Capitolo V°

Serie.

§1. Definizioni.

Siano date infinite quantità

$$u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots, \quad u_n, u_{n+1}, \ldots\ldots$$

Consideriamo la somma s_n delle prime n di queste quantità; poniamo cioè

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n.$$

Se esiste ed è finito il $\lim_{n=\infty} s_n$, allora la serie

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots$$

si dice convergente; e il valore s di questo limite si dice somma di questa serie; e si scrive

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots$$

Se quel limite esiste ed è infinito, la serie

$$u_1 + u_2 + u_3 \ldots\ldots$$

si dice divergente.

Se quel limite non esiste, la serie si dice indeterminata.

Nel calcolo si possono adoperare soltanto le serie convergenti.

Se a, q sono numeri qualsiasi, la serie

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots\ldots$$

a) è convergente se $|q|<1$, perchè in tal caso la somma s_n dei primi n termini è data dalla

$$s_n = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

ed ha per $n=\infty$ il limite $\frac{a}{1-q}$; cosicchè

$$\frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + \ldots\ldots$$

Una tal serie si dice una *progressione geometrica decrescente*.

b) Se $|q|>1$ (e $a \neq 0$) la nostra serie *diverge*, perchè la somma $s_n = a\frac{1-q^n}{1-q}$ ha per $n=\infty$ il limite ∞.

c) Se $a \neq 0$, $q=1$ la serie è *divergente*, perchè la somma $s_n = na$ dei primi n termini ha ancora per $n=\infty$ il limite infinito.

d) Se $a \neq 0$, $q=-1$ la serie è *indeterminata*, perchè la somma s_n è uguale a ~~na~~ 0 per n pari, a $-a$ per n dispari, e quindi non tende ad alcun limite per $n=\infty$ (pag. 103).

e) Se $a=0$, la nostra serie è *convergente*, ed ha somma nulla.

§ 2. Serie a termini positivi.

Se i termini della serie

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots$$

sono tutti positivi, la somma s_n cresce evidentemente al crescere di n e perciò (pag. 103) tende certamente a un limite. Quindi:

Una serie a termini positivi, non è mai indeterminata, ma o converge o diverge.

Se

$$(1) \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots\dots$$

$$(2) \quad b_1 + b_2 + b_3 + \dots\dots\dots$$

sono due serie a termini positivi, e se per tutti i valori di n si ha

$$(3) \quad a_n \leq b_n,$$

allora, se la serie (2) converge anche la serie (1) converge. E quindi, se la (1) diverge, diverge anche la (2).

Infatti, se s_n, σ_n sono rispettivamente la somma dei primi n termini della (1), e della (2), allora dalla (3) segue

$$(4) \quad s_n \leq \sigma_n.$$

Se la (2) converge, allora $\lim_{n=\infty} \sigma_n$ è finito; dalla (4) segue che in tal caso s_n non può tendere all'infinito, ossia che la (1) non può divergere. Quindi, per il teorema precedente, la (1) converge.

c. d. d.

In particolare se $b_n = b.q^n$, dove $|q| < 1$, ossia se la (2) è una progressione geometrica decrescente (che noi sappiamo già convergere sempre), si ha:

Se i termini della serie

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots\dots$$

sono positivi, ed esistono due numeri b, q tali che $|q| < 1$ e che

$$a_n \leq b\,q^n,$$

allora la nostra serie converge.

E in modo analogo si vede che, se fosse

$$a_n \geq b\,q^n$$

dove $\cancel{q \geq 1}$, $q>1$ oppure $q=1$

la serie

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots$$

sarebbe divergente.

Supponiamo ora che esista un numero $K<1$, tale che per tutti i valori di n sia

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq K .$$

Allora sarebbe

$$\frac{a_2}{a_1} \leq K , \quad \frac{a_3}{a_2} \leq K, \ldots\ldots, \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq K, \qquad (a_{n+1}$$

donde, moltiplicando membro a membro,

$$\frac{a_{n+1}}{a_1} \leq K^n$$

ossia

$$a_{n+1} \leq a_1 K^n .$$

I termini della nostra serie

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots$$

sarebbero ordinatamente minori o uguali dei termini della progressione geometrica decrescente

$$a_1 + a_1 K + a_1 K^2 + \ldots\ldots$$

Quindi la nostra serie sarebbe convergente.

In modo analogo si prova, che se per tutti i valori di n è $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, la nostra serie è divergente. $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1\right)$

Per il primo caso, invece di ammettere che fosse

[5] $$\cancel{\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq K < 1}$$

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} < K < 1\right)$$

per tutti i valori di n, basterebbe ammettere che questa disuguaglianza valesse a partire da un certo valore di n in poi, per es. per $n \geq m$. La serie $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots$ sarebbe ancora convergente. Infatti osserviamo che se la serie $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots$ è convergente e se $b_1, b_2, \ldots, b_m$ sono m quantità finite, anche la serie $b_1 + b_2 + \ldots + b_m + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots$ è convergente, e viceversa se questa è convergente, lo è anche la prima (perchè se esiste il limite per $n = \infty$ di $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ ed è s, esiste anche il limite di $b_1 + b_2 + \cdots + b_m + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ ed è $b_1 + b_2 + \cdots + b_m + s$, e viceversa).

Ora essendo soddisfatta la [5] per $n \geq m$, è convergente la serie

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots\ldots$$

e quindi anche la serie

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} + a_m + a_{m+1} + \ldots\ldots$$

Considerazioni analoghe valgono pel secondo caso. Raccogliendo si ha il teorema: se in una serie a termini positivi

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots$$

il rapporto di un termine al precedente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, da un certo punto in poi (ossia per n maggiore o eguale ad un certo m), è eguale o minore di un numero fisso K minore di 1, la serie è convergente; se detto rapporto è maggiore o eguale ad 1 la serie è divergente.

Se ne deduce facilmente il seguente corollario, molto utile in pratica: se in una serie a termini positivi il rapporto di un termine al precedente ha un limite minore di 1, la serie è convergente; se ha un limite maggiore di 1 la serie è divergente.

Perchè se nella serie a termini positivi

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots$$

è $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha < 1$, preso un numero K compreso tra α e 1 $(\alpha < K < 1)$, sarà $\frac{a_{n+1}}{a_n} < K$ a partire da un certo n (Cfr. le osservazioni in principio del Cap. IV degli esercizi di Analisi Matem.), e quindi la serie sarà convergente, pel teorema precedente. Che se poi $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, allora $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ finirà per diventare e restare maggiore di 1, (Cfr. loc. cit.) e, pel teorema precedente, la serie sarà divergente.

Es. la serie

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

è convergente.

Infatti in questo caso è $a_n = \frac{1}{\lfloor n-1}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{\lfloor n}}{\frac{1}{\lfloor n-1}} = \frac{1}{n},$$

e quindi

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0.$$

Vedremo in seguito che la somma di questa serie è proprio il numero "e" (pag 113).

Calcolare la somma S di questa serie con l'approssimazione di $\frac{1}{1000}$. Si osservi che la somma di tutti i termini dopo lo n esimo termine è eguale a

$$\frac{1}{\lfloor n}\left\{1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\dots\right\}\leq$$

$$\leq\frac{1}{\lfloor n}\left\{1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\dots\right\}=$$

$$=\frac{1}{\lfloor n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{n+1}{n.\lfloor n}.$$

Se dunque scegliamo n così grande che

$$\frac{n+1}{n\lfloor n}<\frac{1}{4000},$$

la somma dei primi n termini della nostra serie differirà dal valore vero della serie per meno di $\frac{1}{4000}$. Ora questa disuguaglianza è soddisfatta per $n=7$. Quindi si può scrivere

$$S=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{1.2.3.4.5}+\frac{1}{1.2.3.4.5.6}$$

con un errore minore di $\frac{1}{4000}$

Si trova così

$$S=2,7182\dots$$

<u>Osservazione</u> – Se nella serie a termini positivi

$$a_1+a_2+a_3+\dots\dots$$

il rapporto di un termine al precedente ha per limite 1,

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1,$$

nulla si può asserire in generale circa il carattere della serie.

Per esempio, nelle serie

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\dots\dots$$

= 1

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots\dots+\frac{1}{n}+\dots\dots$$

= Diverg

si ha rispettivamente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}}{\dfrac{1}{n(n+1)}}=\frac{n}{n+2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}}=\frac{n}{n+1};$$

quindi per entrambe (cfr. Eserc. di Analisi Matem. Cap. IV, esercizio 11).

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1.$$

Ebbene la prima serie è convergente, mentre che la seconda è divergente (cfr. Eserc. di Analisi Matem. Cap. V, esercizi 1 e 5).

In questo caso dubbio si può ricorrere al seguente teorema di Raabe, che ci limitiamo ad enunciare e che spesso è sufficiente a decidere.

" Una serie a termini positivi $a_1+a_2+\dots\dots$ è convergente o divergente secondo che l'espressione

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$$

tende per $n=\infty$, ad un limite maggiore o minore del l'unità.

Vi sono moltissimi altri speciali criterii di convergenza per le serie a termini positivi. Ci limiteremo ad enunciare i seguenti:

Se in una serie a termini positivi

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$\sqrt[n]{a_n}$ finisce per mantenersi inferiore ad un numero fisso minore di 1, la serie è convergente. È divergente se $\sqrt[n]{a_n}$ finisce per mantenersi maggiore o eguale ad 1.

Se $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n}$ esiste, la serie è convergente o divergente secondo che questo limite è minore o maggiore di 1. (Se è uguale ad 1 nulla si può asserire, in generale).

§ 3. Proprietà commutativa delle serie convergenti a termini positivi.

Se

$$[1] \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots$$

è una serie convergente a termini positivi, e se

$$[2] \qquad b_1 + b_2 + b_3 + \dots\dots$$

è una serie dedotta da [1], cambiando l'ordine dei termini, anche la [2] è convergente, e le due serie [1] e [2] hanno la stessa somma.

Sia S la somma di [1], sia σ_n la somma dei primi n termini di [2]. Sia m un numero così grande che tra i primi m termini di [1] esistano i primi n termini della [2]. [Ricordo che ogni termine di [2] è per ipotesi uguale a un qualche termine di [1]]. Sia S_m la somma di questi primi termini di [1]. Chiaramente

$$S > S_m \quad , \quad S_m \geq \sigma_n \, ,$$

e quindi

[3] $$S \geq \sigma_n$$

Le somme σ_n per $n = \infty$ non possono dunque tendere all'infinito; e, poichè la [2] non può essere indeterminata, essa avrà un limite finito σ, che per la [3] soddisferà alla

$$S \geq \sigma \, .$$

Analogamente si dimostra che

$$\sigma \geq S \, .$$

Quindi

$$S = \sigma \qquad \text{c.d.d.}$$

§. 4. Serie a termini positivi e negativi.

Sia

[1] $$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots$$

una serie, sul segno dei termini della quale non facciamo alcuna ipotesi. Siano $a_1, a_2, \ldots\ldots$ quei termini di questa serie che sono positivi, $-b_1, -b_2, -b_3 \ldots\ldots$ quei termini della nostra serie che sono negativi. Tra i primi n termini della [1] ce ne saranno peres. m positivi, p negativi $(m+p=n)$. E sarà quindi

$$u_1+u_2+\cdots+u_n=(a_1+a_2+\cdots+a_m)-(b_1+b_2+\cdots+b_p).$$

Supponiamo che sieno convergenti le due serie

$$[2] \qquad a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots$$

$$[3] \qquad b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots (*)$$

e ne siano S, s le somme. Allora

$$\lim_{n=\infty}(u_1+u_2+\cdots+u_n)=\lim_{m=\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_m)-$$
$$-\lim_{p=\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_p)=S-s.$$

Quindi: la [1] è convergente ed ha per somma $S-s$.

Nel caso precedente si ha evidentemente

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots+|u_n|=(a_1+a_2+\cdots+a_m)+(b_1+b_2+\cdots+b_p)$$

donde, come sopra, si deduce che la serie

$$[4] \qquad |u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots\cdots$$

è convergente, ed ha per somma $S+s$.

Supponiamo ora viceversa che la [4] sia convergente, ed abbia quindi una somma finita T.

Siccome ognuna delle quantità a_i è un termine di [4], la somma di un numero qualsiasi di termini

---

(*) I risultati seguenti valgono anche se di termini positivi, o di termini negativi nella [1] ve n'è solo un numero finito, se cioè una delle serie [2], [3] si riduce a una somma. Questi risultati valgono anche se la [1] ha termini nulli.

della [2] non potrà superare T. Quindi la [2] è convergente. In modo simile si dimostra che la [3] converge, e che quindi, per quanto si è visto, converge anche la [1].

Dunque:

Una serie [1] converge, se converge la serie [4] dedotta dalla [1], sostituendo a ogni termine il suo valore assoluto.

Così per es. se ne trae che [1] converge se il $\lim_{n=\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ esiste, ed è minore di 1.

Le serie [1], tali che converga la serie [4] formata coi valori assoluti dei loro termini, si dicono *assolutamente convergenti*.

Teorema. *Una serie [1] assolutamente convergente rimane tale, e non muta di valore, comunque si cambii l'ordine dei termini.*

Infatti il cambiare l'ordine dei termini della [1] equivale a mutare l'ordine dei termini delle [2], [3]. Ma, come sappiamo, comunque si muti quest'ordine, la serie [2], [3] a termini positivi restano convergenti, e la loro somma continua a essere uguale a S, s. Per le considerazioni precedenti, la [1] resterà ancora convergente, e la sua somma sarà ancora $S - s$.

Teorema — Se la serie

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots$$

converge, allora

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0.$$

Infatti, se S è la somma della nostra serie, S è finito; ~~ed~~ è

$$\lim_{n=\infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n) = S,$$

$$\lim_{n+1=\infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1}) = S.$$

Sottraendo, se ne deduce

$$\lim_{n=\infty} u_{n+1} = S - S = 0 \qquad \text{c.d.d.}$$

§.5- Serie di funzioni.

Siano $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_n(x)$, ... infinite funzioni definite in un certo campo T.

Se si possono determinare delle costanti positive M_i tali che nel campo T sia

$$[A] \qquad |f_i(x)| \leq M_i$$

e che la serie

$$[B] \qquad M_1 + M_2 + M_3 + \dots\dots$$

converga, allora la serie

$$|f_1| + |f_2| + |f_3| + \dots\dots$$

è ancora convergente, e quindi la serie

$$[1] \qquad f_1 + f_2 + f_3 + \dots\dots$$

è convergente assolutamente per ogni valore di x appartenente al campo T.

Una serie [1], che soddisfi alle precedenti proprietà, si dirà totalmente convergente.

Una serie totalmente convergente è dunque anche assolutamente convergente in tutto il campo che si considera.

Supponiamo per es. che il campo T sia formato dai punti x che soddisfano alla $a < x \leq b$, dove a, b sono numeri distinti, e che esistano i $\lim_{x=a+0} f_i(x)$, che noi indicheremo con l_i.

Io dico che la serie

$$[2] \qquad l_1 + l_2 + l_3 + \ldots\ldots$$

è convergente e che

$$\lim_{x=a+0} (f_1 + f_2 + f_3 + \ldots\ldots) = l_1 + l_2 + l_3 + \ldots\ldots\ldots$$

Dalla [A] segue infatti che

$$[A]' \qquad |l_i| \leq M_i$$

e che quindi la [2] converge assolutamente. Sia M la somma di [B] e sia ε un numero piccolo a piacere.

Potremo trovare un numero n così grande che

$$|M - (M_1 + M_2 + \ldots + M_n)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

ossia che

$$M_{n+1} + M_{n+2} + \ldots\ldots \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Per le [A][A]' sarà pure

$$[3] \qquad |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots\ldots| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

$$[4] \qquad |l_{n+1} + l_{n+2} + \ldots\ldots\ldots| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ma per il teorema di pag. 97. limite di una somma = somma dei limiti

$$\lim_{x=a} (f_1 + f_2 + \ldots + f_n) = l_1 + l_2 + \ldots + l_n,$$

quindi potrò trovare un numero c tale che per $a < x \leq c$ sia

$$[5] \qquad |(f_1 + f_2 + \ldots + f_n) - (l_1 + l_2 + \ldots + l_n)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Ma ora

$$|(f_1+f_2+\cdots+f_n+f_{n+1}+\cdots)-(l_1+l_2+\cdots+l_n+l_{n+1}+\cdots)|\leq$$
$$\leq|(f_1+f_2+\cdots+f_n)-(l_1+l_2+\cdots+l_n)|+$$
$$+|f_{n+1}+f_{n+2}+\cdots\cdots|+$$
$$+|l_{n+1}+l_{n+2}+\cdots\cdots|, \leq\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

donde per le [3], [4], [5], si deduce che, preso un numero ε piccolo a piacere, esiste un numero c tale che, per $a<x\leq c$, sia

$$|(f_1+f_2+\cdots+f_n+\cdots)-(l_1+l_2+\cdots+l_n+\cdots)|\leq\varepsilon.$$

Quindi

$$\lim_{x=a+0}(f_1+f_2+\cdots+f_n+\cdots)=l_1+l_2+\cdots+l_n+\cdots$$

Un risultato analogo si dimostra per i casi, che fosse $a=\infty$, o che si studiassero i $\lim_{x=a-0}$, quando il campo T fosse formato di punti posti a sinistra del punto $x=a$.

In generale si può dire che se una serie è totalmente convergente nel campo che si considera, e se per $x=a$ o per $x=\infty$ i singoli termini ammettono un limite, allora il limite della serie è uguale alla serie dei limiti.

In modo simile si dimostra che, se i termini di una serie totalmente convergente sono funzioni continue, la serie rappresenta una funzione continua.

Teorema – Se la serie $\Sigma a_n x^n$ converge per $x=\alpha$, e se β è un numero tale che $|\beta|<|\alpha|$, allora detta serie converge totalmente per $-|\beta|\leq x\leq+|\beta|$.

Infatti dall'ipotesi segue che $\lim_{n=\infty}|a_n\alpha^n|=0$ (pag. 126). Esiste dunque una costante C positiva più grande di tutte le quantità $|a_n\alpha^n|$. Nel segmento

$$-|\beta| < x \leq +|\beta|$$

è

$$|a_n x^n| = |a_n \alpha^n| \left|\frac{x}{\alpha}\right|^n \leq Q \left|\frac{x}{\alpha}\right|^n \leq Q \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^n$$

ossia i termini della serie $\Sigma a_n x^n$ sono nel segmento $-|\beta| \leq x \leq +|\beta|$ minori dei termini della progressione decrescente (a termini positivi e costanti)

$$Q + Q\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| + Q\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^2 + \ldots\ldots$$

Tanto basta a dimostrare il nostro teorema.

Capitolo VI.

Numeri complessi.

§.1. Definizioni.

Nell'aritmetica e algebra elementare si è man mano esteso il concetto di numero, introducendo dopo i numeri interi positivi i numeri fratti, i numeri irrazionali, i numeri negativi. Questi successivi ampliamenti del concetto di numero avevano contemporaneamente due scopi:

1°) Di poter misurare una grandezza qualunque, per es. un segmento di retta con una data unitá di misura, ossia di poter dare una coordinata numerica a tutti i punti di una data retta in guisa tale di avere una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta e le coordinate corrispondenti;

2°) di poter eseguire ogni sottrazione, ogni divisione, ogni estrazione di radice di un numero positivo, ecc.

Mentre si è così ampliato assai il campo delle operazioni eseguibili, sono rimaste alcune operazioni, che non sono eseguibili nonostante l'avvenuto ampliamento del concetto di numero: l'estrazione di radice quadrata di un numero negativo, la determinazione del logaritmo di un numero negativo, ecc. A questo inconveniente si ripara, estendendo ancora il concetto di numero. I nuovi numeri che noi introdurremo sono però completamente inutili per il problema della misura delle grandezze, il quale è già stato completamente risoluto dai numeri già noti dalle matematiche elementari e che noi chiameremo *numeri reali*.

Noi introdurremo quindi un nuovo simbolo: il simbolo i, a cui noi non daremo alcun significato preciso. Il prodotto di i per i, ossia il quadrato di i sarà posto uguale per *definizione* a -1. Ciò è ben lecito perchè, essendo i un simbolo affatto nuovo, si può definire come si vuole ogni operazione su esso eseguita. Insieme al simbolo i introdurremo tutti i simboli

$$a+bi,$$

dove a, b sono numeri reali qualunque, e che chiameremo numeri *complessi*.

Neanche a questi numeri daremo un significato preciso, e ci accontenteremo di definire le operazioni eseguite su di esse, cercando che queste godano di tutte le più importanti proprietà di cui godono le comuni operazioni sui numeri reali.

Porremo anzitutto

$$a+ib=a, \text{ se } b=0 \quad , \quad a+ib=ib \text{ se } a=0$$

E diremo che

$$a+ib=\alpha+i\beta$$

(a, b, α, β numeri reali) allora e allora soltanto che $a=\alpha$, $b=\beta$. Come i numeri reali si rappresentano coi punti di una retta, così i numeri $a+ib$ si rappresenteranno coi punti del piano, assumendo in questo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, e facendo corrispondere il numero $a+ib$ al punto di ascissa a e di ordinata b. I numeri reali, cioè i numeri $a+ib$ per cui $b=0$, corrisponderanno ai punti dell'asse delle ascisse; i numeri $a+ib$ per cui $a=0$, e che noi chiameremo puramente immaginarii, saranno rappresentati dai punti dell'asse delle ordinate.

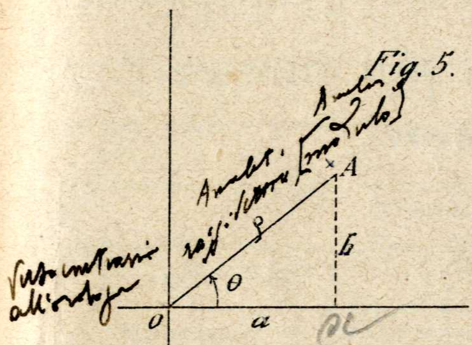


Fig. 5.

Se A è il punto immagine del numero $a+ib$, e se ρ, θ sono le sue coordinate polari, ossia, se $OA=\rho$, e θ è l'angolo di cui l'asse delle ascisse deve rotare per sovrapporsi ad OA, sarà

[1] $a=\rho\cos\theta$, $b=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$,

[2] $\rho=+\left|\sqrt{a^2+b^2}\right|$, $\mathrm{tg}\,\theta=\dfrac{b}{a}$.

I numeri ρ, θ si dicono rispettivamente <u>modulo</u> e <u>argomento</u> del numero $a+ib$.

<u>Il modulo è sempre positivo</u>; l'argomento è

$a+ib=\rho\cos\theta+i\rho\,\mathrm{sen}\,\theta=\rho(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)$

definito a meno di multipli di 2π.

Il modulo $|\sqrt{a^2+b^2}|$ si indica anche con $|a+ib|$; e si noti che se $b=0$ ossia se il numero è reale, il modulo coincide col suo valore assoluto.

Dati ρ, θ, le [1] definiscono subito le a, b.

Dati a, b, la prima delle [2] definisce ρ; la seconda ci definisce θ a meno di multipli di π; ma, ricordando per le [1] che $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$ devono avere i segni di a, b, se ne deduce tosto che θ risulta definito a meno di multipli di 2π.

§.2 - Addizione di più numeri complessi.

Si dice somma dei numeri

$$a_1+ib_1,\ a_2+ib_2,\ a_3+ib_3,\ \dots,\ a_n+ib_n$$

(a, b numeri reali; n intero positivo) il numero

$$(a_1+a_2+\dots+a_n)+i(b_1+b_2+\dots+b_n).$$

Se ne deduce tosto:

1°) La somma di più numeri complessi (addendi) è indipendente dall'ordine in cui si seguono gli addendi.

2°) Se A, B, C sono tre numeri complessi, la somma

$$A+B+C$$

è uguale alla somma di A e di $B+C$, cioè è uguale ad $A+(B+C)$.

Som. di 3 num. 1 più 2 poi + 3:

La somma dei numeri complessi, da noi definita, gode dunque delle due proprietà fondamentali della somma dei numeri reali; la proprietà commutativa e associativa.

Vediamo ancora che $a+ib$ è proprio la somma dei numeri a, ib.

Interpreteremo la precedente definizione per via geometrica. È benndo che, nella usuale rappresentazione dei numeri reali sui punti di una retta, la somma a_1+a_2 di due numeri reali a_1, a_2 ha per immagine un punto C che si può definire così: Se si assume come nuova origine il punto A_1, che è immagine per es. del numero a_1, allora il punto C è l'immagine del numero a_2. (E ciò perché la distanza A_1C è in valore assoluto e in segno uguale ad a_2).

Una proprietà affatto simile vale per la somma di due numeri complessi a_1+ib_1, a_2+ib_2. Se A_1 è l'immagine del primo, C è il punto immagine della somma, allora C è proprio l'immagine di a_2+ib_2, quando si assuma A_1 come nuova origine, e naturalmente non si cambii la direzione degli assi coordinati. Infatti dette a, b le primitive coordinate di C ed A, B le nuove, sappiamo (cfr. E. d'Ovidio - Geometria Analitica V, §. 19) che

$$a = A + a_1 \quad , \qquad b = B + b_1$$

ossia

$$A = a - a_1 \quad , \quad B = b - b_1 ;$$

ma le primitive coordinate del punto C immagine del numero

$$(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

erano

$$a = a_1 + a_2 \quad , \quad b = b_1 + b_2 ,$$

dunque le nuove sono:

$$A = (a_1 + a_2) - a_1 = a_2 \;;\; B = (b_1 + b_2) - b_1 = b_2 .$$

Dunque C rispetto ai nuovi assi ha le coordinate a_2, b_2 di A_2 rispetto ai primitivi, ossia è l'immagine di $a_2 + ib_2$, giusta l'enunciato.

La somma di più numeri complessi ha una importante interpretazione meccanica. Se più forze sono applicate a uno stesso punto O, noi rappresenteremo, come abitualmente, queste forze con segmenti uscenti da O, aventi la direzione uguale a quella della forza, e una lunghezza proporzionale all'intensità della forza. Se OA rappresenta una forza, questa sarà anche individuata, se si danno le coordinate a, b del punto A, ossia se si dà il numero complesso $a + ib$, di cui A è immagine (Fig. 5). In questo senso i numeri complessi servono a individuare le forze uscenti da uno stesso punto O. Io dico che la risultante di n forze corrispondenti a n numeri $a_1 + ib_1 , a_2 + ib_2 , \ldots\ldots , a_n + ib_n$ è la forza corrispondente al numero $(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) + \cdots\cdots + (a_n + ib_n)$.

Basta evidentemente dimostrare questo teorema per $n=2$.

Infatti, se OA_1, OA_2 sono due forze applicate in O, la loro risultante è il segmento OA_3 se A_1A_3 è un segmento che ha la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso di OA_2.

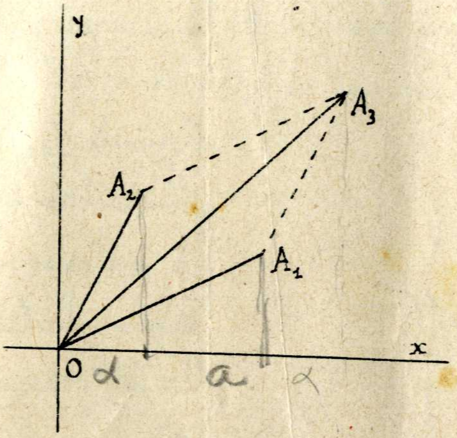


Fig. 6

L'ascissa di A_3 è uguale alla proiezione di OA_3 sull'asse delle x, ossia alla somma delle proiezioni dei segmenti OA_1, A_1A_3. Ma per l'ipotesi fatta le proiezioni dei segmenti OA_2, A_1A_3 su una retta qualunque sono uguali; quindi, se A_1, A_2 sono le immagini dei punti a_1+ib_1, a_2+ib_2, la proiezione di OA_3 sull'asse delle x è a_1+a_2; e in modo analogo la proiezione di OA_3 sull'asse delle y è b_1+b_2. Quindi A_3 è l'immagine del numero

$$(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)=(a_1+ib_1)+(a_2+ib) \qquad \text{c.d.d.}$$

§3. Sottrazione

Si dice differenza dei numeri a_1+ib_1, a_2+ib_2 quel numero, che aggiunto al secondo (sottraendo) dà una somma uguale al primo (minuendo); tale differenza si indica con

$$(a_1+ib_1) - (a_2+ib_2)$$

ed è evidentemente uguale ad

$$(a_1-a_2)+i(b_1-b_2).$$

Essa si può rappresentare geometricamente nel seguente modo:

Se A_1, A_2 sono i punti immagine di a_1+ib_1 e a_2+ib_2, il punto A_3, immagine della differenza è l'estremità del segmento A_1A_3 che ha la stessa lunghezza e la stessa direzione di OA_2, ma verso contrario.

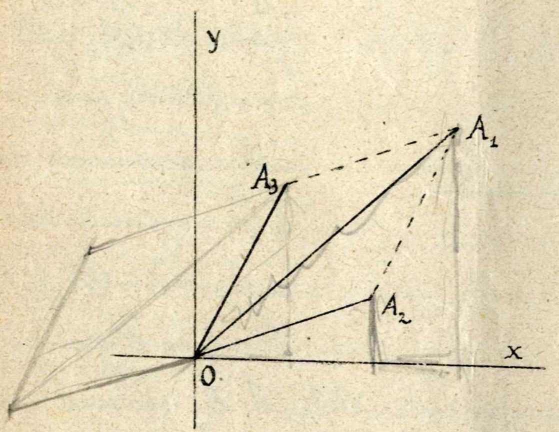


Fig. 7

Infatti l'ascissa di A_3 è uguale alla proiezione di OA_3 sull'asse delle x, ossia alla somma della proiezione di OA_1, che è a_1, colla proiezione di A_1A_3 che per l'ipotesi fatta è $-a_2$, cioè l'ascissa di A_3 è a_1-a_2 e similmente l'ordinata di A_3 è b_1-b_2; quindi A_3 è l'immagine del numero $(a_1-a_2)+i(b_1-b_2)$. c.d.d.

§. 4. Prodotto.

Dato un numero complesso qualsiasi di modulo

ρ_1 e di argomento θ_1 e detta U l'immagine del numero 1, che sarà quindi un punto situato sull'asse x a una distanza, dall'origine O delle coordinate, uguale all'unità di lunghezza, l'immagine A_1 del numero dato si ottiene facendo rotare nel piano la retta OU intorno ad O di un angolo θ_1 e poi prendendo su di essa un segmento OA_1 la cui lunghezza rispetto al segmento OU sia misurata da ρ_1

Dato ora un altro numero complesso di modulo ρ_2 e argomento θ_2, la cui immagine sia il punto A_2 noi diremo prodotto dei due numeri aventi per immagine A_1 e A_2 quel numero la cui immagine A_3 si ottiene da A_2 nello stesso modo con cui si è ottenuto A_1 dal punto U; vale a dire, facendo rotare la retta OA_2 intorno ad O di un angolo θ_1 e su di essa prendendo un segmento OA_3 che rispetto al segmento OA_2 sia misurato da ρ_1. Basterà perciò sul segmento OA_2 preso come lato omologo di OU costruire il triangolo OA_2A_3 direttamente simile al triangolo OUA_1 poichè risulta allora, in valore e in segno:

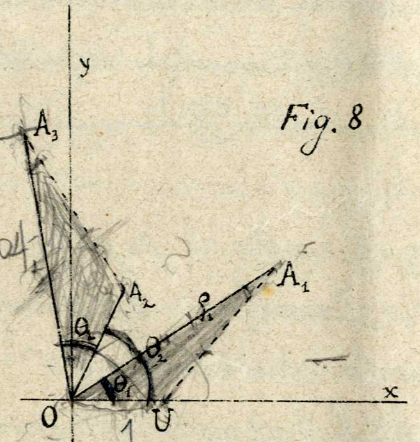


Fig. 8

$OA_3 \cdot OU = OA_2 \cdot OA_1$

$$\frac{OA_3}{OA_2}=\frac{OA_1}{OU}=\rho_1 \quad , \qquad A_2\hat{O}A_3 = U\hat{O}A_1=\theta_1 .$$

Inoltre, dicendo θ_3 e ρ_3 l'argomento e il modulo di A_3, si ha

$$\theta_3 = VOA_3 = VOA_2 + A_2 OA_3 = \theta_2 + \theta_1$$

$$\rho_3 = OA_3 = \frac{OA_1 \cdot OA_2}{OV} = \frac{\rho_1 \rho_2}{1} = \rho_1 \rho_2 \qquad [1]$$

donde si ricava che il prodotto di due numeri complessi ha per modulo il prodotto dei loro moduli e per argomento la somma dei loro argomenti.

Se i due numeri complessi sono dati sotto la forma ordinaria e il primo è $a_1 + ib_1$, il secondo $a_2 + ib_2$, dicendo $a_3 + ib_3$ il loro prodotto, dalle [1] di pagina 138 si ha

$$a_1 = \rho_1 \cos\theta_1 \qquad a_2 = \rho_2 \cos\theta_2 \qquad a_3 = \rho_3 \cos\theta_3$$
$$b_1 = \rho_1 \operatorname{sen}\theta_1 \qquad b_2 = \rho_2 \operatorname{sen}\theta_2 \qquad b_3 = \rho_3 \operatorname{sen}\theta_3$$

e sostituendo a ρ_3 e θ_3 i loro valori dati dalle [1]:

$$a_3 = \rho_1\rho_2 \cos(\theta_1+\theta_2) = \rho_1\rho_2(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2)$$
$$= \rho_1\cos\theta_1 \cdot \rho_2\cos\theta_2 - \rho_1 \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \rho_2 \operatorname{sen}\theta_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2;$$

$= a_1 a_2 - b_1 b_2$
$= b_1 a_2 + a_1 b_2$

$$b_3 = \rho_1\rho_2 \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) = \rho_1\rho_2(\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2)$$
$$= \rho_1 \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \rho_2 \cos\theta_2 + \rho_1\cos\theta_1 \cdot \rho_2 \operatorname{sen}\theta_2 = b_1 a_2 + a_1 b_2.$$

Quindi il prodotto $a_3 + ib_3$ ha per espressione

$$(a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2);$$

cosicchè: *il prodotto di due numeri complessi $a_1 + ib_1$, $a_2 + ib_2$ si ottiene facendo questo prodotto mediante la regola ordinaria della moltiplicazione per i numeri reali e sostituendo -1 ad i^2;*

$$(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+b_1a_2) \qquad \boxed{2}$$

Per prodotto di tre numeri complessi si intende il prodotto ottenuto moltiplicando il prodotto dei primi due per il terzo; e similmente si passa al prodotto di quattro, cinque, ... o di quanti si vogliano numeri complessi (in numero finito). Se ne deduce tosto, mediante la formola $\boxed{2}$, che

1° il prodotto di più numeri complessi (fattori) è indipendente dall'ordine dei fattori,

2° in un prodotto di più numeri complessi, si può sostituire ad alquanti fattori il loro prodotto.

3° il prodotto di un numero complesso per una somma di più numeri complessi è uguale alla somma dei prodotti che si ottengono moltiplicando quel numero per ciascun addendo.

Il prodotto di numeri complessi possiede dunque le proprietà fondamentali del prodotto dei numeri reali, cioè la proprietà commutativa, la proprietà associativa e la proprietà distributiva rispetto alla somma.

Quando tutti i fattori di un prodotto sono eguali, allora si hanno le potenze (ad esponente intero e positivo) di un numero complesso A che si indicano col solito simbolo A^n, se n è il numero dei fattori.

§.5 - Divisione.

La divisione di un numero complesso per un altro ha per iscopo di trovare un numero complesso (quoziente) che moltiplicato per il secondo (divisore) dia come prodotto il primo (dividendo).

Quindi se ρ_1 e θ_1 sono rispettivamente il modulo e l'argomento del dividendo, ρ_2 e θ_2 quelli del divisore, il loro quoziente avrà per modulo il quoziente $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ dei loro moduli e per argomento la differenza $\theta_1 - \theta_2$ dei loro argomenti; giacchè moltiplicando il numero complesso avente $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ per modulo e $\theta_1 - \theta_2$ per argomento, per il divisore (ρ_2, θ_2), il loro prodotto (Cfr. § precedente) avrà per modulo $\frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \rho_2 = \rho_1$ e per argomento $(\theta_1 - \theta_2) + \theta_2 = \theta_1$ cioè sarà appunto il dividendo.

È facile vedere che il punto A_3 corrispondente al quoziente dei due numeri che hanno per immagine A_1 e A_2 si ottiene costruendo sopra OA_2 come lato omologo di OA_1 il triangolo OA_2A_3 simile direttamente a OA_1U.

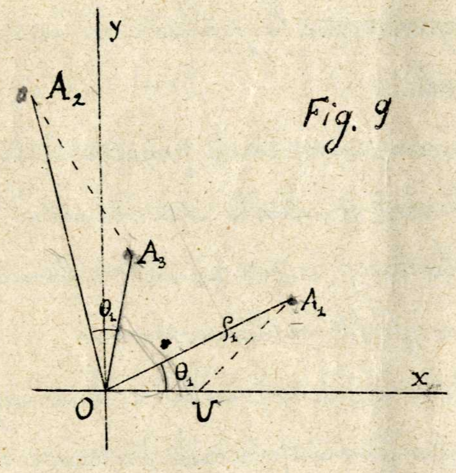


Fig. 9

Infatti per la costruzione vista nel § precedente A_2 è precisamente il prodotto dei due numeri A_1 e A_3.

È utile osservare che la divisione è possibile solo quando il divisore non è zero; poichè ogni numero complesso moltiplicato per 0 dà per prodotto 0.

Quando i due numeri complessi sono dati nella forma solita a_1+ib_1, a_2+ib_2, applicando ad essi e al loro quoziente a_3+ib_3 le formole di pag. 133 si ottiene:

$$a_3=\rho_3\cos\theta_3=\frac{\rho_1}{\rho_2}\cos(\theta_1-\theta_2)$$

$$=\frac{1}{\rho_2^2}\left(\rho_1\cos\theta_1\cdot\rho_2\cos\theta_2+\rho_1\operatorname{sen}\theta_1\cdot\rho_2\operatorname{sen}\theta_2\right)=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$$

$$b_3=\rho_3\operatorname{sen}\theta_3=\frac{\rho_1}{\rho_2}\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)=$$

$$=\frac{1}{\rho_2^2}\left(\rho_1\operatorname{sen}\theta_1\cdot\rho_2\cos\theta_2-\rho_1\cos\theta_1\cdot\rho_2\operatorname{sen}\theta_2\right)=\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$$

dunque si ha

$$a_3+ib_3=\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\,\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$$

il qual risultato si sarebbe potuto ottenere direttamente osservando che l'uguaglianza

$$a_1+ib_1=(a_2+ib_2)(a_3+ib_3)$$

che definisce il quoziente a_3+ib_3, equivale, per le regole di moltiplicazione, alle due relazioni

$$a_2a_3-b_2b_3=a_1\quad,\quad a_2b_3+b_2a_3=b_1\,.$$

Osservazione. Per calcolare comodamente a_3 e b_3, basta nella frazione $\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}$ moltiplicare i due termini per il numero a_2-ib_2 che si dice il coniugato di a_2+ib_2, e sviluppare i prodotti indicati.

Se n è un numero intero positivo e A un numero complesso, per A^{-n} si intende, come nei numeri reali, il reciproco di A^n cioè il numero $\frac{1}{A^n}$. Per potenza ad esponente zero di un numero complesso si assume pure 1, come nei numeri reali.

§. 6. Formola di Moivre. Entero

Per la regola di moltiplicazione, applicata ad un prodotto di n fattori (n intero positivo) tutti eguali al numero complesso avente per modulo ρ e per argomento θ, cioè al numero complesso $\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, risulta che la potenza n-esima del numero stesso ha per modulo il prodotto di n fattori tutti eguali a ρ e per argomento la somma di n addendi tutti eguali a θ, cioè si ha

$$(a+ib)^n = \left[\rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\right]^n = \rho^n\left[\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)\right] \qquad \boxed{1}$$

dove n è intero positivo.

Inoltre si ha

$$\left[\rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\right]^{-n} = \left[\frac{1}{\rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}\right]^n$$

$$= \frac{1.(\cos 0 + i\operatorname{sen} 0)}{\rho^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta)} = \frac{1}{\rho^n}\left[\cos(0 - n\theta) + i\operatorname{sen}(0 - n\theta)\right]$$

ossia

$$\left[\rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\right]^{-n} = \rho^{-n}\left[\cos(-n\theta) + i\operatorname{sen}(-n\theta)\right] \; \boxed{2}.$$

Ponendo, nella [1] e nella [2], $\rho = 1$ si ottiene

$$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta$$

dove n è un intero positivo o negativo.

Questa formola è nota sotto il nome di *formola di Moivre* ed è molto importante perchè racchiude in una forma estremamente concisa tutte le formole di moltiplicazione delle funzioni trigonometriche.

§. 7. Operazioni sui moduli o valori assoluti.

Siano a_1+ib_1, a_2+ib_2 due numeri complessi e a_3+ib_3 la loro somma. Chiamando A_1, A_2, A_3 le loro immagini (Fig. 6), è chiaro che i tre lati del triangolo OA_1A_3 rappresentano rispettivamente i loro moduli: per una proprietà ben nota della geometria elementare, abbiamo dunque che il modulo della somma di due numeri complessi è non maggiore della somma dei loro moduli e non minore della differenza dei loro moduli.

Lo stesso vale per la differenza di due numeri complessi.

Per più di due numeri si avrà in conseguenza:

Il modulo della somma di quanti si vogliano numeri complessi è non maggiore della somma dei loro moduli e non minore di uno qualunque di questi moduli diminuito di tutti gli altri.

Sappiamo poi da quel che s'è visto nel § 4 che: il modulo del prodotto di più numeri complessi è uguale al prodotto dei loro moduli, donde segue che affinchè un prodotto di numeri complessi sia zero è necessario e sufficiente che sia zero un fattore, poichè se è zero il prodotto, è zero il suo modulo cioè il prodotto dei moduli e quindi uno almeno dei fattori e viceversa.

Così pure: il modulo del quoziente di due numeri complessi è uguale al quoziente dei loro moduli.

Da questi due teoremi risulta pure che: il modulo di una potenza ad esponente intero (positivo o negativo) di un numero complesso è uguale all'omonima potenza del modulo di questo numero.

§ 8. Limiti di numeri complessi.

Siano a e b due funzioni reali della variabile x: Se, quando x tende a un certo k (che può anche essere l'∞), le funzioni a e b hanno rispettivamente i limiti α e β, allora noi diremo che il numero complesso $a+ib$ ha per limite $\alpha+i\beta$, e scriveremo

$$\lim_{x=k}(a+ib)=\alpha+i\beta .$$

Se a o b hanno per limite ∞, si dice che $a+ib$ ha per limite ∞.

Ponendo

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2}, \qquad tg\theta=\frac{b}{a},$$

$$r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \qquad tg\,t=\frac{\beta}{\alpha},$$

si vede subito come la definizione data equivalga alle seguenti relazioni

$$\lim_{x=k}\rho=r, \qquad \lim_{x=k}tg\theta=tg\,t;$$

vale a dire:

Se un numero complesso $\rho(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ ha il modulo ρ e l'argomento θ funzioni di una variabile x, e se, per $x=k$, ρ ha il limite r, e θ il limite t, allora $r(\cos t + i \operatorname{sen} t)$ è il limite per $x=k$ di $\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$.

Che se ρ ha per limite l'infinito, ogni numero complesso avente per modulo ρ ha per definizione un limite infinito.

§ 9. Serie di numeri complessi.

Le definizioni di serie convergente, divergente o indeterminata si estendono immediatamente dai numeri reali ai numeri complessi. Cioè sia

$$u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots$$

una successione di infiniti numeri complessi ed s_n la somma dei primi n termini: se esiste ed è finito il $\lim\limits_{n=\infty} s_n$, allora la serie

$$u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_n + \cdots\cdots$$

si dice convergente e il valore S di questo limite si dice somma o limite della serie. Se invece esso è infinito o non esiste, la serie si dice rispettivamente divergente, o indeterminata.

È facile vedere che

Una serie a termini complessi

$$(a_1+ib_1) + (a_2+ib_2) + \cdots\cdots + (a_n+ib_n) + \cdots\cdots$$

è convergente verso un limite $A+iB$ solo quando le serie reali

$$a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots, \qquad b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_n + \cdots\cdots$$

sono entrambe convergenti rispettivamente verso i limiti A e B.

Infatti si ha

$$s_n = (a_1 + ib_1) + \cdots + (a_n + ib_n) = (a_1 + \cdots + a_n) + i(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

e quindi dire che al crescere di n, s_n tende ad $A + iB$, equivale a dire, per definizione di limite (§ 8), che

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \qquad b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

tendono rispettivamente ad A e B. E viceversa. Quindi lo studio di una serie a termini complessi è ricondotto a quello di due serie a termini reali.

È vero pure il teorema seguente, che però non dimostreremo:

Affinchè una serie a termini complessi sia convergente, comunque si cambi l'ordine dei termini è necessario e sufficiente che sia convergente la serie dei moduli dei suoi termini. Inoltre la sua somma è indipendente dall'ordine dei termini.

§ 10 - Funzione esponenziale di variabile complessa.

Sia z un numero qualsiasi, reale o complesso.

Noi porremo per definizione:

$$e^z = \lim_{m=\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m. \qquad (m \text{ intero positivo})$$

Per giustificare questa definizione, bisogna però dimostrare che:

1° esiste effettivamente il $\lim_{m=\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m$;

2° questa definizione non è in disaccordo con la definizione ordinaria di potenze a esponente reale.

Ora la 2ª di queste proprietà discende subito dal seguente teorema:

Teorema - Se x è un numero reale, allora

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x. \qquad \boxed{1}$$

Questo teorema è evidente se $x=0$.

Se $x \neq 0$, si ponga $\frac{m}{x}=n$. Si avrà

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \lim_{n=\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^x$$

$$= \left[\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^x = e^x,$$

poichè

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Per dimostrare poi che esiste effettivamente il limite di $\left(1+\frac{z}{m}\right)^m$, quando z è un numero complesso, si ponga $z = x+iy$. Sarà

$$1+\frac{z}{m} = \left(1+\frac{x}{m}\right)+i\frac{y}{m} = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

dove ρ e θ sono definiti dalle formole (cfr. pag. 133)

$$\rho = \sqrt{\left(1+\frac{x}{m}\right)^2+\left(\frac{y}{m}\right)^2} = \left[1+\frac{2x}{m}+\frac{x^2+y^2}{m^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x+m}\ ; \quad \cos\theta = \frac{x+m}{m\rho}\ ; \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{m\rho} \qquad \boxed{2}$$

(precisamente scegliamo per θ il valore compreso tra 0 e 2π definito dalle $\boxed{2}$.)

Quindi, per la formola di Moivre,

$$\left(1+\frac{z}{m}\right)^m = \left[1+\frac{2x}{m}+\frac{x^2+y^2}{m^2}\right]^{\frac{m}{2}} (\cos m\theta + i \operatorname{sen} m\theta) \quad \boxed{3}$$

Ora si ponga

$$\frac{2x}{m}+\frac{x^2+y^2}{m^2}=\frac{1}{n};$$

ne risulta

$$\left[1+\frac{2x}{m}+\frac{x^2+y^2}{m^2}\right]^{\frac{m}{2}} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\left(x+\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{m}\right)}$$

e quindi (cfr. Eserc. di Analisi, Cap. IV, es. 26)

$$\lim_{m=\infty}\left[1+\frac{2x}{m}+\frac{x^2+y^2}{m^2}\right]^{\frac{m}{2}} =$$

$$=\left[\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\lim\limits_{m=\infty}\left(x+\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{m}\right)} = e^x \quad \boxed{4}$$

Si osservi di più che, per la [2], si ha

$$\lim_{n=\infty} m\theta = \lim_{m=\infty}\left(\frac{my}{x+m}\cdot\cos\theta\cdot\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)$$

$$= \lim_{m=\infty}\left(\frac{y}{\frac{x}{m}+1}\right)\cdot \lim \cos\theta \cdot \lim\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Ma, per la [2], $\lim\limits_{m=\infty}\theta=0$, quindi

$$\lim_{m=\infty} m\theta = y. \quad \boxed{5}$$

Le [3], [4] e [5] ci dànno quindi (§ 8)

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)^m = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y),$$

se

$$z = x+iy.$$

Esiste dunque il nostro limite, e la definizione data conduce alla formula di Eulero

$$\boxed{e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i \operatorname{sen} y)}$$

la quale dimostra che il numero complesso e^{x+iy} ha per modulo e^{x} e per argomento y.

Teorema - Qualunque siano i numeri z e t, si ha

$$e^{z} \cdot e^{t} = e^{z+t}.$$

Infatti, posto $z = x+iy$, $t = x'+iy'$, si ha, per la formola di Eulero,

$$e^{z} \cdot e^{t} = e^{x} \cdot e^{x'} \cdot (\cos y + i \operatorname{sen} y) \cdot (\cos y' + i \operatorname{sen} y') =$$

$$= e^{x+x'}[(\cos y \cdot \cos y' - \operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen} y') + i(\operatorname{sen} y \cdot \cos y' + \cos y \cdot \operatorname{sen} y')] =$$

$$= e^{x+x'}[\cos(y+y') + i \operatorname{sen}(y+y')] = e^{(x+x')+i(y+y')} = e^{z+t}$$

$$= e^{(x+iy)+(x'+iy')} =$$

§.11. Logaritmi di numeri complessi.

Sia $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ un numero complesso.

Noi porremo per definizione

$$\alpha = \log z \qquad \text{se} \qquad e^{\alpha} = z.$$

Sia $\alpha = a + ib$. Allora, per la formola di Eulero, si ha

$$e^{\alpha} = e^{a+ib} = e^{a}(\cos b + i \operatorname{sen} b).$$

Dovrà dunque essere

$$\rho = e^{a}, \qquad \cos b = \cos\theta, \qquad \operatorname{sen} b = \operatorname{sen}\theta.$$

Ossia a sarà il logaritmo di ρ, b sarà uguale a θ o differirà da θ di un multiplo di 2π. Dunque un numero $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ ha infiniti logaritmi, tutti espressi dalla formola

$$\log z = \log\rho + i\theta + 2ki\pi \qquad (k \text{ intero}).$$

$$-1 = 1(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$$

$$1 = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$$

In particolare

$$\log(-1) = 0 + i\pi + 2ki\pi = (2k+1)i\pi,$$ $k=0,1,2 \cdots \quad \pi = 3.14$

$$\log 1 = 2ki\pi.$$ come si vede!

Risulta poi che solo i numeri positivi hanno un logaritmo reale, giacchè solo per essi θ è un multiplo di 2π, e quindi l'equazione (rispetto a K) $\theta + 2k\pi = 0$ ha una soluzione.

§. 12 — Potenze di numeri complessi con esponente complesso.

Siano x e y due numeri complessi qualunque; e sia ξ uno degli infiniti logaritmi di x: gli altri avranno tutti per espressione $\xi + 2ki\pi$, dove k è un qualsiasi numero intero.

Noi porremo per definizione

$$x^y = e^{y \log x} = e^{y(\xi + 2ki\pi)}.$$

In generale dunque, al variare di k, noi otterremo infiniti valori per x^y.

Nè ciò deve stupire: già nella teoria dei numeri reali si sa che le potenze a esponente generico non sono in generale determinate; per esempio la potenza di un numero positivo con esponente $\frac{1}{2}$ ha due valori opposti:

$$16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = \pm 4.$$

Sui numeri complessi si possono dunque eseguire tutte le operazioni aritmetiche.

Studieremo in particolare il caso che $y = \frac{1}{n}$, dove n è un numero intero positivo. E indicheremo con ρ, θ

il modulo e l'argomento di x. Sarà

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n}(\log\rho + i\theta + 2ki\pi)} = e^{\frac{\log\rho}{n}\cdot\frac{i\theta}{n}\cdot\frac{2ki\pi}{n}}$$

$$= e^{\frac{\log\rho}{n}} \cdot e^{\frac{i\theta}{n}} \cdot e^{\frac{2ki\pi}{n}} = \left|\sqrt[n]{\rho}\right| \left(\cos\frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{n}\right)\varepsilon_k, \quad [1]$$

dove

$$\varepsilon_k = e^{\frac{2ki\pi}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}.$$

$e^0 = 1$

Se k e h sono due numeri interi, sarà $\varepsilon_k = \varepsilon_h$ allora e allora soltanto che

$$\cos\frac{2k\pi}{n} = \cos\frac{2h\pi}{n}, \qquad \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n} = \operatorname{sen}\frac{2h\pi}{n},$$

il che accade solo quando $\frac{2k\pi}{n}$ e $\frac{2h\pi}{n}$ differiscono per un multiplo di 2π:

$$\frac{2k\pi}{n} - \frac{2h\pi}{n} = \text{multiplo di } 2\pi,$$

ossia quando

$$\frac{k-h}{n} 2\pi = \text{multiplo di } 2\pi.$$

Ma questo equivale a dire che

$$k - h = \text{multiplo di } n,$$

e però, dando a k gli n valori $0, 1, 2, \ldots, n-1$, si otterranno radici distinte, e i valori $n, n+1, \ldots, 2n-1$ riprodurranno le stesse radici nello stesso ordine, e così via periodicamente. Del pari, dando a k i valori $-1, -2, \ldots, -n$, si riprodurranno le stesse radici in ordine inverso e così via periodicamente.

Dunque:

Un numero reale o complesso ha n radici n-esime fra reali e complesse.

Supponendo $x=1$, cioè $\rho=1$ e $\theta=0$, $x^{\frac{1}{n}}$ si riduce a ε_k, quindi la formola che ci dà le n radici n^{me} dell'unità è

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{n}$$

dove basta dare a k gli n valori $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Questa formola mostra che i punti corrispondenti alle n radici n^{me} dell'unità sono distribuiti sulla circonferenza avente per centro O e per raggio l'unità, e dividono la circonferenza in n parti eguali, vale a dire sono vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in essa.

Basta infatti osservare che i numeri $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ hanno tutti per modulo l'unità e che l'argomento di uno qualunque di essi differisce dall'argomento del suo successivo per un angolo eguale a $\frac{2\pi}{n}$, cioè all'n^{esima} parte del giro.

Capitolo VII.

§. 1 – Funzioni di più variabili.

Una quantità variabile u il cui valore dipende dai valori di più altre variabili $x, y, z, \ldots, t$ tra loro indipendenti, si chiama una *funzione delle variabili indipendenti* $x, y, z, \ldots, t$ e si indica questa relazione col simbolo

$$u = f(x, y, z, \ldots, t).$$

Supponiamo che le variabili indipendenti siano due, x e y; e sia $u = f(x, y)$ una funzione di esse: se consideriamo x e y come coordinate cartesiane ortogonali di un punto in un piano, a ogni sistema di valori delle variabili x e y corrisponde un punto $P(x, y)$ del piano, e viceversa. Quando in virtù della relazione $u = f(x, y)$, ad ogni punto $P(x, y)$ di un'area piana A corrisponde un valore di u, noi diremo, analogamente a quanto si è fatto nel caso di una sola variabile indipendente, che *la funzione $u = f(x, y)$ è definita nel campo A*.

Se le variabili indipendenti $x, y, z, \ldots, t$ sono più di due, se per es. sono in numero di n, noi diremo, analogamente, che ad ogni sistema di valori $x_1, y_1, z_1, \ldots, t_1$ ad esse attribuito corrisponde un punto P_1 (nello spazio a n dimensioni) di coordinate $x_1, y_1, z_1, \ldots t_1$; e, come nel piano la distanza di due punti $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, riferiti a un sistema di assi cartesiani ortogonali, è data dalla nota formula

$$P_1P_2 = \left|\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\right|,$$

così nel caso di n variabili, chiameremo distanza tra i due punti $P_1(x_1, y_1, \ldots, t_1)$ e $P_2(x_2, y_2, \ldots t_2)$ la quantità

$$\left|\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+\ldots+(t_1-t_2)^2}\right|.$$

Dimodochè, per noi, considerare un punto di date coordinate $x, y, \ldots t$, equivale a considerare il sistema dei numeri $x, y, z, \ldots t$. Si potrà quindi parlare di funzione definita in un certo campo di punti, anche nel caso che le variabili siano in numero qualunque.

È facile ora estendere alle funzioni di più variabili il concetto di continuità.

§2. Funzioni continue di più variabili.

Diremo che una funzione $f(x, y, z, \ldots, t)$ di più variabili indipendenti $x, y, z, \ldots, t$, definita in un certo campo A, è continua in questo campo, quando dato ad arbitrio un numero positivo ε per quanto piccolo esso sia, sempre si può determinare un altro numero positivo δ tale che, presi in A due punti qualunque, distanti tra loro per meno di δ, la differenza tra i valori corrispondenti della funzione sia in valore assoluto minore di ε.

Valgono anche per le funzioni continue di più variabili i teoremi sulla continuità della funzione somma, prodotto, quoziente di due funzioni continue, che furono dimostrati per le funzioni di una sola variabile.

§. 3 – Funzioni complesse di variabile reale.

Siano $u = f(x)$, $v = g(x)$ due funzioni della variabile x definite in un certo campo di variabilità, per es. nello intervallo tra due numeri reali α e β: noi diremo allora che il numero complesso $y = u + iv$ è funzione della variabile reale x, definita nell'intervallo (a, b). Se poi, quando x tende a un certo k (che può anche essere ∞), la funzione $u = f(x)$ tende a un limite a, e la funzione $v = g(x)$ a un limite b, noi diremo che y ha, per x tendente a k, un limite eguale ad $a + ib$ e scriveremo

$$\lim_{x=k} y = a + ib.$$

Se poi u e v sono funzioni di più variabili indipendenti $x, y, \ldots, t$ definite in un certo campo A

$$u = f(x, y, \ldots, t) \qquad\qquad v = g(x, y, z, \ldots, t)$$

allora diremo ancora che il numero complesso $u + iv$ è funzione delle variabili indipendenti $x, y, \ldots t$ definita nel campo A.

§. 4 – Teorema di Weierstrass.

Prima di procedere oltre nel nostro corso, daremo qui la dimostrazione del 1° teorema sulle funzioni continue che abbiamo enunciato nel cap. III, §3, e di cui la 1ª parte, quella affermante l'esistenza del massimo e del minimo di una funzione continua in un intervallo finito, è nota sotto il nome di teorema di Weierstrass.

Se una funzione è continua in un intervallo finito, esiste ivi almeno un punto in cui essa assume il suo maggior valore.

Sia $f(x)$ continua nell'intervallo $a \leq x \leq b$, a e b essendo due numeri reali qualunque $(a<b)$.

Se in a o in b la funzione è non minore che in ogni altro punto intermedio, allora in a o in b la funzione assume il suo maggior valore e il teorema è dimostrato. Se così non è, dividiamo i punti del segmento $a\,b$ in due classi ponendo nella prima quei punti c tali che nell'**interno** del segmento $c\,b$ esiste almeno un punto, in cui la funzione ha un valore più grande che in tutti i punti del segmento $a\,c$. Se un punto appartiene a questa classe, tutti i punti alla sua sinistra apparterranno pure alla stessa classe. Tutti i punti non appartenenti alla Iª classe si considereranno come appartenenti alla seconda. I punti del segmento $a \leqq x \leqq b$ sono così divisi in due classi tali che:

1°) Ogni punto del segmento appartiene a una e una sola classe.

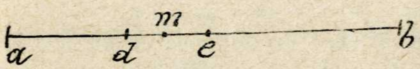
2°) I punti a sinistra di un punto della 1ª classe appartengono ancora alla 1ª classe.

3°) I punti a destra di un punto della 2ª classe appartengono ancora alla 2ª classe.

Per il postulato della continuità, esisterà un punto d di separazione delle 2 classi.

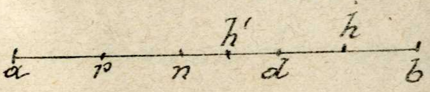
Dimostreremo che in d la f ha il suo massimo valore.

Io dico intanto che d appartiene alla 2ª classe. Se infatti appartenesse alla prima, esisterebbe in db un punto e tale che $f(e)$ sarebbe maggiore dei valori di f in ad, e in particolare di $f(d)$.



Posto $\dfrac{f(e)-f(d)}{2} = \varepsilon > 0$, potremmo (essendo f continua) trovare un punto m in de tale che i valori di f in md differissero da $f(d)$ per meno di ε; $f(e)$ sarebbe quindi maggiore dei valori di f in md, e quindi maggiore dei valori di f in tutto am, il che è assurdo perchè m appartiene alla seconda classe.

Sia ora p un punto qualunque interno al segmento ad; e, preso un numero σ piccolo a piacere, sia n un punto di pd tale che $f(d)$ differisca da ognuno dei valori di f in nd per meno di σ.



Poichè n è della prima classe, esiste in nb un punto h tale che $f(h)$ è maggiore dei valori di f in an. Io dico che si può supporre che h appartenga ad nd. Poichè se così non fosse, siccome d appartiene alla 2ª classe, $f(h)$ non potrebbe esser maggiore di tutti i valori di f

in nd e quindi in nd esisterebbe un punto h' tale che $f(h') > f(h)$ e quindi anche tale che $f(h')$ è maggiore di tutti i valori assunti da f in an.

Esiste dunque in nd un punto, ove la funzione è più grande di $f(r)$. Ma un qualsiasi valore di f in nd differisce da $f(d)$ per meno di σ, ossia è minore di $f(d)+\sigma$. Quindi a fortiori $f(d)+\sigma > f(r)$. E poichè σ è piccolo a piacere, sarà $f(d) \geq f(r)$(*). Dunque $f(d)$ è il massimo valore di f in ad. Poichè d è della 2ª classe e non esiste quindi in db alcun punto ove la f sia maggiore che in qualsiasi punto di ad, sarà $f(d)$ il massimo di f in tutto ab. c.d.d.

In modo identico si dimostra il teorema relativo al minimo:

Se una funzione è continua in un intervallo finito, esiste ivi almeno un punto in cui essa assume il suo minimo valore.

Passiamo ora a dimostrare il teorema relativo ai valori intermedî.

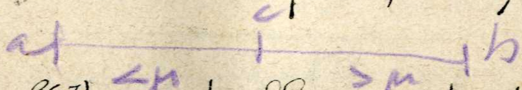
Ogni funzione continua in un intervallo finito, assume ivi almeno una volta ogni valore intermedio tra il suo minimo e il suo massimo.

Per quest'ultimo caso la divisione in due classi si fa nel modo seguente. Se μ è un valore intermedio

---

(*) Si può anzi dimostrare che $f(d) > f(r)$

tra il minimo m e il massimo M, allora se $f(a)=\mu$, il teorema è dimostrato. Se così non è, e per es. $f(a)<\mu$, si dividono i punti di ab in due classi, ponendo nella prima tutti quei punti c tali che i valori assunti dalla f in ac sono tutti minori di μ. Il punto d di divisione delle due classi così definite si dimostra essere un punto, ove la f assume il valore μ.



Se infatti $f(d)>\mu$, esisterebbe a sinistra di d (ove f è continua) almeno un punto e, ove la f differisce da $f(d)$ per meno di $\frac{f(d)-\mu}{2}$, ossia ove la f è maggiore di μ: ciò che è assurdo, perchè e appartiene alla prima classe.

Se $f(d)<\mu$, esisterebbe a destra di d un punto h tale che in dh la f sarebbe sempre minore di μ.

Dunque la f sarebbe minore di μ in tutto ah: ciò che è assurdo, poichè h appartiene alla 2ª classe. Questo ultimo ragionamento non sarebbe applicabile nel solo caso che fosse $d=b$. Ma in tal caso, se $f(b)<\mu$, allora μ sarebbe più grande di tutti i valori, che f assume in ab; ciò che è assurdo, poichè noi sappiamo che almeno in un punto di ab la f assume il valore $M>\mu$.

Capitolo VIII°

Derivate e differenziale primo di una funzione.

§.1. Definizioni.

Il concetto di derivata è fondamentale in Analisi. Esso è sorto specialmente dalla considerazione dei due problemi seguenti:

1°. Data una curva, trovare la sua tangente in un punto.

2°. Dato un punto che si muove, trovare la sua velocità in un dato istante.

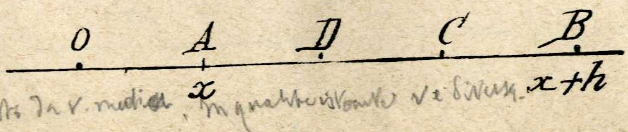
Esaminiamo questo secondo problema.

Un punto si muova sopra una retta; esso darà luogo a una sola coordinata, la sua distanza y dall'origine O. Indicando con x il tempo (misurato in sistema decimale), la y sarà funzione di x, perchè col variare del tempo varia la posizione del punto, quindi il valore di y.

Sarà dunque

$$y = f(x).$$

Al tempo x il punto sia in A ed al tempo $x+h$ il punto sia in B.



$v \times t = s$ e $v = \frac{s}{t}$ ma questa da v. media

Dalla Fisica sappiamo che la velocità media del punto nel tratto AB è data dallo spazio percorso diviso per il tempo impiegato a percorrerlo. Ora, il tempo impiegato a percorrere lo spazio AB è h; lo spazio percorso è:

$$AB = OB - OA = f(x+h) - f(x),$$

quindi la velocità media del punto nel tratto AB è misurata da

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Ma noi vogliamo definire la velocità in un istante, e precisamente nell'istante x, cioè la velocità che il punto ha in A.

Se il punto si muovesse con moto uniforme, allora la velocità media sarebbe costante, e noi assumeremmo questa come velocità all'istante x. Supponiamo invece che il moto del punto non sia uniforme, allora la velocità media non sarà uguale a quella che la nostra intuizione chiama "velocità nell'istante x". Se per es. il punto va sempre rallentando la sua corsa, e se $h > 0$, la velocità media trovata sarà più piccola di quella che la nostra intuizione chiama velocità nel punto A. (1)

Preso un intervallo AC più piccolo di AB, la velocità media in quell'intervallo sarà pure più piccola della velocità nel punto A, ma sarà più grande della velocità media nell'intervallo AB, e perciò sarà più vicina a quella che la nostra intuizione chiama velocità nel punto A. Se si prende un intervallo AD più piccolo di AC, si può

(1) Io posso riuscire a misurare con precisione [illegible] lo spazio in t e v. La [illegible] istante. Ho solo impiccolito l'intervallo?

ancora ripetere un' analoga considerazione. E infine, se AD è molto piccolo, la velocità media in AD sarà prossimamente uguale a quella che la nostra intuizione chiama velocità in A. *Fisicamente* si definisce allora la velocità nel punto A come segue: "preso il più piccolo intervallo di tempo che si sa misurare, il rapporto tra lo spazio percorso in quel piccolo tempo e il tempo stesso è la velocità nel punto A". Però questa definizione non può servire al matematico che deve prescindere dall'esattezza maggiore o minore dei mezzi di misura. Noi considereremo ancora il rapporto

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

che dà la velocità media, e ne cercheremo il limite per $h=0$. Questo limite, se esiste, lo chiameremo, per definizione, *la velocità* $v(x)$ *nell'istante* x; cioè porremo per definizione

$$v(x)=\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Resta così data una definizione matematica della velocità, conforme alla nostra intuizione fisica. Questo limite, quando esiste, è finito ed è lo stesso per h positivo o negativo, si chiama *derivata* della funzione $f(x)$; esso è pure una funzione di x che indicheremo con $f'(x)$ oppure con y'.

h è l'*incremento* dato alla variabile x, e si scrive anche Δx.

$f(x+h)-f(x)$ è l'incremento che riceve la funzione quando la variabile x riceve l'incremento h e si indica anche con Δf.

La derivata è quindi il limite del rapporto incrementale $\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Il Calcolo differenziale si occupa dello studio delle derivate.

Il concetto di derivata si può ricavare da molti altri esempi analoghi a quello esposto.

Per es. dal coefficiente di calorico specifico (che è il quoziente tra la quantità di calore che si dà all'unità di peso di un corpo e l'incremento di temperatura che il corpo acquista). Indichiamo con x la temperatura del corpo e con y la quantità di calore data per portare il corpo alla temperatura x. Sarà y una funzione $f(x)$ della x.

Il coefficiente medio nell'intervallo di temperatura da x a $x+h$ sarà

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

ed il limite di questo rapporto per $h=0$ (ammesso che esista) sarà il coefficiente alla temperatura x. Questo coefficiente è dunque la derivata $f'(x)$ di $f(x)$.

Un altro esempio è dato dall'accelerazione di un punto. Indichiamo con x il tempo e con y la velocità; allora y sarà una funzione $f(x)$ della x. Costruiamo l'accelerazione media in un certo intervallo di tempo, che sarà data dall'incremento della velocità in quell'intervallo di tempo diviso per il tempo trascorso, cioè da

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Il limite di quest'espressione per $h=0$ (ammesso che esista) corrisponde al concetto intuitivo di accelerazione ed è la definizione matematica di accelerazione nell'istante x.

Se y è la lunghezza di una sbarra alla temperatura x, y sarà una funzione $f(x)$ di x. Il coefficiente medio di dilatazione della sbarra tra le temperature x, $x+h$, sarà uguale al rapporto

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

tra l'incremento di lunghezza della sbarra e l'incremento di temperatura.

Il limite $f'(x)$ di questo rapporto per $h=0$ (ammesso che questo limite esista) sarà per definizione il coefficiente di dilatazione della sbarra alla temperatura x.

§. 2 - Tangente ad una curva piana.

Daremo un altro esempio: è evidente dalle figure 10 e 11 che la retta r che la nostra intuizione chiama tangente a una curva, può avere più di un punto comune con la curva, e può anche attraversare la curva

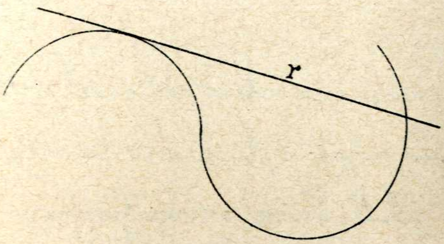


Fig. 10

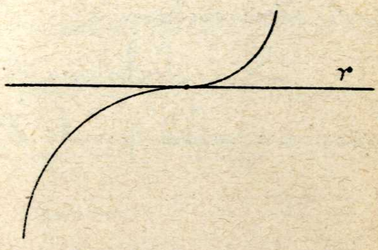


Fig. 11

nel punto di contatto. Per definire la tangente a una curva, noi partiremo dall'osservazione che una retta che abbia a comune con una curva due punti A, B molto vicini si confonde quasi con la retta che la nostra intuizione chiamerebbe tangente alla curva nel punto A.

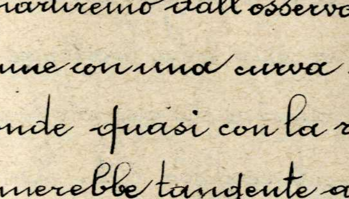


Fig. 12

Noi chiameremo dunque "tangente a una curva nel punto A" la posizione limite (ammesso che esista) di una retta AB, quando il punto B, muovendosi sulla curva, si avvicina indefinitamente ad A.

Questa definizione matematica è conforme alla nostra intuizione.

Confermeremo questa definizione mostrando che la tangente così definita coincide, nel caso che la curva sia un cerchio, con la tangente definita nelle solite trattazioni elementari.

Sia dato un punto A su un cerchio di centro O. Preso un altro punto B su questo cerchio, tiriamo la retta AB. Essa sarà perpendicolare alla OH, bisettrice dell'angolo BOA.

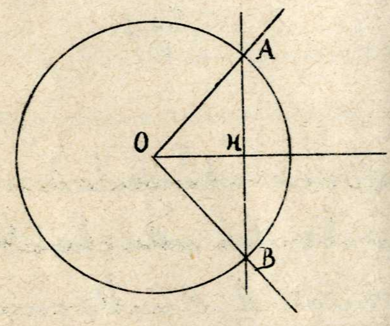


Fig. 13

Facciamo avvicinare il punto B al punto A; allora l'angolo BOA tende a zero, e la bisettrice OH di questo angolo tende al raggio OA. La retta AB, che è sempre perpendicolare alla bisettrice OH, si avvicinerà alla perpendicolare alla retta OA nel punto A, e si ha così che la posizione limite della retta AB, ossia la tangente al cerchio nel punto A, nel senso ora definito, è la perpendicolare al raggio del cerchio che ha l'estremo in quel punto A, e coincide quindi con la retta che in Geometria elementare si chiama "tangente al cerchio nel punto A".

Esaminiamo il caso di una curva rappresentata dall'equazione

$$y = f(x).$$

Ad ogni valore di x (per cui sia definita la f) corrisponde un punto della curva, e uno solo. Vogliamo cercare la tangente alla curva in un punto A. Si prenda un punto B sulla curva; si tiri la retta AB e si faccia avvicinare B ad A lungo la curva.

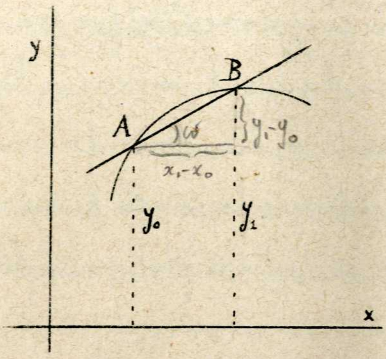


Fig 14

Sieno $x_0, y_0 = f(x_0)$ le coordinate di A ed $x_1 = x_0 + h$, $y_1 = f(x_0 + h)$ le coordinate di B.

Sappiamo dalla Geometria Analitica che l'equazione della retta che unisce i punti $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ è

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}. \qquad [1]$$

Il secondo membro

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \left(= \tan \omega \right) \qquad \left(y_1 - y_0 = (x_1 - x_0) \right.$$

è il coefficiente angolare della retta AB, ed è uguale alla tangente dell'angolo che la AB fa con l'asse delle x. Esso è sempre finito, se (come avviene nel nostro caso) $x_0 \neq x_1$. Se fosse $x_0 = x_1$ la retta avrebbe per equazione $x = x_0$, sarebbe parallela all'asse delle y ed avrebbe un coefficiente angolare infinito.

Nel caso che consideriamo $y_1 = f(x_0+h)$, $y_0 = f(x_0)$, $x_1 = x_0 + h$, quindi la [1] diventa

$x_1 - x_0 = h$

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \qquad [2]$$

Il secondo membro è il rapporto incrementale $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ già considerato relativo alla funzione $f(x)$ per $x = x_0$.

Per vedere se esiste la tangente, ossia se la retta AB tende a una posizione limite quando si fa avvicinare il punto B al punto A, ossia quando si fa tendere h a zero; basterà vedere se esiste il limite del secondo membro della [2] (perchè il primo membro non dipende da h). Se questo limite esiste ed è finito, la curva avrà tangente la cui equazione sarà

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \lim_{h=0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \qquad [3]$$

Se invece detto limite non esiste, la curva non avrà tangente nel punto A. Se infine detto limite esiste, ma è infinito, la curva potrà avere una tangente parallela all'asse delle y. Lo studio di questo caso si fa quindi nel modo più semplice cambiando la direzione degli assi, e noi per ora non ce ne occupiamo.

Quando il secondo membro della [3] esiste ed è finito, esso è per definizione $f'(x)$; ma esso rappresenta il coefficiente angolare della tangente alla curva, dunque

Teorema - La tangente a una curva $y = f(x)$

ha per coefficiente angolare la derivata della funzione $f(x)$.

Parlando di derivata va espressamente inteso che il limite del rapporto incrementale sia unico, cioè tanto se h tende a 0 con valori positivi, quanto se h tende a 0 con valori negativi.

Può però darsi che per qualche valore di x detto limite non sia unico, ma abbia valori distinti secondo che h tende a 0 assumendo valori positivi o valori negativi; allora per quei valori di x non potremo parlare di derivata. I punti corrispondenti della curva $y = f(x)$ sono punti eccezionali, dai quali escono due rette che si potrebbero chiamare, l'una tangente a destra, l'altra tangente a sinistra. Essi si chiameranno punti angolari.

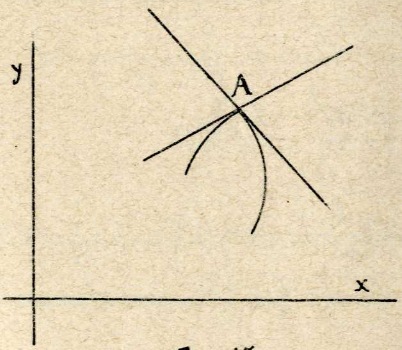


Fig. 15

§.3. Derivata di $\operatorname{sen}x$, $\cos x$, e^x, $\log x$, x^m.

Cercheremo ora alcune derivate importanti, che ci occorreranno sovente.

1° Cercare la derivata della funzione

$$y = \operatorname{sen} x.$$

(Geometricamente: cercare la tangente alla sinusoide in un punto x).

Basterà cercare il limite del rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{sen(x+h) - sen\,x}{h}.$$

Poichè

$$sen(x+h) = sen\,x \cos h + \cos x\,sen\,h,$$

avremo: $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{sen\,x \cos h + \cos x\,sen\,h - sen\,x}{h}$$

ossia

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = sen\,x\,\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\,\frac{sen\,h}{h}.$$

Il limite del primo addendo sarà (poichè $sen\,x$ non dipende da h)

$$sen\,x \cdot \lim_{h=0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0,$$

perchè, come si è visto, $\boxed{\lim_{h=0} \frac{\cos h - 1}{h}} = 0$, (Cfr. pag. 113).

Il limite del secondo addendo sarà (poichè $\cos x$ non dipende da h)

$$\cos x \cdot \lim_{h=0} \frac{sen\,h}{h} = \cos x,$$

perchè $\lim_{h=0} \frac{sen\,h}{h} = 1$, come si è visto (pag. 109).

La somma dei limiti dei due addendi è $\cos x$, quindi la derivata di $sen\,x$ è $\cos x$.

2° Cercare la derivata della funzione $y = \cos x$.

In questo caso

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \frac{\cos x \cosh - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x}{h}$$

$$= \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen} h}{h};$$

e passando al limite per $h=0$ avremo, analogamente al caso precedente,

$$y' = \cos x . \lim_{h=0} \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x . \lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

ossia

$$y' = \cos x . 0 - \operatorname{sen} x . 1 = - \operatorname{sen} x .$$

Dunque: la derivata di $\cos x$ è $-\operatorname{sen} x$.

3º Cercare la derivata della funzione $y = e^x$ (che rappresenta la curva esponenziale).

Il rapporto incrementale è in questo caso

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h} .$$

Passando al limite per $h=0$ (ed osservando che e^x non dipende da h), si ha

$$y' = e^x . \lim_{h=0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x ,$$

perchè, come si è visto (pag. 112)

$$\lim_{h=0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 .$$

Dunque: la funzione esponenziale e^x ha per derivata sè stessa.

4º. Cercare la derivata della funzione $y = \log x$.

Il rapporto incrementale è

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log(x+h) - \log x}{h}.$$

Poniamo $h = \delta x$, ossia $\delta = \frac{h}{x}$. (Ciò è lecito, perchè è $x > 0$, la funzione $\log x$ essendo definita solo per valori positivi di x).

Allora si ha

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log(x+\delta x) - \log x}{\delta x} = \frac{\log \frac{x+\delta x}{x}}{\delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log(1+\delta)}{\delta}.$$

Quando h tende a 0, anche δ tende a 0, quindi $\frac{\log(1+\delta)}{\delta}$ tende a 1 (pag. 112); $\frac{1}{x}$ non varia essendo indipendente da δ; quindi

$\lim_{\delta=0} \frac{\log_e(1+\delta)}{\delta}$

$$y' = \frac{1}{x} \lim_{\delta=0} \frac{\log(1+\delta)}{\delta} = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x},$$

ossia la derivata di $\log x$ è $\frac{1}{x}$.

5° Cercare la derivata di $y = x^m$.

$x \neq 0$

Supponiamo dapprima $x \neq 0$. Il rapporto incrementale è $\frac{(x+h)^m - x^m}{h}$. Posto $h = \delta x$, ossia $\delta = \frac{h}{x}$, questo rapporto si può scrivere

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\delta x)^m - x^m}{\delta x} = \frac{x^m}{x} \cdot \frac{(1+\delta)^m - 1}{\delta} = x^{m-1} \frac{(1+\delta)^m - 1}{\delta}.$$

Si deve cercare il limite di questa espressione per $h = 0$ o, ciò che è lo stesso, per $\delta = 0$. Ma ora x^{m-1} non dipende da δ, dunque basta cercare il limite di $\frac{(1+\delta)^m - 1}{\delta}$. Perciò si osservi che

$$\log(1+\delta)^m = m \log(1+\delta),$$

e però che

$$\frac{(1+\delta)^m-1}{\delta}=\frac{e^{m\log(1+\delta)}-1}{\delta}=\frac{e^{m\log(1+\delta)}-1}{m\log(1+\delta)}\cdot\frac{m\log(1+\delta)}{\delta}$$

onde posto
$$m\log(1+\delta)=t,$$
si ha
$$\frac{(1+\delta)^m-1}{\delta}=\frac{e^t-1}{t}\cdot m\cdot\frac{\log(1+\delta)}{\delta}$$

Quando δ tende a 0, $\log(1+\delta)$ tende a $\log 1=0$, dunque $t=m\log(1+\delta)$ tende a 0, e però
$$\lim_{\delta=0}\frac{(1+\delta)^m-1}{\delta}=m\cdot\lim_{t=0}\frac{e^t-1}{t}\cdot\lim_{\delta=0}\frac{\log(1+\delta)}{\delta},$$
se i due limiti del secondo membro esistono e sono finiti. Orciò si verifica, perchè (pag. 112).
$$\lim_{t=0}\frac{e^t-1}{t}=\lim_{\delta=0}\frac{\log(1+\delta)}{\delta}=1,$$
quindi
$$\lim_{\delta=0}\frac{(1+\delta)^m-1}{\delta}=m.$$

Dunque
$$y'=\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=x^{m-1}\cdot m,$$
ossia la derivata di x^m è mx^{m-1}, se $x\neq 0$.

b) $x=0$ Supponiamo ora che sia $x=0$. Distinguiamo tre casi, secondo che m è minore, uguale o maggiore di 0.

α) Se $m<0$, allora x^m non ha significato per $x=0$, chè se per es. si pone $m=-p$, in cui p è un numero positivo, $x^m=\frac{1}{x^p}=\frac{1}{0}$, che è un simbolo privo di senso.

β) Se $m=0$, allora $x^m=x^0=1$. Poichè la derivata di una funzione è il limite del rapporto tra l'incremento della funzione e quello della variabile e in questo ca so l'incremento della funzione è 0 (restando essa funzione sempre uguale a 1), il rapporto incrementale sarà sempre uguale a 0, e il suo limite, cioè la derivata della funzione considerata, sarà pure 0.

γ) Se $m>0$, il rapporto incrementale della funzione x^m è

$$\frac{(0+h)^m-0}{h}=\frac{h^m}{h}=h^{m-1}.$$

Allora bisognerà distinguere tre sottocasi, secondo che m è maggiore, uguale o minore di 1.

1) Se $m>1$, allora h^{m-1}, quando h tende a 0, tende ancora a 0; cioè la derivata della funzione x^m è in questo caso uguale a 0.

2) Se $m<1$, allora h^{m-1}, quando h tende a 0, tende all'infinito; cioè la derivata della funzione x^m per $x=0$ e $0<m<1$ è uguale ~~a zero~~ ad ∞.

3) Se $m=1$ allora $h^{m-1}=h^0=1$ e $\lim 1=1$, cioè la derivata della funzione x^m per $m=1$ è 1.

Dunque anche per $x=0$, cioè in tutti i casi, la derivata di x^m (quando x^m ha un significato per $x=0$) è data da mx^{m-1}.

10 §. 4. Paragone tra infinitesimi. 11

Sia h un infinitesimo, cioè una variabile che tenda a zero, e supponiamo che non passi per il valore zero.

Sia poi α un altro infinitesimo che tenda a zero con h, e consideriamo il rapporto $\frac{\alpha}{h}$ e poi il

$$\lim_{h=0} \frac{\alpha}{h}.$$

Secondo che questo limite

1° non esiste,

2° esiste ed è una quantità finita e diversa da zero,

3° esiste ed è infinito,

4° esiste ed è zero,

noi diremo rispettivamente che

1° i due infinitesimi α ed h non sono paragonabili

2° α ed h sono infinitesimi dello stesso ordine.

3° α è un infinitesimo di ordine ~~superiore~~ inferiore rispetto ad h.

4° α è un infinitesimo di ordine ~~inferiore~~ superiore rispetto ad h.

Esempi.

1°

$$h \text{ e } \alpha = h\,\mathrm{sen}\frac{1}{h}$$

non sono paragonabili, perchè

$$\frac{\alpha}{h} = \mathrm{sen}\frac{1}{h},$$

al tendere di h a zero, non tende ad alcun limite, ma oscilla indefinitamente nell'intervallo $(-1,1)$.

2°

$$h \text{ e } \alpha = \mathrm{sen}\, h$$

sono dello stesso ordine, perchè (pag. 109)

$$\lim_{h=0} \frac{\alpha}{h} = \lim_{h=0} \frac{\mathrm{sen}\, h}{h} = 1 \qquad [1]$$

* 3°. $\alpha = h^2$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto ad h, perchè

$$\lim_{h=0} \frac{\alpha}{h} = \lim_{h=0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h=0} h = 0.$$

* 4°. $\alpha = \sqrt{h}$ è infinitesimo di ordine inferiore rispetto ad h, perchè

$$\lim_{h=0} \frac{\alpha}{h} = \lim_{h=0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h=0} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty.$$

Se esiste un numero positivo k tale che il rapporto $\frac{\alpha}{h^k}$ abbia un limite finito e diverso da zero, si dice che α è un *infinitesimo di ordine k*.

Per esempio: $\operatorname{sen} h$ è infinitesimo di prim'ordine, per la [1], h^k $(k>0)$ è infinitesimo di ordine k; $1-\cos h$ è un infinitesimo di secondo ordine, perchè

$$\lim_{h=0} \frac{1-\cos h}{h^2} = \lim_{h=0} \frac{2\operatorname{sen}^2\frac{h}{2}}{h^2} = \frac{1}{2} \lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen}^2\frac{h}{2}}{\left(\frac{h}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{h=0} \left(\frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

(Si noti però che non è sempre possibile stabilire l'ordine di un infinitesimo).

§ 5. Differenziali.

Siccome
$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x),$$
allora posto
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon$$

risulterà chiaramente che

$$\lim_{h=0} \varepsilon = 0,$$

cioè quando h tende a 0, ε tende pure a 0, ossia è un infinitesimo.

Si è posto per definizione

$$\Delta f = f(x+h) - f(x),$$

quindi, ricordando che $h = \Delta x$, si ha

$$\Delta f = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \Delta x = [f'(x)+\varepsilon]\Delta x,$$

onde, posto $\alpha = \varepsilon \Delta x$, avremo

$$\Delta f = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \qquad [1].$$

ε è un infinitesimo per $h=0$, Δx è appunto eguale ad h e tende a 0, quindi α tende pure a 0, cioè è un infinitesimo.

Consideriamo il limite per $h=0$ del rapporto

$$\frac{\alpha}{h} = \frac{\varepsilon \Delta x}{\Delta x} = \varepsilon.$$

Quando h tende a 0, ε tende pure a 0, quindi $\frac{\alpha}{h}$ per $h=0$ tende a 0; dunque α è un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad h.

Allora si potrà dire, per l'uguaglianza [1] che l'incremento dato alla funzione $f(x)$ è uguale alla derivata della funzione stessa $f'(x)$, moltiplicata per l'incremento Δx della variabile, più un infinitesimo α di ordine superiore (rispetto ad $h = \Delta x$).

La prima parte del secondo membro della [1] cioè

$f'(x)\Delta x$ si suole indicare col simbolo df e si chiama il differenziale della funzione $f(x)$; cioè il differenziale di una funzione $f(x)$ è uguale alla derivata della funzione stessa moltiplicata per l'incremento della variabile.

Il differenziale dipende dunque dall'incremento Δx della variabile x e, quando questo incremento tende a 0, il differenziale tende pure a zero, cioè è un infinitesimo.

La [1] può anche scriversi

$$\Delta f = df + \alpha .$$

Vediamo cosa rappresenta geometricamente il differenziale. Sia data una curva d'equazione

$$y = f(x).$$

Siano MN, SQ le ordinate dei punti M e S della curva che corrispondono ai valori x e $x+h$ della variabile (fig. 16)

Sia P il punto d'incontro della SQ con la parallela per M all'asse delle x; sia poi R il punto d'incontro della SQ con la tangente alla curva nel punto M, ed ω sia l'angolo formato da questa tangente con la MP, ossia con l'asse x. L'incremento h che riceve la variabile indipendente x sarà

$$\Delta x = NQ = MP.$$

Abbiamo visto che la derivata $f'(x)$ della funzione $f(x)$ è uguale al coefficiente angolare della tangente alla curva, ossia che

$$f'(x) = \operatorname{tang} \omega; \quad \left(= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right)$$

ma il differenziale è

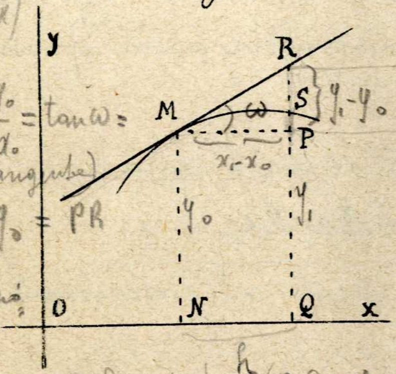
$$df = f'(x)\Delta x,$$

quindi

$$df = \Delta x \tan g \omega .$$

Ora Δx misura il cateto MP del triangolo rettangolo MPR, quindi

Fig. 16



$\left(\begin{matrix} OQ = x_1 \\ ON = x_0 \end{matrix}\right)$ $\left(\begin{matrix} RQ = y_1 \\ MN = y_0 \end{matrix}\right)$

$$df = \Delta x \tan g \omega = PR.$$

Dunque il differenziale è rappresentato dal segmento PR compreso tra la parallela condotta per il punto M all'asse delle x e la tangente alla curva nel punto M.

L'incremento Δf che riceve la funzione quando alla variabile x si dà l'incremento h, sarà dato dalla differenza tra il valore della funzione nel punto $x+h$ (valore che nella nostra figura è rappresentato dal segmento SQ) e il valore della funzione nel punto x (valore che nella nostra figura è rappresentato dal segmento MN); dunque

$$\Delta f = QS - NM = QS - QP = PS,$$

cioè l'incremento Δf che riceve la funzione $f(x)$ quando si dà alla variabile x l'incremento Δx è rappresentato dal segmento PS compreso tra la curva e la parallela all'asse delle x condotta per il punto M di ascissa x.

Dunque in un calcolo il sostituire all'incremento Δf il differenziale df è come sostituire alla curva la sua tangente.

L'incremento della funzione coincide col differenziale quando la curva coincide colla sua tangente, il che accade quando la curva è una retta, ossia quando la funzione è lineare.

Se $f(x) = x$, la derivata di x è 1, quindi

$$df = dx = 1 . \Delta x = \Delta x,$$

cioè il differenziale di x è uguale all'incremento di x.

Allora si potrà scrivere:

$$df = f'(x) \cdot dx,$$

cioè il differenziale della funzione $f(x)$ è uguale alla sua derivata moltiplicata per il differenziale della variabile indipendente x. Si può anche scrivere:

$$f'(x) = \frac{df}{dx},$$

cioè la derivata di una funzione è uguale al rapporto tra il differenziale della funzione e quello della variabile indipendente x.

§. 6. Derivata della somma di due o più funzioni.

Sieno $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ due funzioni continue aventi derivata finita, e sia $f(x)$ una funzione eguale alla somma delle due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, cioè sia

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x).$$

Vogliamo cercare (se esiste) la derivata della funzione $f(x)$.

La derivata della funzione $f(x)$ sarà il limite (se esiste ed è finito) per $h=0$ del rapporto incrementale

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

e poichè $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$, detto rapporto potrà scriversi

$$\frac{\varphi(x+h)+\psi(x+h)-\varphi(x)-\psi(x)}{h}$$

oppure

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}+\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}.$$

Ora, per $h=0$, il limite del primo addendo di questa espressione non è altro che la derivata $\varphi'(x)$ della funzione $\varphi(x)$, la quale esiste ed è finita per ipotesi. Così, per $h=0$, il limite del secondo addendo è la derivata $\psi'(x)$ che esiste ed è finita per ipotesi. Quindi il limite di tutta quell'espressione esiste, ed è uguale alla somma dei limiti dei due addendi, cioè è uguale a $\varphi'(x)+\psi'(x)$. Si ha perciò il

Teorema - La funzione somma di due o più funzioni (in numero finito) che hanno la derivata finita ha pure una derivata finita, che è uguale alla somma delle derivate delle funzioni addende.

Da questo teorema risulta per es. che se si sa costruire la tangente alla curva $y=\varphi(x)$ e la tangente alla curva $y=\psi(x)$, si sa anche costruire la tangente alla curva $y=\varphi(x)+\psi(x)$.

Esempio 1° – Trovare la derivata della funzione
$$y=\operatorname{sen}x+\log x.$$

La y è una funzione somma delle due funzioni $\operatorname{sen}x$ e $\log x$ che hanno derivata finita in ogni intervallo avente per estremo inferiore un numero positivo. La derivata di $\operatorname{sen}x$ abbiamo visto essere $\cos x$; la derivata di $\log x$ abbiamo visto essere $\frac{1}{x}$; la derivata della funzione y sarà quindi
$$y'=\cos x+\frac{1}{x}.$$

Esempio 2° – Trovare la derivata della funzione
$$y=e^x+\cos x+\operatorname{sen}x.$$

La derivata di e^x è e^x, la derivata di $\cos x$ è $-\operatorname{sen}x$, la derivata di $\operatorname{sen}x$ è $\cos x$; per il teorema precedente sarà
$$y'=e^x-\operatorname{sen}x+\cos x.$$

§.7 – Derivata del prodotto di due o più funzioni.

Sieno $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ due funzioni continue aventi derivata finita. Vogliamo trovare (se esiste) la derivata della funzione $f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$. Essa sarà eguale al limite, per $h=0$, del rapporto incrementale.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\varphi(x+h)\psi(x+h)-\varphi(x)\psi(x)}{h}.$$

Aggiungendo e togliendo al numeratore $\varphi(x).\psi(x+h)$, esso diventa

$$\frac{\varphi(x+h)\,\psi(x+h)+\varphi(x)\,\psi(x+h)-\varphi(x)\,\psi(x+h)-\varphi(x)\,\psi(x)}{h}$$

e si può mettere sotto la forma:

$$\psi(x+h)\,\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}+\varphi(x)\,\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}.$$

Il primo addendo è il prodotto di due fattori. Per $h=0$, il primo tende a $\psi(x)$, perchè $\psi(x)$ è funzione continua; il secondo è il rapporto incrementale della funzione $\varphi(x)$, quindi il suo limite per $h=0$ è la derivata $\varphi'(x)$ (che per ipotesi esiste ed è finita). Dunque il limite del primo addendo è $\psi(x),\varphi'(x)$. Analogamente si trova che il limite del secondo addendo è $\varphi(x).\psi'(x)$. Allora il limite di tutta l'espressione, cioè la derivata della funzione $f(x)$, sarà

$$f'(x)=\varphi'(x)\,\psi(x)+\varphi(x)\,\psi'(x);$$

da cui il

Teorema - La derivata della funzione $f(x)$, prodotto di due altre funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ che hanno la derivata finita, esiste e si ottiene moltiplicando la funzione $\psi(x)$ per la derivata della funzione $\varphi(x)$, poi moltiplicando $\varphi(x)$ per la derivata della funzione $\psi(x)$ e sommando i prodotti.

Questo teorema è importantissimo e di assai frequente applicazione.

Esempio 1° – Trovare la derivata della funzione

$$y = e^x \operatorname{sen} x.$$

La derivata di e^x è e^x, la derivata di $\operatorname{sen} x$ è $\cos x$, quindi la derivata della funzione y è

$$y' = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x = e^x (\cos x + \operatorname{sen} x).$$

Esempio 2° – Trovare la derivata della funzione

$$y = \operatorname{sen} x \log x.$$

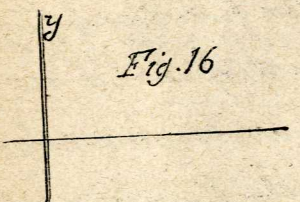
Applicando il teorema precedente e ricordando le derivate di $\operatorname{sen} x$ e $\log x$, si ha

$$y' = \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \log x \cos x.$$

Osservazione – Se $y = \text{cost.}$ allora la derivata di y è 0, perchè se la funzione ha sempre lo stesso valore, $f(x+h)$ e $f(x)$ sono eguali, la loro differenza è 0, il rapporto incrementale è 0, quindi la derivata, che è il limite di tal rapporto, è anche 0.

Geometricamente questo caso è intuitivo, perchè se $f(x) = \text{cost}$, vuol dire che i punti della curva $y = f(x)$ hanno tutti la medesima ordinata, cioè la curva è una parallela all'asse delle x; ora se la curva è una retta, la sua tangente coincide con la retta stessa e poichè risulta parallela all'asse delle x, il coefficiente angolare di questa tangente è 0 e la derivata, che è uguale a questo coefficiente (§ 2),

Fig. 16



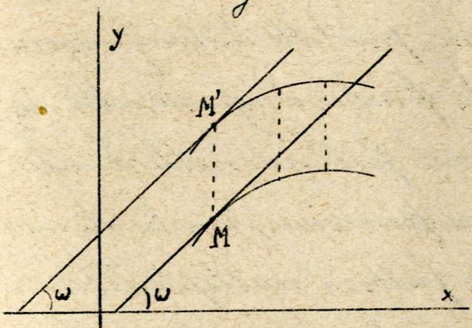
sarà pure 0.

Da quest'osservazione trarremo una conseguenza importante

Se
$$y=f(x)+\text{cost.}$$
allora
$$y'=f'(x),$$
cioè <u>aggiungendo a una funzione una costante, la derivata della funzione non si altera</u>.

Geometricamente è cosa intuitiva, perchè aggiungere una costante a una funzione $f(x)$ equivale a far compiere alla curva $y=f(x)$ una traslazione, e ciò non muta la direzione delle tangenti e l'angolo ω formato da una tangente alla curva con l'asse delle x, cioè non muta il coefficiente angolare $f'(x)$.

Fig. 17



Sia
$$y=cf(x),$$
dove c è una costante.

Avremo $\quad y' = c \cdot f'(x) + 0 \cdot f(x) \quad$ essendo $c'=0$

cioè
$$y'=cf'(x)$$
cioè <u>moltiplicando una funzione per una costante, la derivata della funzione resta moltiplicata per quella costante</u>.

Or consideriamo il prodotto di tre funzioni conti-
nue aventi derivata finita.

$$y=\varphi\cdot\psi\cdot\chi$$

χ = chi

e cerchiamo la sua derivata.

Ponendo $$\varphi\psi=\theta, \qquad [1]$$

θ = teta

risulta $$y=\theta\chi,$$

quindi $$y'=\theta\chi'+\theta'\chi. \qquad [2]$$

Ma θ è il prodotto di due funzioni φ,ψ; quindi

$$\theta'=\varphi\psi+\varphi\psi'. \qquad [3]$$

Sostituendo nella [2] per θ e θ' i valori dati dalle [1] e [3], si ha

$$y'=\varphi\psi\chi'+\varphi'\psi\chi+\varphi\psi'\chi,$$

cioè la derivata della funzione prodotto di tre funzioni continue che hanno derivata finita, è uguale alla derivata della prima funzione fattore moltiplicata per il prodotto delle altre due funzioni, più la derivata della seconda funzione fattore moltiplicata per le altre due funzioni, più la derivata della terza funzione fattore moltiplicata per le altre due funzioni.

Analogamente se

$$y=f\varphi\psi\chi,$$

si ha

$$y'=f'\varphi\psi\chi+f\varphi'\psi\chi+f\varphi\psi'\chi+f\varphi\psi\chi'.$$

1 Esempio 1°. – Trovare la derivata di

$$y=2\,\mathrm{sen}\,x\cos x.$$

Il fattore 2 è costante, basterà allora trovare la derivata di $\operatorname{sen} x . \cos x$ e moltiplicarla per 2.

La derivata di $\operatorname{sen} x$ è $\cos x$, la derivata di $\cos x$ è $-\operatorname{sen} x$; quindi avremo

$$y' = 2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 2\cos 2x.$$

Si può osservare che

$$2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x,$$

quindi la derivata di $\operatorname{sen} 2x$ è $2\cos 2x$.

Esempio 2° — Trovare la derivata di

$$y = \operatorname{sen} x \log x \cos x.$$

Si ha

$$y' = \cos x . \log x . \cos x + \operatorname{sen} x . \frac{1}{x} . \cos x + \operatorname{sen} x \log x (-\operatorname{sen} x)$$
$$= \log x (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + \frac{1}{x} \operatorname{sen} x \cos x = \log x \cos 2x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}.$$

§ 8 — Derivata del quoziente di due funzioni.

Or cerchiamo la derivata di $y = \frac{1}{\psi(x)}$, supponendo che $\psi(x)$ sia una funzione continua avente derivata finita.

Avremo

$$y' = \lim_{h=0} \frac{\frac{1}{\psi(x+h)} - \frac{1}{\psi(x)}}{h} = \lim_{h=0} \frac{\psi(x) - \psi(x+h)}{h\psi(x)\psi(x+h)} =$$

$$= \lim_{h=0} \left(\frac{-1}{\psi(x)\psi(x+h)} \cdot \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} \right)$$

che è il limite del prodotto di due fattori.

$\psi(x)$ è continua, quindi $\psi(x+h)$ tende a $\psi(x)$ per $h=0$, e però $\psi(x)\psi(x+h)$ tende a $[\psi(x)]^2$; dunque il limite del primo fattore è $-\frac{1}{[\psi(x)]^2}$.

Il secondo fattore è il rapporto incrementale della funzione $\psi(x)$ e il suo limite per $h=0$ è la derivata $\psi'(x)$ (che esiste ed è finita), quindi

$$y' = -\frac{1}{[\psi(x)]^2}\cdot\psi'(x),$$

cioè per derivare la funzione $\frac{1}{\psi(x)}$ si divide la derivata della funzione $\psi(x)$ per il quadrato della funzione stessa e si cambia segno al quoziente(*).

Ora, per il teorema sulla derivazione del prodotto di funzioni, se $f(x)$ e $\psi(x)$ sono due funzioni continue aventi derivata finita e si pone $y=\frac{f(x)}{\psi(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{\psi(x)}$, si ha

$$y' = f'(x)\frac{1}{\psi(x)} - f(x)\frac{\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}$$

ossia

$$y' = \frac{f'(x)\psi(x)-f(x)\psi'(x)}{[\psi(x)]^2},$$

cioè si ha il

Teorema – La derivata del quoziente $\frac{f(x)}{\psi(x)}$ di due funzioni continue che hanno derivata finita è una frazione il cui denominatore è il quadrato della funzione denominatore $\psi(x)$, e il cui numeratore si ottiene sottraendo dal prodotto della derivata della

---

(*) Questo ragionamento vale per il caso che $\psi(x)\neq 0$; ora nel nostro caso $\psi(x)$ è certamente $\neq 0$, perchè altrimenti non potremmo parlare della funzione $\frac{1}{\psi(x)}$.

funzione numeratore $f(x)$ per la funzione denominatore $\psi(x)$ il prodotto della derivata della funzione denominatore $\psi'(x)$ per la funzione numeratore $f(x)$.

Esempio 1°. — La derivata della funzione $tg\,x$ è $\frac{1}{\cos^2 x}$.

Siccome

$$y = \operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

avremo per il teorema precedente

$$y' = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Esempio 2°. La derivata di $y = \operatorname{cotg} x$ è $-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$.

Si sa che

$$y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},$$

quindi

$$y' = \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Oppure: essendo

$$y = \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tang} x}$$

e

$$(\operatorname{tang} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

per la formula

$$\left(\frac{1}{\psi(x)}\right)' = \frac{-\psi'(x)}{[\psi(x)]^2},$$

si ha

$$y' = -\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{tang}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

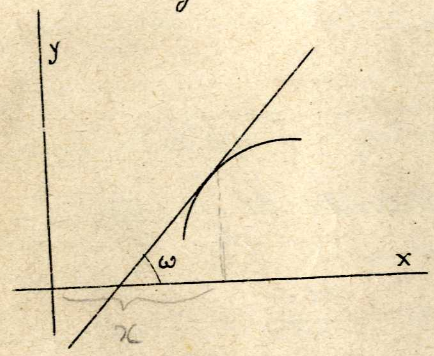
§ 9. — Teorema di derivazione delle funzioni inverse.

Ricordiamo che se si ha una curva rappresentata dalla funzione continua avente derivata

$$y = f(x),$$

la derivata $f'(x)$ della funzione $f(x)$ misura la tangente dell'angolo ω che la tangente alla curva nel punto di ascissa x fa con l'asse delle x.

Fig 18

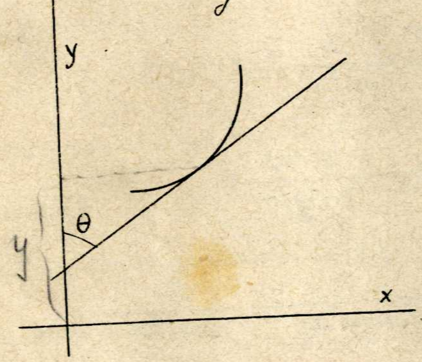


Analogamente se si ha una curva rappresentata dalla funzione continua e derivabile

$$x = \varphi(y),$$

la derivata $\varphi'(y)$ della funzione $\varphi(y)$ misura la tangente dell'angolo θ che la tangente alla curva nel punto che ha per ordinata y forma coll'asse delle y.

Fig. 19



Or supponiamo che le due equazioni $y = f(x)$ ed $x = \varphi(y)$ rappresentino la stessa curva. In altri termini: ad ogni valor di x corrisponde uno ed uno solo valore y per la funzione $y = f(x)$; or supponiamo che il legame tra x e y sia di tale natura, che ad ogni valor di y corrisponda uno e un solo valore di x, almeno entro un determinato intervallo. Allora x potrà considerarsi come funzione $x = \varphi(y)$ di y, funzione che sarà l'inversa della prima $f(x)$.

In tale ipotesi le due funzioni rappresenteranno la stessa curva. Nell'ipotesi che f sia derivabile, consideriamo un punto della curva in cui la tangente non sia parallela nè all'asse x, nè all'asse y e che formerà quindi con l'asse x un angolo ω tale che

$$\operatorname{tang} \omega = f'(x).$$

Ora, per supposto, la curva $x=\varphi(y)$ non è altro che la curva $y=f(x)$, dunque la curva $x=\varphi(y)$ ha nello stesso punto una tangente non parallela agli assi x, y, il che equivale a dire che la funzione $\varphi(y)$ ha una derivata $\varphi'(y)$ finita e diversa da 0, che è uguale alla tangente dell'angolo θ che la tangente della curva forma coll'asse delle y.

$$\operatorname{tang} \theta = \varphi'(y).$$

Or gli angoli θ e ω danno per somma $\frac{\pi}{2}$, quindi le loro tangenti saranno numeri inversi, cioè

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{1}{\operatorname{tang} \omega},$$

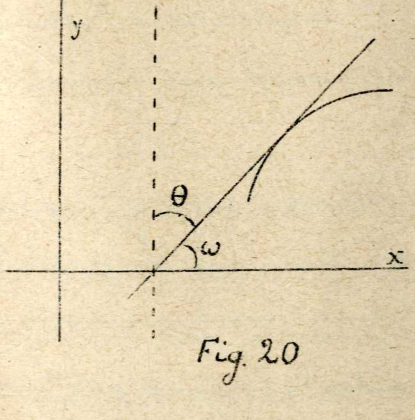


Fig. 20

ossia

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Avremo così il

<u>Teorema</u> – <u>Se una curva è rappresentata da due equazioni $y=f(x)$ e $x=\varphi(y)$ e se la derivata della funzione $f(x)$ rispetto ad</u>

x esiste, non è nulla ed è finita, la derivata della funzione $\varphi(y)$ esiste, non è nulla, è finita ed è data dalla reciproca della derivata di $f(x)$.

Il teorema or ora enunciato si chiama teorema di derivazione delle funzioni inverse.

Esempio 1° Consideriamo la curva rappresentata dalla funzione

$$y = e^x$$

e che approssimativamente è quella della fig. 21.

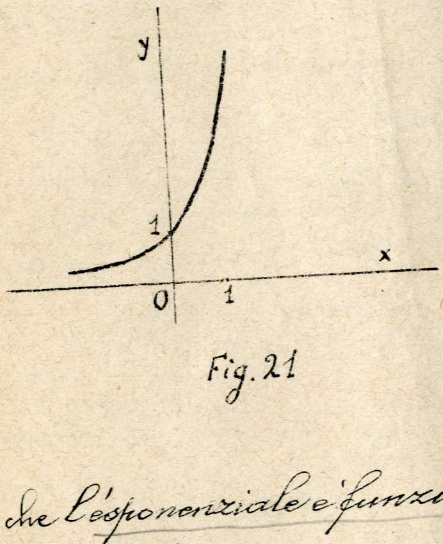


Fig. 21

Ad ogni dato valore di x corrisponde un valore di y, e uno solo.

Ora, se $y = e^x$, è

$$x = \log y.$$

Evidentemente le due equazioni $y = e^x$ e $x = \log y$ rappresentano una medesima curva*; diremo quindi che l'esponenziale è funzione inversa del logaritmo (Cfr. pag. 81).

Conoscendo la derivata della funzione e^x, possiamo quindi trovare la derivata della funzione $\log y$ (derivata

---

(1) Bisogna però osservare che mentre la funzione $y = e^x$ è definita per tutti i valori della x, la funzione $x = \log y$ è definita per i soli valori positivi della y.

V pag 226 -

che abbiamo già trovato in altro modo)

$$(\log y)' = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

Esempio 2°. Se si considera la funzione

$$y = \operatorname{sen} x$$

che rappresenta una curva detta *sinussoide*, la variabile x rappresenta l'arco che ha per seno il valore y, si ha cioè

$$x = \operatorname{arcsen} y.$$

Osserviamo che quando è dato il valore del seno, l'arco che ha per seno quel valore non è determinato; se

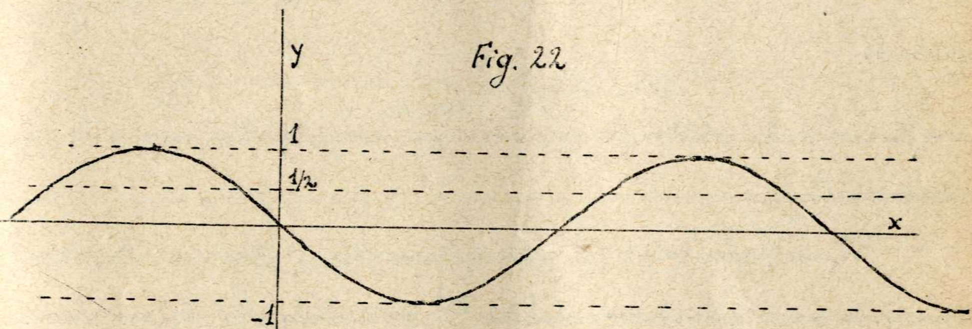


Fig. 22

noi prendiamo per es. il valore $y = \frac{1}{2}$, vi sono infiniti archi x che hanno per seno quel valore $\frac{1}{2}$ (vedi fig. 22). Per fare in modo che la curva sia rappresentata dalla funzione $y = \operatorname{sen} x$ in modo che ad ogni valore y del seno corrisponda uno e un solo valore dell'arco x, noi considereremo della sinussoide solo un pezzo, per es. quello compreso tra i punti di ordinate -1 e $+1$ e quindi di ascisse $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$. Allora le funzioni

$$\begin{cases} y = \operatorname{sen} x \\ x = \operatorname{arcsen} y \end{cases}$$

restano determinate, cioè ad ogni valore possibile del seno y corrisponde uno e un solo valore dell'arco x, e viceversa.

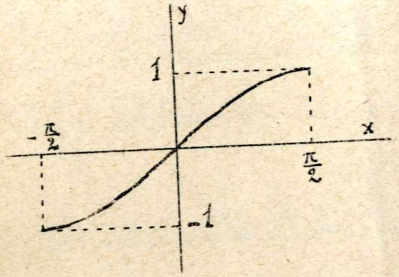


Fig. 23

Applicando il teorema precedente avremo

$$(\operatorname{arcsen} y)'_y = \frac{1}{(\operatorname{sen} x)'_x}, \; (*)$$

e quindi

$$(\operatorname{arc\,sen} y)'_y = \frac{1}{\cos x} \qquad [1]$$

che è la derivata della funzione arc sen y fatta rapporto alla variabile y.

Modifichiamo l'eguaglianza [1] (in cui il primo membro è una funzione della x) in modo che vi compaia solo la variabile y; cioè cerchiamo la derivata della funzione arc sen y fatta rapporto alla variabile y. Per ciò fare osserviamo che

$$\cos x = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x},$$

e poichè si ha per ipotesi

(*) Volendo indicare in questo caso che la derivata è presa rapporto alla variabile y si è scritto:

$$(\operatorname{arc\,sen} y)'_y$$

$$\operatorname{sen} x = y,$$

avremo
$$\cos x = \pm\sqrt{1-y^2};$$

sostituendo questo valore di $\cos x$ nella [1], avremo

$$(\operatorname{arc\,sen} y)'_y = \pm \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \qquad [2]$$

L'indeterminazione del segno non ci deve sorprendere, perchè il segno potrà variare variando il pezzo di sinusoide considerato.

Per $y = \pm 1$ il secondo membro della [2] diventa $\pm\frac{1}{\sqrt{1-1}} = \pm\frac{1}{0}$ e però non ha significato, dunque bisogna che dentro al pezzo di curva che si considera non compaia il valore $y = \pm 1$.

Concludendo diremo che, se si considera un pezzo di sinusoide che non contenga i valori del seno $y = \pm 1$, la funzione arc sen y ne resta determinata, e la sua derivata rispetto alla variabile y è $\pm\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Sostituendo nella [2] alla variabile y la x, avremo

$$\boxed{(\operatorname{arc\,sen} x)'_x = \pm \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

Analogamente si trova che

$$(\operatorname{arc\,sen} x)'_x = \mp \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

(e anche qui il segno dipende dal pezzo di sinusoide considerato).

Vogliamo ora trovare la derivata (molto importante) della funzione arctg x.

Si fanno le stesse considerazioni fatte per trovare la derivata della funzione arc sen x; anche qui la funzione non è determinata se non si determina il pezzo di curva da considerarsi.

Avremo le due funzioni inverse

$$\begin{cases} y = \tan g\, x \\ x = \operatorname{arc} \tan g\, y \end{cases}$$

Ora

$$\left(\tan g\, x \right)'_x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

quindi, per il teorema di derivazione delle funzioni inverse,

$$\left(\operatorname{arc} \tan g\, y \right)'_y = \cos^2 x ; \qquad [1]$$

ma

$$\cos^2 x = \frac{1}{\tan g^2 x + 1} = \frac{1}{1+y^2},$$

e però la [1] diventa

$$\left(\operatorname{arc} \tan g\, y \right)'_y = \frac{1}{1+y^2};$$

infine, cambiando y in x,

$$\boxed{\left(\operatorname{arc} \tan g\, x \right)'_x = \frac{1}{1+x^2}}.$$

1 §. 10 Regola di derivazione delle funzioni di funzioni.

Sia data la funzione continua e derivabile

$$y = f(z).$$

Abbiamo dimostrato al § 5 che l'incremento che riceve la funzione y quando alla variabile z si dà l'incremento Δz è

$$\Delta y = f'(z) . \Delta z + \varepsilon \Delta z, \qquad [1]$$

$\Delta z = h$

per tutti i valori di Δz diversi da 0, e che si ha

$$\lim_{\Delta z = 0} \varepsilon = 0 .$$

La [1] però vale anche per $\Delta z = 0$ (se per es. si pone $\varepsilon = 0$ per $\Delta z = 0$) perchè dando a z l'incremento 0, la funzione y non cambia, cioè subisce l'incremento $\Delta y = 0$, e allora la [1] si riduce all'identità

$$0 = 0 + 0 .$$

Supponiamo che φ ed f siano funzioni continue e derivabili, e che sia

$$z = \varphi(x), \qquad , \qquad y = f(z) , = f(\varphi(x))$$

cioè che per ogni valore dato a x (in un certo campo B) la z abbia un valore determinato, e che per ognuno dei valori così assunti dalla z la y abbia un valore determinato; ne segue che, per ogni valore dato alla x nel campo B; la y ha un valore determinato, ossia è una funzione di x.

Proponiamoci il problema di trovare la derivata y'_x di y rispetto ad x.

Diamo alla variabile x un incremento Δx; la y subirà un certo incremento Δy, mentre la z subirà alla sua volta un incremento Δz. Siccome y è una funzione di z, in questo caso la [1] diventa

$$\Delta y = f'(z) \cdot \Delta z + \varepsilon \Delta z . \qquad [2].$$

Ora la derivata di y rapporto alla variabile x è il limite del rapporto tra l'incremento di y e l'incremento di x, è cioè il limite per $\Delta x = 0$ del rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, che per la [2] può scriversi

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(z)\frac{\Delta z}{\Delta x} + \varepsilon \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Passando al limite per $\Delta x = 0$, avremo:

$$y'_x = \lim_{\Delta x = 0} f'(z)\frac{\Delta z}{\Delta x} + \lim_{\Delta x = 0} \varepsilon \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Quando Δx tende a 0, il rapporto $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ tende (per definizione) alla derivata $\varphi'(x)$ rapporto a x, quindi il primo addendo dell'espressione precedente tende a $f'(z)\cdot\varphi'_x(x)$.

Quando Δx tende a 0, Δz tende a 0, perchè z è funzione continua di x; e si è visto che quando Δz tende a 0, ε tende pure a 0, perciò il limite del secondo addendo, per $\Delta x = 0$, è 0.

Avremo quindi

$$y'_x = f'(z)\cdot\varphi'_x(x)$$

ossia, per le ipotesi fatte

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x.$$

Si ha dunque il

Teorema - Se y è una funzione di z, e z è funzione di x, la derivata y'_x (fatta rapporto alla variabile x) della funzione y è uguale al prodotto della derivata y'_z della funzione y fatta rapporto alla variabile z, per la derivata z'_x della funzione z fatta rapporto alla variabile x.

Esempio 1° - Abbiansi le funzioni

$$z = \operatorname{sen} x, \qquad y = z^3.$$

Sarà y una funzione di x definita da

$y'_z = 3z^2$

$$y = (\operatorname{sen} x)^3.$$

$z'_x = \cos x$

Avremo per il teorema precedente

$= y'_z \cdot z'_x$

$$y'_x = 3z^2 \cos x = 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x.$$

Esempio 2° - Il teorema di derivazione di funzione di funzione serve a ridurre la derivazione di funzioni di struttura complessa a quella di funzioni più semplici.

Vogliamo perciò derivare la funzione

$$y = \log \operatorname{sen} x.$$

Noi finora non sappiamo derivare la funzione $\log \operatorname{sen} x$, ma sappiamo derivare separatamente la funzione $\log x$ e la funzione $\operatorname{sen} x$; ora se introduciamo una variabile ausiliaria z, che facciamo eguale a $\operatorname{sen} x$, la nostra funzione $y = \log \operatorname{sen} x$ viene sdoppiata nelle due

$$y = \log z, \qquad z = \operatorname{sen} x$$

che sappiamo derivare.

Dalle due equazioni precedenti risulta che y è funzione di z la quale z è funzione di x, quindi

$$y'_x = y'_z\, z'_x = \frac{1}{z} \cdot \cos x.$$

Eliminando la variabile z introdotta solo per comodità di calcolo: si ha infine

$$y'_x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotg} x$$

Esempio 3° - Trovare la derivata della funzione

$$y=\sqrt[3]{\cos x}.$$

Osserviamo che se sotto il segno di radice, invece della funzione $\cos x$ ci fosse semplicemente una variabile, la funzione y sarebbe facilmente derivabile.

Ebbene ponendo

$$\begin{cases} t=\cos x, \\ y=\sqrt[3]{t}=t^{\frac{1}{3}}. \end{cases}$$

risulta

Da queste ultime due equazioni si vede che la y è funzione di t, la quale t è funzione di x, quindi

$$y'_x=y'_t\,t'_x.$$

La derivata y'_t della funzione $y=t^{\frac{1}{3}}$ è $\frac{1}{3}t^{\frac{1}{3}-1}$, cioè $\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}$; la derivata t'_x della funzione $t=\cos x$ è $-\operatorname{sen} x$, quindi

$$y'_x=-\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}\operatorname{sen} x.$$

Eliminando la variabile ausiliaria t, sostituendola col suo valore $\cos x$, si ha

$$y'_x=-\frac{1}{3}(\cos x)^{-\frac{2}{3}}\operatorname{sen} x=-\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[2]{\cos^2 x}}\cdot\operatorname{sen} x$$

Esempio 4° Trovare la derivata della funzione

$$y=\operatorname{sen} 2x.$$

Ponendo $2x=t$, si ha

$$y=\operatorname{sen} t.$$

Qui y è funzione di t e t è funzione di x, quindi

$$y'_x=y'_t\,t'_x.$$

La derivata y'_t della funzione $y = \operatorname{sen} t$ è $\cos t$; la derivata t'_x della funzione $t = 2x$ è 2, quindi

$$y'_x = 2\cos t.$$

Sostituendo a t il suo valore $2x$, si ha infine

$$y'_x = 2\cos 2x.$$

Esempio 5° - Esamineremo ora un esempio che conduce alla determinazione di una derivata fondamentale. Vogliamo trovare la derivata della funzione

$$y = \varphi(x)^{\psi(x)}, \qquad [1]$$

in cui tanto la base che l'esponente sono variabili. (Le funzioni $y = e^x$, $y = x^m$, che abbiamo già derivate, sono casi particolari di questa; nella prima funzione è costante la base e variabile l'esponente, nella seconda è costante l'esponente e variabile la base).

Prendendo i logaritmi dei due membri della [1], si ha

$$\log y = \psi(x) \log \varphi(x),^{(*)}$$

da cui

$$y = e^{\psi(x) \log \varphi(x)}.$$

Posto

$$t = \psi(x) \log \varphi(x),$$

si ha

$$y = e^t. \qquad [2]$$

(*) Ciò è possibile solo nel caso che $\varphi(x)$ sia positivo, perchè il logaritmo d'una quantità negativa non ha senso; del resto se fosse $\varphi(x) < 0$ non avrebbe senso neppure il secondo membro della [1], in generale.

Qui y è funzione di t la quale è funzione di x, quindi al solito

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x .$$

La derivata y'_t della funzione $y = e^t$ è e^t, ma e^t per la [2] è uguale a y, e y per la [1] è uguale a $\varphi(x)^{\psi(x)}$. Quindi

$$y'_t = \varphi(x)^{\psi(x)} .$$

La derivata t'_x è $\left(\psi(x) \log \varphi(x)\right)'_x$, quindi

$$y'_x = \varphi(x)^{\psi(x)} \left(\psi(x) \log \varphi(x)\right)'_x \qquad [3] .$$

Quindi, per trovare y'_x, basta trovare la derivata della funzione

$$\psi(x) . \log \varphi(x) .$$

Or questa è il prodotto delle due $\psi(x)$ e $\log \varphi(x)$. Quindi

$$\left(\psi(x) \log \varphi(x)\right)'_x = \psi'(x) \log \varphi(x) + \psi(x) \left(\log \varphi(x)\right)'_x \qquad [4]$$

Per trovare $\left(\log \varphi(x)\right)'_x$ poniamo

$$z = \log \varphi(x) .$$

Ora se introduciamo la variabile ausiliaria $u = \varphi(x)$, l'ultima funzione si sdoppia nelle due seguenti:

$$z = \log u \qquad , \qquad u = \varphi(x),$$

nelle quali z è funzione di u che alla sua volta è funzione di x; la derivata z'_x, cioè la derivata della funzione $\log \varphi(x)$ fatta rapporto a x, è

$$z'_x = \left(\log \varphi(x)\right)'_x = \frac{1}{u} \varphi'(x) ;$$

(mezzo $z'_y = (\log u)$

$u'_x = \varphi'($

$z'_x = z'_u \cdot u'_x = \frac{1}{u} \cdot \varphi'(x)$

ma $u = \varphi(x)$, quindi

$$\left(\log \varphi(x)\right)'_x = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

Dunque la [4] si può scrivere

$$\left(\psi(x) \log \varphi(x)\right)'_x = \psi'(x) \log \varphi(x) + \psi(x) \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

e quindi la [3] può scriversi

$$\boxed{y'_x = \varphi(x)^{\psi(x)} \left(\psi'(x) \log \varphi(x) + \psi(x) \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right),}$$

che è la derivata fondamentale che si voleva trovare.

Faremo ora delle applicazioni di questa formola.

Supponiamo che nella funzione

$$y = \varphi(x)^{\psi(x)},$$

sia $\varphi(x) = a = cost$, e $\psi(x) = x$. Allora

$$y = a^x,$$

ed essendo $\varphi'(x) = 0$, $\psi'(x) = 1$, si ha

$$y'_x = a^x \log a,$$

(formola da ricordare)

Con la formula fondamentale si possono trovare le derivate delle funzioni $y = e^x$, $y = x^m$, perchè casi particolari della funzione $y = \varphi^\psi$.

Infatti se $y = e^x$,

applicando detta formola avremo

$$y'_x = e^x \cdot 1 = e^x.$$

Se
$$y = x^m$$
(cioè se $\varphi = x$ e $\psi = m$, per cui $\varphi' = 1$ e $\psi' = 0$) allora
$$y'_x = x^m \cdot m\frac{1}{x} = m x^{m-1}.$$

Questi risultati coincidono con quelli già trovati per altra via (§ 3).

Esempio 6°. - Daremo ancora un esempio di derivazione di funzione di struttura complessa

Trovare la derivata della funzione
$$y = \log \operatorname{sen} \sqrt[3]{x}.$$

Ponendo
$$y = \log t$$
si ha
$$t = \operatorname{sen} \sqrt[3]{x}.$$

La y è funzione della t che è funzione della x, perciò
$$y'_x = \frac{1}{\operatorname{sen} \sqrt[3]{x}} t'_x. \qquad [1]$$

$= y'_t \cdot t'_x$ cioè

Per trovare t'_x poniamo
$$t = \operatorname{sen} u, \quad \text{dove } u = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}.$$

La t è funzione di u la quale è funzione di x, perciò $t'_x = t'_u \cdot u'_x$ cioè
$$t'_x = \cos u \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \cos u \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

e, poichè $u = \sqrt[3]{x}$,
$$t'_x = \cos \sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Sostituendo questo valore di t'_x nella [1], avremo

$$y'_x = \frac{1}{3\,\mathrm{sen}\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Dunque in generale si semplifica la derivazione di una funzione di struttura complessa mediante l'introduzione di variabili ausiliarie, riducendo così la derivazione delle funzioni in esame alla derivazione in due o più funzioni molto più semplici.

Osservazione – Se $y = f(z)$, $z = \varphi(x)$, allora y e z sono funzioni della variabile indipendente x. È quindi per definizione

$$[1] \qquad dy = y'_x\, dx$$

$$[2] \qquad dz = z'_x\, dx.$$

Ma $y'_x = y'_z\, z'_x$, quindi la [1] equivale alla

$$dy = y'_z\, z'_x\, dx,$$

che per la [2] si può scrivere

$$dy = y'_z\, dz.$$

Questa formola, che è vera per definizione se la z è la variabile indipendente, è dunque vera, anche se la z non è la variabile indipendente.

§.11 - Quadro delle regole di derivazione.

Funzione	Derivata di 1mo Diff.
$y=\varphi(x)+\psi(x)$	$y'=\varphi'(x)+\psi'(x)$
$y=\varphi(x)\cdot\psi(x)$	$y'=\varphi'(x)\cdot\psi(x)+\varphi(x)\psi'(x)$
$y=\frac{1}{\psi(x)}$	$y'=-\frac{\psi'(x)}{\psi^2(x)}$
$y=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$	$y'=\frac{\psi(x)\varphi'(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\psi^2(x)}$
$y=f(x)$ $\quad x=\varphi(y)$	$y'_x\cdot x'_y=1$
$y=f(t),\ t=\varphi(x)$	$y'_x=y'_t\cdot t'_x=f'(t)\cdot\varphi'(x)$
$y=\varphi(x)^{\psi(x)}$	$y'=\varphi^{\psi}\left(\psi'\log\varphi+\psi\frac{\varphi'}{\varphi}\right)$

§.12 - Quadro delle derivate delle funzioni elementari.

Funzione	Derivata
$y=$ costante	$y'=0$
$y=x^m$	$y'=mx^{m-1}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y=x$	$y'=1$
$y=\operatorname{sen}x$	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	$y'=-\operatorname{sen}x$
$y=\operatorname{tang}x$	$y'=\frac{1}{\cos^2x}$
$y=\log_a e$	$y'=\frac{1}{x}\log_a e$
$y=\cot x$	$y'=-\frac{1}{\operatorname{sen}^2x}$
$y=\log x$ in base e	$y'=\frac{1}{x}$
$y=a^x$	$y'=a^x\log a$
$y=e^x$	$y'=e^x$
$y=\operatorname{arc}{}^{\operatorname{sen}}_{\cos}x$	$y'=\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\operatorname{arc}\operatorname{tang}x$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$

Visto

§. 13. Derivate successive

La derivata $y'=f'(x)$ di una funzione $y=f(x)$ è una funzione di x, laquale può a sua volta ammettere una derivata, che è, se esiste, il

$$\lim_{h=\pm 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}.$$

Essa si indica con y'' o con $f''(x)$ e si chiama derivata seconda di $y=f(x)$. Questa è una nuova funzione di x che a sua volta può ammettere una derivata che si chiama derivata terza di y e si indica con y''' o con $f'''(x)$. E così via.

In generale y può ammettere una derivata n^{esima} o dell'ordine n che si indica con $y^{(n)}$ o con $f^{(n)}(x)$.

$y'=f'(x)$ si chiama anche prima derivata di y.

Capitolo IX. V

Visto definit
Tutto, fino a
[illegible]

Proprietà delle derivate.

§.1 - Funzioni crescenti o decrescenti.

Sia

$$y=f(x)$$

una funzione della variabile x e sia a un punto interno ad un intervallo in cui la funzione è definita.

Se è possibile determinare un numero positivo h, tale che tutti i valori di $f(x)$ in $(a, a+h)$ siano maggiori di $f(a)$ e tutti i valori di $f(x)$ in $(a-h, a)$ sieno minori di $f(a)$, si dice che la funzione $f(x)$ è crescente nel punto a o per $x=a$.

Se invece tutti i valori di $f(x)$ in $(a, a+h)$ sono minori di $f(a)$ e tutti i valori di $f(x)$ in $(a-h, a)$ sono maggiori di $f(a)$, si dice che la funzione $f(x)$ è decrescente nel punto a o per $x=a$.

Che se poi tutti i valori di $f(x)$ in $(a-h, a+h)$ sono eguali ad $f(a)$, si dice che $f(x)$ è costante nel punto a.

Può anche darsi che non esista un tal numero h. Per esempio la funzione

$$f(x)=\begin{cases} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{per } x \gtrless 0 \\ 0 & \text{per } x=0 \end{cases}$$

in un intervallo comunque piccolo $(-h, h)$ che racchiu-da lo zero, non cessa mai di assumere valori in parte positivi, in parte negativi ed in parte nulli, ossia $f(x)$ in $(-h, h)$ prende infinite volte valori maggiori di $f(0)$, infinite volte valori minori di $f(0)$ ed infinite volte valori eguali ad $f(0)$; dunque essa non è nè crescente, nè decrescente, nè costante nel punto $x=0$.

Teorema - Se una funzione, a derivata u-nica, è crescente (decresente) in un punto a, la sua derivata è positiva o nulla (negativa o nulla) in a.

Se per es. la funzione $f(x)$ è crescente nel punto a si ha per h sufficientemente piccolo

$$f(a+h)\gtrless f(a)$$

ossia

$$f(a+h)-f(a)\gtrless 0$$

secondo che $h\gtrless 0$; quindi

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}> 0,$$

qualunque sia il segno di h.

Il primo membro non è che il rapporto incre-mentale della funzione $f(x)$ nel punto a: al ten-dere di h a zero esso ha un limite che è la derivata $f'(a)$ di $f(x)$ nel punto a (derivata che esiste per ipotesi). Ora esso è positivo, e però non può tendere ad un limite negativo; dunque

$$f'(a) \geq 0.$$

Allo stesso modo si dimostra che, se $f(x)$ è decrescente nel punto a, si ha

$$f'(a) \leq 0.$$

Osservazione. Il teorema è invertibile solo in parte, cioè: se $f'(a)>0$, $f(x)$ è crescente nel punto a; se $f'(a)<0$, $f(x)$ è decrescente nel punto a.

Se per es. $f'(a)>0$, ossia

$$\lim_{h=\pm 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} > 0,$$

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ finirà per diventare e restare positivo per ogni h minore di un certo numero positivo δ in valore assoluto; quindi sarà

$$f(a+h)-f(a) \gtrless 0$$

ossia

$$f(a+h) \gtrless f(a)$$

secondo che $h \gtrless 0$. Ciò prova che $f(x)$ è crescente in a.

Il ragionamento pel caso in cui $f'(a)<0$ è analogo.

Se $f'(a)=0$ nulla si può asserire.

Sia per esempio

$$f(x)=\operatorname{sen} x,$$

onde

$$f'(x)=\cos x$$

$x = \frac{\pi}{2}$; $f' \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ ma ...

In ogni punto interno all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos x$ è positivo, quindi $\operatorname{sen} x$ è crescente; per ogni punto interno all'intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos x$ è negativo, quindi $\operatorname{sen} x$ è decrescente; nulla si può asserire per $x = \frac{\pi}{2}$ o per $x = -\frac{\pi}{2}$ (ivi infatti $\operatorname{sen} x$ non è nè crescente, nè decrescente, nè costante)

§.2. Massimi e Minimi.

Il Calcolo differenziale ci dà un metodo generale per cercare i massimi e i minimi che negli studi secondarii si trovavano per tentativi; noi parleremo subito dei principii di questo metodo, riservandoci di darne più tardi le applicazioni.

Definizioni - Si dice che una funzione definita nell'intervallo (a, b) ha un massimo nel punto c interno all'intervallo (a, b) quando si può rinchiudere c entro un segmento (a', b') contenuto in (a, b), in modo tale che il valore che la funzione ha nel punto c non è minore del valore che la funzione ha in tutti gli altri punti del segmento (a', b').

Si dice che una funzione definita nell'intervallo (a, b) ha un minimo in un punto d interno ad (a, b), quando esiste un segmento (a', b') compreso in (a, b) e che rinchiude il punto d, e tale che il valore che la funzione assume nel punto d non è maggiore dei valori che la funzione assume in tutti gli altri punti del segmento (a, b').

Osservazione - Si noti bene di non confondere un punto di massimo od un punto di minimo di una funzione col punto dove essa prende il massimo valore o il minimo valore.

Questi sono relativi all'intervallo (a, b) che si considera, dipendono dall'insieme di tutti i valori che la funzione assume in (a, b), e possono variare se si fa variare l'intervallo spostandone gli estremi. Quelli invece dipendono solo dai valori che la funzione assume nelle vicinanze dei punti ove la funzione ha un massimo o un minimo, e non mutano se si spostano gli estremi dell'intervallo.

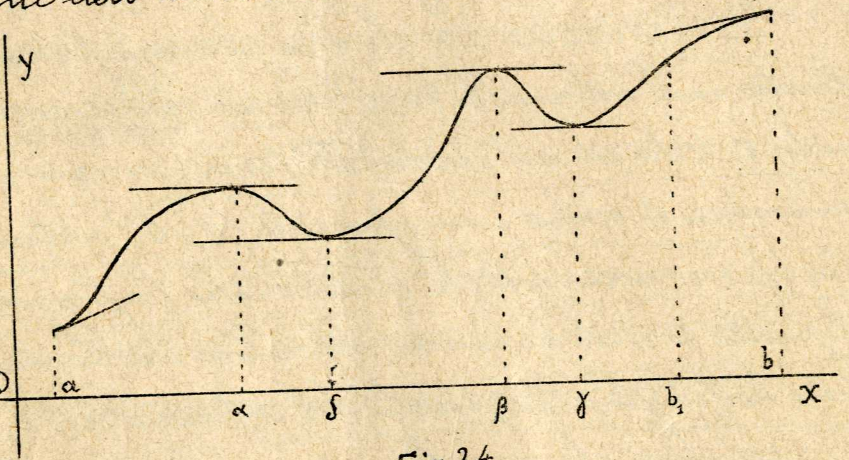


Fig. 24

Nell'intervallo (a, b) la funzione può avere più massimi e più minimi; il valore che la funzione prende in un massimo può essere minore del valore che la funzione prende in un minimo.

Queste osservazioni riescono evidenti esaminan do la figura 24.

La funzione rappresentata geometricamente dalla curva ivi tracciata ha due massimi, uno in α e uno in β, e due minimi in γ e in δ; prende il suo più piccolo valore e il suo più grande valore negli estremi a e b dell'intervallo; il valore che essa prende nel massimo α è minore del valore che prende nel minimo γ.

Restringendo l'intervallo primitivo (a,b) nell'altro (a,b_1), non mutano di posto i massimi α, β ed il minimo γ; invece il massimo valore, che prima era in b, si trasferisce in b_1.

Teorema - Sia $y=f(x)$ una funzione che ammetta derivata in un intervallo (a,b) in cui è definita; se essa ha un massimo o un minimo in un punto c interno all'intervallo (a,b), la sua derivata è nulla nel punto c.

Supponiamo per es. che $f(x)$ abbia un minimo in c. Allora $f'(c)$, che per ipotesi esiste, non può essere nè positiva, nè negativa, perchè in tal caso $f(x)$ sarebbe crescente o decrescente nel punto c (Cfr. §1, osservazione) ciò che è impossibile per la definizione stessa di minimo. Dunque necessariamente $f'(c)=0$.

Analogamente per il massimo.

Osservazione 1ª - Il teorema si rende intuitivo osservando che, se c è punto di massimo e di minimo, la curva rappresentativa della funzione ha nel punto di ascissa $x = c$ la tangente parallela all'asse delle x, onde, giusta il significato geometrico della derivata (p. 170-171) questa è nulla per $x = c$.

Si badi però che questo ragionamento non può tenere il posto della precedente rigorosa dimostrazione analitica, giacchè la rappresentazione geometrica manca per estese classi di funzione (Cfr. l'esempio a p. 66).

Osservazione 2ª - Osserviamo che il teorema non vale per gli estremi dell'intervallo, ai quali del resto non si applica la definizione precedente di punti di massimo o di minimo. Se per esempio la funzione $f(x)$ nell'intervallo (a, b) è sempre crescente, nel punto b si ha il massimo valore della funzione; eppure la tangente alla curva in quel punto non è parallela all'asse delle x, quindi in quel punto la derivata della funzione $f(x)$ non è 0.

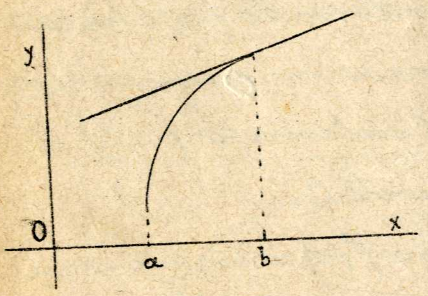


Fig. 25

Osservazione 3ª. Il teorema non sussiste se nel punto C non esiste la derivata. Ciò accade per es. nel punto A della *fig.* 15, pag. 171 che è un punto angolare della curva dove esiste una tangente a destra ed una a sinistra entrambe non parallele all'asse delle x.

Osservazione 4ª - Non sussiste il teorema reciproco.

Ciò risulta evidente dalla *fig.* 26. Nel punto di ascissa α la tangente è parallela all'asse delle x,

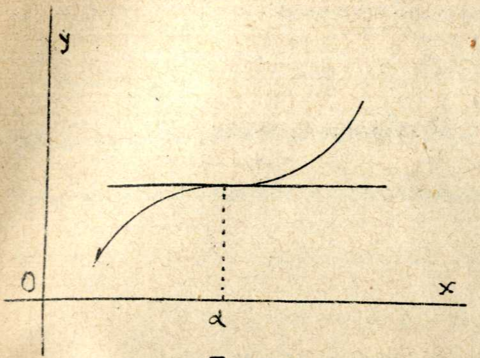


Fig. 26

quindi la derivata della funzione corrispondente è nulla per $x=\alpha$. Ma in α essa non è nè massima, nè minima, ma è crescente.

Ad es. la funzione $f(x)=x^3$ non è nè massima, nè minima per $x=0$, perchè $f(x) \gtrless f(0)$ secondo che $x \gtrless 0$; ciò nonostante $f'(x)=3x^2$ si annulla per $x=0$.

Per fare un'applicazione del teorema dimostrato, risolviamo il

Problema - Data la somma di due numeri x e y trovare (se c'è) il massimo del prodotto xy dei due numeri.

Sia
$$x+y=1\,;$$
allora
$$y=1-x \qquad [1]$$
e
$$f(x)=xy=x\,(1-x)=x-x^2.$$

L'espressione $x-x^2$ ha una derivata finita che è $1-2x$; quindi si potrà avere un massimo quando questa derivata è 0, cioè quando
$$1-2x=0 \qquad \text{o} \qquad x=\frac{1}{2},$$
ed allora, per la [1], anche $y=\frac{1}{2}$, e però $x=y$.

In seguito dimostreremo che effettivamente il prodotto è massimo per $x=y$. Ciò del resto è intuitivo se si osserva che $f'(x)=1-2x$ è positiva per $x<\frac{1}{2}$ ed è negativa per $x>\frac{1}{2}$, quindi (§.1, Osserv.) $f(x)$ è crescente prima di $x=\frac{1}{2}$ ed è decrescente dopo.

Quindi: Il prodotto di due numeri di cui è data la somma, è massimo quando i due numeri sono eguali.

$2+3=5 \quad 2\times 3=6$
$3+3=6 \quad 3\times 3=9$

§.3 - Teorema di Rolle e suoi derivati.

Teorema di Rolle - Se $f(x)$ è una funzione derivabile continua nell'intervallo (a,b), e se $f(a)=f(b)$, cioè se la funzione ha lo stesso valore nei due estremi, allora nell'interno dell'intervallo (a,b) esiste almeno un punto c in cui la derivata è nulla.

Se la funzione in tutti i punti interni al segmento (a,b) conserva sempre il medesimo valore che ha negli estremi, allora la funzione è costante; ma la derivata di una costante è 0, quindi in tal caso tutti i punti di (a,b) sono punti c.

Se la funzione $f(x)$ nei punti interni all'intervallo (a,b) non ha sempre il medesimo valore che ha negli estremi a e b, vuol dire che esiste qualche punto interno all'intervallo in cui la funzione ha un valore più grande o più piccolo di quello che ha negli estremi.

Supponiamo di essere nel primo caso (l'altro trattandosi allo stesso modo). Sappiamo che se una funzione è continua in un certo intervallo, c'è un punto in questo intervallo in cui la funzione assume il suo più grande valore; ora, per l'ipotesi fatta, questo punto è interno ad (a, b), dunque esso è certamente un punto di massimo.

Ne segue, pel teorema precedente, che in questo punto la derivata $f'(x)$ è zero. c. d. d.

Nei trattati di Calcolo, si usa indicare questo punto c interno all'intervallo (a, b) con l'espressione

$$c = a + \theta(b-a),$$

infatti per $\theta = 0$ $c = a$
" $\theta = 1$ $c = b$

dove θ è una frazione minore di 1:

$$0 < \theta < 1.$$

Se si pone $b = a + h$, allora si ha

cioè $(b - a = h)$

$$c = a + \theta h.$$

Useremo sovente questa espressione nel seguito del nostro corso.

Il teorema di Rolle è di massima importanza perchè su esso si basano le dimostrazioni di molti teoremi.

Applicazioni – Sieno $f(x)$, $\varphi(x)$ due funzioni derivabili, definite nell'intervallo (a, b). Il valore della funzione φ nel punto a sia differente dal valore della funzione φ nel punto b, cioè sia

$$\varphi(a) \neq \varphi(b).$$

Costruiamo la funzione

$$F(x) = f(x) + k\varphi(x),$$

dove k è una costante scelta in modo che risulti

$$F(a) = F(b),$$

cioè tale che

$$f(a)+k\varphi(a)=f(b)+k\varphi(b)$$

ossia

$$f(a)-f(b)=k\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right),$$

da cui

$$k=-\frac{f(a)-f(b)}{\varphi(a)-\varphi(b)}.$$

(È lecito scrivere quest'ultima formola, perchè per ipotesi $\varphi(a)-\varphi(b)$ non è 0). Avremo quindi

$$F(x)=f(x)-\frac{f(a)-f(b)}{\varphi(a)-\varphi(b)}\cdot\varphi(x).$$

La $F(x)$ è una funzione derivabile, tali essendo $f(x)$ e $\varphi(x)$ per ipotesi, inoltre essa ha il medesimo valore nei punti a e b, perciò, per il teorema di Rolle, esiste almeno un punto interno all'intervallo (a,b) in cui la derivata della funzione $F(x)$ è 0; questo punto sarà

$$c=a+\theta(b-a)$$

dove

$$0<\theta<1.$$

Il punto c sarà quindi tale che

$$F'(c)=0,$$

Teorema di Cauch[y]

per cui si avrà

$$\boxed{f'(c)=\frac{f(a)-f(b)}{\varphi(a)-\varphi(b)}\,\varphi'(c).} \qquad [1]$$

Questa formola fondamentale costituisce il cosidetto teorema della media.

Se si pone $\varphi(x)=x$, allora $\varphi'(c)=1$ e la [1] diventa

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a};$$

e se
$$b=a+h \qquad (b-a=h)$$

allora
$$f'(c)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

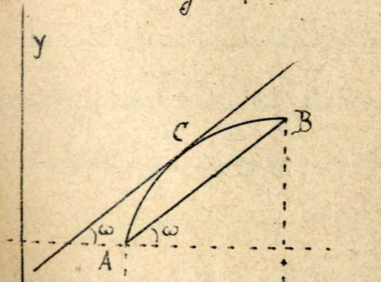
ossia
$$f'(a+\theta h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad [2].$$

Nell'ipotesi che la funzione $f(x)$ sia derivabile, allora esiste una frazione θ tale che valga la $\boxed{2}$; se $f(a)=$ $=f(a+h)$, il secondo membro della $\boxed{2}$ è 0, e ciò vuol dire che esiste almeno un punto $a+\theta h$ in cui la derivata nella funzione $f(x)$ è 0. Si ricade così nel teorema di Rolle da cui siamo partiti.

Questa formola si può rendere intuitiva con la seguente considerazione geometrica.

Nella fig. 27 l'espressione $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ rappresenta la tangente dell'angolo ω ed $f'(a+\theta h)$ è la tangente dell'angolo che la tangente alla curva nel punto di ascissa $a+\theta h$ fa con l'asse delle x; la $\boxed{2}$ ci dice che esiste un certo punto C della curva, tale che la tangente in quel punto alla curva forma con l'asse delle x un angolo eguale a ω, o, in altre parole, tale che in esso la tangente alla curva è parallela alla corda AB.

Fig. 27



Poiché $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ è un rapporto incrementale ed $f'(a+\theta h)$ è la derivata in un punto interno all'intervallo, la [2] si può anche interpretare così: Il rapporto incrementale di una funzione definita in un certo intervallo non è altro che la derivata della funzione in un punto interno a quell'intervallo.

La formola precedente si può anche interpretare in altri modi. Daremo per es. un'interpretazione meccanica. Se $f(x)$ è lo spazio percorso da un punto al tempo x, allora il primo membro della formola precedente, cioè $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ è la velocità media nell'intervallo di tempo dal tempo a al tempo $a+h$ (pag. 163), mentre $f'(a+\theta h)$ è la velocità del nostro punto all'istante intermedio $a+\theta h$ (pag. 164). La nostra formola ci dice che la velocità media di un punto mobile in un intervallo di tempo è uguale alla velocità del punto in un qualche istante intermedio. E questo è un fatto intuitivo: Se in un viaggio la velocità media di un treno è stata per es. di 50 Km. all'ora, ci sarà stato nel viaggio almeno un istante, in cui il treno correva proprio alla velocità di 50 Km. l'ora.

Dalla precedente formola si può trarre anche un'altra conclusione importante:

Se una funzione $f(x)$ in un dato intervallo possiede una derivata che non diventa in alcun punto grande a piacere ossia che è inferiore (~~in~~ ogni punto dell'intervallo) in valore assoluto a una costante H, la funzione è continua nell'intervallo.

Infatti, se a è un punto qualsiasi dell'intervallo, ed ε è un numero piccolo a piacere, e se $|h| < \frac{\varepsilon}{H}$, allora, dalla [2], si ha

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right| = \left| f'(a+\theta h)\right| < H$$

ossia $|f(a+h)-f(a)| < |H|\,|h| < H\frac{\varepsilon}{H} = \varepsilon.$

Ossia: la differenza dei valori della funzione in due punti a, $a+h$ dell'intervallo, che distino l'uno dall'altro per meno di $\frac{\varepsilon}{H}$, è in valore assoluto inferiore a ε.

È soddisfatta dunque la condizione affinchè $f(x)$ sia continua nell'intervallo.

Vediamo un'altra importante conseguenza della formola [2].

Supponiamo che la derivata di una funzione $f(x)$ sia sempre 0 in tutto l'intervallo a, $a+h$: vogliamo vedere di che natura è la funzione $f(x)$. Prendiamo due punti dentro l'intervallo $(a, a+h)$, e applichiamo la formula [2]. Poichè il secondo membro di quella formola è per ipotesi eguale a 0, essa ci dice che $f(a+h) = f(a)$, cioè: se dentro un certo intervallo la derivata di una funzione è sempre eguale a 0, presi due punti qualsiasi interni all'intervallo, in essi la funzione ha sempre lo stesso valore, cioè la funzione è costante in quell'intervallo. Questo teorema è l'inverso di un teorema già dimostrato.

Se due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ hanno la stessa derivata, la funzione $\varphi(x) - \psi(x)$, che ha per derivata la differenza delle derivate delle funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, ha per derivata 0, quindi $\varphi(x) - \psi(x)$ è una funzione costante. Quindi: Se due funzioni hanno la stessa derivata, esse differiscono solo per una costante

$$\varphi(x) = \psi(x) + cost.$$

(Si ha così l'inverso del teorema già visto: aggiungendo una costante a una funzione, la derivata non cambia).

Che la funzione $F(x)$, avente per derivata $f(x)$, sia determinata a meno di una costante additiva risulta intuitivamente da altre considerazioni.

Così per es. se $f(x)$ è la velocità di un punto, e $F(x)$ è la sua distanza dall'origine all'istante x, la $F(x)$ non è determinata quando sia data $f(x)$. Per conoscere la posizione di un punto non basta dare la sua velocità a ogni istante; bisogna anche dare la sua posizione iniziale ossia, per determinare $F(x)$ non basta conoscere $f(x)$, ma bisogna anche conoscere il valore di $F(x)$ al momento in cui il moto è cominciato.

Così, se $F(x)$ è la quantità di calore data a un corpo per portarlo alla temperatura x, e se $f(x)$ ne è il calorico specifico, per determinare $F(x)$ non basta dare $f(x)$, ma bisogna anche sapere da quale temperatura il corpo è partito, ossia sapere per qual valore di x

la $F(x)$ è nulla.

Se dunque è data la derivata $f(x)$ di $F(x)$, la funzione $F(x)$ è nota a meno di una costante additiva, ossia se $\phi(x)$ ha ancora $f(x)$ per derivata è

$$\phi(x) = F(x) + c,$$

dove c è una costante.

Se ne deduce, se x_1 e x_2 sono due valori di x,

$$\phi(x_2) - \phi(x_1) = F(x_2) - F(x_1).$$

Ossia: Se ϕ, F hanno la stessa derivata $f(x)$, la differenza dei valori della F in due punti x_1, x_2 è uguale alla differenza analoga per la ϕ.

Il valore di questa differenza dipende perciò soltanto da $f(x)$.

Nei due esempi precedenti, questa differenza rappresenta rispettivamente lo spazio percorso dal punto mobile dall'istante x_1 all'istante x_2, e la quantità di calore data al corpo per innalzarne la temperatura da x_1 a x_2.