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-31.$$

Essendo $D\neq 0$, l'equazione non ha radici multiple, e però il metodo spiegato per la separazione delle radici è applicabile.

Procuriamoci anzitutto due limiti, inferiore e superiore, per le radici reali. Il massimo tra i valori assoluti dei rapporti di tutti i coefficienti, a partire dal secondo, al primo è 1, quindi $B=1+1=2$ è un limite superiore dei moduli di tutte le radici, reali o immaginarie, dell'equazione; quindi le radici reali cadono certamente tutte nell'intervallo $(-2,2)$.

Possiamo anche procurarci un intervallo più ristretto, applicando la regola di Newton (§.3, in nota).

La funzione $f(z)$ e le sue derivate,

$$f'(z)=3z^2+1\ ,\ f''(z)=6z\ ,\ f'''(z)=6,$$

prendono lo stesso segno $(+)$ per $z=1$, quindi 1 è un limite superiore delle radici reali. La funzione

$$f(-z)=-z^3-z-1$$

e le sue derivate

$$-3z^2-1,\quad -6z,\ -6$$

prendono lo stesso segno $(-)$ per $z=0$, quindi $-0=0$ è un limite inferiore delle radici reali.

Dunque le radici reali cadono tutte nell'intervallo $(0,1)$, e però sono tutte positive.

Dobbiamo ora costruire una progressione di ragione λ estendendola in ambo i sensi e tenendo conto solo di quei suoi termini che cadono nell'intervallo $(0,1)$.

Essendo $B=2$, $|D|=31$, $n=3$, la $\boxed{2}$ dà

$$\lambda = \frac{\sqrt{31}}{16} > \frac{5}{16}$$

Per evitare irrazionali, possiamo prendere

$$\lambda = \frac{5}{16}$$

e formare la progressione

$$0,\ \frac{5}{16};\ \frac{10}{16},\ \frac{15}{16},\ 1 \qquad \boxed{4}$$

che dà luogo a 4 intervalli

$$\left(0, \frac{5}{16}\right), \left(\frac{5}{16}, \frac{10}{16}\right), \left(\frac{10}{16}, \frac{15}{16}\right), \left(\frac{15}{16}; 1\right).$$

Sostituendo nel 1° membro dell'equazione successivamente a z i valori $\boxed{4}$, si trova che

$$f(0),\ f\left(\frac{5}{16}\right),\ f\left(\frac{10}{16}\right)$$

sono negativi,

$$f\left(\frac{15}{16}\right),\ f(1)$$

sono positivi: dunque l'equazione proposta ha una sola radice reale compresa tra $\frac{10}{16}$ e $\frac{15}{16}$; quindi $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$ è un valore in difetto e $\frac{15}{16}$ è un valore in eccesso di detta radice.

Volendo approssimarla maggiormente, si divida l'intervallo precedente $\left(\frac{10}{16}, \frac{15}{16}\right)$ in un numero qualunque di parti, per es. in decimi e si proceda come poc'anzi sulla successione.

$$\frac{10}{16}, \frac{10}{16}+\frac{1}{10}\cdot\frac{5}{16}, \frac{10}{16}+\frac{2}{10}\cdot\frac{15}{16}, \ldots\ldots, \frac{10}{16}+\frac{10}{10}\cdot\frac{5}{16}=\frac{16}{16}$$

ossia

$$\frac{20}{32}, \frac{21}{32}, \frac{22}{32}, \ldots\ldots, \frac{30}{32}.$$

L'operazione si fa più rapidamente come segue: poniamo

$$z=\frac{20}{32}+\frac{y}{32}=\frac{5}{8}+\frac{y}{32} \qquad [5]$$

e calcoliamo i coefficienti delle varie potenze di $\frac{y}{32}$ mediante la regola di Ruffini-Horner, dividendo $f(z)$ successivamente per $z-\frac{5}{8}$. Otteniamo

$$\begin{array}{c|cccc}
\frac{5}{8} & 1 & 0 & 1 & -1 \\
 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{89}{64} & \boxed{-\frac{67}{512}} \\
 & 1 & \frac{10}{8} & \boxed{\frac{139}{64}} & \\
 & 1 & \boxed{\frac{15}{8}} & &
\end{array}$$

quindi

$$f(x)=f\left(\frac{5}{8}+\frac{y}{32}\right)$$

$$=\frac{y^3}{32^3}+\frac{15}{8}\frac{y}{32^2}+\frac{139}{64}\frac{y}{32}-\frac{67}{512}=0$$

da cui moltiplicando per 32^3:

$$y^3 + 60y^2 + 16 . 139\, y - 64 . 67 = 0 . \qquad [6].$$

Ponendo successivamente $y = 0, 1, 2, \ldots$, si hanno risultati di segno opposto per $y = 1$ e $y = 2$; dunque la [6] ha una radice compresa tra 1 e 2, sicchè la radice reale della proposta, per la [5], è compresa tra

$$\frac{21}{32} \text{ e } \frac{22}{32}.$$

Per avere una maggiore approssimazione si prosegua allo stesso modo sulla [6] dividendo l'intervallo (1,2) in 10 parti.

$$z = 0,68 \text{ (in difetto)}, \quad z = 0,69 \text{ (in eccesso)}.$$

Volendo proseguire, cioè calcolare la cifra dei millesimi si ponga

$$y = 8 + \frac{z}{10}$$

e si prosegua come poc'anzi.