CAPITOLO XI.

MASSIMI, MINIMI, FLESSI

OSSERVAZIONE. Lo studente, che segua contemporaneamente il corso di meccanica razionale, potrà dopo questo Capitolo studiare i paragrafi dedicati alle rette tangenti, ai cerchi osculatori, ecc. di una sghemba.

§ 70. — Massimi e minimi (relativi).

α) Una prima applicazione della teoria delle derivate è quella della ricerca dei massimi o minimi di una funzione.

Per un tale studio è opportuno però precisare un po' il significato della frase: punto di massimo o di minimo, con le seguenti definizioni. Diremo che (cfr. le definizioni del § 62, pag. 193):

Una funzione $f(x)$ *ha nel punto* a, interno *all'intervallo ove è definita la funzione, un massimo relativo, se esiste un numero* k *tale che in tutto l'intervallo* $(a-k, a+k)$ *la funzione assume valori non maggiori di* $f(a)$, *ossia se la differenza* $f(a+h)-f(a)$ *è negativa o nulla per* $|h| \leq k$.

Analogamente si dice che nel punto a *la funzione ha un minimo relativo, se esiste un numero* k *tale che nell'intervallo* $(a-k, a+k)$ *la funzione assume valori non minori di* $f(a)$, *ossia se la differenza* $f(a+h)-f(a)$ *è positiva o nulla per* $|h| \leq k$.

La funzione $f(x)$ *si dice crescente nel punto* a, *se esiste un numero* $k>0$ *tale che la funzione assume in* $(a, a+k)$ *valori maggiori che in* a *ed in* $(a-k, a)$ *valori minori che in* a, *ossia se* $f(a+h)-f(a)$ *ha il segno di* h *per* $|h|<k$.

La funzione $f(x)$ *si dice decrescente nel punto* a, *se esiste un numero* $k>0$ *tale che la funzione assume in* $(a, a+k)$ *valori minori che in* a *ed in* $(a-k, a)$ *valori maggiori che in* a, *ossia se* $f(a+h)-f(a)$ *ha segno opposto al segno di* h *per* $|h|<k$.

Talvolta si dice senz'altro che un punto di massimo o di minimo relativo è un punto di massimo o di minimo (*).

È interessante osservare che esistono funzioni continue $f(x)$, le quali in un punto $x=a$ non hanno nè un massimo, nè un minimo relativo, pure non essendo

(*) Taluni chiamano un punto di a punto di *massimo* soltanto se $f(a+h)-f(a)$ è positiva; punto di *minimo* se $f(a+h)-f(a)$ è negativa (cfr. l'oss. al § 62, pag. 193).

in tale punto nè crescenti nè decrescenti; e ciò, perchè in ogni intorno di a esse assumono tanto valori maggiori, che valori minori di $f(a)$. Tale è, p. es., la funzione $f(x)$ che è nulla per $x = a$ ed è uguale ad $(x - a)$ sen $\frac{1}{x-a}$ per $x \neq a$.

Tali funzioni non hanno quasi importanza nelle scienze applicate.

Da queste definizioni segue che una funzione $f(x)$ può in un dato intervallo avere parecchi massimi o minimi (relativi). Così, p. es., la funzione rappresentata dalla curva della nostra figura 23 ha punti di massimo relativo in A, B, C, D, E e punti di minimo relativo in A', B', C', D' ..... Essa è crescente, p. es., in H e decrescente, p. es., in K.

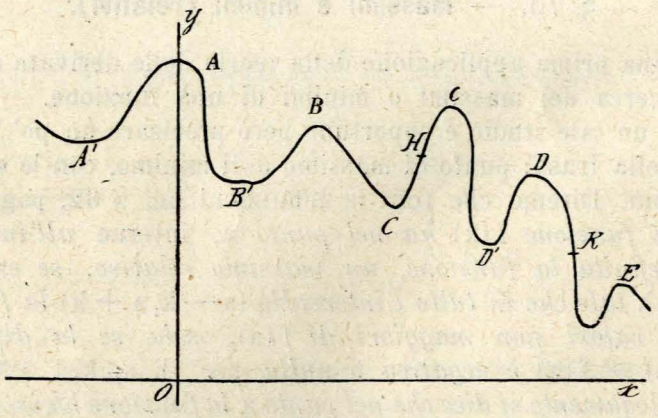

Fig. 23.

È utile anche osservare che può succedere che il valore di una funzione in un punto, cui corrisponde un massimo relativo, sia uguale od anche minore del valore, che la funzione ha in un altro punto, in cui la funzione possiede un minimo relativo. Così, p. es., nel caso della figura, il valore della funzione nel punto E, che è un punto di massimo, è minore del valore della funzione nel punto A' che è un punto di minimo. Ne ciò deve stupire, perchè l'essere un punto A $(x = a)$ un punto di massimo o di minimo relativo per $f(x)$ dipende soltanto dai valori che $f(x)$ ha in un intorno

$$(a - k, a + k)$$

del punto a, e non dai valori che $f(x)$ ha nei punti lontani dal punto A (*).

Molte volte si presenta il problema di cercare in quali punti A una data funzione $f(x)$ riceve il suo più grande, o il suo più piccolo valore. E che tali punti A esistano viene spesso

(*) Così una catena di monti può avere parecchie cime (massimi) e parecchi colli (minimi); e possono esistere delle cime più basse di qualche colle.

dedotto o dallo stesso problema che si studia, o dal fatto che si esamina una funzione $f(x)$ *continua* in un intervallo *finito*: cosicchè in tal caso il teorema di Weierstrass ci assicura dell'esistenza di tali punti A. Notiamo che:

Un punto A, *dove* f(x) *riceve il suo massimo, o il suo minimo valore, o è un punto di massimo o di minimo* (relativo) *secondo le precedenti definizioni, oppure cade agli estremi dell'intervallo* I *ove* f(x) *è definito* (perchè le precedenti definizioni si riferiscono soltanto ai punti *interni* all'intervallo, ove $f(x)$ è definita). Cosicchè *tali punti* A *sono da ricercarsi* tra i punti che o sono punti di massimo o minimo relativo, oppure sono estremi dell'intervallo *I*. Anzi *è nei casi più elementari lecito trascurare gli estremi di* I.

Da ciò risalta quanta importanza abbia, anche per la ricerca di tali punti A, cioè *dei punti di massimo o minimo assoluto*, la ricerca dei *punti di massimo o minimo relativo, di cui ora ci occupiamo.*

Dalla figura 25 appare intuitivo che in un punto di massimo o di minimo relativo la tangente alla curva $y = f(x)$ è parallela all'asse delle x, ossia più precisamente che in un tale punto $f'(x)$ (ammesso che $f'(x)$ esista e sia finita) è nulla. *Non è però vera* la proposizione reciproca.

In un punto $x = a$ (fig. 24) tale tangente può essere parallela all'asse delle x, senza che il punto $x = a$ sia un punto nè di massimo, nè di minimo.

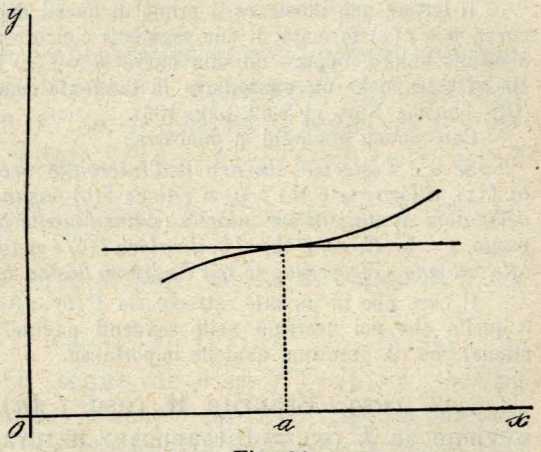

Fig. 24.

β) Sia a un punto interno all'intervallo, ove $f(x)$ è definita. Esista e sia finito $f'(a)$. Sappiamo già (§ 62, pag. 193) che:

1° *Se* f'(a) > 0 la *differenza* f(a+h)−f(a) *ha per* h *abbastanza piccolo, il segno di* h, *cosicchè* f(x) *è crescente nel punto* a.

2° *Se* f'(a) < 0, *la differenza* f(a + h) — f(a) *ha, per* h *abbastanza piccolo, segno opposto a quello di* h, *cosicchè* f(x) *è decrescente nel punto* a.

Quindi, se f'(a) ≠ 0, *la funzione in* a *non ha nè un massimo nè un minimo.*

Se quindi per x = a *la funzione ha un massimo o un minimo, è* f′ (a) = 0. (Il teor. reciproco, come già vedemmo, e come proveremo più avanti, non è sempre vero).

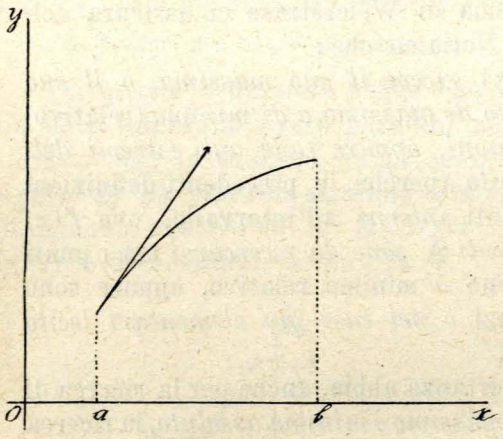

Fig. 25.

Oss. Già qui si vede come sia essenziale l'ipotesi che il punto a sia interno, e non agli estremi dell'intervallo, ove $f(x)$ è definita.

Per es., nel caso della figura 25, il valor minimo di $f(x)$ è all'estremo sinistro, ove $f'(x) \neq 0$, perchè la tangente non vi è parallela all'asse delle x.

Questi teoremi sono dimostrati senza ricorrere all'ipotesi che $f'(x)$ sia continua per $x = a$; e sono generalizzabili al caso che $f'(x)$ sia infinita per $x = a$, purchè di segno determinato. Si osservi ancora che il precedente risultato si può enunciare così:

In un punto x = a (interno all'intervallo ove $f(x)$ è definita) *che sia un punto di massimo o di minimo per la* f(x), *o la* f(x) *non possiede derivata determinata e finita, oppure* f′ (x) = 0.

Il lettore può illustrare il primo di questi due casi ricorrendo, p. es., ad una curva $y = f(x)$ formata di due segmenti concorrenti in un punto, ove la y ha il massimo valore, oppure ad una curva $y = f(x)$ formata di due archi di cerchio che si toccano in un punto, ove la tangente comune è normale all'asse delle x. (Cfr. l'ultima Nota al § 62, pag. 196).

Con metodi analoghi si dimostra:

Se b *è l'estremo sinistro dell'intervallo ove è definita, o dove si studia la* f(x), *allora, se* f′ (b) > 0, *il valore* f(b) *assunto da* f(x) *per* x = b *è minore dei valori assunti in un intorno (naturalmente destro) abbastanza piccolo del punto* x = b. *E, se,* f′ (b) < 0, *il valore* f(b) *è maggiore dei valori assunti in un tale intorno. Viceversa, se* b *è l'estremo destro dell'intervallo ove* f(x) *è definita.*

Il caso che in un tale estremo sia $f'(b) = 0$ si può trattare in modo simile a quello che noi useremo nelle seguenti pagine. Al lettore è lasciato un simile studio, che ha pure una qualche importanza.

2° *caso.* Esaurito il caso $f'(a) \neq 0$, studiamo ciò che avviene se $f'(a) = 0$ (supposto naturalmente che a sia interno all'intervallo, ove $f(x)$ è definita). E supponiamo dapprima che $f''(a) \neq 0$. La seconda delle formole di Taylor-Lagrange (cfr. la (9) di pag. 214) ci dice che sarà:

$$f(a+h) - f(a) = \frac{h^2}{\lfloor 2} f''(a + \theta h).$$

Se $f''(x)$ è continua per $x = a$, potremo trovare un intervallo $a - k$, $a + k$ tale che in ogni punto di questo intervallo la $f''(x)$ abbia lo stesso segno che $f''(a)$. Se $|h| < k$, allora, poichè $0 < \theta < 1$, il punto $a + \theta h$ apparterrà all'intervallo $(a - k, a + k)$ ed $f''(a + \theta h)$ avrà il segno di $f''(a)$. Quindi $f(a + h) - f(a)$ avrà il segno di $\frac{h^2}{2} f''(a)$, ossia, poichè $\frac{h^2}{2}$ è positivo, il segno di $f''(a)$. Perciò:

Se $f''(x)$ *è continua per* $x = a$, *se* $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$, *la differenza* $f(a + h) - f(a)$ *ha, per* $|h|$ *minore di un certo numero* k, *segno positivo, e quindi* $f(x)$ *ha in* a *un minimo. Se invece* $f'(a) = 0$, $f''(a) < 0$, *la* $f(x)$ *ha nel punto* $x = a$ *un massimo.*

Rimane da esaminare il caso $f'(a) = f''(a) = 0$. Per maggiore generalità supponiamo

$$f'(a) = f''(a) = \ldots\ldots = f^{(n-1)}(a) = 0\,;\ f^{(n)}(a) \neq 0.$$

E sia $f^{(n)}(x)$ continua per $x = a$. Esisterà un numero k tale che nell'intorno $(a - k, a + k)$ la $f^{(n)}(x)$ conserva lo stesso segno che ha nel punto a. La formola di Lagrange dice che:

$$f(a + h) - f(a) = \frac{h^n}{\underline{n}} f^{(n)}(a + \theta h).$$

Se $|h| < k$ (ossia se h è abbastanza piccolo) allora, essendo $0 < \theta < 1$, anche il punto $a + \theta h$ appartiene all'intervallo $(a - k, a + k)$: e quindi $f^{(n)}(a + \theta h)$ ha il segno di $f^{(n)}(a)$. E quindi, per la formola citata, $f(a + h) - f(a)$ ha il segno di $\frac{h^n}{\underline{n}} f^{(n)}(a)$, ossia, poichè $\underline{n} > 0$, ha il segno di $h^n f^{(n)}(a)$. Ora h^n è sempre positiva se n è pari, ed ha il segno di h, se n è dispari.

Quindi $h^n f^{(n)}(a)$ ha il segno di $f^{(n)}(a)$, se n è pari; e, se n è dispari, esso ha il segno di h se $f^{(n)}(a) > 0$, ed ha segno contrario a quello di h se $f^{(n)}(a) < 0$. Se ne deduce tosto il seguente teorema che comprende i precedenti come casi particolari.

Se la derivata n^{esima} *di* $f(x)$ *è continua e differente da zero per* $x = a$, *mentre le precedenti derivate vi sono nulle, allora:*

Se n *è pari, la* $f(a + h) - f(a)$ *ha il segno di* $f^{(n)}(a)$ *per* h *abbastanza piccolo; e quindi* $f(x)$ *ha per* $x = a$ *un minimo se* $f^{(n)}(a) > 0$, *un massimo se* $f^{(n)}(a) < 0$.

Se n *è dispari, e* $f^{(n)}(a) > 0$, *la* $f(a+h) - f(a)$ *ha il segno di* h, *per* h *abbastanza piccolo; e quindi* f(x) *è crescente nel punto* $x = a$.

Se n *è dispari e* $f^{(n)}(a) < 0$, *la* f(x) *è decrescente nel punto* a (*).

L'ipotesi della continuità di $f^{(n)}(x)$ per $x = a$ si potrebbe rendere meno restrittiva, come abbiamo già visto nel primo caso di $n = 1$.

Infatti se $f^{(n)}(a)$ è determinato e finito, allora (cfr. oss. a § 63, pag. 199 ove è scritto $n+1$ al posto di n), poichè la funzione $f(x) - f(a)$ ha nel punto a nulle le prime $n-1$ derivate, $f(a+h) - f(a)$ ha il segno di $h^n f^{(n)}(a)$.

Della derivata n^{esima} basta dunque supporre che essa è *determinata e finita* nel punto a.

Si può dire che la curva $y = f(x)$ e la retta parallela all'asse delle x definita dall'equazione $y = f(a)$, che con la curva precedente ha comune il punto di ascissa $x = a$, si attraversano in un punto ove $f(x)$ è crescente o decrescente, mentre si toccano senza attraversarsi in un punto, ove $f(x)$ ha un massimo o un minimo.

I risultati precedenti si possono provare anche così: Se $f'(a) \neq 0$ ed $|f''(x)|$ ammette un limite superiore finito, la $f(a+h) - f(a) = h f'(a) + \frac{1}{2} h^2 f''(a+\theta h)$ prova che $f(a+h) - f(a)$ ha per $|h|$ abbastanza piccolo il segno di $h f'(a)$, perchè $h^2 f''(a+\theta h)$ è infinitesimo d'ordine superiore e che quindi in a la $f(x)$ è crescente o decrescente secondo che $f'(a)$ è positivo o negativo. Se $f'(a) = 0$, se $f''(a) \neq 0$, e se $|f'''(x)|$ ha limite superiore finito, la $f(a+h) - f(a) = \frac{h^2}{2} f''(a) + \frac{h^3}{\underline{3}} f'''(a+\theta h)$ prova che per $|h|$ abbastanza piccolo il segno di $f(a+h) - f(a)$ è quello di $\frac{h^2}{2} f''(a)$ [perchè $\frac{h^3}{\underline{3}} f'''(a+\theta h)$ è infinitesimo d'ordine superiore] ecc.

Esempi.

1° Trovare il massimo e il minimo della somma $x + y$ di due numeri, di cui è dato il prodotto $xy = 1$.

Ris. Si ha $y = \frac{1}{x}$; per cui

$$x + y = x + \frac{1}{x}.$$

Perchè tale funzione ammetta un massimo o un minimo, la

(*) Così, p. es., se $f'(a) = f''(a) = 0$, $f'''(a) \neq 0$, la funzione $f(x)$ è crescente in $x = a$ se $f'''(a) > 0$, decrescente se $f'''(a) < 0$.

Se $f'(a) = f''(a) = f'''(a) = 0$, $f^{(4)}(a) \neq 0$, la funzione ha nel punto $x = a$ un minimo se $f^{(4)}(a) > 0$, un massimo se $f^{(4)}(a) < 0$; e così via. Nulla ci dice il nostro teorema, se nel punto $x = a$ sono nulle tutte le derivate della $f(x)$.

sua prima derivata deve essere nulla. La derivata prima di $x + \frac{1}{x}$ è $1 - \frac{1}{x^2}$; deve dunque essere:

$$1 - \frac{1}{x^2} = 0,$$

da cui: $x^2 - 1,$

ossia: $\begin{cases} x = 1, \text{ oppure} \\ x = -1. \end{cases}$

La derivata seconda della funzione $x + \frac{1}{x}$ è $\frac{2}{x^3}$. Per $x = 1$ questa derivata è uguale a 2; perciò, essendo la prima derivata diversa da zero d'ordine (2) pari e positiva, la funzione data per $x = 1$ ammette un minimo che è 2. Per $x = -1$ la seconda derivata della funzione $x + \frac{1}{x}$ diventa -2; essendo dunque la prima derivata diversa da zero per $x = -1$ di ordine pari e negativa, la funzione data ammette nel punto $x = -1$ un massimo che è -2. L'allievo illustri col disegno.

La somma $x + y$ ha dunque un solo massimo che è -2 (per $x = -1$) e un solo minimo che è 2 (per $x = 1$). Questo risultato può sembrare a prima vista paradossale, perchè il massimo è minore del minimo. Ciò si spiega notando che la funzione $x + \frac{1}{x}$ non è continua in tutto l'intervallo da -1 a 1, essendovi in questo intervallo il punto 0, in cui la funzione non è neanche definita. La funzione data $x + \frac{1}{x}$ si sdoppia per così dire in due altre: l'una definita per $x < 0$, che ha il massimo in $x = -1$; l'altra definita per $x > 0$, che ha minimo per $x = 1$.

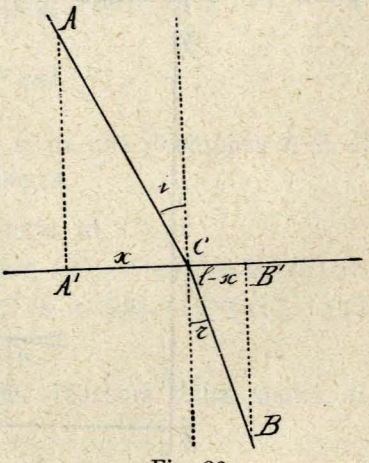

Fig. 26.

2° Un raggio di luce va da un punto A al punto B attraverso una retta r complanare con AB (fig. 26). Prima di giungere ad r ha la velocità v; poi acquista la velocità w. Cercare il punto C ove il raggio incontra la retta r, in guisa che il tempo y impiegato a percorrere complessivamente i segmenti AC, CB sia minimo.

RIS. Dette h, k la distanza da A, B ad r (in valore assoluto), detta l la distanza delle due proiezioni A', B' dei punti A, B su r, con x la distanza $A'C$, si avrà

$$AC = \sqrt{h^2 + x^2}, \qquad BC = \sqrt{(l-x)^2 + k^2}$$

$$y = \frac{AC}{v} + \frac{BC}{w} = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v} + \frac{\sqrt{(l-x)^2 + k^2}}{w}.$$

Affinchè y sia minimo, dev'essere $y'_x = 0$, ossia:

$$\frac{1}{v}\,\frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \frac{1}{w}\,\frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + k^2}},$$

ossia

$$\frac{1}{v}\,\frac{A'C}{AC} = \frac{1}{w}\,\frac{B'C}{BC}.$$

Indicati con i, r (cfr. fig. 26) gli angoli (di incidenza e rifrazione) di AC, CB con la normale r, se ne deduce

$$\frac{\operatorname{sen} i}{v} = \frac{\operatorname{sen} r}{w}, \quad \text{ossia} \quad \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{v}{w},$$

che è la nota legge della rifrazione della luce.

Lo studente verifichi che il punto C così determinato rende y effettivamente minimo.

§ 71. — Concavità, convessità, flessi.

Sia $y = f(x)$ definita in un intervallo, a cui è interno il punto a; e possegga la $f(x)$ finite e continue tutte le derivate

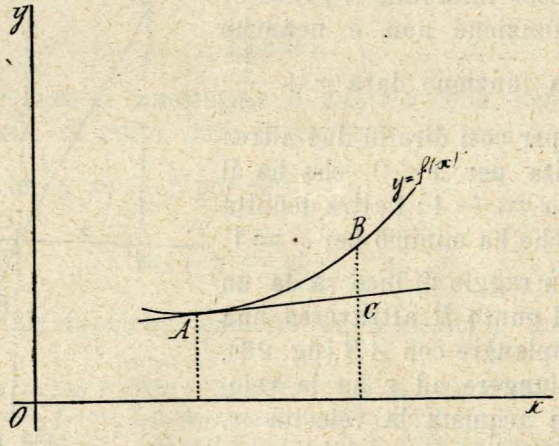

Fig. 27.

di cui avremo bisogno (fig. 27 e 28). (Basterebbe supporle finite e determinate).

Consideriamo i punti A, B della curva, aventi per ascissa a ed $a + h$, e la retta AC tangente in A. Sia C il punto di tale retta tangente, che ha $a + h$ per ascissa. L'ordinata di A sarà $f(a)$; quella di B sarà $f(a + h)$, perchè i punti A, B giacciono sulla curva $y = f(x)$.

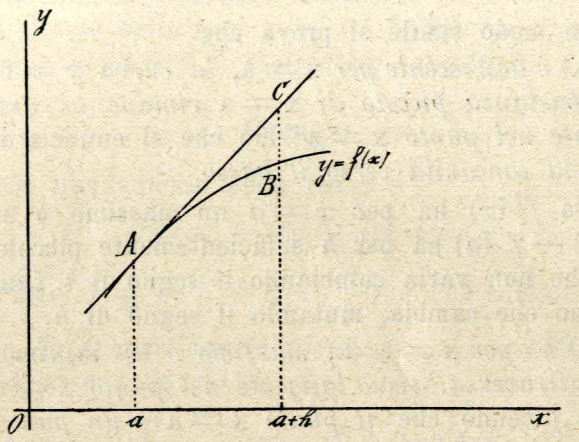

Fig. 28.

Se η è l'ordinata di C, il coefficiente angolare della retta AC è

$$\frac{\text{ordinata di } C - \text{ordinata di } A}{\text{ascissa di } C - \text{ascissa di } A} = \frac{\eta - f(a)}{h}.$$

Ma AC è tangente in A alla $y = f(x)$; il suo coefficiente angolare è perciò $f'(a)$. E si ha quindi

$$\frac{\eta - f(a)}{h} = f'(a).$$

Donde, risolvendo rispetto ad η, si ha che l'ordinata η di C vale $f(a) + hf'(a)$. Quindi la differenza

$$\begin{gathered}(\text{ordinata di } B) - (\text{ordinata di } C) = \\ = f(a+h) - [f(a) + hf'(a)] = [f(a+h) - f(a)] - hf'(a) = \\ = hf'(a + \theta h) - hf'(a) = h\{f'(a + \theta h) - f'(a)\}, \quad (1) \\ 0 < \theta < 1,\end{gathered}$$

come si riconosce tosto in virtù del teorema della media di Lagrange.

Distinguiamo ora parecchi casi:

1° La $f'(x)$ sia in $x = a$ crescente. In tal caso

$$f'(a + \theta h) - f'(a)$$

ha (per h sufficientemente piccolo) il segno di θh, ossia il segno di h. E la (1) è perciò positiva. Quindi:

Se $f'(x)$ *è crescente per* $x = a$, *la curva* $y = f(x)$ *in un intorno abbastanza piccolo di* $x = a$ *rimane al disopra della sua tangente nel punto* $x = a$; ciò che si enuncia dicendo che *volge la concavità verso l'alto.*

2° In modo simile si prova che

Se $f'(x)$ *è decrescente per* $x = a$, *la curva* $y = f(x)$ *in un intorno abbastanza piccolo di* $x = a$ *rimane al disotto della sua tangente nel punto* $x = a$; ciò che si enuncia dicendo che *essa volge la concavità verso il basso.*

3° Se $f'(x)$ ha per $x = a$ un massimo o un minimo, $f'(a + \theta h) - f'(a)$ ha per h sufficientemente piccolo un segno costante, che non varia cambiando il segno di h. Quindi la (1) ha un segno che cambia, mutando il segno di h.

Se $f'(x)$ *ha per* $x = a$ *un massimo o un minimo, la curva* $y = f(x)$ *attraversa la sua tangente nel punto* $x = a$; ciò che si enuncia dicendo che *il punto* $x = a$ *è un punto di flesso per la curva* $y = f(x)$. (Cfr., p. es., la fig. 13, a pag. 159).

Ne segue che in un punto di *flesso* $x = a$ l'angolo ω che l'asse delle x forma con la tangente alla curva $y = f(x)$ ha un valore massimo o minimo. Se dunque andiamo da un punto posto a sinistra ad un punto posto a destra del flesso, l'angolo ω, nei casi più comuni, o diminuisce per poi aumentare, oppure aumenta per poi diminuire. In una parola, quando si cammina, attraversando il flesso, l'angolo ω da crescente diventa decrescente, o viceversa. In una parola cambia il verso in cui gira la direzione della retta tangente.

Ricordo che negli enunciati precedenti la frase: « verso l'alto » [basso] è scritta invece della: « verso la direzione positiva [negativa] dell'asse delle y ».

Se, p. es., $f''(a) > 0$, allora $f'(x)$ è crescente per $x = a$. Se $f''(a) < 0$, allora $f'(x)$ è decrescente per $x = a$; se $f''(a) = 0$, $f'''(a) \neq 0$, allora $f'(x)$ ha un massimo o un minimo per $x = a$.

Dal precedente teorema si deduce quindi in particolare:

Se $f''(a) > 0$, *la curva* $y = f(x)$ *volge in* $x = a$ *la concavità verso l'alto; se* $f''(a) < 0$ *essa volge in* $x = a$ *la concavità verso il basso; infine, se* $f''(a) = 0$, $f'''(a) \neq 0$, *la curva ha un flesso nel punto* $x = a$.

Oss. Ricordiamo che, *mentre in un punto* $x = a$ *di flesso è* $f''(a) = 0$, può darsi benissimo *che* $f''(a) = 0$, *senza che* $x = a$ *sia un punto di flesso;* e ciò perchè, come già osservammo, può in un punto $x = a$ essere nulla la derivata di $f'(x)$, senza che in tale punto $f'(x)$ abbia un massimo o un minimo.

In un punto della curva di ordinata $y > 0$, anzichè dire che

la concavità (o la convessità) sono volte verso il basso, si suol dire che in tale punto la curva volge la concavità o convessità) verso l'asse delle x. La stessa locuzione si usa in un punto di ordinata negativa per dire che la concavità (o convessità) sono volte verso l'alto. Dunque: *Una curva volge in un suo punto (di ordinata differente da zero) la concavità (convessità) verso l'asse delle* x *se* y *ed* y'' *hanno ivi segno contrario (ugual segno), ossia se* y y'' *è negativo (positivo).*

ESEMPIO.

Si studii l'andamento della curva:

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

RIS. Posto $Y = y$, $X = x + \frac{a}{3}$ (ciò che equivale, quando si considerino X, Y come nuove coordinate, a fare una traslazione parallela all'asse delle x), si avrà

$$Y = \left(X - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(X - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(X - \frac{a}{3}\right) + c,$$

ossia $Y = X^3 + pX + q$, dove p, q sono costanti facili a determinarsi, dipendenti soltanto dalle a, b, c. I massimi e minimi di Y si ottengono risolvendo la

$$Y' = 3X^2 + p = 0 \text{ donde } X = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Se $p > 0$ non vi sono nè massimi nè minimi e la Y è sempre crescente (perchè $Y' > 0$ dappertutto). Se invece $p \leq 0$, sostituendo il valore trovato di X in $Y'' = 6X$, si ottiene $\pm 6\sqrt{-\frac{p}{3}}$. Se $p = 0$, questa derivata è nulla, e poichè $Y''' = 6 \neq 0$, il punto trovato non è un punto nè di massimo, nè di minimo.

Rimane dunque il solo caso di $p < 0$. In tal caso

$Y'' > 0$ per $X = +\sqrt{-\frac{p}{3}}$. Questo punto è un punto di minimo.

$Y'' < 0$ per $X = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$. Questo punto è un punto di massimo.

A sinistra del punto di massimo la funzione Y (che per $X = -\infty$ tende a $-\infty$) è crescente (come si riconosce veri-

ficando $Y' > 0$); poi Y decresce fino al punto di minimo, per poi crescere di nuovo tendendo a $+\infty$ per $X = +\infty$.

Per trovare i flessi si deve risolvere la $Y'' = 6X = 0$.

Se ne deduce $X = 0$, il quale è certo un flesso, perchè $Y''' = 6 \neq 0$.

Con la $x = X - a$ si ritorna all'antica variabile x.

L'allievo illustri col disegno l'andamento della curva in tutti i casi ($p > 0$, $p = 0$, $p < 0$) anche per qualche valore numerico particolare delle a, b, c.

Il lettore veda in quanti punti nei varii casi la nostra curva incontra l'asse delle X: punti, che saranno le radici *reali* dell'equazione $X^3 + pX + q = 0$ (*). E confronti coi risultati del § 10, esaminando a quali disuguaglianze le p, q soddisfano nei varii casi.

APPLICAZIONE.

Sia $y = f(x)$ lo spazio percorso da un punto M mobile su una retta r all'istante x. Come si può, dall'esame della curva $y = f(x)$ (che viene spesso tracciata automaticamente in casi pratici, come ad esempio nel varo di una nave) determinare in quali istanti la velocità di M raggiunge il massimo o il minimo valore?

RIS. Basta determinare quei valori di x, a cui corrisponde un flesso della nostra curva.

§ 72. — Metodo di Newton-Fourier.

α) *Lemma. Se* AB *è un arco di curva* $y = f(x)$ *e se* $f''(x)$ *è finita, non è mai nulla e conserva lo stesso segno nell'arco considerato, allora l'arco* AB *è tutto interno al triangolo*

(*) Se il valore massimo $\left(\text{per } X = -\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$ della Y è negativo, la nostra curva incontra in un solo punto $\left(\text{a destra del punto di minimo } X = +\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$ l'asse delle x.

Un risultato simile si ha se il valore minimo della Y è positivo. In tali casi la nostra equazione ha una sola radice reale.

Se il valore minimo di Y è negativo, quello massimo è positivo, vi sono tre radici reali poste rispettivamente negli intervalli

$$\left(-\infty, -\sqrt{-\tfrac{p}{3}}\right), \left(-\sqrt{-\tfrac{p}{3}}, +\sqrt{+\tfrac{p}{3}}\right), \left(+\sqrt{-\tfrac{p}{3}}, +\infty\right).$$

rettilineo ABD *formato dalla corda* AB *e dalle tangenti in* A *e in* B (fig. 29).

Questo teorema è geometricamente intuitivo, perchè nelle attuali ipotesi l'arco $y = f(x)$ volge la sua concavità sempre da una stessa parte. Essa si dimostra rigorosamente così.

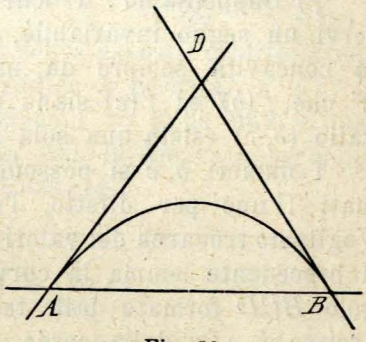

Fig. 29.

In due punti distinti dell'arco AB le tangenti all'arco non possono essere parallele, perchè i valori corrispondenti di $f'(x)$ sarebbero uguali; e, per il teorema di Rolle, in un punto intermedio sarebbe $f'' = 0$ contro l'ipotesi.

L'arco AB non ha con la corda AB comune (oltre ai punti A, B) alcun altro punto C; perchè altrimenti per il teorema della media esisterebbe nell'arco AC un punto E, e nell'arco CB un punto F, in cui le tangenti all'arco sarebbero parallele ad AB e quindi parallele tra di loro.

Così pure l'arco AB non può avere, oltre al punto A, comune alcun altro punto C con la tangente in A; altrimenti nell'arco AC vi sarebbe un punto intermedio E, ove la tangente all'arco sarebbe parallela alla tangente in A.

E altrettanto dicasi per la tangente in B. Quindi il nostro arco, o è tutto interno al triangolo ADB, oppure, pure essendo interno all'angolo $A(D)B$, è posto rispetto ad AB, dall'altra parte di D. Quest'ultimo caso è però da escludersi, perchè il nostro arco deve essere interno alla striscia limitata dalle normali tirate dai punti A, B all'asse delle x: e perciò l'intersezione D delle due tangenti in A e in B è interna a tale striscia e cade rispetto alla corda AB dalla stessa banda dell'arco AB. c. d. d.

β) Sia $f(x)$ una funzione finita e continua nell'intervallo da noi considerato con derivate prime e seconde finite e continue.

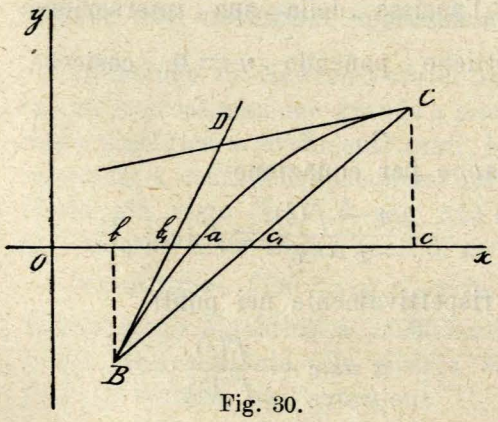

Fig. 30.

I punti $x = a$ che la curva $y = f(x)$ ha comuni con l'asse delle x sono i punti a per cui $f(a) = 0$, o, come si suol dire, sono le radici dell'equazione $f(x) = 0$ (*) (fig. 30).

Se per $x = b$, ed $x = c$ la funzione $f(x)$ assume valori di segno opposto, essa assumerà (teor. 3°, pag. 135) nell'intervallo (b, c) ogni valore intermedio e quindi anche il valore zero.

Se cioè f (b) *e* f (c) *sono di segno opposto, nell'intervallo* (b, c) *esiste almeno una radice* a *dell'equazione* f (x) = 0. Questo

(*) Qui si parla delle *radici della equazione* f (x) = 0 e della *curva di equazione* y = f (x). Il lettore inesperto noti che ***non si parla*** della linea di equazione $f(x) = 0$ che si scompone in rette $x =$ cost.!

teorema è geometricamente intuitivo; dall'ipotesi scende infatti che i punti della curva $y = f(x)$ di ascissa b, o di ascissa c sono da banda opposta dell'asse delle x. La curva $y = f(x)$ quindi deve incontrare almeno in un punto dell'intervallo (b, c) l'asse delle x.

γ) Supponiamo: 1° che nell'intervallo (b, c) la $f''(x)$ conservi un segno invariabile, che quindi la curva $y = f(x)$ volga la concavità sempre da una stessa parte in tale intervallo; 2° che $f(b)$ ed $f(c)$ siano di segno opposto; 3° che nell'intervallo (b, c) esista una sola radice a dell'equazione $f(x) = 0$.

I numeri b, c si possono considerare come valori approssimati (l'uno per difetto, l'altro per eccesso) dalla radice a. Vogliamo trovarne dei valori più approssimati. Ricordiamo che per il precedente lemma la curva $y = f(x)$ è tutta interna al triangolo BCD formato dalle tangenti DB, CD nei punti B, C di ascissa b, c, e dalla corda BC.

Il punto a cercato è dunque compreso tra i punti ove l'asse delle x incontra la corda BC e la spezzata $BD + DC$. Tali punti b_1, c_1 sono due valori più approssimati che b, c al valore cercato a. Ripetendo per tali punti quanto si è detto per i punti b, c, troveremo due valori b_2, c_2 ancor più approssimati.

E si può dimostrare che, così continuando, si può ottenere il valore di a con qualsiasi approssimazione prefissata.

δ) Il nostro procedimento geometrico si può facilmente tradurre in formole analitiche. L'equazione della corda BC è $\dfrac{y - f(b)}{x - b} = \dfrac{f(c) - f(b)}{c - b}$; l'ascissa della sua intersezione con l'asse delle x si ottiene ponendo $y = 0$, cosicchè $x = \dfrac{b f(c) - c f(b)}{f(c) - f(b)}$.

Le tangenti in B e C hanno per equazione

$$\frac{y - f(b)}{x - b} = f'(b), \qquad \frac{y - f(c)}{x - c} = f'(c);$$

ed incontrano l'asse delle x rispettivamente nei punti

$$x = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \qquad x = c - \frac{f(c)}{f'(c)}.$$

Quale di questi punti è l'intersezione dell'asse delle x con la spezzata $BD + DC$? Evidentemente quello che appartiene all'intervallo (b, c); e se entrambi appartengono a tale intervallo, quello che è più vicino al punto già determinato ove la retta BC incontra l'asse delle x.

Se non si vogliono calcolare entrambi questi punti, si può limitarci a considerare l'intersezione con l'asse della x della tangente in quello dei punti B, C, in cui la curva volge la convessità all'asse delle x, ossia in cui $f''(x)$ ed $f(x)$ hanno lo stesso segno. Con un tal procedimento però spesso si ottiene un'approssimazione minore di quella ottenuta col nostro metodo.

I punti $\dfrac{bf(c) - cf(b)}{f(c) - f(b)}$ e quello dei punti $b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}$, $c - \dfrac{f(c)}{f'(c)}$, che noi scegliamo secondo i principii sopra esposti, costituiscono i due valori più approssimati della radice a cercata.

Per es. noi sappiamo che l'equazione $x^5 = 2$ ha una, e una sola radice nell'intervallo (1, 2), in cui la derivata seconda $20\,x^3$ di $f(x) = x^5 - 2$ ha segno costante.

Poichè (posto $b = 1$, $c = 2$)

$$\frac{bf(c) - cf(b)}{f(c) - f(b)} = 1 + \frac{1}{31},$$

$$c - \frac{f(c)}{f'(c)} = 2 - \frac{3}{8} = 1 + \frac{5}{8}, \quad b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 1 + \frac{1}{5},$$

e di questi ultimi due punti il punto $1 + \dfrac{1}{5}$ è il più vicino a $1 + \dfrac{1}{31}$, la radice di $x^5 = 2$ è compresa tra $1 + \dfrac{1}{31}$ e $1 + \dfrac{1}{5}$.

Riapplicando a questi due numeri il nostro procedimento, si ha un'approssimazione maggiore; e, così continuando, si può dimostrare che si ottiene una approssimazione grande a piacere.

§ 73. — Alcune osservazioni relative alla risoluzione approssimata delle equazioni algebriche.

Il metodo di Newton-Fourier serve naturalmente a calcolare con un'approssimazione grande a piacere le radici reali di un'equazione algebrica a coefficienti reali. Delle radici complesse, o delle equazioni a coefficienti complessi qui non ci occupiamo, perchè abbiamo già visto (§ 17, δ, pag. 55) essere il loro studio riducibile alla ricerca delle radici reali di un'equazione a coefficienti reali.

Sia dunque $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ (1) un'equazione algebrica a coefficienti reali. La ricerca delle sue radici reali equivale alla ricerca delle intersezioni della curva reale C definita dall'equazione

$$y = f(x) \qquad (2)$$

con l'asse delle x (*). Si può senz'altro supporre che la (1) non

(*) Noto che il metodo di Newton-Fourier sarebbe applicabile al problema più generale di calcolare le intersezioni di due curve qualsiasi.

abbia radici multiple (a questo caso ci possiamo ridurre coi metodi del § 64); cosicchè (2) non sarà in alcun punto tangente all'asse delle x. Possiamo anche supporre che le $f(x) = 0$, $f''(x) = 0$ non abbiano radici comuni; perchè la ricerca di queste radici equivale a risolvere l'equazione ottenuta uguagliando a zero il massimo comun divisore $\varphi(x)$ delle $f(x)$, $f''(x)$; e, ammesso anche che $\varphi(x)$ non sia una costante, che cioè tale equazione $\varphi(x) = 0$ possegga radici (caso che si presenterà soltanto per equazioni di tipo molto particolare), ne verrà che alcune delle radici della $f(x) = 0$ si ottengono risolvendo la equazione più semplice (perchè di grado inferiore) $\varphi(x) = 0$. Le altre radici poi saranno le radici dell'altra più semplice equazione che si ottiene uguagliando a zero il polinomio quoziente della divisione di $f(x)$ per $\varphi(x)$.

Supposto dunque che $f(x) = 0$, $f''(x) = 0$ non abbiano radici comuni, ogni radice della $f(x) = 0$ apparterrà a un intorno dove $f''(x)$ conserva sempre lo stesso segno, cioè dove la (2) volge la convessità, o la concavità da una stessa parte. E ad un tale intorno sarà dunque applicabile il metodo di Newton-Fourier.

La più grave difficoltà consiste dunque di determinare due valori approssimati (uno per eccesso, uno per difetto) per ogni radice. Al § 23, β, pag. 78, abbiamo esposto un metodo semplice in teoria (ma che in pratica richiede calcoli troppo lunghi) per una simile determinazione. Altri svariatissimi metodi furono inventati a tale scopo. Ma al tecnico basteranno le seguenti due osservazioni:

1° Valori approssimati di ogni radice sono nei casi pratici suggeriti dallo stesso problema che si deve risolvere.

2° Valori approssimati si possono dedurre disegnando effettivamente la (2) e trovandone le intersezioni con l'asse delle x. Anzi le teorie fin qui svolte agevolano di molto tale disegno e possono dare indicazioni preziose (cfr. l'esempio della curva $Y = X^3 + pX + q$ studiato all'esempio 10° del § 71). Del resto esistono strumenti che possono disegnare tali curve. L'integrafo di Abdank-Abakanowicz (cfr. l'ultimo Capitolo) permette, per es., di passare dal disegno della linea $y = f^{(n)}(x) = a_0 \mid \underline{n}$ (che è una retta parallela all'asse delle x) successivamente alle curve

$$y = f^{(n-1)}(x)\,;\ y = f^{(n-2)}(x)\,;\ \ldots\ldots\,;\ y = f'(x)\,;\ y = f(x).$$

(Cfr. la nota a pag. 51, § 15, per indicazioni bibliografiche relative al problema qui esaminato).

CAPITOLO XII.

INTEGRALI

(Il lettore, a cui non importa affrettare la conoscenza del calcolo integrale, potrà far precedere la lettura del Cap. 13° a quella del presente Capitolo).

§ 74. — Primi teoremi.

α) Proponiamoci le seguenti domande fondamentali:

1° *È ogni funzione continua* F (x) *la derivata di un'altra funzione* f (x) ?

2° *Tale funzione* f (x) *è determinata dall'ipotesi che la sua derivata* f' (x) *valga* F (x) ? *E, se non è tale, quale è la sua indeterminazione?*

L'intuizione permette di prevedere le risposte che si dovranno dare a tali domande.

Consideriamo la funzione (da determinarsi) $f(x)$ come il valore che la distanza OM da un punto M mobile su una retta r ad una origine fissa O ha all'istante x. Se noi ammettiamo lecita questa supposizione, le nostre domande si riducono (§ 47) semplicemente a queste: Può una qualsiasi funzione continua $F(x)$ essere pensata come misura della velocità che un punto M mobile su una retta r possiede all'istante x? Data tale velocità $F(x)$, la distanza $OM = f(x)$ di M dall'origine O resta essa completamente determinata? oppure quale indeterminazione possiede?

A noi appare come intuitivo che alla prima domanda si debba rispondere affermativamente; e appare pure evidente che, per dare la posizione di M su r all'istante x, non basti dare la velocità $F(x)$, ma si debba anche assegnare la posizione di M in un istante almeno, p. es., per $x = a$. E, se anche una tale posizione è nota, sembra intuitivo che ne resti individuata la posizione di M ad ogni altro istante.

Così di un treno M che si muova su una linea nota r noi sappiamo assegnare la posizione ad ogni istante, se conosciamo per ogni istante la velocità del treno M, e conosciamo o l'ora e il punto di partenza, o anche, se si vuole, la posizione del treno su r ad un'ora prefissata $x = a$.

Se invece non conosciamo per nessun istante la posizione di M (non sappiamo donde e a che ora è partito il treno M), allora, pur conoscendone la velocità $F(x)$ ad ogni istante x, non possiamo dire dove si trovi M all'istante x. Ma possiamo ciononostante sapere quale spazio abbia percorso il punto M tra due dati istanti a, b; in altre parole tale spazio è perfettamente determinato, quando è nota ad ogni istante x la velocità del punto M.

Se M_1, M_2 sono due punti mobili sulla stessa retta r, e se essi posseggono ugual velocità $F(x)$ all'istante x, la distanza $M_1 M_2$ non varia col tempo (*è costante*); cosicchè le distanze $f_1(x) = OM_1$, $f_2(x) = OM_2$ hanno una differenza costante, ossia differiscono solo per una costante additiva.

Analiticamente ciò significa:

Teorema di esistenza.

1° **Esiste almeno una funzione $f(x)$ che possiede una derivata continua $F(x)$ prefissata.**

2° *Data* F (x), *per determinare completamente* f (x), *si deve dare in più il valore di* f (x) *per un qualche valore della* x, *p. es., per* x = a.

3° *Data* F (x), *pure non essendo* f (x) *completamente determinata, è però univocamente determinata la differenza* f (a) — f (b) *dei valori che* f (x) *assume in due punti* x = a, x = b *prefissati arbitrariamente nell'intervallo, ove* F (x) *è definita.*

4° *Se* f_1 (x), f_2 (x) *sono due funzioni che hanno la stessa derivata* F (x), *la differenza* f_1 (x) — f_2 (x) *è una costante. Cosicchè, per trovare tutte le funzioni che hanno per derivata* F (x), *basta trovarne una sola* f (x) *e aggiungere poi ad essa una costante arbitraria; la* f (x) + cost. *sarà la più generale funzione che ha* F (x) *per derivata.*

β) Dimostriamo il primo di questi teoremi. Se $F(x) \geqq 0$, l'area A del rettangoloide considerato a pagina 165 (ove si scriva F al posto di f) (oppure se tale area non è determinata, la sua area esterna od interna) è proprio (pag. 165) una funzione $f(x)$, la cui derivata vale $F(x)$.

Se poi $F(x)$ assume anche valori negativi, consideriamola in un intervallo finito. Sia $-k$ il suo valore minimo. Allora $\Phi(x) = F(x) + k$ non è mai negativa, e, per quanto si è dimostrato, è perciò la derivata di una qualche funzione $\varphi(x)$. Anche $F(x)$ è quindi una derivata; è precisamente la derivata di

$$f(x) = \varphi(x) - kx.$$

γ) Per dimostrare le 2ª, 3ª, 4ª precedenti proposizioni, ricordiamo il teorema:

Una funzione costante ha derivata sempre nulla e il teorema reciproco (§ 63, pag. 202):

Una funzione, la cui derivata è identicamente nulla, è una costante.

Ne deduciamo come al l. cit. (§ 63, ε):

Se $f_1(x)$, $f_2(x)$ *sono due funzioni aventi la stessa derivata* (determinata e finita) $F(x)$, *la loro differenza è una costante.*

Infatti la differenza $f_1(x) - f_2(x)$ ha per derivata

$$f'_1(x) - f'_2(x) = F(x) - F(x) = 0.$$

Essa, per il teorema citato più sopra, è dunque costante.

Geometricamente questo teor. si enuncia così: *Se le tangenti alla curva* $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ *in punti di uguali ascissa sono parallele, le due curve si deducono l'una dall'altra con una traslazione parallela all'asse delle* y.

Si ha dunque:

$$f_1(x) = f_2(x) + k \ (k = \text{cost}) \ \text{(teor. 4°)}.$$

Ponendo $x = a$, e quindi $x = b$ si ha:

$$f_1(a) = f_2(a) + k$$
$$f_1(b) = f_2(b) + k.$$

Sottraendo, se ne deduce:

$$f_1(a) - f_1(b) = f_2(a) - f_2(b).$$

Data cioè la funzione $F(x)$, è completamente individuata la differenza dei valori che in due punti a, b assume una funzione $f(x)$, che abbia $F(x)$ per derivata (teor. 3°).

Una funzione $f(x)$ che abbia $F(x)$ per derivata, sarà data (teor. 4°) della formola

$$f(x) = f_1(x) + C,$$

dove C è una costante indeterminata. Se noi vogliamo che per $x = a$ sia $f(x) = A$, sarà

$$A = f(a) = f_1(a) + C, \text{ ossia } C = A - f_1(a)$$

e quindi $$f(x) = f_1(x) - f_1(a) + A.$$

La funzione $f(x)$ è perciò completamente determinata (teor. 2°).

Sono così completamente dimostrate tutte le proposizioni enunciate più sopra.

δ) Una conseguenza molto importante si trae da quanto abbiamo dimostrato.

Se $F(x) \geq 0$, consideriamo il rettangoloide, di cui ci siamo già serviti per dimostrare il primo teorema del presente paragrafo. Le sue aree esterna ed interna, avendo entrambe la stessa derivata $F(x)$, differiscono per una costante. Ma questa costante è nulla, perchè tutte e due queste aree sono nulle per $x = a$. Cosicchè la loro differenza è nulla per $x = a$; ed, essendo costante, è nulla per ogni valore della x. Quelle due aree sono perciò uguali.

Se dunque $y = F(x) \geq 0$ è una funzione continua, il rettangoloide racchiuso tra l'asse delle x, la curva e le due ordinate ha uguali l'area esterna ed interna, cioè possiede un'area nel senso più elementare della parola: area (cfr. § 7).

ε) Una funzione $f(x)$, che abbia $F(x)$ per derivata si indica con $\int F dx$, e si chiama *integrale indefinito della* $F(x)$.

Questo nome è dovuto a ciò che un tale integrale non è completamente definito, ma è definito soltanto a meno di una costante additiva. Così, poichè cos x è la derivata di sen x, noi scriveremo.

$\int \cos x dx = \text{sen } x + C$ (C = costante arbitraria). La differenza $f(b) - f(a)$ si dice *integrale definito* di $F(x)$ nell'intervallo (a, b), perchè *non varia* qualunque costante si aggiunga ad $f(x)$, e si indica con $\int_a^b F(x)\,dx$. I numeri a e b si dicono rispettivamente i *limiti di integrazione* (il limite *inferiore*, ed il *superiore*).

Un tale integrale è completamente definito dalla funzione F, e dai limiti a, b. Il suo valore non dipende perciò dal nome dato dalla variabile di integrazione. Così, p. es.

$$\int_a^b \cos x dx = \int_a^b \cos z dz = \text{sen } b - \text{sen } a.$$

La differenza $f(b) - f(a)$ si indica anche con $[f(x)]_a^b$. Cosicchè, se

$$\int F(x)\,dx = f(x),$$

$$\text{sarà } \int_a^b F(x)\,dx = f(b) - f(a) = [f(x)]_a^b.$$

È poi evidente che:

$$(1) \qquad \int_a^b F(x)\,dx = -\int_b^a F(x)\,dx.$$

$$(2) \qquad \int_a^b F(x)\,dx + \int_b^c F(x)\,dx = \int_a^c F(x)\,dx; \int_a^a F(x)\,dx = 0.$$

Le (1), (2) equivalgono infatti alle identità

$$f(b) - f(a) = -[f(a)] - f(b)]$$
$$[f(b) - f(a)] + [f(c) - f(b)] = f(c) - f(a)$$
$$f(a) - f(a) = 0.$$

Inoltre per il teor. della media :

$$\int_a^b F(x)\,dx = f(b) - f(a) = (b - a)\,f'(c) = (b - a)\,F(c),$$

dove c *è un punto intermedio tra* a *e* b. *Quindi :*

Se M *è il massimo di* $|F(x)|$, *sarà :*

$$(3) \qquad \left|\int_a^b F(x)\,dx\right| \leq M\,|b - a|.$$

Se, p. es., $F(x)$ indica la velocità di un mobile all'istante x, la seconda e la terza di queste uguaglianze (se $a < b < c$), dicono che la somma degli spazi percorsi nell'intervallo (a, b) e nell'intervallo (b, c) è uguale allo spazio percorso nell'intervallo (a, c) ; e che lo spazio percorso in un istante (se pure è lecito dire una tale frase) è nullo. La prima delle precedenti uguaglianze ci dice che lo spazio percorso nell'intervallo (b, a) si deve riguardare come uguale in valore assoluto e di segno opposto a quello percorso nell'intervallo (a, b) ; cosicchè la precedente osservazione assume un significato generale.

È evidente che : *L'area del rettangoloide limitato dalla curva* $y = F(x) \geq 0$, *dall'asse delle* x *e dalle ordinate* $x = a$, $x = b$ *vale* $\int_a^b F(x)\,dx$, *se* $a < b$.

Se gli assi fossero *obliqui e formassero un angolo* ω, *il prodotto di questo integrale per* sen ω *varrebbe l'area della figura analoga* $0 \leq y \leq F(x)$; $a \leq x \leq b$. *Questo teorema coincide col precedente per* $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Se nell'integrale definito $\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b F(z)\,dz$ consideriamo l'estremo superiore b come variabile, e per fissar le idee, poniamo $b = x$, otteniamo

$$\int_a^x F(x)\,dx = \int_a^x F(z)\,dz$$

che è uguale ad $f(x) - f(a)$ e quindi differisce da $f(x)$ soltanto per una costante additiva. Esso è pure un integrale indefinito della $F(x)$.

Quindi anche

$$\int_a^x F(x)\,dx + A = \int_a^x F(z)\,dz + A$$

(A = costante arbitraria)

è un integrale indefinito di $F(x)$. *Esso è anzi proprio quell'integrale indefinito che per* x = a *assume il valore* A.

E lo $\int_a^x f(x)\,dx$ *è quell'integrale indefinito che si annulla per* x = a.

ζ) Quindi:

Da un integrale indefinito $f(x) = \int F(x)\,dx$ si ottiene l'integrale definito $\int_a^b F(x)\,dx$ eseguendo la differenza $f(b) - f(a)$.

Dall'integrale definito $\int_a^b F(x)\,dx$ si deducono gli integrali indefiniti, ponendo $b = x$, ed aggiungendo una costante arbitraria.

Vi è uno e un solo integrale indefinito che per $x = a$ assuma il valore A; precisamente lo

$$f(x) = \int_a^x F(x)\,dx + A.$$

La seguente tabella, dedotta dal quadro di pag. 190, dà gli integrali indefiniti fondamentali.

INTEGRALI FONDAMENTALI.

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C\,;\quad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C\,;\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;\quad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C\,;\quad \int \frac{dx}{x+a} = \log|x+a| + C \quad (*)$$

(*) Se $x > 0$, esiste $\log x$; e dalla $(\log x)' = \frac{1}{x}$ si trae $C + \log x = \int \frac{dx}{x}$.

Se $x < 0$, esiste $\log(-x)$; e dalla $\left[\log(-x)\right]'_x = \frac{1}{x}$ si trae $C + \log(-x) = \int \frac{dx}{x}$.

$$\int (x+a)^m\,dx = \frac{(x+a)^{m+1}}{m+1} + C \ (m \text{ intero positivo} \neq -1) \ (*)$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$2m\,a^2 \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{m+1}} = (2m-1)\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m} + \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + C \ (**)$$

(m intero positivo).

η) Se $f(x) = \int \varphi(x)\,dx$, ossia $f'(x) = \varphi(x)$, e k è una costante, è $[kf(x)]' = kf'(x) = k\,\varphi(x)$ e quindi $\int k\,\varphi(x)\,dx = k\,f(x) = k\int \varphi(x)\,dx$ (a meno della solita costante additiva arbitraria).

Se $f_1(x) = \int \varphi_1(x)\,dx$, $f_2(x) = \int \varphi_2(x)\,dx$, allora $[f_1(x)+f_2(x)]' = f'_1(x) + f'_2(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$; quindi $\int \varphi_1\,dx + \int \varphi_2\,dx = f_1(x) + f_2(x) = \int [\varphi_1(x) + \varphi_2(x)]\,dx$ + cost.

Si hanno così le formole (se φ, φ_1 φ_2 sono continue):

$$\int k\,\varphi(x)\,dx = k\int \varphi(x)\,dx + C \ (k = \text{cost.}),$$

$$\int [\varphi_1(x) + \varphi_2(x)]\,dx = \int \varphi_1(x)\,dx + \int \varphi_2(x)\,dx + C,$$

che sono di uso assai frequente.

(*) Così $\dfrac{(x+a)^{m+1} - (1+a)^{m+1}}{m+1}$ è quell'integrale indefinito che si annulla per $x = 1$. Se noi ne cerchiamo il limite per $m+1 = 0$ (p. es. ponendo $m+1 = z$, derivando num. e den. rispetto z, e quindi ponendo $z = 0$ secondo la regola del § 63, β) si trova $(x+a)^z \log(x+a) - (1+a)^z \log(1+a)$, che per $z = 0$ diventa $\log(x+a) - \log(1+a)$, cioè precisamente quell'integrale $\int \dfrac{dx}{x+a}$ che si annulla per $x = 1$.

(**) Dalla quarta riga di questo quadro si trae il valore di $\int \dfrac{dx}{(x^2+a^2)^m}$ quando $m = 1$. Ponendo nell'ultima riga successivamente $m = 1, 2, 3, \ldots\ldots$, se ne deduce successivamente il valore del nostro integrale per ogni valore intero positivo della m. Questa formola si dimostra osservando che:

$$\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^m}\right)' = \frac{2m\,a^2}{(x^2+a^2)^{m+1}} - (2m-1)\frac{1}{(x^2+a^2)^m}.$$

§ 75. — Regole generali di integrazione.

Ci si potrebbe proporre di trovare per l'integrazione metodi analoghi a quelli svolti nei §§ 55-60 per la derivazione. Ma per l'integrazione non esistono metodi così perfetti, come quelli dati per calcolare le derivate. Si può dimostrare che al teorema di pag. 189 si può opporre il seguente:

Esistono delle funzioni F(x) *calcolabili con un numero finito di operazioni elementari* (*), *il cui integrale non è calcolabile con un numero finito di tali operazioni* (ciò che avviene, p. es., per la radice quadrata di un polinomio generico di grado superiore al secondo; che pure è una funzione tanto semplice).

I pochi metodi che esporremo e che servono nei casi più semplici non sono in fondo che l'enunciato, con altre parole, di teoremi a noi già noti.

α) Abbiamo già detto al § 74, η, pag. 245, che se noi conosciamo

$$\int f(x)\,dx \text{ e } \int \varphi(x)\,dx,$$

noi possiamo subito calcolare

$$\int [f(x) + \varphi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx + C$$
$$\int kf(x) = k\int f(x) + C \quad (k = \text{cost.}).$$

Formole affatto analoghe valgono per gli integrali definiti. Si ha cioè:

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx$$
$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

Così, per esempio:

$$\int (\operatorname{sen} x + \cos x)\,dx = \int \operatorname{sen} x\,dx + \int \cos x\,dx = -\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x + \cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 1 + 1 = 2.$$

(*) Cioè somme, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, innalzamento a potenza, consultazioni di tavole logaritmiche o trigonometriche.

β) *Teorema di integrazione per sostituzione.* Sia $y = \int F(x)\,dx$ donde $y'_x = F(x)$. Sia $x = G(z)$ (*) una funzione di una nuova variabile z con derivata $G'(z)$ continua. Per la regola di derivazione di funzione di funzione sarà:

$$y'_z = y'_x\, x'_z = F(x)\, G'(z) = F[G(z)]\, G'(z);$$

donde, per la stessa definizione d'integrale:

$$\int F(x)\,dx = y = \int F[G(z)]\, G'(z)\,dz.$$

Questa formola costituisce il cosidetto teorema d'integrazione per sostituzione; dal primo si passa al terzo membro, *sostituendo alla* x *ed alla* dx *i loro valori* G (z), G' (z) dz.

Questa regola dimostra che **il simbolo** dx, che figura in $\int f(x)\,dx$, è scelto **così opportunamente, che nel calcolo lo si può trattare come un differenziale** (**).

Da quanto precede si scorge che così l'integrazione del differenziale $F(x)\,dx$ è ridotta a quella del differenziale

$$F[G(z)]\, G'(z)\,dz,$$

l'integrale del quale, presa convenientemente la funzione $x = G(z)$ potrà talvolta riuscire più agevolmente calcolabile che quello del differenziale

$$F(x)\,dx.$$

Naturalmente non possono stabilirsi regole per riconoscere in ogni caso quale sia la sostituzione da farsi, ed il successo dipenderà anche dalla maggiore o minore pratica che si ha in calcoli di tal genere.

Talvolta è invece più comodo calcolare l'integrale $\int F(x)\,dx$, anzichè lo $\int F(G)\, G'(z)\,dz$. E in questo caso la nostra dimostrazione serve a ridurre al primo questo secondo integrale.

Osserviamo ancora che se, p. es., col nostro metodo riduciamo il calcolo di $\int F(x)\,dx$ al calcolo di $\int F(G)\, G'(z)\,dz$, allora noi otteniamo l'integrale espresso come funzione non più di x, ma della variabile ausiliaria z.

(*) È sottinteso che, mentre la z varia in un certo intervallo, la x varii nell'intervallo ove è definito il nostro integrale.

(**) Noi lo avevamo introdotto soltanto come un modo per indicare un integrale. Così, p. es., avremo potuto introdurre altro modo di scrittura, p. es. scrivere $\int f(x)$ anzichè $\int f(x)\,dx$. Già di qui vediamo come sia felice il simbolismo adottato (cfr. anche il Cap. 15).

Perchè la sostituzione riesca utile, e cioè si possa avere y espresso come funzione della x, occorrerà che l'equazione

$$x = G(z)$$

sia risolubile rispetto a z in modo univoco, cioè che se ne possa dedurre

$$z = H(x),$$

ove H è funzione di x.

In tal caso l'integrale *definito* $\int_a^b F(x)\,dx$ è uguale a $\int_\alpha^\beta F[G(z)]\,G'(z)\,dz$, dove α e β sono i valori assunti dalla z rispettivamente per $x = a$, o $x = b$.

Così, p. es., $\int (x+a)^m dx$, posto $x + a = z$ e quindi $dx = dz$, diventa $\int z^m\,dz$ che è, come sappiamo $\frac{z^{m+1}}{m+1} + C$ o $\log|z| + C$ secondo che $m + 1 \neq 0$ oppure $m + 1 = 0$. Quindi ritroviamo la formola nota (ponendo $z = x + a$).

$$\int (x+a)^m\,dx = \begin{cases} \dfrac{(x+a)^{m+1}}{m+1} + C & \text{se } m+1 \neq 0 \\ \log|x+a| + C & \text{se } m = -1. \end{cases}$$

Così, se $a \neq 0$, posto $x = az$, $dx = a\,dz$, $z = \frac{x}{a}$, si ha:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{a\,dz}{a^2(z^2+1)} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} z + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\,dz}{\sqrt{a^2(1-z)}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \operatorname{arcsen} z + C = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C.$$

Così, posto $z = \varphi(x)$, $dz = \varphi'(x)$, dx, si trova

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \int \frac{dz}{z} = \log|z| + C = \log|\varphi(x)| + C,$$

formole tutte, che noi già conoscevamo.

Ben presto troveremo nuove importanti applicazioni di questo metodo.

γ) *Teorema di integrazione per parti.* — Il teorema di integrazione per parti non è altro che una differente enunciazione della regola di derivazione del prodotto di due funzioni.

Supponiamo che u e v siano due funzioni continue insieme alle loro derivate prime. Poichè

$$(uv)' = u'v + uv',$$

per definizione di integrale otteniamo:

$$uv = \int (u'v + uv')\, dx.$$

Ed essendo l'integrale di una somma uguale alla somma degli integrali, è

$$uv = \int u'v\, dx + \int uv'\, dx.$$

Donde ricaviamo:

$$\int u'\, vdx = uv - \int uv'\, dx.$$

Posto $v = \psi$, $u' = \varphi$, sarà $u = \int \varphi\, dx$. E si ha il:

TEOREMA. — *Se φ è una funzione continua che ha per integrale* u, *e ψ è una funzione continua che ha per derivata la funzione ψ' pure continua, allora l'integrale del prodotto $\varphi\psi$ è uguale al prodotto del secondo fattore ψ per l'integrale* u *del primo diminuito dell'integrale del prodotto che si ottiene moltiplicando l'integrale trovato* u *del primo fattore per la derivata ψ' del secondo fattore.*

ESEMPI:

1° Trovare:

$$\int \log x\, dx.$$

Si può scrivere:

$$\int \log x\, dx = \int 1.\ \log x\, dx\ ;$$

e, ponendo

$$\varphi = 1, \text{ donde } u = \int 1.\, dx = \int dx = x,$$

$$\psi = \log x, \qquad \psi' = \frac{1}{x},$$

si ottiene:

$$\int 1.\ \log x\, dx = x \log x - \int x \frac{1}{x}\, dx = x(\log x - 1) + C.$$

2° Così pure si trova:

$$f(a) - f(0) = \int_0^a 1.\ f'(x)\, dx = \Big[(x-a) f'(x)\Big]_0^a - \int_0^a (x-a) f''(x)\, dx =$$

$$= a f'(0) - \left[\frac{(x-a)^2}{\underline{|2}} f''(x)\right]_0^a + \int_0^a \frac{(x-a)^2}{\underline{|2}} f'''(x)\, dx = \text{ecc.}$$

R. POLITECNICO DI TORINO BIBLIOTECA

Si ritrova così la formola di Taylor, col resto sotto forma di integrale (cfr. la (9) del § 69 a pag. 214, dove si ponga $h = a$, $\alpha = 0$).

3° Trovare: $\int \operatorname{arctg} x\, dx$.

Possiamo scrivere:

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = \int 1 . \operatorname{arctg} x\, dx;$$

posto

$$\varphi = 1, \qquad \psi = \operatorname{arctg} x,$$

è

$$u = x, \qquad \psi' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Quindi:

$$\int 1 . \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log (1+x^2) + C.$$

§ 76. — Integrazione delle frazioni razionali.

1° Ci occupiamo naturalmente soltanto delle frazioni reali (quozienti di polinomi a coefficienti reali). Diremo *semplice* ogni frazione del tipo $\frac{A}{x+a}$, cioè ogni quoziente di una costante A per un polinomio di primo grado $x + a$, ed ogni frazione del tipo

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q},$$

cioè ogni quoziente di un polinomio $Mx + N$ di primo grado per un trinomio $x^2 + px + q$ di secondo grado, purchè

$$\frac{p^2}{4} - q < 0 \text{ ossia } q - \frac{p^2}{4} > 0,$$

cioè purchè l'equazione $x^2 + px + q = 0$ abbia radici complesse.

TEOR. *Ogni frazione* $\frac{P(x)}{T(x)}$ *è somma*

α) *di un polinomio* $Q(x)$ (il quoziente ottenuto dividendo $P(x)$ per $T(x)$; esso è nullo soltanto se il grado p di $P(x)$ è inferiore al grado t di $T(x)$);

β) *di frazioni semplici, ciascuna delle quali ha per denominatore uno dei fattori di primo o di secondo grado, in cui, secondo il teorema del* § 16, pag. 52-53, *si può decomporre il denominatore* T (x);

γ) *della derivata di una frazione*

$$\frac{V(x)}{W(x)},$$

il cui denominatore W (x) *è il massimo comun divisore di* T (x) *e* T' (x), *ossia è il polinomio che si deduce da* T (x) *diminuendo di un'unità l'esponente di ognuno dei suoi fattori precedentemente citati, mentre* V (x) *è un polinomio di grado inferiore al grado di* W (x). Cosicchè, *se* T (x) *è privo di fattori multipli,* $W(x)$ è una costante (polinomio di grado zero), $V(x)$ è quindi nullo; e *questa frazione* $\frac{V}{W}$ *è nulla.*

Oss. Notiamo che in γ) abbiamo dato due modi per calcolare $W'(x)$. Secondo il caso, sarà più utile l'uno o l'altro procedimento.

Così, p. es., se

$$T(x) = k\,(x+a_1)\,(x+a_2)^2\,(x^2+px+q)^3\left(\frac{p^2}{4}-q<0\right),$$

dal teorema precedente risulta che ogni frazione $\frac{P(x)}{T(x)}$ si può decomporre nella somma:

α) del polinomio $Q(x)$ ottenuto dividendo $P(x)$ per $T(x)$;

β) di tre frazioni semplici

$$\frac{A_1}{x+a_1}\,,\quad \frac{A_2}{x+a_2}\,,\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)};$$

γ) e infine di una derivata

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4}{(x+a_2)\,(x^2+px+q)^2}\right].$$

E noi, anzichè dimostrare il teorema in generale, ci riferiremo per semplicità a questo esempio. La dimostrazione si estende però al caso più generale soltanto con qualche complicazione di notazioni.

Dim. Siano $Q(x)$, $R(x)$ quoziente e resto ottenuti dividendo $P(x)$ per $T(x)$. Tale resto $R(x)$ sarà di grado inferiore al grado di $T(x)$, che nel caso attuale vale 9. Potremo porre

$$\frac{P(x)}{T(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{T(x)}, \qquad (1)$$

dove R (x) *è al massimo di ottavo grado.* Basterà provare che $\frac{R(x)}{T(x)}$ si può decomporre nella somma di addendi β) e γ); ossia che si possono trovare delle costanti A_1, A_2, M, N, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 cosicchè sia

$$\frac{R(x)}{T(x)} = \frac{A_1}{x+a_1} + \frac{A_2}{x+a_2} + \frac{Mx+N}{x^2+xp+q} + \frac{d}{dx}\left[\frac{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_4x^4}{(x+a_2)(x^2+px+q)^2}\right]. \quad (2)$$

Il metodo migliore per calcolare l'ultimo termine (da seguirsi anche negli esercizi numerici) *è quello di derivare applicando la regola di derivazione di un prodotto,* considerando p. es. nel caso attuale la frazione da derivare come il prodotto di $b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_4x^4$ per $(x+a_2)^{-1}$ e per $(x^2+px+q)^{-2}$. Si trova allora che la nostra uguaglianza diventa:

$$\frac{R(x)}{T(x)} = \frac{A_1}{x+a_1} + \frac{A_2}{x+a_2} + \frac{Mx+N}{x^2+px+q} + \frac{b_1+2b_2x+\ldots+4b_4x^3}{(x+a_2)(x^2+px+q)^2} - \frac{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_4x^4}{(x+a_2)^2(x^2+px+q)^2} - 2\frac{(b_0+b_1x+\ldots+b_4x^4)(2x+p)}{(x+a_2)(x^2+px+q)^3}. \quad (2)^{bis}$$

Moltiplicando per $\frac{1}{k}T(x) = (x+a_1)(x+a_2)^2(x^2+px+q)^3$, tutti i denominatori svaniscono; e l'uguaglianza precedente diventa:

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}R(x) = {} & A_1(x+a_2)^2(x^2+px+q)^3 + A_2(x+a_1)(x+a_2)(x^2+px+q)^3 \\ & + (Mx+N)(x+a_1)(x+a_2)^2(x^2+px+q)^2 \\ & + (x+a_1)(x+a_2)(x^2+px+q)(b_1+2b_2x+\ldots+4b_4x^3) \\ & - (b_0+b_1x+\ldots+b_4x^4)(x+a_1)(x^2+px+q) \\ & - 2(b_0+b_1x+\ldots+b_4x^4)(2x+p)(x+a_1)(x+a_2),\end{aligned}$$

dove *il secondo membro è ancora al massimo di ottavo grado,* perchè ogni suo termine è stato ottenuto moltiplicando $\frac{1}{k}T(x)$ (di grado *nove*) per una frazione il cui numeratore è di grado *inferiore* al denominatore.

Se noi sviluppiamo il secondo membro, otterremo un'espressione del tipo:

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots\ldots + c_7x^7 + c_8x^8,$$

dove evidentemente le c_i sono polinomii omogenei di primo grado nelle 9 costanti da determinarsi A_1, A_2, M, N, b_0, $b_1 \dots b_4$. Se

$$\frac{1}{k} R(x) = r_0 + r_1 x + \dots + r_8 x^8,$$

la nostra uguaglianza diventa:

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= r_0 \\ c_1 &= r_1 \\ &\dots\dots \\ c_8 &= r_8 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Le (3) sono effettivamente un sistema di nove equazioni lineari nelle nove *incognite* A_1, A_2, ..., b_4; le quali come ora proveremo, si possono risolvere con la regola di Cramer.

Infatti, se la regola di Cramer non fosse applicabile alle (3), il determinante dei coefficienti delle nove incognite in tali equazioni sarebbe nullo. E in tal caso per il teorema del § 27 alle equazioni omogenee che si deducono dalle precedenti (3) sostituendo lo zero al posto delle r, si potrebbe soddisfare con valori non tutti nulli delle incognite. Se le r sono nulle, anche $R(x)$ sarebbe nullo. Quindi, poichè le (3) sono equivalenti alle (2) e $(2)_{bis}$, si potrebbe soddisfare identicamente alla (2) supponendo $R(x)$ identicamente nullo, e le A_1, A_2, ... b_4 nno tutte nulle. Dimostreremo che ciò è assurdo.

Infatti, se così fosse, da (2) si dedurrebbe in tali ipotesi:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{b_0 + \dots + b_4 x^4}{(x+a_1)(x^2+px+q)^2}\right] = -\frac{A_1}{x+a_1} - \frac{A_2}{x+a_2} - \frac{Mx+N}{x^2+px+q}.$$

Se passiamo al limite per $x = -a_1$, il primo membro tende a un limite finito; altrettanto dovrà accadere del secondo membro. E quindi è $A_1 = 0$.

Il secondo membro diventa per $x = -a_2$ infinito del primo (e non del secondo) ordine (*); altrettanto dovrà avvenire del primo membro. E quindi $b_0 + \dots + b_4 x^4$ è divisibile per $x + a_2$. Ma in tal caso il primo membro è finito per $x = -a_2$. Altrettanto deve avvenire del secondo membro. E quindi $A_2 = 0$.

Il secondo membro è infinito del primo (e non del terzo) ordine nei punti (complessi) che annullano $x^2 + px + q$. Come sopra se ne dedurrà che $b_0 + \dots + b_4 x^4$ è divisibile per $(x^2+px+q)^2$ e quindi che $M = N = 0$.

D'altra parte il polinomio $b_0 + b_1 x + \dots + b_4 x^4$ di quarto grado può essere divisibile per $(x + a_2)$ e per $(x^2 + px + q)^2$, soltanto se è divisibile per il loro prodotto, che è un polinomio di quinto grado; cioè soltanto se tutte le b sono nulle.

È dunque impossibile che $R(x) = 0$, se qualcuna delle nostre incognite $A_1, A_2, \dots b_4$ è differente da zero.

Il nostro teorema risulta così dimostrato; e si vede in più che gli addendi cercati sono *determinati in modo univoco.*

2° Noi dunque sapremo integrare ogni frazione, se sappiamo integrare

α) ogni polinomio $Q(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots + k_s x^s$;

(*) Quando naturalmente si assuma $\frac{1}{x+a_2}$ come infinito principale.

β) ogni frazione semplice del tipo

$$\frac{A}{x+a};$$

β′) ogni frazione semplice del tipo

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q} \qquad \left(\frac{p^2}{4}-q<0\right);$$

γ) ogni espressione $\dfrac{d}{dx}\dfrac{Vx}{W(x)}$.

Ora gli integrali di (α), (β), (γ) sono rispettivamente

$$k_0 x + k_1 \frac{x^2}{2} + k_2 \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots + k_s \frac{x^{s+1}}{s+1} + \text{cost.}$$

$$A \log |x+a| + \text{cost.}$$

$$\frac{V(x)}{W(x)} + \text{cost.}$$

Basterà saper calcolare l'integrale di β′), cioè:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx \qquad \left(\begin{array}{c}\dfrac{p^2}{4}-q<0 \\ \text{cioè } k=\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}} \text{ reale}\end{array}\right).$$

Ora:

$$Mx+N=\frac{M}{2}(2x+p)+\left(N-p\frac{M}{2}\right).$$

Cosicchè:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(N-p\frac{M}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Ora:

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx=\log(x^2+px+q).$$

E, poichè

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k^2,$$

sarà:

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k^2}=\frac{1}{k}\operatorname{artg}\frac{x+\frac{p}{2}}{k}.$$

Dunque:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\log(x^2+px+p) + \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{artg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + \text{cost.}$$

Il nostro problema è completamente risoluto.

Così, p. es., per integrare

$$\frac{x^5+2x^3+5x^2+x+1}{x^2(x^2+1)^2},$$

si ponga:

$$\frac{x^5+2x^3+5x^2+x+1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{b_0+b_1x+b_2x^2}{x(x^2+1)}\right),$$

dove manca al secondo membro ogni polinomio, perchè nel primo membro il grado del numeratore è inferiore a quello del denominatore. Si trova:

$$A=1, \quad M=0, \quad N=1, \quad b_2=1, \quad b_1=0, \quad b_0=-1.$$

E quindi l'integrale cercato vale:

$$\log|x| + \operatorname{artg} x + \frac{x^2-1}{x(x^2+1)} + \text{cost.}$$

§ 77. — Integrazione di alcune funzioni trascendenti o irrazionali.

α) Sia f una funzione razionale (quoziente di polinomi) nella variabile e^x. Si voglia calcolarne l'integrale $\int f(e^x)\,dx$. Posto $e^x = z$, $z\,dx = dz$ questo integrale si riduce all' integrale $\int \frac{f(z)}{z}\,dz$ (che noi sappiamo calcolare) della funzione razionale $\frac{f(z)}{z}$.

β) Sia F una funzione razionale delle funzioni goniometriche sen x, cos x, tg x, cotg x, ecc. della x. Le formole $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, ecc. ci permettono di trasformarla in una funzione razionale f delle sole variabili sen x, cos x. Per calcolare

l'integrale $\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$ di una tale funzione, si ponga $x = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, cosicchè

$$dx = 2\frac{dz}{1+z^2},$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2}; \qquad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

Il nostro integrale diventerà:

$$2\int f\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{dz}{1+z^2};$$

e si ridurrà così all'integrale, che sappiamo eseguire, della funzione razionale

$$f\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{1}{1+z^2}.$$

Oss. Se la f è una funzione razionale delle sole $\operatorname{sen}^2 x$, $\cos^2 x$, $\operatorname{tg} x$, il calcolo diventa più rapido ponendo $z = \operatorname{tg} x$, e quindi $dx = \frac{dz}{1+z^2}$, $\operatorname{sen}^2 x = \frac{z^2}{1+z^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+z^2}$.

γ) Si voglia calcolare:

(1) $$\int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \qquad (a, b, c = \text{cost.})$$

dove f è una funzione razionale di x e $\sqrt{ax^2+bx+c}$, e quindi irrazionale nella x. Distingueremo varii casi:

γ^1) Supposto $a > 0$, porremo $a = k^2$, $k = \sqrt{a}$, e

(2) $$\sqrt{ax^2+bx+c} = k(x+z),$$

dove z è una nuova variabile. Quadrando e risolvendo rispetto alla x, si trova:

(3) $$x = \frac{az^2-c}{b-2az}; \qquad (a = k^2)$$

e quindi:

$(3)_1$ $$dx = \frac{-2a^2z^2+2abz-2ac}{(b-2az)^2}dz,$$

e, per (2):

$(3)_2$ $$\sqrt{ax^2+bx+c} = k(x+z) = \sqrt{a}\,\frac{-az^2+bz-c}{b-2az}.$$

In virtù delle (3) e della regola di integrazione per sostituzione, l'integrale (1) diventa

$$-2a\int f\left(\frac{az^2-c}{b-2az}, \sqrt{a}\,\frac{-az^2+bz-c}{b-2az}\right)\frac{(az^2-bz+c)}{(b-2az)^2}\,dz;$$

cioè diventa l'integrale di una funzione razionale della z, che noi sappiamo calcolare.

γ^2) Si calcoli ora (1) nell'ipotesi $a < 0$. Se α, β sono le radici di $ax^2 + bx + c = 0$, è (posto $a = -k^2$):

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) = -k^2(x - \alpha)(x - \beta).$$

Questo polinomio dovendo essere positivo, affinchè (1) abbia significato reale, dovrà essere:

$$(4) \qquad (x - \alpha)(x - \beta) < 0,$$

cosicchè le α, β non potranno essere complesse coniugate, nè uguali e reali (*). Le α e β saranno quindi reali e distinte. Dalla (4) si deduce che $x - \alpha$ e $x - \beta$ sono di segno contrario, e quindi che $x - \alpha$ e $\beta - x$ hanno lo stesso segno, ossia che si può porre

$$\frac{x - \alpha}{\beta - x} = z^2,$$

dove z è un'altra variabile *reale*. Risolvendo rispetto ad x si ha:

$$x = \frac{\alpha + \beta z^2}{1 + z^2}; \qquad \text{donde:} \qquad dx = 2(\beta - \alpha)\frac{z\,dz}{(1 + z^2)^2},$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = \sqrt{-a(x - \alpha)(\beta - x)} =$$

$$= \sqrt{-a\frac{x - \alpha}{\beta - x}(\beta - x)^2} = kz(\beta - x) = kz\frac{\beta - \alpha}{1 + z^2},$$

cosicchè l'integrale (1) diventa:

$$2(\beta - \alpha)\int f\left(\frac{\alpha + \beta z^2}{1 + z^2},\ k(\beta - \alpha)\frac{z}{1 + z^2}\right)\frac{z\,dz}{(1 + z^2)^2},$$

che è un integrale di una funzione razionale delle z, e che noi quindi sappiamo calcolare (**).

δ) Il caso $a = 0$ è (per $m = 2$) un caso particolare dell'integrale

$$\int f\left(x, \sqrt[m]{bx + c}\right)dx \qquad (m = \text{intero positivo});\ (b \neq 0).$$

Questo integrale, posto $\sqrt[m]{bx + c} = z$, $x = \frac{z^m - c}{b}$, $dx = \frac{m}{b}z^{m-1}\,dz$, diventa l'integrale $\frac{m}{b}\int f\left(\frac{z^m - c}{b}, z\right)z^{m-1}\,dz$

(*) Se $\alpha = a + ib$, $\beta = a - ib$ con $b = 0$, o $b \neq 0$, allora $(x - \alpha)(x - \beta) = (x - a)^2 + b^2 \geq 0$.

(**) In γ^1) e γ^2) l'indeterminazione del segno per $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ corrisponde all'indeterminazione del segno per k.

di una funzione razionale della z: integrale che quindi sappiamo calcolare.

Oss. Il caso di una funzione f razionale nella x, $\sqrt[p]{bx+c}$, $\sqrt[q]{bx+c}$, $\sqrt[r]{bx+c}$, ... ($p, q, r,$ ..... interi positivi) si riduce subito al precedente, assumendo per m il minimo comune multiplo di $p, q, r,$ .....

ε) Calcoliamo l'integrale $\int f(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\,dx$ ($a, b, c, d =$ cost.) ($a \neq 0$) di una funzione razionale f di x, $\sqrt{ax+b}$, $\sqrt{cx+d}$. Posto $z = \sqrt{ax+b}$ e quindi $x = \dfrac{z^2-b}{a}$, $dx = \dfrac{2}{a}\,z\,dz$, questo integrale diventa $\dfrac{2}{a}\int f\left(\dfrac{z^2-b}{a}, z, \sqrt{\dfrac{c}{a}z^2 + \dfrac{(da-cb)}{a}}\right) z\,dz$, che è l'integrale di una funzione razionale di z e di $\sqrt{\dfrac{c}{a}z^2 + \left(d - \dfrac{cb}{a}\right)}$, cioè un integrale del tipo che noi abbiamo già imparato a calcolare in γ).

ζ) **Integrali binomii.** — Si voglia calcolare l'integrale $\int x^m (ax^n+b)^p\,dx$ ove a, b sono costanti ed m, n, p numeri razionali.

A) Se p *è intero*, si ponga $x = z^s$, indicando con s il minimo comune multiplo dei denominatori di m, n, che per ipotesi sono numeri fratti (cfr. ε), e ci si riduce al solito caso dell'integrale di una funzione razionale.

B) Se p è una frazione $\dfrac{r}{s}$ (con r, s interi), posto

$$t = (ax^n+b)^{\frac{1}{s}},\quad x = \left(\frac{t^s-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}},\quad dx = \frac{s}{na}\left(\frac{t^s-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1} t^{s-1}\,dt,$$

il nostro integrale diventa:

$$\frac{s}{na^{\frac{1+m}{n}}}\int t^{r+s+1}\,(t^s-b)^{\frac{m+1}{n}-1}\,dt,$$

che è l'integrale di una funzione razionale, e noi sappiamo calcolare, *se* $\dfrac{m+1}{n}$ *è intero.*

Possiamo trovare un altro caso, in cui possiamo calcolare il nostro integrale. Basti osservare che, posto $x = \dfrac{1}{y}$, esso diventa

$$-\int y^{\mu}\,(a+by^n)^p\,dy \quad \text{con } \mu = -(m+2+np)$$

che, per quanto dicemmo in *B)* sappiamo calcolare se $\dfrac{\mu+1}{n}$ è intero cioè se $\dfrac{-m-1-np}{n}$ è intero, cioè se $\dfrac{m+1}{n} + p$ *è intero.*

In conclusione sappiamo *calcolare il precedente integrale, riducendolo al calcolo di una funzione razionale, quando è intero uno dei tre numeri* p, *oppure* $\dfrac{m+1}{n}$, *oppure* $\dfrac{m+1}{n} + p$.

Oltre al quadro del § 74, ζ, pag. 244, noi ne daremo qui un altro che riassume i più importanti risultati ottenuti fin qui.

QUADRO DEI METODI DI INTEGRAZIONE (cfr. pag. 244 e 190).

$\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx + \text{cost.}$ (integrazione per somma)

$\int f(x)\,dx = \int f[x(z)]\,x'(z)\,dz + \text{cost.}$ (integrazione per sostituzione)

$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx + \text{cost.}$ (integrazione per parti).

Se f indica nei singoli casi una funzione razionale della variabile, o delle variabili da cui dipende

$\int f(x)\,dx$	Si calcola scomponendo $f(x)$ nella somma di frazioni semplici, di un polinomio, e di una derivata.	
$\int f(\text{sen } x, \cos x)\,dx$	Si calcola introducendo come nuova variabile di integrazione	$z = tg\,\frac{x}{2}$. Si può anche porre $z = tg\,x$, se in f entrano solo $tg\,x$ e potenze ad esponente pari di sen x, cos x.
$\int f(x, \sqrt[m]{ax+b})\,dx$; $a, b = \text{cost.}$; $a \neq 0$, (m intero positivo)	Si calcola introducendo come nuova variabile di integrazione	$z = \sqrt[m]{ax+b}$ (*).
$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ $a, b, c = \text{cost.}$	Si calcola, assumendo a variabile z di integrazione quella definita dalla	$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}(x+z)$ se $a > 0$ $z^2 = \frac{x-\alpha}{\beta-x}$ se $a < 0$, ed α, β sono le radici di $ax^2+bx+c=0$.
$\int f(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\,dx$ $a, b, c, d = \text{cost.}$; $a, c \neq 0$	Si riduce al caso precedente assumendo a variabile di integrazione	$z = \sqrt{ax+b}$
$\int f(e^x)\,dx$	Si calcola assumendo a variabile di integrazione	$z = e^x$
Integrali binomii		cfr. pag. 258.

(*) Se capitano parecchi radicali $z = \sqrt[\mu]{ax+b}$, $z = \sqrt[\nu]{ax+b}$, ecc. si porrà $z = \sqrt[m]{ax+b}$, dove m è il minimo comune multiplo degli indici μ, ν, ecc.

§ 78. — Integrali singolari.

α) Finora ci siamo limitati ad integrali di funzioni continue nell'intervallo considerato. Vogliamo ora definire gli integrali di una funzione $f(x)$ che nell'intervallo (a, b) che si considera è dappertutto continua, eccettuato un numero finito di punti singolari.

Ciò, per es., avviene se volessimo studiare l'espressione $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, poichè $\frac{1}{\sqrt{x}}$ è singolare per $x = 0$. Osserveremo che, se ε è un numero positivo piccolo a piacere, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ è continua nell'intervallo $\varepsilon \ldots\ldots 1$; cosicchè ha un significato perfettamente determinato lo $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, che, calcolato coi soliti metodi, si riconosce uguale a $\left(2 - 2\sqrt{\varepsilon}\right)$.

Calcoliamo ora il

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \left(2 - 2\sqrt{\varepsilon}\right).$$

Tale limite esiste ed è uguale a 2.

E noi porremo per definizione

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2.$$

Più in generale, se nello $\int_a^b f(x)\,dx$ è, per esempio, $a < b$ e la $f(x)$ è singolare in a, ma è continua nell'intervallo $a + \varepsilon, \ldots\ldots b$, dove ε è un numero positivo piccolo a piacere ($\varepsilon < b - a$), allora noi cercheremo il $\lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$. Se questo limite esiste ed è finito, porremo per definizione

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Se invece tal limite non esiste o non è finito (come, p. es., avviene di $\lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a}$), tale integrale sarà per noi un simbolo privo di significato.

Analogamente si procederebbe, se $f(x)$ fosse singolare in b. Se $f(x)$ diventa singolare in un punto c (*) interno ad (a, b), allora se esistono, secondo le definizioni ora poste, gli integrali $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$, si pone per definizione

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

β) Può esistere una funzione $f(x)$ che è singolare in c, pure essendo finita: p. es. una funzione discontinua nel punto c. Il caso più notevole è che siano finiti il $\lim_{x=c-0} f(x)$ ed il $\lim_{x=c+0} f(x)$, ma che tali limiti sieno differenti l'uno dall'altro. Ciò, p. es., avviene per la funzione $\operatorname{sen} x + \frac{x-c}{|x-c|}$. In tal caso la nostra definizione si può esporre in forma più semplice. Se, p. es., $a < b$, consideriamo in (a, c) una funzione $f_1(x)$ che, per $x \neq c$ sia uguale ad $f(x)$ e nel punto c sia uguale al $\lim_{x=c-0} f(x)$ ed in (c, b) una funzione $f_2(x)$ che nel punto c sia uguale al $\lim_{x=c+0} f(x)$, e nei punti $x \neq c$ sia uguale ad $f(x)$. Sarà:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f_1(x)\,dx + \int_c^b f_2(x)\,dx.$$

Per l'esempio ora citato sarà se $a < c < b$

$$\int_a^b \left\{ \operatorname{sen} x + \frac{x-c}{|x-c|} \right\} dx = \int_a^c (-1 + \operatorname{sen} x)\,dx + \int_c^b (+1 + \operatorname{sen} x)\,dx.$$

γ) Se $f(x)$ è definita nell'intervallo $(a, +\infty)$ e se esiste ed è finito il $\lim_{k=+\infty} \int_a^k f(x)\,dx$, noi porremo per definizione:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{k=\infty} \int_a^k f(x)\,dx.$$

Analogamente, se $f(x)$ è definita per $x \leq a$, porremo per definizione

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{k=-\infty} \int_k^a f(x)\,dx,$$

(*) Si può porre una definizione analoga nel caso che vi sia un numero finito di punti singolari.

se il limite del secondo membro esiste ed è finito. Infine porremo, se $f(x)$ è definita per ogni valore della x,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{h=-\infty \\ k=+\infty}} \int_h^k f(x)\,dx,$$

se il limite del 2° membro esiste ed è finito.

Così, p. es., essendo

$$\lim_{k=+\infty} \int_1^k \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{k=\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^k = 1,$$

è:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1.$$

Così, poichè $\lim_{k=\infty} \int_o^b \cos x\,dx = \lim_{k=\infty} (\text{sen } k)$ non esiste, non ha alcun significato l'espressione $\int_o^{\infty} \cos x\,dx$ (*).

Agli integrali di questo paragrafo si possono in molti casi estendere le regole di integrazione per somma, per sostituzione, per parti.

Così $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^n}\,dx$ esiste, se esiste ed è *finito* il $\lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{1}{(x-a)^n}\,dx$ (ove ε abbia il segno di $b-a$) cioè il $\lim_{\varepsilon=0} \left[\frac{(b-a)^{1-n}}{1-n} - \frac{\varepsilon^{1-n}}{1-n}\right]$ se $n \neq 1$, oppure il $\lim_{\varepsilon=0} \left[\log|b-a| - \log|\varepsilon|\right]$ se $n=1$. Questo limite è infinito per $n \geqq 1$, *finito per* $n < 1$. Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo (a, b), il punto a al più escluso; esista un intorno (a, c) di a [c compreso fra a e b], tale che in esso $|f(x)| < k\frac{1}{(x-a)^n}$ con k, n costanti, ed $n < 1$. Definiamo due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ ponendo $\varphi(x) = f(x)$ e $\psi(x) = 0$ nei punti ove $f(x) > 0$; ponendo $\psi(x) = -f(x)$, $\varphi(x) = 0$ nei punti ove $f(x) \leqq 0$. Le $\varphi(x)$, $\psi(x)$ saranno funzioni continue positive o nulle (escluso al più il punto $x = a$), non superiori ad $|f(x)|$. Ora sia $\int_{a+\varepsilon}^b \varphi(x)\,dx$ che $\int_{a+\varepsilon}^b \psi(x)\,dx$ variano nello stesso verso quando ε (che ha il segno di $b-a$) tende a zero, e perciò *tendono per* $\varepsilon = 0$ *ad un limite*. Poichè p. es. $\int_{a+\varepsilon}^b \varphi(x)\,dx = \int_{a+\varepsilon}^c \varphi(x)\,dx + \int_c^b \varphi(x)\,dx$, e $\varphi(x)$ nell'intervallo $(a+\varepsilon, c)$ non

(*) Si lascia al lettore di completare le precedenti definizioni, per il caso che nell'intervallo $(a, +\infty)$ o $(-\infty, a)$ o $(-\infty, \infty)$ vi fosse un numero finito di punti singolari per $f(x)$.

supera $|f(x)| \leq \frac{k}{(x-a)^n}$ [se $|\varepsilon| < |c-a|$], lo $\int_{a+\varepsilon}^{c} \varphi(x)\,dx$ non supera in valore assoluto l'integrale di $\frac{k}{(x-a)^n}$, che tende per $\varepsilon = 0$ a un *limite finito*. Perciò $\int_{a+\varepsilon}^{b} \varphi(x)\,dx$ tende per $\varepsilon = 0$ a un limite *finito*, che sarà il valore di $\int_{a}^{b} \varphi(x)\,dx$; altrettanto dicasi di $\int_{a+\varepsilon}^{b} \psi(x)\,dx$. Poichè $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, lo integrale $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ *esisterà dunque, se in un intorno di* a *vale la*

$$|f(x)| \leq \frac{k}{(x-a)^n} \quad (k, n \text{ costanti}; n < 1)$$

ossia, come si suol dire, *se* f(x) *è per* x − a = 0 *infinito di ordine non maggiore di* n < 1.

In modo analogo si prova che se, per x abbastanza grande, la funzione continua $f(x)$ soddisfa alla $|f(x)| \leq k\frac{1}{x^n}$ (k, n cost.; $n > 1$), ossia *se* f(x) *per* x = ∞ *diventa infinitesima di ordine non minore di* n > 1, *allora esiste lo* $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$.

Osservazione.

Certe frazioni razionali si possono integrare in modo semplice e diretto.

Poniamo, p. es., $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ dove n è un intero positivo. Integrando per parti si trova:

$$I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{(1+x^2)\,dx}{(x^2+1)^{n+1}} -$$

$$- 2n\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1} + \text{cost.}$$

donde:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n + \text{cost.}$$

Ora, essendo $I_1 = \operatorname{arctg} x$, la formola precedente per $n = 1, 2, 3$, ecc. permette di calcolare successivamente I_2, I_3, ecc. (cfr. la seconda formola di pag. 245.

§ 79. — Integrazione per serie.

α) Nel paragrafo precedente abbiamo dato, partendo da alcune formole di calcolo differenziale, metodi che *in qualche caso particolare* servono a calcolare gli integrali di una funzione continua. Ma poichè ogni funzione continua possiede integrali, sorge spontanea la domanda: Come si calcolano, almeno approssimativamente, gli integrali di una funzione continua, al calcolo dei quali non bastino i metodi esposti nei precedenti paragrafi? L'importanza di questa domanda si rileva tosto, appena si ricordi che anche l'integrazione di una funzione razionale richiede la risoluzione di un'equazione algebrica: che noi sappiamo costituire un calcolo spesso ben lungo, anche se si vuole soltanto una piccola approssimazione. Di più si noti che quando, per es., diciamo che $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$ e asseriamo perciò che sappiamo integrare $\frac{1}{x}$, ciò è dovuto soltanto al fatto che nelle tavole logaritmiche abbiamo un mezzo per calcolare con sufficiente approssimazione i valori di $\int \frac{1}{x}\,dx$. Si tratta dunque di trovare un mezzo per calcolare approssimativamente un dato integrale o, se si vuole, di costruire per ogni dato integrale delle tavole numeriche, che compiano per esso l'ufficio che le tavole logaritmiche hanno per l'integrale $\int \frac{1}{x}\,dx$.

Varii sono i metodi a tal fine, e di essi noi parleremo anche in altri capitoli. Per ora parleremo soltanto del metodo che ricorre agli *sviluppi* in serie. Il teorema su cui si basa tale procedimento, è il seguente:

β) *Se nell'intervallo finito* (a, b) *la serie di funzioni continue*

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots = \Sigma\, u_n \qquad (1)$$

è totalmente convergente, allora (per $a \leq x \leq b$) *lo* $\int^x f(x)\,dx$ *esiste ed è uguale proprio alla serie degli integrali*

$$F(x) = \int_a^x u_1(x)\,dx + \int_a^x u_2(x)\,dx + \int_a^x u_3(x)\,dx + \ldots \qquad (2)$$

Divideremo la dimostrazione in 3 parti:

1° *La serie* (2) *converge.* Infatti, se M_n è il massimo di $|u_n(x)|$, la nostra ipotesi equivale a questa che la serie $\Sigma_n M_n$ converge. Dalla $|u_n(x)| \leq M_n$ segue (§ 74, pag. 243) che

$$\left|\int_a^x u_n(x)\,dx\right| \leq M_n\,|x-a|;$$

dunque la serie (2) converge assolutamente, perchè così avviene della $\Sigma M_n|x-a|$, ottenuta moltiplicando per $|x-a|$ la serie convergente ΣM_n.

2° *La serie* (2) *è un integrale indefinito di* f (x). Infatti la serie (1), ottenuta derivando (2) termine a termine, è totalmente convergente, e pertanto (§ 65, pag. 206) è la derivata di (2); cioè (2) è un integrale indefinito di $f(x)$.

3° *La* (2) *vale proprio* $\int_a^x$ f (x) dx. Essendo

$$F(x) = \int f(x)\,dx, \text{ è } \int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a).$$

Ora, ponendo $x = a$ in (2), i termini di (2) si annullano. Pertanto $F(a) = 0$; e quindi $\int_a^x f(x)\,dx = F(x)$. c. d. d. (*)

Si deduce tosto la seguente osservazione notevolissima. Se una funzione $f(x)$ non si sa integrare coi metodi da noi svolti, ma se si sa sviluppare $f(x)$ in una serie totalmente convergente, i cui termini hanno integrali noti o facilmente calcolabili, allora si può avere un valore approssimato di $\int_a^b f(x)\,dx$, calcolando la somma degli integrali dei primi n termini della serie considerata, se n è abbastanza grande. Nei casi più comuni basta lo sviluppo in serie di Taylor. E si noti che a pag. 218 e seg. proprio con questo metodo abbiamo trovato le serie così comode per calcolare numericamente le funzioni

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+x}\,dx;\ \text{artg } x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2};\ \text{arcsen } x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(*) Non vale un teorema analogo per integrali indefiniti; e ciò, perchè le costanti arbitrarie che figurano nell'integrale indefinito di ogni termine di (1) potrebbero esser scelte in modo che la serie

$$\left[\int u_1(x)\,dx + C_2\right] + \left[\int u_2(x)\,dx + C_2\right] + \ldots$$

sia divergente.

ESEMPIO.

Voglio calcolare il tempo T impiegato da un pendolo OP che oscilla attorno O nel passare dalla posizione OP alla posizione OQ simmetrica di OP rispetto alla verticale OV. Detto θ l'angolo di una retta OM con OV, questo angolo durante l'oscillazione varierà da un minimo $-\alpha$ ad un massimo $\alpha = V(O)\,Q$ (fig. 31). Posto $OP = l$ la forza viva del pendolo, quando esso si trova in OM, è data da $\frac{1}{2} m l^2 \frac{d\theta^2}{dt^2}$, se la massa vale m, e t indica il tempo. Questa forza viva è uguale al lavoro

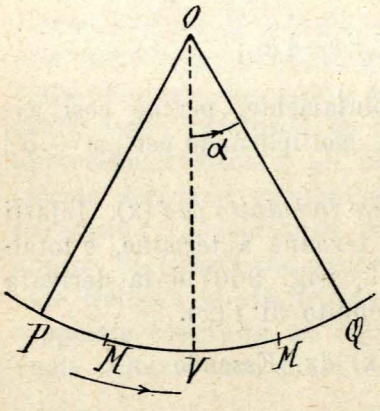

Fig. 31.

$$mgl\,(\cos\theta - \cos\alpha)$$

eseguito dal pendolo nel passare dal piano orizzontale a cui appartiene P al piano orizzontale cui appartiene M (g = costante di gravità). Quindi:

$$\frac{m}{2} l^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} = mg(\cos\theta - \cos\alpha) l, \text{ donde } t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}};$$

$$\text{e quindi } T = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}$$

Posto $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\varphi$, si ottiene

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - h^2 \operatorname{sen}^2\varphi}},$$

dove si è posto $h = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$. È quindi $|h| < 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - h^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} = (1 - h^2 \operatorname{sen}^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} h^2 \operatorname{sen}^2\varphi + \frac{1.3}{2^2 \underline{|2}} h^4 \operatorname{sen}^4\varphi + \frac{1.3.5}{2^2 \underline{|3}} h^6 \operatorname{sen}^6\varphi + \ldots\ldots$$

donde:

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + \frac{1}{2} h^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \,|\, \underline{2}} h^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \varphi \, d\varphi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \,|\, \underline{3}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^6 \varphi \, d\varphi + \ldots\ldots \right\}$$

Se α è così piccolo da poter tener conto del solo primo termine, si trova la formola classica $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Nel caso generale invece è:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \frac{1}{2^2} h^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2^2 \,|\, \underline{2}} \right)^2 h^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \,|\, \underline{3}} \right)^2 h^6 + \ldots \right\}$$

Qual è p. es. l'errore commesso se α non supera l'angolo di 10 gradi, quando si tenga conto del solo primo termine?

CAPITOLO XIII.

CALCOLO DIFFERENZIALE PER LE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

§ 80. — Continuità. Derivate parziali.

α) Al § 41, pag. 137, abbiamo già visto che alle funzioni di più variabili si può estendere sia la definiz. di limite, che quella di continuità, ecc. Vogliamo qui aggiungere un'osservazione, che per maggior chiarezza esporremo per una funzione di due sole variabili $f(x,y)$. Sia essa definita in un intorno j del punto $x=a$, $y=b$; e siano $x=a+ht$, $y=b+kt$ (h,k cost.) le equazioni parametriche di una retta generica r uscente da tale punto. La f diventerà funzione del solo parametro t, se ci limitiamo a considerare i punti di r interni ad j, e i valori ivi assunti da f. *Questa funzione di* t *sarà continua per* t = 0 (qualunque siano h, k, cioè qualunque sia la r considerata uscente dal punto $[a,b]$) *se la* f(x, y) *è continua nel punto* (a, b).

Il teorema reciproco non è vero, cioè: *Se* f(a + ht, b + kt) *è funzione continua per* t = 0, *qualunque siano* h, k, *la* f(x, y) *può non essere continua nel punto* (a, b). Infatti da tale ipotesi segue che, scelto un $\varepsilon > 0$ arbitrario, *su ogni retta r* uscente da (a,b) esiste un intorno R, tale che per i punti (x,y) di questo intorno vale la $|f(x,y)-f(a,b)|<\varepsilon$. Ma al variare di r, può variare la lunghezza di questi intorni R; se anzi questa lunghezza ha limite inferiore *nullo*, tutti questi intorni (uno su ogni retta uscente dal punto $[a,b]$) non riempiono alcun intorno j del punto (a,b) nel piano; cioè non esiste alcun numero $\delta > 0$ tale che ogni punto soddisfacente alle $|x-a|<\delta$, $|y-b|<\delta$ appartenga ad almeno uno di questi intorni R.

Sia $f(x, y, z, \ldots, t)$ una funzione di più variabili x, y, z, ..., t. Se diamo alla $y, z, \ldots, t$ valori determinati $b, c, \ldots, d$, la f si ridurrà una funzione della sola x. Se tale funzione è derivabile (rispetto alla x) nel punto $x=a$, noi chiameremo tale derivata *la derivata parziale* di f rispetto alla x nel punto $x=a$, $y=b$, ..., $t=d$; e la indicheremo con $f'_x(a, b, \ldots, d)$ o con $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=a,\ y=b,\ \ldots,\ t=d}$. Se poi questa derivata esiste non solo in un punto, ma in tutto il campo ottenuto, p. es., facendo variare $x, y, \ldots, t$ in certi intervalli, questa derivata sarà una funzione delle $x, y, \ldots, t$ in tali intervalli; e si indicherà più semplicemente con f'_x o con $\frac{\partial f}{\partial x}$. E, se si vuol ricordare, come talvolta è opportuno, che per calcolare tale derivata si è comin-

ciato col dare alle $y, z, \ldots, t$ valori determinati, si suol indicare tale derivata col simbolo:

$$(f'_x)_{y,\,z,\,\ldots,\,t\,=\,\text{cost.}} \qquad \text{o} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,\,z,\,\ldots,\,t\,=\,\text{cost.}}$$

È ancora da ricordare che *nei casi più comuni* si può calcolare f'_x in un dato punto, derivando la f rispetto alla x e considerando $y, z, \ldots, t$ come costanti, e, *soltanto dopo aver eseguito la derivazione*, sostituire alle $x, y, z, \ldots, t$ le coordinate del punto che si considera.

Altrettanto dicasi per le derivate parziali della f rispetto alla y, o alla z, ..., od alla t.

Queste derivate $f'_x, f'_y \ldots$ possono a loro volta essere funzioni derivabili e possedere derivate parziali. E noi con

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}, \quad f''_{xz} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}, \ldots$$

indicheremo rispettivamente le derivate di f'_x rispetto x, y, z, ecc. Con

$$f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}, \quad f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \text{ ecc.}$$

indichiamo le derivate di f'_y rispetto x, y, ecc.

Queste nuove derivate si diranno derivate parziali (*del secondo ordine*) della f.

Le derivate di queste, se esistono, si diranno derivate parziali del terz'ordine e così via. Così, p. es.:

$$f^{(5)}_{xy\,xzy} = \frac{\partial^5 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x\,\partial z\,\partial y}$$

sarà quella derivata del 5° ordine, che si ottiene derivando f rispetto alla x, la derivata f'_x così ottenuta rispetto alla y, la derivata f''_{xy} così ottenuta rispetto alla x, la f'''_{xyx} così calcolata rispetto a z, e infine la f''''_{xyxz} così ottenuta rispetto alla y.

Così, p. es., se

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + 2yz + 3zx,$$

per ottenere f'_x si deve derivare rispetto alla x considerando le y, z come costanti (espressioni aventi derivata nulla rispetto alla x). Si ha così che y^2, z^2, yz hanno derivata nulla, xy ha per derivata y, ecc.; cosicchè:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = 2x + y + 3z.$$

Analogamente si troverebbe:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = 2y + x + 2z,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f'_z = 2z + 2y + 3x.$$

Ciascuna di queste tre derivate è a sua volta una funzione delle x, y, z, che si può derivare rispetto alla x, o alla y, o alla z. Si hanno così $3 \cdot 3 = 9$ derivate del secondo ordine della

$$f(x, y, z).$$

Così, p. es., derivando $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x$ rispetto alla x, o alla y, o alla z, si ottengono le tre derivate che indichiamo rispettivamente con

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = f''_{xz};$$

e che, nel nostro caso, sono ordinatamente uguali a 2, 1, 3. In modo simile si trovano le altre 6 derivate del 2° ordine

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = f''_{yz}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = f''_{zx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = f''_{zy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f''_{zz}.$$

Dalle derivate di second'ordine si giunge facilmente alle derivate di terz'ordine e di ordine superiore mediante nuove derivazioni rispetto alle variabili x, y, z; tutte queste derivate sono nell'esempio precedente uguali a zero.

β) Non tutte le derivate successive definite in α) sono però distinte, almeno finchè restiamo nel caso più comune ed importante di funzioni aventi finite e continue tutte le derivate che consideriamo e finchè consideriamo soltanto punti interni alla regione, ove sono soddisfatte queste condizioni. Noi dimostreremo infatti che per tali funzioni l'ordine in cui più derivazioni si eseguono non ha alcuna influenza sul risultato finale: che p. es., se f è funzione delle x, y, z, valgono nelle nostre ipotesi le uguaglianze:

$$f''''_{x,x,y,z} = f''''_{x,y,z,x} = f''''_{x,z,y,x} = f''''_{y,x,z,x} = \text{ecc.}$$

perchè tutte queste derivate sono state ottenute derivando due volte rispetto alla x, una volta rispetto ad y, una volta rispetto

a z. In altre parole, le operazioni di derivazione parziale godono della proprietà *commutativa*, così come ne godono i fattori di un prodotto.

E, come, per dimostrare questa proprietà per i fattori di un prodotto, basta dimostrarla per i prodotti di due soli fattori, così a noi basterà provare che:

Se la funzione f (x y) *possiede in un punto* (*) *finite e continue sia le* f'_x, f'_y *che la derivata* f''_{xy} *ottenuta derivando prima rispetto ad* x *e poi rispetto ad* y, *essa possiede in tale punto anche la* f''_{yx}; *ed è in tal punto* $f''_{xy} = f''_{yx}$.

La f''_{yx} è definita come il $\lim_{h=0} \frac{1}{h}\left[f'_y(x+h, y) - f'_y(x, y)\right]$.

Si deve dimostrare che questo limite esiste ed è uguale a f''_{xy}

Poichè $f'_y(\xi, y) = \lim_{k=0} \frac{f(\xi, y+k) - f(\xi, y)}{k}$, il limite da esaminare è

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h} \left\{ \lim_{k=0} \frac{f(x+h, y+k) - f(x+h, y)}{k} - \lim_{k=0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} \right\}$$

cioè è il limite di

$$\frac{1}{h} \left\{ \frac{f(x+h, y+k) - f(x+h, y)}{k} - \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} \right\} \quad (1)$$

quando si passi al limite prima per $k = 0$, e poi per $h = 0$.

Posto $\varphi(x) = \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$, la (1) diventa $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$, cioè per il teorema della media $\varphi'_x(x + \theta h)$, dove $0 < \theta < 1$, ossia $\frac{f'_x(x+\theta h, y+k) - f'_x(x+\theta h, y)}{k}$. Posto $\psi(y) = f'_x(x+\theta h, y)$, la (1) diventa dunque $\frac{\psi(y+k) - \psi(y)}{k}$, cioè per il teorema della media $\psi'(y + \theta' k)$ ossia $f''_{xy}(x + \theta h, y + \theta' h)$, dove ancora $0 < \theta' < 1$.

La f''_{xy} nel punto che si considera è continua; il limite di $f''_{xy}(x+\theta h, y+\theta' k)$ per $h = 0$, $k = 0$ è perciò (in qualunque modo si faccia il passaggio al limite) $f''_{xy}(x, y)$. Il limite che noi cercavamo, cioè il valore di f''_{yx}, esiste dunque ed è uguale a f''_{xy}, come volevamo provare.

(*) Suppongo tale punto *interno* alla regione ove $f(x, y)$ è definita ed ove, per le stesse ipotesi del nostro teorema, esistono le f'_x, f'_y, f''_{xy}.

Notiamo un semplice corollario, che è una generalizzazione del teorema della media. Il rapporto

$$R_f = \frac{1}{h}\left\{\frac{f(x+h,y+k)-f(x+h,y)}{k} - \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}\right\} =$$
$$= \frac{f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y)}{hk}$$

ha per $h=k=0$ *per limite la derivata mista nel punto* (x,y); *esso stesso, prima di passare al limite, vale la derivata mista in un punto* (diciamo così) *intermedio* $x+\theta h, y+\theta' k$. [Precisamente come $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ ha per $h=0$ il limite $\varphi'(x)$ e prima di passare al limite vale $\varphi'(x+\theta h)$, se $\varphi'(x)$ è nell'intervallo $(x, x+h)$ determinato e finito]. Nel caso attuale si suppone che la derivata mista sia anche *continua*.

§ 81. — Teorema della media per funzioni di due o più variabili.

Se $\varphi(x)$ è una funzione derivabile della x nell'intervallo $(a, a+h)$ il teorema della media si enuncia con la formola:

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = h\,\varphi'(a+\theta h), \text{ dove } 0<\theta<1.$$

Troveremo una formola analoga per le funzioni di più variabili.

Sia $f(x,y)$ una funzione di due variabili x e y definita in un campo R e derivabile in tutto R sia rispetto alla x che rispetto alla y. Sia A un punto di R di coordinate x e y: e B (fig. 32) un altro punto del campo di coordinate $x+h$, $y+k$. Per passare dal punto A al punto B si può, p. es., seguire una spezzata, di cui un segmento è parallelo all'asse delle x e l'altro segmento è parallelo all'asse delle y. Se questi due segmenti sono interni al campo R, e C è il loro punto comune, il punto C avrà per ascissa l'ascissa di B e per ordinata la ordinata di A (*). Allora la differenza $f(x+h, y+k) - f(x,y)$ si può porre,

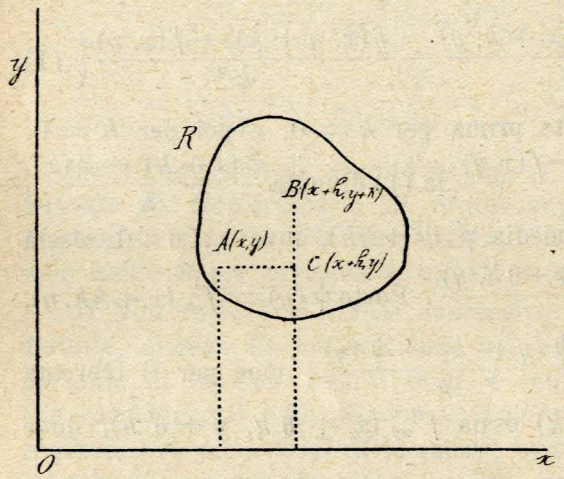

Fig. 32.

(*) Supponiamo dunque i segmenti AC, CB interni al campo che esaminiamo; nel precedente § 80 non si è fatta analoga ipotesi, perchè superflua, in quanto che h, k si supponevano tendere a zero, ed il punto (x,y) si supponeva *interno* al campo R.

aggiungendo e togliendo il valore della funzione nel punto C, uguale a

$$[f(x+h, y+k) - f(x+h, y)] + [f(x+h, y) - f(x, y)]$$

che è la somma di due differenze.

Se considero x ed h come costanti, la $f(x+h, y)$ si può considerare funzione della sola y, ponendo $f(x+h, y) = \varphi(y)$.

Sarà allora:

$$f(x+h, y+k) = \varphi(y+k),$$

cosicchè:

$$f(x+h, y+k) - f(x+h, y) = \varphi(y+k) - \varphi(y),$$

che per il teorema della media (per le funzioni di una sola variabile) è uguale a

$$k\varphi'_y(y+\theta k) \quad (0<\theta<1);$$

cioè, essendo

$$\varphi'_y(y+\theta k) = f'_y(x+h, y+\theta k),$$

sarà:

$$[f(x+h, y+k) - f(x+h, y)] = kf'_y(x+h, y+\theta k).$$

Analogamente si dimostrerebbe:

$$[f(x+h, y) - f(x, y)] = hf'_x(x+\theta' h, y) \quad (0<\theta'<1).$$

Sommando membro a membro queste due ultime uguaglianze si ottiene:

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = hf'_x(x+\theta' h, y) + kf'_y(x+h, y+\theta k).$$

Quest'ultima formola estende il *teorema della media* a funzioni di due variabili. Essa ci dice che *la differenza dei valori della funzione* f(x, y) *in due punti* (x+h, y+k) *e* (x, y) *è uguale alla somma del prodotto di* h *per la derivata parziale della funzione data, rispetto alla* x, *calcolata in un punto intermedio del segmento* (x, y), (x + h, y) *e del prodotto di* k *per la derivata parziale rispetto a* y *della funzione data, calcolata in un punto intermedio del segmento* (x + h, y), (x + h, y + k).

Qui si suppone *soltanto che le* f'_x, f'_y *esistano* (e siano quindi finite).

Scambiando gli assi delle x, y si ottiene una nuova formola della media.

Altre formole si potrebbero ottenere variando la linea che congiunge il punto A al punto B.

Più avanti, p. es., daremo un'altra formola ottenuta congiungendo A con B col segmento rettilineo AB, imponendo però alle f'_x, f'_y la ulteriore condizione di essere funzioni *continue*.

Il teorema della media si può estendere in generale alle funzioni di n variabili con metodi e ragionamenti affatto analoghi a quelli da noi adoperati nel caso di funzioni di due variabili.

Se $f(x, y, \ldots\ldots z, t)$ è una funzione di n variabili, si trova la formola generale:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k \ldots\ldots z+l, t+m) - f(x, y \ldots\ldots z, t) = \\ = hf'_x(x+\theta h, y \ldots\ldots z, t) + \\ + kf'_y(x+h, y+\theta' k, \ldots\ldots, z, t) + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ + lf'_z(x+h, y+k, \ldots\ldots, z+\theta'' l, t) + \\ + mf'_t(x+h, y+k, \ldots\ldots, z+l, t+\theta''' m). \end{aligned}$$

§ 82. — Differenziali.

Supponiamo che f'_x e f'_y siano tutte e due continue. Allora sarà:

$$\lim_{h=0} f'_x(x+\theta h, y) = f'_x(x, y)$$

e

$$\lim_{h=0} [f'_x(x+\theta h, y) - f'_x(x, y)] = 0.$$

Ponendo:

$$f'_x(x+\theta h, y) - f'_x(x, y) = \alpha,$$

si ha:

$$f'_x(x+\theta h, y) = f'_x(x, y) + \alpha. \qquad (1)$$

Con le stesse considerazioni si trova che:

$$f'_y(x+h, y+\theta' k) = f'_y(x, y) + \beta, \qquad (2)$$

dove α e β sono delle quantità che tendono a zero con h e k.

Dalla formola che esprime il teorema della media, ricordando la (1) e la (2), si deduce:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) - f(x, y) = h[f'_x(x, y) + \alpha] + \\ + k[f'(x, y) + \beta] = [hf'_x(x, y) + kf'_y(x, y)] + \\ + [\alpha h + \beta k]. \qquad (3) \end{aligned}$$

Questa formola dice che la differenza $f(x+h, y+k) - f(x, y)$, *incremento che la funzione* f *subisce nel passare dal punto* $A = (x, y)$ *al punto* $B = (x+h, y+k)$ è la somma di due quantità: la prima: $hf'_x + kf'_y$ che è nota, la seconda $\alpha h + \beta k$ che è una quantità incognita, infinitesima di ordine

superiore rispetto a $\sqrt{h^2 + k^2}$, perchè α, β, come sappiamo, tendono a zero per $h = 0$, $k = 0$. La prima quantità $kf'_x + kf'_y$ sarà detta *differenziale della funzione* e sarà indicata brevemente col simbolo df.

Possiamo dunque scrivere, quando l'incremento

$$f(x + h, y + k) - f(x, y)$$

della funzione si indichi con Δf,

$$\Delta f = df + (\alpha h + \beta k).$$

Osserviamo che, se $f(x, y) = x$, è $f'_x = 1$, $f'_y = 0$; e quindi

$$dx = h \,.\, 1 + k \,.\, 0 = h.$$

Analogamente il differenziale dy vale k.

Il differenziale della funzione generale $f(x, y)$ sarà dunque

$$df = f'_x\, dx + f'_y\, dy = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy.$$

Ne risulta confermato che $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ *non* sono (almeno secondo le definizioni qui poste) (*) *quozienti* di differenziali, ma veri e proprii simboli.

In modo analogo si pone per una funzione di più variabili $f(x, y, \ldots, z, t)$ la quale possegga derivate prime *continue*:

$$df = f'_x\, dx + f'_y\, dy + \ldots + f'_z\, dz + f'_t\, dt.$$

È evidente l'analogia di questi ragionamenti e di queste definizioni con le corrispondenti proposizioni relative alle funzioni di una sola variabile. Nel caso attuale si è dovuto soltanto ammettere in più la continuità delle derivate prime della f.

§ 83. — Derivate delle funzioni di funzioni. (Funzioni composte).

α) Sia z una funzione $f(x, y)$ di due variabili x, y, le quali sieno funzioni di una variabile t. Quando t varia in un certo intervallo γ, il punto (x, y) varii nel campo ove è definita la z, cosicchè la z sia funzione della t nell'intervallo γ.

Siano f'_x, f'_y finite e continue, x'_t e y'_t finite. Quando la t riceve un incremento Δt, siano Δx, Δy i corrispondenti incre-

(*) Si potrebbero definire dei differenziali parziali $\partial_x f = f'_x\, dx$; $\partial_y f = f'_y\, dy$, e interpretare allora $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial x}$ come quozienti, i cui numeratori fossero $\partial_x f$, $\partial_y f$, e i denominatori dx, dy. Ma ciò porterebbe soltanto complicazioni.

menti delle x, y: e sia Δz il corrispondente incremento della z, Sarà per il teorema della media:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) =$$
$$= \Delta x f'_x(x + \theta \Delta x, y) + \Delta y f'_y(x + \Delta x, y + \theta' \Delta y)$$
$$(0 < \theta < 1) \qquad (0 < \theta' < 1).$$

Donde

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x(x + \theta \Delta x, y) \frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x + \Delta x, y + \theta' \Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t = 0} f'_x(x + \theta \Delta x, y) \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} +$$

$$+ \lim_{\Delta t = 0} f'_y(x + \Delta x, y + \theta' \Delta y) \lim \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Poichè per ipotesi x'_t e y'_t esistono e sono finite, è $\lim_{\Delta t = 0} \Delta x = \lim_{\Delta t = 0} \Delta y = 0$.

Ricordando che f'_x e f'_y sono finite e continue, se ne deduce che $z'_t = \lim \frac{\Delta z}{\Delta t}$ esiste, ed è dato dalla:

$$z'_t = z'_x x'_t + z'_y y'_t = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \qquad (1)$$

Se t si considera come variabile indipendente (§ 53, pag. 177), è:

$$dz = z'_t \, dt$$
$$dx = x'_t \, dt$$
$$dy = y'_t \, dt$$

Cosicchè per (1) $dz = z'_t dt = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ come al precedente § 82.

Riconosciamo dunque anche in questo caso più generale r. § 59, pag. 187) che il *differenziale primo di una funzione è dato sempre dalla stessa formola, qualunque sia la variabile indipendente.*

E si osservi che, se si scrivessero le derivate parziali coi d latini, tale formola assumerebbe l'aspetto

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dt}, \qquad (\alpha)$$

che taluno potrebbe essere tentato di semplificare, ottenendo l'assurdo $\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dt} + \frac{dz}{dt}$. Le notazioni usate in (α) possono perciò portare a gravi errori di calcolo.

Si ha pure similmente, ricordando che z'_x, z'_y sono funzioni di x, y, entrambe funzioni della t, che:

$$\frac{dz'_x}{dt} = \frac{\partial z'_x}{\partial x} x'_t + \frac{\partial z'_y}{\partial y} y'_t = z''_{xx} x'_t + z''_{xy} y'_t,$$

$$\frac{dz'_y}{dt} = z''_{xy} x'_t + z''_{yy} y'_t,$$

se le derivate seconde di z sono finite e continue.

In tale ipotesi si deduce, derivando (1), che:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \\ + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}. \qquad (2)$$

β) Analogamente, se f è funzione delle n variabili $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, tutte funzioni della t, e se la f stessa si può considerare come funzione della t in un certo campo, sarà con ipotesi analoghe:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

γ) Sia ora f una funzione, p. es., di tre variabili x, y, z; e siano y, z funzioni della x. Posto $\xi = x$, la f diventa funzione di ξ, y, z, tutte e tre funzioni della x. Si ha quindi (poichè $\xi = x$ e quindi $\frac{d\xi}{dx} = 1$):

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y'_x + \frac{\partial f}{\partial z}z'_x.$$

Si noti anche qui quale differenza passa tra $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{df}{dx}$. Per ottenere la prima, si deriva considerando y e z come costanti: per ottenere la seconda, si deriva considerando y e z come funzioni di x. Per esempio, se $f = x + y + z$, $y = \text{sen } x$, $z = \cos x$, è $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$, $\frac{df}{dx} = 1 + \cos x - \text{sen } x$.

δ) Supponiamo f funzione delle due variabili x, y definite dalle:

$$x = a + ht,\ y = b + kt \qquad (a, b, h, k = \text{costanti}).$$

Si trovino le derivate di f rispetto alla variabile indipendente t.

Si ha:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dy}{dt} = h\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y};$$

e analoga per $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right) = h\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + k\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$= h\left(h\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right) + k\left(h\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + k\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) =$$

$$= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Una regola *mnemonica* per ricordare queste formole è di porre

$$\frac{d}{dt}f = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \left(\frac{d}{dt}\right)^2 f = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f$$

e sviluppando poi con le regole dell'algebra elementare, proprio come se $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ fossero frazioni vere e proprie aventi per numeratore ∂ e per denominatore le quantità ∂x, ∂y (*), con l'avvertenza che alla fine del calcolo i simboli $\frac{\partial}{\partial x}f$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}f$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f$, ecc., non si debbono più considerare come prodotti (ciò che non avrebbe senso), ma come uguali rispettivamente alle derivate $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, ecc.

E con le medesime *convenzioni* si trova:

$$\frac{d^3 f}{dt^3} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f;\ \ldots\ldots,\ \frac{d^n f}{dt^n} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f.$$

ESEMPIO.

Sia $f(x, y) = x^y$, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$,

cosicchè $f = \varphi(t)^{\psi(t)}$; si trova:

$$\frac{d\left[\varphi(t)^{\psi(t)}\right]}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{d(x^y)}{dt} = (x^y)'_x\frac{dx}{dt} + (x^y)'_y\frac{dy}{dt} =$$

$$= yx^{y-1}\varphi'(t) + x^y \log_e x\,\psi'(t) = \varphi(t)^{\psi(t)}\left\{\psi'(t)\log\varphi(t) + \psi(t)\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\right\},$$

come ci è già noto dal § 60, es. 3°, pag. 189.

(*) In tale calcolo, ∂x e ∂y si debbono considerare ciascuno come un unico simbolo di una quantità, e non già come prodotto di ∂ per x o per y. Così, p. es., si scriverà ∂x^2 e non $\partial^2 x^2$.

§ 84. — Funzioni implicite.

α) Si abbia l'equazione:

$$f(x, y) = 0. \qquad (1)$$

Se si può trovare una funzione $y = \varphi(x)$ della x, che, sostituita in (1) al posto della y, le soddisfi identicamente, noi diciamo che essa è una funzione della x definita in modo implicito, o più brevemente una *funzione implicita* della x. Se si riesce a risolvere la (1) rispetto alla y, si ottiene così la y come funzione esplicita della x.

Così, p. es., l'equazione (di un cerchio riferito a due diametri ortogonali scelti come assi) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ definisce in forma implicita due funzioni y della x ($-1 \leq x \leq 1$), le quali sotto forma esplicita si scrivono: $y = +\sqrt{1 - x^2}$, $y = -\sqrt{1 - x^2}$. La teoria della funzione $y = f(x)$ che soddisfa alla $x - \varphi(y) = 0$, cioè la teoria della funzione *inversa* (§ 58, pag. 183) della $x = \varphi(y)$ è *un caso particolare* dello studio attuale.

La definizione testè posta si può estendere a casi più generali. Così, se, p. es., esiste una funzione $y = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ che sostituita al posto della y nella

$$f(x_1, x_2 \ldots, x_n, y) = 0$$
$$[f = \text{funzione di } x_1, x_2 \ldots, x_n, y]$$

vi soddisfi identicamente, noi diciamo che la $y = \varphi$ è una funzione definita in modo *implicito* dalla precedente equazione.

Se, p. es., esistono due funzioni $y = \varphi(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ e $z = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ che, sostituite nelle

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, z) = 0, \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, z) = 0,$$

vi soddisfano identicamente, noi diciamo che le y, z sono funzioni delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ definite in modo implicito dal precedente sistema di equazioni. E si potrebbero in modo simile studiare sistemi formati da più che due equazioni.

β) Sia data l'equazione (1)

$$f(x\,y) = 0.$$

Supponiamo:

1° L'equazione è soddisfatta ponendo, $x = x_0, y = y_0$ ($x_0, y_0 =$ cost.).

2° Per $|x - x_0| \leq h$ ed $|y - y_0| \leq k$ (h, k costanti) la $f(x, y)$ esiste e possiede derivate prime finite continue.

3° La $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ ha un valore b differente da zero nel punto $x = x_0, y = y_0$.

E ci proponiamo dapprima il problema:

Esiste una funzione continua della x *in un intorno abbastanza piccolo del punto* x_0, *la quale abbia il valore* y_0 *quando* $x = x_0$ *e soddisfi all'equazione* (1)? *E come si può calcolare tale funzione in modo esplicito, risolvendo così la* (1)?

Noi risponderemo a tali domande con un metodo di approssimazione successiva (detto anche *di falsa posizione*). E trattiamo questo problema appunto per dare un esempio concreto di tale metodo, che nei casi pratici costituisce il più usato ed il più potente strumento per risolvere equazioni complicate o per problemi di analoga natura.

Sia $\frac{\partial f}{\partial x} = a$, $\frac{\partial f}{\partial y} = b$ nel punto (x_0, y_0). È $b \neq 0$ per ipotesi.

Poniamo $f(x, y) - [a(x - x_0) + b(y - y_0)] = \varphi(x, y)$.

Ricordando che è $f(x_0, y_0) = 0$, troviamo che:

Per $x = x_0, y = y_0$ è $\varphi(x, y) = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$.

La nostra equazione diventa: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + \varphi(x, y) = 0$, donde (poichè $(b \neq 0)$ si trae:

$$y - y_0 = -\frac{a}{b}(x - x_0) - \frac{1}{b}\varphi(x, y) \text{ che scriveremo:}$$

$$(2) \qquad y = y_0 + c(x - x_0) + \psi(x, y) \qquad \left(-\frac{a}{b} = c, -\frac{\varphi}{b} = \psi\right).$$

Dalle nostre ipotesi segue:

1° Per $x = x_0, y = y_0$ sono nulle la ψ e le sue derivate prime.

2° Per $|x - x_0| \leq h$, $|y - y_0| \leq k$ la ψ esiste, possiede derivate prime finite e continue.

Noi sappiamo che $y = y_0$ per $x = x_0$. Un primo valore approssimato della funzione y cercata ci è dato dall'ipotesi che sia $y = y_0$ anche quando $x \neq x_0$. Questo valore $y = y_0$ sarebbe proprio la funzione cercata, soltanto se, sostituendo y_0 al posto di y in (2), la (2) risultasse verificata; cioè se, sostituendo y_0 al posto di y nel secondo membro di (2), si ottenesse come risultato proprio y_0. Ciò non avverrà certamente in generale. E il risultato, che indicheremo con y_1, ottenuto sostituendo y_0 al posto di y nel secondo membro di (2), sarà considerato come un secondo valore approssimato della funzione cercata y. E y_1 sarà proprio il valore della funzione cercata y soltanto se, sostituendo y_1 al posto di y nella (2), la (2) risulta soddisfatta, ossia se, sostituendo y_1 al posto di y nel secondo membro di (2) si ottiene come risultato proprio y_1. Ma questo non avverrà generalmente; e noi assumeremo come terzo valore approssimato della funzione y che si cerca precisamente il risultato y_2, che si ottiene sostituendo y_1 al posto di y nel secondo membro di (2). Così continuando, troviamo i successivi approssimati;

$$(3) \qquad \begin{cases} y_0 = y_0 \\ y_1 = y_0 + c(x - x_0) + \psi(x, y_0) \\ y_2 = y_0 + c(x - x_0) + \psi(x, y_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1} = y_0 + c(x - x_0) + \psi(x, y_{n-2}) \\ y_n = y_0 + c(x - x_0) + \psi(x, y_{n-1}) \end{cases} \qquad (n \text{ intero positivo}).$$

Ora ci domandiamo: *Quando* n *è abbastanza grande, rappresenta effettivamente la* y_n *così definita il valore approssimato di una soluzione dell'equazione* (1) *almeno in un certo intorno del punto* $x = x_0$? In altre parole ci chiediamo: *Esiste, almeno in un intorno del punto* $x = x_0$, *il* $\lim_{n=\infty} y_n$? *E questo limite è una funzione* y *della* x *che soddisfi alle imposte condizioni e in particolare risolva la* (1)?

Noi risponderemo affermativamente a queste domande: ciò che basta per la parte teorica di simile studio. Nei casi pratici bisognerà di più, se si vogliono evitare troppo lunghi calcoli numerici, che $|y_n - y|$ sia già piccolo, quando n non è molto grande, ossia che le y_n tendano abbastanza rapidamente al loro limite y.

E cominciano anzitutto ad osservare che, affinchè sia lecito scrivere le (3), bisogna che $\psi(x, y_1)$ $\psi(x, y_2)$, ..., $\psi(x, y_n)$, ... siano espressioni non prive di significato, ossia che i punti (x, y_1) (x, y_2), ..., (x, y_n), ... appartengano al campo ove è definita la ψ, che sia cioè:

$$|x - x_0| \leq h, |y_1 - y_0| \leq k, |y_2 - y_0| \leq k, \ldots, |y_n - y_0| \leq k.$$

Osserviamo, che essendo $\psi(x, y) = 0, \psi'_y(x, y) = 0$ per $x = x_0, y = y_0$, noi potremo, per la supposta continuità di queste funzioni, scegliere due numeri $h_1 \leq h$, $k_1 \leq k$ così piccoli che per $|x - x_0| \leq h_1, |y - y_0| \leq k_1$ il massimo H di $|\psi'_y(x, y)|$ sia minore di 1, e impicciolire poi il numero h_1 in guisa che il massimo M di $|y_1 - y_0| = |c(x - x_0) + \psi(x, y_0)|$ soddisfi alla $M \frac{1}{1 - H} \leq k_1$.

Sarà cioè, riassumendo:

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{c} (\text{per } |x - x_0| \leq h_1 \leq h\,;\ |y - y_0| \leq k_1 \leq k), \\ \text{massimo di } |\psi'_y(x, y)| = H, \text{ massimo di } |y_1 - y_0| = M \\ H < 1 \quad , M \frac{1}{1 - H} \leq k_1 \text{ e quindi } a\ fortiori\ M \leq k_1 \end{array} \right.$$

Indicheremo con δ il campo definito dalle $|x - x_0| \leq h_1, |y - y_0| \leq k_1$. Dimostreremo che, se $|x - x_0| \leq h_1$ tutti i punti (x, y_1), (x, y_2), ..., (x, y_n), ... appartengono a δ. Intanto dalle (4) segue $|y_1 - y_0| \leq M \leq k_1$; cosicchè il punto (x, y_1) appartiene certo a δ; dimostriamo che altrettanto avviene del punto (x, y_n). Usando il metodo di induzione completa, basterà dimostrare che (x, y_n) appartiene a δ, supponendo già dimostrato che i precedenti punti (x, y_m) per $1 \leq m \leq n - 1$ appartengono a δ.

In tal caso dalle (3) segue:

$$|y_m - y_{m-1}| = |\psi(x, y_{m-1}) - \psi(x, y_{m-2}| \qquad (2 \leq m \leq n)$$

che per il teorema della media è il valore assoluto del prodotto di $(y_{m-1} - y_{m-2})$ per un valore intermedio di $\psi'_y(x, y)$. Questo valore intermedio, per le (4), non supera H, cosicchè $|y_m - y_{m-1}| \leq H |y_{m-1} - y_{m-2}|$.

Ed essendo $|y_1 - y_0| \leq M$, se ne deduce successivamente $|y_2 - y_1| \leq HM$, $y_3 - y_2| \leq H |y_2 - y_1| \leq H^2 M$, ed in generale

$$(5)\qquad |y_m - y_{m-1}| \leq H^{m-1} M \qquad (1 \leq m \leq n).$$

Ora:

$$(6)\qquad y_n = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1})$$

donde:

$$(7)\quad |y_n - y_0| \leq M + HM + H^2 M + \ldots + H^{n-1} M = M(1 + H + \ldots + H^{n-1}) = M \frac{1 - H^n}{1 - H} < \frac{M}{1 - H} \leq k_1.$$

Da cui segue tosto che anche (x, y_n) appartiene a δ. Per dimostrare che esiste ed è finito $y = \lim_{n = \infty} y_n$, basterà per la (6) provare che esiste ed è finita la somma y della serie

$$(8)\qquad y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots$$

Ciò che è evidente, perchè questa serie è *totalmente convergente* per $|x - x_0| \leq h_1$, poichè da (5) segue che i valori *assoluti* dei suoi termini sono (a partire dal secondo) ordinatamente minori dei termini della serie

$$M + MH + MH^2 + \ldots$$

che è una progressione geometrica decrescente (si ricordi che $H < 1$) a termini costanti.

Anzi, poichè y è la somma di (8), ne segue che:

$$|y - y_0| < M + MH + MH^2 + \ldots\ldots = \frac{M}{1-H} \leq k_1,$$

cosicchè anche *il punto* (x, y) *appartiene a* δ. E, poichè la (8) ha termini che per $|x - x_0| \leq h_1$ sono funzioni continue, anche *la* y, *che ne è la somma, è una funzione continua della* x *per* $|x - x_0| \leq h_1$.

Ricordando che ψ è funzione continua di x, y, si ha poi, passando al limite per $n = \infty$ nell'ultima delle (3):

$$\lim_{n=\infty} y_n = y_0 + c(x - x_0) + \psi(x, \lim_{n=\infty} y_{n-1}), \text{ ossia}$$

$$y = y_0 + c(x - x_0) + \psi(x, y), \text{ ossia}$$

$$f(x, y) = 0, \qquad \text{c. d. d.}$$

Alle domande da noi poste in principio del capoverso β *si deve dunque rispondere affermativamente.* È bene evidente che $y = y_0$ per $x = x_0$. Dalle (3) si deduce subito infatti (ricordando che $\psi(x_0, y_0) = 0$): $y_1 = y_0$, $y_2 = y_0$, ..., $y_n = y_0$ per $x = x_0$. Quindi anche $y = \lim_{n=\infty} y_n = y_0$ per $x = x_0$ (*).

Ora dimostreremo che *in un intorno abbastanza piccolo di* $x = x_0$ *non esiste altra funzione continua* y *della* x, *che per* $x = x_0$ *si riduca ad* y_0, *la quale soddisfi alla* $f(x, y) = 0$. Se infatti vi fosse un'altra tale funzione, e noi la indicassimo con z, sarebbe

$$z = y_0 + c(x - x_0) + \psi(x, z)$$
$$z - y_n = \psi(x, z) - \psi(x, y_{n-1})$$

che è uguale a $z - y_{n-1}$ moltiplicato per un valore intermedio di ψ'_y.

Ora in un intorno abbastanza piccolo di $x = x_0$, la y_{n-1} e la z differiscono da y_0 per meno di k_1; e un tale valore intermedio non supera quindi H; cosicchè $|z - y_n| \leq H|z - y_{n-1}|$. Sarà pure $|z - y_{n-1}| \leq H|z - y_{n-2}|$, ecc.; e se ne deduce $|z - y_n| \leq H^{n-1}|z - y_1|$. Poichè $\lim_{n=\infty} H^{n-1} = 0$, se ne deduce, passando al limite per $n = \infty$, che $\lim_{n=\infty} (z - y_n) = 0$, ossia che $z = y$ c. d. d. (**)

Vogliamo provare l'esistenza di $\frac{dy}{dx}$ per $x = x_0$, e calcolare tale derivata. È $f(x_0, y_0) = 0$. E sia Δy l'incremento che riceve la y, quando la x riceve l'incremento Δx. Sarà $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0$; e quindi anche, sottraendo,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = 0,$$

(*) Se si volesse soltanto dimostrare l'esistenza della funzione y della x, senza insegnare a calcolarla, si potrebbe procedere così. Essendo $f'_y \neq 0$ per $x = x_0$ $y = y_0$, la curva $Y = f(x_0, X)$ tracciata nel piano (X, Y), che incontra l'asse delle X nel punto $X = y_0$, attraversa in tale punto tale asse, cosicchè $f(x_0, y_0 + k)$ e $f(x_0, y_0 - k)$ sono di segno contrario, se k è abbastanza piccolo. Quindi, se x è abbastanza prossimo ad x_0, anche $f(x, y_0 + k)$ e $f(x, y_0 - k)$ sono di segno opposto; ed esiste perciò un punto y compreso tra $y_0 + k$ e $y_0 - k$ tale che $f(x, y) = 0$. Esiste perciò un tale valore di y per ogni valore di x abbastanza prossimo ad x_0.

(**) Si potrebbe dimostrare questa asserzione anche così. Se $f(x, y) - f(x, z) = 0$, per il teorema della media è $\overline{f'_y}[y - z] = 0$, dove con $\overline{f'_y}$ indico un valore intermedio di f'_y. Se $y \neq z$ se ne deduce che questo valore intermedio $\overline{f'_y}$ *è nullo*. Ciò che è assurdo, perchè per x abbastanza prossimo a x_0, le y e z sono prossime ad y_0, e (poichè $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, ed f'_y è continua) la f'_y è differente da zero in tutto un intorno del punto (x_0, y_0).

ossia, per il teorema della media:

$$\Delta y f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) + \Delta x f'_x(x_0 + \theta' \Delta x, y_0) = 0$$

$$(0 < \theta \leq 1), (0 < \theta' < 1) \quad (*).$$

Poichè y è funzione continua della x, è $\lim_{\Delta x = 0} \Delta y = 0$. Dividendo la precedente formola per $\Delta x f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)$, e passando al limite per $\Delta x = 0$, ossia $\Delta x = \Delta y = 0$, si trova:

$$\lim_{\Delta x = 0,\ \Delta y = 0} \left\{ \frac{f'_x(x_0 + \theta' \Delta x, y_0)}{f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right\} = 0.$$

Poichè il limite del primo addendo esiste ed è finito (è uguale a $\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}$, il cui denominatore è per ipotesi differente da zero), sarà

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)},$$

formola che ora ritroveremo per altra via, ammettendo *a priori* l'esistenza di y e di y'.

Oss. Tutti questi risultati potrebbero essere falsi, se $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Così, p. es. si osservi che l'equazione $f = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$, pure essendo soddisfatta per $x = x_0$, $y = y_0$, non ammette soluzioni reali per $x - x_0 \neq 0$. E si noti che è appunto $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y - y_0) = 0$ per $y = y_0$. Così pure l'equazione $f = x^2 - y^2 = 0$ è soddisfatta per $x = y = 0$; ed esistono *due* (non *una*) funzioni $y = x, y = -x$ continue e nulle per $x = 0$ che ad essa soddisfano. E di nuovo si verifica che $f'_y = 2y = 0$ per $y = 0$.

Infine si noti che l'ultima formola si scrive di solito

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} \tag{9}$$

perchè essa ci dà il valore di $\frac{dy}{dx}$ non nel solo punto x_0, y_0, ma in tutti i punti (x, y) di un suo intorno, che soddisfano alla $f(x, y) = 0$.

γ) Se noi ammettiamo l'*esistenza* e la *derivabilità* della funzione $y = \varphi(x)$ delle x che soddisfa alla $f(x, y) = 0$, possiamo in altro modo più semplice determinare la derivata y'_x.

Ponendo $y = \varphi(x)$ in $f(x, y)$, si ottiene una funzione $f[x, \varphi(x)]$ *identicamente nulla* della sola x (cioè nulla per ogni valore della x).

[Si noti che invece la $f(x, y)$ non è *identicamente* nulla per tutti i valori delle x, y. Altrimenti sarebbe, contro l'ipotesi fatta, non solo $f'_x = 0$, ma anche $f'_y = 0$].

(*) Da questa formola si potrebbe dedurre in altro modo che la y è funzione continua della x, p. es. nel punto (x_0, y_0) ossia che $\lim_{\Delta x = 0} \Delta y = 0$. Infatti, essendo f'_x continuo e quindi inferiore in valore assoluto ad una costante finita, è

$$\lim_{\Delta x = 0} \Delta x f'_x(x_0 + \theta' \Delta x, y_0) = 0.$$

Dalla formola precedente segue che anche $\lim_{\Delta x = 0} \Delta y f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) = 0$. Poichè il limite del secondo fattore è differente da zero, sarà $\lim_{\Delta x = 0} \Delta y = 0$. c. d. d.

Quindi sarà pure identicamente nulla la derivata prima della $f[x, \varphi(x)]$.

Sarà cioè per il teorema del § 83, α:

$$\frac{df[x, \varphi(x)]}{dx} = \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} y'_x\right]_{y = \varphi(x)} = 0.$$

Se ne deduce $y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y}$ (supposto $f'_y \neq 0$).

Questa formola non è che la (9) scritta più sopra: essa (se $f' \neq 0$) permette di esprimere y'_x per mezzo delle x, y, senza che vi sia bisogno di dare y proprio sotto forma di funzione *esplicita* della x.

Analogamente la y''_x si calcolerebbe dalla (cfr. la (2) del § 83, α, pag. 277, ove si ponga $x = t$)

$$\frac{d^2 f(x, \varphi(x))}{dx^2} = f''_{xx} + 2 f''_{xy} y' + f''_{yy} y'^2 + f'_y y'' = 0$$

se le derivate seconde di f sono finite e continue. (È facile verificare che in tal caso y'' esiste, e che quindi si può scrivere la formola precedente).

δ) Sia, p. es., da trovare l'equazione della tangente nel punto (x_0, y_0) della ellisse o iperbole $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$. Questa equazione sarà:

$$(y - y_0) - (y'_x)_0 (x - x_0) = 0,$$

dove con $(y'_x)_0$ indico il valore di y'_x nel punto (x_0, y_0). Si voglia calcolare tale valore della derivata senza risolvere l'equazione della curva; dalla (9) si ottiene tosto:

$$(y'_x)_0 = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1\right) : \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\right]_0 = \mp \frac{x_0}{y_0} \frac{b^2}{a^2}.$$

Cosicchè l'equazione della tangente è:

$$\pm (y - y_0) + \frac{x_0 b^2}{y_0 a^2} (x - x_0) = 0, \text{ ossia:}$$

$$\frac{x x_0}{a^2} \pm \frac{y y_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} \pm \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

perchè il punto (x_0, y_0) appartiene alla nostra curva.

In generale l'**equazione della tangente alla curva** $f(x, y) = 0$ nel suo punto (x_0, y_0) è nelle nostre ipotesi:

$$(y - y_0) - (y'_x)_0 \ (x - x_0) - 0,$$

ossia per la (9)

$$(y - y_0) \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 + (x - x_0) \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 0, \qquad (10)$$

dove con $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ indico i valori delle $\frac{\partial f}{dx}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ nel punto $x = x_0$, $y = y_0$.

Così, p. es., per la conica C di equazione

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0$$

l'equazione della tangente nel punto (x_0, y_0) vale

$$(a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13})(x - x_0) + (a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23})(y - y_0) = 0.$$

Ricordando che (x_0, y_0) appartiene a C, e che perciò

$$(a_{11} x_0 + a_{21} y_0 + a_{13}) x_0 + (a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23}) y_0 + \\ + (a_{31} x_0 + a_{32} y_0 + a_{33}) = 0,$$

si trova che l'equazione di tale retta tangente può assumere la forma classica

$$(a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13}) x + (a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23}) y + \\ + (a_{31} x_0 + a_{32} y_0 + a_{33}) = 0.$$

Il primo membro evidentemente è una funzione simmetrica nelle (x, y) ed (x_0, y_0), cioè non muta scambiando (x, y) con (x_0, y_0). È questa l'osservazione più semplice, da cui possa dedursi il principio delle polari reciproche.

§ 85. — Generalizzazioni.

α) Si abbia ora l'equazione

$$f(x, y, z) = 0. \qquad (1)$$

Supponiamo che esista una funzione *continua* $z = \varphi(x, y)$ che soddisfi identicamente alla (1), ossia che, sostituita in (1), dia origine a una funzione nulla per tutti i valori delle x, y, che noi consideriamo.

Dal § 84, β, segue facilmente che esiste una tale funzione (e che noi la sappiamo anzi dare sotto forma di serie) se la (1) è soddisfatta per

$$x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0\ (x_0, y_0, z_0 = \text{cost.})$$

e se in un intorno di tale punto le derivate prime di f sono finite e continue, e $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ è differente da zero.

La $z = \varphi(x, y)$ è una funzione definita da (1) in modo *implicito*; e noi ci proponiamo di calcolarne le derivate, senza scriverla sotto forma esplicita (senza risolvere la (1)).

Per trovare la derivata *parziale* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, bisogna considerare la y come una costante, per cui la z si potrà considerare come una funzione della sola x, e la $f = 0$ come un'equazione tra le sole variabili x, z. Applicando i risultati precedenti si troverà quindi senz'altro $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{f'_x}{f'_z}$.

Analogamente $z'_y = -\dfrac{f'_y}{f'_z}$.

β) Si abbiano ora due equazioni in tre variabili

$$f(x, y, z) = 0,$$
$$F(x, y, z) = 0.$$

Supponiamo che f, F abbiano derivate prime finite e continue, che le equazioni siano soddisfatte per

$$x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0,$$

e che nel punto (x_0, y_0, z_0) sia

$$\begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ F'_y & F'_z \end{vmatrix} \neq 0.$$

Almeno uno degli elementi di questo determinante sarà differente da zero. Se, p. es., $f'_y \neq 0$ in (x_0, y_0, z_0), dalla $f = 0$ potrò ottenere, risolvendo, $y = \psi(x, z)$, dove la ψ è una funzione derivabile che diventa uguale a y_0 per $x = x_0$, $z = z_0$. Sostituendo nella $F = 0$ si trova:

$$F[x, \psi(x, z), z] = 0. \qquad (2)$$

La derivata del primo membro rispetto a z è:

$$F'_y \psi'_z + F'_z = -F'_y \frac{f'_z}{f'_y} + F'_z = \frac{1}{f'_y} \begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ F'_y & F'_z \end{vmatrix},$$

che è differente da zero per $x = x_0$, $y = y_0$. Se ne ricaverà che dalla (2) si potrà dedurre, risolvendo, z come funzione $\Phi(x)$ della x derivabile ed uguale a z_0 per $x = x_0$.

Sostituendo questo valore in $\psi(x, z)$ se ne deduce il valore di y come funzione derivabile $\varphi(x)$ della x, che per $x = x_0$ si riduce ad y.

Esistono cioè due funzioni $y = \varphi(x)$, $z = \Phi(x)$ *derivabili, soddisfacenti alle equazioni date e che, per* $x = x_0$, *diventano rispettivamente uguali ad* y_0 *e* z_0.

Ciò che si poteva del resto dimostrare, estendendo ai sistemi di equazioni il metodo con cui abbiamo studiato il caso di una equazione sola. E vale anche il teorema di unicità, che cioè in un intorno di $x = x_0$ *non esistono* altre funzioni soddisfacenti alle proprietà enunciate. Il calcolo di φ'_x, Φ'_x si effettua nel modo più rapido osservando che, se nelle f, F sostituiamo al posto di z ed y i loro valori $\Phi(x)$, $\varphi(x)$ in funzione della x, otteniamo due funzioni $f(x, \varphi, \Phi)$ e $F(x, \varphi, \Phi)$ della sola x identicamente nulle, le cui derivate (*totali*) rispetto alla x saranno quindi anch'esse *nulle*. Quindi, derivando

$$f(x, y, z) \text{ e } F(x, y, z)$$

rispetto alla x, quando vi si considerino y e z come funzioni della x ed applicando quindi il teorema del § 84, β, si ottiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'_x + \frac{\partial f}{\partial z} z'_x = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'_x + \frac{\partial F}{\partial z} z'_x = 0.$$

Queste due uguaglianze si possono considerare come due equazioni di primo grado nelle y'_x, z'_x, che saranno risolubili con la regola di Kramer, se, come abbiamo appunto supposto,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{dy} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0;$$

e ci determineranno in tal caso le derivate cercate.

γ) Si abbia ora il sistema delle due equazioni

$$f(x, y, z, t) = 0,$$
$$F(x, y, z, t) = 0.$$

E supponiamo senz'altro che esistano due funzioni derivabili $z = \varphi(x, y)$, $t = \Phi(x, y)$ che soddisfino a tali equazioni.

Vogliamo determinarne le derivate. Se noi sostituiamo nelle due equazioni precedenti al posto delle z, t rispettivamente le funzioni $z = \varphi(x, y)$, $t = \Phi(x, y)$ si ottengono due funzioni di x e di y : $f(x, y, \varphi, \Phi)$ e $F(x, y, \varphi, \Phi)$ identicamente nulle. Le loro derivate *parziali* tanto rapporto a x quanto rapporto a y saranno quindi nulle. Se allora deriviamo la $f(x, y, z, t)$ rapporto a x considerandola come funzione delle x, z, t, tutte e tre funzioni della x, questa derivata, che, per non creare equivoci, dovremo indicare col simbolo (*)

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{y = \text{cost.},\\ z = \varphi\\ t = \Phi}}$$

per il teorema di derivazione delle funzioni di funzioni (funzioni composte) è:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{y = \text{cost.},\\ z = \varphi\\ t = \Phi}} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{y, z, t = \text{cost.}} x'_x + \left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]_{x, y, t = \text{cost.}} z'_x + \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{x, y, z = \text{cost.}} t'_x$$

Ma questa derivata, per quanto abbiamo osservato, è nulla. Sarà quindi (poichè $x'_x = 1$):

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{y, z, t = \text{cost.}} + \left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]_{x, y, t = \text{cost.}} z'_x + \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{x, y, z = \text{cost.}} t'_x = 0.$$

Ragionando sulla funzione $F(x, y, z, t)$ si otterrebbe analogamente:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{y, z, t = \text{cost.}} + \left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{x, y, t = \text{cost.}} z'_x + \left[\frac{\partial F}{\partial t}\right]_{x, y, z = \text{cost.}} t'_x = 0.$$

Quest'ultima equazione con la precedente costituisce un sistema di due equazioni lineari nelle due incognite z'_x e t'_x, che sono appunto (essendosi considerato y costante) rispettivamente le derivate parziali rispetto a x di $\varphi(x, y)$ e $\Phi(x, y)$.

(*) Questa derivata è una derivata parziale, perchè y si considera costante; ma non si può indicare con $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Con tal simbolo si indica $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y, z, t = \text{cost.}}$; si indica cioè la derivata che si ottiene considerando costante non solo la y, ma anche le z, t.

Il sistema è risolubile con la regola di Kramer e quindi ammetterà una sola soluzione se:

$$\begin{vmatrix} \left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]_{x,y,t=\text{cost.}} & \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{x,y,z=\text{cost.}} \\ \left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{x,y,t=\text{cost.}} & \left[\frac{\partial F}{\partial t}\right]_{x,y,z=\text{cost.}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ragionamenti e risultati analoghi valgono per z'_y, t'_y. Questo esempio di derivazione è interessante, perchè abbiamo avuto occasione di osservare quale complicazione di notazioni s'abbia quando, per non creare equivoci che potrebbero condurre a gravi errori, si vuole un simbolo di derivazione parziale che dica esplicitamente tutto e non possa prestarsi a varie interpretazioni.

L'allievo farà un'utile esercitazione, cercando di calcolare le derivate seconde.

δ) Siano $f(x, y)$ e $F(x, y)$ due funzioni continue con le loro prime derivate in un campo C, nel quale esista una curva Γ luogo dei punti per cui

$$F(x, y) = k \quad (k = \text{cost.}). \tag{3}$$

Voglio trovare qualche condizione *necessaria* affinchè il valore assunto dalla f in un punto A di Γ sia massimo o minimo rispetto agli altri valori assunti dalla f in Γ (in un intorno di A). Più brevemente cerco i massimi ed i minimi di $f(x, y)$, quando le x, y sono legate dalla (3). Lungo Γ si può considerare la y come una funzione della x soddisfacente alla $y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$ (se $F'_y \neq 0$); e la f si potrà perciò anche considerare come una funzione della sola x.

In uno dei punti A cercati dovrà dunque esser nulla la *derivata totale* della f rispetto alla x

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Dovrà dunque essere in A

$$f'_x F'_y - f'_y F'_x = 0,$$

ossia dovranno essere in A compatibili le equazioni nell'incognita λ (che supponiamo essere una costante)

$$f'_x + \lambda F'_x = 0,$$
$$f'_y + \lambda F'_y = 0.$$

Ad identico risultato si giunge se $F'_x \neq 0$. Se dunque in Γ non è mai contemporaneamente $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, allora per trovare i cercati punti A si cercano i punti ove sono nulle le derivate prime di $f + \lambda F$ rispetto a x, y: si procede cioè come se si cercassero i massimi e i minimi di $f + \lambda F$. Le tre equazioni

$$\begin{aligned} (f + \lambda F)'_x &= 0 \\ (f + \lambda F)'_y &= 0 \\ F(x, y) &= k. \end{aligned}$$

sono tre equazioni nelle tre incognite (la costante λ, e le due coordinate di A), che servono a determinarci quei punti A di C, tra i quali soltanto si dovranno poi cercare i nostri punti di massimo o minimo.

Questo metodo del moltiplicatore indeterminato λ è suscettibile di molte e svariate generalizzazioni e applicazioni.

§ 86. — Formola di Taylor-Lagrange per le funzioni di due variabili.

Ricordiamo le formole di Taylor-Lagrange per le funzioni di una sola variabile

$$\varphi(\alpha + h) = \varphi(\alpha) + h\,\varphi(\alpha + \theta h) = \varphi(\alpha) + h\,\varphi'(\alpha) + \frac{h^2}{\underline{2}}\,\varphi''(\alpha + \theta h),$$

dove $0 < \theta < 1$, e θ può variare dal secondo al terzo membro. Vogliamo estendere queste formole al caso di una funzione $f(x, y)$ di due variabili. Consideriamo a tale oggetto la $f(a + ht, b + kt)$; la quale, se a e b, h e k si considerano come costanti, è una funzione $\varphi(t)$ della sola t. Potremo quindi scrivere

$$\varphi(t) = f(a + ht, b + kt). \qquad (1)$$

Posto successivamente $t = 0$ e $t = 1$, si trae

$$\varphi(0) = f(a, b) \qquad \varphi(1) = f(a + h, b + k). \qquad (1)^{bis}$$

Applicheremo alla $\varphi(t)$ la precedente formola di Taylor, la quale, posto (*) $\alpha = 0$, $h = 1$, diventa:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(\theta) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\,\varphi''(\theta). \qquad (2)$$

(*) È necessario supporre a tal fine che i punti di coordinate $x = a + ht$ e $y = b + kt$ siano, per $0 \leq t \leq 1$, tutti interni al campo ove sono definite la f e le sue derivate. Tali punti non sono che i punti del *segmento rettilineo* congiungente il punto (a, b) al punto $(a + h, b + k)$.

Vogliamo ora trasformare queste formole in altre, in cui compaiano esclusivamente la $f(x, y)$ e le sue derivate. A tal fine si osservi che le successive derivate della $\varphi(t)$ si calcolano coi metodi del § 83, 8, pag. 278, dove è posto $x = a + ht$, $y = b + kt$. Ricordando poi che il porre $t = 0$ equivale a porre $x = a$, $y = b$ e che il porre $t = \theta$ equivale a scrivere $a + h\theta$ e $b + k\theta$ al posto di x, y, si ottiene da (2) in virtù delle (1), $(1)^{bis}$:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \left[h\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + k\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]_{\substack{x=a+h\theta \\ y=b+k\theta}} =$$

$$= f(a, b) + [h f'_x(a, b) + k f'_y(a, b)] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[h^2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=a+h\theta \\ y=b+k\theta}}$$

$(0 < \theta < 1)$ θ varia generalmente dal secondo al terzo membro.

La prima di queste uguaglianze è un'altra forma del teorema della media. Ma mentre la formola del § 81 è ottenuta passando dal punto (x, y) al punto $(x + h, y + k)$ mediante una spezzata coi lati paralleli agli assi (e senza supporre la continuità delle f'_x, f'_y), questa è ottenuta eseguendo tale passaggio con un segmento rettilineo (e supponendo f'_x, f'_y continue).

Utile esercizio sarà di generalizzare in modo analogo le precedenti formole sia a funzioni di più che due variabili, sia alla formola e alla serie di Taylor, quando non ci si fermi già ai termini contenenti derivate seconde.

§ 87. — Massimi e minimi delle funzioni di due o più variabili.

α) LEMMA. *Un trinomio omogeneo di 2° grado in due variabili* h, k, **mai** *contemporaneamente nulle*

$$a\,h^2 + 2\,b\,h\,k + c\,k^2$$

è sempre differente da zero ed ha costantemente il segno di a, *o, ciò che è lo stesso, quello di* c, *se* $a\,c - b^2 > 0$.

Può invece assumere valori di segno arbitrario se $a\,c - b^2 < 0$; *ed infine, se il trinomio non è identicamente nullo, esso ha costantemente il segno di* a, *o di* c, *ma può annullarsi, quando* $a\,c - b^2 = 0$.

Infatti se $a = c = 0$ e $b \neq 0$ allora $ac - b^2 < 0$ e al trinomio, che vale $2bhk$ può farsi assumere un segno qualunque, scegliendo per h, k valori di segno opportuno.

Se invece p. es. $a \neq 0$, allora, se α, β sono le radici di $a z^2 + 2 b z + c = 0$, il nostro trinomio vale identicamente $a(h - \alpha k)(h - \beta k)$. Se $ac - b^2 = 0$, allora $\alpha = \beta$ e quindi il trinomio vale il prodotto di a per un quadrato perfetto, ha quindi il segno di a, a meno che $h = \alpha k$, nel qual caso il trinomio si annulla. Se $ac - b^2 < 0$, e quindi α, β sono numeri reali distinti (p. es. $\alpha < \beta$), allora $(h - \alpha k)(h - \beta k)$ è positivo se $\frac{h}{k}$ è minore di α o maggiore di β, ed è negativo se $\frac{h}{k}$ è compreso tra α e β. Il trinomio può dunque assumere un valore di segno arbitrario.

Infine se $ac - b^2 > 0$ [e perciò $ac > b^2 \geq 0$ e quindi a e c differenti da zero e dello stesso segno] le radici α, β della $a z^2 + 2 b z + c = 0$ sono numeri complessi coniugati $\mu \pm i\nu$ con $\nu \neq 0$. Ora il nostro trinomio $a h^2 + 2 b h k + c k^2$ è uguale identicamente al prodotto di a per

$$(h - \alpha k)(h - \beta k) = (h - \lambda k^2) + \nu^2 k^2,$$

che è sempre positivo (e che potrebbe essere nullo soltanto se $\nu k = h - \lambda k = 0$; ossia, essendo $\nu \neq 0$, soltanto se $k = 0$, $h = 0$: valori che abbiamo escluso). Quindi il nostro trinomio ha il segno di a. Ciò che si può verificare osservando anche che:

$$a h^2 + 2 b h k + c k^2 = \frac{1}{a}\left[(a h + b k)^2 + (a c - b^2) k^2\right].$$

β) Si suol dire che una funzione $f(x, y)$ di due variabili ha in un punto A, *interno* al campo ove $f(x, y)$ è definita, un *massimo* od un *minimo* (relativo) se esiste un intorno di A, nei punti del quale la funzione assume rispettivamente valori tutti *non maggiori*, o tutti *non minori* che nel punto A (cfr. la defin. analoga di pag. 223). Se (x_0, y_0) sono le coordinate di A, dovrà cioè esistere un numero positivo l, tale che per $|h| < l$, $|k| < l$ sia rispettivamente

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \leq 0 \qquad \text{(se } A \text{ è un massimo)},$$
$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \geq 0 \qquad \text{(se } A \text{ è un minimo)}.$$

In tal caso la funzione $f(x_0, y)$ che si ottiene ponendo $x = x_0$ ha un massimo od un minimo per $y = y_0$, e quindi, se possiede derivata prima f'_y finita e determinata, questa derivata è nulla (§ 70, pag. 226) nel punto A. Risultato analogo si prova per f'_y.

Condizioni necessarie (ma non sufficienti) *affinchè* f(x, y) *abbia nel punto* A *interno al campo ove la* f *ha derivate prime determinate e finite, abbia un massimo o un minimo è che ivi queste derivate* f'_x *ed* f'_y *siano nulle.*

Le condizioni necessarie si possono meglio studiare così: Su ogni retta

$$x = x_0 + mt \qquad y = y_0 + nt \qquad (m, n = \text{cost.})$$

uscente dal punto (x_0, y_0) cioè dal punto A, la funzione $f(x, y)$ ha nelle nostre ipotesi un massimo o un minimo per $t = 0$.

[Viceversa non si può dire che, se A è punto di massimo o di minimo su ogni retta uscente da A, esso sia un punto di massimo o minimo, come si vede con metodo analogo a quello svolto al § 80, *a*, pag. 268].

Cioè $f(x_0 + mt, y_0 + nt)$ ha un massimo o minimo per $t = 0$. Se dunque f ha derivate prime e seconde finite e continue, sarà per $t = 0$ e per valori *qualsiasi* (non nulli contemporaneamente) di m, n:

$$\frac{df}{dt} = m f'_x(x_0, y_0) + n f'_y(x_0, y_0) = 0$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = m^2 f''_{xx}(x_0, y_0) + 2mn f''_{xy}(x_0, y_0) + n^2 f''_{yy}(x_0, y_0)$$

$$\begin{cases} \leq 0 \text{ (se si tratta di punto di massimo)} \\ \geq 0 \text{ (se si tratta di punto di minimo).} \end{cases}$$

Ora, affinchè $\frac{df}{dt} = 0$, qualunque siano m, n, non contemporaneamente nulle *dovrà essere* $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$. Affinchè $\frac{d^2 f}{dt^2}$ abbia segno costante, qualunque siano m, n, *dovrà essere* $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} \geq 0$ *nel punto* (x_0, y_0). Queste sono dunque altre condizioni *necessarie*, affinchè la $f(x, y)$ abbia nel punto (x_0, y_0) un massimo o minimo, almeno se le derivate prime e seconde di f sono continue. Noi proveremo che:

Condizioni sufficienti sono le:

$f'_x = f'_y = 0$; $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} > 0$; f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy} finite e continue (*nel punto* x_0, y_0). (Si noti che $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} \geq 0$ è condiz. *necessaria*, mentre $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} > 0$ è condizione *sufficiente*).

E, se tali condizioni sufficienti sono soddisfatte, il punto (x_0, y_0) *è punto di massimo se* f''_{xx}, f''_{yy} *sono nel punto considerato negative; esso è un punto di minimo, se* f''_{xx}, f''_{yy} *sono positive.* (Dalla $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} > 0$ segue che f''_{xx}, f''_{yy} hanno lo stesso segno). Infatti, supposto che in $A = (x_0, y_0)$ sia $f'_x = f'_y = 0$, la formola di Taylor-Lagrange dà

$$(1)\quad f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left\{ h^2 \overline{f''}_{xx} + 2hk \overline{f''}_{xy} + k^2 \overline{f''}_{yy} \right\}$$

ove il soprassegno indica che le derivate seconde sono calcolate in un punto $x_0 + \theta h, y_0 + \theta k$ con $0 < \theta < 1$.

Ora, essendo tali derivate seconde continue, basterà scegliere $|h|, |k|$ abbastanza piccolo perchè $\overline{f''}_{xx}$ abbia il segno di f''_{xx} e $\overline{f''}_{xx} \overline{f''}_{yy} - \overline{f''}^2_{xy}$ abbia il segno di $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy}$, cioè sia positivo. Il trinomio posto al 2° membro di (1), e quindi anche

il primo membro di (1), avranno pertanto (cfr. il lemma) il segno di f''_{xx}, cioè di f''_{xx}, *c. d. d.*

Se $f'_x = f'_y = 0$, *ma* $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} < 0$, *il punto considerato non è di massimo, nè di minimo.*

Nulla si può affermare senza studii più minuti per un punto, in cui $f'_x = f'_y = f''_{xx} f''_{yy} - f'^2_{xy} = 0$.

Il teorema relativo alle condizioni sufficienti si dimostra anche osservando che (1) si può scrivere nella forma

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left\{ f''_{xx}(x_0, y_0)\, h^2 + 2 f''_{xy}\, h\, k + f''_{yy}\, k^2 \right\} + \\ + \varepsilon h^2 + 2\gamma h k + \delta k^2,$$

ove $\varepsilon, \gamma, \delta$ tendono a zero per $h = k = 0$. Posto $h = \rho \cos\theta$, $k = \rho \operatorname{sen}\theta$, il secondo membro diventa la somma di

$$(2) \qquad \frac{1}{2}\rho^2 \left\{ \cos^2\theta\, f''_{xx} + 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, f''_{xy} \operatorname{sen}^2\theta\, f''_{yy} \right\} + \\ + \rho^2 \left\{ \varepsilon \cos^2\theta + 2\gamma \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \delta \operatorname{sen}^2\theta \right\}.$$

Il coefficiente di ρ^2 nel primo addendo ha il segno di f''_{xx} e il suo minimo valore assoluto è *maggiore* di zero. Il coefficiente di ρ^2 nel secondo membro è invece infinitesimo (per $h = k = 0$). Dunque per $|h|, |k|$ abbastanza piccoli la (2) ha il segno del primo addendo, cioè ha il segno di f''_{xx}.

CAPITOLO XIV.

PRIMA ESTENSIONE DEL CALCOLO INTEGRALE ALLE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

§ 88. — Considerazioni preliminari.

Sia $f(x, y)$ una funzione continua nei punti di un campo, che, per fissar le idee, supponiamo essere un rettangolo R coi lati paralleli agli assi coordinati. Tale rettangolo R contenga all'interno il segmento (parallelo all'asse delle y) che è definito dalle formole:

$$y = k = \text{cost.} \qquad \alpha \leq x \leq \beta. \qquad (\alpha, \beta = \text{cost.}).$$

I valori che $f(x, y)$ assume nei punti di tale segmento (lungo cui $y = \text{cost.}$) dipendono dalla sola x; e costituiscono appunto una funzione della sola x. Io dico che *l'integrale*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y)\, dx \qquad (1)$$

di tale funzione è una funzione continua della y (per quei valori di $y = k$ corrispondenti a punti interni ad R).

Il lettore noti l'analogia tra la definizione degli integrali (1) di $f(x, y)$ e quella delle derivate parziali della $f(x, y)$; come per calcolare f'_x si considera la y come una costante, così (1) si calcola appunto, considerando la y come costante, cioè la $f(x, y)$ come funzione della sola x (*).

Si tratta di provare che $\lim_{h=0} B = 0$, ove è posto

$$B = \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y + h)\, dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y)\, dx \right]. \qquad (2)$$

Il lettore troverà più avanti una dimostrazione completa. Qui ci accontentiamo di provare tale formola nell'ipotesi che

(*) In altre parole, se $F(x, y)$ è una funzione delle x, y tale che $F'_x = f$, sarà

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y)\, dx = F(\beta, y) - F(\alpha, y).$$

$|f'_y|$ sia in R sempre minore di una costante H. Questo supposto, si ha per il teorema della media:

$$|B| = \left| \int_\alpha^\beta f(x, y+h)\,dx - \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx \right| = \left| \int_\alpha^\beta h f'_y(x, y+\theta h)\,dx \right| \leq$$

$$\leq \left| h \int_\alpha^\beta H\,dx \right| = |H(\beta-\alpha)h|.$$

Quindi, per $h=0$, è $\lim B = 0$ come dovevasi provare.

Se noi conserviamo l'ipotesi che i punti del segmento $y =$ cost. lungo il quale si fa l'integrazione appartengano al campo ove $f(x,y)$ è finita e continua, si potrebbe dimostrare che *lo* $\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx$ *è una funzione continua di* y, *anche se* α, β, anzichè costanti, sono *funzioni continue* di y.

Per dimostrare tali teoremi nella *sola ipotesi della continuità della* $f(x,y)$, basta, esteso il teor. della continuità uniforme alle funzioni di due variabili, ricordare che $|f(x,y+h) - f(x,y)|$ si può rendere minore di ε per tutti i punti (x, y), prendendo h abbastanza piccolo.

§ 89. — Derivazione sotto il segno d'integrale.

Supponiamo che α e β *siano costanti, e che siano continue tanto la* $f(x,y)$ *quanto la* $f'_y(x,y)$. Noi diciamo che in tal caso *la derivata di* $\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx$ *rispetto ad* y *vale* $\int_\alpha^\beta f'_y(x,y)$; che cioè la derivata del nostro integrale è uguale all'integrale della derivata e si ottiene per ciò derivando la funzione che compare sotto il segno di integrale.

Oss. Per la dim. completa basta ricordare che, essendo f'_y continua, essa è anche uniformemente continua.

Qui consideriamo il solo caso che $|f''_{yy}|$ sia nel campo considerato sempre minore di una costante H.

Noi dobbiamo calcolare:

$$\left(\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx \right)'_y = \lim_{h=0} \frac{\int_\alpha^\beta f(x,y+h)\,dx - \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx}{h} =$$

$$= \lim_{h=0} \int_\alpha^\beta \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}\,dx.$$

Per la formola di Taylor è

$$f(x,y+h) - f(x,y) = h f'_y(x,y) + \frac{h^2}{2} f''_{yy}(x, y+\theta h)$$

$$(0 < \theta < 1).$$

Quindi

$$\left(\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx\right)'_y = \lim_{h=0}\left[\int_\alpha^\beta \left\{ f'_y(x,y) + \frac{h}{2} f''_{yy}(x, y+\theta h)\right\} dx\right]$$

$$= \int_\alpha^\beta f'_y(x,y)\,dx + \lim_{h=0}\frac{h}{2}\int_\alpha^\beta f''_{yy}(x, y+\theta h)\,dx.$$

Poichè

$|f''_{yy}| < H$ e quindi $\left|\int_\alpha^\beta f''_{yy}(x, y+\theta h)\,dx\right| < \left|H\int_\alpha^\beta dx\right| = |H(\beta-\alpha)|$,

sarà:

$$\lim_{h=0}\left|\frac{h}{2}\int_\alpha^\beta f''_{yy}(x, y+\theta h)\,dx\right| = 0.$$

E la nostra formola diventa appunto:

$$\left(\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx\right)'_y = \int_\alpha^\beta f'_y(x,y)\,dx \qquad (\alpha, \beta = \text{cost.}).$$

GENERALIZZAZIONE.

Si può estendere la formola precedente al caso che α e β siano funzioni della y, purchè α'_y e β'_y esistano e siano finite.

Premetteremo alcune osservazioni.

Si voglia derivare rispetto al limite superiore x l'integrale

$$\int_\alpha^x \varphi(z)\,dz \qquad (\alpha = \text{cost.}).$$

Ricordando che un integrale definito è indipendente dal nome della variabile di integrazione avremo:

$$\left[\int_\alpha^x \varphi(z)\,dz\right]'_x = \left[\int_\alpha^x \varphi(x)\,dx\right]'_x = \varphi(x);$$

cioè la derivata rispetto al limite superiore di un integrale di una funzione di una variabile è uguale alla funzione che è sotto il segno di integrale, dove al posto della variabile di integrazione si scriva il limite superiore.

Analogamente, dovendosi calcolare la

$$\left[\int_x^\alpha \varphi(z)\,dz\right]'_x,$$

potremo scrivere:

$$\left[\int_x^\alpha \varphi(z)\,dz\right]'_x = -\left[\int_\alpha^x \varphi(x)\,dx\right]'_x = -\varphi(x);$$

cioè la derivata rispetto al limite inferiore di un integrale di una funzione di una variabile è uguale alla funzione che è sotto il segno di integrale cambiata di segno, dove al posto della variabile di integrazione si scriva il limite inferiore.

Ci varremo di questi risultati per eseguire il calcolo della

$$\left[\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx\right]'_y.$$

Nello

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,dx$$

abbiamo supposto α e β dipendenti da y; indicheremo questo fatto sostituendo z e t (supposte funzioni di y) ai limiti di integrazione. Otterremo lo

$$\int_{z}^{t} f(x,y)\,dx$$

che indicheremo con F. Il nostro integrale allora che è funzione delle y, z, t, tutte funzioni di y, sarà funzione composta di y. Avremo dunque (§ 84, α)

$$\frac{dF}{dy} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{z,\,t=\text{cost.}} y'_y + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{y,\,t=\text{cost.}} z'_y + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{y,\,z=\text{cost.}} t'_y$$

Se però le z, t fossero funzioni anche della x, questa formola si scriverebbe più correttamente nel modo seguente:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x=\text{cost.}} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x,z,t=\text{cost.}} y'_y + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{x,y,t=\text{cost.}} z'_y + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{x,y,z=\text{cost.}} t'_y$$

Ora per trovare $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x,z,t=\text{cost.}}$ si devono considerare z, t come costanti, ossia come indipendenti dalla y. Questa derivata si calcola dunque col metodo svolto più sopra. Si ha cioè

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x,z,t=\text{cost.}} = \int_{z}^{t} f'_y(x,y)\,dx.$$

Così sappiamo che, essendo z il limite inferiore dell'integrale, è $\frac{\partial F}{\partial z} = -f(z,y)$; e che, essendo t il limite superiore, $\frac{\partial F}{\partial t} = f(t,y)$. Essendo poi $y'_y = 1$, dalle precedenti formole dedurremo infine, posto di nuovo $z = \alpha, t = \beta$,

$$\left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,dx\right]'_y = \int_{\alpha}^{\beta} f'_y(x,y)\,dx + f(\beta,y)\,\beta'_y - f(\alpha,y)\,\alpha'_y.$$

Anche qui è ammesso, p. es., che le f, f'_y, f''_{yy} sieno finite e continue.

Questa formola si riduce a quella trovata più sopra, se $\alpha'_y = \beta'_y = 0$, ossia se le α, β sono indipendenti dalla y; ciò che era prevedibile *a priori*.

§ 90. — Differenziali esatti in due variabili.

α) Il problema fondamentale del calcolo integrale per le funzioni di una sola variabile consiste nel determinare una funzione, di cui è data la derivata $F(x)$, o, ciò che è lo stesso, il differenziale $F(x)\,dx$.

Il problema analogo per le funzioni di due variabili consiste nel determinare una funzione $f(x, y)$ di due variabili x, y, di cui sono date le due derivate parziali del primo ordine, ossia di trovare una funzione $f(x, y)$ soddisfacente alle:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y), \qquad (1)$$

o, ciò che è lo stesso, una funzione il cui differenziale df è uguale a

$$Mdx + Ndy, \qquad (2)$$

dove M, N sono funzioni prefissate. Abbiamo visto che il problema citato per le funzioni di una sola variabile è sempre risolubile se $F(x)$ è continua, p. es., nell'intervallo $x_0 \leq x \leq b$; e che la f è determinata a meno di una costante additiva k. Si può, p. es., porre

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx + k,$$

dove k è il valore (scelto ad arbitrio) di $f(x)$ per $x = x_0$.

Nel caso delle funzioni di due variabili noi proveremo invece che non sempre esiste una funzione $f(x, y)$ soddisfacente alle (1) (anche supposto che le M, N siano continue insieme alle loro derivate), ossia che non sempre (2) è il differenziale di una funzione $f(x, y)$, o, come si suol dire più brevemente, che non sempre (2) è un *differenziale esatto.*

Se infatti le derivate prime delle M, N sono continue, dalle (1) si deduce, derivando la prima rispetto ad y e la seconda rispetto ad x, che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Essendo, per ipotesi, i secondi membri funzioni continue, per il teorema (§ 80, pag. 271) dell'invertibilità dell'ordine delle derivazioni, essi sono uguali; cioè è

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \qquad (3)$$

La (3) *è dunque una condizione necessaria affinchè il sistema delle* (1) *sia risolubile, ossia affinchè* (2) *sia un differenziale esatto* [sia il differenziale di una funzione $f(x, y)$], (naturalmente se M, N, M'_y, N'_x sono continue).

Dimostreremo viceversa che *in casi generalissimi tale condizione è anche sufficiente.* Se la (3) è soddisfatta, anche nel caso attuale di funzioni $f(x, y)$ di due variabili, la $f(x, y)$ è determinata a meno di una costante additiva k: p. es., il valore della $f(x, y)$ in un punto $A = (x_0, y_0)$ prefissato.

β) Comincieremo da un caso particolare: il caso cioè che le variabili *sieno separate.* Con questa frase si indica il caso che

nella (2) la M sia funzione della sola x, la N funzione della sola y; in tal caso la (3) è evidentemente soddisfatta, perchè

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

Supponiamo $M(x)$ continua per $x_0 \leq x \leq b$, ed $N(y)$ continua per $y_0 \leq y \leq \beta$.

Sarà evidentemente:

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(y)\,dy + k.$$

Il primo addendo $\int_{x_0}^{x} M(x)\,dx$ è una funzione della sola x, la cui derivata rispetto ad x vale $M(x)$ e la cui derivata rispetto ad y è nulla. Il secondo addendo similmente è una funzione della sola y, la cui derivata rispetto ad x è nulla, la cui derivata rispetto ad y è $N(y)$. Il terzo addendo k è una costante effettiva, le cui derivate sono entrambe nulle. Esso è il valore della $f(x, y)$ nel punto di ascissa x_0 e di ordinata y_0.

γ) Passiamo ora al caso generale. Vogliamo calcolare $f(x, y)$ nel punto (x, y) supponendo che M, N ed $M'_y = N'_x$ *siano finite e continue nei punti la cui ascissa è compresa tra* x_0 *ed* x, *e la cui ordinata è compresa tra* y_0 *ed* y. Ciò naturalmente *limita* il campo ove facciamo variare il punto (x, y) cioè *il campo* R, *ove dimostriamo il nostro teorema.* Supporremo, p. es., senz'altro R *essere un rettangolo coi lati paralleli agli assi*, e dentro di esso supporremo cadere entrambi i punti (x_0, y_0) ed (x, y).

Poichè $f'_y = N$, sarà

$$f = \int_{y_0}^{y} N(x, y)\,dy + \varphi, \qquad (4)$$

dove nell'eseguire l'integrazione la x si considera come costante, e la φ (la costante additiva) potrà quindi essere funzione della sola x (com'è evidente, perchè φ deve essere la funzione a cui si riduce la f per $y = y_0$, cioè la $f(x, y_0)$).

Dovremo poi determinare la $\varphi = \varphi(x)$ in guisa che la derivata rispetto ad x della $f(x, y)$ definita da (4) valga M; che cioè

$$M(x,y) = \left[\int_{y_0}^{y} N(x,y)\,dy + \varphi(x)\right]'_x = \varphi'(x) + \int_{y_0}^{y} N'_x(x,y)\,dy$$

ossia che:

$$\varphi'(x) = M(x, y) - \int_{y_0}^{y} N'_x(x, y)\, dy. \qquad (5)$$

Il secondo membro è finito e continuo. Sarà dunque necessario e sufficiente che esso sia funzione della sola x; in tal caso, con una integrazione si ricaverà il valore di $\varphi(x)$. La condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità del nostro problema è che la derivata $M'_y - N'_x$ del secondo membro di (5) rispetto ad y sia nulla; cioè la condizione, già trovata necessaria, è anche sufficiente. In tal caso la (5) dà

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} \left\{ M(x, y) - \int_{y_0}^{y} N'_x(x, y)\, dy \right\} dx + \varphi(x_0)$$

dove $\varphi(x_0)$ è il valore di $\varphi(x)$ per $x = x_0$, cioè il valore di f per $x = x_0$, ed $y = y_0$, cioè il valore $f(x_0, y_0)$ prefissato ad arbitrio. E la (4) dà pertanto:

$$f(x,y) = \int_{y_0}^{y} N(x, y)\, dy + \int_{x_0}^{x} \left\{ M(x, y) - \int_{y_0}^{y} N'_x(x, y) \right\} dx + f(x_0, y_0).$$

Ricordando che nelle attuali ipotesi il secondo addendo, come già abbiamo osservato, è indipendente dalla y, possiamo per calcolarlo, supporvi $y = y_0$. Cosicchè tale formola diventa più semplicemente

$$f(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)\, dy + f(x_0, y_0) \qquad (6)$$

la quale *dimostra il nostro teorema che nelle nostre ipotesi esiste una funzione* f, *il cui differenziale è* Mdx + Ndy, e *ci insegna a calcolare tale funzione* f *nel campo* R *sopra definito.*

La (6) si può ottenere direttamente nel seguente modo, *se si ammette già provata la esistenza della* f; basta osservare che:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = [f(x, y) - f(x, y_0)] + [f(x, y_0) - f(x_0, y_0)]$$

$$= \int_{y_0}^{y} \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \int_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y = y_0} dx =$$

$$= \int_{y_0}^{y} N(x, y)\, dy + \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)\, dx,$$

che coincide appunto con (6).

Indichiamo con A, C, B i punti (x_0, y_0), (x, y_0) ed (x, y). La somma dei primi due addendi del secondo membro di (6) si chiamerà l'integrale di $Mdx + Ndy$ esteso alla spezzata ACB,

od anche la somma dell'integrale di $Mdx + Ndy$ esteso ad AC, e dell'integrale analogo esteso a CB. Naturalmente bisogna definire il significato di queste nuove frasi: integrale di $Mdx + Ndy$ esteso ad AC od a CB. Noi intendiamo con integrale di $Mdx + Ndy$ esteso, p. es., ad AC l'integrale *dell'espressione che si deduce da* Mdx + Ndy *ponendo al posto della* y *e della* dy *i valori che si deducono dalla equazione* $y = y_0 =$ cost. *di* AC, cioè $y = y_0$, $dy = 0$, ed estendendo l'integrazione dall'ascissa x_0 di A all'ascissa x di C. Cioè l'integrale di $Mdx + Ndy$ esteso ad AC vale il primo addendo del secondo membro di (6); mentre invece il secondo addendo si trova, con definizione analoga, uguale all'integrale di $Mdx + Ndy$ esteso a CB.

La (6) si può dunque interpretare così:

La differenza tra il valore f *nel punto* (x, y) *ed il valore della* f *nel punto* (x_0, y_0) *vale l'integrale di* df *esteso ad una spezzata di due lati paralleli agli assi coordinati congiungente il punto* (x_0, y_0) *al punto* (x, y) (se f'_x, f'_y sono continue).

Questo teorema è *la generalizzazione della formola*

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^{x} d\varphi = \int_{x_0}^{x} \varphi'(x)\, dx$$

valida per le funzioni $\varphi(x)$ *di una sola variabile* (a derivata continua).

§ 91. — Integrali curvilinei (*).

I precedenti risultati appaiono incompleti. Infatti:

1° Perchè dare tanta importanza alla spezzata ACB unente i punti A, B piuttosto che a un'altra curva congiungente i punti stessi? Già, scambiando nelle precedenti considerazioni le x, y, giungeremmo a teoremi analoghi, in cui alla ACB è sostituita un'altra spezzata ADB, il cui primo lato AD è parallelo all'asse delle y, il secondo lato DB all'asse delle x.

2° Il secondo membro di (6) ha un significato, anche se non è soddisfatta la $M'_y = N'_x$. Quale ne è il senso in tali casi più generali?

Il modo migliore di dare un'esauriente risposta a tali domande è di porre la seguente definizione. Sia AB un arco Γ di curva pensato descritto nel verso da A a B e rappresentato dalle equazioni

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad \text{per } \lambda \leq t \leq \mu, \qquad (1)$$

(*) Il lettore può rinviare la lettura di questo § al momento in cui studierà la teoria generale delle funzioni additive e degli integrali multipli.

dove λ, μ sono i valori della t corrispondenti ai punti A, B di Γ, e dove $x(t)$, $y(t)$ sono finite e continue nell'intervallo (λ, μ), e le $x'(t)$, $y'(t)$ sono continue od hanno un numero finito di punti di discontinuità (§ 78, pag. 261).

Noi chiameremo integrale di $Mdx + Ndy$ esteso a tale arco di curva lo:

$$\int_\lambda^\mu \{ M[x(t), y(t)]\, x'(t) + N[x(t), y(t)]\, y'(t) \}\, dt, \quad (2)$$

il cui integrando si deduce da $Mdx + Ndy$, sostituendovi alle x, y, dx, dy i valori che si deducono da (1). È così generalizzata nel modo più semplice la definizione sopra data di integrali estesi a segmenti.

È appena necessario avvertire che, essendo dx, dy indipendenti dalla scelta della variabile indipendente, *il valore di* (2) *non cambia se cambiamo il parametro* t *scelto per individuare i punti di* Γ; e ciò in virtù del teorema di integrazione per sostituzione (cfr. anche il penultimo capitolo del libro). *Tale integrale dipende dunque soltanto dal differenziale* Mdx + Ndy *e dall'arco* Γ *dato a priori* (e cambia di *segno*, invertendo il verso in cui Γ si immagina percorso, cioè scambiando i punti A, B).

Ci poniamo ora la seguente domanda fondamentale:

Che valore ha il nostro integrale, se esiste una funzione f(x, y), *il cui differenziale* df *è* M(x, y) dx + N(x, y) dy ?

Evidentemente lungo Γ la f è funzione di x, y, entrambe funzioni della t, e perciò la f è una funzione di t, la cui derivata vale

$$M[x(t), y(t)]\, x'(t) + N[x(t), y(t)]\, y'(t), \quad (*)$$

perchè dalle

$$f = f(x, y);\ x = x(t),\ y = y(t)$$

si deduce

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} x'_t + \frac{\partial f}{\partial y} y'_t = Mx'_t + Ny'_t.$$

Quindi il nostro integrale (2) diventa

$$\int_\lambda^\mu \frac{df}{dt}\, dt,$$

(*) Le $M[x(t), y(t)]$ ed $N[x, (t), y(t)]$ sono i valori assunti dalle M, N nei punti del nostro arco Γ. Ammetto qui la continuità delle $x'(t)$, $y'(t)$. Il lettore potrà facilmente studiare le lievi modificazioni da apportarsi alla seguente dimostrazione nel caso che $x'(t)$, $y'(t)$ abbiano qualche punto di discontinuità.

ed è perciò uguale *alla differenza dei valori che la* f(x, y) *assume negli estremi* B, A *dell'arco* Γ *di curva* considerato.

Vale a dire *tale integrale ha in tale ipotesi un valore che dipende soltanto dagli estremi* A, B *del nostro arco,* e non varia quindi, se cambiamo l'arco (1) che congiunge i punti *A*, *B*, e gli sostituiamo p. es., come al § 90, la spezzata *ACB*. Viceversa si può dimostrare (cfr. anche il penultimo cap. del libro):

Se questo integrale non dipende dalla particolare scelta dell'arco AB, *ma soltanto dai suoi estremi* A, B, *esso definisce* proprio *il valore che nel punto* B *assume la funzione* f(x, y) *che è nulla nel punto* A, *e il cui differenziale vale* Mdx + Ndy.

Infatti tenuto fisso il punto *A*, e considerato il punto *B* come variabile, tale integrale sarà una funzione *f* delle coordinate (x, y) di *B*. Vogliamo provare che $f'_x = M$ e che $f'_y = N$. Proviamo p. es. che $f'_x = M$. Sia B' il punto $(x + h, y)$. Sarà:

$$f'_x(x, y) = \lim_{h=0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} =$$

$$= \lim_{h=0} \frac{\int_A^{B'} (Mdx + Ndy) - \int_A^B (Mdx + Ndy)}{h} . \qquad (3)$$

Poichè tali integrali non dipendono dalla scelta delle linee AB, AB', potremo supporre che la linea AB' risulti dalla linea AB e dal segmento BB', lungo cui $dy = 0$.

La (3) diventerà

$$f'_x(x, y) = \lim_{h=0} \frac{\int_B^{B'} (Mdx + Ndy)}{h} = \lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} M(x, y)\, dx.$$

Ricordando che per il teorema della media

$$\int_x^{x+h} M(x, y)\, dx = h\, M(x + \theta h, y), \qquad (0 < \theta < 1)$$

e che M è continua, avremo:

$$f'_x = \lim_{h=0} M(x + \theta h, y) = M(x, y). \qquad \text{c. d. d.}$$

Cosicchè il problema di riconoscere quando esiste una funzione $f(x, y)$ che abbia un dato differenziale $Mdx + Ndy$, e quello di calcolare tale funzione, si riducono al problema di riconoscere quando l'integrale curvilineo di $Mdx + Ndy$ dipende

soltanto dagli estremi della curva, a cui è estesa l'integrazione e non dalla curva scelta. Nel capitolo citato dimostreremo che ciò avviene in ogni campo R ad un solo contorno (p. es. un campo circolare, o ellittico, e p. es. *non* una corona circolare), in cui M, N, M'_y, N'_x sieno finite e continue, e $M'_y = N'_x$. Resterà così dimostrata *non solo per i campi* R *del* § 90, *ma anche per questi campi più generali che nelle nostre ipotesi esiste una funzione* f(x, y) *tale che* df = Mdx + Ndy. Nel capitolo citato troveremo anche gli stretti rapporti che passano tra le attuali proposizioni e le definizioni di potenziale e di lavoro di una forza.

§ 92. — Differenziali in tre variabili.

Il problema analogo per funzioni di tre variabili x, y, z è quello di determinare una funzione $f(x, y, z)$, di cui sono prefissate le tre derivate prime $M = f'_x$, $N = f'_y$, $P = f'_z$, o in altre parole è prefissato il differenziale

$$df = Mdx + Ndy + Pdz,$$

(M, N, P funzioni di x, y, z).

Questo problema non è sempre risolubile; se supponiamo infatti che le derivate parziali del primo ordine delle M, N, P esistano, siano finite e continue, esisteranno e saranno finite e continue le

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial M}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial N}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Donde, per il teorema sull'invertibilità dell'ordine delle derivazioni, si trova che condizioni necessarie affinchè il nostro problema sia risolubile, o, come si suol dire, affinchè

$$Mdx + Ndy + Pdz$$

sia *un differenziale esatto*, sono le:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}; \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}; \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Come nel problema precedente si dimostra che queste condizioni sono sufficienti almeno per il caso che il campo di variabilità per le M, N, P sia un parallelopipedo con gli spigoli paralleli agli assi coordinati, ed anche in casi assai più generali.

§ 93. — Cenno di un problema analogo ai precedenti.

Un problema analogo è quello di determinare una funzione $z(x, y)$ che soddisfi alla $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = P(x, y)$, dove $P(x, y)$ è una funzione data *a priori* finita e continua in un rettangolo, avente i lati paralleli agli assi coordinati; e siano a, b, p. es., le coordinate di quel vertice, che ha la minima ascissa e la minima ordinata.

La nostra equazione si può scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = P(x, y)$$

donde

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \int_a^x P(x, y)\, dx + \gamma,$$

dove γ è una costante rispetto alla x, ed è quindi una qualsiasi funzione della y (*continua*, perchè in questi studi ci occupiamo solamente di funzioni continue).

Sarà perciò:

$$z = \int_b^y \left[\int_a^x P(x, y)\, dx \right] dy + \varphi(y) + f(x) \qquad (1)$$

dove $\varphi(y)$ è l'integrale di γ; cioè, essendo γ una funzione arbitraria, $\varphi(y)$ è una funzione arbitraria della y (a derivata continua). Nella (1) compare anche $f(x)$, funzione arbitraria di x, perchè si è integrato rispetto a y, e quindi l'integrale resta determinato a meno d'una costante (rispetto ad y) che può essere una funzione affatto qualunque di x, ma che supporremo derivabile, volendo che esista z'_x.

Se nella (1) poniamo ora l'ipotesi che $P(x, y)$ sia costantemente zero, e quindi

$$\int_b^y dy \left[\int_a^x P(x, y)\, dx \right] = 0,$$

troviamo che la funzione più generale $z(x, y)$, che ha la derivata mista di secondo ordine uguale a zero, è somma di due funzioni, l'una di x e l'altra di y affatto arbitrarie (ma derivabili), e cioè:

$$z = \varphi(y) + f(x). \qquad (2)$$

Si può verificare facilmente il nostro risultato derivando la $z = \varphi(y) + f(x)$ prima rispetto a x e poi rispetto a y. Si avrebbe:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x);$$

e derivando quindi la $f'(x)$ rispetto a y si ottiene lo zero.

Facciamo un cambiamento di variabili; poniamo cioè:

$$u = x + y, \qquad v = x - y;$$

da cui

$$x = \frac{u+v}{2}, \qquad y = \frac{u-v}{2}.$$

La z funzione di x e y può dunque considerarsi come funzione di u e di v, a loro volta funzioni di x e y.

Derivando allora la z rispetto alla x tenendo y costante, e applicando il teorema di derivazione di funzione di funzione, si ottiene

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} u'_x + \frac{\partial z}{\partial v} v'_x;$$

ossia, essendo $u'_x = +1$ e $v'_x = +1$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Derivando rispetto alla y, si trova

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} u'_y + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} v'_y\right) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} v'_y + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} u'_y\right).$$

Poichè $u'_y = 1$, $v'_y = -1$, si trova

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Cosicchè la (2), ove si ponga $z = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$, dà tutte le funzioni che soddisfano alla:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0:$$

risultato importante, perchè riceve applicazioni in molte questioni di fisica.

Oss. Scambiando gli assi delle x e delle y si trova che la (1) si può scrivere nella forma

$$z(x, y) = \int_a^x \left[\int_b^y P(x, y)\, dy\right] dx + f(x) + \varphi(y).$$

E se ne potrebbe dedurre che:

$$\int_a^x \left[\int_b^y P(x, y)\, dy\right] dx = \int_b^y \left[\int_a^x P(x, y)\, dx\right] dy.$$

Questa formola sarà ritrovata in forma assai più generale in altro capitolo.