

## CAPITOLO II.

### EQUAZIONI FONDAMENTALI DELL'EQUILIBRIO E DEL MOTO DEI FLUIDI.

#### § 1. Equazione di equilibrio dei fluidi.

— Il principio sperimentale dell'eguaglianza di pressione in tutti i sensi conduce ad ammettere che in un fluido, in cui non si tenga conto della viscosità, ogni elemento subisca una pressione normale all'elemento stesso e quindi sempre la stessa qualunque sia la orientazione dell'elemento: cioè che la omografia di pressione si riduca ad un numero  $p$  positivo, funzione del punto  $P$ , detta *pressione specifica* del fluido, per unità d'area.

Quindi le equazioni fondamentali di equilibrio del capitolo precedente, (16) e (14), diventano

$$(1) \quad k \mathbf{F} = \text{grad } p,$$

valida in ogni punto del volume  $\tau$  occupato dal fluido; e

$$(2) \quad \mathbf{F}_n = p \mathbf{n},$$

valida in ogni punto del contorno  $\sigma$ .

La forma cartesiana della (1) è:

$$(1') \quad kX = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad kY = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad kZ = \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Se la pressione non dipende dalla densità, cioè se  $k$  (a temperatura costante) è funzione del solo punto  $P$  si dice (ne vedremo la ragione) che il fluido è *incompressibile*; ed è, prossimamente, il caso dei liquidi. Se in particolare  $k$  è costante, il fluido è omogeneo.

In ogni altro caso dicesi *compressibile* o *gas*; esiste allora una relazione fra  $p$  e  $k$  (*equazione caratteristica* del gas; per es., la legge di BOYLE e MARIOTTE),

$$(3) \quad p = f(k).$$

Consideriamo il primo caso. Perchè sussista la (1), la forza deve soddisfare ad una relazione facile a stabilirsi. Infatti si deduce subito

$$\text{rot}(k\mathbf{F}) = 0$$

e quindi per la (55) del Vol. I, pag. 31,

$$k \operatorname{rot} \mathbf{F} + \operatorname{grad} k \wedge \mathbf{F} = 0,$$

e moltiplicando scalarmente per  $\mathbf{F}$  si deduce

$$(4) \quad \mathbf{F} \times \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0.$$

Questa è la condizione necessaria (e che potrebbe anche dimostrarsi sufficiente) perchè le linee di forza ammettano un sistema di superficie ortogonali. Poscia la (1) con una quadratura ci farà conoscere  $p$  a meno di una costante arbitraria:

$$(5) \quad p = \varphi(P) + \text{cost.}$$

Le superficie  $\varphi = \text{cost.}$ , sopra ognuna delle quali è costante la pressione, diconsi *isobariche* o di *livello*, perchè la superficie libera di un liquido a pressione costante è certamente una di queste.

Poichè  $p$  è funzione uniforme, nell'interno della massa fluida, per ogni punto del fluido passa una ed una sola superficie di livello; due superficie di livello corrispondenti a due diversi valori di  $p$  non possono mai incontrarsi nell'interno del fluido, nè una stessa superficie può intersecare se stessa; infine in ogni punto la forza è normale alla isobarica passante per quel punto: cioè le traiettorie ortogonali delle isobariche sono le linee di forza.

Nel caso che le forze derivano da un potenziale; cioè

$$\mathbf{F} = \text{grad } U,$$

la (4) è identicamente soddisfatta, riflettendo che  $\text{rot grad } U = 0$ ; poscia da (1) si trae

$$d p = k d U;$$

dunque sarà

$$k = f(U) \text{ e } p = \varphi(U) + \text{cost.}$$

*Le isobariche coincidono con le superficie di egual densità e con le superficie equipotenziiali.*

*Se due fluidi a contatto sono in equilibrio per l'azione di forze derivabili da uno stesso potenziale  $U$ , la superficie di separazione è una superficie equipotenziiale.*

Infatti per ogni punto di essa, pensato appartenente al primo o al secondo fluido, si ha

$$d p = k_1 d U = k_2 d U$$

quindi  $d U = 0$ .

Nel caso particolare di un liquido omogeneo,  $k = \text{cost.}$ , da (1) si deduce che le forze derivano dal potenziale  $U = \frac{p}{k} + \text{cost.}$ ; e nel caso di un

Liquido pesante si ha dunque, colle solite convenzioni,

$$(6) \quad p = p_0 + k g (z_0 - z).$$

Le superficie di livello sono piani orizzontali; la superficie libera di un liquido pesante omogeneo e convenientemente limitata, a contatto con un gas a pressione costante, è un piano orizzontale: se si hanno più vasi comunicanti a contatto collo stesso gas,  $p$  essendo sempre la stessa, anche  $z$  ricavata da (6), sarà sempre la stessa; cioè si avrà dovunque lo stesso livello (*principio dei vasi comunicanti*).

Se  $p_0 = 0$ , da (6) si deduce pure che la differenza di livello misura la pressione (*principio del barometro*); ecc.

Consideriamo il caso dei fluidi compressibili. Le leggi di BOYLE e GAY-LUSSAC stabiliscono una relazione tra pressione e densità. La prima (entro certi limiti) esprime la proporzionalità tra pressione e densità (a temperatura costante); cioè

$$(7) \quad p = a k$$

dove  $a$  è un coefficiente costante per ogni fluido. Ed è a questo solo caso che intendiamo limitarci, cioè a quello della temperatura costante. La (1) ci dà

$$F = \frac{a \text{ grad } p}{p} = \text{grad } \log p^a ;$$

*Le forze esterne derivano da un potenziale*

$$U = \log p^a + \text{cost.}$$

Di qui

$$p = p_0 e^{\frac{U_0 - U}{a}};$$

le superficie isobariche coincidono ancora con le equipotenziali.

Per un fluido pesante

$$p = p_0 e^{\frac{g}{a} (\tau_0 - \tau)};$$

quindi per qualunque valore di  $z$  è  $p \neq 0$ ; cioè l'equilibrio non è possibile in un recipiente aperto a contatto col vuoto.

La formula precedente, applicata ad uno strato d'aria sufficientemente piccolo, è la base delle formule barometriche.

## § 2. Principio d'Archimede.

*Un corpo rigido immerso in un fluido subisce un sistema di pressioni le cui coordinate sono eguali e contrarie a quelle delle forze esterne agenti sul fluido spostato.*

Intendiamo per *fluido spostato* la parte di fluido che occupa un volume  $\tau$  identico a quello occupato dal corpo.

Infatti le coordinate del sistema di pressioni che sollecita la superficie  $\sigma$  del corpo sono

$$\mathbf{R} = \int p \mathbf{n} d\sigma, \quad \mathbf{M} = \int p (P - O) \wedge \mathbf{n} d\sigma;$$

quelle delle forze esterne sollecitanti il fluido spostato sono

$$\mathbf{R}_e = \int k \mathbf{F} d\tau, \quad \mathbf{M}_e = \int k (P - O) \wedge \mathbf{F} d\tau.$$

Ma nell'interno del fluido spostato vale la (I) quindi applicando il teorema del gradiente e la formula (68) del Vol. I, pag. 37 al caso di  $\alpha = p$  (numero) si deduce

$$\mathbf{R}_e = \int \text{grad } p \cdot d\tau = - \int p \mathbf{n} \cdot d\sigma;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_e &= \int (P - O) \wedge \text{grad } p \cdot d\tau \\ &= - \int p (P - O) \wedge \mathbf{n} \cdot d\sigma; \end{aligned}$$

che provano il teorema.

Esso si estende subito al caso in cui il corpo è immerso in due liquidi o in un liquido e in un fluido in equilibrio e si può allo stesso modo provare che:

*Una superficie rigida chiusa e piena di un fluido subisce un sistema di pressioni le cui coordinate sono eguali a quelle delle forze agenti sul fluido.*

Nel caso del fluido pesante:

*Le pressioni che un fluido pesante esercita su di un corpo immerso ammettono una risultante eguale e contraria al peso del fluido spostato e passante pel centro di massa (spinta idrostatica).*

Ciò costituisce il principio d'ARCHIMEDE. (\*)

Supposto il corpo immerso soggetto alla sola forza di gravità esso sarà in equilibrio nel fluido, quando:

*Il peso del volume del fluido spostato è eguale al peso del corpo;*

*Il centro di massa del corpo e del fluido spostato (centro di spinta) sono sulla stessa verticale.*

Così la ricerca delle posizioni di equilibrio è ridotta ad una questione di geometria; ne diamo qualche esempio negli esercizi.

Nel caso di un liquido a contatto con un gas, per es. l'aria, si può trascurare la spinta idrostatica dovuta al gas, rispetto a quella del liquido; quindi applicare il teorema precedente.

Se il corpo è omogeneo, il centro di spinta coincide col centro di massa del corpo.

### § 3. Equazioni del moto di un fluido.

— Se  $v$  è la velocità di un punto del fluido in

---

(\*) ARCHIMEDE, *De insidentibus aquae*. Prop. 3-7. ARCHIMEDIS Opera omnia; ediz. Heiberg. MACH, l. c., Cap. 1<sup>o</sup>, pag. 83.

cui è applicata la forza di vettore  $\mathbf{F}$ ;  $p$  e  $k$  la pressione e la densità nello stesso punto al tempo  $t$ , le equazioni fondamentali dell'idrodinamica sono:

$$(8) \quad k \left( \mathbf{F} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = \text{grad } p$$

$$(9) \quad p = f(k)$$

$$(10) \quad \frac{\partial k}{\partial t} + \text{div}(k\mathbf{v}) = 0$$

che assume pure l'altra forma

$$(11) \quad \frac{d k}{d t} + k \text{div } \mathbf{v} = 0.$$

La (8) si deduce da (1) applicando il principio di d'ALEMBERT ed osservando che la forza di inerzia della massa  $k d\tau$  che intorna il punto  $P$  è  $k \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\tau$ .

La (9) non è altro che la solita equazione caratteristica (3).

Ma le equazioni (8) e (9) non bastano (anche col concorso delle condizioni iniziali) a determinare le tre funzioni incognite del tempo,  $\mathbf{v}$ ,  $p$ ,  $k$ .

La terza equazione da ricercare, detta di *continuità*, deve esprimere che la variazione della massa di fluido contenuta entro una qualunque superficie chiusa  $\sigma$ , per es. nell'unità di tempo,

è eguale al fluido che entra attraverso  $\sigma$  nello stesso tempo.

Sia  $d\tau$  un elemento di volume entro  $\sigma$ ;  $k d\tau$  la sua massa al tempo  $t$ ;  $\left(k + \frac{\partial k}{\partial t} dt\right) d\tau$  quella al tempo  $t + dt$ . La variazione totale della massa nel tempo  $dt$  è quindi espressa da

$$dt \int \frac{\partial k}{\partial t} d\tau.$$

La quantità di fluido che entra in  $\tau$  attraverso  $d\sigma$  nel tempo  $dt$  è eguale a quella contenuta in un cilindro di base  $d\sigma$  ed altezza  $\mathbf{v} \times \mathbf{n} dt$ ; e quella attraverso  $\sigma$  è

$$dt \int k \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma = - dt \int \operatorname{div} (k \mathbf{v}) d\tau$$

in virtù del teorema della divergenza [Vol. I, pag. 35]. Dall'eguaglianza delle due diverse espressioni, valida qualunque sia  $\tau$ , risulta la (10), *prima forma dell'equazione di continuità*.

Applicando la (55) del Vol. I, pag. 31, si ha

$$\frac{\partial k}{\partial t} + k \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{grad} k \times \mathbf{v} = 0;$$

e poichè  $k$  è funzione del tempo e del punto  $P$ ,

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{dk}{dP} \mathbf{v} = \frac{\partial k}{\partial t} + \operatorname{grad} k \times \mathbf{v}$$

[Vol. I, pag. 30, form. (50)] risulta la (11) seconda forma dell'equazione di continuità.

Se il fluido è incompressibile,  $k$  è indipendente da  $t$ ; l'equazione di continuità (11) diventa

$$(11') \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Un caso particolare assai importante è quando le forze derivano da un potenziale  $U$ ;  $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$ .

Inoltre è da osservare che si può sempre determinare una funzione  $\Pi$  tale che

$$\frac{1}{k} \operatorname{grad} p = \operatorname{grad} \Pi.$$

Infatti questa equazione equivale, quando si moltiplichino scalarmente per  $dP$ , alla

$$\frac{1}{k} d p = d \Pi$$

onde

$$\Pi = \int \frac{d p}{k};$$

cioè la ricerca di  $\Pi$ , essendo  $p$  funzione di  $k$ , è ridotta alle quadrature.

Se infine poniamo

$$\Phi = U - \Pi$$

la (8) si trasforma nella seguente

$$(12) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \text{grad } \Phi;$$

$\Phi$  dicesi *potenziale di accelerazione*.

§ 4. **Equazioni di Euler.** — Per un determinato istante vogliamo determinare lo stato cinetico del fluido; cioè la velocità con cui le varie molecole fluide passano per un determinato punto fisso della massa fluida. Si riguarda quindi  $\mathbf{v} = f(P, t)$ ,  $P$  e  $t$  pensate come variabili indipendenti. Notando quindi che

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v}$$

l'equazione (8) diventa

$$(13) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{k} \text{grad } p$$

forma assoluta dell'equazione di EULER. (\*) Determinata  $\mathbf{v}$  funzione di  $P$  e di  $t$  si dovrà ancora integrare la

$$\frac{dP}{dt} = \mathbf{v}.$$

(\*) EULER, *Principes généraux du mouvement des fluides*, Mém. Académie de Berlin, 1755, pag. 274 (vedi in particolare pagg. 284 e 286).

È facile passare alle formole in coordinate cartesiane. Considero la terna  $O(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ; e dicansi  $x, y, z$  le coordinate di  $P$ ;  $u, v, w$  le componenti della velocità  $\mathbf{v}$  di quel punto al tempo  $t$ , funzioni delle quattro variabili indipendenti  $x, y, z, t$ .

Poichè l'omografia  $\frac{d\mathbf{v}}{dP}$  è caratterizzata dai nove

coefficienti  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ ; ecc., da (8) ricaviamo

subito

$$(13') \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x};$$

e due equazioni analoghe. Da (10) e (11) poi ricaviamo le due forme dell'equazione di continuità:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial (ku)}{\partial x} + \frac{\partial (kv)}{\partial y} + \frac{\partial (kw)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{dk}{dt} + k \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0.$$

Poichè l'integrazione delle equazioni stabilite non riesce che in casi particolari, dedurremo alcune leggi generali colla diretta considerazione delle equazioni fondamentali.

§ 5. **Teorema della circuitazione.** — Vogliamo ora supporre che le forze esterne derivino

da un potenziale uniforme e continuo; e che quindi in ogni punto del fluido valga la (12), con  $\Phi$  funzione uniforme e continua di  $P$ . In queste ipotesi si ha:

*La circuitazione della velocità lungo una qualunque curva chiusa, mobile col fluido, è costante. (\*)*

Cioè (Vol. I, pag. 39)

$$(14) \quad C = \int_s \mathbf{v} \times dP = \text{cost.}$$

Riguardiamo  $s$  costantemente come il luogo delle stesse molecole fluide e siano  $s_0$  e  $P_0$  la posizione di  $s$  e  $P$  al tempo  $t_0$ ;  $\lambda$  l'unico parametro che fissa la posizione di  $P_0$  su  $s_0$  (per es. l'arco contato su  $s_0$  da una certa origine); si può quindi riguardare  $P$  funzione di  $t$  e  $\lambda$ ; e scrivere

$$C = \int_{s_0} \mathbf{v} \times \frac{dP}{d\lambda} d\lambda.$$

Derivando rispetto al tempo e notando che  $s_0$  è fissa, si ha

$$\frac{dC}{dt} = \int_{s_0} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \frac{dP}{d\lambda} d\lambda + \int_{s_0} \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{v}}{d\lambda} d\lambda$$

(\*) W. THOMSON, *On vortex motion*, Trans. of the Royal Soc. Edinbourg, **25**, pag. 217 (1867).

e per la (12) essendo

$$\text{grad } \Phi \times \frac{dP}{d\lambda} = \frac{d\Phi}{d\lambda},$$

otteniamo

$$\frac{dC}{dt} = \int_{s_0} \frac{d\Phi}{d\lambda} d\lambda + \frac{1}{2} \int_{s_0} \frac{d\mathbf{v}^2}{d\lambda} d\lambda;$$

ma  $\Phi$  e  $\mathbf{v}^2$  e le loro derivate sono funzioni uniformi, continue; gl' integrali, estesi ad una curva chiusa, di differenziali esatti sono nulli; quindi il teorema è dimostrato.

Applicando la (72) del Vol. I, pag. 39 alla (14) otteniamo

$$(15) \quad C = \int_s \mathbf{v} \times dP = \int_\sigma \text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma = \text{cost.}$$

*Il flusso del rotore della velocità, attraverso un qualsiasi diaframma avente per contorno una curva chiusa, è costante per tutta la durata del moto.*

**§ 6. Teorema di Lagrange. Potenziale di velocità.** — Una conseguenza importantissima del teorema sulla circuitazione è questa:

*Se in un determinato istante, per una certa parte della massa fluida, è  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ , sarà sempre  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ , per la stessa parte del fluido.*

Infatti da (15) supposto  $s$  e  $\sigma$  appartenenti alla parte di fluido considerata risulta nulla, per  $t = t_0$ , la circuitazione di  $\mathbf{v}$  e quindi nulla sempre: e però (Vol. I, pag. 41) risulta

$$(16) \quad \mathbf{v} = \text{grad } \varphi$$

e quindi ancora  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ .

$\varphi$  dicesi *potenziale di velocità* (uniforme o no); il moto dicesi *non vorticoso* o *a potenziale*.

Poichè

$$d\varphi = \mathbf{v} \times dP = u dx + v dy + w dz,$$

il teorema si può enunciare sotto quest'altra forma di LAGRANGE: (\*)

*Se il trinomio  $u dx + v dy + w dz$  è un differenziale esatto per un determinato valore di  $t$ , lo sarà del pari per ogni valore di  $t$ , per una parte di fluido.*

Per es., se il fluido parte dal riposo, per  $t = 0$  si ha  $u = v = w = 0$ ; il trinomio è un differenziale esatto per  $t = 0$ : quindi lo sarà sempre.

L'equazioni fondamentali, in tal caso, si semplificano notevolmente. Osserviamo infatti che l'o-

---

(\*) LAGRANGE, *Mém. sur la théorie du mouvement des fluides*, Nouv. Mém. Acad. Berlin, 1781, pag. 151; *Oeuvres compl.*, 4, p. 716. La dimostrazione del testo è dovuta a THOMSON.

mografia  $\frac{d\mathbf{v}}{dP}$  è una dilatazione, perchè

$$2 \mathbf{V} \frac{d\mathbf{v}}{dP} = \text{rot } \mathbf{v} = 0;$$

quindi

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v} = \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } \mathbf{v}^2$$

per la (52) del Vol. I, pag. 31. Quindi la (12) ci dà

$$\text{grad} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \Pi - U \right) = 0;$$

risulta dunque la quantità entro parentesi funzione del solo tempo: supponiamo conglobata questa funzione in  $\varphi$  (incognita), con ciò non varia  $\mathbf{v}$ ; ed otterremo

$$(17) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \Pi - U = 0.$$

L'equazione (11) di continuità poi, per la (71) del Vol. I, pag. 38, diviene

$$(18) \quad \frac{dk}{dt} + k \Delta \varphi = 0.$$

Consideriamo un punto  $P$  e la sua velocità  $\mathbf{v}$  al tempo  $t$ ; su questa assumiamo un altro punto  $P_1$  infinitamente prossimo a  $P$  e nuovamente la sua

velocità allo stesso istante e su questa un altro punto  $P_2$  infinitamente vicino a  $P_1$ , ecc. Otterremo così la *linea di corrente* uscente da  $P$  al tempo  $t$  e le cui tangenti danno appunto la direzione della velocità del punto di contatto. Le linee di corrente non sono naturalmente da confondersi, in generale, colle traiettorie dei punti del fluido.

La definizione data è valida qualunque sia il moto del fluido. Nel caso particolare che il moto sia a potenziale si vede subito per la (16) che:

*Le linee di corrente sono le traiettorie ortogonali delle superficie di livello  $\varphi = \text{cost.}$*

§ 7. **Moto stazionario.** — Quando la velocità dei vari punti del fluido non varia col tempo, cioè  $\mathbf{v} = f(P)$ , il moto dicesi *stazionario*:

*Le linee di corrente coincidono colle traiettorie delle molecole fluide.*

Ferme le ipotesi del § 5, si ha il teorema di BERNOULLI:

*Lungo ogni linea di corrente risulta*

$$(19) \quad \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \Pi - U = \text{cost.}, (*)$$

in cui la costante è relativa ad una determinata linea di corrente e varia con essa.

---

(\*) DANIEL BERNOULLI, *Hydrodynamica*, Argentorati 1738, pag. 19.

Sia  $P$  un punto di una linea di corrente,  $\mathbf{t} = \frac{dP}{ds}$  il vettore unitario parallelo alla tangente in  $P$ . L'accelerazione tangenziale è

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{v} : \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{v}^2}{ds}.$$

Quindi moltiplicando scalarmente la (12) per  $\mathbf{t}$  otteniamo

$$\frac{1}{2} \frac{d\mathbf{v}^2}{ds} = \frac{d(U - \Pi)}{ds};$$

integrando lungo la linea di corrente risulta la (19)

La (19) rappresenta il teorema dell'energia per fluidi.

Nella ipotesi che il moto sia a potenziale e stazionario, dalla (17) si deduce

$$(20) \quad \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \Pi - U = \text{cost.}$$

per tutta la massa fluida.

Nel caso di un fluido omogeneo pesante, inizialmente in riposo, e contenuto in un recipiente nel cui fondo è praticato un foro, il moto è potenziale e stazionario e può applicarsi la (20) ponendo  $U = -gz$ ,  $k\Pi = p$ ; quindi

$$\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{p}{k} + gz = \text{cost.}$$

Sulla superficie libera sia  $z = z_0$ ,  $p = p_0$ ,  $\mathbf{v} = 0$ ; allora risulta

$$(21) \quad p = p_0 + k g (z_0 - z) - \frac{1}{2} \mathbf{v}^2$$

Nel caso della quiete ritroviamo la (6); e di più si vede che la pressione idrostatica è sempre maggiore di quella idrodinamica.

Se l'altezza  $h$  del liquido nel vaso è sufficientemente piccola per modo che al foro di uscita possa ancora ritenersi  $p = p_0$ , dalla (21) risulta il teorema di TORRICELLI (\*)

$$\mathbf{v}^2 = 2 g h .$$

§ 8. **Moto vorticoso.** — Abbiamo visto che la deformazione di un intorno di  $P$  in un corpo continuo consta di un moto di corpo rigido e di una deformazione pura. Nel caso di un fluido, lo spostamento di  $P$  essendo  $\mathbf{v} dt$ , riferendoci al § 4 del Capitolo precedente, si conclude subito che  $\frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$  è il vettore della velocità istantanea di rotazione dell'intorno di  $P$  supposto rigido. Noi supponiamo che esso per un determinato istante e per una certa parte del fluido sia di-

(\*) TORRICELLI, *Opera geometrica; De motu*, Lib. II, pag. 191. Florentiae 1644.

verso da zero; pel teorema di LAGRANGE, sarà sempre diverso da zero ed il moto di quella determinata parte del fluido si dice *vorticoso*.

Considero al tempo  $t$  un punto  $P$  e per esso una retta parallela a  $\text{rot } \mathbf{v}$ ; su questa un nuovo punto  $P_1$  infinitamente vicino a  $P$  e una nuova retta parallela a  $\text{rot } \mathbf{v}$ , sempre al tempo  $t$ ; ecc. Costruiremo così una linea uscente da  $P$  e pel tempo  $t$ , tale che le sue tangenti al tempo  $t$  sono parallele all'asse della rotazione istantanea della molecola fluida che trovasi al punto di contatto. Tale linea, variabile col tempo, dicesi *linea vorticale*.

La totalità delle linee vorticali uscenti dai punti di una superficie  $\sigma$  costituisce un *vorticoide o vortice*; e se  $\sigma$  è infinitamente piccola si ha un *vorticoide o vortice elementare*.

a) *La circuitazione della velocità lungo una curva chiusa tracciata su di un vorticoide è sempre la stessa, qualunque sia la curva.*

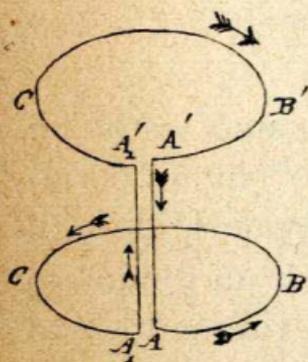


Fig. 20.

Siano (Fig. 20)  $ABC$ ,  $A'B'C'$  due curve chiuse tracciate sul vorticoide. Congiungiamo  $A$  con  $A'$  con una linea appartenente al vorticoide e sia  $A_1A'_1$  una linea analoga infinitamente vicina alla  $AA'$ . Diciamo  $s$  la linea chiusa (percorsa nel senso della freccia)  $ABCA_1A'_1C'B'A'A$ ;  $\sigma$  la superficie del vorticoide avente  $s$  per con-

torno. Poichè in ogni punto di  $\sigma$ ,  $\text{rot } \mathbf{v}$  è normale ad  $\mathbf{n}$ , da (15) si deduce

$$\int_s \mathbf{v} \times dP = 0.$$

Ma la circuitazione lungo  $AA'$  è eguale e contraria di quella lungo  $A_1A'_1$ ; dunque la circuitazione lungo  $ABC$  è eguale e dello stesso senso di quella lungo  $A'B'C'$ ; come avevamo enunciato.

*b) In qualunque vorticoide elementare, il prodotto della sezione retta in un punto per la grandezza della velocità di rotazione è costante lungo tutto il vorticoide.*

Tale prodotto dicesi *portata* o *intensità* del vortice.

Infatti detto  $s$  il contorno della sezione retta  $\sigma$  del vortice elementare, per *a)* la circuitazione lungo  $s$  è costante, qualunque sia  $s$  lungo il vortice; ma essa, dalla (15), essendo  $\sigma$  infinitamente piccola e  $\text{rot } \mathbf{v}$  parallelo ad  $\mathbf{n}$ , è data da

$$(22) \quad \text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{n} \cdot \sigma = 2 \omega \cdot \sigma = \text{cost.}$$

avendo rappresentato con  $\omega$  la grandezza della velocità di rotazione, cioè:

$$\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{n} = \text{mod rot } \mathbf{v} = 2 \omega.$$

Si deduce di qui una notevole conseguenza. In tutta la parte di fluido in cui ha luogo moto vorticoso,  $\omega \neq 0$ ; quindi anche  $\sigma \neq 0$ ; cioè:

*c) I vorticoidei elementari e quindi le linee vorticali non possono terminare nell'interno della massa fluida in cui ha luogo moto vorticoso; cioè esse sono linee chiuse, o si continuano indefinitamente in tutta la massa, o terminano alla superficie del fluido.*

*d) I vortici si muovono nel fluido in modo però da essere sempre costituiti dalle stesse molecole fluide. (Persistenza dei vortici).*

Sia  $\sigma$  una superficie semplicemente connessa costituita da linee vorticali;  $s$  una curva chiusa tracciata su  $\sigma$ . Sempre in base al teorema di STOKES (Vol. I, pag. 39) si deduce subito che la circuitazione di  $\mathbf{v}$  lungo  $s$  è nulla; sarà dunque sempre nulla, in qualunque modo venga tracciata su  $\sigma$ ; dunque  $\sigma$  è sempre costituita da linee vorticali. E se consideriamo due siffatte superficie  $\sigma$ , la loro intersezione sarà sempre una linea vorticale; e ciò prova il teorema.

È del pari facile mostrare che :

*e) La portata di un vorticoide elementare non varia col tempo. (\*)*

---

(\*) HELMHOLTZ, *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen* [Journ.

§ 9. **Seconda forma delle equazioni del moto di un fluido.** — Riguardiamo la posizione  $P$  di una molecola fluida come funzione della sua posizione iniziale  $P_0$  e del tempo. In altre parole riguardiamo le coordinate  $x, y, z$  di  $P$  funzioni di  $t$  e dei loro valori iniziali  $a, b, c$ . Indicando con  $\beta$  l'omografia  $\frac{dP}{dP_0}$ , individuata, se si vuole, dai coefficienti  $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial x}{\partial c}; \frac{\partial y}{\partial a} \dots$ , le equazioni trasformate di (12) e di (11) sono rispettivamente:

$$(23) \quad K \beta \frac{d \mathbf{v}}{dt} = \text{grad}_{P_0} \Phi$$

$$(24) \quad k I_3 \beta = k_0.$$

für Math. **55**, pag. 25 (1858); Wissenschaft. Abhand., Leipzig 1882, **1**, pag. 111].

Le dimostrazioni del testo sono dovute a THOMSON nella memoria già citata.

Per le esperienze sugli anelli di fumo, ecc., che confermano i risultati teorici, vedi TAIT, *Conférences sur quelques-uns des progrès*, ecc. Paris 1887, pag. 347; BRILLOUIN, *Recherches récentes sur diverses questions d'Hydrodynamique*, I<sup>re</sup> Partie, *Tourbillons*; Annal. de la Faculté des Sciences de Toulouse, **1** 1887; e Paris 1897.

Ricordiamo infatti che nel secondo membro di (12) il grad è calcolato in  $P$ . Ora

$$\begin{aligned} d\Phi &= \text{grad}_P \Phi \times dP = \text{grad}_{P_0} \Phi \times dP_0 \\ &= \text{grad}_P \Phi \times \frac{dP}{dP_0} dP_0; \end{aligned}$$

e pel teorema di commutazione

$$\text{grad}_{P_0} \Phi \times dP_0 = K \beta (\text{grad}_P \Phi) \times dP_0$$

quindi,  $dP_0$  essendo arbitrario, risulta per la (12), la (23).

Per trasformare la (11) osserviamo che

$$\beta' = \frac{d\beta}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dP_0} = \frac{d\mathbf{v}}{dP} \frac{dP}{dP_0} = \alpha \beta$$

in cui, per compendio si è chiamata  $\alpha$  l'omografia  $\frac{d\mathbf{v}}{dP}$ , corrispondente alla omografia di deformazione del Capitolo precedente. Consideriamo ora  $I_3 \beta$ ; riferendoci alla terna di direzioni unite e derivando rispetto al tempo, si ha

$$\begin{aligned} I_3 \beta &= \beta \mathbf{i} \wedge \beta \mathbf{j} \times \beta \mathbf{k}, \\ (I_3 \beta)' &= \beta' \mathbf{i} \wedge \beta \mathbf{j} \times \beta \mathbf{k} + \dots = \alpha \beta \mathbf{i} \wedge \beta \mathbf{j} \times \beta \mathbf{k} + \dots \end{aligned}$$

E se poniamo  $\mathbf{i}_1 = \beta \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}_1 = \beta \mathbf{j}$ , ..... e dividiamo membro a membro otteniamo

$$\frac{1}{I_3 \beta} \frac{d I_3 \beta}{dt} = I_1 \alpha = \text{div } \mathbf{v} = - \frac{1}{k} \frac{dk}{dt}$$

per la (11). Integrando, si ottiene la (24) perchè inizialmente  $\beta = 1$ ,  $I_3 \beta = 1$ .

La forma cartesiana è immediata. Accennando con  $x'''$   $y'''$   $z''$  le componenti della accelerazione, da (23) si otterranno tre equazioni analoghe alla seguente

$$\frac{\partial x}{\partial a} x'' + \frac{\partial y}{\partial a} y'' + \frac{\partial z}{\partial a} z'' = \frac{\partial \Phi}{\partial a};$$

quanto poi alla (24) basta osservare che  $I_3 \beta$  è il determinante le cui linee sono  $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial a}$ ; ecc. (\*)

§ 10. **Integrali di Cauchy.** — *Ferme le ipotesi dei §§ precedenti, si ha la relazione integrale di CAUCHY:*

$$(25) \quad I_3 \beta \cdot \text{rot}_P \mathbf{v} = \beta (\text{rot}_{P_0} \mathbf{v}_0).$$

Osserviamo che si ha

$$\frac{d}{dt} [K \beta \mathbf{v}] = K \beta \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \left( K \frac{d\mathbf{v}}{dP_0} \right) \mathbf{v};$$

---

(\*) Le equazioni (23), (24) sono pure dovute ad EULER [Novi Comm. Acad. Petrop., 14, pag. 376 e 369 (1759)]. Esse diconsi anche equazioni di LAGRANGE, perchè di preferenza adoperate nella *Mécanique analytique*. Oeuvres compl. II, pagg. 273, 287.

il secondo membro, per la (23) e per la (52) Vol. I, pag. 31 risulta eguale a

$$\text{grad}_{P_0} \left\{ \Phi + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right\}.$$

Se quindi prendiamo il rot dei due membri nel punto  $P_0$  e teniamo presente che  $t$  e  $P_0$  sono variabili indipendenti, si deduce

$$\text{rot}_{P_0} \frac{d}{dt} \{ K \beta \mathbf{v} \} = \frac{d}{dt} \{ \text{rot}_{P_0} K \beta \mathbf{v} \} = 0.$$

Integrando, colla solita osservazione che inizialmente  $\beta = 1$ ,  $K \beta = 1$ , risulta

$$(26) \quad \text{rot}_{P_0} K \beta \mathbf{v} = \text{rot}_{P_0} \mathbf{v}_0.$$

Questa equazione può essere risolta rispetto a  $\text{rot}_P \mathbf{v}$ , col seguente artificio; i calcoli potrebbero ancora essere semplificati tenendo presente l'esercizio 8 del Vol. I, pag. 47.

Se  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  sono tre vettori qualunque si ha

$$\beta \mathbf{i} \times \beta \mathbf{j} \wedge \beta \mathbf{k} = I_3 \beta \cdot \mathbf{i} \times \mathbf{j} \wedge \mathbf{k};$$

ossia

$$\mathbf{i} \times K \beta (\beta \mathbf{j} \wedge \beta \mathbf{k}) = I_3 \beta \cdot \mathbf{i} \times \mathbf{j} \wedge \mathbf{k}$$

e per l'arbitrarietà di  $\mathbf{i}$ ,

$$K \beta (\beta \mathbf{j} \wedge \beta \mathbf{k}) = I_3 \beta \cdot \mathbf{j} \wedge \mathbf{k}.$$

Ora immaginiamo che  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  siano paralleli a due diversi e arbitrari spostamenti  $dP_0$  e  $\delta P_0$  di  $P_0$ ; e notiamo che, per la definizione stessa di  $\beta$ , è  $\beta dP_0 = dP$ ; risulta

$$(a) \quad K \beta (dP \wedge \delta P) = I_3 \beta \cdot dP_0 \wedge \delta P_0.$$

Ciò posto, per quanto si disse nel Vol. I, pag. 28, si ha

$$2 \mathbf{V} \alpha \times dP \wedge \delta P = \delta P \times \alpha dP - dP \times \alpha \delta P$$

e se  $\alpha$  e l'omografia  $\frac{d\mathbf{v}}{dP}$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \text{rot}_P \mathbf{v} \times dP \wedge \delta P &= \delta P \times d\mathbf{v} - dP \times \delta \mathbf{v} \\ &= d(\mathbf{v} \times \delta P) - d(\mathbf{v} \times dP). \end{aligned}$$

Se in questa formula mutiamo  $P$  in  $P_0$ ,  $\mathbf{v}$  in  $K \beta \mathbf{v}$ , il secondo membro non muta, perchè

$$K \beta \mathbf{v} \times \delta P_0 = \mathbf{v} \times \beta \delta P_0 = \mathbf{v} \times dP;$$

onde tenendo presente (a), risulta

$$I_3 \beta \cdot \text{rot}_P \mathbf{v} \times dP \wedge \delta P = \text{rot}_{P_0} K \beta \mathbf{v} \times K \beta (dP_0 \wedge \delta P_0);$$

e se al secondo membro applichiamo il teorema di commutazione e si osserva che  $dP$  e  $\delta P$  sono arbitrari, otteniamo finalmente per la (26), la (25).

La forma cartesiána, dette  $p, q, r$ , le componenti di  $\frac{1}{2} \text{rot}_P \mathbf{v}$ , è la seguente

$$I_3 \beta \cdot p = \frac{\partial x}{\partial a} p_0 + \frac{\partial x}{\partial b} q_0 + \frac{\partial x}{\partial c} r_0, \text{ ecc. } (*)$$

Il teorema di LAGRANGE discende immediatamente: se infatti  $\text{rot}_{P_0} \mathbf{v}_0 = 0$ , sarà pure  $\text{rot}_P \mathbf{v} = 0$ ; e così si deducono i teoremi di HELMHOLTZ sui vortici. Così per es. per la linea vorticale uscente da  $P_0$ , avendosi

$$dP_0 = \rho \text{rot}_{P_0} \mathbf{v}_0,$$

con  $\rho$  fattore di proporzionalità, da (25) risulta

$$I_3 \beta \cdot \text{rot}_P \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \beta dP_0 = \frac{1}{\rho} dP;$$

che esprime la persistenza delle linee vorticali; ecc.

### Esercizi.

1. Equilibrio di un liquido che ruota uniformemente intorno ad un asse verticale.

---

(\*) CAUCHY, *Sur la théorie de la propagation des ondes* (1815); Oeuvres (I), 1 pag. 38. È appunto dovuta a CAUCHY la prima dimostrazione rigorosa [dedotta da (25)] del teorema di LAGRANGE.

Il potenziale delle forze centrifughe composte, detta  $\omega$  la grandezza della velocità di rotazione, è

$$\frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2).$$

Le forze esterne debbono pure derivare da un potenziale  $U$ : l'equazione delle isobariche è

$$U + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) = \text{cost.}$$

Se il liquido è omogeneo e pesante ( $k = 1$ ) si ha  $U = g \zeta$  l'asse di rotazione essendo verticale in basso: quindi l'equazione della superficie libera è

$$\zeta = c - \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2);$$

paraboloide rotondo ad asse verticale. La costante  $c$  si determina conoscendo il volume del liquido contenuto in un vaso. Se questo ha la forma di un cilindro circolare di raggio  $a$  e l'altezza del liquido in quiete è  $b$  si ha

$$\pi a^2 b = 2 \pi \int_0^a \zeta r dr$$

donde

$$c = b + \frac{\omega^2 a^2}{4g}$$

e però

$$\zeta = b + \frac{\omega^2 a^2}{4g} - \frac{\omega^2}{2g} r^2.$$

Il valor massimo di  $\zeta$ , si ha per  $r = 0$ ; il minimo per  $r = a$ .

[VIVANTI, *Nuovi esercizi*, ecc. pag. 193]. Se le molecole del liquido si attraggono in ragion diretta della distanza ed il centro di massa cade sull'asse di rotazione, si ha ( $\mu$  = massa totale)

$$U = \mu (P - G)^2;$$

quindi come prima

$$z^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\mu}\right)(x^2 + y^2) = c;$$

ellissoidi o iperboloidi di rotazione. Questo secondo caso è solo possibile per liquidi di un vaso; mentre la figura ellissoidale è anche possibile per liquido libero.

Posto  $\frac{1}{\varepsilon} = 1 - \frac{\omega^2}{\mu}$ , i quadrati dei semi-assi dello ellissoide sono  $c\varepsilon$ ,  $c\varepsilon$ ,  $c$ . Dall'espressione del volume  $\frac{4}{3} \pi \varepsilon c \sqrt{c}$  si determina  $c$ .

[POISSON, *Traité de Méc.* 2, pag. 550].

2. Una sfera omogenea esercita un'attrazione secondo la legge di NEWTON e ruota uniformemente intorno ad un diametro: figura di equilibrio di un sottile strato liquido deposto sulla sfera.

Se  $\mu$  è la massa,  $r$  la distanza di un punto dello strato dal centro della sfera si ha, pag. 296,  $U = \frac{\mu}{r}$ , quindi l'equazione delle isobariche è

$$(\alpha) \quad \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) = c = \frac{\mu}{a},$$

superficie di rotazione intorno  $\zeta$ ; e dove  $a$  è la parte che essa taglia sull'asse di rotazione.

Poniamo  $t^2 = x^2 + y^2$ ; si ha

$$t^2 + \zeta^2 = a^2 \left( 1 - \frac{a \omega^2}{2 \mu} t^2 \right)^{-2};$$

sviluppando in serie e trascurando le potenze seconde, ecc.

di  $\frac{a \omega^2}{2 \mu}$  risulta

$$\frac{\zeta^2}{a^2} + t^2 \left( \frac{1}{a^2} - \frac{a \omega^2}{\mu} \right) = 1$$

equazione di uno sferoide schiacciato. Il raggio equatoriale  $a_1$  è dato da

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{a_1^2} \left( 1 - \frac{a^3 \omega^2}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}};$$

lo schiacciamento è

$$\frac{a_1 - a}{a} = \frac{a^3 \omega^2}{2 \mu} = \frac{a \omega^2}{g}$$

dove  $g = \frac{\mu}{a^2}$  è la gravità al polo. In un altro punto qualunque la gravità è la derivata negativa del potenziale totale rispetto  $r$ , cioè indicando con  $\theta$  la colatitudine:

$$g = \frac{\mu}{r^2} - \omega^2 r \sin^2 \theta.$$

Posto  $r = a(1 + u)$ , abbiamo

$$g = \frac{\mu}{a^2} (1 - 2u) - \omega^2 a \sin^2 \theta.$$

D'altra parte da  $(\alpha)$  si ricava subito

$$u = \frac{\omega^2 a^3}{2 \mu} \operatorname{sen}^2 \theta ;$$

quindi

$$g = \frac{\mu}{a^2} \left( 1 - \frac{2 \omega^2 a^3}{\mu} \operatorname{sen}^2 \theta \right).$$

[THOMSON A. TAIT; l. c., 2, pag. 372].

3. Lo stesso problema supponendo che un altro corpo di massa  $\mu_1$ , a distanza  $d$  dal centro, attragga lo strato liquido con la legge di NEWTON, la sfera essendo fissa.

Abbiamo

$$\frac{\mu}{r} + \frac{\mu_1}{\sqrt{d^2 - 2 r d \cos \theta + r^2}} = c.$$

Se il rapporto  $r : d$  è molto piccolo, colle stesse posizioni dell'esercizio precedente si ha

$$\frac{\mu}{a} (1 - u) + \frac{\mu_1}{d} \left( 1 + \frac{a}{d} \cos \theta \right) = c ;$$

e quindi

$$\frac{\mu}{a} + \frac{\mu_1}{d} = c, \quad u = \frac{\mu_1 a^2}{\mu d^2} \cos \theta.$$

Nel punto  $A$  in cui  $\theta = 0$  si ha elevazione di livello; nel punto diametralmente opposto una eguale depressione.

Nel caso della terra  $\mu$  e della luna  $\mu_1$  avendosi circa

$$\mu_1 = \frac{\mu}{83} ; \quad d = 60 a$$

tale elevazione risulta eguale a  $\frac{1}{83 \cdot 60^2} = \frac{1}{3 \cdot 10^5}$ .

Se si hanno due corpi di massa  $\frac{1}{2} \mu_1$  simmetrici rispetto al centro, risulta come prima

$$u = \frac{1}{2} \frac{\mu_1 a^3}{\mu d^3} (3 \cos^2 \theta - 1).$$

La figura libera è uno sferoide coll'asse maggiore lungo la congiungente i due corpi.

[THOMSON A. TAIT, l. c., 2, pagg. 373, 374].

4. Figura di equilibrio di un fluido omogeneo incompressibile di massa  $\mu$  che ruota uniformemente intorno ad un asse; le molecole fluide si attraggono secondo la legge di NEWTON; in superficie si esercita una pressione costante e la massa stessa si comporta come se fosse rigida.

Se  $V$  è il potenziale dell'attrazione, posto

$$\varphi = V + \omega^2 (x^2 + y^2),$$

sulla superficie libera si deve avere  $d\varphi = 0$  e questa deve essere l'equazione differenziale della superficie libera; se quindi essa ha per equazione  $\Phi = \text{cost}$ ; l'equazione precedente deve essere identica alla  $d\Phi = 0$ . Si deve dunque avere proporzionalità tra  $\text{grad } \varphi$  e  $\text{grad } \Phi$ . La  $\Phi$  deve soddisfare a queste equazioni: mentre occorre la conoscenza di  $\Phi$  per formare  $\varphi$ . Il problema è assai complicato e si sa risolvere soltanto in pochi casi. Si cerca piuttosto di vedere se alcune superficie possono essere di equilibrio. Vediamo per es. se è possibile una figura di equilibrio

ellissoidale In tal caso

$$\Phi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

e tenuto conto della (10') della pag. 309, le condizioni precedenti si riducono alle

$$\left( 4 \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial a^2} + \omega^2 \right) a^2 = \left( 4 \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial b^2} + \omega^2 \right) b^2 = 4 \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial c^2} c^2;$$

eguagliando i due valori di  $\omega^2$  che si ricavano da queste due equazioni si ha

$$\begin{aligned} (b^2 - a^2) \int_0^{\infty} \frac{U du}{(a^2 + u)(b^2 + u)} \\ = \frac{c^2 (b^2 - a^2)}{a^2 b^2} \int_0^{\infty} \frac{U du}{(c^2 + u)}. \end{aligned}$$

A questa può soddisfarsi con  $a = b$  (ellissoide di rotazione di MACLAURIN); oppure con

$$\int_0^{\infty} u u^3 \left[ \frac{u}{a^2 b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right] du = 0,$$

cui corrisponde l'ellissoide a tre assi disuguali di JACOBI (1834) [Ges. Werke, 2, pag. 19]. Per questo notiamo che

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} < \frac{1}{c^2}$$

onde  $c$  è minore di  $a$  e  $b$ ; l'ellissoide ruota intorno all'asse minore.

Accenniamo la discussione del primo ellissoide ( $a = b$ ). Dal valore di  $\omega^2$  risulta  $c < a$ , l'ellissoide è schiacciato.

Posto  $\lambda^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2}$ , risulta facilmente

$$\frac{\omega^2}{2\pi} = \varphi(\lambda) = \lambda^2 \int_0^{\infty} \frac{u \, du}{(1 + \lambda^2 + u)^2 (1 + u)^{3/2}}.$$

Colla sostituzione  $1 + u = v^2$  l'integrale si trasforma in

$$2 \left( 1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) \int_1^{\infty} \frac{dv}{(v^2 + \lambda^2)^2} - 2 \int_1^{\infty} \frac{dv}{v^2 (v^2 + \lambda^2)}.$$

Il secondo ha per valore  $\frac{1}{\lambda^2} - \frac{\text{arctg } \lambda}{\lambda^3}$ , poscia derivando

$$\int_1^{\infty} \frac{dv}{v^2 + \lambda^2} = \frac{\text{arctg } \lambda}{\lambda}$$

rispetto  $\lambda$ , si ottiene il valore del primo; quindi definitivamente

$$\varphi(\lambda) = \frac{(3 + \lambda^2) \text{arctg } \lambda - 3\lambda}{\lambda^3}.$$

Una tabella di valori di  $\varphi(\lambda)$  trovasi in THOMSON, l. c., **2**, pag. 327;  $\varphi(\lambda)$  è sempre positiva e si annulla per  $\lambda = 0, \infty$ . La sua derivata prima è della forma

$$\varphi'(\lambda) = \frac{\lambda^2 + 9}{\lambda^4} \varphi_1(\lambda), \text{ con } \varphi_1(\lambda) = \frac{7\lambda^2 + 9\lambda}{(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 9)} - \text{arctg } \lambda.$$

Di qui

$$\varphi'_1(\lambda) = \frac{8\lambda^4(3 - \lambda^2)}{(\lambda^2 + 1)^2(\lambda^2 + 9)^2}$$

quindi positiva per  $0 < \lambda < \sqrt{3}$ ;  $\varphi_1$  si annulla per  $\lambda = 0$ ; cresce con  $\lambda$  sino a  $\lambda = \sqrt{3}$  in cui è massima: poi decresce continuamente fino a  $\lambda = \infty$  in cui diventa  $-\frac{\pi}{2}$ .

Però  $\varphi_1$  ammette una sola radice reale  $\lambda' > \sqrt{3}$ . Ritornando a  $\varphi$ , nulla per  $\lambda = 0$ , essa cresce con  $\lambda$ ; per  $\lambda = \lambda'$  assume il suo valor massimo; poi decresce e si annulla per  $\lambda = \infty$ . Il valore di  $\lambda'$  radice della  $\varphi_1(\lambda) = 0$  si trova coi metodi noti di approssimazione [vedi BESANT A. RAMSEY, *Hydromechanics*, Parte 1<sup>a</sup>. London 1904, Sixth Edit. p. 227]; si trova  $\lambda' = 2,5293$ ; e quindi  $\varphi(\lambda') = 0,22467$ .

L'equazione  $\varphi(\lambda) = b$ , con  $b = \frac{\omega^2}{2\pi} \left( e \frac{\omega^2}{2\pi k f} \right)$  se non si fosse supposta eguale ad uno la densità e la costante di gravitazione) ha due radici reali e distinte  $\lambda_1, \lambda_2$  tali che

$$0 < \lambda_1 < \lambda' < \lambda_2$$

se  $b < \varphi(\lambda')$ ; coincidono se  $b = \varphi(\lambda')$ , sono immaginarie se  $b > \varphi(\lambda')$ .

Data la velocità  $\omega$  si trova  $b$  e quindi  $\lambda$ : poscia le due equazioni

$$\mu = \frac{4}{3} \pi k a^2 c \quad , \quad \lambda^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2}$$

ci faranno conoscere  $a$  e  $c$ .

Dunque se  $\frac{\omega^2}{2\pi k f} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0,22467$  si ha nessuno, uno, o due ellissoidi di MACLAURIN.

Nel caso della terra  $\frac{\omega^2}{2\pi k f} = 0,0023$ ; quindi si hanno due figure ellissoidali, corrispondenti alle radici di

$\varphi(\lambda) = 0,0023$ ; ma una di queste, che è 681, darebbe  
 $\frac{a}{c} = \sqrt{1 + \lambda^2} = 681$  circa; ciò è impossibile. Si ha dunque  
 una sola figura di equilibrio per la quale

$$\frac{a - c}{c} = \frac{1}{232};$$

mentre le misure dirette danno circa  $\frac{1}{293}$ .

Assai più complicata è la discussione dell'ellissoide di JACOBI. Essa dà i risultati che qui riassumiamo. Si considerino i numeri 0,18709 e 0,22467. Per valori di  $b$  minori del più piccolo, abbiamo un ellissoide di JACOBI e due di MACLAURIN; per  $b$  compreso tra questi due numeri, due di MACLAURIN e finalmente per  $b$  maggiore del più grande, nessun ellissoide.

Non sono invece possibili configurazioni di equilibrio per un ellissoide stratificato omogeneamente.

[VOLTERRA, *Acta Mathem.*, **27**, p. 105 (1904): PIZZETTI, *Principii della teoria meccanica della figura dei pianeti*; Pisa, Spoerri, 1913; pag. 187].

Si può assegnare un limite superiore di  $b$ . Posto infatti

$$W = fV + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$$

e fatto nella (69) del Vol. I, p. 38,  $u = 1$ ,  $v = W$  e quindi

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} W = \Delta W = -4\pi f k + 2\omega^2$$

(per la (14) di pag. 313), risulta

$$2(\omega^2 - 2\pi f k) \int d\tau = - \int \operatorname{grad} W \times \mathbf{n} d\delta.$$

Se  $b \geq 1$  l'integrale del secondo membro è negativo;

quindi in qualche punto  $\text{grad } W \times \mathbf{n} < 0$ ; cioè la forza al contorno rivolta all'esterno e l'equilibrio impossibile. Dunque  $h < 1$ .

Questo limite, assegnato dal POINCARÉ, può essere ridotto alla metà [CRUDELI, Rend. Acc. Lincei, (5) 19, (1° sem. 1910) pag. 666].

I lavori più completi sull'argomento si debbono al POINCARÉ, il quale, generalizzando alcuni risultati di THOMSON, ha scoperto che, oltre i detti ellissoidi, esiste una serie infinita di figure di equilibrio, simmetriche rispetto ad un piano normale all'asse di rotazione e aventi un certo numero di piani di simmetria passanti per l'asse; una di queste è certamente stabile. [Acta Mathem., 7, pag. 259 (1885); *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, Paris (1903)]. LIAPUNOFF (1884) e DARWIN hanno considerato specialmente la questione della stabilità ed il primo ha perfezionato soprattutto i procedimenti di POINCARÉ. Vedasi ancora TISSERAND, *Traité de Méc. cél.*, 2, pag. 98.

5. Condizioni di equilibrio di un prisma retto triangolare, omogeneo e pesante immerso in un liquido pure omogeneo e pesante, per modo che gli spigoli laterali siano orizzontali ed uno solo immerso.

Basterà considerare la sezione del prisma con un piano normale agli spigoli (Fig. 21). Sia  $h$  l'altezza del prisma,  $k_1$  la sua densità,  $\sigma_1$  l'area della base,  $\sigma$  quella della sezione immersa. Poichè  $g k_1 \sigma_1 h$  e  $g k \sigma h$  rispettivamente rappresentano il peso del corpo e quello del fluido spostato, posto

$$AB = c \quad , \quad AC = b \quad , \quad AB_1 = x \quad , \quad AC_1 = y,$$



punto  $P$  di un'area  $d\sigma$ , del piano  $xy$ , si sarà elevato di  $\theta x$  e il volume del prisma elementare così costruito è  $\theta x d\sigma_1$ ; e quello dell'unghia solida distaccata, per es., a destra nel corpo sarà  $v_1 = \theta \int x d\sigma_1$ ; e il volume di quella a sinistra è  $v_2 = -\theta \int x d\sigma_2$ ; quindi

$$v_1 - v_2 = \theta \int x d\sigma = 0$$

cioè i due volumi  $v_1$  e  $v_2$  sono eguali. I centri di massa di questi due volumi omogenei abbiano per ordinate  $\eta_1, \eta_2$ . Avremo

$$v_1 \eta_1 = \theta \int x y d\sigma_1, \quad v_2 \eta_2 = -\theta \int x y d\sigma_2$$

onde

$$v_1 \eta_1 - v_2 \eta_2 = \theta \int x y d\sigma = 0$$

cioè  $\eta_1 = \eta_2$ : i centri di massa giacciono in uno stesso piano normale ad  $y$ . Finalmente il momento del peso di ciascuno dei due volumi intorno  $y$  è

$$\theta g \int x \cdot x d\sigma_1 = \theta g \int x^2 d\sigma_1.$$

Per la stabilità dell'equilibrio, dovremo considerare i moti del galleggiante rispetto al liquido. Decomponendo lo spostamento generale del corpo in tre traslazioni e tre rotazioni intorno a tre assi di cui uno verticale e trattandosi di corpo pesante, non dovremo occuparci nè delle traslazioni lungo assi orizzontali, nè di rotazioni intorno all'asse verticale, per le quali si ha evidentemente stabilità. Per le traslazioni lungo la verticale, se esse sono dirette verso il basso, mentre il peso del corpo resta lo stesso, la spinta idrostatica cresce e viceversa: anche in

tal caso vi ha la stabilità. Restano dunque a considerare le rotazioni intorno a due assi orizzontali, che potremo sempre supporre sulla superficie del fluido (Vol. I, p. 97); e siano essi precisamente i due assi principali d'inerzia della sezione di affioramento. Facciamo effettuare al corpo una piccola rotazione  $\theta$  intorno ad uno di questi. (Fig. 22).

Con ciò i centri di gravità  $G'$  ed  $E'$  del corpo e del fluido spostato verranno in  $G$  ed  $E$ . Il peso  $\Pi$  del corpo è applicato in  $G$ ; la pressione del fluido in  $E$  è eguale e contraria a  $\Pi$ ; ma va corretta della pressione dovuta al

volume  $A I A'$  immerso (diretta in alto) e di quella dovuta al volume  $B I B'$  emerso (diretta in basso); tali pressioni sono eguali e costituiscono una coppia di momento  $\theta g k a^2 \sigma$  essendo  $\sigma$  l'area d'affioramento,  $a$  il raggio di inerzia intorno

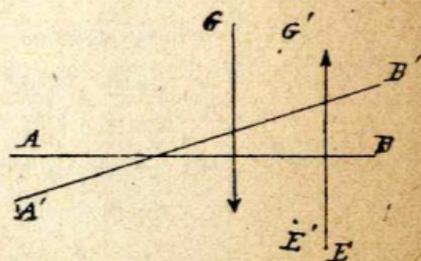


Fig. 22.

l'asse di rotazione; coppia che giace in un piano normale all'asse di rotazione ed ha senso contrario alla rotazione. Posto  $GE = b$ , la coppia in  $G$  e  $D$  ha per momento  $\Pi b \theta$  ed ha senso concorde colla rotazione: il momento totale delle due coppie

$$\theta (\Pi b - g k a^2 \sigma) = \theta g k (V b - a^2 \sigma)$$

dove  $V$  è il volume del fluido spostato e quindi  $\Pi = V g k$ .

Vi ha stabilità se tale coppia ha per effetto di opporsi alla rotazione; cioè se essendo  $\theta > 0$ , si ha  $V b < a^2 \sigma$ ; ossia

$$b < \frac{a^2 \sigma}{V}.$$

Perchè l'equilibrio sia stabile rispetto a rotazioni intorno l'altro asse d'inerzia deve essere

$$h < \frac{b^2 \sigma}{V}:$$

e se le due condizioni sono verificate contemporaneamente, l'equilibrio è assolutamente stabile. Se  $G$  è al disotto di  $E$ ,  $h$  deve considerarsi come negativo e l'equilibrio è sempre stabile.

Se il corpo è simmetrico, (Fig. 23) e consideriamo spostamenti pei quali  $V$  non varia, anche  $G$  (teorema centro di massa) non varia,  $E$  venga in  $E'$  in cui sarà applicata la spinta verso l'alto. Se quindi  $M$  cade al *disopra* di  $G$ , tale spinta tende a riportare il corpo nella primitiva posizione di equilibrio, che quindi è stabile. Se  $M$  cade al disotto di  $G$ , l'equilibrio è instabile. Il primo caso accadrà certamente se  $G$  cade al disotto di  $E$ . La posizione limite di  $M$  dicesi *metacentro*; la sua distanza da  $E$  è  $a^2 \sigma : V$ ;  $M$  è anche il centro di curvatura della curva descritta da  $E$ .

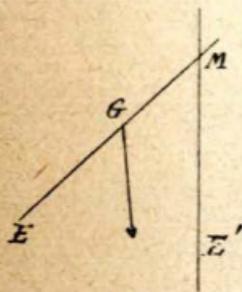


Fig. 23.

[THOMSON A. TAIT, l. c., 2, p. 322-4; APPELL, l. c., 3, pag. 188; GREENHILL, *A Treatise on Hydrostatics*. London 1894, pag. 148.

Per esempio, nel caso di un cilindro circolare retto immerso verticalmente di altezza  $l$  e raggio base  $r$ , posto  $k = 1$ , la distanza  $l'$  dalla base immersa della sezione di affioramento eguaglia  $k_1 l$ . Inoltre  $a^2 = \frac{r^2}{4}$  e la condizione di stabilità è

$$\left(\frac{r}{l}\right)^2 > 2 k_1 (1 - k_1).$$

Nel caso di un cono rotondo il cui vertice è in basso, sia  $x$  la distanza, dal vertice, della sezione d'affioramento. Poichè i raggi della base e della sezione stanno come  $l$  ad  $x$ , si ha  $x^3 = k_1 l^3$ . Inoltre

$$EG = \frac{3}{4}(l - x); \quad EM = \frac{a^2 \sigma}{V} = \frac{3}{4} \frac{y^2}{x}$$

essendo  $y$  il raggio della sezione d'affioramento eguale ad  $y \operatorname{tang} \alpha$  ( $\alpha$  semiapertura del cono): onde  $EM = \frac{3}{4} x \operatorname{tang}^2 \alpha$  la quale dà subito una semplice costruzione del metacentro; basta da  $E$  condurre, in un piano meridiano, la parallela alla sezione fino ad incontrare il lato e dal punto d'incontro si conduce la normale al lato sino ad incontrare in  $M$  l'asse. Per la stabilità occorre che

$$x \operatorname{tang}^2 \alpha > l - x$$

cioè

$$\operatorname{tang}^2 \alpha > \left( \frac{l}{k_1} \right) \frac{1}{3} - 1.$$

[GREENHILL, l. c., pag. 195].

7. Centro di pressione di una superficie piana immersa in un fluido pesante.

Chiamasi centro di pressione, il centro delle pressioni che il fluido esercita normalmente su ogni elemento di area. Sia questa riferita ad un sistema  $xy$ : allora, dette  $\xi, \eta$  le coordinate del centro di pressione, si ha

$$\xi \cdot \int p d\sigma = \int p x d\sigma; \quad \text{ecc.} \quad p = p_0 + k g z;$$

spostando convenientemente l'origine:

$$\xi \cdot \int z d\sigma = \int x z d\sigma ; \eta \cdot \int z d\sigma = \int y z d\sigma .$$

L'asse  $y$  sia intersezione del piano con superficie libera; le varie  $x$  sono proporzionali a  $z$ ; quindi

$$\xi \cdot \int x d\sigma = \int x^2 d\sigma ; \xi = \frac{a^2}{\xi_1}$$

essendo  $a$  il raggio d'inerzia secondo  $y$ ,  $\xi_1$  l'ascissa del centro di massa dell'area; quindi il centro di pressione coincide con quello di percussione o oscillazione dell'area piana, l'asse  $y$  essendo l'asse di sospensione. (Cap. 5<sup>o</sup>, § 5).

8. Un fluido indefinito incompressibile avvolge una sfera fissa; il moto non è vorticoso e all'infinito la velocità ha un limite fisso. Determinare il potenziale di velocità.

Da (18),  $k$  essendo costante risulta che il potenziale di moto  $\varphi$  soddisfa all'esterno della sfera alla  $\Delta \varphi = 0$ . Se  $\alpha$  indica la grandezza del limite della velocità all'infinito ed è inoltre parallela e di senso contrario al vettore unitario  $\mathbf{k}$ , all'infinito dovremo avere  $\text{grad } \varphi \times \mathbf{k} = -\alpha$ .

Inoltre la velocità del fluido sulla sfera deve essere tutta tangenziale; se quindi  $\rho$  è la distanza di un punto dal centro della sfera di raggio  $a$ , si deve avere

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right)_{\rho=a} = 0 .$$

Si può provare che queste condizioni individuano il potenziale  $\varphi$ . La sua ricerca si fonda sulla osservazione che,

$\zeta, \frac{1}{\rho}$  e  $\frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial \zeta}$  soddisfano la  $\Delta = 0$  e

$$\left( \frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial \rho \partial \zeta} \right)_{\rho=a} = \frac{2\zeta}{a^4};$$

basterà quindi prendere

$$\varphi = -\alpha \left( \zeta + \frac{a^3}{2} \frac{\zeta}{\rho^3} \right) = -\alpha \left( \zeta - \frac{a^3}{2} \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial \zeta} \right).$$

Il potenziale dipende da  $\zeta$  e  $\rho$  oppure da  $\zeta$  e da  $r$  distanza del punto dall'asse  $\zeta$ . Consideriamo il moto in un piano meridiano condotto per  $\zeta$ . Le corrispondenti componenti della velocità sono

$$\begin{aligned} \zeta' &= \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = \alpha \left[ \frac{a^3}{2} \left( \frac{3\zeta^2}{\rho^5} - \frac{1}{\rho^3} \right) - 1 \right] \\ r' &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \alpha \cdot \frac{a^3}{2} \frac{3\zeta r}{\rho^5}. \end{aligned}$$

La loro integrazione può farsi in due casi particolari. Se  $\rho = 0$ ,  $r = \zeta$  e la seconda è soddisfatta, la prima ci dà

$$\zeta' = \alpha \left( \frac{a^3}{\zeta^3} - 1 \right), \quad \zeta > a$$

che con una quadratura ci dà  $\zeta$  mediante  $t$ .

Se poi si riflette che

$$\rho \rho' = \zeta \zeta' + r r' = \alpha \left( \frac{a^3}{\rho^3} - 1 \right) \zeta$$

si vede che le equazioni suddette sono soddisfatte per  $r = a$  e la traiettoria sarebbe un cerchio massimo di sfera. Allora

$$\zeta' = \frac{3}{2} \alpha \left( \frac{\zeta^2}{a^2} - 1 \right) ; \quad \frac{d\zeta}{\zeta^2 - a^2} = \frac{3}{2} \frac{\alpha}{a^2} dt.$$

e quindi

$$\zeta = \text{cost} + a \text{Th} \left( \frac{3}{2} \frac{\alpha}{a} t \right).$$

la molecola impiegherebbe un tempo infinito a percorrere un mezzo cerchio.

9. In un moto vorticoso si ha

$$p = k \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial y}, \quad q = -k \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial x}, \quad r = 0$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (k \text{ costante}).$$

Studiare il moto.

Essendo  $p = -\frac{k y}{\rho^3}$ ,  $q = \frac{k x}{\rho^3}$ ,  $r = 0$  risulta

$$x dx + y dy = 0;$$

i vortici sono circoli paralleli al piano  $xy$  e col centro sull'asse  $\zeta$ . Inoltre  $\omega^2 = k^2(x^2 + y^2) : \rho^6$  diventa infinita nell'origine la quale dovrà quindi essere esterna al fluido.

Pongasi

$$u = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial \zeta}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial \zeta} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y},$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \zeta} = 0;$$

quindi

$$2p = -\Delta U, \quad 2q = -\Delta V, \quad 2r = -\Delta W,$$

cioè

$$\Delta U = -2k \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial y}, \quad \Delta V = 2k \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial x}, \quad \Delta W = 0.$$

Ma

$$\Delta \left( \frac{y}{\rho} \right) = 2 \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial y}; \text{ ecc.}$$

si può dunque assumere

$$U = -k \frac{y}{\rho}, \quad V = k \frac{x}{\rho}, \quad W = 0$$

e in conseguenza

$$u = k \frac{x\zeta}{\rho^3}, \quad v = k \frac{y\zeta}{\rho^3}, \quad w = k \left( \frac{\zeta^2}{\rho^3} + \frac{1}{\rho} \right).$$

Il fluido è in riposo all'infinito. Le linee di corrente definite da

$$u : v : w = dx : dy : d\zeta$$

sono contenute in piani passanti per l'asse  $\zeta$ ; la loro ricerca dipende dalle quadrature; ecc. Lo studioso cerchi di mettere la ricerca sotto forma assoluta.

