

621
DELL' EQUILIBRIO DELLE VOLTE

DISSERTAZIONE E TESI

presentate

ALLA COMMISSIONE ESAMINATRICE

DELLA

R. SCUOLA D'APPLICAZIONE PER GLI INGEGNERI IN TORINO

Dal Luogotenente d'Artiglieria

VILLA GIUSEPPE

DA MONDOVI

Per ottenere il Diploma

DI

INGEGNERE LAUREATO

1869

TIPOGRAFIA ARNALDI

Via Sant'Agostino, N. 6

ALLA VENERATA MEMORIA

DE' MIEI GENITORI

DELL'EQUILIBRIO DELLE VOLTE



I

Le volte in generale possono essere considerate sotto due differenti punti di vista: 1° sotto il punto di vista della loro forma e costruzione; 2° sotto quello della loro spinta. Considerato sotto il primo rapporto, lo studio delle volte abbraccia le nozioni relative al loro apparecchio e le norme pel taglio delle pietre; considerato invece sotto il rapporto della spinta, esso è appoggiato su conoscenze teoriche che spiegano le condizioni ed i principii di stabilità in virtù dei quali le volte si sostengono e si mantengono in equilibrio sotto l'azione delle forze che le sollecitano.

Gli antichi architetti, come anche quelli dell'epoca del risorgimento, non pare fossero guidati da principii certi e geometrici nella ricerca dei mezzi impiegati per assicurare la solidità delle diverse parti dei loro edifizi, e particolarmente delle volte; l'esperienza e l'imitazione sole servivan loro di guida. Infatti benchè osservisi in generale in tutti i loro monumenti una grande sicurezza nei mezzi di esecuzione, non disgiunta da un ardimento straordinario in alcuni di essi, questi risultati sembrano non di meno dipendere assai più dall'arte che dalla scienza. Non fu che verso il principio del xvii secolo che incominciò a farsi sentire la necessità di sottomettere il problema dell'equilibrio delle volte alle leggi della meccanica, problema che fornì poi amplissime materie alle ricerche dei più celebri analisti.

Ammessa l'adesione delle malte come forza essenzialmente concorrente alla stabilità dei vòliti, i primi autori che trattarono di tale argomento ridussero la questione a trovare, dietro le considerazioni dell'equilibrio matematico, la forma e gli spessori che più convenientemente erano da adottarsi nella pratica; ma l'osservanza rigorosa di tali condizioni, e d'altra parte la precarietà della resistenza considerata, condussero sempre a profili di volte inammissibili. Parecchie furono le teorie basate su tali erronee ipotesi, ma nessuna mai fu applicata alla pratica soluzione del problema.

La-Hire pel primo in sul finire del xvii secolo espose una teoria di grandissima semplicità e di immediata applicazione nella pratica. Questa teoria fu per più di un secolo seguita da tutti gli ingegneri e fra gli altri dal Belidor; anzi il Cavalieri che scriveva dopo il 1740 ci asserisce che il corpo degli ingegneri francesi di ponti e strade si serviva ancora a quell'epoca per determinare la grossezza delle pile e delle spalle nelle arcate dei grandi ponti delle tavole del Chezy calcolate dietro le ipotesi fondamentali su cui è basata la teoria del La-Hire.

Prendendo a considerare il caso che più generalmente suolsi presentare nella pratica, quale è quello di una volta cilindrica simmetrica rispetto al piano verticale che passa per l'asse, La-Hire suppone:

1° Che una volta cilindrica a tutto sesto, non atta a resistere alla pressione a cui viene assoggettata, si rompa sempre secondo i piani normali alla superficie di intrados e passanti pei raggi che fanno colla verticale l'angolo di 45° ;

2° Che in una volta a sesto scemo i piani di rottura siano determinati dai raggi che corrispondono al terzo della metà del sesto a partire dall'imposta;

3° Che in ambi i casi la parte superiore della volta che si mantiene in un sol pezzo agisca pel suo peso come un cuneo che tende a discendere scorrendo sui due piani di rottura, ed obbligando le parti inferiori della volta a

rotare dall'indentro all'infuori attorno agli spigoli esterni dall'imposta o dei piedritti;

4° Finalmente che l'attrito fra la superficie di giunto e di rottura sia nullo.

Ammesse queste ipotesi, la teoria di La-Hire si riduce a trovare la pressione esercitata perpendicolarmente su ciascuno dei piani di rottura dal cuneo superiore, a determinare in seguito lo spessore da darsi alla volta nel punto di rottura onde resistere a questa pressione, e quello da assegnarsi alle parti inferiori di essa onde non abbia luogo rotazione intorno agli spigoli d'imposta o attorno a quelli esterni dei piedritti. Il processo ne è semplicissimo, e le due dimensioni che per esso si ottengono sono a vero dire compatibili colla pratica, ma se per poco si riflette sui risultati che con tal teoria suolsi generalmente ottenere, si viene naturalmente a conchiudere, che una volta, in cui tutte le superficie di giunto tendono ad uno stesso centro, affinchè possa mantenersi in equilibrio, è d'uopo che i pesi dei cunei che la compongono stieno fra loro come le differenze delle tangenti degli angoli formati da ciascun cuneo; ma siccome queste tangenti aumentano in una proporzione grandissima, ne risulta che i cunei formanti le origini dovrebbero avere un peso infinito per resistere agli sforzi dei superiori. Dopo di ciò, è chiaro che non solamente le volte á tutto sesto sarebbero impossibili,

ma anche tutte le rialzate e le ribassate la cui curvatura si unisce con piedritti verticali e paralleli, di modo che non sarebbero possibili che le volte le cui curvature fossero formate da curve aperte facenti angoli coi piedritti verticali, come sono la parabola, l'iperbole, la catenaria, ecc.

Quasi contemporaneamente a La-Hire presentò il Couplet all'accademia delle scienze a Parigi una sua memoria sulla spinta delle volte. Egli pure aveva adottato ipotesi pressochè identiche a quelle di La-Hire, e tra esse quella dei conci levigati in modo da poterne trascurare l'attrito; ma avendo riconosciuto in seguito che tale supposizione non poteva convenire alla materia di cui si formano generalmente le volte, suppose in una sua seconda memoria stampata nel 1730 che i conci fossero in tal modo scabrosi da non poter più scorrere gli uni sugli altri; ipotesi che si allontana dal vero quanto la prima.

II

Le teorie di La-Hire, di Couplet e di altri moltissimi che eransi basati pressochè su identici principii, non tardarono a venir vivamente combattute, ed in seguito dimostrate di nessun fondamento. Nell'anno 1732 Danisy dimostrò davanti all'accademia di Montpellier col mezzo di piccoli

modelli di volte come la rottura di esse non avvenisse quasi mai come sino allora erasi supposto. Egli constatò che quando una volta si rompe per la preponderanza delle parti superiori sulle inferiori, il modo di rottura che si manifesta, ed il solo, per così dire, di cui i pratici abbiano veramente a preoccuparsi, è quello rappresentato dalla figura 1^a. La volta dividesi in quattro parti, di cui le due superiori tendono a cadere nell'interno dei piedritti allontanando le parti inferiori che sono rovesciate al di fuori.

Più tardi questi risultati furono verificati col mezzo d'esperienze eseguite su vasta scala dall'ingegnere Boistard, il quale provò inoltre che quando la preponderanza si verifica sui fianchi, la volta si apre alla chiave verso l'estradosso (*fig. 2*), ai fianchi verso l'intrados; la parte superiore tende a rovesciarsi verso l'esterno, e la inferiore verso l'interno dei piedritti. Eseguiti poi accurati esperimenti su modelli appositi, su arconi in pericolo di cadere, e finalmente su materiali di volte già rovinate, si potè constatare come questi differenti modi di rottura non avvenissero quasi mai secondo piani di posizione fissa, come in sulle prime erasi supposto, ma che questi piani variavano invece a seconda delle diverse circostanze che accompagnavano lo squilibrio della volta. Si riconobbe da ultimo che in alcuni casi speciali poi la rottura non avveniva più per rovesciamento,

ma bensì per solo scorrimento delle diverse parti che compongono la volta, le une sulle altre. Una volta a botte, per esempio, si riconobbe potersi rompere per scorrimento in due distinti modi: o cadendo all'intentro le due parti inferiori che ne formano i fianchi ed innalzandosi la parte superiore (*fig. 3*); o scorrendo all'infuori la parte inferiore strisciando ciascuna su di un giunto orizzontale, ed abbassandosi la parte di mezzo (*fig. 4*).

Basandosi su di questi risultati più conformi alla pratica, Coulomb indicò verso il 1773 una teoria di una generalità tutt'affatto matematica. Gauthey, Boistard, Navier, e gli ingegneri italiani Lorgna e Mascheroni, hanno successivamente adottato e sviluppato le idee di Coulomb; Poncelet e Petit ne hanno semplificato il metodo, e mediante la costruzione di tavole numeriche lo hanno reso di un uso assai meno difficile e complicato.

Facendo astrazione dalla forza di adesione che ha luogo tra la superficie di giunto in virtù delle malte (adesione d'altronde su cui non puossi gran fatto contare, stante la poca resistenza acquistata dalla muratura all'atto del disarmo), Coulomb non tien conto che di due forze, del peso cioè dei conci, e dell'attrito che si sviluppa tra le superficie di giunto. In tali condizioni una volta abbandonata a se stessa dopo il disarmo, si manterrà in equilibrio: 1° Per la resistenza opposta dalle parti inferiori alle

superiori, resistenza che impedisce a queste di cadere nell'interno dei piedritti; 2° Dal peso delle parti superiori che impedisce a quelle inferiori di rovesciarsi al difuori. S'immagini infatti che senza l'aiuto di alcun cemento nè di alcuna centina si mettano a posto successivamente i cunei di una volta a partire dall'inferiore, che supporremo disposto su di un piano orizzontale immobile; i primi corsi potranno mantenersi a sito pella sola forza d'attrito, ma tosto che si arriverà ad un piano RS (*fig. 5*), la cui tangente trigonometrica all'orizzonte rappresenta il rapporto dell'attrito alla pressione, oppure tosto che la verticale passante pel centro di gravità di un assieme di cunei MNM' cadrà al di dentro dello spigolo d'introdosso M del letto inferiore, sarà necessario per mantenere il sistema in equilibrio di applicare contro il letto M'N' una certa forza capace d'impedire il loro scorrimento sul piano RS, o la loro rotazione intorno allo spigolo di intradosso M. Affinchè adunque una volta abbandonata a se stessa dopo il disarmo, possa dirsi stabile, dovrà su ciascuna superficie di giunto del cuneo di chiave essere sollecitata da una forza normale o pressione capace d'impedire ad una porzione qualunque ABRS della mezza volta opposta di scorrere sul suo letto inferiore RS, o ad un'altra porzione ABMN di rotare verso l'interno attorno allo spigolo d'introdosso M di questo letto o di qualunque altro.

La componente orizzontale di questa pressione, la quale è originata dal reciproco contrasto dei cunei, chiamasi la spinta delle volte. Facendo astrazione del cuneo di chiave si potrà supporre questa spinta applicata orizzontalmente alla faccia verticale che ipoteticamente divide la volta in due parti uguali e simmetriche.

La condizione suesposta se pure è necessaria, non è tuttavia sufficiente per stabilire l'equilibrio d'una volta nel senso più generale. Pella stabilità del sistema non basta infatti che vi esista una certa forza capace d'impedire ad una porzione $ABNS$ (*fig. 6*) di scorrere nel piano inferiore RS discendendo da R verso S , ma bisognerà ancora che questa stessa forza non sia d'intensità tale da obbligare poi un'altra porzione, ad esempio $ABR'S'$, a rimontare sul piano inclinato $R'S'$. Nello stesso modo evidentemente non bisognerà poi che la pressione necessaria per impedire la rotazione della porzione $ABMN$ (*fig. 6*) intorno allo spigolo d'intradosso M , possa produrre il rovesciamento di un'altra porzione qualunque $ABM'N'$ intorno allo spigolo d'estradosso N' . La spinta di una volta dovrà quindi esser compresa fra limiti determinati, limiti che essa non può oltrepassare senza che tosto ne segua la rottura dell'equilibrio fra le parti superiori ed inferiori.

Ciò ammesso, calcoliamo l'intensità di questa spinta. Sia essa F , e supponiamo venga orizzontalmente applicata ad

un punto indeterminato della faccia verticale BH (*fig. 7*), che divide la volta in due parti uguali e simmetriche.

Cerchiamo anzi tutti i limiti, fra i quali, essa deve esser compresa, onde impedire la rotazione intorno allo spigolo d'introdosso M di una parte qualunque BMNH verso l'interno, e la rotazione intorno allo spigolo d'estradosso N' di una parte qualunque BHN'M' verso l'esterno.

G e G' sieno rispettivamente le posizioni dei centri di gravità delle due porzioni di volta BHMN e BHM'N'; P e P' ne sieno rispettivamente i pesi sull'unità di lunghezza.

Si indichino con x e x' le distanze dei punti M ed M' dalle verticali che passano pei centri di gravità G e G'; con y ed y' le lunghezze delle perpendicolari calate dai punti M ed N' sulla direzione della forza orizzontale F.

Per condizione di stabilità dovrassi avere:

$$(1) Fy > Px \quad ; \quad (2) Fy' < P'x'.$$

Affinchè adunque non possa aver luogo la rottura di una volta per rotazione di una sua parte qualunque, sia all'interno che all'esterno dei piedritti, la spinta dovrà uguagliare almeno il massimo valore che può assumere la funzione $P\frac{x}{y}$ e non superare al più il minimo valore dell'altra funzione $P'\frac{x'}{y'}$.

Cerchiamo ora fra quali limiti debba variare la forza F , affinchè nessuna porzione BHNM della volta possa scorrere sul piano NM da N verso M, e contemporaneamente nessuna porzione BHN'M' sia spinta all'infuori rimontando il piano inclinato M'N'. Indichiamo perciò rispettivamente con ϕ e ϕ' gli angoli BOM e BOM', e con f il coefficiente d'attrito della muratura su muratura.

Per condizione di stabilità dovrassi avere:

$$(3) \quad P \cos \phi < F \sin \phi + f(F \cos \phi + P \sin \phi)$$

$$(4) \quad F \sin \phi' < P' \cos \phi' + f(F \cos \phi' + P' \sin \phi').$$

In conseguenza affinchè non abbia luogo la rottura della volta per scorrimento di una sua parte qualunque sulla superficie di giunto, la forza F dovrà eguagliare almeno il massimo di

$$P \frac{\cos \phi - f \sin \phi}{\sin \phi + f \cos \phi},$$

e non superare al più il minimo di

$$P' \frac{\cos \phi' + f \sin \phi'}{\sin \phi' - f \cos \phi'}.$$

Ciò posto, ecco il modo con cui devesi analiticamente procedere nel caso più generale, onde determinare la posizione dei piani di rottura virtuale e l'intensità della spinta.

Se la rottura della volta tende a prodursi per abbassamento delle parti superiori, si cerchi per ciascuna delle equazioni che vennero sostituite alle ineguaglianze (1) e (3), la posizione del piano di rottura virtuale, a cui corrisponde il massimo valore della forza F , e si determini l'espressione dei due massimi valori di essa corrispondenti alle due ipotesi fatte circa il modo di rottura. In questo caso la spinta, il cui punto di applicazione si è lasciato indeterminato, si può supporre che agisca alla sommità della chiave, giacchè all'atto in cui avrà luogo la rottura le due parti superiori della volta si toccheranno semplicemente secondo lo spigolo d'estradosso corrispondente al vertice.

I massimi valori di F trovati per ciascuna ipotesi, generalmente sono diversi, come diverse sono le posizioni dei piani di rottura virtuale che ad esse ipotesi corrispondono; ora, siccome per una data volta la spinta non può avere che un solo valore, e questo per l'equilibrio deve esser capace di opporsi al massimo degli sforzi che tende a produrre la rottura sia per rotazione, che per scorrimento, ne segue che il più grande dei due valori di F rappresenterà realmente l'intensità della spinta. Indichiamo rispettivamente con F'_r ed F'_s i due massimi valori di F nel caso della rotazione e dello scorrimento; se risulta $F'_r > F'_s$, evidentemente la rottura tenderà a prodursi per rotazione piuttosto che per scorrimento, ed il piano di rottura vir-

tuale sarà effettivamente quello la cui posizione ha servito a determinare F'_r ; se al contrario $F'_s > F'_r$, prevarrà di certo la tendenza alla rottura per scorrimento.

Quando poi la rottura tenda a farsi come indica la fig. 2, in cui cioè, la volta si apre nell'intradosso alle reni, e nell'estradosso alla chiave, si prenderanno a considerare le equazioni dedotte dalle ineguaglianze (2) e (4); si cercherà per ciascuna di esse la posizione del piano di rottura virtuale che dà il minimo valore di F , e si troverà l'espressione dei due minimi valori della spinta convenienti alle due ipotesi. Il più piccolo dei due valori rappresenterà la spinta effettiva, che in questo caso si supporrà applicata al punto inferiore della chiave.

Allo scopo di evitare le ricerche superflue, giova notare che nei casi ordinari della pratica e coi profili di volta comunemente in uso, l'unico modo di rottura, di cui conviene preoccuparsi, è quello in cui le parti superiori della volta tendono a discendere per effetto del loro peso, sia rotando intorno agli spigoli d'intradosso corrispondenti ai piani di rottura virtuali, sia scorrendo sui piani stessi e respingendo le parti inferiori al difuori.

L'altro modo di rottura considerato è affatto eccezionale, e non ha probabilità di prodursi che nel caso di volte a sesto acuto ed aggravate da un sovraccarico alle reni.

III

A maggiore intelligenza della suesposta teoria, faciamone l'applicazione al caso di una volta cilindrica a tutto sesto, estradossata parallelamente e simmetrica rispetto alla verticale passante pel suo vertice (*fig. 8*).

Sieno rispettivamente r ed R i raggi dell'intradosso e dell'estradosso; le notazioni x , y , P , ϕ ed f abbiano ancora gli stessi significati che nel caso generale.

Cominciamo a determinare F' , ossia il massimo valore di F che corrisponde al caso di rottura per rotazione di una porzione superiore di volta ABCD intorno allo spigolo D d'intradosso, dovrà essere:

$$(1) \quad F = \text{mass. mo } P \frac{x}{y}$$

Ora i valori di P , x ed y variano col variare di ϕ , potremo quindi esprimerli ciascuno in funzione di questa incognita. Essendo p il peso dell'unità di volume della muratura, si avrà:

$$\begin{cases} P = \frac{1}{2} p \phi (R^2 - r^2) \\ x = r \text{sen } \phi - \frac{2}{3} \frac{R^2 + Rr + r^2}{(R+r)\phi} (1 - \cos \phi) \\ y = R - r \cos \phi. \end{cases}$$

Mettendo questi valori nell'espressione generale della spinta, e facendo $\frac{R}{r} = K$, si avrà :

$$(2) F = \text{mass. mo } pr^2 \frac{\frac{1}{2}\phi(K^2-1)\text{sen}\phi - \frac{1}{3}(K^3-1)(1-\cos\phi)}{K - \cos\phi}.$$

Questa equazione ci fa vedere come per tutte le volte simili (per tutte quelle cioè in cui il rapporto K è costante) nell'ipotesi della rottura per rotazione, la spinta sia proporzionale al quadrato del raggio d'intradosso.

Facendo la prima derivata dell'equazione (2) rispetto a ϕ , avremo in funzione di K il valore di questo angolo che rende massima la F' . Eseguendo la differenziazione e riducendo si ha :

$$(3) \quad \cos\phi + \frac{\phi}{\text{sen}\phi} (1 - K\cos\phi) = K - \frac{2}{3} \frac{K^3 - 1}{K + 1},$$

da cui si vede come in tutte le volte simili, l'angolo che determina il piano di rottura virtuale per rotazione sia costante. Quest'equazione però è trascendente, e in mancanza di un metodo diretto bisognerebbe risolverla per tentativi, assegnando a ϕ diversi valori sin tanto che essa ne fosse soddisfatta. Trovato il valor di ϕ che conviene all'espressione, lo si sostituirebbe nell'equazione (2) da cui si ricaverebbe la F' . L'espressione di questa spinta sarebbe

evidentemente della forma Cpr^2 essendo C un coefficiente numerico il cui valore dipende esclusivamente da K .

Passando ora all'ipotesi della rottura per scorrimento, si dovrà avere:

$$(4) \quad F = \text{mass. mo } P \frac{\cos\phi - f\text{sen}\phi}{\text{sen}\phi + f\cos\phi}$$

Mettendo in questa equazione per P il suo valore, introducendo il rapporto K , e facendo: $f = \text{tang}\theta$, si avrà:

$$(5) \quad F = \frac{1}{2}p(K^2 - 1)r^2 \frac{\cos(\theta + \phi)}{\text{sen}(\theta + \phi)}\phi.$$

Di qui si vede come anche nell'ipotesi della rottura per scorrimento, nelle volte simili la spinta sia proporzionale al quadrato del raggio di intradosso.

Facendo la prima derivata dell'equazione (5) rispetto a ϕ ed eguagliandola a zero, dopo alcune semplificazioni si ottiene:

$$(6) \quad \text{sen}(\theta + \phi)\cos(\theta + \phi) - \phi = 0.$$

Ora secondo il Rondelet $f = 0,577$ ma l'angolo che ha per tangente trigonometrica $0,577$ è di circa 30° , sostituendo quindi nell'equazione (6) questi valori si ha:

$$(7) \quad \text{sen}(30^\circ + \phi)\cos(30^\circ + \phi) - \phi = 0.$$

Il valore di ϕ non dipende quindi che dal coefficiente d'attrito, e si mantiene invariabile per qualsiasi valore di K e di r .

Risolvendo l'equazione (7) si ha $\phi=26^0$; mettendo questo valore di ϕ nella (5), si ottiene:

$$(8) \quad F'_s=0,153(K^2-1)pr^2,$$

essendo $\phi=0,454$ e $\cot\phi=0,674$.

La vera spinta sarà dunque data da F'_r o da F'_s , secondo che il coefficiente numerico che moltiplica pr^2 è maggiore nella prima o nella seconda espressione.

La ricerca del coefficiente numerico che accompagna l'espressione di F'_s , non presenta alcuna difficoltà, ma d'altra parte è ben più complicata quella del coefficiente di F'_r . Onde risparmiare i calcoli laboriosi che richiede la soluzione per tentativi dell'equazione (3) il signor Petit ha costruito delle tavole numeriche, che per tutti i valori di K compresi tra 1,00 e 2,73 (limiti che abbracciano tutti i casi possibili della pratica), danno i coefficienti numerici per cui bisogna moltiplicare pr^2 onde avere F'_r , F'_s , nonchè gli angoli che fanno colle verticali i piani di rottura virtuale per rotazione.

Determinata per tal modo la spinta la prima questione che si presenta è quella di trovare, date le dimensioni di una volta, se essa possa sostenersi sulle imposte dopo

il disarmo. Per risolvere tale questione non si tratterà più che di verificare se il momento del peso della mezza volta preso rispetto allo spigolo di estradosso, che si trova sul piano d'imposta, sia almeno eguale al momento della spinta rispetto allo spigolo stesso. Fatti adunque i momenti accennati si dovrà avere:

$$Cr^2R < \frac{\pi}{4}(R^2-r^2) \left(R - \frac{2}{3} \frac{R^2+Rr+r^2}{(R+r) \frac{\pi}{2}} \right),$$

e per l'equilibrio, sostituiti i diversi valori e fatte le debite semplificazioni:

$$CK = \frac{\pi}{4}(K^2-1)K - \frac{1}{3}(K^3-1).$$

Questa equazione non può risolversi che per tentativi; facendo i calcoli per diversi valori di K , si trova che essa è soddisfatta per $K=1,114$, cioè per un sistema di volte nel quale il diametro dell'intradosso eguaglia press'a poco $17 \frac{1}{2}$ volte le grossezza uniforme. Per valori di K maggiori di $1,114$, CK diviene sempre più piccolo del secondo membro, e le volte che vi corrispondono hanno quindi un eccesso di stabilità sulle imposte, mentre che per valori di K inferiori ad $1,114$ il CK diventa maggiore del 2° membro dell'equazione, il che significa che le volte di questa specie non potrebbero sostenersi.

Non è raro il caso che questo risultato sia in contrad-

dizione colla pratica, ma ciò naturalmente dipende dal non aver tenuto conto nei calcoli, tra le diverse forze che agiscono sul sistema, dell'aderenza delle malte.

Dopo di ciò non è difficile il determinare il minimo spessore da assegnarsi ad una volta cilindrica di tutto sesto estradossata parallelamente, perchè essa possa mantenersi sul piano delle imposte. Come si è visto $K=1,114$ dà il limite delle volte possibili; rappresentando quindi con s il minimo spessore da darsi alla volta, evidentemente dovrassi avere:

$$\frac{r+s}{r}=1,114,$$

da cui

$$s=0,114r.$$

IV

La teoria di Coulomb è fondata sopra principii sodi e razionali, ma essa si restringe al solo caso dell'equilibrio limite e dei cunei incompressibili. Il sig. Mery, distinto ingegnere francese di ponti e strade, ha voluto fare un passo di più, e nel 1840, tenendo conto della compressibilità dei materiali, espose un metodo grafico per calcolare la stabilità delle volte, metodo fondato sul riflesso

che qualunque sia lo stato di equilibrio di un arco, in ciascuna congiunzione delle sue parti avvi sempre un determinabile punto pel quale passa la risultante unica di tutte le pressioni.

Quando una volta infatti è in equilibrio, ciascuna faccia degli elementi, in cui essa si suppone divisa, sopporta una pressione definita, che altro non è che la risultante delle diverse forze che sollecitano il sistema. Queste forze si riducono alla spinta orizzontale che si esercita alla chiave, al peso del cuneo limitato dalla superficie di giunto che si considera, ed ai sovraccarichi sì permanenti che accidentali, da cui la volta può venir aggravata. Il luogo geometrico dei punti d'applicazione delle risultanti di queste forze su ciascuno degli infiniti piani, in cui si può supporre scomposta la volta, determina nel profilo una curva $CC'C''$ (*fig. 9*) che dal Moseley fin dal 1830 venne chiamata *curva delle pressioni*.

Per l'equilibrio di una volta coi suoi piedritti, evidentemente questa curva deve essere contenuta nella superficie della loro comune intersezione. Se essa passasse, per es., per il vertice B, per il punto E dell'intradosso, e per il punto esterno D del piedritto di sostegno, la volta tenderebbe ad aprirsi all'intradosso in corrispondenza della chiave, all'estradosso nel punto F, ed il piedritto a rotare esternamente intorno allo spigolo orizzontale che passa per

D. Se la curva invece non raggiunge i punti B, E e D, ma se ne avvicina in guisa che le distanze BC, EC' e DC' siano rispettivamente dei minimi, nel caso che avvenire possa la rottura, essa tenderà a succedere nello stesso modo, ed il piano EF sarebbe il piano di rottura virtuale.

Lo studio della curva delle pressioni permetterebbe di considerare la stabilità delle volte sotto il punto di vista degli sforzi massimi per unità di superficie a cui si devono sottoporre i materiali impiegati, qualora si conoscessero positivamente le leggi secondo cui si ripartiscono le pressioni sulla superficie di un corpo solido ed omogeneo; ma finora l'analisi matematica si è applicata invano sopra questo punto essenzialissimo della fisica molecolare. Il sig. Mery di fronte a tale difficoltà, onde determinare la posizione dei centri di pressione ricorse alla legge ipotetica di già formulata da Navier e migliorata da Belanger, e che può chiamarsi *la legge del triangolo*.

Consideriamo il piano EF; il punto C' essendo il punto d'applicazione della risultante R di tutte le pressioni, la metà di queste agiranno sulla parte EC', questa parte quindi dovrà essere in grado di resistervi senza schiacciarsi. Così si dica per gli altri piani E/F', ecc. Ora la pressione unitaria non si mantiene costante in tutti i punti della EC', ma va aumentando da C' in E, quindi la muratura in vicinanza dello spigolo E si schiaccierebbe, se EC' avesse

la lunghezza limite che esigerebbe la metà della pressione totale, nel caso che fosse uniformemente distribuita. Navier ammette che la pressione unitaria essendo massima in E, decresca proporzionalmente alla distanza da questo punto, in modo da esser media in C' e nulla nel punto H determinato prendendo $HC' = 2EC'$. Rappresentando quindi la pressione totale colla superficie di un triangolo rettangolo di cui HE sia un cateto, l'altro cateto (la cui lunghezza indica con x) sarà eguale a $\frac{2R}{HE}$, e rappresenterà la pressione massima in E; in ogni altro punto la pressione sarà rappresentata dalla parallela condotta per esso al lato x . Ora nel punto E la pressione unitaria non dovendo superare il limite che comporta la natura dei materiali adoperati, ne risulta che la parte EC' dovrà essere capace di sopportare una pressione rappresentata da $x \cdot EC'$, e siccome la pressione totale sul piano EF è $\frac{3}{2} EC' \cdot x$, ne viene che la EC' dovrà esser capace di sopportare $i \frac{2}{3}$ della pressione totale che si esercita sulla superficie di cui fa parte.

Le dimensioni determinate dietro tali considerazioni sarebbero sufficienti ad assicurare l'equilibrio statico di una volta; ma passando dal concetto teorico al pratico di leggieri si comprende come esse debbano essere sensibil-

mente aumentate, e come quindi la curva delle pressioni possa nel caso concreto assumere in uno stesso profilo un'infinità di posizioni diverse, a ciascuna delle quali corrisponde nella volta un modo particolare di comportarsi sotto l'azione delle forze che tendono a disgiungerla in varie parti, od a produrre lo schiacciamento dei materiali in determinati punti.

Riesce poi impossibile il determinare esattamente quella posizione della curva che effettivamente si realizzerà, giacchè essa dipende in gran parte dai piccoli spostamenti che hanno luogo nella volta all'atto del disarmo, e dai sovraccarichi accidentali a cui la volta potrà essere sottomessa.

Ecco il metodo suggerito dal Mery per determinare nel caso di una volta cilindrica la curva delle pressioni.

Rappresenti la figura 10 il profilo di una mezza volta cilindrica; sia S la spinta orizzontale e C il suo punto di applicazione. Si consideri un cuneo qualunque della volta $ADPQ$ e sia d il punto d'incontro della direzione della spinta colla verticale che passa pel centro di gravità di quella parte di volta. Si prendano le rette de e df rispettivamente proporzionali alla spinta ed al peso del cuneo considerato, si costruisca il parallelogramma delle forze, la risultante rappresenterà la pressione totale che si esercita sul piano passante per Q , ed il punto a in cui essa incontra il raggio QN sarà il centro di pressione, ossia un

punto della curva cercata. Procedendo in modo analogo si potrebbero determinare quanti punti si vogliono dalla curva, la quale, astrazione fatta dall'azione dei sovraccarichi accidentali, sarebbe pienamente determinata, quando fosse noto *a priori* il punto d'applicazione della spinta orizzontale alla chiave.

Stante il modo con cui succede la rottura in queste volte, si è visto che quando ha luogo l'equilibrio, la spinta si può supporre applicata al punto superiore B della chiave.

Praticamente però tutte le volte devono avere un eccesso di stabilità, per cui è evidente che il centro di pressione alla chiave non cadrà al vertice ma in un punto intermedio fra A e B. Non si ha nessun dato teorico, nè fornito dall'esperienza, che serva a precisare la posizione del punto C; tuttavia i diversi autori che trattarono delle volte sotto questo punto di vista, sono abbastanza d'accordo nel fissarlo ai due terzi della grossezza dell'arco propriamente detto, a partire dall'intradosso.

Questa regola pratica non sembra tutt'affatto arbitraria, quando si supponga che nell'atto della rottura della volta, con aprimento alla chiave verso l'intrados, la pressione sia ripartita sul giunto AB in guisa che sia nullo il valore della pressione riferita all'unità di superficie lungo la generatrice AA', secondo la quale l'aprimento incomincia a verificarsi, che abbia un valor massimo la pressione rife-

rita all'unità di superficie lungo la generatrice BB' , intorno alla quale sta per avvenire la rotazione, e che talmente cresce da A'' verso B'' , da stare la pressione riferita alla unità di superficie in un punto qualunque X a quella che ha luogo in B'' , come la distanza $A''X$ sta alla distanza $A''B''$. Infatti considerando il vólto siccome un solido prismatico nelle vicinanze del giunto verticale AB , fra la distanza $OA''=V$ del centro di superficie O del rettangolo $ABB'A'$ dalla retta AA' , su cui è nulla la pressione riferita all'unità di superficie, la distanza $OC=V_1$ del punto di applicazione della pressione su tutto il giunto dal detto centro O , ed il quadrato G^2 del semiasse dell'ellisse centrale d'inerzia disposto secondo $A''B''$ pel caso della sezione rettangolare, si deve avere la relazione (Flessione prodotta nei solidi rettilinei da forze parallele ai loro assi — CURIONI, *L'arte di fabbricare*):

$$V = \frac{G^2}{V_1}$$

Ma $V = \frac{1}{2} A''B''$ e $G^2 = \frac{1}{12} \overline{A''B''}^2$,

quindi: $V_1 = OC = \frac{1}{6} A''B''$.

Ora: $B''C = OB'' - OC = OA'' - OC = V - V_1$,

epper ciò: $B''C = \frac{1}{2} A''B'' - \frac{1}{6} A''B'' = \frac{1}{3} A''B''$.

Si può trovare la spinta orizzontale cercando qual è la forza da applicarsi in C normalmente al giunto AB , affinché

i massi in cui è divisa la volta non siano in pericolo di rotare intorno ai corrispondenti spigoli d'intradosso Q, R,E. Perciò considerando una parte qualunque ABNQ del disegnato profilo, si congiunga il punto *d* col punto *a'* posto sul giunto QN ai $\frac{2}{3}$ a partire da N (punto in cui si suppone applicata la spinta, essendo levato il concio di chiave), si costruisca il parallelogrammo di lato *df* proporzionale al peso del cuneo ed avente la diagonale nella direzione di *da'*. Il lato orizzontale *de'* di questo rettangolo va considerato, siccome la spinta orizzontale applicata in C quando la volta aprendosi alla chiave verso l'intradosso, sta per aprirsi nel giunto QN verso l'estrados rotando attorno allo spigolo rappresentato in Q. Questa operazione si ripeta per tutte le parti di volta poste fra il giunto verticale della chiave ed i giunti RS,EL; il maggior lato orizzontale dei rettangoli che si ottengono, sarà quella forza che si assume come rappresentante la spinta orizzontale S.

La conoscenza della pressione totale e della sua direzione serve anche a far conoscere i piani dove tende a farsi la rottura per scorrimento. Chiamando ϕ l'angolo che fa la direzione della pressione R col letto del cuneo, lo sforzo che tende a produrre la rottura della volta per scorrimento è: $R \cos \phi$; lo sforzo normale al letto è: $R \sin \phi$; il valore di ϕ che renderà minima la differenza:

$$f(\sin \phi - \cos \phi)$$

essendo f il coefficiente d'attrito, determinerà il piano ove con maggior intensità tende a prodursi la rottura per scorrimento.

La determinazione della curva delle pressioni come punto di partenza nello studio sulla stabilità delle volte, venne tentata anche analiticamente, e fra i lavori più pregiati su tale argomento, viene citato quello dell'ing. Corvallo.

Una teoria rigorosissima delle volte fu, non è gran tempo, data dal sig. Yvon Villarceau, che, come dice il Claudel nel suo *Manuale degli ingegneri e degli architetti*, valse al suo autore l'approvazione più lusinghiera dell'accademia delle scienze di Parigi.

Il sig. Villarceau ammette, come il Mery, l'esistenza della curva dei centri di pressione, e suppone il vólto composto di peducci o pietre (*voissoirs*) infinitamente sottili ed affusolati, sicchè il loro contatto abbia luogo per una sola retta passante per il centro di pressione situato a metà tra l'intradosso e l'estradosso dell'arco, e passante eziandio per il centro loro di gravità, *se non rigorosamente, con approssimazione più che sufficiente nella pratica*. Egli inoltre fa astrazione dall'attrito e dalla resistenza opposta dall'adesione del cemento. Ammesse tali ipotesi, l'autore traduce il quesito dell'equilibrio delle volte nel linguaggio del calcolo infinitesimale a norma delle leggi più rigorose della meccanica, e ne deduce le equazioni generali

di stabilità. Queste equazioni però non sono risolvibili che nel caso più semplice di un arco, o vólto non carico, col quale si vorrebbe solo coprire un determinato spazio; per gli altri casi più importanti egli è giocoforza abbandonare l'esattezza delle basi sovraccennate, causa la difficoltà delle integrazioni nelle quali si inciampa, e ricorrere a formole empiriche, o ad ipotesi più o meno conformi al vero, senza arrivare ad una soluzione compiuta ed abbastanza semplice, quale si esige per essere di un uso abituale.

V

Il generale Cavalli, prendendo esso pure per base la curva delle pressioni, in una sua memoria presentata alla Reale Accademia delle scienze di Torino, esponeva nel 1859 una nuova teoria sui vólti in muratura; a compimento del mio breve lavoro ho creduto bene di descrivere il processo dal prelodato autore seguito nel caso particolare delle volte cilindriche con sovraccarico spianato orizzontalmente, quali sono in generale quelle dei ponti.

Abbiassi un arco col suo sovraccarico; se esso è simmetrico d'ambi le parti della chiave, basterà considerare una sola metà, e se le parti sono debitamente proporzionate, le forze

tutte che si fanno equilibrio saranno riducibili nel piano verticale che passa per il mezzo della sua larghezza, e questo equilibrio dovrà sussistere astrazion fatta dalla forza di coesione, dalle resistenze d'attrito, e da ogni altra forza in fuori della gravità e della resistenza de' materiali alla compressione. La distinzione tra l'arco propriamente detto, ed il suo sovraccarico tanto permanente che accidentale, non occorre più sia mantenuta nello stabilire le condizioni dell'equilibrio statico, per questo equilibrio potendosi considerare assieme il peso delle due parti, riducendolo sulla linea dei centri di pressione. Supponendo infatti diviso l'arco (intendendo per arco la volta e la sopraccarica), in tante parti con piani verticali equidistanti e paralleli all'asse della volta, quando questi piani siano sufficientemente vicini, si potranno le singole parti considerare come prismi, e ritenere la porzione di volta corrispondente a ciascuna parte siccome rettilinea; e sarà quindi lecito supporre che la risultante delle pressioni da cui ciascuna parte di volta è gravata passi pel suo asse, in guisa che il seguito di questi assi formi un poligono che vada a sostituirsi alla curva dei centri di pressione, e ai vertici di esso si trovino applicate le risultanti dei pesi delle metà rispettive di due parti contigue.

Nel supporre la risultante dei due pesi nei vertici del poligono, si commette, a dire il vero, un piccolo errore, essendo le metà di due parti contigue rispettivamente una

maggiore dell'altra, ma stante la piccolezza di queste parti l'errore può venir trascurato, tanto più che esso non nuoce, ma giova bensì alla stabilità del sistema.

Ciò premesso, sia $A A_1 A_2 A_3 \dots$, ecc., una parte del sopraddetto poligono; A ed M sieno i punti estremi della volta;

$p_1, p_2, p_3, \dots p_n$ le risultanti dei pesi delle metà adiacenti delle singole parti;

P il peso dell'arco intero, eguale al doppio della somma $p_1 + p_2 + p_3 + \dots p_n$, ammesso che le parti sieno in numero di $2n$, ed i piani verticali incontrino nel mezzo i lati estremi.

$q, q_1, q_2, q_3, \dots q_n$ le pressioni sopportate rispettivamente dai lati $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots A_{n-1}A_n$;

$t, t_1, t_2, t_3, \dots t_n$ le lunghezze degli stessi lati.

Si può ammettere che la densità di tutta la massa dell'arco sia la stessa, benchè possa la sopraccarica a parità di volume pesar di meno, potendo il maggior peso trovar compenso nella determinazione della carica massima; quindi i pesi $p_1, p_2, p_3, \dots p_n$ saranno proporzionali alle ordinate rispettive.

Ora affinchè il poligono si possa dire in equilibrio, è necessario e basta che questo equilibrio sussista in ciascuno dei suoi vertici. Nel vertice A concorrono tre forze: la pressione q_1 del lato $A_1 A_2$, la pressione q del lato $A A_1$,

ed il peso p_1 . Onde queste forze si facciano equilibrio è d'uopo che la pressione q_1 sia eguale e direttamente contraria alla risultante delle altre due q e p_1 . Perciò se la retta BA_1 rappresenta la forza q , ed $N_1 A_1$ il peso p , nel parallelogramma $B_1BA_1N_1$ la diagonale B_1A_1 rappresenterà la risultante della forza di compressione del lato AA_1 e del peso p , della parte di arco che si estende da mezzo a mezzo dei lati adiacenti del poligono, il di cui centro di gravità, come dianzi si è visto, si può ritenere sulla verticale condotta da detto vertice, e quindi si potrà applicare al vertice stesso con tanta maggior approssimazione, quanto più grande è il numero delle parti in cui l'arco è stato diviso. Poniamo ora che si sia assunto $BA_1 = m \cdot AA_1$ (essendo m un numero qualsiasi), poichè $B_1D = N_1N_2$ sarà necessariamente $D_1A_2 = B_1A_1$, e la forza di compressione del lato A_1A_2 sarà conseguentemente rappresentata dalla retta medesima D_1A_2 .

Si trasporti ora il punto d'applicazione della risultante B_1A_1 da A_1 in A_2 , e si decomponga questa nelle due componenti, orizzontale l'una $D_2A_2 = DA_1$, verticale l'altra $A_2C_1 = A_1N_1 = p_1$.

Rappresentando la ordinata N_2A_2 il peso p_2 , essendo $B_1N_1 = m \cdot N_1N_2$, sarà pure $N_1A_1 = m \cdot N_2C_1$ e quindi:

$$N_2A_2 = \left(1 + \frac{1}{m}\right) N_1A_1.$$

Bisognerà dunque aggiungere alla N_2A_2 la N_2C_2 eguale alla precedente componente N_1A_1 per avere la componente nuova A_2C_2 ; in maniera che sarà:

$$A_2C_2 = \left(1 + \frac{1}{m}\right) N_1A_1 + N_2C_2.$$

La diagonale B_2A_2 sarà la risultante di $D_2A_2 = B_1A_1$, e di A_2C_2 , per cui il lato A_2A_3 dovrà trovarsi sul prolungamento di B_2A_2 ; ed essendo $N_2N_3 = N_1N_2$, la forza di compressione del lato A_2A_3 sarà rappresentata dalla B_2A_2 .

Continuando lo stesso modo di procedere, si scorge: 1° che tutti i vertici sono sollecitati sempre dalla stessa componente orizzontale che preme il lato di mezzo del poligono; 2° che le componenti verticali: $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ corrispondenti ai vertici di ordinate: $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ devono avere le seguenti espressioni:

$$y_1 = z_1.$$

$$(1) \left\{ \begin{array}{ll} y_2 = \frac{m+1}{m} y_1; & z_2 = \frac{2m+1}{m} z_1 \\ y_3 = \frac{m+1}{m} (y_1 + y_2) - y_1; & z_3 = \frac{2m+1}{m} z_2 - z_1 \\ y_4 = \frac{m+1}{m} (y_1 + y_2 + y_3) - y_1 - y_2; & z_4 = \frac{2m+1}{m} z_3 - z_2 \\ \dots & \dots \\ y_n = \frac{m+1}{m} (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1}) - y_1 - y_2 - \dots - y_{n-2}; & z_n = \frac{2m+1}{m} z_{n-1} - z_{n-2}. \end{array} \right.$$

Facendo la differenza tra y_n e y_{n-1} , si ha :

$$y_n - y_{n-1} = \frac{m+1}{m} y_{n-1} - y_{n-2},$$

da cui (2) $y_n = \frac{2m+1}{m} y_{n-1} - y_{n-2};$

altra espressione di y_n della forma istessa che quella di z_n .

Siano ora :

L la corda del poligono dei centri di pressione ;

l le distanze dei piani verticali divisori ;

A la larghezza dell'arco ;

D il peso dell'unità di volume della muratura con cui l'arco è costruito.

Evidentemente si avrà :

$$l = \frac{L}{2n} ; \quad t = BA_1 = mAA_1 = ml.$$

Dai triangoli rettangoli $B_1BA_1, B_2D_2A_2...$ ecc., si ottiene :

$$t_1 = \sqrt{l^2 + z_1^2}, \quad t_2 = \sqrt{l^2 + z_2^2}, \quad t_3 = \sqrt{l^2 + z_3^2}, \dots$$

$$t_n = \sqrt{l^2 + z_n^2}, \quad q = p_1 \frac{t}{y_1}, \quad q_n = p_1 \frac{t_n}{y_1}.$$

Ponendo il valore di t in funzione di l , e quello di l in funzione di L , si ha :

$$(3) \quad q = p_1 \frac{ml}{y_1} = \frac{mLp_1}{2ny_1}.$$

Essendo ora α un numero compreso tra l ed n , si avrà:

$$\begin{aligned}
 (4) \quad q_\alpha &= p_1 \frac{t^\alpha}{y_1} = \frac{p_1 \sqrt{t^2 + z_\alpha^2}}{y_1} = \\
 &= \frac{p_1 \sqrt{m^2 L^2}}{y_1 \sqrt{4m^2}} + z_\alpha^2 = \\
 &= q \sqrt{1 + \left(\frac{2nz_\alpha}{mL} \right)^2}.
 \end{aligned}$$

Cerchiamo ora l'espressione di p_1 .

Essa sarà eguale alla somma delle metà contigue delle due parti di arco NAA_1N_1 , $N_1A_1A_2N_2$; quindi:

$$p_1 = A \cdot D \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{t}{m} y_1 + \frac{1}{2} \frac{t}{m} y_1 + \frac{1}{8} \frac{t}{m} \frac{y_1}{m} \right) = A \cdot D \cdot \left(\frac{8m+1}{8m^2} t y_1 \right);$$

ponendo per t il suo valore in funzione di L :

$$(5) \quad p_1 = \frac{8m+1}{16mn} y_1 \cdot L \cdot A \cdot D.$$

Per avere il valore del peso totale, si sa che

$$P = 2(p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n)$$

ma
$$p_2 = p_1 \frac{y_2}{y_1}, \quad p_\alpha = p_1 \frac{y_\alpha}{y_1},$$

inoltre
$$y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n = (m+1)y_n - m y_{n-1},$$

quindi
$$(6) \quad P = 2p_1 \frac{(m+1)y_n - m y_{n-1}}{y_1}.$$

Dall'esame della figura si ricava poi:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{m} z_{n-1}, \quad z_n = y_n + z_{n-1};$$

ricavando z_{n-1} dalla prima e sostituendolo nella seconda, si ha:

$$(7) \quad z_n = (m+1)y_n - my_{n-1}.$$

Sieno ancora:

H la saetta del poligono dei centri di pressione;

$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ rispettivamente le superficie delle sezioni della volta nei centri di pressione;

S la superficie della sezione fatta alla chiave, ossia al lato orizzontale di mezzo del poligono;

R la resistenza alla compressione dei materiali impiegati sull'unità superficiale;

$K, K_1, K_2, K_3, \dots, K_n$ rispettivamente gli spessori della volta alla chiave, ed ai vertici del poligono dei centri di pressione.

La corda L unendo i punti di mezzo dei lati estremi, i punti cioè d'incontro di questi lati coi piani verticali divisori, si avrà:

$$(8) \quad H = \frac{y_n + y_{n+1}}{2} - y_1,$$

da cui

$$(9) \quad y_1 = \frac{H}{\frac{y_n + y_{n+1}}{2} - 1}.$$

In questa espressione, quando si conosca m ed n , il termine $\frac{y_n + y_{n+1}}{2}$ è noto. Quindi essa servirà a sperimentare i valori stessi in un con quello di y_1 , in maniera da procurare un peso conveniente per la stabilità dell'arco.

In virtù poi del risultato fondamentale dell'esperienza sulla resistenza dei solidi prismatici ed omogenei alle rotture per compressione, si dovrà avere:

$$(9) \quad S = \frac{q}{R} \quad ; \quad S_1 = \frac{q_1}{R} \dots \dots \dots S_\alpha = \frac{q_\alpha}{R}.$$

Ordinariamente la superficie dell'intradosso delle volte dei ponti è cilindrica, ed allora resta parimente determinata la superficie di estradosso. Essendo:

$$AK = S = \frac{q}{R},$$

sostituendo per q il suo valore dato dalla (3), si avrà:

$$K = \frac{mLp_1}{2ny_1AR};$$

ma dalla (5) si ha $p = \frac{8m+1}{16mn} y_1 LAD$, quindi:

$$(10) \quad K = \frac{\frac{8m+1}{16n} y_1 L^2 AD}{2ny_1AR} = \frac{8m+1}{32n^2} \frac{D}{R} L^2.$$

Per un vertice qualunque α si avrà:

$$A \cdot K_\alpha = \frac{q_\alpha}{R};$$

ma si è visto (equazione 4) che $q_\alpha = q \sqrt{1 + \left(\frac{2nz_\alpha}{mL}\right)^2}$,

quindi: $(11) \quad K_\alpha = K \sqrt{1 + \left(\frac{2nz_\alpha}{mL}\right)^2}.$

Il valore di K può tutto al più essere eguale a quello di y_1 ; si potrà quindi porre $K = Cy_1$, essendo C un coef-

ficiente frazionario dipendente dalla sovraccarica, nonché dall'eccesso di peso compreso in P.

Mettendo nell'equazione (10) invece di K il suo valore in funzione di y_1 , e per y_1 la sua espressione (9); nell'equazione (6) il valore di p_1 e di y_1 , si ottengono dopo alcune semplificazioni le relazioni seguenti, che legano tra loro le quantità P, H, L, R, A, D, e C:

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} \frac{CHR}{DL^2} = \frac{8m+1}{32n^2} \left(\frac{y_n+y_{n+1}}{2y_1} - 1 \right) \\ \frac{P}{HLAD} = \frac{8m+1}{4mn} \frac{(m+1)y_n - my_{n-1}}{y_{n+1} + y_n - 2y_1} \end{array} \right.$$

Le ordinate dei vertici nel poligono sono contate da un asse parallelo al piano supposto orizzontale del suolo dell'arco; posto quindi che y , rappresenti la effettiva grossezza dell'arco alla chiave, le altre ordinate debbono egualmente rappresentare le grossezze dell'arco medesimo secondo la loro propria direzione nei loro rispettivi vertici; quindi se alla chiave il suolo è discosto dall'origine della rispettiva ordinata di $\frac{1}{2} K$ negli altri punti si dovrà scostare di $\frac{1}{2} K_n \frac{t_n}{t}$ essendo K_n normale alla curva dei centri di pressione, ed obliqua rispetto alla direzione verticale delle ordinate medesime.

In tali condizioni il suolo dell'arco non riuscirebbe più

orizzontale, ma seguirebbe una curvatura le cui ordinate, $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ sarebbero rispettivamente espresse da

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} K_1 \frac{t_1}{t} \\ x_2 &= \frac{1}{2} K_2 \frac{t_2}{t} \\ &\dots \dots \dots \\ x_\alpha &= \frac{1}{2} K_\alpha \frac{t_\alpha}{t} = \frac{1}{2} K \left(1 + \frac{z_\alpha^2}{t^2} \right). \end{aligned}$$

La convessità del suolo negli archi di ponte è vantaggiosa, inquantochè oltre ad assicurarci contro il difetto opposto, ci premunisce contro i nocivi effetti della forza centrifuga svolta dai carri che passano con velocità considerevole soprattutto sulle strade ferrate; tuttavia volendosi ridurre il suolo ad essere orizzontale, la eccedente carica che si sarebbe obbligati di aggiungere verso le imposte sarebbe compensata da quella verso la chiave dipendente dall'aver supposta la risultante dei pesi nei singoli vertici del poligono.

Nè con questa eccedenza di carico seguirà sensibile cambiamento nelle curve dei centri di pressione; varierà solo la forza comprimente sulle varie parti del vólto. Infatti nell'aggiungere un eccesso di carico all'arco, non si fa che accrescere il valore del suo peso di una quantità eguale a quello dello strato di materiale sovrapposto, quindi il nuovo valore di y_1 essendo così determinato dall'equazione (9) si

dedurrà il valore del solo termine variabile con m per questa circostanza:

$$\frac{y_n + y_{n+1}}{2y_1} = \frac{H + y_1}{y_1},$$

dalla quale funzione ritenendo lo stesso valore di n , si deduce il nuovo valore di m , sostituito il quale nella formola (11), ove sia già determinata la grossezza K_α del vólto, se ne dedurrà il valore della forza comprimente R_α in un punto qualsiasi:

$$R_\alpha = \frac{8m+1}{32n^2} \frac{DL^2}{K_\alpha} \sqrt{1 + \left(\frac{2nz_\alpha}{mL} \right)^2},$$

la sola che potrà variare sensibilmente col variare della sovraccarica dell'arco.

Onde rendere più facili i calcoli delle diverse equazioni trovate, si può costruire una tavola dei coefficienti numerici delle ordinate, corrispondenti ai diversi valori che possono ricevere m ed n .

Riassumendo ora le operazioni sin qui eseguite, e passando al caso pratico, ecco come si potrà procedere.

Sia noto: lo spessore A , la corda L , la saetta H , il peso D dell'unità di volume della muratura, il numero n delle parti eguali in cui fu diviso il mezzo arco. Siccome nella pratica è duopo che il peso dell'arco propriamente detto sia eguale a tante volte quello della sovraccarica massima

quante volte l'esperienza delle costruzioni sufficientemente stabili lo ha dimostrato necessario, così si incomincerà, mediante l'equazione (6), a cercare il peso totale P dell'arco quale incirca si vuole che risulti.

Determinato in tal condizione la m , e dato il rapporto C fra la grossezza del vólto e la totale grossezza dell'arco alla chiave, si trova la forza di compressione R a cui saranno sottoposti i materiali di costruzione, mediante la prima delle equazioni (12).

Colla formola (10) si ottiene il valore di K , e mediante la relazione $y_1 = \frac{K}{C}$ ottenuto il valore di y_1 , basterà questo moltiplicare per i successivi coefficienti numerici dati dalla tavola, e corrispondenti ai noti valori di m ed n per avere tutte le altre ordinate. Per mezzo delle equazioni (3), (4), (5), (7), (8), si possono ricavare le espressioni delle forze comprimenti le varie parti del vólto, in funzione di quantità cognite. Da queste espressioni, l'autore della teoria deduce che:

1° La forza comprimente il vólto alla chiave è proporzionale al quadrato della corda del poligono;

2° Che nelle altre parti del vólto le forze comprimenti crescono col crescere del rapporto della saetta colla corda;

3° Che le forze di compressione sono proporzionali alla densità della muratura.

La superficie delle sezioni del vólto si ottengono mediante

le formole (9), e finalmente nel caso del vòlto a sezione rettangolare le grossezze sono fornite dalle equazioni (10) e (11).

La esposta teoria venne pure estesa al caso delle volte circolari, ed a quello degli archi in armatura; l'applicazione non ne pare complicata, e se l'esattezza matematica non è in essa completamente mantenuta, le formole che si deducono sono di facile uso col soccorso d'apposite tavole, e forniscono tutti gli elementi necessari nella pratica.

Una recentissima soluzione ha avuto il problema dell'equilibrio delle volte dal signor M. Scheffler. Di fronte alla legge incognita della ripartizione delle pressioni, egli non esitò, per così dire, a far un passo indietro, e restringendosi al caso dei cunei incompressibili, diede una teoria nuova affatto e di grande semplicità.

La legge ipotetica di Navier è dallo Scheffler recisamente rigettata, siccome quella che non è fondata su alcuna osservazione, e che anzi certi fatti tendono a confutare; gli effetti della compressibilità dei materiali vengono da esso introdotti nel calcolo in modo affatto *empirico*, seguendo le norme delle stabili costruzioni eseguite anteriormente.

Per stabilire il suo punto di partenza, l'autore sopra citato, ha ricorso al principio *della minima resistenza* annunciato dal Moseley, e da lui stesso splendidamente dimostrato.

Ce principe, dice il signore V. Fournié, *lève l'indéter-*

mination dans le problème des voûtes et dans beaucoup d'autres analogues...

Grâce à ce progrès, la théorie des voûtes est édiflée dès aujourd'hui pour le cas des voussoirs incompressibles.

Les efforts des chercheurs peuvent être reportés en avant sur le point capital, la découverte de la loi de répartition des pressions à la surface d'un corps solide homogène.

Ici ce n'est plus la théorie des voûtes seule qui est intéressée, toute la science des constructions réclame pour base cette loi inconnue, qui est le grand desideratum de la physique moléculaire.

V. G.

TESI LIBERE

MECCANICA APPLICATA ED IDRAULICA PRATICA

Teoria delle macchine a conio.

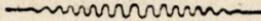


COSTRUZIONI CIVILI, STRADALI ED IDRUALICHE

Archi equilibrati caricati di pesi.

MACCHINE A VAPORE E FERROVIE

Resistenza alla trazione sulle vie ferrate.



GEOMETRIA PRATICA

Planimetro ortogonale.

Fig. 1.

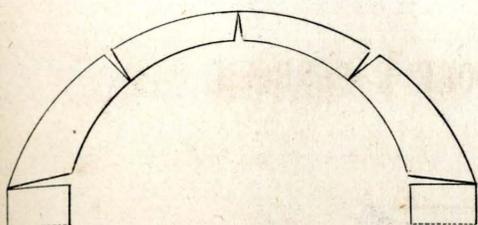


Fig. 2.

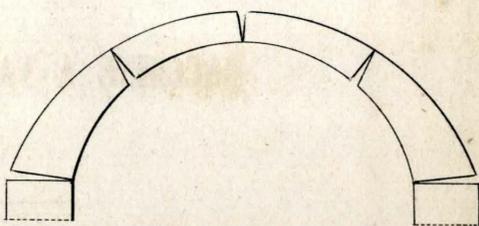


Fig. 3.

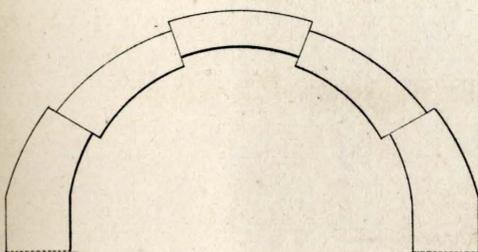


Fig. 4.

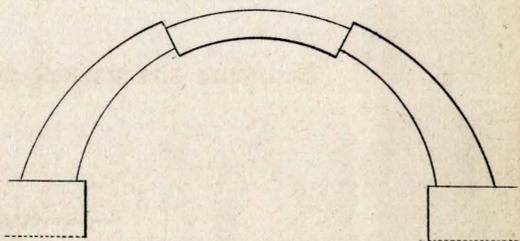


Fig. 5.

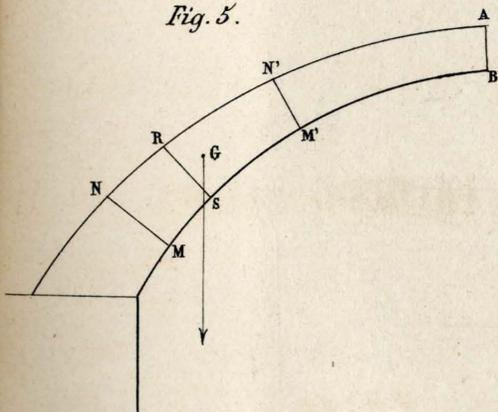


Fig. 6.

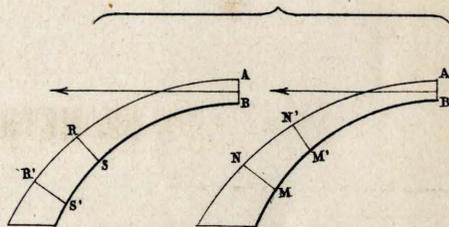


Fig. 7.

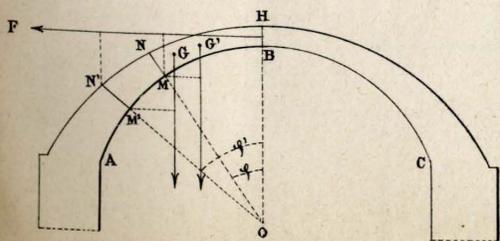


Fig. 8.

