All'ottimo amico e collega Cerruti,
Ricordo dell'amico Marzucchi.

SISTEMA ELICOIDALE

applicato alla costruzione delle volte

PER PONTI OBBLIQUI

DISSERTAZIONE E TESI

PRESENTATE

ALLA COMMISSIONE ESAMINATRICE

della Regia Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri in Torino

DA

MARZUCCHI FRANCESCO

da Rivalta (Reggio Emilia)

PER OTTENERE IL DIPLOMA

DI

INGEGNERE LAUREATO

TORINO 1869.

Tipografia Fodratti, Via Ospedale, 21.

AI MIEI OTTIMI GENITORI

TENUE PEGNO D'AFFETTO E RICONOSCENZA

I.

Occorre frequentemente nei lavori di Costruzioni di dover attraversare obbliquamente, dei corsi d'acqua, delle strade o delle vallate nei quali è impossibile di cangiare la direzione primitiva del terreno. Molte sono le cause che possono costringere l'Ingegnere costruttore ad attenersi a questi passaggi: fra esse, e particolarmente per le strade ferrate, bisogna annoverare la necessità di conservare rettilineo od almeno di poca curvatura l'andamento della strada, la pendenza sempre assai limitata della stessa, il sistema di decorazione che conviene adottare.

Ammessa adunque la necessità di questi passaggi, presentasi subito il problema che risguarda la loro esecuzione: La costruzione di un ponte in ferro od in legno a travate rettilinee o quella di un ponte obbliquo ad archi retti può nella maggior parte dei casi bastare alla soluzione del problema. Ma la durata dei primi, e la loro stabilità sono sempre assai inferiori alla durata e stabilità dei ponti in pietra od in muratura: d'altronde ben sovente si possono avere le pietre ed i laterizii disponibili ad un prezzo minimo, mentre il ferro ed il legname converrebbe procurarli all'esterno con gravi spese di compra e di trasporto. La costruzione poi dei ponti obbliqui ad archi retti mentre teoricamente risolve esattamente il problema lascia molto a desiderare nella sua applicazione, non ripartendosi, la pressione su essi esercitata, così uniformemente su tutta l'estensione del volto come negli altri sistemi, ed essendo sempre imperfetto il collegamento degli anelli. Sarà dunque in molti casi conveniente e spesso necessario il ricorrere alle volte oblique.

Anticamente non si costruivano volte oblique che nell' interno degli abitati e la scelta del sistema d'apparecchio non dava mai alcun pensiero poichè le piccole dimensioni di quelle volte e la poca pressione a cui venivano assoggettate non permettevano che si rendessero manifesti gl'inconvenienti del cattivo sistema d'apparecchio che si fosse adottato; la cosa però è assai diversa per le grosse volte di ponte, dove le dimensioni della volta sono grandi e la pressione è sempre molto forte.

Nella costruzione dei ponti retti la divisione della volta in filari si fa per mezzo di piani meridiani alla superficie intradossale e quella dei filari in conci per mezzo di sezioni rette della superficie stessa. Ora vediamo se questo stesso sistema d'apparecchio si possa adottare per le volte oblique. Suppongasi che il parallelogrammo $ABCD$ (*fig.* 1ª) rappresenti una superficie di giunto contenuta in un piano meridiano della volta obbliqua e che $abcd$ ne sia la sua projezione orizzontale; su questa superficie si eserciterà una certa pressione proveniente dal peso dei cunei sovrastanti; si scomponga questa pressione in due forze una N normale alla superficie di giunto e l'altra T tangente alla stessa superficie, la componente N sarà contenuta in un piano normale alla superficie d'intrados e si projetterà orizzontalmente nella direzione $O\,N'$ perpendicolare alla $a\,b$; eserciterà quindi una spinta obbliqua ai piedritti e tenderà a produrne il rovesciamento; se inoltre si considera l'intera superficie del volto, per questa spinta obbliqua vi saranno due parti triangolari AEG, CHF (*fig.* 2ª) nelle quali i conci tenderanno ad escire dalla loro posizione. Osservasi ancora che costruendo la volta obbliqua collo stesso sistema d'apparecchio delle volte rette si avranno nei diversi cunei degli angoli diedri ottusi e degli altri acuti e questi manifestamente non potranno presentare la stessa resistenza di quelli, e se l'acutezza e molto forte potrà anche avvenire il loro schiacciamento.

Onde per stabilire il sistema d'apparecchio delle volte oblique converrà partire dai due principii: che le diverse superficie di separazione dei cunei risultino normali ai piani di testa onde la pressione venga ad esercitarsi interamente sui piedritti e che i cunei costituenti la volta presentano degli angoli diedri retti o prossimamente tali. I diversi sistemi d'apparecchio stabiliti dietro questi principii e di uso più frequente nella pratica si possono ridurre ai seguenti:

1° Apparecchio ortogonale parallelo;

2° Apparecchio ortogonale convergente;

3° Apparecchio cicloidale o francese del sig. Hachette;

4° Apparecchio elicoidale od Inglese.

Ai quali converrebbe ancora aggiungere quello dei ponti a torre di cui si ha un bellissimo esempio sulla Scrivia, lungo la ferrovia da Alessandria a Genova.

Fra questi varii sistemi, il più usato è certamente l'elicoidale od inglese, come quello che insieme a molta eleganza presenta la maggior stabilità e permette inoltre l'uso di qualunque specie di materiali e specialmente dei laterizii. Si chiama sistema elicoidale perchè le superficie di separazione dei conci sono elicoidi sghembi a piano direttore; inglese perchè ci venne per la prima volta dall'Inghilterra dove maggiormente trovasi applicato.

Dirò brevemente di questo sistema ricordando però prima alcune definizioni.

II.

Supponiamo di avere una superficie cilindrica circolare sulla quale sia descritta una linea tale che le sue ordinate contate sulle generatrici della superficie, siano proporzionali alle ascisse contate su una stessa sezione retta della superficie, partendo sempre da un medesimo punto che è l'incontro di quella linea colla sezione retta; quella linea chiamasi elica ed il punto da cui si contano le ascisse è l'origine dell'elica. Manifestamente poi l'elica può avvolgersi più volte sulla superficie cilindrica e se in questo caso noi consideriamo due punti successivi collocati sopra una stessa generatrice, la loro distanza è una quantità costante e costituisce il passo dell'elica.

Se noi sviluppiamo la superficie cilindrica in un piano, l'elica resterà sviluppata in una retta, la tangente all'elica in un punto qualunque di essa si confonderà collo sviluppo dell'elica e la lunghezza di una porzione d'elica compresa fra due punti qualunque, corrisponderà all' ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti rispettivamente le differenze fra le ascisse e le ordinate di quei due punti.

Se si hanno due superficie cilindriche concentriche sulle quali sono descritte due eliche di egual passo e se si tagliano quelle superficie secondo due piani meridiani le porzioni d'elica intercette fra quei due piani saranno projettate su uno qualunque dei medesimi, in due archi di egual ampiezza.

Per ultimo chiamasi elicoide sghemba a piano direttore quella superficie generata dal movimento di una retta che percorre con un suo punto un'elica descritta su una superficie cilindrica mantenendosi sempre parallela ad un piano, che è il piano direttore.

III.

Suppongasi ora di avere un' area parallelogrammica $A\ B\ C\ D$ (*fig.* 3) da coprirsi con una volta a botte obbliqua la cui sezione retta sia una corona circolare. Come dati del problema si conosceranno: l'angolo FDC che dicesi angolo d'obbliquità, la corda CE e la monta m della sezione retta della superficie d' intrados, lo spessore della volta e l'altezza $P\ Q$ del parallelogrammo. Chiamo:

α l'angolo di obbliquità;

$2\ c$ la corda della sezione retta;

m la monta della superficie d'intrados;

e lo spessore uniforme della volta;

h l'altezza del parallelogrammo;

Per eseguire lo studio completo del progetto di questa volta converrà fare diverse costruzioni geometriche di cui la prima è la projezione orrizontale e verticale non che lo sviluppo della sua superficie d'intrados. Assumo perciò come piani orizzontale e verticale di projezione, il piano d'imposta della volta ed un altro qualunque normale alle generatrici. Allora la projezione verticale della superficie d'intrados diventa un arco circolare $A'\ D'\ B'$ di corda $A'\ B' = 2\ c$ e di monta $D'\ E' = m$; in quanto alla projezione orrizontale essa è lo stesso parallelogrammo $A\ B\ D\ C$, i cui lati hanno i valori:

$$A\ D = \frac{h}{\cos \alpha} \qquad D\ C = \frac{2\ c}{\cos \alpha}$$

il raggio r della projezione verticale è espresso per

$$r = \frac{1}{2}\left(m + \frac{c^2}{m}\right)$$

Avuto il raggio r sarà facile conoscere l' angolo al centro $A'\,O\,B' = 2\,\beta$. Si troverà

$$2\,\beta = 2 \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{c}{r - m}\right) \qquad l = 2\,\frac{\pi\, r}{180}\,\beta$$

Si sviluppi ora la superficie d'intrados nel piano orizzontale di projezione supponendo che essa ruoti attorno alla retta $B\,C$ trasportata parallelamente a se stessa in $B''\,C''$; allora tutte le generatrici riesciranno parallele a questa retta e l'ultima $A''\,D''$ che corrisponde alla $A\,D$ si troverà a distanza tale dalla $C''\,B''$ che risulti $C'''\,D'' = l$, le due curve di testa si svilupperanno nelle due sinussoidi $C''\,\delta''\,D''$, $B''\,\Delta''\,A''$ aventi per corde le due rette $C''\,D''$, $B''\,A''$, la generatrice superiore che si projetta verticalmente nel punto D' è quella che unisce i due punti Δ'' e δ'' d'incontro delle corde colle rispettive sinussoidi; per determinare poi un punto qualunque di queste curve basterà scegliere due punti corrispondenti sulle projezioni orrizontale e verticale delle curve di testa, poscia condurre dalla projezione orizzontale b una parallela alla $D\,D''$ e a partire dall'incontro di questa parallela colla $B''\,C'''$ portare una lunghezza $b'''\,b''$ uguale allo sviluppo dell'arco $B'\,b'$, il punto b'' è un punto della sinussoide.

Vediamo come si segneranno le linee di giunto longitudinali e trasversali sullo sviluppo della superficie d'intrados. Si è già detto come nel sistema elicoidale le superficie di giunto siano superficie elicoidali a piano direttore onde la loro intersecazione colla superficie d'intrados sarà sempre un' elica per cui nello sviluppo esse saranno rappresentate da linee rette. Prima di segnarne la loro direzione si incominci a dividere l'arco $A'\,D'\,B'$ in un certo numero dispari di parti eguali in modo che la grandezza di una di queste parti sia presso a poco eguale a quella che si vuol assegnare ai conci, indi si portano queste parti sullo sviluppo $C'''\,D''$ e dai punti di divisione 1, 2, 3, ... si conducano tante perpendicolari alla $D D''$ le quali incontreranno le corde delle sinussoidi. Dal punto A'' si guidi ora la perpendicolare $A'' h''$ alla corda $C'' D''$: generalmente questa perpendicolare non passerà per uno dei punti in cui è restata divisa la corda, dalle perpendicolari superiormente condotte; si segni ancora la retta che dal punto A'' va a passare per quella divisione della corda che è più vicina al piede h'' della perpendicolare. Questa retta si assume come linea di giunto longitudinale a cui tutte le altre debbono essere parallele: essa è la $A'' f''$ per segnare le altre linee di giunto basterà dai punti di divisione di una delle corde condurre tante rette parallele alla $f' A''$. Osserviamo che fra il punto f'' e l'altro D'' vi cadano dei punti di divisione della corda onde le linee di giunto longitudinale che partono da essi verranno ad incontrare la generatrice $D'' A''$ in tanti punti quanti sono quelli compresi fra f'' e D''. Da tutti questi punti si conducano tante parallele alle corde delle sinussoidi; esse segneranno la direzione delle linee di giunto trasversale.

Vediamo se questo sistema sia ammissibile nella pratica.

Si è già detto che le superficie di giunto devono esser normali ai piani di testa onde non avvenga la spinta al vuoto, di più che le superficie dei cunei devono tagliarsi sotto angoli retti e che questi cunei siano di facile costruzione; le due prime condizioni si verificano sempre con sufficiente approssimazione, discostandosi le linee di giunto longitudinale sempre di poco dalla perpendicolare alle corde delle sinussoidi e quelle di giunto trasversale essendo parallele a queste. Quanto alla costruzione dei cunei si vedrà in seguito come essa non presenti alcuna difficoltà.

Avuta la direzione delle linee di giunto longitudinale e trasversale bisognerà segnare le superficie dei diversi conci sullo sviluppo. Per questo siccome i letti di posa si fanno sempre secondo le superficie di giunto longitudinale, così nello sviluppo le linee di giunto longitudinale rappresenteranno anche le linee di separazione delle superficie d'intrados dei cunei. Le linee di separazione nel senso trasversale si segneranno alternate e parallele alle corde delle sinussoidi come lo mostra la figura ; le loro distanze riescono uguali per i conci compresi fra le due corone di testa ; vedremo in seguito come si fissano i diversi conci delle due corone. In quanto a riportare tutte queste linee sulla superficie d'intrados e a projettarle la cosa riescirà facile: esse diventano tante porzioni d'elica che la Geometria descrittiva insegna a rappresentare.

La soluzione grafica del problema che mi sono proposto, si può ritenere come ottenuta per ciò che risguarda la superficie d'intrados. Converrà però aggiungervi alcuni risultati analitici onde essere sicuri della riescita.

Se $2n+1$ è il numero di divisioni segnati sull'arco $A' D' B$, la lunghezza di una di queste divisioni è:

$$\frac{2\pi r}{180(2n+1)}\beta$$

Il cateto $F C = C''' C'$ vale

$$2c \operatorname{tang} \alpha$$

L'angolo $C''' D'' C'' = \gamma'$ che le corde delle sinussoidi o le linee di giunte trasversali fanno collo sviluppo di una sezione retta qualunque della superficie d'intrados, è espresso in funzione della tangente da

$$\operatorname{tang} \gamma' = \frac{2c}{l} \operatorname{tang} \alpha$$

e allora la corda della sinussoide è misurata da

$$\frac{l}{\cos \gamma'}$$

Importa ancora conoscere l'angolo che la perpendicolare $A'' h''$ fa colla generatrice $A'' D''$, non che l'altro che le linee di giunto longitudinale fanno colla stessa generatrice. Il primo è manifestamente eguale all'angolo γ', ed il secondo sarà facile calcolarlo appartenendo ad un triangolo di cui si conoscono due lati, e l'angolo compreso lo indico con γ; la differenza $\gamma' - \gamma$ è l'angolo di deviazione delle linee di giunto longitudinale dalle perpendicolari alla sinussoide.

Cerchiamo le intersecazioni delle linee di giunto longitudinale coi piani di testa. Queste intersecazioni sono determinate nello sviluppo dall'incontro delle linee di giunto longitudinale colle sinussoidi. Converrà adunque cercare l'equazione di una qualunque di quelle linee e di una sinussoide. Consideriamo la linea di giunto $m\,n$ e la sinussoide $C'' D''$, gli assi di riferimento siano le due rette $B''\,C'''$ e $C'''\,D''$. Se x ed y sono le coordinate correnti della $m\,n$ ed x' ed y' quelle del punto p noto di posizione: l'equazione di quella retta è

$$x - x' = (y - y') \operatorname{tang} \gamma$$

In quanto alla sinussoide consideriamo un punto qualunque di essa che ha le sue projezioni in ν e ν'; siano X ed Y le sue coordinate e sia φ l'angolo che il raggio condotto per la projezione verticale ν' fa colla $O\,D'$: la lunghezza dell'arco $D'\,\nu'$ è

$$\frac{\varphi}{180} \pi r$$

onde si avrà subito:

$$X = \frac{l}{2} - \frac{\varphi}{180} \pi r$$

e sarà facile riconoscere che:

$$Y = (c + r \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{tang} \alpha$$

e se fra queste eliminiamo φ avremo l'equazione

$$Y = r \tang \alpha \left\{ \frac{c}{r} + \operatorname{sen} \frac{180}{\pi r} \left(\frac{l}{2} - X \right) \right\}$$

Se ora si sostituisce il valore di Y dato da questa equazione in luogo di y nella equazione della retta mn e si risolve l'equazione risultante rispetto ad x si avrà nell'espressione di x il valore dell'ascissa del punto d'incontro della mn colla sinussoide il quale valore si potrà poi esprimere in funzione dell'angolo φ per mezzo della relazione superiormente scritta

$$X = \frac{l}{2} - \frac{\varphi}{180} \pi r$$

e così riportarlo sull'arco $A'\, D'\, B'$. Allo stesso modo si determineranno gli altri punti d'incontro.

IV.

Passo ora alla superficie d'estrados.

Suppongasi che la superficie d'intrados che già si conosce abbia la projezione orizzontale nel parallelogrammo $A\ B\ C\ D$ e la projezione verticale nell'arco $A'\ E'\ B'$ (*fig.4ª*); essendo e lo spessore della volta la superficie d'estrados resterà projettata orrizontalmente in $I\,K\,P\,Q$ e verticalmente nell'arco $I'\ L'\ K'$ di ampiezza 2β e di raggio $r + e$ e quest'arco corrisponderà anche ad una sezione retta della superficie.

Analogamente a quanto si è fatto per la superficie d'intrados si potrà ora determinare la corda $I'\,K'$, la monta $F'L'$, lo sviluppo dell'arco $I'L'K'$ e quello $K''\,P''\,Q''\,I''$ della superficie d'estrados; si conoscerà la lunghezza di ognuna delle due corde $K''I''$ e $P''Q''$ e la retta $N''\nu''$ corrisponderà alla generatrice superiore proiettata in L'. Ecco ora come si procede per segnare le linee di giunto longitudinali e trasversali sullo sviluppo della superficie. Ricordiamo che le superficie di giunto longitudinali e trasversali sono elicoidi sghembe a piano direttore, onde le loro intersecazioni colla superficie d'estrados saranno ancora delle eliche che quindi si svilupperanno in linee rette; si cerchi la direzione di queste linee. Perciò sullo sviluppo della superficie d'intrados abbiamo segnato la linea di giunto $A''f''$ (*fig.* 3ª) dal punto A'', si conduca la perpendicolare $A''\alpha''$ alla generatrice mediana $\delta''\Delta''$ e si segni il punto d'incontro V' di questa generatrice col prolungamento della $A''f''$. Adesso dal punto $c_{,}''$ che corrisponde all'incontro della generatrice (Dc', $A'I'$) (*fig.* 4ª) della superficie elicoidale passante pel punto (D, A') colla linea d'imposta della superficie d'estrados si conduca la perpendicolare $c_{,}''\beta''$ alla generatrice mediana $\nu''N''$ e sul prolungamento di questa generatrice si prenda la lunghezza $\beta''V'' = \alpha''V'$, e si conduca la $c_{,}''V''$ essa darà la direzione delle linee di giunto longitudinale sullo sviluppo della superficie d'estrados. Infatti basta osservare che le eliche delle due superficie hanno tutte un egual passo e che le due sviluppate nelle rette $A''V'$ e $V''c_{,}''$ sono corrispondenti e di eguale ampiezza.

Per segnare adesso lo sviluppo delle altre linee di giunto basta dai punti e'', a'', b''..... $a_{,}''$ $b_{,}''$..... corrispondenti alle estremità e, a, b,..... $a_{,}b_{,}$..... delle linee di giunto giacenti sui piani d'imposta, condurre delle parallele alla $c_{,}''V''$ sino all'incontro delle sinussoidi e dividere poscia la porzione di corda compresa fra $\lambda_{,}''$ e $\gamma_{,}''$ in tante parti quante sono quelle segnate sulla corrispondente porzione di corda $\cancel{\lambda''}\,\cancel{\gamma''}$ $d''\,f''$ dello sviluppo della superficie d'intrados dai quali punti si condurranno ancora altre parallele alla stessa $c_{,}''V''$ comprese fra le due sinussoidi; le linee di giunto trasversale.

manifestamente avranno la direzione nello sviluppo delle rette a'' $a_{,}''$, b'' $b_{,}''$...... e saranno alternate come nella superficie d'intrados. Coi metodi della Geometria descrittiva riescirà facile l'ottenere le proiezioni orizzontale e verticale tanto delle eliche longitudinali che trasversali. E dall'insieme dei due sviluppi delle superficie di intrados e d'estrados si riconoscerà poi qual sia la miglior disposizione da adottarsi per le dimensioni dei cunei delle due corone di testa che riescirebbe assai difficile il poterli stabilire preventivamente nella sola superficie d'intrados, poichè i cunei troppo corti o troppo lunghi su quella superficie lo sarebbero ancora di più sulla superficie d'estrados.

V.

Se si taglia una superficie elicoidale con un piano normale all'asse dell'elica direttrice, la sezione è una linea retta, ma se il piano è obbliquo allora l'intersezione diventa una curva; quindi le linee di giunto sui piani di testa sono linee curve. Importa di determinare l'andamento di queste curve.

Sia $A' C' B'$ la sezione retta della superficie d'intrados, $A B$ la proiezione orizzontale di un piano di testa, $A E$ e $B F$ le proiezioni orizzontali delle linee d'imposta e $F''' B'' A'' E''$ lo sviluppo della superficie (*fig.* 5ª). Suppongasi che un punto di divisione dei cunei sia in M'' sulla sinussoide $B'' M'' A''$ esso avrà le sue proiezioni in M ed M'. Per avere un'idea della curva che sul piano di testa passerà pel punto (M, M') cerchiamo la sua tangente in quel punto. Essa è l'intersecazione del piano tangente all'elicoide nel punto M, col piano di testa. Il piano tangente all'elicoide è determinato dalle due tangenti in (M, M') a due curve qualunque segnate sull'elicoide stesso. Per semplicità di costruzione suppongo che le due curve siano una, l'elica longitudinale passante per (M, M') e l'altra la generatrice rettilinea della superficie elicoidale nello stesso punto. Allora la tangente all'elica sullo sviluppo della superficie d'intrados si confonderà collo sviluppo $M c''$ dell'elica e la tangente alla generatrice della superficie elicoidale sarà la generatrice stessa proiettata verticalmente lungo il raggio $O M'$ ed orizzontalmente nella retta $M M''$ parallela alla fondamentale $X Y$ passante per l'estremo $C C'$ della generatrice mediana della superficie d'intrados: in quanto alle proiezioni della tangente all'elica importa solo conoscere quella verticale la quale cade in $M' T$ tangente all'arco circolare nel punto (M, M') giacchè è contenuta nel piano tangente alla superficie d'intrados passante per la generatrice $M'' d''$. La generatrice $d'' M''$ è perpendicolare alla fondamentale $X Y$ e l'elica sviluppata $M'' c''$ si può ritenere perpendicolare alla corda $B'' A''$; si prolunghino queste due rette sino al loro incontro colla fondamentale $X Y$ nei punti b'' ed a''; b'' sarà anche il punto d'incontro della tangente all'elica col piano verticale di proiezione.

Si supponga adesso riportato lo sviluppo sulla superficie d'intrados facendolo ruotare attorno alla generatrice $B'' F''$ trasportata in $B F$; la generatrice $a'' d''$ andrà a proiettarsi verticalmente nel punto M'; il punto b'', considerato come appartenente alla tangente all'elica, nella rotazione descriverà un arco di raggio $a'' b''$ attorno al punto a'' e resterà proiettato in b' sulla proiezione verticale della tangente essendo la lunghezza $M' b' = a'' b''$ e di più sarà anche la traccia della tangente col piano verticale. Ora il piano tangente all'elicoide passa per la retta $(M M'', M' O)$ parallela al piano verticale di proiezione onde la traccia verticale $b' G$ di quel piano oltre a passare per la traccia b' dovrà essere parallela alla proiezione $M' O$. Quanto al piano di testa esso ha le sue traccie in $C B$ e $C C'$ e quindi la tangente che si cerca ha la sua proiezione verticale in $G M'$.

Se ora si ricorda che

r è il raggio della sezione retta della superficie d'intrados,

α l'angolo d'obbliquità,

γ l'angolo che le generatrici fanno colle linee di giunto longitudinale nello sviluppo;

E se si chiama:

φ l'angolo che il raggio $M'O$ fa col raggio verticale $C'\,O$,

ε la distanza del punto G dal centro O,

si trova:

$$\varepsilon = \frac{O\,I}{\mathrm{sen}\,\varphi}$$

e poichè

$$O\,I = r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\gamma$$

così

$$\varepsilon = r\,\mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\gamma$$

Questo valore è indipendente dall'angolo φ, onde qualunque sia il punto che si prende sull'arco $A'\,C'\,B'$, la tangente al giunto di testa in quel punto dovrà avere la sua proiezione verticale passante pel punto G. Questo punto prende il nome di *fuoco* e la distanza $O\,G$ dicesi *distanza focale* od eccentricità.

Ecco ora come si potranno tracciare le linee di giunto sui piani di testa (*fig.* 6). Sia $A'\,C'\,D'$ la proiezione verticale della corona di testa; su essa sono segnate sull'arco d'intrados i punti 1, 2, 3, 4,.... ed i corrispondenti 1', 2', 3', ... in quella d'estrados; dal centro O e al disotto di esso si porti sulla $C'\,O$ la lunghezza $O\,G = \varepsilon$, indi da G si conducono delle rette ai punti di divisione 1, 2, 3, 4,.... si facciano passare delle linee la cui concavità sia rivolta verso la sommità della corona e che siano a contatto colle rette $G1$, $G2$, $G3$,... nei punti 1, 2, 3. .... Quelle linee si potranno ritenere come le proiezioni verticali delle intersecazioni delle superficie di giunto col piano di testa.

Che se si volessero segnare più esattamente allora converrebbe determinare altre distanze focali corrispondenti a diversi altri archi circolari concentrici ai due delle superficie d'intrados e d'estrados e fra quelli compresi. Siano

r', r'', r''',..... i raggi di questi archi;

$\gamma', \gamma'', \gamma'''$,..... gli angoli che le tangenti alle eliche longitudinali (risultanti dall'intersecazione delle superficie di giunto colle superficie cilindriche proiettate in quegli archi) fanno colle rispettive generatrici;

$\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon'''$,..... le distanze focali corrispondenti agli archi di raggio r', r'', r''',.....

p il passo costante di tutte le eliche di queste diverse superficie.

Si avrà che, per le diverse superficie compresa anche quella di intrados, le distanze focali sono espresse da:

$$\varepsilon = r \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \gamma$$

$$\varepsilon' = r' \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \gamma'$$

$$\varepsilon'' = r'' \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \gamma''$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e se si fanno i rapporti di queste quantità allora

$$\frac{\varepsilon}{r \operatorname{tang} \gamma} = \frac{\varepsilon'}{r' \operatorname{tang} \gamma'} = \frac{\varepsilon''}{r'' \operatorname{tang} \gamma''} = \ldots\ldots$$

ed essendo in generale

$$r \operatorname{tang} \gamma = \frac{2 \pi r^2}{p}$$

sarà anche

$$\frac{p\, \varepsilon}{2 \pi r^2} = \frac{p\, \varepsilon'}{2 \pi r'^2} = \frac{p\, \varepsilon''}{2 \pi r''^2} = \ldots\ldots$$

e per ultimo riducendo ed invertendo

$$\frac{r^2}{\varepsilon} = \frac{r'^2}{\varepsilon'} = \frac{r''^2}{\varepsilon''} = \ldots = \text{cost.}$$

e poichè si conoscono i raggi r, r', r'', r'''...... e l'eccentricità ε così si sapranno determinare le altre eccentricità ε', ε'', ε'''......

Queste eccentricità si possono anche determinare graficamente, infatti il rapporto $\frac{r^2}{\varepsilon}$ rappresenta una terza proporzionale dopo r ed ε; onde se condotte due rette qualunque OZ ed OS fra loro perpendicolari si prendono su esse due lunghezze OR ed OG che abbiano un certo rapporto ρ col raggio r e coll' eccentricità ε e poi si conducono le due rette RG ed RZ fra loro perpendicolari, la lunghezza OZ compresa fra il piede O della perpendicolare e l'estremità Z della RZ, vale l'eccentricità $\frac{r^2}{\varepsilon}$ moltiplicata pel rapporto ρ. Se quindi si vuole ad esempio determinare l'eccentricità della superficie d'estrados, si prenderà su OS la OR' nel rapporto ρ col raggio di quella superficie e condotta poi la ZR' e la sua perpendicolare $R'G'$ si avrà nella lunghezza OG' moltiplicata per ρ la distanza focale della superficie d'estrados.

Una volta determinati i fuochi G, G', G'' . . . . . G^e delle superficie d'intrados e d'estrados non che delle altre superficie parallele a quelle, per descrivere le curve di testa si procede nel seguente modo: la curva debba passare pel punto 1 della superficie d'intrados: dal fuoco G della prima superficie si conduca la $G\,1$ sino all'incontro del secondo arco che ha il suo fuoco in G' e poi da G' si guidi la $G'\,a$ passante per quel punto d'incontro e così di seguito sino alla superficie d'estrados la linea di giunto sarà formata dall'insieme di quei latercoli $1\,a$, $a\,b$, $b\,c$ . . . . Allo stesso modo si determinerà qualunque altra curva. Per la maggior parte dei casi della pratica è però sufficiente il primo metodo.

VI.

Ora è necessario di avere uno dei piani di testa in grandezza naturale onde conoscere la forma vera delle linee di giunto in esso situate, (*fig*. 7). Si supponga che uno di questi piani colle sue linee di giunto sia projettato ~~orizzontalmente~~ verticalmente in C' D' E' F': essendo le linee di giunto projettate nelle $1'$ $1''$, $2'$ $2''$, $3'$ $3''$, . . . Per avere questo piano in grandezza naturale basterà farlo rotare attorno alla verticale projettata in (C, O C') sino a che esso siasi disposto in un piano parallelo a quello verticale di projezione; allora tutti i punti di questo piano descriveranno degli archi di circolo paralleli al piano orizzontale ed aventi il loro centro sull'asse del movimento, quindi un punto qualunque di projezione (M, M') dopo la rotazione passerà in (m, m') cioè sarà projettato orizzontalmente sulla fondamentale X Y ad una distanza da C eguale a C M e verticalmente sulla parallela Q' M' alla fondamentale, essendo ancora $Q'M' = C M$. Con questo procedimento si può determinare qualunque punto degli archi di testa e delle linee di giunto. Però riguardo ai primi, gioverà osservare che essi appartengono a due elissi i cui semi assi sono: per la superficie d'intrados,

$$a = \frac{2\,r}{\cos\alpha} \qquad b = r$$

e per quella d'estrados,

$$a' = \frac{2(r+e)}{\cos\alpha} \qquad b' = r + e$$

che i semi assi minori sono diretti secondo la verticale O C' e i due maggiori parallelamente alla X Y.

Importa di determinare l'angolo, che la tangente all'intersecazione della superficie di giunto longitudinale sul piano di testa fa colla tangente all' elica direttrice di questa stessa superficie sull'intrados in un medesimo punto (M, M') (*fig.* 5). Si conosce già la projezione verticale di questo angolo; essa è l'angolo formato dalla $M'T$ col prolungamento della GM'. Per averne la sua grandezza bisogna ribaltare il piano determinato dalle due tangenti su uno dei piani di projezione; qui converrà farlo sul piano verticale poichè è solo su questo che noi abbiamo la traccia del piano tangente: prendendo adunque quella traccia per cerniera, si avrà che il vertice M' dell'angolo che si cerca passerà nel ribattimento sulla perpendicolare $M'T$ condotta da M' alla traccia verticale del piano e si troverà ad una distanza $b'\mu$ dal punto b' eguale a $M''b''$. La proiezione GM' nel ribattimento prenderà la posizione $G\mu$ e la tangente all'elica si troverà ancora nella direzione $\mu\tau$ perchè è perpendicolare all'asse di rotazione. Per cui l'angolo cercato sarà l'angolo $\tau\mu\rho$. Quest'angolo si può determinare anche con un metodo grafico assai semplice. Si conduca dal punto μ una parallela al raggio OM' e dal suo punto d'incontro H colla verticale OC' si conduca la perpendicolare HL allo stesso raggio: si avrà:

$$O H = \frac{H L}{\text{sen}\,\varphi} = \frac{b'\mu - b' M'}{\text{sen}\,\varphi}$$

Ma

$$b'(\mu = b'' M'' = \frac{r \tang \alpha}{\cos \gamma} \text{sen}\,\varphi$$

e si è già trovato

$$b' M' = r \tang \alpha \tang \gamma \,\text{sen}\,\varphi$$

Onde sostituendo e riducendo

$$O H = r \tang \alpha (1 - \text{sen}\,\gamma) \frac{1}{\cos \gamma}$$

In quest'espressione non entra più l'angolo φ quindi essa sussiste qualunque sia il valore di quest'angolo, onde la lunghezza OH che indico con q è una quantità costante e servirà assai facilmente a calcolare i diversi angoli suacennati delle tangenti. Si voglia trovare l'angolo che la tangente all'elica fa colla tangente alla curva di giunto nel punto (M, M'): non si ha a far altro che prendere il valore di q dato dalla formola superiore, trasportarlo da O in H, poi da M' condurre la tangente $M'\tau$ all'arco circolare $A'C'B'$ e da H la perpendicolare $H\mu$ a questa tangente: l'angolo che si cerca è quello di formato dalla $M'\tau$ col prolungamento $\mu\rho$ della $G\mu$.

Determinazione grafica dei punti G ed H. Ritenendo sempre le denominazioni più sopra indicate, le due espressioni di OG e OH sono:

$$OG = r \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \gamma$$

$$OH = r \operatorname{tang} \alpha \,(1 - \operatorname{sen}\gamma)\, \frac{1}{\cos\gamma}$$

A partire dal punto C si prenda sulla CC'' la lunghezza $CF = r$ e dal punto F si conduca la perpendicolare FI alla stessa CC'' sino ad incontrare in I il prolungamento della projezione orizzontale CB del piano di testa; da I si conduca anche la IL in modo che l'angolo $LIF = \gamma$; la lunghezza LF rappresenta l'eccentricità e la IL la distanza GH. Infatti dai due triangoli IFC, IFL si ricava subito

$$FL = r \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \gamma$$

e quanto a GH, poichè

$$OH = r \operatorname{tang} \alpha \,\frac{1}{\cos\gamma} - r \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \gamma$$

sarà

$$G = OH + OG = \frac{r \operatorname{tang} \alpha}{\cos\gamma}$$

che è appunto il valore dell'ipotenusa IL.

VII.

Colle cose svolte sin qui, si può dire che siasi compiuto ciò che riguarda la teoria dell'apparecchio elicoidale: resta però ancora a parlare in modo più particolareggiato dei conci che costituiscono la volta e specialmente dei cuscinetti d'imposta, che così chiamansi quei conci che trovansi nei letti d'imposta della volta stessa.

Quanto ai conci compresi fra le due corone di testa, essi sono di assai facile costruzione poichè due delle loro faccie sono superficie cilindriche e le altre sono porzioni di elicoidi che si possono determinare per mezzo delle loro generatrici. Giova anche osservare, che se gli sviluppi delle faccie d'intrados di questi conci si sono presi tutti eguali fra loro, i conci riescono pure eguali.

La cosa non è di molto cambiata per ciò che riguarda i cunei delle due corone di testa: la differenza sta in questo principalmente, che ad una delle faccie elicoidali dei conci precedenti viene sostituita una faccia piana (una porzione del piano di testa) e che essi non risultano più uguali; la loro costruzione non è però, in alcun modo cambiata.

Si passi ora ai cuscinetti d'imposta. Siano $A\,B\,C\,D$ ed $A'\,B'$ (*fig.* 8ª) le due proiezioni della superficie d'intrados d'una volta a botte obbliqua e (BC, B'), $(EF, B_{,})$ quelle delle due linee d'imposta di uno dei suoi due piani di posa: si abbiano ancora due porzioni dei due sviluppi d'intrados e d'estrados, sulle quali saranno anche segnate le linee di giunto longitudinali e trasversali. Si assumano generalmente per sviluppo delle superficie d'intrados e di estrados dei cuscinetti, le parti corrispondenti segnate nella figura con un tratteggio.

Per avere un' idea più precisa di questi diversi cuscinetti bisogna determinarne la loro proiezione orizzontale; perciò considero un vertice qualunque a di uno dei triangoli rettilinei, sviluppi delle superficie d'intrados dei cuscinetti, e per esso conduco la perpendicolare $a\,b$ alla linea d'imposta; questa perpendicolare rappresenta lo sviluppo della sezione retta del cuscinetto; onde portando la $a\,b$ da B' in α, si avrà in questo punto la proiezione verticale del punto a, la generatrice che passa per a sarà proiettata verticalmente in α ed orizzontalmente in una retta la quale è perpendicolare alla fondamentale XY, ed il cui prolungamento passa per α; se dal punto a si conduce adesso una parallela alla fondamentale, il punto d'incontro $a_{,}$, di questa parallela colla proiezione orizzontale della generatrice passante per α, è la proiezione corrispondente di α: così i punti 1, 2, 3.... dell'intrados sviluppato si proiettano orizzontalmente nei punti $1_{,}$, $2_{,}$, $3_{,}$..... della retta $B\,C$, le due porzioni di eliche sviluppate in $1\,a$ e $2\,a$ si proietteranno in due archetti d'elica $a_{,}1_{,}$ e $a_{,}2_{,}$. Ora per l'estrados si consideri il vertice corrispondente $a_{,}'$, si abbassi la perpendicolare $a'\,b'$ sulla $E''\,F''$ e si porti la lunghezza di questa perpendicolare da $B_{,}$ in $\alpha_{,}$, e poi da $\alpha_{,}$ si guidi una perpendicolare alla fondamentale, questa perpendicolare ed il punto $\alpha_{,}$ rappresentano le proiezioni della generatrice della superficie d'estrados passante per a' e la proiezione orizzontale del punto a' si troverà allora in $a_{,}'$. I punti $1'$, $2'$, $3'$,..... della superficie d'estrados avranno le loro proiezioni in $1'_{,}$, $2'_{,}$, $3'_{,}$,....., le due rette $1'\,a'$, $a'\,2'$, si proietteranno nelle porzioni d'eliche $1'_{,}\,a'_{,}$, $a'_{,}\,2'_{,}$. Le generatrici che uniscono i punti corrispondenti $1_{,}\,1'$; $a_{,}\,a'$; $2_{,}\,2'$........ avranno le loro proiezioni orizzontali nelle rette $1_{,}\,1'_{,}$; $a_{,}\,a'_{,}$; $2_{,}\,2'_{,}$: onde il cuscinetto sviluppato in $1\,a\,2$, $1'\,a'\,2'$ è pienamente determinato. Nello stesso modo si può determinare qualunque altro dei cuscinetti intermedi.

In quanto ai due cuscinetti estremi le cui superficie d'intrados sono sviluppate per l'uno nelle due figure $B''\,e\,m\,1$, $E''\,e'\,m'\,1'$

e per l'altro nei due triangoli $C''rs$, $F''r's'$, non si avranno maggiori difficoltà a superare per averne le loro proiezioni, poichè le diverse faccie sono o superficie piane o cilindriche, o porzioni di elicoidi sghembi.

I cuscinetti d'imposta non si terminano secondo il letto di posa della volta ma agli stessi si aggiunge un'appendice in modo che il loro piano di posa riesca orizzontale. Per ognuno dei cuscinetti intermedii, questa appendice è formata da un prisma retto, disposto orizzontalmente, la cui sezione ha la forma della figura $FBCDE$, cioé vi ha dapprima il lato FB secondo un raggio, poscia un altro BC orizzontale che rappresenta una proiezione della lista rettangolare $1,' \ell_{1} d_{1} s_{1}'$, poi l'altro CD verticale, il quarto DE orizzontale e costituisce il letto di posa e l'ultimo EF verticale. L'aggiunta dei due cuscinetti di testa è un po' diversa affine di togliere gli angoli acuti che vi sarebbero continuando l'appendice dei cuscinetti intermedii. Questa aggiunta pel cuscinetto $E1,'$ $1,m,\varepsilon B\omega m,'$, è proiettata orizzontalmente in $BE\mu l 1,' 1'$, secondo $l\mu$ perpendicolare al piano di testa; per l'altro cuscinetto si ottiene nel seguente modo: si porta la lunghezza $E\mu$ da F in $\mu_{,}$, si conduca la $\mu_{,}\nu$ perpendicolare al piano di testa ed eguale ad $l\mu$, indi si tiri la retta νd; l'aggiunta di questo cuscinetto avrà la proiezione orizzontale $s_{,}d\nu\mu_{,}C$. Così si vengono ad eliminare tutti gli angoli acuti.

È facile vedere che i due cuscinetti estremi uniti insieme secondo le loro faccie piane, formano un cuscinetto solo di lunghezza doppia di uno dei cuscinetti intermedii, poichè si possono disporre le diverse superficie corrispondenti in continuazione l'una dell'altra e la somma delle due lunghezze $1, B_{,}$, $s, C_{,}$ vale il doppio della lunghezza dei cuscinetti intermedii. Onde si potrebbero ottenere questi cuscinetti estremi, facendo un cuscinetto unico e tagliandolo poi convenientemente con un piano il quale faccia colla sezione retta del cuscinetto un angolo eguale a quello d'obbliquità. Quanto si è detto per i cuscinetti d'imposta di un piano di posa della volta, si ripete identicamente per l'altro piano di posa.

VIII.

Avviene alcune volte nella pratica di dover costrurre delle volte obblique molto lunghe. Allora conviene applicare il sistema elicoidale solo verso le teste, costruendo la parte di mezzo della volta come una volta a botte retta. Ecco come si può procedere in simili casi.

Suppongasi che una parte della superficie d'intrados sia rappresentata orizzontalmente in $A\,B\,C\,D$ (*fig.* 9'), che la elevazione verticale di questa stessa superficie sia l'arco $A'\,C'\,B'$ e lo sviluppo sia rappresentato in parte in $C''\,B''A''\,D''$. Dal punto B'' si conduca la perpendicolare $B''\,G$ ad $A''\,D''$ e da G si abbassi pure la perpendicolare $G\,I''$ alla corda della sinussoide. In generale la perpendicolare non passerà per un punto di divisione della corda. Si prenda allora per linea di giunto longitudinale, la retta che passa per G e che, colla condizione che il numero di divisioni comprese fra il suo piede H e l'estremo A'' della corda sia un numero pari, soddisfi anche all'altra di essere la più vicina al piede della perpendicolare. Adesso dai punti di divisione della corda compresi fra i due H ed A'' si conducano delle rette parallele alla $G\,H$, le quali divideranno la $G\,A''$ in parti eguali, una di quelle parti si porti quante volte si vuole da G verso D''; suppongasi che essa si sia portata tre volte, cioè in $G\,M$, $M\,O$ ed $O\,F''$ si conduca la perpendicolare $F''\,E''$, questa retta limiterà una figura quadrilatera $E''\,B''\,A''\,F''$ la quale è lo sviluppo della porzione di volta a cui si applica il sistema elicoidale, onde le linee di giunto longitudinale, per quel quadrilatero, partiranno dai punti di divisione della corda, saranno tutte parallele alla GH e termineranno alla linea $E'' F''$; le linee di giunto trasversale partiranno dai punti di divisione della $A'' F''$ e saranno parallele alla corda della sinussoide.

Per raccordare poi questa parte di volta coll'altra che segue e che deve essere una volta retta, basta dai punti d'incontro delle linee di giunto longitudinale colla $E'' F''$ condurre le generatrici della volta a botte retta e le perpendicolari alle linee stesse, come lo mostra l'ultima figura. Gli sviluppi delle superficie d'intrados dei conci elicoidali termineranno contro quelle perpendicolari e quelli dei conci della volta a botte retta avranno la forma $a\,b\,c\,d\,e$, $e\,d\,f\,g\,h$,.... Gli sviluppi delle superficie dei cuscinetti sono rappresentati nelle parti tratteggiate.

Allo stesso modo si procede per la superficie d'estrados e per tutte le altre costruzioni conosciute per le volte obblique secondo il sistema elicoidale.

IX.

Il procedimento sin qui tenuto si applica alla costruzione delle volte obblique in pietra da taglio, ma vedesi assai facilmente come esso serva anche per la costruzione delle grosse volte in muratura. (*fig*. 10). Infatti supponendo ridotte le dimensioni delle superficie dei conci all'intrados a quelle massima e minima di un mattone, qualunque concio, compreso fra i due coronamenti ed i cuscinetti di imposta, verrà ad avere senza sensibile differenza la forma parallelepipeda, che è appunto quella di un mattone. I mattoni poi dei coronamenti e dei cuscinetti dovranno esser conformati in modo speciale. Ma generalmente, nella pratica, si usa fare queste parti in pietra da taglio ed il resto in muratura.

A compiere la presente dissertazione, converrebbe ancora dire come si proceda in pratica coll'applicazione del sistema elicoidale e come si eseguiscano sulla pietra i tagli geometrici per ridurla ad avere la forma dei diversi conci. Ma la ristrettezza del tempo concessomi e le poche mie forze mi obbligano a por termine a questo breve scritto, esternando i più vivi ringraziamenti al Chiar.° Prof. Cav. *Curioni,* che col suo corso di costruzioni, mi porse la materia e l'indirizzo per la presente dissertazione che io raccomando alla indulgenza e benignità della Commissione esaminatrice.

MARZUCCHI FRANCESCO.

TESI LIBERE

DAL CORSO DI MECCANICA APPLICATA ED IDRAULICA PRATICA

Del moto dell'acqua nei canali scoperti.

DAL CORSO DI MACCHINE A VAPORE E FERROVIE

Condotte di gaz, ascendenti e discendenti.

DAL CORSO DI COSTRUZIONI

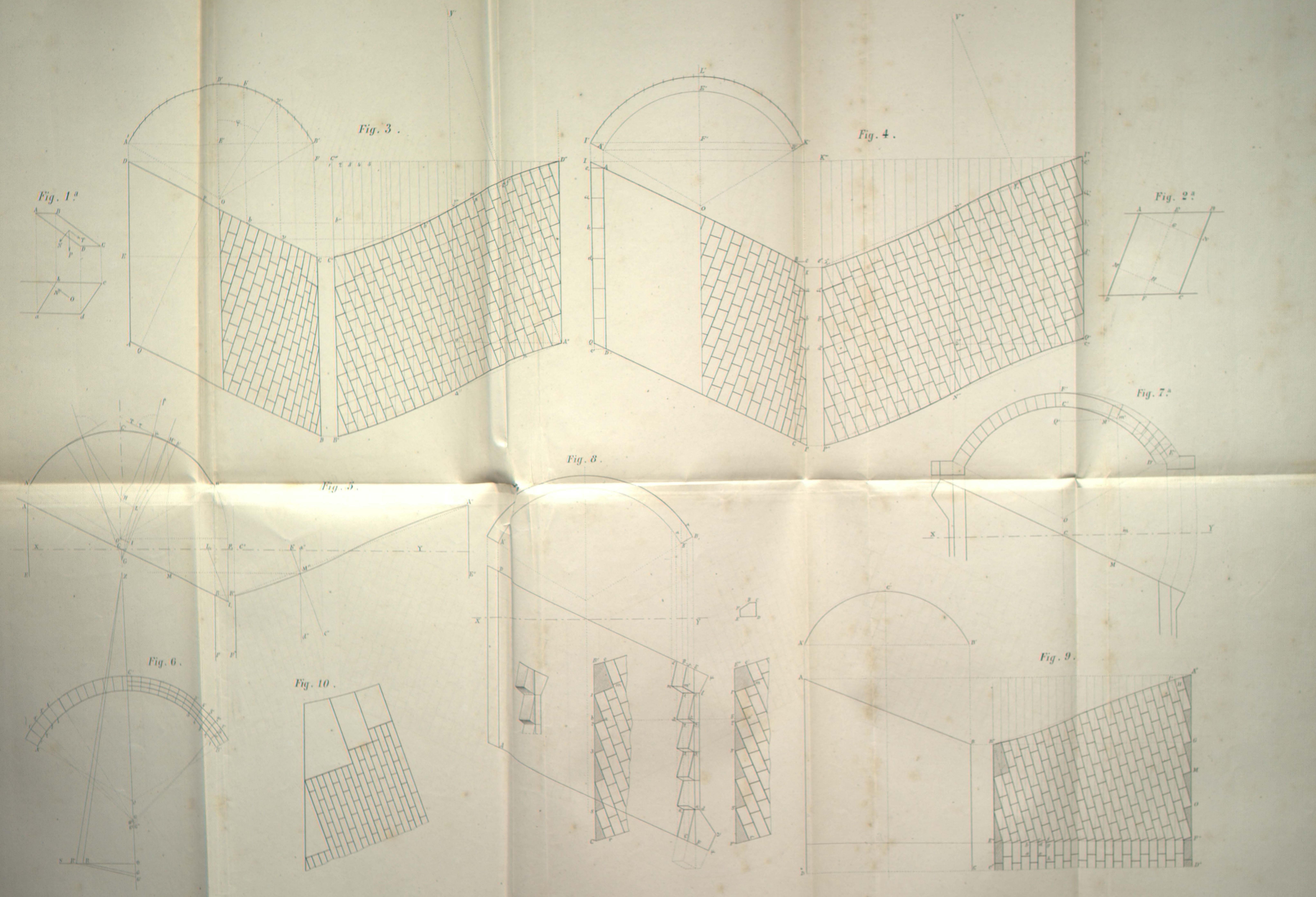
Flessione e stabilità dei solidi rettilinei orizzontalmente disposti e collocati sopra tre appoggi e gravati di pesi uniformemente distribuiti sulla loro lunghezza.

DAL CORSO DI GEOMETRIA PRATICA

Calcolo degli sterri e riporti — Metodo delle sezioni ragguagliate.

ERRATA-CORRIGE

Pag.	6	linea	27	*invece di*	produrre	*si legga*	produrne
»	7	»	8	»	dei	»	sui
»	15	»	»	»	D''	»	A''
»	»	»	29	»	$\lambda'' \gamma''$	»	$G'' f''$
»	18	»	26	»	facciano	»	si facciano
»	21	»	4	»	orizzontalmente	»	verticalmente
»	»	»	15	»	$Q' M'$	»	$Q' m'$
»	22	»	21	»	$\frac{HL}{\cos\varphi}$	»	$\frac{HL}{\operatorname{sen}\varphi}$
»	23	»	27	»	$G = OH + OGH$	»	$GH = OH + OG$
»	»	»	»	»	F, L, I	»	$F_, , L_,, I_,$
»	25	»	25	»	$1, 1', a, a', 2, 2'$	»	$1, 1' : a, a' : 2. 2'$
»	26	»	1	»	$c'' r s$	»	$C'' r s$
»	»	»	12	»	$1_,' e_, d_, s'$	»	$1_,' l d s_,'$



Marzucchi Francesco Dis.