da una legge elementare per giungere ad una legge generale più complessa.

Capitolo II

Teoremi e metodi di integrazione.

§ 1 – Prime regole.

1). – Teorema di integrazione per somma.

Questo teorema non è che il teorema reciproco di quello della derivata di una somma di funzioni (in numero finito).

Se $\varphi_1(x)$ è una funzione continua, che ha per integrale la funzione $F_1(x)$, e se $\varphi_2(x)$ è pure una funzione continua definita nel medesimo intervallo di $\varphi_1(x)$, ed ha per integrale $F_2(x)$, la funzione $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ ha per integrale la funzione $F_1(x)+F_2(x)$.

Basta infatti osservare che

$$\left(F_1(x)+F_2(x)\right)' = \varphi_1(x)+\varphi_2(x).$$

Quindi: L'integrale della somma di un numero finito di funzioni è dato dalla somma degli integrali delle singole funzioni.

Es: Trovare l'integrale

$$\int(\operatorname{sen} x+\cos x)\,dx.$$

Avremo:

$$\int (\operatorname{sen} x + \cos x)\, dx = \int \operatorname{sen} x\, dx + \int \cos x\, dx = -\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

Osservazione. — L'integrale definito preso tra i limiti a e b della somma $(\varphi_1(x) + \varphi_2(x))$ è uguale alla somma dei rispettivi integrali definiti, presi tra i limiti a e b delle due funzioni $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$.

2). — **Teorema di integrazione per sostituzione**

Supponiamo di dover calcolare

$$y = \int f(x)\, dx.$$

Poniamo $x = G(z)$, ossia esprimiamo la variabile x mediante una funzione di una nuova variabile z; e supponiamo che $G(z)$ abbia una derivata $G'(z)$ finita e continua, allora ricordando che

$$y'_z = y'_x \cdot x'_z$$

ossia che

$$y'_z = f(x) \cdot G'(z)$$

per definizione di integrale si avrà:

$$y = \int f(x)\, G'(z)\, dz$$

e anche sostituendo ad x il suo valore $G(z)$

$$\boxed{y = \int f(x)\, dx = \int f\left[G(z)\right] G'(z)\, dz.}$$

Questa formula esprime il metodo di integrazione per sostituzione. Dal 2º membro si passa al terz. sostituendo in luogo di x il suo valore $G(z)$, ed in luogo di dx pure il suo valore, giacchè è appunto

$$dx = G'(z)\, dz.$$

Da quanto precede si scorge che l'integrazione del differenziale $f(x)\,dx$ è ridotta a quella del differenziale $f\left[G(z)\right]G'(z)\,dz$, il quale, presa convenientemente la funzione $x = G(z)$, potrà talvolta riuscire più agevolmente integrabile del differenziale $f(x)\,dx$.

Naturalmente non possono stabilirsi regole per riconoscere quale sia la sostituzione da farsi, ed il successo dipenderà dalla maggiore o minore pratica che si ha in calcoli di tal genere.

Talvolta è invece più comodo calcolare l'integrale $\int f(x)\,dx$ anzichè lo $\int f(G)\,G'(z)\,dz$. E in questo caso la nostra dimostrazione serve a ridurre al primo questo secondo integrale.

Osserviamo ancora che se per es. col nostro metodo riduciamo il calcolo di $\int f(x)\,dx$ al calcolo di $\int f(G)\,G'(z)\,dz$ allora noi otteniamo l'integrale espresso non più come funzione di x, ma della variabile ausiliaria z.

Perchè la sostituzione riesca utile cioè si possa avere y espresso come funzione della x, accorrerà che l'equazione

$$x = G(z)$$

sia risolubile rispetto a z, in modo univoco cioè che se ne possa dedurre

$$z = H(x)$$

ove H è funzione di x.

e allora $\int_a^b F(x) = \int_\alpha^\beta F(G(z))G'(z)$

ove α, β sono i valori che z a[ssume] per $x = a$, $x = b$.

Osservazione - Se si ha da calcolare

$$\int k\,\varphi(x)\,dx$$

dove k è una costante si può portare fuori la costante K dal segno $\int$, così

$$\int K\varphi(x)\,dx = K\int\varphi(x)\,dx + C$$

cioè per trovare l'integrale di una funzione moltiplicata per una costante, basta moltiplicare per quella costante l'integrale della funzione.

Questo non è che l'inverso del noto teorema: la derivata di $KF(x)$, dove K è costante, è $KF'(x)$.

Esempi. - Calcolare lo

$$\int (x+a)^m\,dx \qquad (m \neq 1).$$

Poniamo $\quad x+a = z$

donde $\quad x = z-a \qquad (1)$

e quindi $\quad dx = dz \qquad (2)$.

Come si vede la relazione tra x e z è biunivoca.

Se nell'integrale dato poniamo al posto di x e di dx i valori dati dalle (1), (2)

$$\int (x+a)^m\,dx = \int z^m\,dz = \frac{z^{m+1}}{m+1} + C$$

e sostituendo di nuovo a z il suo valore

$$\int (x+a)^m\,dx = \frac{(x+a)^{m+1}}{m+1} + C.$$

Per $m = -1$ si otterrà

$$\int (x+a)^m\,dx = \int \frac{1}{x+a}\,dx = \int \frac{1}{z}\,dz = \log. z + C = \log(x+a) + C$$

quindi:

$$\int (x+a)^m\,dx = \begin{cases} \dfrac{(x+a)^{m+1}}{m+1} + C & (\text{se } m \geq 1) \\ \log(x+a) + C & (\text{se } m = -1) \end{cases}$$

Esempio - Sia da calcolare

$$\int \frac{2z\,dz}{1+z^2}$$

Posto

$$x = \mathcal{G}(z) = 1 + z^2,$$

vede che il nostro integrale si può scrivere

$$\int \frac{\mathcal{G}'(z)}{\mathcal{G}(z)} dz;$$

esso è quindi eguale a

$$\int \frac{dx}{x} = \log x = \log (1 + z^2)$$

Esempio. — Così pure più in generale

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int \frac{d\varphi}{\varphi} = \log \varphi(x).$$

se φ è funzione continua della x.

Se si tratta di un integrale definito si ha:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\mathcal{G})\, \mathcal{G}'(z)\, dz$$

dove α e β sono quei valori di z, che corrispondono ai valori $a\,b$ della x.

Calcolare lo

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2 + a^2}}$$

Poniamo $x = az$ e quindi $z = \dfrac{x}{a}$

Essendo biunivoca la relazione tra x e z ed essendo $dx = a\,dz$; si ottiene:

(se $a \neq 0$)

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int \frac{a\,dz}{a^2(z^2+1)} = \frac{1}{a} \int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} z + C$$

e infine sostituendo a z il suo valore $\dfrac{x}{a}$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x}{a}\right) + C$$

3). – Teorema di integrazione per parti.

Il teorema di integrazione per parti non è altro che una differente enunciazione della regola di derivazione del prodotto di due funzioni.

Supponiamo che u e v siano due funzioni continue e derivabili insieme alle loro derivate prime. Poichè

$$(uv)' = u'v + uv'$$

per definizione di integrale otteniamo:

$$uv = \int (u'v + uv')\,dx.$$

Ed essendo l'integrale di una somma uguale alla somma degli integrali è

$$uv = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx.$$

Donde ricaviamo

$$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx.$$

Posto $u' = \varphi$, sarà $u = \int \varphi\,dx$. E si ha il:

Teorema. – Se φ è una funzione continua che ha per integrale u, e ψ è una funzione continua che ha per derivata la funzione ψ' pure continua, allora l'integrale del prodotto $\varphi\psi$ è uguale al prodotto del secondo fattore ψ per l'integrale u del primo diminuito dell'integrale del prodotto che si ottiene moltiplicando l'integrale del primo fattore per la derivata del secondo fattore.

Esempio. – Trovare

$$\int \log x\,dx.$$

Si può scrivere

$$\int \log x\,dx = \int 1.\log.x\,dx$$

e ponendo.

$$\varphi = 1 \qquad \text{è} \qquad u = x$$
$$\psi = \log x \qquad\qquad \psi' = \frac{1}{x}$$

quindi:

$$\int 1.\log x\, dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x\left(\log x - 1\right) + C$$

Esempio. – Trovare

$$\int \operatorname{arc\,tg} x \; dx.$$

Possiamo scrivere

$$\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx = \int 1.\operatorname{arc\,tg} x, dx:$$

posto

$$\varphi = 1 \qquad \text{è} \qquad \begin{cases} u = x \\ \psi = \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$$
$$\psi = \operatorname{arc\,tg} x$$

Quindi

$$\int 1.\operatorname{arc\,tg} x\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Moltiplichiamo e dividiamo l'integrale del secondo membro per 2

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx$$
$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) + C$$
$$= x \operatorname{arc\,tg} x - \log\sqrt{1+x^2} + C$$

§ 2. – Integrazione per serie.

1). – Quando una funzione non si può integrare con nessuno dei metodi esposti, allora generalmente ci si limita a calcolare l'integrale solo per approssimazione.

Noi abbiamo già indicati alcuni metodi di calcolo approssimato: altri metodi si ottengono cercando di sviluppare la funzione da integrarsi in una serie totalmente convergente ed applicando poi il seguente teorema:

Se in un dato intervallo finito (ab) la serie di funzioni continue

$$f(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) \ldots\ldots \qquad (1)$$

è totalmente convergente, allora è

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_0(x)\,dx + \int_a^b u_1(x)\,dx + \ldots \qquad (2).$$

Giacchè la serie delle u è totalmente convergente sarà possibile trovare delle costanti M tali che

$$|u_0| \leq M_0$$
$$|u_1| \leq M_1$$
$$|u_2| \leq M_2 \ldots\ldots$$

e che la serie

$$M = M_0 + M_1 + M_2 + \ldots\ldots$$

sia convergente. - Intanto si osservi che per un noto teorema la funzione $f(x)$ definita da (1) è continua, e quindi possiede integrali.

Per dimostrare la (2) basterà dimostrare che la somma dei primi n termini della serie del suo secondo membro tende, quando n tende all'infinito all' $\int_a^b f(x)\,dx$, ossia che è

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \left[\int_a^b u_0(x)\,dx + \int_a^b u_1(x)\,dx + \ldots \right]$$

o anche

$$\lim_{n=\infty} \left[\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b u_0\,dx - \int_a^b u_1\,dx \ldots\ldots \int_a^b u_n\,dx \right] = 0.$$

Ed infine per il noto teorema sulla somma di più integrali

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \left[f(x) \cancel{dx} - u_0(x) - u_1(x) - u_2(x) - \dots - u_n(x) \right] dx = 0$$

Osserviamo che per la (1) è

$$f(x) - u_0 - u_1 - \dots - u_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

e quindi anche

$$\left| f(x) - u_0 - u_1 - \dots - u_n \right| = \left| u_{n+1} + u_{n+2} + \dots \right|$$

Ma per le ipotesi fatte è

$$\left| u_{n+1} \right| \leq M_{n+1} \; ; \quad \left| u_{n+2} \right| \leq M_{n+2} \dots$$

quindi sarà anche

$$\left| f(x) - u_0 - u_1 - \dots - u_n \right| \leq M_{n+1} + M_{n+2} + \dots$$

Poichè la funzione al primo membro, che è quella di cui si vuol calcolare l'integrale è minore della quantità del secondo, sarà pure (se $a < b$)

$$\int_a^b \left[f(x) - u_0 - u_1 - \dots - u_n \right] dx \leq \int_a^b \left(M_{n+1} + M_{n+2} + \dots \right) dx.$$

Basterà quindi dimostrare che

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \left(M_{n+1} + \dots \right) dx = 0$$

per aver dimostrato il nostro teorema.

Ora giacchè è

$$M - (M_0 + M_1 + M_2 + \dots + M_n) = M_{n+1} + M_{n+2} + \dots$$

e per definizione M è il $\lim\limits_{n=\infty} (M_0 + M_1 + \dots + M_n)$, quando n è sufficientemente grande la differenza $M - (M_0 + M_1 + \dots + M_n)$ è sufficientemente piccola, cioè è possibile determinare un numero n tale che la somma $M_{n+1} + M_{n+2} + \dots$ sia minore di un numero ε piccolo ad arbitrio.

Quindi

$$\int_a^b \left(M_{n+1} + M_{n+2} + \dots \right) dx < \int_a^b \varepsilon \, dx = \varepsilon b - \varepsilon a = \varepsilon (b - a)$$

ed essendo ε piccola ad arbitrio, sarà:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \left(M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots \right) = 0$$

c. d. d.

Osservazione notevolissima che si deduce immediatamente dal precedente teorema è la seguente:

Qualora si sappia sviluppare una funzione $f(x)$ in una serie di altre funzioni $u_0(x)$, $u_1(x)$.... totalmente convergente nell'intervallo (ab), e i cui infiniti termini hanno integrali noti o facilmente calcolabili: si può avere un valore approssimato dello $\int_a^b f(x)\,dx$ calcolando la somma dei primi n termini della serie formata cogli integrali delle funzioni $u(x)$, se n è abbastanza grande.

2). - Tale metodo trova un importante applicazione nel calcolo dei logaritmi.

Ricordando che $\log(x) = \int \frac{1}{x} + C$, si vede come la ricerca di un logaritmo si riduca al calcolo di un integrale.

Vediamo quindi come si possa calcolare $\int \frac{1}{x}\,dx$ applicando il principio or ora esposto.

Ponendo $x = a + z$ ($a = cost$): il nostro integrale si trasforma in $\int \frac{1}{a+z}\,dz$.

Sviluppiamo ora $\frac{1}{a+z}$ in una serie totalmente convergente in un certo intervallo. Senza ricorrere allo sviluppo mediante la formula di Taylor, tale scomposizione ci è suggerita dall'algebra elementare. Sappiamo infatti che se t è un numero compreso tra -1 e $+1$, cioè se è $|t| < 1$, la progressione geometrica decrescente

$$1+t+t^2+t^3+\dots\dots\dots$$

è una serie di potenze convergente verso il valore $\frac{1}{1-t}$ e quindi per un noto teorema sulle serie, totalmente convergente in ogni intervallo tutto interno all'intervallo $(-1+1)$, e che non ne contenga gli estremi $+1-1$.

Nel nostro caso se ne deduce, ponendo $t=-\frac{z}{a}$

$$\frac{1}{a+z}=\frac{1}{a}\,\frac{1}{1+\left(\frac{z}{a}\right)}=\frac{1}{a}\left[1-\frac{z}{a}+\left(\frac{z}{a}\right)^2-\left(\frac{z}{a}\right)^3+\dots\right].$$

Dove la serie del terzo membro è totalmente convergente p. es. in ogni intervallo dal punto 0 a un punto z, tale che $\frac{|z|}{|a|}<1$, ossia che $|z|<|a|$ - Essendo poi:

$$\int_0^z \frac{1}{a+z}\,dz=\log(a+z)-\log a$$

potremo scrivere per il teorema precedente sull'integrale di una serie totalmente convergente

$$\log(a+z)-\log a=\frac{1}{a}\left[\int_0^z dz-\int_0^z\frac{z}{a}\,dz+\int_0^z\left(\frac{z}{a}\right)^2dz-\dots\right] \quad (1)$$

Ed essendo

$$\int_0^z dz=z$$

$$\int_0^z\frac{z}{a}\,dz=\frac{z^2}{2a}$$

$$\int_0^z\left(\frac{z}{a}\right)^2dz=\frac{z^3}{3a^2}$$

---

la (1) potrà anche scriversi

$$\log(a+z)-\log.a=\frac{1}{a}\left(z-\frac{z^2}{2a}+\frac{z^3}{3a^2}-\frac{z^4}{4a^3}+\dots\right)$$

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x 1 - x + x^2 - x^3 \ldots = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Questa formola vale per $|z| < |a|$

Ponendo x al posto di z, e facendo $a = 1$, se ne deduce che per $|x| < 1$ è

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots \qquad (2)$$

Questa formola ripetiamolo è valida per $|x|<1$ cioè per $-1 < x < 1$. La serie precedente dà i logaritmi di tutti i numeri compresi tra zero e due; se volessimo calcolare col suo mezzo anche il logaritmo di un qualsiasi numero $K \geq 2$, si osserverebbe che

$$\log k = -\log\left(\frac{1}{k}\right). \qquad (\alpha)$$

Ora, essendo $\frac{1}{k} < \frac{1}{2}$; il suo logaritmo si calcola con la serie precedente, e dalla (α) se ne deduce poi il logaritmo K. Ma possiamo dedurre dalla (2) una serie assai più adatta ai calcoli pratici.

Cambiamo nella (2) x con $-x$, si ha

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots\ldots \qquad (3)$$

Sottraendo la (3) dalla (2) ed osservando che

$$\log(1+x) - \log(1-x) = \log\frac{1+x}{1-x}$$

avremo

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots\right\}$$

la quale sussiste per $|x| < 1$.

Questa formola è assai adatta ai calcoli pratici; ponendo in essa $x = \frac{m}{n}$ ove è $|m| < |n|$, avremo:

$$\log\frac{1+\frac{m}{n}}{1-\frac{m}{n}} = \log\frac{n+m}{n-m} = 2\left\{\frac{m}{n} + \frac{1}{3}\left(\frac{m}{n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{m}{n}\right)^5 + \ldots\right\}$$

e se infine poniamo

$$\frac{1+\frac{m}{n}}{1-\frac{m}{n}} = \frac{h}{K}$$

$$\frac{m+n}{n-m} = \frac{h}{K}$$

$$K(m+n) = h(n-m)$$

$$Km + Kn - hn + hm =$$

da cui

$$(K-h)\,n = -(K+h)\,m ; \quad \frac{m}{n} = \frac{h-K}{h+K}$$

$$(K-h)n = -(K+h)m$$

$$\frac{h-K}{h+K} = \frac{m}{n}$$

avremo infine

$$\log\frac{h}{k} = 2\left\{\frac{h-K}{h+K} + \frac{1}{3}\left(\frac{h-K}{h+K}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h-K}{h+K}\right)^5 + \cdots\right\}; \qquad [4]$$

la quale vale se $|x| = \left|\frac{m}{n}\right| = \left|\frac{h-K}{h+K}\right| < 1$, per es. se h, K sono positivi. La (4) ci dà il log. di una frazione qualsiasi; quindi di ogni numero, che si può sempre mettere sotto forma di frazione.

Applichiamo la formola precedente al calcolo di log. 2.

Se poniamo $h = 2$, $K = 1$ sarà $\frac{h-K}{h+K} = \frac{1}{3} < 1$, e dalla (4) avremo

$$\log 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \cdots\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \cdots\right]$$

Questa serie converge abbastanza rapidamente.

Se per es. limitiamo la serie ai primi 8 termini cioè assumiamo:

$$\log 2 = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3.3^2} + \frac{1}{5.3^4} + \frac{1}{7.3^6} + \cdots + \frac{1}{15.3^{14}}\right)$$

noi commettiamo l'errore (in difetto)

$$\varepsilon = \frac{2}{3}\left\{ \frac{1}{17.3^{16}} + \frac{1}{19.3^{18}} + \ldots\ldots \right\} =$$

$$= \frac{2}{3.3^{16}}\left\{ \frac{1}{17} + \frac{1}{19.3^2} + \frac{1}{21.3^4} + \ldots \right\} < \frac{2}{3^{17}}\left\{ \frac{1}{17} + \frac{1}{17.3^2} + \frac{1}{17.3^4} + \ldots \right\} =$$

$$= \frac{2}{3^{17}.17}\left\{ 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \ldots\ldots \right\} = \frac{2}{3^{17}.17} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^2}} =$$

$$= \frac{2}{3^{17}.17} \cdot \frac{3^2}{8} = \frac{1}{3^{15}.17.4} = \frac{1}{975725676} = 0{,}000000001\ldots$$

ossia il nostro logaritmo sarebbe calcolato con un errore minore di 0,000.000.001; ossia con un errore piccolissimo.

Cerchiamo il log 5

Poniamo $h = 5$ e $K = 4$; avremo

$$\log.\left(4\frac{5}{4}\right) = \log.4 + \log.\frac{5}{4}.$$

Ed essendo $\log.4 = \log 2^2 = 2\log 2$, basterà calcolare $\log\frac{5}{4}$. Essendo $\frac{h-k}{h+k} = \frac{1}{9} < 1$ potremo applicare la (4) e cioè

$$\log\frac{5}{4} = 2\left\{ \frac{1}{9} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5 + \ldots\ldots \right\}$$

Questa serie è anche più rapidamente convergente della precedente, come si potrebbe far vedere con facile calcolo, del tutto analogo a quello seguito per il log. 2.

Tutti i logaritmi dati dalla formola (4) sono come abbiamo già osservato in base e; volendo trovare i logaritmi in base 10 basterà ricordare che

$$\log_{10} a = \log_{10} e.\log_e a = \frac{\log_e a}{\log_e 10}$$

e che: $\log_e 10 = \log(2.5) = \log_e 2 + \log_e 5$ precedentemente calcolati.

Indichiamo con M la costante $\frac{1}{\log_e 10}$ che si suole chiamare modulo del sistema in base a.

In particolare il modulo del sistema dei logaritmi

$(a = 10)$ è

$$M = 0,434294981\ldots$$

la (4) diventerà quindi:

$$\log_{10}\frac{h}{k} = 2M\left\{\frac{h-k}{h+k} + \frac{1}{3}\left(\frac{h-k}{h+k}\right)^3 + \ldots\ldots\right\} \quad (5)$$

Vediamo per es. come si potrebbe costruire una tavola di logaritmi di 5 cifre, cioè compresi tra 10.000 e 100.000.

Supporremo la base 10. Sappiamo che

$$\log_{10} 10.000 = \log_{10} 10^4 = 4.$$

Calcoliamo il $\log_{10} 10.001$; osserviamo che

$$\log 10001 = \log_{10}\left(10.000\,\frac{10.001}{10000}\right) =$$

$$= \log_{10} 10000 + \log_{10}\frac{10001}{10000} =$$

$$= 4 + \log_{10}\frac{10001}{10000}.$$

La parte intera 4, nelle tavole moderne non è riportata; onde è bene osservare che la nostra tavola non conterrebbe in realtà i logaritmi dei numeri di 5 cifre, ma di essi numeri divisi per 10000. Applicando la serie (5) al nostro caso avremo:

$$\log\frac{10001}{10000} = 2M\left\{\frac{1}{20001} + \frac{1}{3}\frac{1}{(20001)^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(20001)^5} + \ldots\right\}.$$

Tenendo conto solo del solo primo termine $\frac{2M}{20001}$ l'errore che commetteremo sarà:

$$2M\left\{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(20001)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(20001)^5}+\cdots\right\}<\frac{2M}{3}\left\{\frac{1}{(20000)^3}+\frac{1}{(20000)^5}+\cdots\right\}=$$

$$=\frac{2M}{3}\,\frac{1}{(20000)^3}\left\{1+\frac{1}{(20000)^2}+\frac{1}{(20000)^4}+\cdots\right\}=\frac{2M}{3}\,\frac{1}{8\,10^{12}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{(20000)^2}}$$

Come si vede la serie è rapidissimamente convergente.

Nello stesso modo si potrebbero calcolare i logaritmi di tutti gli altri numeri di 5 cifre; come controllo all'esattezza dei calcoli potranno servire tutti i teoremi che riguardano il logaritmo di un prodotto, di un quoziente, di una potenza, di una radice.

3). Il principio dello sviluppo in serie di una funzione, di cui si vuol calcolare l'integrale è stato pure utilmente applicato nella costruzione delle tavole trigonometriche.

Noi per ora ci limiteremo al problema di cercare l'arco di cui sia nota una funzione trigonometrica e precisamente ci proporremo di calcolare **arc tg x**; supposto nota la tang x.

Cerchiamo una serie che ci dia il valore della funzione arc tg x. È bene subito osservare che essendo infiniti gli archi che hanno una determinata tangente (i quali differiscono gli uni dagli altri per multipli di π) noi considereremo solo il caso di angoli compresi tra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$. Sappiamo intanto che in questa ipotesi

$$\operatorname{arc\,tg} x=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}$$

Per calcolare arc tg x basterà quindi sviluppare in serie atta ai calcoli pratici $\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$

Rammentiamo che è

$$1-x+x^2-x^3+\ldots\ldots = \frac{1}{1+x}$$

per $|x|<1$. E quindi anche se ad x sostituiamo x^2

$$1-x^2+x^4-x^6+x^8-\ldots\ldots = \frac{1}{1+x^2}$$

e perciò pure sarà

$$\text{arc tg}\, x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x \left(1-x^2+x^4-x^6+\ldots\right) dx$$

ed essendo l'integrale di una serie totalmente convergente uguale alla serie degli integrali

$$\text{arc tg}\, x = \int_0^x dx - \int_0^x x^2 dx + \int_0^x x^4 dx \ldots$$

e sostituendo agli integrali definiti del 2° membro i loro valori

$$\text{arc tg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots\ldots \qquad (1)$$

la quale è la formola che ci dà arc tg x.

È bene osservare che la formola precedente vale per $|x|<1$ e quindi per arc tg $x <$ arc tg 1 cioè per angoli compresi tra 0 e $\frac{\pi}{4}$.

Si potrebbe dimostrare che la serie precedente vale anche per il caso di $x=1$, ed allora osservando che arc tg $1 = \frac{\pi}{4}$, la (1) potrebbe servirci al calcolo di π.

La formula però non gioverebbe perchè la serie (1) è lentissimamente convergente, cioè occorrerebbe tener conto di un gran numero di termini per avere una sufficiente approssimazione.

Una serie più comoda si ha osservando che

$$\frac{\pi}{6} = \text{arc tg}\, \frac{1}{\sqrt{3}}$$

e che quindi:

$$\pi = \frac{6}{\sqrt{3}} \left\{ 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots \right\}.$$

Un metodo ancor più comodo per il calcolo di π è il seguente:

Consideriamo quell'angolo α la cui tangente è uguale ad $\frac{1}{5}$. Allora per una nota formula di trigonometria sarà

$$\text{tang.}\, 2\alpha = \frac{2\,\text{tang}\,\alpha}{1 - \text{tang}^2\alpha} = \frac{5}{12}$$

e analogamente

$$\text{tang}\, 4\alpha = \frac{2\,\text{tang}\,2\alpha}{1 - \text{tang}^2 2\alpha} = 1 + \frac{1}{119}$$

da cui si deduce che essendo $\text{tang}\, 4\alpha > 1$ sarà (indicando con β un arco positivo)

$$4\alpha = \frac{\pi}{4} + \beta$$

$$\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta$$

Ricordando che $\text{tag.}\,\alpha = \frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ e che

$$\text{tang}\,\beta = \text{tang}\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\text{tang}\,4\alpha - \text{tang}\,\frac{\pi}{4}}{1 + \text{tang}\,4\alpha\ \text{tang}\,\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{119} - 1}{1 + \left(1 + \frac{1}{119}\right)} = \frac{1}{239}$$

avremo infine

$$\frac{\pi}{4} = 4\ \text{arc tg}\,\frac{2}{10} - \text{arc tg}\,\frac{1}{239}$$

e applicando la (1) al calcolo di arc tg $\frac{2}{10}$ e arc tg $\frac{1}{239}$, avremo finalmente

$$\frac{\pi}{4}=4\left\{\frac{2}{10}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2^3}{1000}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2^5}{100000}\cdots\right\}-\left\{\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\frac{1}{(239)^3}+\frac{1}{(239)^5}\cdots\right\}.$$

La quale è appunto la formula che ha servito al calcolo più approssimato di π.

§ 3 – Applicazione alla formola di Taylor.

Come per gli sviluppi in serie di $\log(1+x)$ e di arc tg x, il calcolo integrale può servire allo studio generale della serie di Taylor.

Posto

$$f(x)=f(z)+(x-z)f'(z)+\cdots\cdots+\frac{(x-z)^n}{\underline{|n}}f^{(n)}(z)+R_n,$$

si consideri

$$R_n=f(x)-f(z)-(x-z)f'(z)-\cdots\cdots\frac{(x-z)^n}{\underline{|n}}f^{(n)}(z)$$

come funzione di z. Sarà

$$\frac{dR_n}{dz}=-f'(z)-(x-z)f''(z)-\cdots\cdots-\frac{(x-z)^n}{\underline{|n}}f^{(n+1)}(z)$$

$$+f'(z)-(x-z)f''(z)+\cdots\cdots+\frac{(x-z)^{n-1}}{\underline{|n-1}}f^{(n)}(z)=\frac{(x-z)^n}{\underline{|n}}f^{(n+1)}(z).$$

Poichè R_n è nullo per $x=z$ si avrà:

$$R_n=\int_x^z\frac{(x-t)^n}{\underline{|n}}f^{(n+1)}(t)\,dt$$

che è una nuova forma del resto della serie di Taylor.

Così per es. si trova [posto $f(x)=(1+x)^m$, $z=0$] che

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2.}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \dots$$

purché sia:

$$0 = \lim_{n=\infty} R_n = \lim_{n=\infty} \int_x^0 (x-t)^n \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{\underline{|n}}(1+t)^{m-n-1}\,dt\,.$$

Ora, se $|x|<1$, mentre t varia tra 0 ed x si ha:

$$\left|(x-t)^n(1+t)^{m-n-1}\right| = \left|(1+t)^{m+1}\right|\left|\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n\right| \leq \left|1+t\right|^{m-1}\left|x\right|^n$$

e quindi:

$$\left|R_n\right| = \leq \left|\int_0^x (1+t)^{m-1}dt\right| \left|\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{\underline{|n}}x^n\right|$$

L'integrale, che compare al secondo membro, non cresce con n, il secondo fattore ha lo zero per limite per $n=\infty$: quindi anche $\lim_{n=\infty} R_n = 0$ per $|x|<1$

§ 4 - Integrazione delle frazioni razionali.

Noi sappiamo che se $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ è una frazione razionale reale, se cioè $f(x)$, $\varphi(x)$ sono polinomii a coefficienti reali, la nostra frazione si può decomporre nella somma di un polinomio intero reale e di più frazioni del tipo

$$\frac{A}{(x+a)^r} \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s} \qquad (r, s \text{ interi positivi})$$

dove A, B, C, a, p, q sono costanti reali. Le prime frazioni corrispondono alle radici reali e le seconde alle radici complesse coniugate dell'equazione $\varphi(x)=0$. Quindi ricordando il teorema sull'integrale di una somma otterremo:

$$\int \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots b_n} dx = \int (c_0 x^k + c_1 x^{k-1} + \dots + c_k) dx + \int \frac{A}{(x+a)^r} dx +$$

$$+ \dots\dots\dots + \int \frac{Bx + C}{(x^2+px+q)^s} + \dots\dots$$

Ora è evidentemente

$$\int (c_0 x^k + c_1 x^{k-1} + \dots + c^k) = c_0 \frac{x^{k+1}}{k+1} + c_1 \frac{x^k}{k} + \dots + c_k x .$$

Per calcolare

$$\int \frac{A}{(x+a)^r} dx$$

poniamo $(x+a) = z$ ossia $x = z - a$ donde differenziando

$$dx = dz$$

quindi avremo successivamente

$$\int \frac{A}{(x+a)^r} dx = \int \frac{A}{z^r} dz = A \int \frac{1}{z^r} dz = A \int z^{-r} dz$$

e quindi se $r \neq 1$ abbiamo

$$A \int z^{-r} dz = A \frac{z^{1-r}}{1-r} = \frac{A}{1-r} \cdot \frac{1}{z^{r-1}}$$

e se $r = 1$

$$A \int z^{-1} dz = A \log z .$$

E sostituendo a z il suo valore $x + a$ avremo infine

$$\int \frac{A}{(x+a)^r} dx = \begin{cases} \dfrac{A}{(1-r)(x+a)^{r-1}} & (r \neq 1) \\ A \log (x+a) & (r = 1) . \end{cases}$$

Ci resta quindi solo il calcolo di

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^s} dx$$

È identicamente

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$$

e giacchè l'equazione che si ottiene eguagliando a zero il polinomio del 1.° membro, deve per le nostre ipotesi avere due radici immaginarie coniugate, sarà $q-\frac{p^2}{4}>0$, ossia indicando con a una costante reale potremo porre

$$q-\frac{p^2}{4}=a^2.$$

Se poniamo poi

$$x+\frac{p}{2}=z \qquad (1)$$

avremo

$$x^2+px+q=z^2+a^2.$$

Dalla (1) si deduce differenziando

$$dx=dz$$

e quindi operando le precedenti sostituzioni nel nostro integrale otterremo

$B\left(z-\frac{p}{2}\right)+C$

$$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s}dx=\int\frac{Bz+C-B\times\frac{p}{2}}{(z^2+a^2)^s}dz$$

* moltiplicato

ove $C-B\frac{p}{2}$ è un termine costante che indicherò con D. Resta quindi a calcolare

$$\int\frac{Bz+D}{(z^2+a^2)^s}dz=\int\frac{Bz}{(z^2+a^2)^s}dz+D\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^s}$$

Calcoliamo separatamente questi due ultimi integrali. Se nello

$$\int\frac{Bz}{(z^2+a^2)^s}dz$$

poniamo $z^2+a^2=t$ e quindi differenziando $2z\,dz=$ $=dt$ ossia $z\,dz=\frac{dt}{2}$ otteniamo

$$\int \frac{Bz\,dz}{(z^2+a^2)^s} = B\int \frac{dt}{2t^s} = \frac{B}{2}\int t^{-s}\,dt$$

e quindi infine sostituendo a t dinuovo il suo valore

$$\int \frac{Bz\,dz}{(z^2+a^2)^s} = \begin{cases} \dfrac{B}{2}\,\dfrac{(z^2+a^2)^{1-s}}{1-s} & (\text{se } s \neq 1) \\[2ex] \dfrac{B}{2}\,\log\,(z^2+a^2) & (\text{se } s = 1) \end{cases}$$

Calcoliamo

$$\int \frac{D\,dz}{(z^2+a^2)^s} = D\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^s}.$$

Basterà calcolare

$$\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^s}$$

Ponendo $z = at$, quindi $dz = a\,dt$ avremo:

$$\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^s} = \int \frac{a\,dt}{(a^2t^2+a^2)^s} = \int \frac{dt}{a^{2s-1}(t^2+1)^s} = \frac{1}{a^{2s-1}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^s}.$$

Siamo così ridotti al calcolo di $\int \frac{dt}{(t^2+1)^s}$. – Indicheremo questo integrale con $\mathcal{I}_s$. Se $s=1$ sappiamo che è

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arc\,tg}\, t\,.$$

Applichiamo la regola di integrazione per parti; avviene che

aggiungendo e togliendo l'unità

$$\mathcal{I}_s = \int 1.\frac{dt}{(t^2+1)^s} = t\,\frac{1}{(t^2+1)^s} + 2s\int \frac{(t^2+1)-1}{(t^2+1)^{s+1}}\,dt$$

perchè è (come è facile verificare)

$$= \frac{s(t^2+1)^{s-1}\cdot 2t}{(t^2+1)^{2s}}$$

$$\left[\frac{1}{(t^2+1)^s}\right]' = -\frac{2st}{(t^2+1)^{s+1}}.$$

Ora l'integrale che compare al secondo membro si può anche scrivere

$$= t\,\frac{1}{(t^2+1)^s} + \int t\cdot\frac{s(t^2+1)^{s-1}\cdot 2t}{(t^2+1)^{2s}} = t\,\frac{1}{(t^2+1)^s} + 2s\int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{s+1}}$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^s} - \int \frac{dt}{(t^2+1)^{s+1}} = J_s - J_{s+1}$$

È quindi anche

$$J_s = \frac{t}{(t^2+1)^s} + 2s\left(J_s - J_{s+1}\right)$$

donde ricavi

$$J_{s+1} = \frac{t}{2s(t^2+1)^s} + \frac{2s-1}{2s} J_s$$

la quale formola noto J_s ci permette di calcolare J_{s+1}.

Ora siccome è noto

$$J_1 = \operatorname{arc\,tg} t$$

ne potremo dedurre (ponendo $s=1$) il valore di

$$J_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{(t^2+1)} + \operatorname{arc\,tg} t\right)$$

E così, ponendo successivamente $s = 2, 3, \ldots$ si trovano i valori di $J_3, J_4, \ldots$

Riassumendo: Qualora sia data una frazione razionale, noi sapremo integrarla non appena si sia decomposta nella somma di un polinomio intero e di più frazioni del tipo

$$\frac{A}{(x+\alpha)^r} \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s}$$

e come risultato di questa ricerca potremo dire che gli integrali dei differenziali razionali, qualora non si vogliano introdurre nel calcolo quantità immaginarie, si possono esprimere sempre con i soli tre tipi di funzione: 1° funzioni razionali; 2° funzioni logaritmiche; 3° funzioni arco tangente.

Sia da calcolare ad es: $\int \frac{dt}{(t^2+1)(t^2-1)}$:

Essendo

$$\frac{1}{(t^2+1)(t^2-1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2+1}$$

dove A, B, C, D sono costanti, si ha:

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)(t^2+1)} = A\int\frac{dt}{t-1} + B\int\frac{dt}{t+1} + \int\frac{Ct+D}{t^2+1}.$$

Ma

$$\int\frac{dt}{t-1} = \log\,(t-1) + C$$

$$\int\frac{dt}{t+1} = \log\,(t+1) + C$$

$$\int\frac{Ct+D}{t^2+1} = C\int\frac{t\,.\,dt}{t^2+1} + D\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{C}{2}\log(t^2+1) + D\,\mathrm{arctg}\,t$$

Quindi infine

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)(t^2-1)} = A\log(t-1) + B\log(t+1) + \frac{C}{2}\log(t^2+1) + D\,\mathrm{arctg}\,t + \mathrm{cost}.$$

§ 5. – Integrazione dei differenziali trascendenti.

Scarissimi sono i casi d'integrabilità (mediante i soliti simboli funzionali) dei differenziali trascendenti: vi sono però speciali tipi che si possono sempre calcolare.

Supponiamo di avere una funzione variabile delle sole funzioni trigonometriche di cui si dovesse calcolare l'integrale. In tal caso possiamo cominciare a ridurla a una sola funzione razionale di $\mathrm{sen}\,x$, $\cos x$ (ponendo $tg = \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}$ ecc.). Sia dunque da calcolare

$$\int f\,(\mathrm{sen}\,x,\ \cos x)\,dx$$

dove f è simbolo di funzione razionale.

Calcoliamo il nostro integrale riconducendoci con opportune sostituzioni al caso di una funzione razionale in cui più non entrano funzioni trigonometriche.

Poniamo

$$z = \operatorname{tang.} \frac{x}{2} \qquad (1)$$

$x = 2 \operatorname{artg} z$

Sarà allora

$dx = 2 \frac{1}{1+z^2}$

$$dz = \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx$$

ossia

$$dx = 2\cos^2 \frac{x}{2}\, dz .$$

Ma essendo

$$1+z^2 = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} .$$

Sarà infine

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1+z^2}$$

e quindi anche

$$dx = \frac{2}{1+z^2} dz .$$

D'altra parte abbiamo da formule note di trigonometria e dai risultati precedenti

[illegible] $\cos^2 x = \frac{1}{1+tag^2 x}$

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2z}{1+z^2}$$

e analogamente

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} - \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{2}{1+z^2} - 1 = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

Applicando allora la regola di integrazione per sostituzione avremo

$$\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx = \int f\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right) \frac{2dz}{1+z^2}$$

Siamo così giunti a dover calcolare l'integrale di una funzione razionale di z ciò che si sa fare; e quindi è possibile anche calcolare l'integrale del 1° membro. Se il differenziale fosse della forma

$$f(\operatorname{tg} x, \operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x)\, dx$$

il procedimento si semplificherebbe alquanto; basterebbe infatti fare la sostituzione $z = \operatorname{tang} x$ poichè allora essendo

$dz = \frac{1}{\cos^2 x} dx$

$$dx = \frac{dz}{1+z^2}, \operatorname{sen}^2 x = \frac{z^2}{1+z^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1+z^2}$$

esso si ridurrebbe al differenziale

$$f\left(z \frac{z^2}{1+z^2}, \frac{1}{1+z^2}\right) \frac{dz}{1+z^2}$$

Esempio: Calcolare

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}.$$

Poniamo $z = \operatorname{tang} \frac{x}{2}$. Per le formule precedenti avremo subito

$x = 2 \operatorname{arctg} z \quad dx = \frac{2}{1+z^2}$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = 2 \int \frac{1+z^2}{2z} \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{1}{z} dz = \log z$$

e sostituendo a z il suo valore

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} z} = \log \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

In modo simile, se si volesse calcolare $\int f(e^x)\, dx$, ove f è simbolo di funzione razionale, si porrebbe $e^x = z$, $dx = \frac{dz}{z}$; e saremo così ricondotti all'integrazione di funzioni razionali.

§ 6. - Integrazione di alcune funzioni irrazionali.

Abbiasi da calcolare l'integrale della funzione (irrazionale nella x)

$$f\left(\sqrt{ax^2+bx+c},\ \ x\right) \qquad (1)$$

razionale nella x e nella $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Tratteremo separatamente i casi di $a \gtrless 0$.

Supponiamo prima $a>0$. - Potremo porre

$$a = k^2$$

$K^2x^2+bx+c = K^2(x+z)^2$

$bx+c = K^2z^2 + 2K^2xz$

e quindi

$$\sqrt{K^2x^2+bx+c} = k\,(x+z)$$

$x(b-2K^2z) = K^2z^2 -$

ove z è una variabile da determinarsi.

La precedente equazione risoluta rispetto ad x dà

$x = \frac{K^2z^2-c}{b-2K^2z}$

$$x = \frac{K^2z^2-c}{b-2K^2z}$$

ed allora si avrà:

$$\sqrt{K^2x^2+bx+c} = k\,\frac{-k^2z^2+bz-c}{b-2K^2z}$$

e infine

$$dx = \frac{2K^2z\left(b-2K^2z\right)+2K^2\left(K^2z^2-c\right)}{\left(b-2K^2z\right)^2}dz$$

Eseguendo tutte le sostituzioni precedenti si vede chiaramente come la (1) si riduca ad una frazione razionale di cui sappiamo quindi calcolare l'integrale.

Supporremo ora $a<0$. Ammettiamo che siano

α e β le radici dell'equazione $ax^2+bx+c=0$

Allora dovendo essere

$$ax^2+bx+c = a\,(x-\alpha)(x-\beta)>0$$

ed essendo $a<0$, dovranno essere α e β reali e distinte, perchè sia il prodotto $a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)$ positivo.

Dovendo essere

$$(x-\alpha)\,(x-\beta)<0,$$

sarà

$$\frac{\alpha-x}{x-\beta}>0\,,$$

e quindi potremo porre

$$\frac{\alpha-x}{x-\beta} = z^2 \qquad \frac{x-\alpha}{\alpha-\beta}=-z^2 \qquad (2).$$

Avremo così

$$\int f\left(\sqrt{ax^2+bx+c},\,x\right)dx=\int f\left(\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)},\,x\right)dx$$

essendo

$$=\int f\left(\sqrt{-a\,\frac{\alpha-x}{x-\beta}(x-\beta)^2},\,x\right)dx$$

ove $-a>0$ potremo porre $-a=h^2$.

Eseguendo tale sostituzione risulta

$$\sqrt{-a\,\frac{\alpha-x}{x-\beta}\,(x-\beta)^2}=\sqrt{h^2z^2(x-\beta)^2}=hz\,(x-\beta).$$

Ma dalla (2) risulta

$$x=\frac{\alpha+\beta z^2}{1+z^2} \qquad (3)$$

quindi infine

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=hz\left(\frac{\alpha+\beta z^2}{1+z^2}-\beta\right) \qquad (4)$$

$$dx=\frac{2\beta z\,(1+z^2)-2z\,(\alpha+\beta z^2)}{(1+z^2)^2}\,dz \qquad (5)$$

e dalle (3), (4), (5) risulta

$$\int f\left(\sqrt{ax^2+bx+c},\, x\right)dx=\int f\left[hz\left(\frac{\alpha+\beta z^2}{1+z^2}-\beta\right), \frac{\alpha+\beta z^2}{1+z^2}\right]\frac{2\beta z(1+z^2)-2z(\alpha+\beta z^2)}{(1+z^2)^2}dz$$

la quale è funzione razionale della z; e ne sappiamo quindi calcolare l'integrale.

Se infine supponiamo $a=0$, il polinomio sotto il segno di radice si riduce al 1º grado e il nostro integrale si riduce al tipo

$$\int f\left(x, \sqrt{ax+b}\right)dx$$

Poniamo

$$\sqrt{ax+b}=z$$

$$x=\frac{z^2-b}{a}$$

$$dx=\frac{2z}{a}\,dz$$

Sostituendo nel nostro integrale questo diventa

$$\int f\left(\frac{z^2-b}{a}, z\right)\frac{2z}{a}\,dz$$

che è l'integrale di una funzione razionale che si sa calcolare.

Si abbia ora una funzione che contiene due radicali quadratici di due polinomi di primo grado, cioè una funzione del tipo

$$f\left(x, \sqrt{ax+b},\ \sqrt{cx+d}\right)$$

dove f sia simbolo di funzione razionale, e di cui si voglia calcolare l'integrale.

Eseguendo le stesse sostituzioni compiute nell'esercizio precedente si ha:

$$\int f(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\,dx = \int f\left(\frac{z^2-b}{a}, z, \sqrt{c\,\frac{z^2-b}{a}+d}\right)\frac{2z}{a}\,dz$$

che è l'integrale di una funzione che contiene un solo radicale quadratico di un polinomio di secondo grado; integrale che abbiamo già imparato a calcolare.

§7. - Integrali singolari.

\- 1). - Finora abbiamo sempre supposto di dover calcolare gli integrali di funzioni continue.

Supponiamo ora di avere una funzione $f(x)$ definita nell'intervallo (a, b), continua dappertutto eccetto che in un numero finito di punti singolari.

Ciò per es. avviene se volessimo studiare l'espressione $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, poichè $\frac{1}{\sqrt{x}}$ è singolare per $x=0$. Osserveremo che se ε è un numero positivo piccolo a piacere, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ è continua nell'intervallo $\varepsilon \ldots 1$; cosicchè ha un significato perfettamente determinato lo $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ che calcolato coi soliti metodi si riconosce uguale a $(2-2\sqrt{\varepsilon})$.

Calcoliamo ora il

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right).$$

Tale limite esiste ed è uguale a due.

E noi porremo per definizione

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$$

Più in generale se nello $\int_a^b f(x)\,dx$ è per esempio $a<b$ e la $f(x)$ è singolare in a ma è continua nell'intervallo $a+\varepsilon \ \ldots b$, dove ε è un numero positivo

piccolo a piacere, ($\varepsilon < b-a$), allora noi cercheremo il

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Se questo limite esiste ed è finito porremo per definizione

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx=\int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Tale limite può non esistere o non essere finito. In tal caso l'integrale $\int_a^b f(x)$ non ha significato. Così per es. avviene di $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$, perchè il $\lim_{\varepsilon=0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx$ non è finito.

Analogamente si procederebbe nello studio di $\int_a^b f(x)\,dx$ se $f(x)$ fosse singolare nel punto b.

In generale se $f(x)$ diventa singolare in un punto c interno all'intervallo (a,b). Allora preso un numero $\varepsilon>0$, se esistono e sono finiti i

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{a\cancel{+\varepsilon}}^{a-\varepsilon} f(x) \qquad e \qquad \lim_{\varepsilon=0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

porremo per definizione

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon=0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\lim_{\varepsilon=0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

2). — Definiamo ora in qualche caso $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$; se $f(x)$ è definita per $x \geq a$.

Sia $K>a$ un numero finito. Se esiste ed è finito il

$$\lim_{k=\infty}\int_a^{k} f(x)\,dx$$

noi porremo per definizione

$$\lim_{k=\infty}\int_a^k f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

Esempio:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

essendo

$$\lim_{k=\infty}\int_1^k \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{k=\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^k = 1.$$

Porremo

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1.$$

Esempio. Calcolare

$$\int_0^\infty \cos x\,dx.$$

Calcoliamo il

$$\lim_{k=\infty}\int_0^k \cos x\,dx = \lim_{k=\infty} \operatorname{sen} k.$$

Tal limite è noto che non esiste, perchè la funzione sen x al crescere di x continua sempre ad oscillare da -1 a $+1$; quindi lo $\int_0^\infty \cos x\,dx$ è per noi un'espressione senza significato.

Analogamente per definire

$$\int_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,dx$$

quando $f(x)$ è definita per $x \leq a$, si pone uguale a

$$\lim_{k=-\infty}\int_k^a f(x)\,dx$$

se questo limite esiste ed è finito.

Così pure per definizione si pone

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx$$

dove α è un numero qualunque, se esistono i due integrali del secondo membro. Evidentemente il valore di $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ è indipendente da α.

§8. – Strumenti di integrazione

1) – Integrafo di Abdank-Abacanowiez.

Ci resta ancora a parlare dei metodi grafici pel calcolo degli integrali, metodi ai quali si ricorre quando non si riesce a trovare il valore dell'integrale con nessuno dei metodi precedenti. Gli apparecchi che permettono, conosciuta la funzione, di calcolarne gli integrali indefiniti si chiamano integrafi.

Data la funzione $f(x)$ e disegnata la curva immagine dell'equazione $y = f(x)$; si tratta di trovare graficamente un'altra curva rappresentata dall'equazione $y = F(x)$ tale che

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

o ciò che è lo stesso, tale che

$$F'(x) = f(x).$$

Anzi, l'apparecchio permette di disegnare quella tra le infinite curve

$$y = \int f(x)\,dx$$

che noi desideriamo ottenere. (Queste curve sono in numero infinito perchè $\int f(x)\,dx$ è determinato soltanto a meno di una costante additiva).

Prima di passare alla descrizione di uno di tali li apparecchi, vediamo come essi possono servire anche al calcolo approssimato delle radici di una equazione.

Supponiamo ad es. di avere l'equazione

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

osserviamo che

$$\left[ax^3+bx^2+cx+d\right]'=3ax^2+2bx+c$$

e

$$\left[3ax^2+2bx+c\right]'=6ax+2b$$

e

$$\left[6ax+2b\right]'=6a$$

e quindi anche inversamente:

$$6ax+2b=\int 6a\,dx$$

$$3ax^2+2bx+c=\int(6ax+2b)\,dx$$

$$ax^3+bx^2+cx+d=\int(3ax^2+2bx+c)\,dx.$$

Quindi assunti due assi cartesiani, e disegnata la retta parallela all'asse delle x di equazione $y=6a$ mediante l'integrafo saprò costruire la curva, (in tal caso ancora una retta)

$$y=\int 6a\,dx\,,$$

e più precisamente la curva

$$6ax+2b=y.$$

Disegnata questa retta potrò anche collo stesso apparecchio disegnare la curva di equazione

$$y=\int(6ax+2b)\,dx=3ax^2+2bx+c$$

che rappresenta una parabola, e infine disegnare la curva che mi rappresenta la funzione data

$$y=ax^3+bx^2+cx+d.$$

Ora basta osservare che le radici reali della nostra equazione non sono che le ascisse dei punti ove la nostra curva incontra l'asse delle x. Le misure di queste ascisse sono le radici reali della nostra equazione

L'integrafo di Abdank-Abacanowitz si basa sul fatto sperimentale che se si prende una rotella girevole, e, tenendola perpendicolarmente al piano del disegno, la si fa rotolare sul piano stesso in modo di segnare una curva, la tangente della curva tracciata dalla rotella in un punto, è data dall'intersezione del piano della rotella con quello del disegno, (purchè la rotella giri sempre senza strisciare).

Supponiamo d'aver tracciata la curva rappresentata dall'equazione $y = f(x)$ e la curva rappresentata dall'equazione $y = F(x)$.

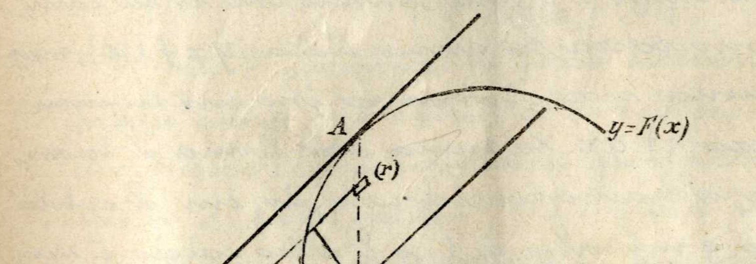

Fig. 19

Dire che la derivata della funzione $F(x)$ nel punto A è $f(x)$, vuol dire che la tangente alla curva $y = F(x)$ nel punto A ha per coefficiente angolare la derivata $f(x)$ della funzione $F(x)$: ossia che

$$tg\,\omega = f(x) \tag{1}$$

dove ω è l'angolo che la tangente in A alla curva $y = F(x)$ forma con l'asse delle x. Tiriamo da A la perpendicolare Ap all'asse delle x, e chiamiamo con a il punto dove questa perpendicolare incontra la curva $y=f(x)$. Da a tiriamo la parallela $\overline{aq}$ alla tangente in A alla curva $y=F(x)$; questa parallela formerà con l'asse delle x un angolo eguale a ω. Il segmento $\overline{ap}$ evidentemente rappresenta il valore della funzione $f(x)$ nel punto a, quindi $\overline{ap}=f(x)$.

In un triangolo rettangolo, la tangente di un angolo acuto è uguale al cateto opposto a quell'angolo diviso per il cateto adiacente, quindi nel triangolo rettangolo apq avremo

$$tg\,\omega = \frac{ap}{qp} = \frac{f(x)}{qp}$$

ma dalla (1) $tg\,\omega = f(x)$, quindi bisogna porre $qp=1$. Nell'apparecchio c'è una punta che si fa camminare proprio sopra la curva data $y=f(x)$; mentre questa punta scorre, avviene che un segmento (di lunghezza 1) qp lo segua e si forma il triangolo aqp che abbiamo considerato, di cui il cateto qp è costante e uguale a 1, e l'altro cateto è variabile.

Allora entra in giuoco un parallelogramma articolato ai vertici (vedi Fig. 19). Comunque lo si deformi, i lati opposti rimangono sempre paralleli. Questo parallelogramma è posto in modo che uno dei suoi lati coincide sempre con l'ipotenusa del triangolo rettangolo apq; il lato opposto a questo verrà a porsi in una retta parallela all'ipotenusa aq, ed è appunto questo lato che porta una rotella scrivente posta in un piano normale al piano del disegno, e che viene ad essere tenuta sul prolungamento del, l'ordinata ap. Così, mentre con la punta si descri= ve la curva, la $y = f(x)$, la rotella descrive un'altra curva, la $y = F(x)$ tale che $F'(x) = f(x)$, cioè tale che $F(x)$ è l'integrale indefinito di $f(x)$. Infatti nel pun, to di ascissa p, la derivata $F'(x)$ della funzione $F(x)$ è il coefficiente angolare della tangente alla curva $y = F(x)$ nel punto A e questa tangente non è che l'intersezione del piano del disegno con quello del, la rotella, ma il lato del parallelogramma che por, ta la rotella è sempre parallelo al suo opposto, quin, di il coefficiente angolare della retta aq è uguale a $F'(x)$ che è uguale a $tg\, \omega$, ma $tg\, \omega = f(x)$, per= ciò

$$F'(x) = f(x)$$

Se l'apparecchio fosse costruito così, semplice= mente come si è detto, si avrebbero, nel movimento, da vincere delle resistenze grandissime, perciò si è ricorso a degli artifici, fra i quali uno è quello di non tenere la rotella proprio sul prolungamento del, l'ordinata ap, ma per es. spostata di un segmento costante parallelo all'asse delle x; la curva inte= grale ottenuta in tale modo risulterà perciò sposta= ta parallelamente all'asse delle x.

Abbiamo detto che negli integrali indefiniti c'è sempre un'indeterminazione che proviene dalla co, stante additiva arbitraria: ora, anche nell'apparec, chio descritto c'è una indeterminazione; la posizio, ne iniziale della rotina scrivente.

2).- Planimetri.

Di uso più comune degli integrafi sono i Planimetri che servono per il calcolo delle aree, cioè per il calcolo degli integrali definiti.

I planimetri si possono dividere in due categorie:

1º) Per i planimetri della prima, quando è tracciata la curva $y = f(x)$ definita nell'intervallo ab, e si voglia trovare l'area della figura compresa tra le ordinate dei punti di ascissa a e b, il pezzo di curva e il pezzo dell'asse delle x compresi tra queste ordinate, basta far percorrere a una punta mobile il solo tratto di curva definito nell'intervallo ab. Di questa categoria è per es. il planimetro che studieremo più avanti.

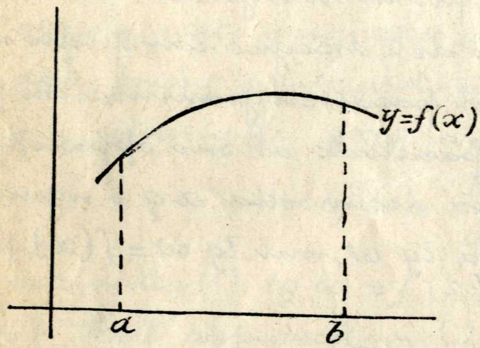

Fig. 20

2º) I planimetri della seconda categoria servono al calcolo di aree qualsiasi; per un tale calcolo si deve alla punta mobile far percorrere tutto il perimetro che comprende la figura di cui si vuole l'area. A questa seconda categoria appartiene per es. il planimetro polare di Amsler.

Quest'ultima categoria serve meglio per trovare aree di figure complicate per cui il calcolo degli integrali definiti è più complesso.

Daremo un cenno dell'apparecchio citato nella sua forma più semplice. Esso consiste in un disco piano D (Fig. 21) di centro O, e che può essere dotato di due movimenti: uno di traslazione parallelamente all'asse delle y, e uno di rotazione intorno al suo asse centrale O. Per poter scorrere parallelamente all'asse y il disco in questione è guidato generalmente da tre piccole rotaie che presentano però l'inconveniente di dare dei forti attriti. Attorno all'asse centrale del disco è avvolto un filo l; quando si tende il filo e lo svolge dall'asse, il disco acquista un movimento di rotazione e l'angolo di rotazione del disco è proporzionale alla lunghezza del filo che si è svolto dall'asse. Detto filo è sostenuto da un'asta A (alla quale è attaccato per un'estremità) parallela all'asse delle x e unita al disco D in modo tale che se si sposta l'asta tenendola parallela all'asse x, anche il disco si muove e il suo asse descri-

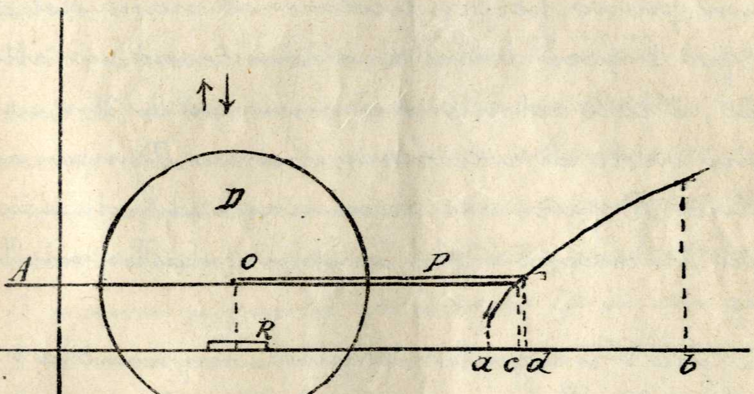

Fig. 21

ve un segmento parallelo all'asse delle x. Se invece si sposta l'asse per esempio tirandola da sinistra a destra, la ruota non segue l'asta nel suo movimento, ma siccome con tale movimento dell'asta si tende e si svolge il filo (che è unito all'asta) così la ruota assume un movimento di rotazione. All'estremo di destra di questa asta A c'è una punta la quale si deve far scorrere sulla curva data $y = f(x)$. Vediamo cosa succede quando la punta segue la curva $y = f(x)$.

Supponiamo per es. la $f(x)$ crescente come nel caso della nostra figura. Man mano che la punta dell'asta cammina sulla curva, l'asta si innalza e si sposta verso destra, perciò il disco si innalza, e siccome assieme all'asta si tende anche il filo verso destra, il disco acquista un movimento di rotazione.

Al piede della perpendicolare calata dal centro O del disco D all'asse delle x, c'è una rotellina R posta in un piano perpendicolare al piano del disco passante per l'asse delle x, e tenuta in contatto col disco stesso, e tale rotellina è munita di un contagiri. Col suo moto di rotazione, il disco D imprimerà alla rotellina R pure un movimento di rotazione, e il contagiri misurerà i giri compiuti dalla rotella piccola.

Dico che l'integrale definito compreso tra i limiti a e b della funzione $f(x)$ è proporzionale al numero dei giri compiuti dalla rotellina e misurati dal contagiri mentre la punta dell'asta A percorsa la curva $y = f(x)$ e il coefficiente di proporzionalità varierà secondo la grandezza della rotellina, l'unità di misura assunta, ecc.

Dimostriamolo usando la solita locuzione abbreviata.

Dividiamo l'intervallo ab in infiniti intervalli δ infinitamente piccoli e sia cd uno di questi intervallini. Se la ruota si sposta solo innalzandosi o abbassandosi parallelamente all'asse delle x, la rotellina R (pur presentando attrito) non gira: perchè giri, bisogna che giri anche il disco grande, cioè che il filo venga teso.

Quando l'estremità dell'asta descrive il tratto di curva compreso tra le ordinate dei punti di ascissa c e d, la lunghezza del filo che si svolge dall'asse del disco è cd e quindi la ruota grande D descrive un angolo φ proporzionale all'allungamento cd, il quale, essendo $cd = \delta$ infinitesimo, si indica al solito con dx. Quindi $\varphi = k\,dx$ dove k è una costante.

Quando la rotellina R è posta nel centro del disco D, allora anche se il disco ruota, la rotellina rimane ferma, se invece si allontana dal centro del disco, allora ruota anch'essa e ruoterà tanto maggiormente quanto più è lontana dal centro della ruota D; e anzi a parità di angolo φ di cui gira la ruota D, il numero dei giri compiuti dalla rotella R è proporzionale alla distanza della rotella dal centro della ruota grande. Ora, poichè nel segmentino cd la y si può considerare come costante (locuzione abbreviata) e la distanza da O alla rotella R non è altro che il valore di y nell'intervallino cd, l'angolo di cui gira la ruota piccola mentre la punta dell'asta percorre il pezzetto di curva dell'intervallo cd, è proporzionale al prodotto

$$h\,y\,dx$$

in cui h è una costante che dipende dall'apparecchio e dall'unità di misura scelta. Allora l'angolo di cui ruota la rotella piccola mentre la punta descrive tutta la curva $y = f(x)$ nell'intervallo ab, è ugnale, a meno di una costante h che dipende dall'apparecchio e dalle unità di misura alla somma degli angoli di cui ruota la rotellina ner singoli intervalli parziali δ. cioè detto angolo è.

$$h\int_a^b y\,dx .$$

Si possono costruire apparecchi in cui $h = 1$.

Questo planimetro è stato modificato dal Corradi di Zurigo che l'ha reso senza gravi attriti sostituendo al disco e alla rotella una calotta sferica e un cilindretto.

Con questo planimetro si può anche calcolare un'area qualsiasi.

Capitolo III

Funzioni di più variabili

---

§ 1. - Derivate di funzioni di più variabili.

Passiamo ora a estendere il concetto di derivata per una funzione di più variabili.

Si abbia una funzione u di più variabili, $x, y, z, \ldots t$. Poniamo per $y, z, \ldots t$ dei valori determinati $a_2, a_3, \ldots a_n$; la u resta funzione solo della variabile x, e possiamo trovare la derivata di u rispetto ad x nel punto $x = a_1$. Tale derivata, se esiste, la chiameremo la derivata parziale di primo ordine della funzione rispetto alla variabile x nel punto $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$.

La derivata rispetto ad x della $f(x, y, z, \ldots t)$ noi indicheremo di solito con uno dei due simboli: f'_x, o (più frequentemente) $\frac{\partial f}{\partial x}$. Bisogna però tener presente che questo $\frac{\partial f}{\partial x}$ è puramente un simbolo e non un quoziente come era $\frac{df}{dx}$ per una funzione di una variabile sola.

Vedremo più innanzi la ragione di questo simbolo, e vedremo come talvolta, il suo uso possa indurci in errori: perchè si potesse avere un simbolo che rendesse impossibile ogni errore, sarebbe necessario esprimere nel simbolo, se, per esempio, si compie la derivazione rispetto a x, che tutte le variabili esclusa la x, rispetto a cui si deriva, sono considerate costanti. Si potrebbe quindi adoperare il simbolo:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y, z \ldots t = \text{cost.}}$$

Noi, quando non possano nascere equivoci, adopreremo il simbolo semplice $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Se una funzione di n variabili ammette le derivate parziali di primo ordine in tutti i punti di un campo, queste formeranno a loro volta n nuove funzioni delle stesse n variabili. Potranno dunque derivarsi a loro volta e si hanno così le derivate parziali di secondo ordine, della funzione data. Si abbia, ad esempio, la

$$f(x,y,z) = x^2z + xyz + zy^2 \qquad (1)$$

Essa può derivarsi rispetto ad x considerando le altre variabili come costanti e si avrebbe:

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xz + yz$$

che è ancora una funzione nelle tre variabili x, y, z. La (1) può derivarsi rispetto a y tenendo costanti x, z e si avrebbe allora:

$$f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = xz + 2zy.$$

La $f'_z = \frac{\partial f}{\partial z}$ è uguale a $x^2 + xy + y^2$. Ciascuna di queste tre funzioni f'_x, f'_y, f'_z, può a sua volta derivarsi rispetto a x, y, z, e otterremo così $3 \times 3 = 9$ funzioni derivate parziali di second'ordine. Per es. derivando la f'_x rispetto a x, considerando cioè le altre variabili come costanti, si ha la derivata parziale di second'ordine calcolata due volte rispetto a x della $f(x, y, z)$. Indicandola con f''_{xx}, avremo, ricordando che $f'_x = 2xz + yz$:

$$f''_{xx} = 2z.$$

Derivando la f'_x rispetto a y si ottiene la

$$f''_{xy} = z.$$

Derivando la f'_x in rapporto a z si ottiene la

$$f''_{xz} = 2x + y.$$

Analogamente si potrebbero calcolare per la nostra funzione (1) le derivate parziali di second'ordine $f''_{yx}, f''_{yy}, f''_{yz}, f''_{zx}, f''_{zy}, f''_{zz}$. Dalle derivate di second'ordine si passa facilmente al concetto di derivate di terz'ordine. Queste si ottengono da quelle del secondo ordine, come quest'ultime si ottengono da quelle del primo. È naturale che ogni funzione derivata parziale di second'ordine dà luogo a n funzioni derivate parziali di terz'ordine, se n sono le variabili indipendenti della funzione; quindi essendo n le derivate di prim'ordine, n^2 quelle di secondo, saranno n^3 quelle di terzo.

Nel caso della nostra funzione (1) di tre variabili, le derivate parziali del terz'ordine sono 27 e si indicheranno con simboli ordinari (estensione naturale dei simboli usati precedentemente):

$$f'''_{xxx},\ f'''_{xxy},\ f'''_{xxz},\ f'''_{xyx},\ \dots\dots\dots$$

Si sarebbe quindi tentati di dire che una funzione di n variabili ammette n^r derivate di ordine r, cioè ha tante derivate d'ordine r quante sono le disposizioni con ripetizione di n elementi a r, a r.

Ma noi ora dimostreremo un teorema che ci farà vedere che nei casi abituali non tutte le derivate d'ordine r sono distinte fra loro, perchè derivate d'ordine r differenti per la sola successione delle operazioni di derivazione, come per es. f'''_{xyz} e f'''_{xzy} sono uguali fra loro. In altre parole il numero delle derivate parziali d'ordine r non è uguale al numero delle disposizioni con ripetizione di n elementi a r a r, ma è uguale al numero delle combinazioni con ripetizione di n elementi a r a r.

Per dimostrare che l'ordine nelle operazioni di derivazione, eseguite per ottenere una derivata d'ordine r non influisce sul valore della derivata basterà evidentemente dimostrare che l'ordine non ha nessuna influenza quando si tratti di una funzione di due variabili x, y e si considerino le due derivate seconde parziali f''_{xy}, f''_{yx}. Il teorema si estende facilmente al caso di una funzione di più variabili, e per derivate d'ordine superiore al secondo.

In sostanza il teorema da dimostrare lo enunceremo esplicitamente così:

Data una funzione $f(x, y)$ a due variabili, se le sue derivate seconde sono finite e continue, la derivata seconda fatta prima rispetto a x e poi rispetto a y è uguale alla derivata seconda fatta prima rispetto a y e poi rispetto a x. (1)

Consideriamo l'espressione:

$$\frac{f(x+h, y+K) - f(x+h, y) - f(x, y+K) + f(x, y)}{hK} \qquad (1)$$

Noi dimostreremo che questa espressione quando h e K tendono a zero, ha per limite tanto $f''_{xy}(x, y)$ quanto $f''_{yx}(x, y)$. Di qui è chiaro che si dedurrà l'uguaglianza cercata: $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$. Il numeratore della prima si può decomporre in due differenze:

$$\left[f(x+h, y+K) - f(x+h, y)\right] - \left[f(x, y+K) - f(x, y)\right] \qquad (2).$$

Se supponiamo y e K costanti la seconda delle due differenze che compaiono nella (2), cioè $f(x, y+K) - f(x, y)$ si può considerare come funzione della sola x; si potrà quindi porre:

$$\varphi(x) = f(x, y+K) - f(x, y) \qquad (3)$$

Allora sarà

$$\varphi(x+h) = f(x+h, y+K) - f(x+h, y) \qquad (4)$$

$x^3y + y^2x + x^2y$ [illegible] $6xy +$ [illegible]
[illegible] $6y$ / $6x+2$

Sottraendo membro a membro la (3) dalla (4) si ha:

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=\left[f(x+h,y+k)-f(x+h,y)\right]-\left[f(x,y+k)-f(x,y)\right]$$

in cui il secondo membro non è che la (2) cioè il numeratore dell'espressione (1)

La (1) si può dunque scrivere:

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{hk}$$

o anche, essendo per il teorema della media:

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=h\varphi'(x+\theta h).$$

$$\frac{h\varphi'(x+\theta h)}{hk}=\frac{\varphi'(x+\theta h)}{k} \qquad (5)$$

Ma $\varphi(x+\theta h)=f(x+\theta h,y+k)-f(x+\theta h,y)$

per cui derivando ambo i membri rispetto a x:

$$\varphi'(x+\theta h)=f'_x(x+\theta h,y+k)-f'_x(x+\theta h,y) \qquad (6)$$

Sostituendo nella (5) il valore di $\varphi'(x+\theta h)$ dato dalla (6), si ha evidentemente che la (1) è uguale a

$$\frac{f'_x(x+\theta h,y+k)-f'_x(x+\theta h,y)}{k} \qquad (7)$$

Osserviamo che nella differenza del numeratore di quest'ultima espressione si passa da un termine all'altro facendo variare solo la y e tenendo l'altra variabile costantemente uguale a $x+\theta h$.

Quindi ponendo:

$$\psi(y)=f'_x(x+\theta h,y)$$

$$\psi(y+k)=f'_x(x+\theta h,y+k)$$

la (7) si potrà scrivere

$$\frac{\psi(y+k)-\psi(y)}{k} \qquad (8)$$

o anche essendo per il teorema della media: $\psi(y+k)-$
$-\psi(y) = k\psi'(y+\theta'k)$:

$$\frac{k\psi'(y+\theta'k)}{k} = \psi'(y+\theta'k).$$

Ma $\psi'(y+\theta'k)$ per la (8) è uguale a:

$$f'_x(x+\theta h, y+\theta' k)$$

per cui:

$$\psi'(y+\theta'k) = f''_{xy}(x+\theta h, y+\theta' k).$$

La (1) è dunque uguale a:

$$f''_{xy}(x+\theta h, y+\theta' k).$$

Quando h e k tendono a zero, anche θh e $\theta' k$ tendono a zero, e poichè per ipotesi f''_{xy} è continua, sarà:

$$\lim_{\substack{h=0\\k=0}} f''_{xy}(x+\theta h, y+\theta' k) = f''_{xy}(x,y).$$

Abbiamo dunque dimostrato che il limite della (1) per $h=0$, $k=0$ è $f''_{xy}(x,y)$.

Se invece di decomporre il numeratore della (1) accoppiando il primo col secondo e il terzo col quarto, come noi abbiamo fatto dianzi, avessimo accoppiato il primo col terzo e il secondo col quarto: cioè avessimo scritto:

$$\left[f(x+h, y+k) - f(x, y+k)\right] - \left[f(x+h, y) - f(x,y)\right]$$

considerando la seconda di queste due differenze (supposte costanti x e h) funzione della sola y, e ragionando poi in modo identico al precedente si sarebbe dimostrato che il limite della (1) per $h=0$, $k=0$ è $f''_{yx}(x,y)$.

Sarà quindi $f''_{xy} = f''_{yx}$: come ci eravamo appunto proposto di dimostrare.

Osservazione. - Anche alle derivate parziali d'ordine superiore al primo si applicano le notazioni coi ∂ inclinati. Così f''_{xy} si indicherà col simbolo $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ che si può anche scrivere per il teorema precedente $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$; f''_{xx} si indicherà con $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; così se le derivate terze di f sono finite e continue, sarà:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = f'''_{xyy}$$

per il teorema precedente sulla inversione delle derivazioni.

§2. Teorema della media.

Estendiamo ora il teorema della media alle funzioni di due o più variabili. Per le funzioni di una variabile sola il teorema della media è rappresentato dalla formola $f(x+h) - f(x) = h f'(x+\theta h)$ dove $0 < \theta < +1$.

Troveremo una formola analoga per le funzioni di più variabili.

Sia $f(x, y)$ una funzione di due variabili x e y definita in un campo R e derivabile in tutto R sia rispetto a x che rispetto a y. Sia A un punto di R di coordinate x e y; e B un altro punto del campo di coordinate $x+h$, $y+K$. Per passare dal punto A al punto B si può se-

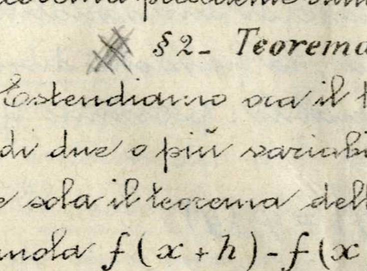

Fig.

guire una spezzata di cui un segmento è parallelo all'asse delle x e l'altro segmento è parallelo all'asse delle y. Se questi due segmenti sono interni al campo R e C è il loro punto comune, il punto C avrà per ascissa, l'ascissa di B e per ordinata, l'ordinata di A. Allora la differenza $f(x+h, y+K) - f(x, y)$ si può scrivere aggiungendo e togliendo il valore della funzione nel punto C:

$$\left[f(x+h,y+K)-f(x+h,y)\right]+\left[f(x+h,y)-f(x,y)\right]$$

che è la somma di due differenze.

Nella prima differenza: $f(x+h,y+K)-f(x+h,y)$, la variabile $x+h$ rimane costante e varia solo la y.

Ma se in una funzione di due variabili una delle variabili si tiene fissa, la funzione diventa funzione della sola altra variabile: possiamo quindi porre:

$$f(x+h,y)=\varphi(y)$$

$$f(x+h,y+K)=\varphi(y+K)$$

per cui la differenza in considerazione diventa $\varphi(y+K)-$ $-\varphi(y)$ che per il teorema della media per le funzioni a una sola variabile è uguale a:

$$K\varphi'(y+\theta K).$$

Ma

$$\varphi(y+\theta K)=f(x+h,y+\theta K)$$

per cui:

$$\varphi'(y+\theta K)=f'_y(x+h,y+\theta K).$$

Sarà dunque

$$\left[f(x+h,y+K)-f(x+h,y)\right]=Kf'_y(x+h,y+\theta K).$$

Analogamente si dimostrerebbe:

$$\left[f(x+h,y)-f(x,y)\right]=hf'_x(x+\theta' h,y)$$

Sommando membro a membro queste due ultime uguaglianze, si ottiene:

$$f(x+h, y+K) - f(x, y) = h f'_x(x+\theta' h, y) + K f'_y(x+h, y+\theta K).$$

Quest'ultima formola estende il teorema della media a funzioni di due variabili. Essa ci dice che la differenza dei valori delle funzioni in due punti (x, y), $(x+h, y+K)$ è uguale alla somma del prodotto di h per la derivata parziale della funzione data, rispetto alla x, fatta in un punto intermedio del segmento (x, y), $(x+h, y)$ col prodotto di K per la derivata parziale rispetto a y della funzione data, fatta in un punto intermedio del segmento $(x+h, y)$, $(x+h, y+k)$.

Il teorema della media esteso nel caso delle funzioni di due variabili, si può estendere in generale alle funzioni di n variabili con metodi e ragionamenti affatto identici a quelli da noi adoperati nel caso di funzioni di due variabili.

Se $f(x, y \ldots\ldots z, t)$ è una funzione di n variabili, si ha la formola generale:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+K, \ldots\ldots, z+l, t+m) - f(x, y, \ldots\ldots z, t) = \\ = h f'_x(x+\theta h, y, \ldots\ldots z, t) + \\ + k f'_y(x+h, y+\theta' h, \ldots\ldots z, t) + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ + l f'_z(x+h, y+k, \ldots\ldots z+\theta'' l, t) + \\ + m f'_t(x+h, y+k, \ldots\ldots z+l, t+\theta''' m). \end{aligned}$$

§ 3 - Differenziali.

Supponiamo che f'_x e f'_y siano tutte e due continue. Allora sarà:

$$f(x+h) - f(x) = h f'(x) + h\varepsilon$$
$$= df + h\varepsilon$$

$$\lim_{h=0} f'_x(x+\theta h, y) = f'_x(x,y)$$

e

$$\lim_{h=0} \left[f'_x(x+\theta h, y) - f'_x(x,y)\right] = 0$$

Ponendo

$$f'_x(x+\theta h, y) - f'_x(x,y) = \alpha$$

si ha

$$f'_x(x+\theta h, y) = f'_x(x,y) + \alpha. \qquad (1)$$

Con le stesse considerazioni si trova che:

$$f'_y(x+h, y+\theta' K) = f'_y(x,y) + \beta \qquad (2)$$

dove α e β sono delle quantità che tendono a zero con h e K.

Nella formula che esprime il teorema della media, sostituendo la (1) e la (2) si ha:

$$f(x+h, y+K) - f(x,y) = h\left[f'_x(x,y)+\alpha\right] + K\left[f'_y(x,y)+\beta\right] =$$
$$= \left[h f'_x(x,y) + K f'_y(x,y)\right] + \left[\alpha h + \beta K\right]. \qquad (3)$$

Questa formula dice che la differenza $f(x+h, y+K) - f(x,y)$ incremento che la funzione f subisce nel passare dal punto $A(x,y)$ al punto $B(x+h, y+K)$ è la somma di due quantità: la prima $hf'_x + Kf'_y$ che è nota, la seconda $\alpha h + \beta K$ che è una quantità incognita, ma che sappiamo che tende a zero per $h=0$, $K=0$. La prima quantità $hf'_x + Kf'_y$ chiameremo differenziale della funzione e indicheremo brevemente col simbolo df.

Possiamo dunque scrivere con Δf l'incremento della funzione:

$dx = h$
$dy = K$

$$\Delta f = df + (\alpha h + \beta K).$$

Osserviamo che se $f(x,y) = x$ essendo $f'_x = 1, f'_y = 0$,

$$df = hf'_x + Kf'_y = h$$

Analogamente il differenziale di y è K

$h = dx$
$K = dy$

Il differenziale della funzione $f(x,y)$ si può per queste ultime osservazioni scrivere:

$$df = dx f'_x + dy f'_y$$

o anche usando la notazione dei ∂ inclinati: (storto)

$$df = dx \frac{\partial f}{\partial x} + dy \frac{\partial f}{\partial y}$$

dove, come è noto, $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ non si devono interpretare come quozienti, ma come simboli, e ∂f e ∂x, ∂y non esprimono affatto differenziali. Se si avesse una funzione di n variabili $f(x, y, \ldots\ldots t)$ si avrebbe pel differenziale una formula affatto analoga alla precedente:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial t} dt. \qquad (4)$$

È utile osservare che il concetto di differenziale da noi introdotto per funzioni di più variabili è perfettamente analogo a quello già dato per le funzioni di una variabile sola.

Ricorderemo che nella teoria delle funzioni di una sola variabile, si era trovata una formula perfettamente analoga alla (3) e cioè:

$$f(x+h) - f(x) = h f'(x) + h\varepsilon$$

dove ε non era conosciuto, ma si sapeva soltanto che tendeva a 0 quando h tendeva a zero. Noi allora chiamammo differenziale della funzione la quantità $hf'(x)$: cioè, ponemmo:

$$df = h f'(x)$$

da cui osservando che $dx = h$:

$$df = dx f'(x) \qquad (5)$$

Queste, fatte le dovute estensioni, sono le stesse considerazioni che ci hanno condotto alla (4) che, del resto è affatto analoga alla (5) che esprime il differenziale delle funzioni d'una variabile sola.

§4_ Derivazione di funzione di funzioni.

Supponiamo di avere una funzione z di due variabili, x e y, e supponiamo che tanto x che y siano funzioni di una terza variabile t, cioè $z = f(x,y)$, $x = x(t)$, $y=y(t)$. La z sarà pure una funzione di t, che indicheremo con $z = \varphi(t)$.

Poniamo esplicitamente l'ipotesi che la $z = f(x,y)$ sia derivabile tanto rispetto a x quanto rispetto a y e che queste due derivate parziali siano continue: pure per ipotesi ammettiamo che $x(t)$ e $y(t)$ siano funzioni derivabili.

In queste ipotesi vediamo di trovare la derivata di z rispetto alla variabile t.

Questa derivata $\frac{dz}{dt}$ è data dal $\lim\limits_{\Delta t=0} \frac{\Delta z}{\Delta t}$ dove Δz è l'incremento subito dalla funzione $z = \varphi(t)$ in corrispondenza all'incremento Δt della variabile indipendente.

Mentre la t subisce l'incremento Δt, la x subisce un certo incremento $\Delta x = h$, e la y, l'incremento $\Delta y = k$; cioè quando t è divenuto $t+\Delta t$, x è diventato $x+h$ e y è diventato $y+k$. Sarà dunque:

$$\Delta z = f(x+h, y+k) - f(x,y)$$

ossia, essendo per il teorema della media $f(x+h, y+k) - f(x,y) = h f'_x(x+\theta h, y) + k f'_y(x+h, y+\theta' k)$, si potrà scrivere

$$\Delta z = \Delta x f'_x(x+\theta h, y) + \Delta y f'_y(x+h, y+\theta' k)$$

Per quest'ultima uguaglianza:

$$\lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta x}{\Delta t} f'_x(x+\theta h, y) + \lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta y}{\Delta t} f'_y(x+h, y+\theta K)$$

Quando Δt tende a zero, $\Delta x = h$; $\Delta y = K$ tendono a zero, essendo $x(t)$, $y(t)$ funzioni derivabili e quindi anche continue.

Allora per la continuità di f'_x e f'_y sarà:

$$\lim_{\Delta t=0} f'_x(x+\theta h, y) = f'_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = z'$$

e anche

$$\lim_{\Delta t=0} f'_y(x+h, y+\theta' K) = f'_y(x,y)$$

D'altra parte supposto come noi abbiamo fatto, che le funzioni $x(t)$, $y(t)$ siano derivabili è chiaro che:

$$\lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'_t \quad ; \quad \lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'_t$$

dove x'_t e y'_t sono le derivate delle funzioni $x(t)$, $y(t)$.

Per queste osservazioni è finalmente

$$\lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta x}{\Delta t} f'_x(x+\theta h, y) + \lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta y}{\Delta x} f'_y(x+h, y+\theta' k) =$$

$$= x'_t f'_x(x,y) + y'_t f'_y(x,y)$$

che introducendo le notazioni coi ∂ inclinati si può anche scrivere:

$$\frac{dz}{dt} = x'_t \frac{\partial f}{\partial x} + y'_t \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Per funzioni di n variabili dove $n \geq 2$ si ha la formola analoga più generale:

$$\frac{dz}{dt} = x'_t \frac{\partial f}{\partial x} + y'_t \frac{\partial f}{\partial y} + \dots + \frac{\partial f}{\partial t} t'_t$$

Applicheremo i risultati ottenuti riguardo alla

$z = f(x, y) = x'_t z'_x + y'_t z'_y$

21. $\xi = x + ht \quad \eta = y + kt \quad (x, y, h, k) \quad \frac{df}{dt} = \frac{df}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{d\eta}{dt} =$
$h\frac{\partial f}{\partial \xi} + k\frac{\partial f}{\partial \eta} \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)h + k\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right) = - - -$

derivazione di funzione di funzioni, alla ricerca della derivata della funzione $f(t)^{\varphi(t)}$. - Questa derivata fu già da noi calcolata per altra via.

Poniamo $\quad x = f(t) \; ; \; y = \varphi(t)$, per cui $f(t)^{\varphi(t)} = x^y$.

La nostra funzione si può quindi considerare funzione di x e di y entrambe funzioni di t. Applicando la formula precedente sulla derivazione di funzione di funzioni e ricordando inoltre che: $(x^k)' = kx^{k-1}$; e $(a^x)' = a^x \log a$, abbiamo:

$$\left(f(t)^{\varphi(t)}\right)' = (x^y)' = \underbrace{y x^{y-1} f'(t)}_{y \text{ costante}} + \underbrace{x^y \log x \, \varphi'(t)}_{x \text{ costante}}$$

in cui sostituendo a x e y i valori in funzione di t si ha la formula nota:

$$\left(f(t)^{\varphi(t)}\right)' = \varphi(t) f(t)^{(\varphi(t)-1)} f'(t) + f(t)^{\varphi(t)} \lg f(t)\, \varphi'(t) =$$
$$= f(t)^{\varphi(t)} \left[\varphi(t) \frac{f'(t)}{f(t)} + \lg f(t) \varphi'(t) \right].$$

§5 - Derivazione di funzioni implicite

Calcolare la y' senza risolvere l'equazione (num 101

Per completare l'argomento della derivazione, estesa ormai anche al caso di più variabili, daremo un cenno sulla derivazione delle funzioni implicite, che non è altro se non un metodo particolare di derivazione che in molti casi riesce utilissimo.

È necessario prima fissar bene il concetto di funzione implicita.

Si abbia l'equazione:

$$f(x \,.\, y) = 0. \tag{1}$$

Se si può trovare una $y = \varphi(x)$ tale che sostituita nell'equazione in luogo di y la soddisfi; la $\varphi(x)$ si dice una funzione di x definita in modo implicito, o più brevemente una funzione implicita della x.

Se si è data la (1) e si riesce a risolverla rispetto alla y, si ottiene così la y sotto forma di una funzione ~~esplicita~~ della x. plicita

Così per es. se si ha l'equazione d'un cerchio riferito a due diametri perpendicolari:

$$x^2+y^2-1=0 \qquad (2)$$

e si suppone l'equazione risolta rispetto a $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ è chiaro che queste due funzioni:

$$+\sqrt{1-x^2} \quad e \quad -\sqrt{1-x^2}$$

sono funzioni della x rappresentate in modo implicito dalla (2). sostituite annullan

La definizione di funzione implicita che abbiamo data nel caso che il primo membro della (1) sia una funzione di due sole variabili, si può estendere al caso che il primo membro della (1) abbia un numero qualunque di variabili. Così data l'equazione in $n+1$ incognite

$$f(x,y,\ldots\ldots\ldots t,\underline{u})=0 \qquad (3)$$

se esiste una funzione delle n variabili $x, y, \ldots\ldots, t$: $u=\varphi(x,y,\ldots\ldots t)$ tale che sostituita nella (3) in luogo di u soddisfi l'equazione, diremo che la $u=\varphi(x,y,\ldots t)$ è una funzione delle n variabili $x, y, \ldots\ldots t$ definita in modo implicito dalla (3), o anche che la (3) definisce una funzione implicita u delle $x, y, \ldots\ldots t$.

Supponiamo ora data l'equazione $f(x,y)=0$ in cui x è la variabile indipendente e y è funzione implicita di x: troviamo la derivata di y rispetto ad x senza risolvere l'equazione rispetto a y. Poniamo senz'altro l'ipotesi che questa derivata esista. Se inmaginiamo di sostituire nel primo membro $f(x, y)$ dell'equazione, in luogo di y la $\varphi(x)$ si ottiene una funzione di x, $f(x, \varphi)$ identicamente nulla, poichè $\varphi(x)$ è una funzione implicita di x. Sarà quindi nulla la derivata rapporto a x di $f(x, \varphi)$, poichè questa funzione è costantemente zero. Deriviamo allora la $f(x, y)$ immaginando che questa sia una funzione composta delle due funzioni di x che sieno x e $y = \varphi(x)$.

Per il teorema della derivazione di funzione di funzioni, supposto come noi abbiamo fatto che y'_x esista, è:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} x'_x + \frac{\partial f}{\partial y} y'_x \quad (2)$$

Ma questa derivata è zero, per cui essendo $x'_x = 1$ la (2) si può scrivere:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'_x$$

da cui se $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ si trae:

$$y'_x = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad (3)$$

Osserviamo che questa formula vale se $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono funzioni finite e continue, perchè la (2) su cui noi ci siamo fondati vale nell'ipotesi che $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sieno finite e continue: queste condizioni, nei casi ordinari sono soddisfatte.

La formula (3) è la formula fondamentale della derivazione di funzioni implicite.

Applichiamola alla determinazione della tangente all'ellisse rappresentata dall'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \qquad (4)$$

Ricordiamo che se si ha una curva rappresentata dall'equazione $y=f(x)$, la tangente in un suo punto x ha per coefficiente angolare la derivata di y rapporto a x calcolata nel punto x.

Indicando con y l'ordinata di un punto variabile della curva si ha:

$\boxed{y^2=\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)b^2 \quad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}$

$$f'_x=\frac{2x}{a^2} \quad \text{e} \quad f'_y=\frac{2y}{b^2}$$

onde:

$(4) \div \frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}\,y'_x$ d. cui $=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$

$$y'_x=-\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}}=-\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x}{y} \qquad \left[\frac{2x}{a^2}\,\frac{b^2}{2y}\right]$$

che è il coefficiente angolare della tangente alla curva nel punto generico x, y.

(2) Si abbia ora l'equazione:

$$f(x,y,z)=0 \qquad (5)$$

Supponiamo che esista una funzione $z=\varphi(x,y)$ tale che sostituita nel primo membro della (5) in luogo di z, l'equazione resti soddisfatta.

La $z=\varphi(x,y)$ è una funzione implicita delle variabili x e y rappresentata dall'equazione (5). Possiamo proporci il problema analogo a quello testè risolto, cioè di trovare le derivate parziali rispetto a x e y di $z=\varphi(x,y)$ senza risolvere la (5) rispetto a z.

Osserviamo che per trovare ad es. la derivata di $z=\varphi(x,y)$ rispetto a x, bisogna tenere y costante, per cui la z risulterà funzione della sola x:

$$z=\phi(x)$$

La derivata di $z = \Phi(x)$ rapporto a x è la derivata parziale rispetto a x della $z = \varphi(x, y)$.

Sostituendo nel primo membro della (5) in luogo di z la $z = \Phi(x)$, essendo y costante, la $f(x, y, z)$ risulterà funzione delle sole x e z:

$$f(x, y, z) = F(x, z).$$

Ma nell'equazione

$$F(x, z) = 0$$

la $z = \Phi(x)$ è funzione implicita di x: applicando la formula (3) si trova:

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{z=cost}}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{x=cost}}$$

Ma nel nostro caso z è una funzione di x e y; e si è mantenuto y costante: perciò bisognerà scrivere meglio:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y=cost} = - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{z=cost \\ y=cost}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\substack{y=cost \\ x=cost}}}.$$

$+y^2+z^2=R^2$

$= \frac{2x}{2y} = \frac{x}{y}$ (3)

Si abbiano ora le due equazioni in tre incognite:

$$f(x, y, z) = 0$$

$$F(x, y, z) = 0.$$

Supponiamo che esistano due funzioni $y = \varphi(x)$ e $z = \Phi(x)$ tali che sostituite in tutte e due le equazioni in luogo rispettivamente di y e di z le soddisfino.

Vogliamo calcolare le derivate $\varphi'(x)$ e $\Phi'(x)$ se esistono senza risolvere le equazioni. Se tanto in $f(x, y, z)$ quanto in $F(x, y, z)$ immaginiamo sostituire in luogo di z e di y i valori in funzione di x otterremo due funzioni di x: $f(x, \varphi, \Phi)$ e $F(x, \varphi, \Phi)$ identicamente nulle. Derivando allora la $f(x, y, z)$ immaginandola funzione di funzioni di x: applicando il teorema della derivazione di funzione di funzioni, si ottiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} x'_x + \frac{\partial f}{\partial y} y_x + \frac{\partial f}{\partial z} z'_x .$$

Questa derivata è zero per quanto abbiamo detto. Sarà dunque:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'_x + \frac{\partial f}{\partial z} z'_x = 0 .$$

Ragionando sulla $F(x, y, z)$ come si è fatto per la $f(x, y, z)$ si otterrebbe analogamente:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'_x + \frac{\partial F}{\partial z} z'_x = 0 .$$

Quest'ultima equazione con la precedente forma un sistema di due equazioni lineari nelle due incognite y'_x, z'_x, che sarà risolvibile con la regola di Kramer ove sia:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$$

No 4 Si abbia ora il sistema di due equazioni:

$$f(x, y, z, t) = 0 \qquad ; \qquad F(x, y, z, t) = 0$$

e supponiamo che esistano le due funzioni variabili: $z = \varphi(x, y)$; $t = \Phi(x, y)$ tali che sostituite in tutte e due le equazioni le soddisfino. Vogliamo cercare le derivate rapporto a x a y delle due funzioni φ e Φ. Sostituendo allora nelle equazioni in luogo di z e di t rispettivamente le funzioni $z = \varphi(x,y)$; $t = \Phi(x,y)$ si ottengono due funzioni di x e di y : $f(x,y,\varphi,\Phi)$ e $F(x,y,\varphi,\Phi)$ identicamente nulle. Le loro derivate tanto rapporto a x quanto rapporto a y saranno quindi nulle. Se allora deriviamo la $f(x,y,z,t)$ rapporto a x considerandola come funzione di funzioni di x che siano x, φ, Φ, questa derivata, che per non creare equivoci dovremo indicare col simbolo

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{y=\text{cost}\\ z=\varphi\\ t=\Phi}}$$

per il teorema di derivazione di funzione di funzioni è

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{y=\text{cost}\\ z=\varphi\\ t=\Phi}} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{y,z,t\ \text{cost}} x'_x + \left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]_{x,y,t\ \text{cost}} z'_x + \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{x,y,z\ \text{cost}} t'_x .$$

Ma questa derivata per quanto abbiamo osservato è nulla.

Sarà quindi:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{y,z,t\ \text{cost}} + \left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]_{x,y,t\ \text{cost}} z'_x + \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{x,y,z\ \text{cost}} t'_x = 0$$

Ragionando sulla funzione $F(x,y,z,t)$ si otterrebbe analogamente:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{y,z,t\ \text{cost}} + \left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{x,y,t\ \text{cost}} z'_x + \left[\frac{\partial F}{\partial t}\right]_{x,y,z\ \text{cost}} t'_x = 0$$

Quest'ultima equazione con la precedente costituisce un sistema di due equazioni lineari nelle due incognite z'_x e t'_x che non sono altro, essendosi considerato y costante, che rispettivamente le derivate prime rispetto a x di $\varphi(x,y)$ e $\Phi(x,y)$.

Il sistema è risolubile con la regola di Kramer e quindi ammetterà una sola soluzione se:

$$\begin{vmatrix} \left[\dfrac{\partial f}{\partial z}\right]_{x,y,t\ \mathrm{cost}} & \left[\dfrac{\partial f}{\partial t}\right]_{x,y\ z\ \mathrm{cost}} \\ \left[\dfrac{\partial F}{\partial z}\right]_{x,y,t\ \mathrm{cost}} & \left[\dfrac{\partial F}{\partial t}\right]_{x,y,z\ \mathrm{cost}} \end{vmatrix} \neq 0$$

Ragionamenti e risultati analoghi si avrebbero cercando invece che le derivate rapporto a x di $\varphi(x,y)$ e $\phi(x,y)$ le derivate rapporto a y di queste stesse funzioni.

È interessante questo esempio di derivazione che abbiamo trattato perchè abbiamo avuto occasione di osservare la complicazione che risulta nelle notazioni, adoperando gli ordinari simboli di derivazione, quando per non creare degli equivoci e delle confusioni che condurrebbero a gravi errori, si vuole un simbolo che dica esplicitamente tutto e non possa interpretarsi in modi diversi.

(5) Siano $f(x,y)$ e $F(x,y)$ due funzioni finite e continue con le loro derivate prime in un campo C ed esista in C una curva Γ, ove

$$F(x,y) = k \qquad (k = \mathrm{cost}) \quad (1)$$

Voglio trovare qualche condizione necessaria, affinchè un punto A di Γ, interno a C, faccia acquistare a $f(x,y)$ un valore massimo o minimo (rispetto agli altri valori assunti su Γ): più brevemente voglio cercare i punti A interni a C di massimo o minimo per $f(x,y)$, quando x e y sono legate dalla (1)

Lungo Γ la y si può considerare come una funzione di x soddisfacente alla $y' = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$ (se $F'_y \neq 0$); e la f si può considerare come funzione della sola x. In uno dei punti A cercati dovrà dunque essere nulla la

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{F'_x}{F'_y}.\qquad f'_x=f'_y\cdot\frac{F_x}{F'}$$

Dovrà dunque essere in A

$$f'_y=\lambda f'_x \quad \frac{f'_y}{F'_y}=\frac{F_y}{F'_x}\qquad f_x'F_y'=f_y'F_x'=0\qquad \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ F'_x & F'_y \end{vmatrix}=0$$

ossia, dovranno essere in A compatibili le equazioni dell'incognita λ

$$f'_x+\lambda F'_x=0$$

$$f'_y+\lambda F'_y=0$$

Ad identico risultato si giunge se $F'_x \neq 0$. Se dunque in C non è mai contemporaneamente $F'_x=0,\ F'_y=0$ allora per trovare i cercati punti A si cercano i punti ove sono nulle le derivate prime di $f+\lambda F$ rispetto a x, y: si procede cioè come se si cercassero i massimi e i minimi di $f+\lambda F$. Le tre equazioni

$$(f+\lambda F)'_x=0$$

$$(f+\lambda F)'_y=0$$

$$F(x,y)=k$$

sono tre equazioni nelle tre incognite λ, e le due coordinate di A, che servono a indicarci quei punti A di C, tra i quali soltanto si dovranno poi cercare i nostri punti di massimo o minimo.

Questo metodo del moltiplicatore indeterminato è suscettibile di molte e svariate generalizzazioni e applicazioni

§6 - Formula di Taylor-Lagrange per funzioni di due variabili.

Ricordiamo la formula di Taylor-Lagrange per una varia-

F Taylor

$\varphi(a+h) = \varphi(a) + h\varphi'(a) + \frac{h^2}{2}\varphi''(a)$

bile sola

$F(b) = F(a) + \frac{b-a}{1} F(a)$

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\varphi'(x)+\frac{h^2}{2!}\varphi''(x)+\dots\dots+\frac{h^n}{\lfloor n}\cancel{\varphi^{(n)}}\varphi^{(n)}(x+\theta h)$$

dove $0<\theta<1$.

Ci proponiamo ora di estendere questa formola al caso d'una funzione di due variabili. Consideriamo a tale oggetto la funzione:

$$\varphi(t) = f(x+ht,\ y+kt) \qquad (1)$$

la quale se x e y, h e k si suppongono dati e costanti, è funzione della sola t: per cui si potrà scrivere:

$$\varphi(t)=f(\underbrace{x+ht}_{\xi},\ \underbrace{y+kt}_{\eta}).$$

Ponendo in $\varphi(t)$ rispettivamente $t=0$, $t=1$, si ha:

$$\varphi(0)=f(x,y) \quad ; \quad \varphi(1)=f(x+h,y+k)$$

Se si applica a $\varphi(t)$ la formula di Taylor per $t=1$ si ha:

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\varphi'(0)+\frac{1}{2!}\varphi''(0)+\dots\dots+\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(\theta) \qquad (2)$$

dove al solito $0<\theta<1$.

Cerchiamo di trasformare la (2) in una formula dove compaia la f con le sue successive derivate parziali. Intanto abbiamo già:

$$\varphi(1)=f(x+h,y+k) \qquad \varphi(0)=f(x,y)$$

Calcoliamo ora le successive derivate: $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$...

Ponendo $\xi = x+ht$; $\eta = y+kt$ si ha:

$$\varphi(t) = f(\xi,\eta)$$

Quindi per derivare la $\varphi(t)$ rispetto a t, potendo essa funzione considerarsi funzione di ξ e di η, che sono funzioni di t, per il teorema di derivazione di funzione di funzioni si ha

$$\varphi'(t)=\frac{\partial f(\zeta,\eta)}{\partial \zeta}h+\frac{\partial f(\zeta,\eta)}{\partial \eta}k \qquad (3)$$

per cui ponendo $t=0$ e conseguentemente $\zeta=x,\ \eta=y$ si ha:

$$\varphi'(0)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}h+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}k.$$

Dall'espressione di $\varphi'(t)$ si ricava la $\varphi''(t)$ derivando termine a termine il secondo membro della (3) rispetto a t.

Si ha applicando ripetutamente il teorema di derivazione di funzione di funzioni:

$$\varphi''(t)=h\left(\frac{\partial^2 f(\zeta,\eta)}{\partial \zeta^2}h+\frac{\partial^2 f(\zeta,\eta)}{\partial \zeta\,\partial \eta}k\right)+k\left(\frac{\partial^2 f(\zeta,\eta)}{\partial \eta\,\partial \zeta}h+\frac{\partial^2 f(\zeta,\eta)}{\partial \eta^2}k\right)$$

ed essendo, per il teorema della inversione delle derivazioni $\frac{\partial^2 f(\zeta,\eta)}{\partial \zeta\,\partial \eta}=\frac{\partial^2 f(\zeta,\eta)}{\partial \eta\,\partial \zeta}$ si ha:

$$\varphi''(t)=h^2\frac{\partial^2 f(\zeta,\eta)}{\partial \zeta\,\cancel{\partial \eta}}+2hk\frac{\partial^2 f(\zeta,\eta)}{\partial \eta\,\partial \zeta}+k^2\frac{\partial^2 f(\zeta,\eta)}{\partial \eta^2} \qquad (4)$$

Potremmo ora procedere alla ricerca della derivata terza di $\varphi(t)$. Ma noi accenneremo una regola molto semplice e molto comoda che ce ne dispenserà.

Osserviamo che la (4) si può scrivere simbolicamente nel modo seguente:

$$\varphi''(t)=\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\varphi=\left(\frac{d}{dt}\right)^2\varphi=\left(h\frac{\partial}{\partial \zeta}+k\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(h\frac{\partial}{\partial \zeta}+k\frac{\partial}{\partial \eta}\right)f(\zeta,\eta)=$$

$$=\left(h\frac{\partial}{\partial \zeta}+k\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 f(\zeta,\eta)$$

Questa scrittura simbolica è lecita, purchè nello innalzare al quadrato il binomio $\left(h\frac{\partial}{\partial \zeta}+k\frac{\partial}{\partial \eta}\right)$ si si considerino i simboli $\frac{\partial}{\partial\zeta}$, $\frac{\partial}{\partial\eta}$ come vere e proprie frazioni; si porrà in conseguenza $\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}$, $\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\eta}$, ..., e per moltiplicare l'espressione così ottenuta per φ, si porrà un φ dopo il simbolo ∂^2, che si presenta nei numeratori.

È facile vedere che con la stessa convenzione si ha in generale

$$\varphi^{(n)}(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial\zeta} + K\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^n f(\zeta,\eta).$$

Noi usiamo solo $n = 2$.

Cosicchè, per es.:

$$\varphi'''(t) = \left(h^3\frac{\partial^3}{\partial\zeta^3} + 3h^2K^2\frac{\partial^3}{\partial\zeta^2\partial\eta} + 3Kh^2\frac{\partial^3}{\partial\zeta\partial\eta^2} + K^3\frac{\partial^3}{\partial\eta^3}\right) f(\zeta\,\eta) =$$

$$= h^3\frac{\partial^3 f}{\partial\zeta^3} + 3h^2K\frac{\partial^3 f}{\partial\zeta^2\partial\eta} + 3hK^2\frac{\partial^3 f}{\partial\zeta\partial\eta^2} + K^3\frac{\partial^3 f}{\partial\eta^3}.$$

Per $t = 0$ (e quindi $\zeta = x,\ \eta = y$) si avrà:

$$\varphi^{(n)}(0) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + K\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y)$$

No

Per $t = \theta$ si otterrà:

$$\varphi^{(n)}(\theta) = \left[\left(h\frac{\partial}{\partial\zeta} + K\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^n f(\zeta,\eta)\right]_{\substack{\zeta = x+h\theta \\ \eta = y+K\theta}}$$

dove le eguaglianze scritte a destra in basso nel secondo membro indicano i valori che si debbono dare alle ζ, η.

La (2) in virtù delle precedenti uguaglianze diventa:

$$f(x+h,y+K) = f(x,y) + h\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + K\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + K\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y) + \cdots\cdots +$$

$$+ \frac{1}{\lfloor n-1}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + K\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} f(x,y) +$$

$$+ \frac{1}{\lfloor n}\left[\left(h\frac{\partial}{\partial x} + K\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(\zeta,\eta)\right]_{\substack{\zeta = x+h\theta \\ \eta = y+K\theta}}$$

Questa è la formula di Taylor-Lagrange per funzioni di due variabili. Facendo $n=2$, essa si riduce a:

$$f(x+h,\, y+K) = f(x,y) + h\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + k\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} +$$

$$+\frac{1}{2}\left[h^2\frac{\partial^2 f(\zeta,\eta)}{\partial \zeta^2} + 2hk\,\frac{\partial^2 f(\zeta,\eta)}{\partial \zeta\,\partial \eta} + K^2\frac{\partial^2 f(\zeta,\eta)}{\partial \eta^2}\right]_{\substack{\zeta = x+h\theta \\ \eta = y+K\theta}}$$

Indicando per brevità le derivate seconde che compaiono tra parentesi, calcolate nel punto $x+\theta h,\ y+\theta K$, rispettivamente con $\overline{f''_{xx}}$, $\overline{f''_{xy}}$, $\overline{f''_{yy}}$, potremo scrivere:

$$f(x+h,\, y+k) = f(x,y) + h\,f'_x(x,y) + k\,f'_y(x,y) + \frac{1}{2}\left[h^2\overline{f''_{xx}} + 2hk\overline{f''_{xy}} + K^2\overline{f''_{yy}}\right]$$

o anche:

$$f(x+h,\, y+k) - f(x,y) = h\,f'_x(x,y) + k\,f'_y(x,y) + \frac{1}{2}\left[h^2\overline{f''_{xx}} + 2hK\overline{f''_{xy}} + K^2\overline{f''_{yy}}\right] \quad (6)$$

Quest'ultima formula ha un'importante applicazione nella ricerca dei massimi e dei minimi d'una funzione di due variabili.

§7. Massimi e minimi in una funzione di due variabili.

Estendendo la definizione data per le funzioni di una variabile sola, si dirà che una funzione $f(x,y)$ di due variabili ha nel punto A un massimo / minimo se esiste tutto un intorno di A dentro il quale la funzione ha valori tutti più piccoli / più grandi che nel punto A.

In altre parole la funzione $f(x,y)$ ha nel punto $A(x_0\, y_0)$ un massimo / minimo se si possono trovare due quantità h, K, tali che per esse, e per ogni altro sistema di valori h' K' per cui sia $|h'| \leq |h|$; $|K'| \leq |K|$ si abbia:

$$f(x_0+h', y_0+K') - f(x_0 y_0) \lesseqgtr 0$$

Supponiamo ora che nel punto $A(x_0\, y_0)$ la $f(x,y)$ abbia un $\begin{smallmatrix}\text{massimo}\\ \text{minimo}\end{smallmatrix}$. Se allora nella $f(x, y)$ si suppone di far variare la sola x tenendo y costantemente uguale a y_0 la funzione di x che ne risulta avrà un $\begin{smallmatrix}\text{massimo}\\ \text{minimo}\end{smallmatrix}$ nel punto x_0; e quindi avrà la derivata prima uguale a zero; in altre parole sarà $f'_x = 0$ nel punto (x_0, y_0).

Analogamente si dimostra che dovrà pure essere $f'_y = 0$ nello stesso punto. E perciò: Condizione necessaria affinchè una funzione di due variabili ammetta un massimo o un minimo in un punto è che le sue prime derivate parziali calcolate in questo punto siano entrambe nulle.

Questa condizione necessaria non è sufficiente.

Vediamo quindi ora di trovare in qualche caso le condizioni sufficienti.

A tale oggetto supponiamo che la $f(x, y)$ nel punto $A(x_0, y_0)$ soddisfaccia alla condizione necessaria per l'esistenza d'un massimo o di un minimo: cioè nel punto $(x_0.y_0)$ si abbia:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Consideriamo allora la differenza:

$$f(x_0+h, y_0+K) - f(x_0, y_0)$$

Per la (6) si ha evidentemente:

Taylor

$$f(x_0+h, y_0+K) - f(x_0 y_0) = h f'_x(x_0 y_0) + K f'_y(x_0 y_0) + \frac{1}{2}\left[h^2 \overline{f''_{xx}} + 2hK \overline{f''_{xy}} + K^2 \overline{f''_{yy}}\right]$$

che nel nostro caso si riduce alla:

$$f(x_0+h,\, y_0+K)-f(x_0\, y_0)=\frac{1}{2}\left[h^2\overline{f''_{xx}}+2hK\overline{f''_{xy}}+K^2\overline{f''_{yy}}\right]$$

Per questa uguaglianza il segno di

$$f(x_0+h,\, y_0+K)-f(x_0\, y_0)$$

è il segno del trinomio:

$$h^2\overline{f''_{xx}}+2hK\overline{f''_{xy}}+K^2\overline{f''_{yy}} \tag{7}$$

Studiamo ora il segno di questo trinomio. se contine

Ponendo

$$\overline{f''_{xx}}=\alpha \quad ; \quad \overline{f''_{xy}}=\beta \quad ; \quad \overline{f''_{yy}}=\gamma$$

il trinomio (7) si scriverà:

$$\alpha h^2+2\beta hK+\gamma K^2 \tag{8}$$

Se $\alpha \neq 0$ questo trinomio si può anche scrivere moltiplicandolo e dividendolo per α:

$$\frac{1}{\alpha}\left[\alpha^2h^2+2\alpha\beta hK+\alpha\gamma K^2\right]$$

o anche aggiungendo o togliendo nel trinomio tra parentesi la quantità $K^2\beta^2$:

$$\frac{1}{\alpha}\left[\alpha^2h^2+2\alpha\beta hK+K^2\beta^2+\gamma\alpha K^2-K^2\beta^2\right]=\frac{1}{\alpha}\left[(\alpha h+K\beta)^2+K^2(\gamma\alpha-\beta^2)\right] \tag{9}$$

Se $\gamma\alpha-\beta^2$ è positivo e diverso da zero tutta l'espressione tra parentesi quadre, è positiva ed è certamente diversa da zero se h e K non sono entrambi nulle e quindi tutta la (9) ha il segno di $\frac{1}{\alpha}$ e quindi di α.

Questo vale nelle due ipotesi $\alpha\gamma-\beta^2>0$ e $\alpha\neq 0$.

Osserviamo che la seconda ipotesi $\alpha\neq 0$ è contenuta implicitamente nella prima: $\alpha\gamma-\beta^2>0$.

E infatti se $\alpha\gamma-\beta^2>0$ non può essere $\alpha=0$, chè allora sarebbe $\alpha\gamma-\beta^2=-\beta^2\leq 0$.

Dunque, potremo dire che per $\alpha\gamma-\beta^2>0$ il trinomio

α e γ devono avere = segno e

(8) ha il segno di α, e non può essere zero che nel caso $h=K=$ $=0$.

Ma $\alpha=\overline{f''_{xx}}$; $\beta=\overline{f''_{xy}}$; $\gamma=\overline{f''_{yy}}$.

Da quanto precede si raccoglie quindi che la differenza $f(x_0+h, y_0+K)-f(x_0 y_0)$, nell'ipotesi $f'_x(x_0 y_0)=$ $=f'_y(x_0 y_0)=0$ supposto che:

$$\overline{f''_{xx}}\,\overline{f''_{yy}}-\left(\overline{f''_{xy}}\right)^2>0$$

(dove $\overline{f''_{xx}}, \overline{f''_{xy}}, \overline{f''_{yy}}$ dipendono dall'h e dal K) ha il segno di $\overline{f''_{xx}}$ e non può essere nulla se h e K non sono entrambi nulli (caso che per la natura stessa delle nostre considerazioni possiamo ritenere escluso).

Ora supponiamo che tutte e tre le derivate seconde di $f(x,y)$ siano continue: sarà conseguentemente continua:

$$\overline{f''_{xx}}\,\overline{f''_{yy}}-\left[\overline{f''_{xy}}\right]^2.$$

Se quindi è:

$$\overline{f''_{xx}}(x_0 y_0)\,\overline{f''_{yy}}(x_0 y_0)-\left[\overline{f''_{xy}}(x_0 y_0)\right]^2>0 \qquad (10)$$

si potrà trovare tutto un intorno del punto $(x_0 y_0)$ per cui sia soddisfatta la (10) e cioè:

$$\overline{f''_{xx}}\,\overline{f''_{yy}}-\left[\overline{f''_{xy}}\right]^2>0.$$

Di più essendo $\overline{f''_{xx}}$ continua, se $\overline{f''_{xx}}(x_0 y_0)\gtrless 0$ si può trovare tutto un intorno del punto $(x_0 y_0)$ in cui: $f''_{xx}\gtrless 0$.

Per la continuità delle derivate seconde si conclude che se in A: $\overline{f''_{xx}}\,\overline{f''_{yy}}-\left[\overline{f''_{xy}}\right]^2>0$ si può trovare un intorno del punto per cui questa differenza sia sempre positiva e maggiore di zero, e in cui $\overline{f}''_{xx}$ abbia lo stesso segno che $f''_{xx}(x_0 y_0)$.

Per le considerazioni precedenti allora la differenza

$$f(x_0+h,\, y_0+k)-f(x_0 y_0)$$

dove $(x_0+h,\, y_0+k)$ è un punto di quell'intorno di A che abbiamo testè considerato, è diversa da zero, se h e k non sono entrambi nulli, ed ha il segno di $f''_{xx}(x_0,\, y_0)$.

Sarà dunque per ogni punto $(x_0+h,\, y_0+k)$ di questo intorno:

$$f(x_0+h,\, y_0+k)-f(x_0,\, y_0) \gtrless 0 \quad \text{se} \quad f''_{xx}(x_0 y_0) \gtrless 0$$

che è quanto dire che nel punto A la funzione ha un $\substack{\text{minimo}\\\text{massimo}}$.

Raccogliamo brevemente i risultati della nostra discussione.

Teorema. – Perchè la funzione $f(x,y)$ abbia nel punto $A(x_0 y_0)$ un massimo o un minimo è necessario che $f'_x(x_0 y_0)=f'_y(x_0 y_0)=0$. Qualora queste condizioni siano verificate, se:

$$f''_{xx}(x_0 y_0)\, f''_{yy}(x_0 y_0)-\left[f''_{xy}(x_0 y_0)\right]^2$$

è positivo e diverso da zero esiste in A un massimo (supposto che le derivate seconde di $f(x\, y)$ siano continue) se per $x=x_0$ e $y=y_0$:

$$f''_{xx} < 0$$

ed un minimo se

$$f''_{xx} > 0.$$

Noi abbiamo esaurito completamente la questione dei massimi e minimi nel caso che in $A(x_0 y_0)$ sia

$$f''_{xx}(x_0 y_0) f''_{yy}(x_0 y_0) - \left[f''_{xy}(x_0 y_0) \right]^2 > 0$$

Noi ci limiteremo ad osservare senza dimostrazioni, che se questa differenza è negativa in $A(x_0 y_0)$ non esiste nè massimo, nè minimo: se poi invece fosse nulla, senza ulteriori considerazioni, (che noi non faremo) non si può stabilire se in A la funzione ha un massimo od un minimo.

§8 – Generalizzazione del calcolo integrale a funzioni di più variabili.

Abbiamo visto che data una funzione di più variabili, per calcolarne la derivata parziale rispetto ad una sola variabile, bisognava considerare le altre variabili come costanti.

In modo analogo, data una funzione a due o più variabili, per integrale della funzione data rispetto ad una variabile, intenderemo l'integrale di quella funzione che si ottiene considerando le altre variabili come costanti.

Così volendo calcolare lo $\int_{x+y}^{x-y} (x^2 + yx^3)\, dx$ considereremo y costante e scriveremo:

$$\int_{x+y}^{x-y} (x^2 + yx^3)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + y \frac{x^4}{4} \right]_{x+y}^{x-y} = \left[\frac{(x-y)^3}{3} + y \frac{(x-y)^4}{4} \right] - \left[\frac{(x+y)^3}{3} + y \frac{(x+y)^4}{4} \right].$$

Come si vede dall'esempio precedente lo

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y)\, dx$$

ha un valore che in generale dipende da y è cioè una funzione $\Phi(y)$. Ci proponiamo ora di trovare la derivata di $\phi(y)$ rispetto ad y.

I limiti di integrazione α e β possono essere indipendenti da y od essere funzioni di y. — Supponiamo dapprima di essere nel primo caso.

Per definizione di derivata, poichè α e β non dipendono da y è

$$\phi'(y)_y = \lim_{h=0} \frac{\int_\alpha^\beta f(x, y+h)\,dx - \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx}{h}$$

ossia

$$\phi'(y)_y = \lim_{h=0} \int_\alpha^\beta \frac{\left[f(x, y+h) - f(x, y)\right] dx}{h} \qquad (1)$$

Supponendo che $f(x, y)$ abbia derivate parziali prima e seconda f'_y ed f''_{yy} finite rapporto ad y, applicando la formula di Taylor, allo sviluppo di $f(x, y+h)$ in cui si ritenga la x costante avremo arrestandoci al terzo termine dello sviluppo

$$f(x, y+h) = f(x, y) + h f'_y(x, y) + \frac{h^2}{2!} \overline{f''_{yy}},$$

ove

$$\overline{f''_{yy}} = f''_{yy}(x, y + \theta h)$$

$$0 < \theta < 1$$

e la (1) per la precedente identità diverrà:

$$\phi'(y)_y = \lim_{h=0} \int_\alpha^\beta \left[f'_y(x, y) + \frac{h}{2!} \overline{f''_{yy}} \right] dx$$

da cui, per noti teoremi sull'integrale e il limite di una somma di un numero finito di termini, si ha successivamente:

$$\phi'(y)_y = \lim_{h=0} \left[\int_\alpha^\beta f'_y(x, y)\,dx + \frac{h}{2!} \int_\alpha^\beta \overline{f''_{yy}}\,dx \right] =$$

$$= \lim_{h=0} \int_\alpha^\beta f'_y(x, y)\,dx + \lim_{h=0} \frac{h}{2!} \int_\alpha^\beta \overline{f''_{yy}}\,dx \qquad (2)$$

se questi limiti esistono.

Dimostriamo intanto che esiste e calcoliamo il

$$\lim_{h=0} \frac{h}{2!}\int_\alpha^\beta \overline{f''_{yy}}\, dx = \lim_{h=0} \frac{h}{2!}\int_\alpha^\beta f''_{yy}(x, y+\theta h)\, dx$$

Se supponiamo $\left|f''_{yy}\right| < M$ e perciò:

$$\left|\int_\alpha^\beta f''_{yy}\, dx\right| < \left|\int_\alpha^\beta M\, dx\right| = \left|M(\beta-\alpha)\right|$$

sarà:

$$\left|\int_\alpha^\beta f''_{yy}\, dx\right| < \left|M(\beta-\alpha)\right|$$

Se ne deduce, moltiplicando per h e passando al limite per $h=0$, che:

Moltipl. un numero finito per h che tende a 0. Tutto tende a 0

$$\lim_{h=0} \frac{h}{2!}\int_\alpha^\beta f''_{yy}\, dx = 0$$

cosicché infine

$$\left[\int_\alpha^\beta f(x,y)\, dx\right]'_y = \int_\alpha^\beta f'_y(x,y)\, dx$$

da cui si deduce il:

Teorema di derivazione sotto il segno di integrale-

Quando i limiti dell'integrale rispetto a x di una funzione a due variabili $f(x,y)$ non dipendono di y, la derivata dell'integrale fatta rispetto a y, si ottiene derivando rispetto ad y la funzione che sta sotto il segno di integrale, se, come abbiamo visto, la $f(x,y)$ ha derivate parziali prima e seconda rispetto ad y finite.

Supponiamo ora α e β funzioni di y.

Premettiamo alcune considerazioni. Supponiamo di dover derivare rispetto ad x (limite superiore) lo

$$\int_\alpha^x \varphi(z)\, dz$$

funzione di y, z, t, essendo y, z, t rispettivamente funzioni di y sarà funzione composta di y. Avremo dunque:

$$\frac{dF}{dy} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(z,\,t\ cost.)} y'_y + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{(y,\,t\ cost.)} z'_y + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{(z,\,y\ cost.)} t'_y$$

Ora, per trovare $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ bisogna considerare z e t come costanti; ma quando i limiti z e t sono indipendenti da y, per il caso precedente, la derivata si fa sostituendo alla funzione sotto il segno di integrale la sua derivata rispetto ad y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_z^t f'_y(x, y)\, dx.$$

E così pure sappiamo, essendo z limite inferiore che

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -f(z, y)$$

e che, essendo t limite superiore,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = f(t, y)$$

ed essendo infine $y'_y = 1$, dalle precedenti dedurremo infine

$$\left[\int_z^t f(x, y)\, dx\right]'_y = \int_z^t f'_y(x, y)\, dx + f(t, y)\, t'_y - f(z, y)\, z'_y.$$

Le regole precedentemente enunciate richieggono che la funzione sotto il segno di integrazione sia finita e continua in tutto l'intervallo (α, β) insieme alle sue derivate.

(1) – Ci varremo delle precedenti considerazioni per risolvere il problema fondamentale del calcolo integrale per funzioni di due variabili.

Il problema fondamentale del calcolo integrale per le funzioni d'una sola variabile, consiste, data una funzione $\varphi(x)$, nel trovare una funzione $f(x)$ tale che la sua derivata sia $\varphi(x)$, o ciò che è lo stesso, tale che il suo differenziale sia $\varphi(x)\,dx$.

Il problema analogo per funzioni di due variabili, consiste, date due funzioni di x e y: $M(x,y)$, $N(x,y)$ nel trovare una $f(x,y)$ tale che: note le D. p[illegible]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y); \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y).$$

Sotto altra forma il problema si può enunciare nel modo seguente: date le due funzioni $M(x,y)$, $N(x,y)$ trovare una funzione tale che il suo differenziale sia:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy. \qquad (3)$$

Abbiamo visto che il problema per le funzioni di una variabile sola è risolubile se $\varphi(x)$ è continua (la continuità essendo condizione sufficiente non necessaria per l'integrazione).

Nel caso di funzioni di due variabili noi troveremo che non è sempre possibile trovare una $f(x,y)$ che risolva il problema, ma perchè esista le $M(x,y)$, $N(x,y)$ debbono soddisfare a certe relazioni. Se esiste realmente una $f(x,y)$ che risolve il problema, noi chiameremo la (3) differenziale esatto della $f(x,y)$.

Supponiamo che la (3) sia un differenziale esatto e siano per ipotesi $M(x,y)$, $N(x,y)$ continue insieme colle loro derivate parziali.

Poichè la (3) è un differenziale esatto esiste una $f(x,y)$ tale che

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

Se deriviamo $M(x,y)$ rispetto a y e $N(x,y)$ rispet-

ad $\frac{\partial f}{\partial x}$

to a x, avremo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Ma poichè le derivate parziali del secondo ordine sono finite e continue, per il teorema della inversione delle derivazioni è:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

e cioè:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Abbiamo dunque che condizione necessaria perchè la (3) sia un differenziale esatto è: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Ma si può anche far vedere che in generale questa condizione è sufficiente: cioè se $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ la (3) è un differenziale esatto.

Il teorema vale qualunque sia il campo di variabilità della M e N, purchè esso non sia un campo bucato, cioè un campo come quello della nostra figura, che nel suo interno comprende le superfici A e B in cui la funzione non è definita. Nel caso di campi bucati le discussioni e i risultati si complicherebbero, e noi li escludiamo dalle considerazioni di questo capitolo.

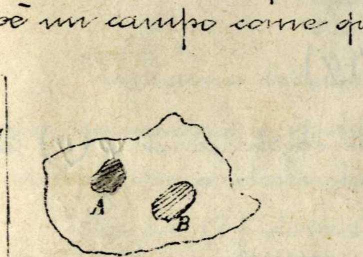

Fig. 23

Supponiamo per semplicità, che il campo di variabilità delle M e N sia un rettangolo coi lati paralleli agli assi x e y. Siano a, b l'ascissa e l'ordinata minime del campo. Poichè $\frac{\partial f}{\partial x} = M$, allora (considerando y come costante) ne deduciamo che:

$$f=\int_a^x M(x,y)\,dx+c$$

dove c è una costante rispetto alla x, ossia è una funzione $\varphi(y)$ di y. Ed è viceversa ben chiaro che la funzione $f(x,y)$ definita dalla:

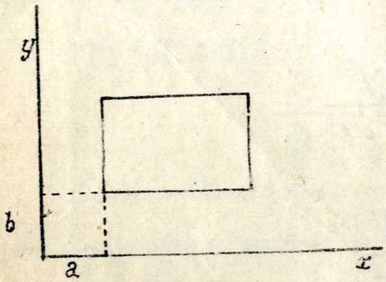

Fig. 24.

$$f(x,y)=\int_a^x M(x,y)\,dx+\varphi(y) \qquad (5)$$

ha M per derivata parziale rispetto alla x.

Resta a vedere se si può determinare $\varphi(y)$ per modo che la derivata della (5) rispetto a y sia $N(x,y)$. La derivata di (5) rispetto a y (poichè nell'integrale $\int_a^x M\,dx$ i limiti d'integrazione non sono funzioni di y e quindi si può applicare la regola di derivazione sotto il segno) è data da:

$$\int_a^x \frac{\partial M}{\partial y}\,dx+\varphi'(y).$$

Dobbiamo dunque vedere se esiste una $\varphi(y)$ tale che:

$$N(x,y)=\int_a^x \frac{\partial M}{\partial y}\,dx+\varphi'(y)$$

cioè:

$$N(x,y)-\int_a^x \frac{\partial M}{\partial y}\,dx=\varphi'(y). \qquad (6)$$

Poichè il secondo membro di (6) non dipende che dalla sola y, bisognerà che anche il primo membro sia una funzione $\psi(y)$ della sola y.

E in tale caso la funzione $\varphi(y)$ sarà definita dalla

$$\varphi(y) = \int \psi(y)\, dy + \text{cost.}$$

Bisogna dunque trovare la condizione perchè il primo membro di (6) sia indipendente da x. Ma ciò equivale evidentemente a dire che la derivata di (6) rispetto alla x è nulla, ossia che

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Questa condizione da noi già trovata come necessaria, è dunque anche sufficiente.

La $f = \int_a^x M\, dx + \varphi(y)$ è dunque [come la $\varphi(y) = \int \psi(y) + \text{cost}$] determinata a meno di una costante additiva, come potevamo aspettarci.

(2) Problema affatto analogo al precedente, e che noi risolveremo per le eventuali applicazioni è il seguente:

Supponiamo data la funzione di x e di y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = P(x, y). \qquad (7)$$

Vogliamo trovare il valore della funzione z. Useremo notazioni e ipotesi analoghe alle precedenti per il campo ove è definita la P.

Per la (7) dovrà essere: scomponendo.

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = P(x, y)$$

$\frac{\partial z}{\partial y} = P(x,y)$

e perciò dovrà essere:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \int_a^x P(x, y)\, dx + Y \qquad (8)$$

dove Y è una funzione arbitraria di y.

Per la (8) dovrà quindi essere:

$$z = \int_b^y \left[\int_a^x P(x,y)\, dx \right] dy + \varphi(y) + f(x) \qquad (9)$$

dove $\varphi(y)$ è l'integrale di Y: ed essendo Y una funzione arbitraria, lo sarà pure $\varphi(y)$. Nella (9) comp are anche la $f(x)$ funzione arbitraria di x, perchè se è integrato rispetto a y e quindi l'integrale resta determinato a meno di una costante rispetto ad y che può essere una funzione affatto qualunque di x.

Nella (9) se poniamo ora l'ipotesi che $P(x,y)$ sia costantemente zero è:

$$\int_b^y dy \left[\int_a^x P(x,y)\, dx \right] = 0 .$$

E allora abbiamo che la funzione $z(x,y)$ che ha la derivata mista di second'ordine uguale a zero è somma di due funzioni l'una di x e l'altra di y affatto arbitrarie, e cioè:

$$z = \varphi(y) + f(x) \qquad (10)$$

Si può verificare facilmente il nostro risultato derivando la $z = \varphi(y) + f(x)$ prima rispetto a x e poi rispetto a y. Si avrebbe:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x)$$

e derivando quindi la $f'(x)$ rispetto a y si ottiene lo zero.

Facciamo un cambiamento di variabili: poniamo cioè: $u = x + y$; $v = x - y$ da cui

$$x = \frac{u+v}{2} \qquad\qquad y = \frac{u-v}{2}.$$

La z funzione di x e y può dunque considerarsi come funzione di u e di v, a loro volta funzioni di x e y.

Derivando allora la z rapporto a x tenendo y costante, applicando il teorema di derivazione di funzione di funzioni si ottiene:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\,u'_x+\frac{\partial z}{\partial v}\,v'_x$$

ossia essendo $u'_x=+1$ e $v'_x=+1$ si ha

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}\,.$$

Derivando ora la $\frac{\partial z}{\partial x}$ così ottenuta rispetto a y si ha:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\,u'_y+\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\,v'_y\right)+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\,v'_y+\frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial u}\,u'_y\right)$$

per cui, osservando che $u'_y=1$; $v'_y=-1$, si ha:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial u}$$

ed essendo per la continuità delle derivate seconde che abbiamo tacitamente ammessa: $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial u}$ si ha finalmente, osservando che per ipotesi:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=P(x,y)=0$$

$$0=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \qquad (11)$$

In conclusione le funzioni z espresse dalla (10) sono tali che per esse: $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$ dove $x=\frac{u+v}{2}$, $y=\frac{u-v}{2}$.

Si può anche dire che z è dato dalla formula

$$z=F\,(u+v)+\phi\,\,(u-v) \qquad (12)$$

dove F e ϕ sono funzioni arbitrarie degli argomenti: $u+v$, $u-v$.

Il problema, che ora noi abbiamo risolto, ha applicazione in fisica per lo studio delle corde sonore: gli è per ciò che noi abbiamo creduto bene di risolverlo, quantunque per se stesso non abbia alcun che di notevole e si riduca a un puro esercizio di integrazione.

(3) Interessante per le applicazioni che avremo occasione di farne in seguito è la ricerca della funzione f tale che il suo differenziale totale sia:

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy. \tag{13}$$

Questo problema è caso particolare di quello già risolto precedentemente: la differenza è che precedentemente M e N erano funzioni arbitrarie di x e y. Ora invece supporremo che M ed N siano funzioni rispettivamente della sola x e della sola y.

È chiaro che la (13) è un differenziale esatto, poichè:

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x) = \frac{\partial}{\partial x} N(y) = 0$$

La (13) è detta solitamente un differenziale esatto a variabili separate.

È in questo caso immediata la soluzione del problema. Indicando con z una delle funzioni che andiamo cercando, dovendo essa avere per derivata parziale, rispetto a x, la $M(x)$ sarà:

$$z = \int M(x)\,dx + Y$$

dove Y è funzione di y tale che

$$D_y\left(\int M(x)\,dx + Y\right) = N(y).$$

Ma $\quad D_y\left(\int M(x)\,dx + Y\right) = Y'$

sarà dunque:

$$y' = N(y)$$

e quindi:

$$y = \int N(y)\,dy + cost$$

$$z = \int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy + cost$$

Quest'ultima formula ci dà tutte e sole le funzioni che andavamo cercando.

Si abbia ad esempio da integrare il differenziale a variabili separate:

$$dz = sen\,x\,dx + \frac{dy}{y}$$

Le funzioni che risolvono il problema sono date da:

$$z = -\cos x + \log y + cost.$$

Capitolo IV

Equazioni differenziali.

---

§ 1 _ Considerazioni e definizioni fondamentali

Il calcolo integrale si propone il problema: conosciuta la derivata d'una funzione come si fa per trovare la funzione stessa?

Ora possiamo proporci un problema più generale ed è questo: _ Sia y una funzione di una o più variabili indipendenti; formiamone le derivate di primo, secondo, ..

meccanica data la forza, e l'accelerazione, come le y' [illegible]
trovare il moto delle equaz. ordinarie [illegible]
numero, in quelle differenziali, una funzione.
più semplice [illegible]