DISSERTAZIONE E TESI

PRESENTATE

ALLA COMMISSIONE ESAMINATRICE

DELLA

R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri

IN TORINO

DA

CESARE BAGNOLI

di REGGIO (EMILIA)

PER OTTENERE IL DIPLOMA

DI

INGEGNERE LAUREATO

1869

TORINO
TIP. C. FAVALE E COMP.

ALLA SACRA INDELEBILE MEMORIA

DI MIO PADRE...... E DI MIA MADRE

A VOI FRATELLI E SORELLE

QUESTO POVERO LAVORO

DEDICO ED OFFRO.

CALCOLO

DELLA

INCAVALLATURA DI PALLADIO

INCAVALLATURA DI PALLADIO

I.

Si dà il nome di *incavallature* a tutte quelle armature di legno o di ferro, oppure di legno e di ferro, formanti un sistema triangolare, e che situate a convenienti distanze l'una dall'altra servono d'appoggio ad una serie di travi disposte orizzontalmente, aventi per ufficio di sopportare una copertura, ed in guisa tale che tali travi, pel peso della medesima, non vengano ad inflettersi. Queste armature vengono sopportate alle loro estremità da piedritti in muratura, o da appositi sostegni di ghisa o di pietra, secondo le circostanze, e dividonsi in incavallature di *piccola portata;* in incavallature di *portata media;* ed in incavallature di *grande portata*, relativamente alla distanza dei loro appoggi. In quanto alla forma, alle dimensioni ed al numero dei diversi pezzi, che concorrono a costituirle, basti il dire, che dipendono dal peso che esse sono destinate a sopportare ed anche dalla distanza sovraccennata; appositi calcoli rispondono a tali quesiti.

Spesse volte alcuni pezzi si fanno di ghisa; ma nell'adoperare questa materia bisogna andar cauti, e ricordare che allora soltanto è conveniente, quando abbiansi a sopportare grandi pesi, in modo che non si abbia tensione e più particolarmente flessione, poichè le esperienze dimostrarono che la ghisa resiste più di qualunque altro materiale impiegato nelle costruzioni solo alla compressione.

II.

Siccome le incavallature in legname devono formare l'argomento di questo breve lavoro, ci occuperemo esclusivamente di esse.

I pezzi principali costituenti una incavallatura in legno sono: la *catena*, la quale consiste in una trave collocata su due appoggi posti allo stesso livello; i *puntoni*, che sono due travi di uguali dimensioni, e disposte in modo che una delle loro estremità appoggi presso l'estremità della catena, e l'altra concorra verso il punto più alto dell'armatura; si vede quindi, che i puntoni devono essere ugualmente inclinati, e che uno serve di sostegno all'altro nella parte superiore.

I puntoni verranno fermati alla catena nelle loro estremità inferiori a *semplice* oppure a *doppio dente cuneiforme*, ed assicurati mediante staffe in ferro perpendicolari agli assi dei puntoni medesimi. Le loro estremità superiori verranno connesse: o a *semplice contatto verticale*, e tenute in sesto da piattine di ferro; o con incastro a *mezzo legno* stretto da caviglie di ferro; o finalmente con l'inserzione di un maschio di legno forte fermato con caviglie.

L'incavallatura descritta è la più semplice, che occorra di considerare nella pratica, ed appartiene alla prima categoria. Essa conviene per portate non maggiori di 7 metri.

Occorrendo di dover costrurre un'armatura per portate fra 7 e 16 metri, è necessario ai pezzi sovraccennati aggiungerne altri di rinforzo, altrimenti si dovrebbero impiegar travi molto grosse, e quindi molto costose, e spesso difficilmente reperibili in commercio. Osservando la figura (I^a), si vedono i pezzi aggiunti; ossia il pezzo M verticalmente posto fra i due puntoni p ed al quale si dà il nome di *monaco* od *ometto;* e le due saette S poste fra il monaco ed i puntoni.

In questa incavallatura è chiaro, che i puntoni hanno una lunghezza abbastanza rilevante, e che per conseguenza le unioni sopra indicate pel punto culminante A non possono presentare la stabilità richiesta dalle buone regole dell'arte. Per ovviare a questo grave inconveniente serve appunto l'ometto M, il quale nello stesso tempo per mezzo della sottoposta staffa s sostiene la catena c, e presenta il necessario punto d'appoggio alle saette S. Queste si oppongono alla soverchia inflessione dei due puntoni p.

III.

L'incavallatura di Palladio si usa per portate comprese fra 16 e 26 metri. Essa è rappresentata nella figura (II^a^), e come può facilmente scorgersi, essa consta di una catena c, dei due puntoni $A\,V$ e $B\,V$, dei contropuntoni $C\,H$ e $G\,D$, che sopportano la contro-catena $H\,G$, la quale è impedita d'inflettersi dalla staffa $O\,I$ appartenente al monaco M, alla sommità del quale stanno appoggiati i puntoni, e finalmente dei due monaci $H\,K$ e $G\,L$ i quali sostengono la catena c nei due punti E ed F mediante le due staffe $K\,E$ ed $L\,F$.

Trovare le dimensioni dei diversi pezzi componenti questo sistema è appunto lo scopo di questo lavoro; perciò osserviamo, che sarà nota l'area da coprirsi e per conseguenza la distanza $A\,B$, che chiameremo $2\,a$. Sarà dato inoltre il peso p corrispondente ad ogni unità di lunghezza della proiezione orizzontale di un puntone; esso è costituito dal peso delle tegole, dei travicelli, e del puntone medesimo, corrispondente alla unità di superficie della proiezione orizzontale della copertura, e di un sovracarico che può essere sul tetto.

Chiamo poscia α l'angolo noto $V\,A\,B$, ossia l'inclinazione di ciascun puntone rispetto alla catena; β l'angolo $G\,D\,B$, ossia l'inclinazione del sottopuntone. Si deve fare in modo, che l'asse della controcatena incontri i due puntoni nel loro punto di mezzo, e quindi si avrà:

$$A\,F = \frac{1}{2}\,a; \qquad \text{ed} \qquad F\,E = a.$$

Sia P il peso totale della catena;

P' il peso totale del monaco M;

P'' il peso di ciascuno dei due monaci GL ed HK;

P''' il peso totale della controcatena;

P^{IV} il peso di uno dei sottopuntoni GD ed HC.

Stabilite tutte queste quantità, comincieremo dal trovare il valore delle pressioni, che la catena esercita sui due appoggi.

La catena può considerarsi come un solido orizzontalmente collocato su quattro appoggi A, B, E, F posti fra loro ad una distanza nota, e siccome la sua sezione è costante, è carica di un peso uniformemente distribuito su tutta la sua lunghezza. Applicando pertanto la teoria relativa ai solidi posti in tale circostanza, si possono trovare i momenti inflettenti rispetto alle sezioni corrispondenti ai punti d'appoggio e rispetto ad una sezione qualunque della trave, e quindi le reazioni sugli appoggi A ed F. Dette R_1 ed R_2 queste reazioni avremo:

$$R_1 = \frac{7}{128} P; \quad R_2 = \frac{57}{128} P.$$

La staffa FL sopporta una tensione uguale alla pressione, che la catena esercita sul punto d'appoggio F; chiamando pertanto T il valore di questa tensione si avrà:

$$T = \frac{57}{128} P;$$

detta dunque Ω_1 la superficie della sezione retta da darsi alla staffa, avremo per determinarla l'equazione di stabilità:

$$T = n' R' \Omega_1. \quad (1)$$

Detta ora T' la tensione sopportata dal monaco GL, ed osservando che essa consta della T più il peso stesso del monaco, avremo:

$$T' = T + P''$$

quindi:

$$T' = n' R' \Omega_2 \tag{2}$$

ci dà la superficie Ω_2 della sezione retta da darsi all'ometto affinchè questo trovisi in buone condizioni di stabilità.

Consideriamo ora la controcatena. Essa può considerarsi come un solido orizzontalmente collocato sui tre appoggi equidistanti H, I, G, e gravata del peso $\frac{P'''}{a}$ su ogni unità di lunghezza. Dette R_1 ed R'_2 le reazioni sugli appoggi A ed I, si hanno dalla teoria i valori:

$$R'_1 = \frac{3}{16} P''' ; \qquad \text{ed} \qquad R'_2 = \frac{5}{8} P''' .$$

Ma la staffa $O\,I$ soffre una tensione T'' uguale alla pressione, che la controcatena esercita in I, cioè:

$$T'' = \frac{5}{8} P''' ;$$

per conseguenza, detta Ω_3 la superficie della sezione retta conveniente alla staffa $O\,I$, potremo dedurla dalla equazione di stabilità:

$$T'' = n' R' \Omega_3 \tag{3}$$

Per trovare le dimensioni da assegnarsi al monaco M, osservo che esso è un solido incastrato alla sua estremità superiore, e sottoposto a tensione, e che per conseguenza la sezione pericolosa è la sezione in V. Ora in questo punto esso sopporta la tensione della staffa più il proprio peso, e dettane T''' la somma, si ha

$$T''' = T'' + P' ;$$

essendo allora Ω_4 la superficie della sezione pericolosa, che riterremo costante per tutto il solido, l'equazione

$$T''' = n' R' \Omega_1 \qquad (4)$$

varrà a determinarla.

Veniamo ora alla pressione, che sopporta la controcatena, ed a quella che sopporta il sottopuntone $G D$, e siano esse rispettivamente Q e Q'. Per determinarne i valori è duopo osservare, che il puntone $V B$ è un solido obliquamente disposto su tre appoggi equidistanti, e caricato di un peso $p\,a$ sulla sua totale lunghezza. Questo peso ammette due componenti: una normale al puntone ed una diretta secondo l'asse del medesimo. Quella avrà un valore

$$p\,a \cos \alpha;$$

e quindi potremo considerare il puntone come un solido orizzontalmente collocato su tre appoggi equidistanti, e sollecitato da una forza $p\,a \cos. \alpha$ normale al suo asse. Dette pertanto R''_1, R''_2 le reazioni sugli appoggi A e G, si trova colla teoria:

$$R''_1 = \frac{3}{16} p\,a \cos \alpha; \qquad \text{ed} \qquad R''_2 = \frac{5}{8} p\,a \cos \alpha.$$

Ora la testa del monaco $G L$ (fig. III[a]) è sollecitata:

1° Da una forza orizzontale Q uguale e contraria alla reazione della controcatena;

2° Dalla pressione Q' del sottopuntone;

3° Dalla tensione T' che sopporta il monaco, e che già venne calcolata;

4° Dalla forza R'_1;

5° Finalmente dalla pressione diretta normalmente all'asse del puntone, e che vale R''_2.

Ma per la stabilità si richiede, che il monaco sia in istato di equilibrio; scomponendo dunque tutte queste forze e dicendo, che la somma algebrica delle componenti verticali deve essere uguale a zero, e così pure la somma algebrica delle componenti orizzontali, avremo due equazioni che ci somministrano i valori di Q e Q'.

Per le componenti orizzontali si ha:

$$Q - Q' \cos\beta - \frac{5}{8} p\, a \cos\alpha \, \mathrm{sen}\, \alpha = 0$$

e per le verticali:

$$Q' \, \mathrm{sen}\beta - T' - \frac{3}{16} P'' - \frac{5}{8} p\, a \cos^2 \alpha = 0.$$

Si vuol conoscere la sezione retta da darsi al sottopuntone $G\,D$; perciò osservo, che esso è un solido premuto superiormente da Q' e fisso in D; quindi nella sezione trasversale infima del sottopuntone, avrà luogo una pressione Q', più la pressione cagionata dalla componente secondo l'asse del puntone, e detta Q''', tale somma, si avrà:

$$Q''' = Q' + P^{\mathrm{IV}} \, \mathrm{sen}\, \beta;$$

quindi:

$$Q''' = n'' R'' \Omega_5 \qquad (5)$$

è l'equazione, che ci dà il valore Ω_5 della superficie della sezione richiesta.

Veniamo ora alle dimensioni da assegnarsi alla controcatena. Essa è un solido appoggiato su tre punti equidistanti $H\,I\,G$ e sottoposto a flessione dalla forza P'''. Sia pertanto Q_{2m} la pressione sopportata dalla fibra maggiormente compressa; si ha:

$$Q_{2m} = \frac{u'' \mu''}{I'} - \frac{T''}{\Omega} \qquad (\alpha)$$

in cui u'' è la distanza della fibra suddetta dall'asse neutro; μ'' è il momento inflettente, e T'' la componente tangenziale per la sezione pericolosa. Ora la sezione pericolosa trovasi nel punto I; cercando adunque il valore del momento inflettente per tale sezione, avremo:

$$\mu'' = \frac{P'''}{a} \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{4} a - \frac{3}{16} P''' \cdot \frac{1}{2} a;$$

ossia:

$$\mu'' = \frac{1}{32} P''' a.$$

Inoltre abbiamo che:

$$T'' = -Q.$$

Sostituendo dunque nella espressione (α) tali valori, e chiamando Ω_6 la superficie della sezione retta, u''_6 ed I'_6 i valori di u'' ed I pel nostro caso, otteniamo l'equazione:

$$Q_{2m} = \frac{1}{32} \frac{P''' a u''_6}{I'_6} + \frac{Q}{\Omega_6};$$

e quindi dall'equazione:

$$\frac{1}{32} \frac{P''' a u''_6}{I'_6} + \frac{Q}{\Omega_6} = n'' R''$$

ricaveremo la dimensione incognita del solido.

IV.

Rimangono ora da calcolarsi le dimensioni della catena e dei puntoni.

Cominciando dalla catena sia:

T^{IV} la tensione sopportata dalla catena nel tratto DA, e T^{V}

quella sopportata dal tratto DF. Il sottopuntone GD risente una pressione verticale che dirò Z, e sia Z' la pressione verticale che il puntone VA produce in A. Si osservi che Z non è altro che la componente verticale di Q', più il peso del sottopuntone stesso, ossia:

$$Z = P^{IV} + Q' \, sen \, \beta \qquad (\beta)$$

È evidente inoltre che:

$$Z + Z' + \frac{7}{128} P = p\,a + \frac{1}{2}(P + P' + 2P'' + P''' + 2P^{V}). \quad (\gamma)$$

Da queste due equazioni (β) e (γ) si possono ricavare i valori di Z e di Z'.

Per trovare T^{IV} osservo che l'estremità A (fig. IV^a) è sollecitata dalla forza T^{IV} e dalla forza verticale Z diretta dall'alto al basso. Scompongo ciascuna di queste forze in due, di cui una normale all'asse del puntone. La Z ammetterà in questa direzione la componente $Z \cos \alpha$, e la T^{IV} avrà per componente $T^{IV} sen \, \alpha$. Ora il puntone produce sulla catena una pressione diretta normalmente all'asse del puntone medesimo, e che trovammo essere:

$$\frac{3}{16} p\,a \cos \alpha\,;$$

dovremo dunque avere per l'equilibrio:

$$Z \cos \alpha - T^{IV} sen \, \alpha = \frac{3}{16}\, p\,a \cos \alpha\,.$$

Trovato per mezzo di questa equazione il valore di T^{IV}, si ottiene facilmente quello di T^{V} dalla espressione:

$$T^{V} = T^{IV} + Q' \cos \beta$$

in cui il secondo membro è composto di termini già noti.

Cerchiamo ora la tensione e la pressione sopportata dalla fibra maggiormente allungata e da quella maggiormente compressa nella sezione pericolosa, e perciò osservo, che le sezioni pericolose si trovano nei punti d'appoggio intermedii, quindi essendo E ed F simmetricamente disposti rispetto al punto di mezzo della catena, avremo le sezioni in E ed in F ugualmente pericolose.

Consideriamone una, e sia la F. Applicando le formole date dalla teoria a questo caso, avremo:

$$\mu' = \mu'' = \frac{P}{2a}\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{4}a + \frac{7}{128}P\frac{1}{2}a$$

ed:

$$T' = T''' = T^{v}.$$

Per conseguenza la tensione massima sopportata dalla fibbra maggiormente allungata è espressa da:

$$Q_{1m} = \frac{\mu' u'_9}{I_9} + \frac{T'}{\Omega_9}.$$

e la pressione massima sopportata dalla fibra maggiormente compressa è data da:

$$Q_{2m} = \frac{\mu' \ u'_9}{I_9} - \frac{T'}{\Omega_9}.$$

Quindi avremo due equazioni di stabilità, ossia:

$$\frac{\mu' u'_9}{I'_9} + \frac{T'}{\Omega_9} = n' R'; \quad \text{e} \quad \frac{\mu' u'_9}{I'_9} - \frac{T'}{\Omega_9} = n'' R''.$$

Da queste si ricavano due valori di Ω_9; si ritiene il maggiore, e sarà quello da adottarsi per la determinazione della dimensione incognita della sezion retta da assegnarsi alla catena, affinchè essa trovisi in buone condizioni di stabilità.

Veniamo ora ad occuparci del puntone. Sia Q la reazione del monaco contro il puntone; essa è una forza orizzontale, e per determinarla stabiliremo la condizione, che la somma algebrica dei momenti di tutte le forze applicate da V in A sia uguale a zero. Avremo:

$$Q\,a\,tang.\,\alpha - \frac{1}{2}T'''\,a + \frac{5}{8}p\,a\cos\alpha\frac{1}{2}\frac{a}{\cos\alpha} - p\,a\frac{1}{2}a = 0.$$

Da questa equazione possiamo ricavare la Q, che è la sola incognita.

Cercheremo ora la pressione massima riferita all'unità di superficie, che ha luogo nella sezione pericolosa. Tale sezione sappiamo che corrisponde al punto G, essendo il puntone un solido collocato su tre appoggi equidistanti. Avremo pertanto le due espressioni:

$$\mu'' = -Q\frac{1}{2}a\,tang\,\alpha + \frac{1}{2}T'''\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}p\,a\frac{1}{4}p\,a$$

$$T'' = -\left(Q\cos\alpha + \frac{1}{2}T'''\,sen\,\alpha + \frac{1}{2}p\,a\,sen\,\alpha\right).$$

La pressione sopportata dalla fibra maggiormente compressa sarà dunque:

$$Q_{2m} = \frac{\mu''\,u''_{10}}{I'_{10}} - \frac{T''}{\Omega_{10}};$$

e l'equazione di stabilità è:

$$\frac{\mu''\,u''_{10}}{I'_{10}} - \frac{T''}{\Omega_{10}} = n''\,R''$$

colla quale si determina la sezione retta da assegnarsi ai puntoni, affinchè offrano le condizioni richieste per la stabilità.

Avviene talvolta, che il sottopuntone si appoggi per tutta la sua lunghezza contro il puntone; in tal caso stanno ancora tutte queste formole; si dovrà solo avvertire di introdurvi la condizione:

$$\beta = \alpha.$$

CESARE BAGNOLI.

TESI LIBERE

MECCANICA APPLICATA.

Teorema di Torricelli.

COSTRUZIONI.

Determinazione analitica della curva elastica secondo cui si dispone l'asse di un solido appoggiato od incastrato agli estremi e caricato uniformemente di peso sulla sua proiezione orizzon tale.

MACCHINE A VAPORE.

Equazione del movimento di un gaz per lunghi tubi.

GEOMETRIA PRATICA.

Riduzione di un angolo al centro di stazione.

Fig. I

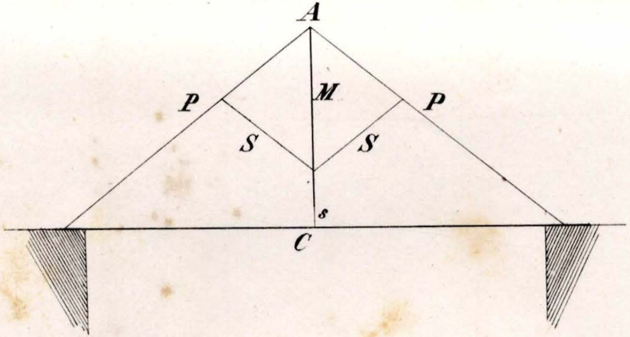


Fig. II

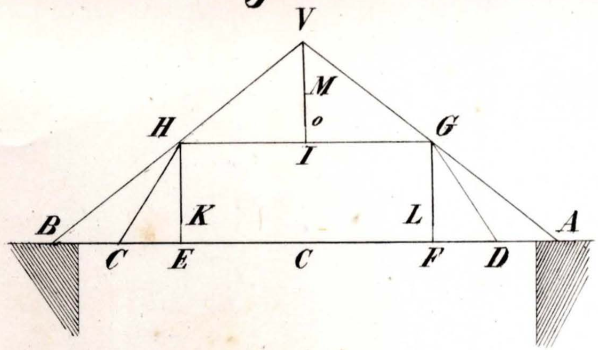


Fig. III.

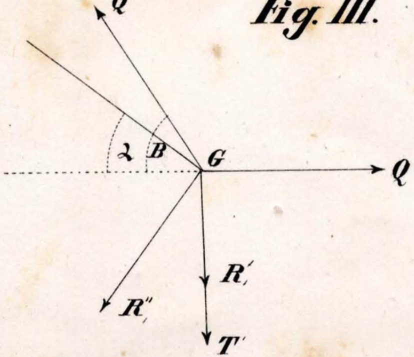
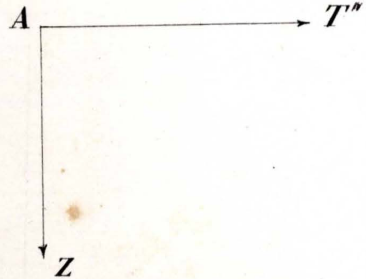


Fig. IV



Lit. Virano, Torino.

Bagnoli Cesare