

G. 17

DISSERTAZIONE E TESI

PRESENTATE ALLA

COMMISSIONE ESAMINATRICE

della

R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri in Torino

DA

CARLO FEDERICO SERENA

DA SAN BENIGNO (CANAVESE)

per ottenere il Diploma

di

INGEGNERE LAUREATO

—
1869
—

TORINO

VINCENZO BONA TIPOGRAFO DI S. M.

A MIO PADRE

ALL'AFFETTUOSA MIA MADRE

ED ALLO ZIO PATERNO

PEGNO D'AFFETTO E DI RICONOSCENZA

CENNI

SULLA FLESSIONE DEI SOLIDI PRISMATICI

sollecitati da una forza diretta parallelamente al loro asse.

I.

Allorquando si sottopone un solido prismatico, omogeneo ed elastico, all'azione di una forza T diretta parallelamente al suo asse XX (fig. 1^a), ma che non coincida con esso, vi si manifesta il fenomeno della *flessione*; cosicchè considerandone due sezioni rette qualsiansi, fra loro vicinissime, come AB e CD , si può osservare che l'una, CD , subisce rispetto all'altra, AB , supposta fissa, uno spostamento, rotando attorno a quella retta che dai Costruttori vien chiamata l'*asse neutro* della sezione CD . Dipendentemente dal verso e dalla posizione del punto in cui è applicata la forza T , gli elementi di fibra compresi fra le due sezioni considerate, possono essere o tutti

allungati o tutti accorciati od in parte allungati ed in parte accorciati. In ogni caso però questi allungamenti od accorciamenti daranno luogo a sviluppo di forze molecolari, e qualora non venga provocato lo snervamento delle fibre del solido, la superficie C_1D_1 , sulla quale supponiamo essersi portati tutti i punti delle fibre che prima della flessione si trovavano in CD , potrà sotto l'azione della forza T e delle forze intrinseche accennate, costituirsi in un nuovo stato d'equilibrio.

Lo stabilire, fondandomi sui principii che somministra la Meccanica Razionale, le condizioni perchè tal equilibrio possa aver luogo, e risolvere alcuni dei più importanti problemi che si presentano nello studio di questo caso particolare di flessione, e segnatamente quelli relativi alla stabilità del solido che si considera, egli è quanto mi son proposto di fare in questa mia dissertazione.

Dirò pertanto quali sono le ipotesi che serviranno di base a queste considerazioni teoriche:

1° I punti delle fibre che si trovano sopra una medesima sezione retta del prisma si conservano ancora in uno stesso piano quando si sono costituiti nel nuovo stato d'equilibrio, pel fatto della flessione:

2° Le fibre si comportano come altrettanti piccoli prismi isolati, operano cioè le une indipendentemente dalle altre:

3° In un medesimo prisma, il coefficiente d'elasticità longitudinale ha lo stesso valore tanto per le fibre che s'allungano, quanto per le fibre che si accorciano.

I risultati a cui si arriva trattando il problema che mi son proposto fondato su queste ipotesi, si trovano sufficientemente approssimati per soddisfare ai bisogni della pratica, supposto però sempre che le forze estrinseche non siano capaci di produrre lo snervamento del solido.

II.

Giova premettere le seguenti notazioni:

ω superficie della sezione trasversale d'un elemento di fibra qualunque, come ab , il quale nella proiezione $C'D'$ della sezione CD è rappresentato in b' ;

Ω superficie totale della sezione retta del prisma;

l distanza fra le due sezioni AB e CD ;

ϵ arco di raggio eguale all'unità chiudente l'angolo CIC_1 , il quale suppongo esprima di quanto la sezione CD , passando in C_1D_1 , ha rotato attorno all'asse neutro;

x, y coordinate $(G'p, b'p)$ del punto b' , rispetto ai due assi $xG'x', yG'y'$ che sono gli assi principali centrali d'inerzia della sezione $C'D'$, il cui centro di superficie è G' ;

v distanza della fibra ab dalla retta UU condotta per G' parallelamente alla direzione $U'U'$ dell'asse neutro, che qui supponiamo cadere dentro il prisma;

V distanza GS' dell'asse neutro dal centro di superficie;

m ed n coordinate $(G'P, PO')$ rispetto ai due assi xx', yy' , della proiezione O' del punto in cui la forza sollecitante T incontra il piano della sezione CD , il qual punto dicesi pure *centro di tensione*;

φ angolo $O'G'y$ che il *piano di sollecitazione* fa coll'asse yy' ;

ψ angolo $xG'U$ che la retta UU fa coll'asse xx' ;

I' ed I'' momenti d'inerzia della superficie della sezione $C'D'$ rispetto agli assi xx', yy' ;

E coefficiente d'elasticità longitudinale relativo alla materia di cui il prisma è formato;

Σ somma estesa a tutte le superficie elementari ω .

Ciò premesso osservo, che l'allungamento o l'accorciamento subito, pel fatto della flessione, da un elemento di fibra com-

preso fra le due sezioni AB e CD , si può esprimere algebricamente con $(V+v)\theta$, purchè v si prenda col segno positivo oppure col segno negativo, secondochè, rispetto all'asse neutro l'elemento di fibra considerato trovasi dalla parte ove sono le fibre allungate oppure dalla parte ove sono quelle accorciate. L'azione molecolare che conseguentemente si sviluppa viene espressa da

$$E w \frac{(V+v)\theta}{l}.$$

E siccome tutte le forze applicate alla sezione C_1D_1 , tanto le intrinseche rappresentate da $\Sigma E w \frac{(V+v)\theta}{l}$, quanto l'estrinsica T , sono parallele, così per esprimere che dessa sotto la loro azione si mantiene in equilibrio, è necessario e basta porre, che sono eguali a zero la somma algebrica delle forze stesse e le somme dei loro momenti rispetto a due piani paralleli alla comune direzione. Quindi ne segue, che se si prendono per questi due piani, quelli che passano per l'asse del solido, e rispettivamente per l'uno e per l'altro dei due assi principali centrali d'inerzia della sezione CD , le equazioni di equilibrio saranno le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma E w \frac{(V+v)\theta}{l} &= T \\ \Sigma E w \frac{(V+v)\theta}{l} y &= T n \\ \Sigma E w \frac{(V+v)\theta}{l} x &= T m \end{aligned} \right\} (1)$$

Se si conduce dal punto p la retta pr perpendicolare sulla $b'q$, e si osserva che gli angoli $rb'p$ ed rps sono eguali all'angolo $xG'U$ che abbiám denominato ψ , dai triangoli rettangoli $b'rp$, prs ed $sG'q$, si ricava

$$b'r = b'p \cos \psi, \quad rs = sp \sin \psi, \quad sq = G's \sin \psi$$

sommando queste tre eguaglianze membro a membro si ottiene

$$v = y \cos \psi + x \sin \psi$$

e sostituendo questo valore di v nelle equazioni (1), esse si cangiano rispettivamente in queste altre.

$$E \frac{\theta}{l} (V \Sigma \omega + \cos \psi \Sigma \omega y + \sin \psi \Sigma \omega x) = T$$

$$E \frac{\theta}{l} (V \Sigma \omega y + \cos \psi \Sigma \omega y^2 + \sin \psi \Sigma \omega xy) = Tn$$

$$E \frac{\theta}{l} (V \Sigma \omega x + \cos \psi \Sigma \omega xy + \sin \psi \Sigma \omega x^2) = Tm$$

e siccome abbiain preso per assi delle coordinate, gli assi principali centrali d'inerzia, così le somme $\Sigma \omega x$, $\Sigma \omega y$, $\Sigma \omega xy$ sono nulle e le tre ultime equazioni si possono scrivere così:

$$\left. \begin{aligned} E \frac{\theta}{l} V \Omega &= T \\ E \frac{\theta}{l} I' \cos \psi &= Tn \\ E \frac{\theta}{l} I'' \sin \psi &= Tm \end{aligned} \right\} (1')$$

le quali sono appunto le **condizioni d'equilibrio** che c'eravamo proposto di stabilire, e costituiscono il fondamento di tutte le questioni che in seguito tratteremo.

III.

Proponiamoci di trovare la **posizione dell'asse neutro**: il che si può fare determinandone la distanza V dal centro di superficie G' e l'angolo ψ che esso fa coll'asse xx' . Perciò si divida la seconda delle equazioni (1') per I' e la terza per I'' ,

si elevino amendue al quadrato, si sommino membro a membro, s'estragga la radice da ambo i membri dell'equazione che ne risulta, e si avrà

$$E \frac{\theta}{l} = T \sqrt{\frac{n^2}{I'^2} + \frac{m^2}{I''^2}};$$

risolvasi ora la prima delle equazioni (1') rispetto a V , vi si sostituisca ad $E \frac{\theta}{l}$ questo suo valore e si otterrà l'espressione seguente

$$V = \frac{1}{\Omega \sqrt{\frac{n^2}{I'^2} + \frac{m^2}{I''^2}}}. \quad (2)$$

Riguardo all'angolo ψ , se ne può avere la tangente trigonometrica dividendo la seconda delle equazioni (1') per I' e la terza per I'' , poi dividendo membro a membro questa per quella, onde si ha

$$\text{tang } \psi = \frac{I'}{I''} \frac{m}{n}$$

oppure

$$\text{tang } \psi = \frac{I'}{I''} \text{tang } \varphi. \quad (3)$$

Al valore di $\text{tang } \psi$ possiamo dare un'interpretazione geometrica di molta importanza.

Ed a tal fine diciamo a il raggio di girazione della sezione che si considera, rispetto all'asse delle yy' e b il suo raggio di girazione rispetto all'asse delle xx' , sappiamo che si ha

$$I' = b^2 \Omega, \quad I'' = a^2 \Omega,$$

perciò se sostituiamo questi valori di I' e I'' nella equazione (3), s'ottiene

$$\text{tang } \psi = \frac{b^2}{a^2} \text{tang } \varphi. \quad (4)$$

Descrivasi ora nella sezione $C'D'$ l'ellisse centrale d'inerzia e pel punto M in cui essa viene incontrata dal piano di sollecitazione si conduca la tangente a detta ellisse, l'equazione di questa tangente, dette x' e y' le coordinate di M , sarà

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1,$$

e la tangente trigonometrica dell'angolo che essa fa colla parte delle x positive essendo $\frac{dy}{dx}$, si può facilmente trovare che è espressa da

$$-\frac{b^2 x'}{a^2 y'},$$

quindi si avrà

$$\text{tang } MRG' = \frac{b^2 x'}{a^2 y'}.$$

È poi manifesto che la (4) può anche scriversi così

$$\text{tang } \psi = \frac{b^2}{a^2} \frac{x'}{y'},$$

e paragonando fra loro queste due ultime eguaglianze si vede, che l'asse neutro è parallelo alla tangente all'ellisse centrale d'inerzia nel punto in cui essa è incontrata dal piano di sollecitazione, ossia è parallelo al diametro coniugato di quello secondo cui il piano di sollecitazione taglia la detta ellisse.

IV.

Abbiam veduto che la tensione sviluppata da un elemento

di fibra preso in un punto qualunque della sezione CD si può sempre esprimere con

$$E w \frac{(V+v)\theta}{l}.$$

Se vogliamo il valore di questa **tensione riferita all'unità di superficie**, dicendolo q , sarà

$$q = E \frac{(V+v)\theta}{l};$$

oppure ricavando il valore di $E \frac{\theta}{l}$ dall'equazione prima delle (1') e sostituendolo in questa

$$q = \frac{T}{\Omega} \left(1 + \frac{v}{V}\right) \quad (5)$$

che vale pei due casi in cui si abbia tensione o pressione, purchè al v si dia il valore per esso convenuto.

Possiamo dare un'espressione di q in funzione delle coordinate x ed y del punto che si considera. A tal fine riferiamoci ancora alle equazioni (1'); ricaviamo il valore di $E \frac{\theta}{l}$ dalla prima, sostituiamolo nella seconda e nella terza, e si potranno ricavare da queste i seguenti valori di $\cos \psi$ e $\sin \psi$

$$\cos \psi = \frac{V\Omega n}{I'} \quad \sin \psi = \frac{V\Omega m}{I''},$$

i quali sostituiti nella

$$v = y \cos \psi + \sin \psi$$

danno la seguente espressione di v

$$v = V\Omega \left(\frac{n}{I'} y + \frac{m}{I''} x \right),$$

la quale posta nella (5) dà

$$q = T \left(\frac{1}{\Omega} + \frac{n}{I'} y + \frac{m}{I''} x \right);$$

oppure se ad I' e I'' si sostituiscono i loro valori in funzione dei rispettivi raggi di girazione,

$$q = \frac{T}{\Omega} \left(1 + \frac{n}{b^2} y + \frac{m}{a^2} x \right).$$

V.

Ponendo nel secondo membro dell'equazione (5) V a denominatore comune, si ha

$$q = \frac{T}{\Omega} \frac{V \pm v}{V},$$

e questa equazione ci fa vedere che le fibre, le quali sopportano la **massima tensione** e la **massima pressione** son quelle che maggiormente distano dall'asse neutro; e per conseguenza se parallelamente a quest'asse conduciamo due tangenti ZZ , $Z'Z'$ alla sezione $C'D'$ considerata (fig. 2^a), e v' , v'' sono le distanze dalla UU , dei punti di tangenza N' , N'' , essendo che le due fibre passanti per essi sono rispettivamente estesa e compressa e denotiamo con Q_1 , Q_2 i valori assoluti della massima tensione e della massima pressione riferite all'unità di superficie, avremo

$$Q_1 = \frac{T}{\Omega} \left(\frac{v'}{V} + 1 \right)$$

$$Q_2 = \frac{T}{\Omega} \left(\frac{v''}{V} - 1 \right).$$

Dicendo Q' e Q'' i coefficienti di snervamento relativi alla trazione ed alla pressione, per la materia di cui il prisma che si considera è costituito, le **condizioni di stabilità** saranno espresse da

$$Q' < \frac{T}{\Omega} \left(\frac{v'}{V} + 1 \right)$$

$$Q'' < \frac{T}{\Omega} \left(\frac{v''}{V} - 1 \right)$$

e se m' ed m'' sono due coefficienti di stabilità convenienti, il primo per la resistenza alla tensione, il secondo per la resistenza alla pressione; per **equazioni di stabilità** potranno ritenersi le seguenti:

$$m' Q' = \frac{T}{\Omega} \left(\frac{v'}{V} + 1 \right)$$

$$m'' Q'' = \frac{T}{\Omega} \left(\frac{v''}{V} - 1 \right).$$

Che se invece dei coefficienti di snervamento Q' e Q'' sono noti i coefficienti di rottura R' ed R'' , il primo relativo all'estensione, ed il secondo relativo alla compressione, ed n' , n'' sono i loro rispettivi coefficienti di stabilità; invece delle precedenti due equazioni si avranno queste altre:

$$n' R' = \frac{T}{\Omega} \left(\frac{v'}{V} + 1 \right)$$

$$n'' R'' = \frac{T}{\Omega} \left(\frac{v''}{V} - 1 \right).$$

VI.

L'equazione (5) ci fa vedere che le linee di **egual tensione** e di **egual pressione** sono rette parallele all'asse neutro e che

per conseguenza la loro direzione non cangia col variare della distanza del centro di tensione dal punto G' , purchè desso si mantenga sempre sulla retta $G'O'$ indefinitamente prolungata.

Ma lo stesso non può dirsi rispetto alla distanza dell'asse neutro dal centro di superficie G' . E per renderci ragione di ciò che per esso avviene, giova procurarci l'espressione della lunghezza $G'S'$ compresa fra il centro di superficie G' ed il punto in cui l'asse neutro incontra il prolungamento della $G'O'$.

A tal fine diciamo

U questa lunghezza domandata;

U_1 la lunghezza della $G'O'$;

p il semidiametro $G'M$ dell'ellisse centrale d'inerzia.

Avremo dal triangolo rettangolo $G'S'S$, il cui angolo $G'S'S$ vale l'angolo $O'G'U = 90^\circ - (\varphi - \psi)$,

$$U = \frac{V}{\cos(\varphi - \psi)}.$$

Sostituendo nell'espressione (2) ad I' e I'' i loro rispettivi valori $b^2\Omega$ e $a^2\Omega$ si avrà

$$V = \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^4n^2 + b^4m^2}}$$

Osservando poi che dal triangolo $O'G'P$ si ricava

$$m = U_1 \sin \varphi$$

$$n = U_1 \cos \varphi$$

si può scrivere

$$V = \frac{a^2b^2}{U_1 \sqrt{a^4 \cos^2 \varphi + b^4 \sin^2 \varphi}} \quad (6)$$

e siccome si ha

$$\cos(\varphi - \psi) = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \quad (7)$$

e per essere

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{b^2}{a^2} \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi}$$

si ha pure

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \psi}} = \frac{a^2 \cos \varphi}{\sqrt{a^4 \cos^2 \varphi + b^4 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

$$\operatorname{sen} \psi = \frac{\operatorname{tang} \psi}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \psi}} = \frac{b^2 \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{a^4 \cos^2 \varphi + b^4 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

così sostituendo questi valori di $\cos \psi$ e $\operatorname{sen} \psi$ nell'equazione (7), e ponendo in seguito il valore che si ottiene di $\cos(\varphi - \psi)$, come pure quello di V dato dalla (6), nell'equazione (5), e riducendo, si perverrà alla

$$U = \frac{1}{U_1} \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}.$$

Si può facilmente dimostrare che il termine

$$\frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

non è altro che il quadrato del semidiametro dell'ellisse centrale d'inerzia, che noi abbiain denominato p , e quindi potremo porre

$$U = \frac{p^2}{U_1}. \quad (8)$$

Riferendoci ora a quest'ultima espressione di U possiamo subito vedere che la distanza dell'asse neutro dal centro di superficie G' può prendere tutti i valori da zero all'infinito, variando la U_1 dall'infinito a zero.

VII.

Se pel centro di superficie G' della sezione $C'D'$ (fig. 3^a) conduconsi delle rette, come $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ e si determinano su di esse i punti a , b , c , d , a' , b' , c' , d' tali, che quando il punto d'applicazione della forza sollecitante passa per essi, l'asse neutro diviene tangente a quella sezione, e si uniscono tutti questi punti fra loro; si ottiene nella sezione, che si considera, un contorno che ne racchiude una parte, la quale prende nome di **superficie centrale**. Tal superficie gode della proprietà che quando dentro di essa cade il punto d'applicazione della forza sollecitante, le fibre considerate sono o tutte allungate o tutte accorciate.

Che se si vuole determinare questa superficie centrale per la sezione $C'D'$, vi si tracci anzitutto l'ellisse centrale d'inerzia $ee'ff'$ (il che si fa ricorrendo alle regole somministrate dalla teoria generale dei momenti d'inerzia), poi si tiri in essa una corda qualunque gg' , che si divide per metà in i , e si conduca la retta QQ' determinata dai due punti G' ed i , la quale incontrerà l'ellisse d'inerzia nel punto h e finalmente si tiri la zz' tangente alla superficie $C'D'$: e supposto essere h il suo punto d'incontro colla QQ' , si misurino le lunghezze $G'h$, $G'h$, le quali abbiamo rispettivamente denominate p ed U . Ciò fatto si ricorra all'equazione (8) e vi si sostituiscano questi valori di p ed U , e si potrà da essa ricavare il valore di U_1 , il quale portato da G' verso Q sulla $G'Q$, darà nel punto o un punto della linea che racchiude la superficie centrale. Operando poi analogamente per altre corde di quella ellisse, si possono trovare quanti altri punti si vogliono, i quali godano della proprietà di cui gode il punto o , e quindi si può tracciare il contorno della superficie centrale.

VIII.

I ragionamenti che abbiain fatto nel trattare le questioni che precedono, sono generali: valgono cioè tanto pel caso in cui le fibre allungate si trovano, rispetto all'asse neutro, dalla parte in cui è applicata la forza T , quanto per quello in cui si trovano dalla parte contraria; e così pure le formole che se ne sono dedotte, sono vevoli pei due casi, senza che faccia d'uopo di fare per esse alcuna distinzione.

Ed a questo punto sarebbe mio desiderio di far vedere come s'applicano le formole, che siam venuti via via deducendo, ad alcuni casi che di frequenti si presentano nella pratica, e nei quali è indispensabile che il costruttore si sappia dar piena ragione del modo con cui i materiali da esso impiegati resistono alle forze estrinseche, onde possa dare ad essi delle forme e dimensioni tali, che senza ledere per nulla alla stabilità e longevità delle costruzioni, sia possibile di ottenere la massima economia.

Ma se ciò facessi, escirei da quei limiti che sin da principio mi sono imposto; e perciò porrò termine a questo povero scritto, che raccomando alla bontà ed indulgenza della Commissione Esaminatrice.

C. F. SERENA.

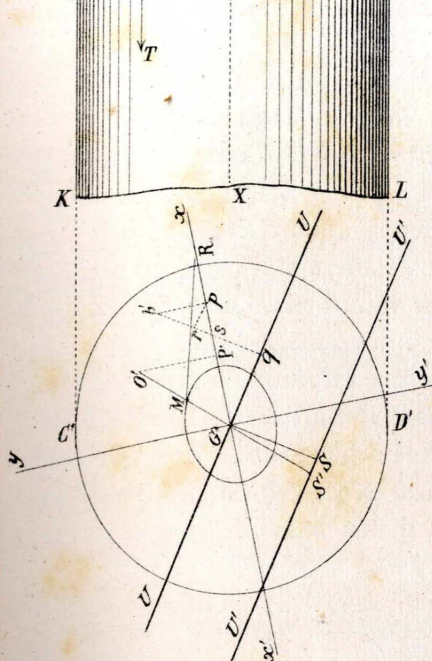
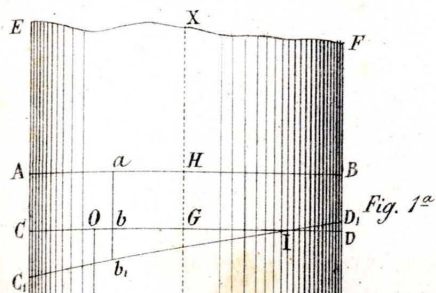
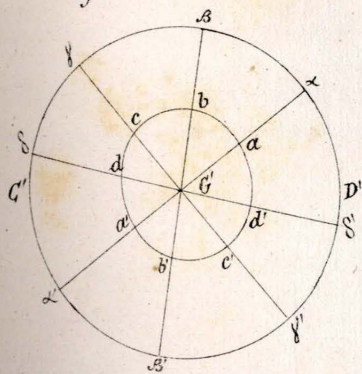


Fig. 3ª



C. F. Serena.

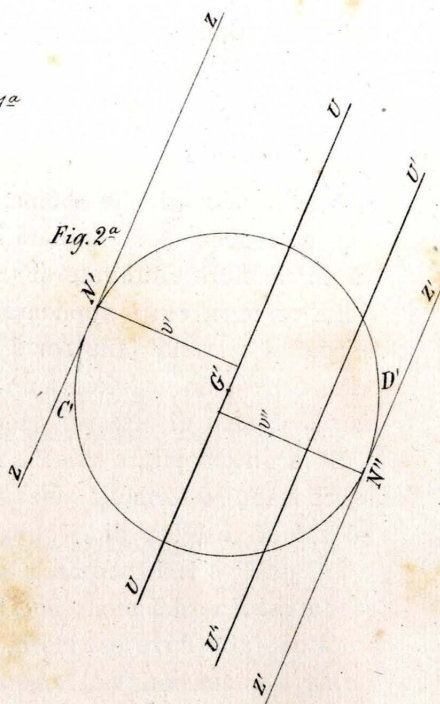
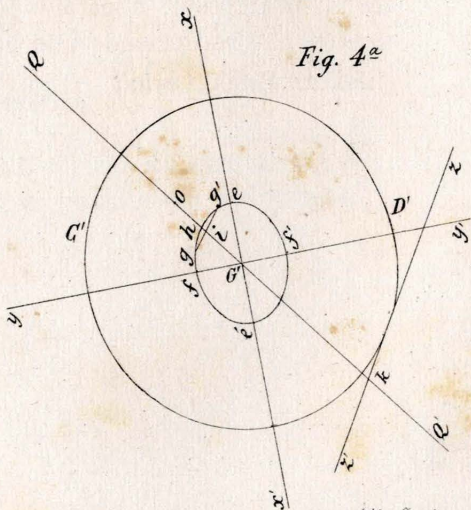


Fig. 4ª



Lit. Cassina.

TESI LIBERE

Meccanica applicata ed Idraulica pratica

Ruote a cassette — Loro teoria dedotta da quella generale dei motori idraulici — Formola pratica — Cause per cui essa si scosta dalla teorica.

Costruzioni civili, idrauliche e stradali

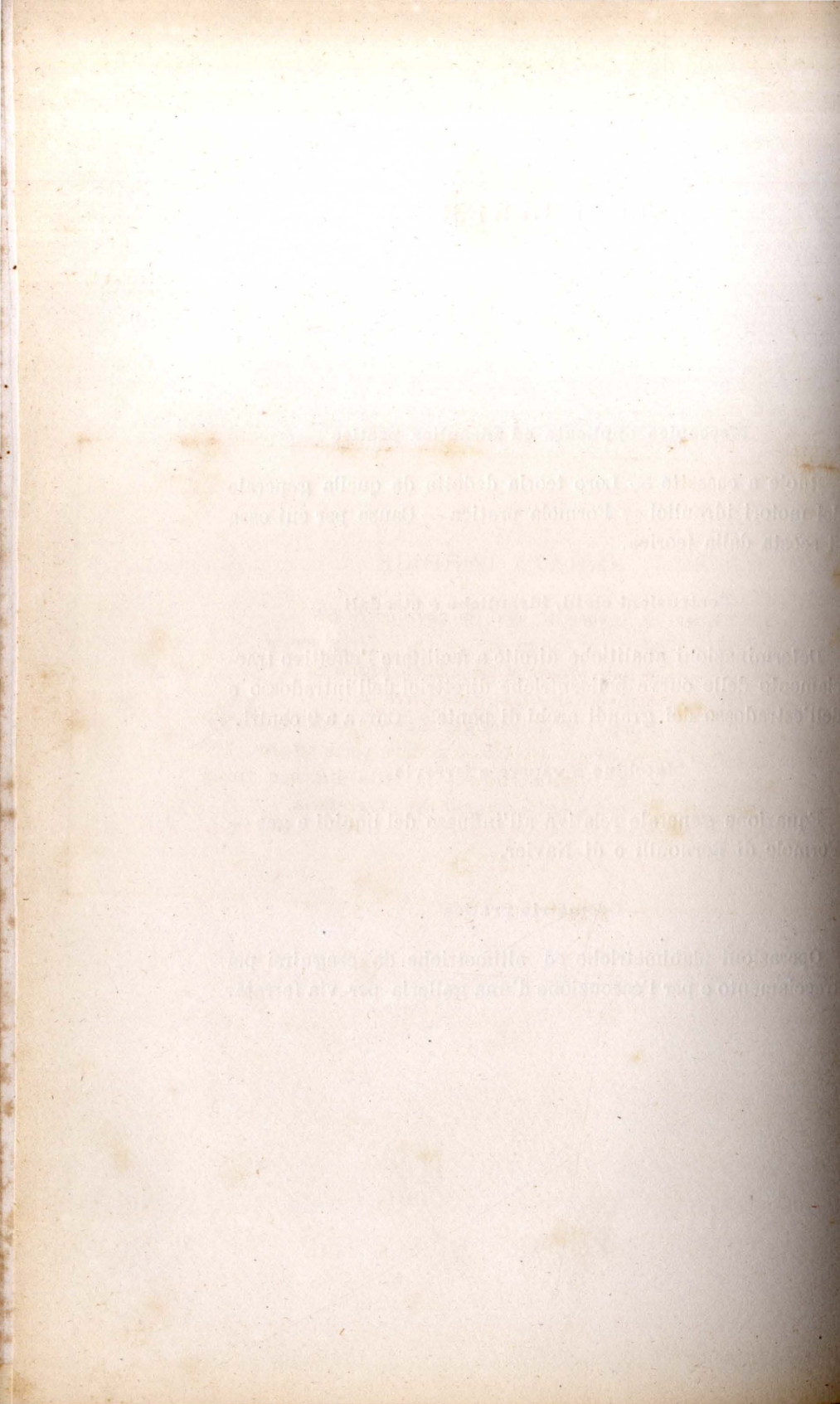
Determinazioni analitiche dirette a facilitare l'effettivo tracciamento delle curve policentriche direttrici dell'intradosso e dell'estradosso dei grandi archi di ponte — Curva a 9 centri.

Macchine a vapore e ferrovie

Equazione generale relativa all'influsso dei liquidi e gas — Formole di Bernoulli e di Navier.

Geometria pratica

Operazioni planimetriche ed altimetriche da eseguirsi pel tracciamento e per l'esecuzione d'una galleria per via ferrata.



ERRATA CORRIGE

Pag. 7 linea 6 invece di GS' si deve porre GS

» 12 » 20 » $\text{sen } \psi$ » $x \text{ sen } \psi$

» 15 » 16 individuare la formola col segno (a)

» 16 » 8 invece di (5) si deve porre (a)

» 17 » 19 dopo $C'D'$ si deve aggiungere *e parallela alla gg'*

Nelle tesi libere invece di *influsso* si deve porre *efflusso*

Nella 1^a delle figure dimostrative la retta MR non riuscì parallela alla VV per sbaglio occorso nel litografarla.