DI DUE INCAVALLATURE IN FERRO E LEGNO

DISSERTAZIONE

presentata alla Commissione Esaminatrice

della R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri in Torino

DA

CARLO BOVONE

DI GENOVA

per ottenere il Diploma di Laurea

DI

INGEGNERE CIVILE

1873

TORINO
VINCENZO BONA
TIPOGRAFO DI SUA MAESTÀ

Via Ospedale, 3.

A' MIEI GENITORI CARISSIMI

DI DUE INCAVALLATURE IN FERRO E LEGNO

Le moderne teorie sulla resistenza de' materiali acquistano di giorno in giorno importanza maggiore per le applicazioni che se ne fanno all'arte del costruttore; giacchè, se colla scorta di esse si poterono ideare e compiere grandiose opere, pur è validissimo il loro aiuto nelle modeste costruzioni, ove, principalmente colla solidità, si vuol conseguire l'economia. Non sempre si possono adottare per tipo opere esistenti da cui trarre esempio delle dimensioni delle parti, e si debbe usare dei materiali più parcamente che gli antichi costruttori non fecero; è d'uopo quindi l'aver una guida per la determinazione delle forme e delle dimensioni delle parti costituenti un'opera, e tal guida, col concorso di valentissimi costruttori che volsero il loro ingegno allo studio delle teorie, si ha nei recenti trattati della resistenza de' materiali.

E tracciata la via nella maggior parte dei casi generali, restano i moltissimi casi particolari che l'arte presenta di volta in volta al costruttore. Due di questi casi si presentarono a me nello studio del tema ch'io estrassi a sorte per essere ammesso all'esame di Costruzioni, e la maniera con cui mi parve di risolverli io espongo in questo mio primo lavoro, pel quale invoco l'indulgenza della Commissione Esaminatrice.

Il tema s'intitola: *Progetto di un edificio per mercato.* Adottai per tipo il mercato costrutto in questa città, colla facciata ovest in piazza Bodoni. La pianta dell'edificio è un rettangolo (Fig. A), i cui lati pochissimo differiscono fra di loro, per cui nella parte centrale della pianta fu possibile inscrivere un ottagono coperto da un tetto a tronco di piramide ottagonale, il quale regge una piccola lanterna (Fig. B). L'area compresa fra il quadrato in cui fu iscritto l'ottagono e il rettangolo esterno è coperta da un tetto sostenuto da mezze incavallature (Fig. C) che s'appoggiano sul muro esterno da un'estremità, e sul muro del quadrato interno dall'altra: l'area racchiusa nell'ottagono è coperta da un tetto sostenuto da mezze incavallature del tipo Polonceau (Fig. D), e le cui catene e tiranti si riuniscono in un solo disco centrale. Tutte e due le incavallature hanno i puntoni in legno e catene e tiranti in ferro e colonnette in ghisa.

Incavallatura perimetrale (Fig. 1).

Questa incavallatura è costituita: 1° da un puntone AB di legno che s'appoggia coi suoi estremi A e B sui piedritti M, M'; 2° da un contropuntone CD di legno che s'appoggia col suo estremo inferiore D sul piedritto M' e coll'estremo superiore C è unito al puntone AB; 3° da due razze GH, HL di legno unite rispettivamente al puntone e al contropuntone coi loro estremi superiori G e L e unite cogli estremi H inferiori al monaco; 4° da un monaco CH di ferro, unito superiormente in C al puntone e in H alle razze; 5° da una catena AD di ferro che unisce le estremità inferiori A e D del puntone e del contropuntone, ed è sostenuta nel suo punto di mezzo dalla estremità inferiore E del monaco.

Nell' edificio ad uso di mercato costrutto in piazza Bodoni è destinata quest' incavallatura al sostegno della copertura e di correnti di legno orizzontali appoggiati coi loro estremi sui fianchi del puntone e proiettati in I e in F rispettivamente nel piano dell'incavallatura e in $I' I_1'$, $F' F_1'$, $I'' I_1''$, $F'' F_1''$ in pianta (Fig. 2). Per ciò l'incavallatura è caricata di un peso uniformemente distribuito secondo la proiezione orizzontale e di una forza P applicata nel punto I del puntone, e di una forza P_1 applicata nel punto F del medesimo.

Espongo qui il modo che mi pare acconcio per calcolare le reazioni che gli appoggi M, M' debbono presentare al sistema che sostengono; e le dimensioni dei pezzi dell'incavallatura, perchè resistano agli sforzi che in essa sono provocati.

Si chiami a la distanza dei due piedritti M, M' (Fig. 1), a' la lunghezza AG, a'' la GC, a''' la CB, p il carico del puntone più il suo peso, per ogni m. di proiezione orizzontale: α l' angolo acuto che misura l' inclinazione dell'asse del puntone coll' orizzontale, β l' angolo CHG del monaco coll'asse della razza GH e si noti che si fa ang. CHG = ang. CHL.

Si considera il puntone come un solido uniformemente caricato di pesi secondo la sua proiezione orizzontale e sollecitato dalle forze P e P_1 e appoggiato ai suoi punti estremi A e B e ai punti intermedii G e C; epperciò si calcolano le reazioni dei quattro appoggi o direttamente, o ripartendo il carico della forza P in I, in un carico distribuito uniformemente secondo la proiezione orizzontale della travata GC; e quello della forza P_1, in un carico uniformemente distribuito secondo la proiezione orizzontale della travata CB: si chiami p' la somma del nuovo carico unitario della travata GC col carico p già considerato, e si chiami p'' il carico somma, analogo a p', per la travata CB: allora si può applicare alle prime due travate, AG, CG la relazione che lega i momenti inflettenti sugli appoggi per due travate successive, e poi si può applicare la stessa equazione alle due travate CG e CB: si avranno così due equazioni fra i quattro momenti inflettenti corrispondenti alle sezioni degli appoggi: due di questi momenti, cioè quelli in A e in B, devono essere nulli, quindi restan due equazioni fra due incognite, epperciò i quattro momenti inflettenti restano determinati. Dopo di ciò si determinano le espressioni dei momenti inflettenti in una sezione qualunque di ciascuna travata e poi gli sforzi di taglio, e, per mezzo di questi, le reazioni dei quattro appoggi. Un altro metodo con cui si determinano queste reazioni valutando più esattamente l'azione delle forze P e P_1 noterò trattando l'altra incavallatura che fu adottata nell'edificio per mercato. Si perviene così alla determinazione delle forze R, R_1, R_2, R_3 applicate nei punti A, G, C, B rispettivamente e normalmente al puntone e dirette d'alto in basso.

Allora si possono conoscere le forze sollecitanti i pezzi.

Si consideri il punto G (Fig. 1): attorno a questo punto debbono farsi equilibrio le forze R_1 e le reazioni opposte dalle travi AG, GH al muoversi del punto G: si hanno quindi le due seguenti equazioni d'equilibrio tra le componenti verticali e le orizzontali delle forze R_1, R_1' R_1'', la prima delle quali è diretta in basso secondo la normale al puntone e le altre due in alto secondo HG e secondo AG rispettivamente:

$$R_1 \cos \alpha = R_1' \cos \beta + R_1'' \operatorname{sen} \alpha$$

$$R_1 \operatorname{sen} \alpha = R_1' \operatorname{sen} \beta - R_1'' \cos \alpha.$$

L'angolo β si può esprimere in funzione di a'' e di CH se questo è dato per mezzo della formola

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a'' \cos \alpha}{\mathrm{CE} - a'' \operatorname{sen} \alpha}$$

che darà CE se fosse noto β. Dalle due equazioni precedenti si deducono

$$R_1' = \frac{1}{\cos(\alpha - \beta)} R_1 \;, \quad R_1'' = R_1 \operatorname{tg}(\beta - \alpha).$$

Si consideri poi il punto H: attorno a questo punto le componenti orizzontali delle forze sollecitanti le due razze debbono farsi equilibrio di per sè sole, poichè la tensione del monaco che è applicata in H e volta da H a C e la tensione della staffa HE applicata in H e volta da H ad E, sono verticali: quindi si avrà la condizione d'equilibrio

$$R_1' \operatorname{sen} \beta = R_1''' \operatorname{sen} \beta$$

da cui

$$R_1' = R_1''' = R_1 \frac{1}{\cos(\alpha - \beta)}.$$

L'equazione di stabilità per ciascuna delle razze sarà quindi

$$R_1 \frac{1}{\cos(\alpha - \beta)} = n'' R'' \Omega_1 .$$

E noto Ω_1 si valuterà il peso P' di ciascuna razza determinandone la lunghezza colla formola

$$GH = \sqrt{a''^2 + \overline{CH}^2 - 2a'' \overline{CH} \operatorname{sen} \alpha}.$$

Si chiamino P'' il peso del monaco CH più quello della staffa HE che sopporta la catena, e P''' il peso della catena; questa è un solido orizzontalmente collocato su tre appoggi e che sopporta il proprio peso e una tensione applicata nella direzione del suo asse: le reazioni dei tre appoggi, poichè $AE = ED$ sono rispettivamente rappresentate da $\frac{3}{8} P'''$, $\frac{5}{8} P'''$, $\frac{3}{8} P'''$ nei punti A, E, D (CURIONI, *Resistenza de' materiali*): il monaco sostiene dunque per la catena una tensione diretta da C verso E di $\frac{5}{8} P'''$: pel proprio peso sostiene la tensione che sarà massima per la sezione in C, in cui sarà uguale a P'': per le due razze sostiene il doppio dello sforzo $R_1' \cos \beta$ e poniamo

$$T_1 = P'' + \frac{5}{8} P''' + 2 R_1' \cos \beta$$

dove T_1 è la tensione del monaco nella sezione C. Ciò posto osservisi che nel punto C sono applicate: la tensione T_1 massima del monaco e l'azione R_2 sull'appoggio; e che a queste forze si oppongono le reazioni delle travi AC e CD:

si hanno quindi le due seguenti equazioni d'equilibrio tra le componenti orizzontali e le verticali delle forze T_1, R_2, R_2' e R_2'', di cui le ultime due sono dirette rispettivamente secondo AC e secondo DC:

$$R_2 \operatorname{sen} \alpha = R_2' \cos \alpha - R_2'' \cos \alpha$$

$$R_2 \cos \alpha + T_1 = R_2' \operatorname{sen} \alpha + R_2'' \operatorname{sen} \alpha.$$

Da queste equazioni si deducono

$$R_2' = \frac{R_2}{\operatorname{sen} 2\alpha} + \frac{T_1}{2 \operatorname{sen} \alpha}, \quad R_2'' = \frac{T_1}{2 \operatorname{sen} \alpha} + \frac{R_2}{\operatorname{tg} 2\alpha}.$$

Si consideri ancora il punto B che esercita sul piedritto l'azione R_3: vi sarà equilibrio fra le reazioni R_3' verticale ed R_3'' orizzontale che può presentare il piedritto, per cui si avranno le due seguenti equazioni d'equilibrio

$$R_3' = R_3 \cos \alpha, \quad R_3'' = R_3 \operatorname{sen} \alpha.$$

L'azione secondo AB che il puntone AB esercita in B sul piedritto e rivolta da A verso B è dunque data dalla relazione

$$R_3'' = R_3''' \cos \alpha$$

da cui

$$R_3''' = R_3 \operatorname{tg} \alpha.$$

La somma delle forze secondo AB a cui è soggetto il puntone prima della sezione in A, se Π è il peso del puntone e di ciò che esso sopporta, è

$$\Pi \operatorname{sen} \alpha + R_1 \operatorname{tg} (\beta - \alpha) + \frac{R_2}{\operatorname{tg} 2\alpha} + \frac{T_1}{2 \operatorname{sen} \alpha} -$$

$$- R_3 \operatorname{tg} \alpha = S.$$

Questa forza S è applicata in A e diretta da B verso A: in questo punto il puntone esercita pure l'azione R normale ad AB per cui si debbono avere le due equazioni di equilibrio tra le componenti verticali e le orizzontali delle forze R ed S, le reazioni R' ed R'' dell'appoggio e $\frac{3}{8} P'''$ prodotta dalla catena, per cui

$$\frac{3}{8} P''' + R \cos \alpha + S \operatorname{sen} \alpha = R'$$

$$S \cos \alpha - R \operatorname{sen} \alpha = R''$$

da cui si ricava

$$R' = \frac{3}{8} P''' + R \cos \alpha + \Pi \operatorname{sen}^2 \alpha + R_1 \operatorname{tg} (\beta - \alpha) \operatorname{sen} \alpha +$$

$$+ \frac{R_2 \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} + \frac{T_1}{2} - \frac{R_3 \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

$$R'' = \Pi \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2} + R_1 \operatorname{tg} (\beta - \alpha) \cos \alpha + R_2 \frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} +$$

$$+ \frac{T_1}{2 \operatorname{tg} \alpha} - R_3 \operatorname{sen} \alpha - R \operatorname{sen} \alpha.$$

La forza R' sarà la reazione del piedritto, e R'' la tensione della catena A D.

L'appoggio in D presenta due reazioni, una secondo la catena AD e diretta da D verso O e che sarà uguale ad R''; l'altra secondo la verticale di D e diretta da D verso B cioè V: questa V può ottenersi dall'equazione che esprime come il peso di tutta l'armatura e di ciò che essa sopporta deve essere uguale alla somma delle reazioni verticali R', R_3', V dei tre appoggi A, B, D dell'incavallatura per cui

$$R' + R_3' + V = \Pi + P'' + P''' + 2\,P' + P^{IV}$$

dove P^{IV} è il peso del contropuntone CD. Però le due reazioni V ed O si possono determinare direttamente ed aver così un mezzo di verificazione del calcolo. Per questo si consideri il contropuntone CD a cui sono applicate: la reazione R_2' diretta da C verso D, la R_1''' applicata in L e diretta da E verso L, e il peso P^{IV} del contropuntone: si avrà un'equazione d'equilibrio fra le componenti di queste forze e le forze V ed O secondo CD cioè

$$R_2' + R_1'' \operatorname{sen}(\beta - \alpha) + P^{IV} \operatorname{sen} \alpha = R_2'''$$

dove

$$R_2''' \cos \alpha = 0\,, \quad R_2''' \operatorname{sen} \alpha = V.$$

E così son conosciute tutte le forze operanti nel sistema.

La catena si può considerare come un solido orizzontalmente disposto su tre appoggi e sottoposto all'azione del proprio peso e di una tensione $R'' = 0$ diretta secondo il suo asse, quindi la sua equazione di stabilità sarà

$$n' R' \Omega_2 = R''.$$

Noto Ω_2 si potrà avere il vero valore di P'''.

Il monaco si può considerare come un solido verticalmente disposto e sostenuto all'estremità superiore in cui è provocata una tensione massima

$$T_1 = P'' + \frac{5}{8} P''' + 2 R_1' \cos\beta$$

per cui la sua equazione di stabilità è

$$n' R' \Omega_3 = T_1$$

e noto Ω_3 si potrà avere il vero valore di P''.

Il contropuntone si può considerare come un solido disposto secondo una certa inclinazione all'orizzonte e sottoposto all'azione di una forza R_2'' diretta da C in D secondo il suo asse, da una forza R_1''' diretta da H in L ed applicata in L ed al propriō peso che supponesi q per unità di lunghezza: la sezione pericolosa di questo solido si trova nell'appoggio D rispetto a cui il momento inflettente delle forze sollecitanti acquista il suo massimo valore; il momento inflettente rispetto al punto D sarà

$$\mu_m = - R_1''' \left(\frac{a}{2 \cos\alpha} - a'' \right) \cos(\beta - \alpha) + \frac{q a^2}{8 \cos\alpha} .$$

La componente tangenziale delle forze sollecitanti sarà

$$T_m = R_2' + R_1''' \operatorname{sen}(\beta - \alpha) + \frac{q a}{2} \operatorname{tg} \alpha .$$

La pressione massima Q_{2m}, riferità all'unità di superficie vale adunque pel contropuntone CD

$$Q_{2m} = \frac{v'}{I_x} \left\{ R_1''' \left(a'' - \frac{a}{2 \cos\alpha} \right) \cos(\beta - \alpha) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\Omega_4} \left\{ R_2' + R_1''' \operatorname{sen}(\beta - \alpha) + \frac{q a}{2} \operatorname{tg} \alpha \right\} .$$

Per cui l'equazione di stabilità

$$n''R'' = Q_{2m}$$

darà la sezion retta Ω_4 del contropuntone.

Il puntone AB si può considerare come un solido inclinato all'orizzonte e caricato di un peso uniformemente distribuito secondo la sua proiezione orizzontale, peso che comprende il carico del puntone ed il suo peso e che chiamammo p, ed è sottoposto all'azione della forza R_3' applicata in B ed operante da B in alto secondo la verticale del piedritto, all'azione della forza R_3'' applicata in B ed operante da B verso R_3'': all'azione dei pesi P e P_1 applicati rispettivamente in I ed in F: all'azione della forza R_2' applicata in C e diretta nel verso DC: all'azione della forza R_1' applicata in G e diretta da H verso G: ed all'azione delle forze R' ed R'' applicate in A e dirette la prima da A in alto secondo la verticale del piedritto e la seconda da A verso D; la sezione pericolosa, conformemente al vero, è nel punto d'appoggio C: il momento inflettente rispetto a questo punto è

$$\mu_m = \frac{pa^2}{8} + P_1 \frac{a}{6} - R_3' \frac{a}{2} - R_3'' \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha$$

e la forza tangenziale è

$$T_m = \frac{pa}{2} \operatorname{sen} \alpha + P_1 \operatorname{sen} \alpha - R_3' \operatorname{sen} \alpha - R_3'' \cos \alpha$$

per cui la pressione massima riferita all'unità di superficie è

$$Q_{2m} = \frac{v'}{I_x} \frac{a}{2} \left(\frac{pa}{4} + \frac{P_1}{3} - R_3' - R_3'' \operatorname{tg} \alpha \right) +$$

$$+ \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\Omega_5} \left(\frac{pa}{2} + P_1 - R_3' - R_3'' \operatorname{cotg} \alpha \right).$$

Per cui l'equazione di stabilità

$$n'' R'' = Q_{2m}$$

darà la sezion retta Ω_5 del puntone.

Incavallatura centrale (Fig. 3).

È questa destinata a sostenere la copertura dell'ottagono inscritto nell'interno del mercato e la lanterna che torreggia sull'edificio. Questa incavallatura e costituita: 1° di un puntone AB di legno che s'appoggia col suo estremo A sul piedritto M e col suo estremo B contro di un ottagono in legno su cui è fabbricata la lanterna già nominata e che è sostenuta dall'incavallatura; 2° di una colonnetta di ghisa che sostiene il puntone nel suo punto di mezzo E; 3° di due catene o tiranti AG e GB di ferro che riuniscono le teste del puntone colla testa inferiore della colonnetta; 4° di una catena GC di ferro che unisce lo stesso punto G con un disco C a cui si uniscono le catene simili di tutte le incavallature dell'ottagono perchè si eliminino reciprocamente le spinte orizzontali dei puntoni; ossia le tensioni di queste catene; 5° di un tirante BC di ferro che sostione il disco del centro unendosi all'estremità B superiore del puntone AB.

La faccia del tronco di piramide ottagonale che si proietta in $A'B'A_2'B_2'$ (Fig. 4) è sostenuta dai due puntoni terminanti la faccia e da un falso puntone $D_1'F_1'$ che s'appoggia colla sua estremità D_1' sul piedritto e colla sua estremità F_1' sul mezzo del lato dell'ottagono che regge la lanterna. Quindi ciascun puntone come (AB, A'B') regge il peso di copertura che si proietta nella figura L'N'B'S'P'A':

inoltre a sostenere il falso puntone nella sua lunghezza si interposero ai correnti estremi proiettati in $A'A_2'$ e $B'B_2'$ dei correnti intermedii $U'V'$, $U''V''$, $U'''V'''$ che s'appoggiano coi loro estremi sui puntoni veri proiettati in $A'B'$ e $A'B_2'$: per cui ciascun corrente sostiene una parte del peso del falso puntone e di copertura che questo sostiene: il corrente ha un peso proprio, per cui ciascun corrente gravita su ciascun puntone per la metà del suo peso e di ciò che sostiene e poichè su ciascun puntone concorrono nello stesso tempo le estremità di due correnti, il puntone ($A'B'$, AB) sostiene in ogni punto come U', U'', U''' il peso di un corrente e di tutto ciò che esso sostiene. Dunque gravitano sul puntone il peso di copertura che esso sostiene direttamente, un ottavo del peso della lanterna e dell'ottagono di legno che la sostiene, applicato all'estremità superiore B del puntone e rappresentata con R e i pesi dei correnti π', π'', π''' applicati rispettivamente in (U', U_1), (U'', E), (U''', U_3).

Considerando a parte il sistema triangolare ABG (Fig. 3), si osserva come esso sia sottoposto all'azione delle suenunciate forze, al peso proprio del puntone π_1, alla reazione Q sviluppata dal punto d'appoggio B sull'ottagono, alla reazione Z dell'appoggio M, alla tensione T della catena GC, alla tensione T_1 della catena BC: pongasi $AK = a$, $BK = b$, $OK = GH = h'$, $AX = b$, $AN = c$ e stabilendo che $AX' = X'X'' = X''X''' = \frac{a}{4}$ l'equazione dei momenti di tutte le forze applicate al sistema triangolare ABG rispetto al punto A sarà

$$Ra - Qh + Th' + \pi b + (\pi_1 + \pi'')\frac{a}{2} + \pi'\frac{a}{4} + \\ + \pi'''\frac{3a}{4} + T_1 c = 0.$$

Per avere i bracci h, h', b, c in funzione dei dati dell'incavallatura, cioè $a =$ AK, $\alpha =$ ang. BAK, $\alpha' =$ ang. GAE, $\beta =$ ang. OBC, $m =$ A$'$A$_1'$, $n =$ B$'$B$_1'$ si osservi che dal triangolo ABK si trae

$$h = a \operatorname{tg} \alpha$$

e dal triangolo AGH si trae

$$h' = a \operatorname{tg} (\alpha - \alpha')$$

e dal triangolo ANB si trae AN $=$ AB sen NBA. Ma NBA $= (180° - 90° + \alpha - \beta) = 90° + \alpha - \beta = 90° - (\beta - \alpha)$ quindi

$$c = \frac{a}{\cos \alpha} \cos (\beta - \alpha) = a (\cos \beta - \operatorname{sen} \beta \operatorname{tg} \alpha).$$

Per ottenere il valore di $b =$ AX osserviamo che il centro di gravità dei trapezii L$'$A$'$B$'$N$'$, A$'$P$'$S$'$B$'$ sarà nei punti o, o' posti su d'una medesima perpendicolare ad A$'$B$'$, a distanza A$'x$ da (A, A$'$) per cui il braccio del peso π di copertura è $b =$ A$'x$ che determineremo così:

Si consideri il trapezio $cabd$ (Fig. 5) il cui centro di gravità o si trova sulla congiungente i punti di mezzo m, n delle basi parallele e divide $\overline{mn}$ in parti tali di cui

$$\frac{\overline{mo}}{\overline{no}} = \frac{\overline{nb} + \frac{\overline{ma}}{2}}{\overline{ma} + \frac{\overline{nb}}{2}} = \frac{2\overline{nb} + \overline{ma}}{2\overline{ma} + \overline{nb}}.$$

Si abbassino da m, da n, da o le normali su $\overline{ab}$, e da n e da o le normali su $\overline{mm_1}$, e da b la normale su $\overline{ma}$: si avranno:

$$\overline{mm_1} = \overline{ma} \text{ sen } \gamma\,, \qquad \overline{nn_1} = \overline{nb} \text{ sen } \gamma$$

quindi

$$\overline{mm_2} = (\overline{ma} - \overline{nb}) \text{ sen } \gamma.$$

Inoltre

$$\overline{mn} \cos \widehat{m_2\, mn} = \overline{mm_2}$$

quindi

$$\cos \widehat{m_2\, mn} = \frac{\overline{ma} - \overline{nb}}{\overline{mn}} \text{ sen } \gamma$$

e poichè $\cos \widehat{m_2\, mn} = \text{sen } \widehat{m o o'}$ si avrà

$$\cos \widehat{m o o'} = \sqrt{1 - \left(\frac{\overline{ma} - \overline{nb}}{\overline{mn}} \text{ sen } \gamma \right)^2}\,.$$

Allora si avrà

$$\overline{o o'} = \overline{mo} \sqrt{1 - \left(\frac{\overline{ma} - \overline{nb}}{\overline{mn}} \text{ sen } \gamma \right)^2}$$

ed

$$\overline{a\, l} = \overline{am_1} + \overline{mo} \sqrt{1 - \left(\frac{\overline{ma} - \overline{nb}}{\overline{mn}} \text{ sen } \gamma \right)^2}\,.$$

Dall'espressione

$$\frac{\overline{mo}}{\overline{no}} = \frac{2\overline{nb} + \overline{ma}}{2\overline{ma} + \overline{nb}}$$

si ottiene

$$\frac{\overline{mo}}{\overline{mo} + \overline{on}} = \frac{\overline{mo}}{\overline{mn}} = \frac{2\overline{nb} + \overline{ma}}{3\overline{ma} + 3\overline{nb}}$$

per cui

$$\overline{al} = \overline{am}_1 + \frac{2\overline{nb} + \overline{ma}}{3\overline{ma} + 3\overline{nb}} \sqrt{\overline{mn}^2 - \overline{mn}\,(\overline{ma} - \overline{nb})^2 \operatorname{sen}^2 \gamma}.$$

Si ha ancora

$$\overline{mn} = \overline{bb}_1 = \sqrt{\overline{ab}^2 + \overline{b_1 a}^2 - 2\overline{ab}\,.\,\overline{b_1 a} \cos \gamma}$$

ovvero

$$\overline{mn} = \sqrt{\overline{ab}^2 + (\overline{ma} - \overline{nb})^2 + 2\overline{ab}\,(\overline{ma} - \overline{nb}) \cos \gamma}$$

e si ha

$$\overline{am}_1 = \overline{am} \cos \gamma$$

quindi

$$\overline{al} = \overline{am} \cos \gamma +$$

$$+ \frac{2\overline{nb} + \overline{ma}}{3\overline{ma} + 3\overline{nb}} \sqrt{\overline{ab}^2 + (\overline{ma} - \overline{nb})^2 + 2\overline{ab}(\overline{ma} - \overline{nb}) \cos \gamma -}$$

$$\overline{- \sqrt{\overline{ab}^2 + (\overline{ma} - \overline{nb})^2 + 2\overline{ab}\,(\overline{ma} - \overline{nb}) \cos \gamma}\, \left\{ (\overline{ma} - \overline{nb})^2 \operatorname{sen}^2 \gamma \right\}}.$$

Ponendo $\overline{al} = b$, $\overline{am} = \frac{1}{2}\,\overline{ac} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\, m = \frac{1}{8}\, m$, $\overline{bn} = \frac{1}{8}\, n$, $\overline{ab} = a$, si avrà

$$b = \frac{1}{8}\, m \cos \gamma +$$

[1] $$+ \frac{2n + m}{3m + 3n} \sqrt{a^2 + \frac{(m-n)^2}{64} + 2a\,\frac{m-n}{8} \cos \gamma -}$$

$$\overline{- \sqrt{a^2 + \frac{(m-n)}{64} + 2a\,\frac{m-n}{8} \cos \gamma}\, \left\{ \frac{(m-n)^2}{64} \operatorname{sen}^2 \gamma \right\}}.$$

Calcolata l'area dei due trapezii $L'A'B'N'$ (fig. 4), $A'P'S'B'$, e moltiplicando l'area pel peso p di copertura per ogni metro quadrato di proiezione orizzontale di essa, si avrà il valore di π: allora sostituendo ad R, a π', π'', π''' i valori previamente calcolati, a π_1 e a T_1 i valori approssimati, si porranno per b, per c, per h e per h' i valori dati dalle formole precedenti e si avrà un'equazione fra le incognite Q e T la quale accoppiata colla seguente:

$$Q = T + T_1 \operatorname{sen} \beta$$

fra le stesse incognite Q e T dà il mezzo di determinare queste due forze, la reazione dell'appoggio in B e la tensione della catena GC.

Per conoscere le forze sollecitanti i varii pezzi dell'incavallatura è necessario conoscere le reazioni che i tre punti A, E, B (Fig. 3) d'appoggio presentano al puntone, cioè ρ_1, ρ_2, ρ_3. Perciò consideriamo le due travate AE e EC (Fig. 6) e chiamiamo μ_1 il momento inflettente in una sezione qualunque b' della travata EB d'ascissa $\frac{x_1}{\cos\alpha}$ a partir da B e di ordinata y_1, e sia μ_2 il momento inflettente in una sezione qualunque b' della travata AE d'ascissa $\frac{x_2}{\cos\alpha}$ a partir da E e di ordinata y_2; le ordinate y_1 e y_2 sono contate dal centro di gravità delle sezioni b, b' a partir dalla linea AB ed al dissotto di AB. Il momento inflettente μ_1 si compone della somma algebrica dei momenti delle forze $\pi''' \cos\alpha$, $R\cos\alpha$, $T_1 \cos(\beta - \alpha)$, ρ_3, applicate da b in B e dei pesi della trave $\frac{\pi_1 \cos\alpha}{a} \frac{x_1}{\cos\alpha} = \frac{\pi_1 x_1}{a}$ e del suo carico. Per avere il momento di questo carico si consideri l'area $pqdb$ (Fig. 5): cerchiamo l'espressione di quest'area: sappiamo che $\overline{db} = \frac{1}{4} n$: si avrà

$$\overline{pq} = \frac{1}{4} \frac{n\,(\overline{bh} + x_1)}{\overline{bh}}$$

dai triangoli pqh e dbh: ma

$$\overline{bh} = \frac{1}{4} \frac{n \operatorname{sen}(180^\circ - \gamma - \delta)}{\operatorname{sen}\delta} = \frac{1}{4} \frac{n \operatorname{sen}(\gamma + \delta)}{\operatorname{sen}\delta}$$

dove $\gamma = \text{ang}.\, cah$, $\delta = \text{ang}.\, cha$, per cui

$$\overline{pq} = \frac{1}{4} \frac{n\left(\frac{1}{4}\frac{n \operatorname{sen}(\gamma+\delta)}{\operatorname{sen}\delta} + x_1\right)}{\frac{1}{4}\frac{n \operatorname{sen}(\gamma+\delta)}{\operatorname{sen}\delta}}$$

ossia

[2] $$\overline{pq} = \frac{\frac{1}{4} n \operatorname{sen}(\gamma+\delta) + x_1 \operatorname{sen}\delta}{\operatorname{sen}(\gamma+\delta)}.$$

L'altezza del trapezio $pqdb$ è

$$x_1 \operatorname{sen}\gamma$$

per cui l'area è

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} n + \frac{\frac{1}{4} n \operatorname{sen}(\gamma+\delta) + x_1 \operatorname{sen}\delta}{\operatorname{sen}(\gamma+\delta)}\right) x_1 \operatorname{sen}\gamma$$

e il peso del trapezio $pqdb$ di copertura è

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} n + \frac{\frac{1}{4} n \operatorname{sen}(\gamma+\delta) + x_1 \operatorname{sen}\delta}{\operatorname{sen}(\gamma+\delta)}\right) p x_1 \operatorname{sen}\gamma.$$

Il peso dei due trapezii simili a $pqdb$ che gravitano da B in b e per cui $b\mathrm{B}\cos\alpha = \frac{x_1}{\cos\alpha}\cos\alpha = x_1$ sarà

$$\left(\frac{1}{4}n + \frac{\frac{1}{4}n\,\mathrm{sen}\,(\gamma+\delta) + x_1\,\mathrm{sen}\,\delta}{\mathrm{sen}\,(\gamma+\delta)}\right) p x_1\,\mathrm{sen}\,\gamma = \mathrm{N}_1 .$$

Il braccio di questo peso si otterrà dalla formola [1] ponendovi in luogo di a il suo valore x_1 ed invece di m il valore corrispondente $4pq$ ossia $\frac{n\,\mathrm{sen}\,(\gamma+\delta) + 4\,x_1\,\mathrm{sen}\,\delta}{\mathrm{sen}\,(\gamma+\delta)}$: moltiplicando l'espressione del braccio così ottenuta per il peso testè calcolato si avrà una funzione dei dati e della x_1 che rappresenterà il momento del peso di copertura gravitante da B a b sul puntone e che qui si potrà indicare con M_1. Così si otterrà il braccio del peso π''' che sarà (fig. 4)

$$x_1 - \frac{a}{4} + \mathrm{U}'''u$$

dove $\mathrm{U}'''u = \mathrm{O\,U}'''\cos\gamma$: ma $\mathrm{O\,U}'''$ si ottiene dalla formola [2] ponendovi $\frac{a}{4}$ invece di x_1 per avere

$$\mathrm{O\,U}''' = \frac{1}{4}\,\frac{n\,\mathrm{sen}\,(\gamma+\delta) + a\,\mathrm{sen}\,\delta}{\mathrm{sen}\,(\gamma+\delta)}$$

quindi

$$\mathrm{U}'''u = \mathrm{OU}'''\cos\gamma = \frac{1}{4}\,\frac{n\,\mathrm{sen}\,(\gamma+\delta) + a\,\mathrm{sen}\,\delta}{\mathrm{sen}\,(\gamma+\delta)}\cos\gamma$$

e così è noto

$$x_1 - \frac{a}{4} + \frac{1}{4}\,\frac{n\,\mathrm{sen}\,(\gamma+\delta) + a\,\mathrm{sen}\,\delta}{\mathrm{sen}\,(\gamma+\delta}\cos\gamma$$

braccio della forza π'''. Quindi

$$\mu_1 = -\rho_3 \frac{x_1}{\cos\alpha} +$$

$$+\pi'''\left(x_1 - \frac{a}{4} + \frac{1}{4}\,\frac{n \operatorname{sen}(\gamma+\delta) + a \operatorname{sen}\delta}{\operatorname{sen}(\gamma+\delta)}\cos\gamma\right) + Rx_1 +$$

$$+ T_1 \cos(\beta-\alpha)\frac{x_1}{\cos\alpha} + M_1 + \frac{\pi_1\, x_1^2}{2a}.$$

Usiamo ora l'equazione della curva secondo cui si dispone l'asse della travata: si avrà

$$\epsilon \frac{d^2 y_1}{d x_1^2} = \mu_1$$

dove μ_1 è funzione di ρ_3, di x_1 e di quantità cognite. Da quest'equazione si ha

$$\frac{d^2 y_1}{d x_1^2} = \frac{\mu_1}{\epsilon}$$

ed integrando rispetto ad x_1 si ha

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \int \frac{\mu_1}{\epsilon}\, dx_1 + C.$$

Il valore della costante C si potrà ottenere colla condizione che per x_1 uguale all'ascissa del centro delle forze sollecitanti la travata, si abbia $\frac{dy_1}{dx_1} = 0$: infatti in quel punto la curva elastica ha un massimo: tale ascissa si otterrà prendendo i momenti delle forze medesime rispetto al punto E: le forze sollecitanti sono: la π''', il carico del puntone, che ha M_1 per momento inflettente, e il peso della travata: sia P la risultante di queste forze, p la distanza del suo punto d'applicazione dal punto E: si avrà

$$\mathrm{P}p = \Pi''' \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{4} + \frac{1}{4}\,\frac{n \operatorname{sen}(\gamma+\delta) + a \operatorname{sen}\delta}{\operatorname{sen}(\gamma+\delta)} \cos\gamma\right) +$$

$$+ \mathrm{M}_{1\left(x_1 = \frac{a}{2}\right)} + \frac{\Pi_1 a}{8} + \mathrm{R}\,\frac{a}{2} + \mathrm{T}_1 \cos(\beta - \alpha)\,\frac{a}{2\cos\alpha}.$$

Da questa equazione si cava il valore di p: allora l'equazione differenziale di primo ordine della curva elastica in cui si ponga $x_1 = p$, $\frac{d y_1}{d x_1} = 0$ darà il valore di C, che si sostituirà nell'equazione medesima per avere

$$\frac{d y_1}{d x_1} = \frac{1}{\epsilon} f(x_1, \rho_3).$$

E si potrà integrare una seconda volta quest'equazione per avere

$$y_1 = \frac{1}{\epsilon} \int f(x_1, \rho_3)\, d x_1 + \mathrm{C}_1.$$

Qui si potrà ottenere il valore della costante C_1 ponendovi per $x_1 = 0$ la $y_1 = 0$: ne verrà

$$\mathrm{C}_1 = 0$$

e si potrà scrivere

$$y_1 = \frac{1}{\epsilon} \mathrm{F}(x_1, \rho_3).$$

E qui giunti si dovrebbe trovare un'espressione analoga per la travata AE: quest'espressione avrà la stessa forma della precedente e conterrà la variabile indipendente x_2 e le dipendenti y_2 e ρ_2 ed avrà la forma

$$y_2 = \frac{1}{\epsilon} F'(x_2, \rho_2).$$

Ora si osservi che per $x_2 = 0$ si ha per y_2 l'ordinata del punto E e per $x_1 = \frac{a}{2}$ si ha per y_1 l'ordinata del medesimo punto E: quindi si ha

$$F(x_1, \rho_3)_{x_1 = \frac{a}{2}} = F'(x_2, \rho_2)_{x_2 = 0}.$$

Ma per la forma $y_2 = \frac{1}{\epsilon} \int f'(x_2, \rho_2)\, d x_2$ si vede che per $x_2 = 0$ si ha $y_2 = 0$ quindi

$$F(x_1, \rho_3)_{x_1 = \frac{a}{2}} = 0.$$

Da quest'equazione semplicissima si ricava il valore di

$$\rho_3.$$

Si avranno poi i valori delle reazioni ρ_2 e ρ_1 scrivendo le condizioni d'equilibrio delle forze che sollecitano tutta la trave AC: una di queste equazioni sarà

$$\rho_1 + \rho_2 = \rho_3 = (\pi' + \pi'' + \pi''' + \pi + \pi_1 + R) \cos \alpha +$$
$$+ T_1 \cos (\beta - \alpha).$$

L'altra sarà l'equazione dei momenti attorno al punto A

$$Ra + \pi' \frac{a}{4} + \pi'' \frac{a}{2} + \pi''' \frac{3a}{4} + T_1 c + \pi b + \pi_1 \frac{a}{2} =$$
$$= \rho_2 \frac{a}{2 \cos \alpha} + \rho_3 \frac{a}{\cos \alpha}.$$

Sostituendo in quest'equazione a ρ_3 il suo valore già trovato si avrà quello di

$$\rho_2$$

e sostituendo quelli di ρ_2 e di ρ_3 nelle precedenti si avrà il valore di

$$\rho_1$$

e così sono determinate le reazioni dei tre appoggi della trave AB.

La catena GC si può considerare come un solido orizzontalmente collocato su due appoggi G e C e sottoposto all'azione della forza T che lo tende secondo il suo asse per cui l'equazione di stabilità della catena è

$$n' \mathrm{R}' \Omega_1 = \mathrm{T}.$$

La lunghezza della catena GC è GO + OC ossia

$$\mathrm{AK} - \mathrm{AH} + \mathrm{OC} = a - \mathrm{AG} \cos (\alpha - \alpha') + \mathrm{OB} \operatorname{tg} \beta :$$

si ha che

$$\mathrm{AG} = \frac{\mathrm{AE}}{\cos \alpha'} = \frac{a}{2 \cos \alpha \cos \alpha'},$$

$$\mathrm{OB} = h - h' = a \left\{ \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} (\alpha - \alpha') \right\} = a \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha'}$$

quindi

$$\mathrm{GC} = a - \frac{a}{2} (1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha') + a \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha'} \operatorname{tg} \beta$$

quindi, noto Ω_1 e GC, si conoscerà il peso della catena GC epperciò si potrà calcolare la tensione T_1 del tirante BC destinato a sostenere metà del peso della catena GC che supporremo calcolata e trovato P′ e il peso proprio del tirante P″: per cui si deve avere

$$T_1 \cos\beta = P'' + \frac{P'}{2}$$

da cui si cava il valore di T_1 e allora l'equazione di stabilità pel tirante BC è data da

$$n'R'\Omega_2 = T_1$$

e così si conosce la sua sezion retta Ω_2.

La colonnetta EG si può considerare come un solido soggetto alla pressione ρ_2 secondo il suo asse: l'equazione di stabilità per la colonnetta sarà adunque

$$n''R''\Omega_3 = \rho_2$$

che darà la sezione minima delle colonnette. La sua sezione massima, secondo i pratici, deve avere un diametro uguale ad $\frac{1}{18}$ della lunghezza della colonnetta stessa, cioè ad $\frac{a \operatorname{sen} \alpha'}{36 \cos \alpha}$.

La reazione verticale Z (Fig. 3) dell'appoggio M sarà uguale al peso dell'incavallatura e di ciò che essa sopporta, per cui

$$Z = R + \pi + \pi_1 + \pi' + \pi'' + \pi''' + P' + P'' + P''' + P^{IV} + P^{V}$$

dove P‴ è il peso delle colonnette ED, che sarà già stato calcolato e P^{IV} e P^{V} sono i pesi dei tiranti AG e GB che si sostituiranno con un valore approssimato. Noto Z, si scriverà la condizione per cui in A si fanno equilibrio le tre forze: Z reazione dell'appoggio M; T_2 tensione del tirante

AG e ρ_1 reazione provocata dal peso del puntone sull' appoggio M normalmente al puntone per cui

$$Z \cos \alpha = T_2 \operatorname{sen} \alpha' + \rho_1$$

da cui si cava

$$T_2 = Z \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha'} - \rho_1 \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha'} .$$

Perciò l'equazione di stabilità di questo tirante sarà

$$n' R' \Omega_4 = T_2 .$$

Nel punto G si deve avere equilibrio secondo l'asse della colonnetta tra le forze ρ_2, T, T_2 e T_3, ove T_3 è la tensione del tirante BG: avremo perciò l'equazione di condizione

$$T \operatorname{sen} \alpha + \rho_2 = (T_2 + T_3) \operatorname{sen} \alpha'$$

da cui

$$T_3 = \frac{T \operatorname{sen} \alpha + \rho_2}{\operatorname{sen} \alpha'} - T_2$$

quindi l'equazione di stabilità pel tirante BG

$$n' R' \Omega_5 = T_3$$

che darà il valore dell'area Ω_5 della sezion retta del tirante BG.

Restano ancora da determinare le dimensioni della sezion retta del puntone. Esso può considerarsi come un solido caricato di un peso distribuito secondo il modo già descritto e studiato: e sollecitato in B dalla forza orizzontale Q operante da B verso Q, dalla forza obliqua T_3 operante da B verso G, dalla forza verticale R e dalla obliqua T_1 diretta da B verso C: in U_3 dalla forza π''' verticale, in E dalla forza ρ_2 operante da G verso E e dalla forza verticale π'', in U_1 dalla forza π' verticale, in A dalla reazione verticale Z dell'appoggio M e dalla forza T_2 operante da A verso G e lungo A B uniformemente caricato del proprio peso $\frac{\pi_1}{a}$ per ogni metro di proiezione orizzontale. Ammettendo quanto realmente succede nella pratica per queste incavallature relativamente alla sezione pericolosa dei puntoni, ossia che pel puntone considerato A B sia pericolosa la sezione corrispondente al punto E, il momento inflettente che ad essa si riferisce ha per valore

$$\mu_m = M_{1\left(x_1 = \frac{a}{2}\right)} - Q\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha + T_3\frac{a\operatorname{tg}\alpha'}{2\cos\alpha} + R\frac{a}{2} +$$

$$+ T_1\frac{a}{2}(\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\operatorname{tg}\alpha) + \pi'''\frac{a}{4} + \frac{\pi_1 a}{8}$$

e la forza comprimente che ad esse si riferisce vale

$$T_m = \left(N_{1\left(x_1 = \frac{a}{2}\right)} + R + \pi''' + \frac{\pi_1}{2}\right)\operatorname{sen}\alpha + Q\cos\alpha +$$

$$+ T_3\cos\alpha' - T_1\operatorname{sen}(\beta - \alpha).$$

La pressione massima Q_{2m} che ad essa si riferisce ha per valore

$$Q_{2m} = \frac{v'}{I_x}\left\{M_{1\left(x_1 = \frac{a}{2}\right)} - Q\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha + T_3\frac{a\operatorname{tg}\alpha'}{2\cos\alpha} + R\frac{a}{2} +\right.$$

$$\left. + T_1\frac{a}{2}(\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\operatorname{tg}\alpha) + \pi'''\frac{a}{4} + \pi_1\frac{a}{8}\right\} +$$

$$+\frac{1}{\Omega}\left\{\left(N_{1\left(x_1=\frac{a}{2}\right)}+R+\Pi'''+\frac{\Pi_1}{2}\right)\operatorname{sen}\alpha+Q\cos\alpha+\right.$$

$$\left.+T_3\cos\alpha'-T_1\operatorname{sen}(\beta-\alpha)\right\}$$

e l'equazione di stabilità

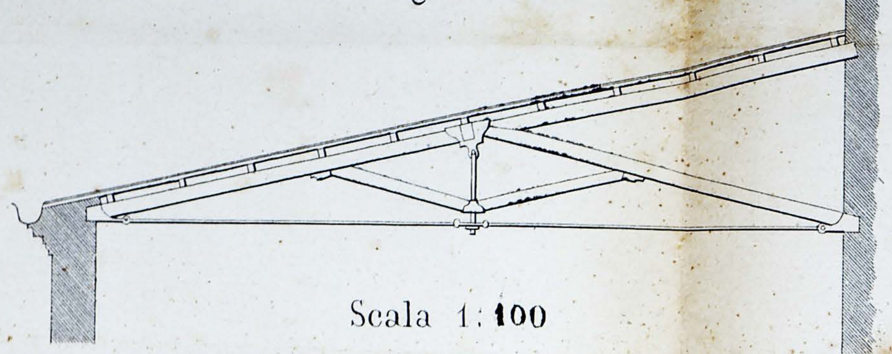
$$n''R''=Q_2m$$

darà la sezion retta Ω_6 del puntone AB.

CARLO BOVONE.

INCAVALLATURE IN LEGNO E FERRO

Fig. C



Scala 1:100

Fig. B

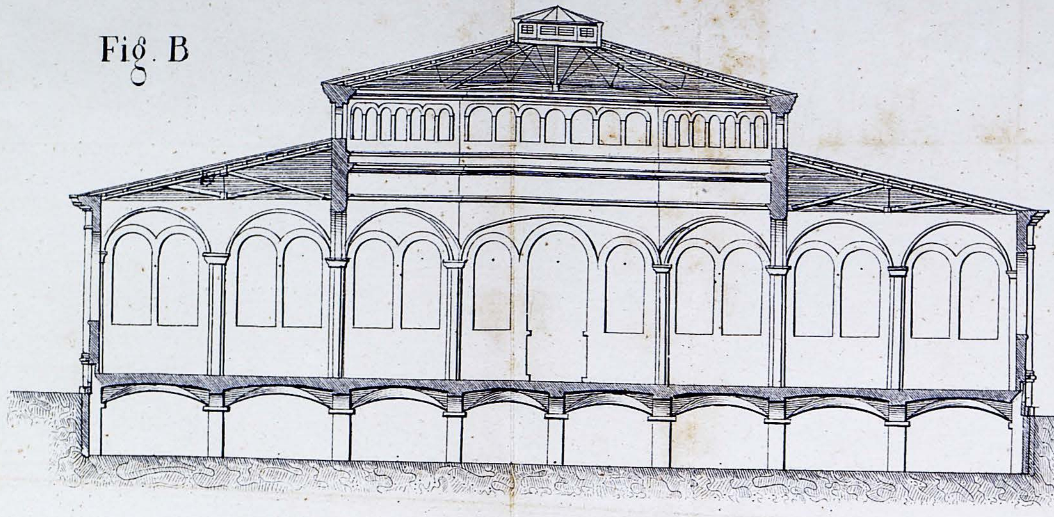
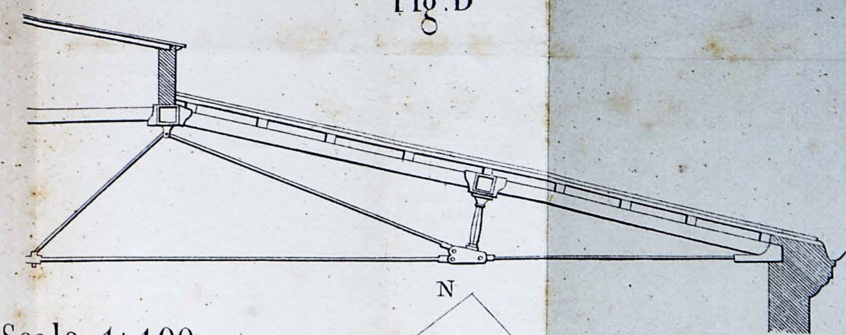


Fig. D



Scala 1:100

Fig. 1

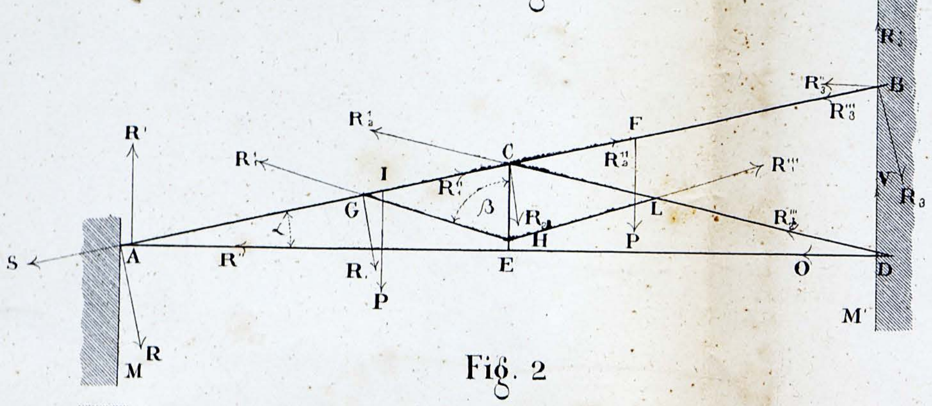


Fig. A

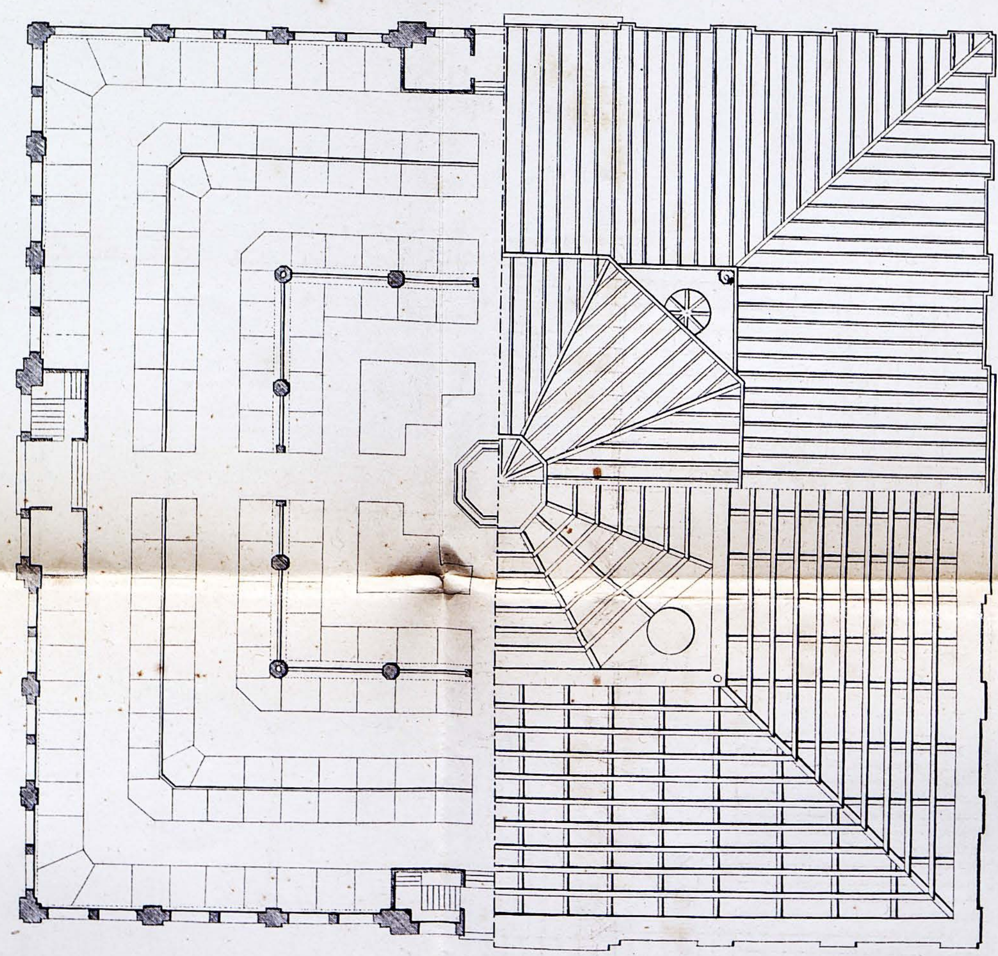


Fig. 3

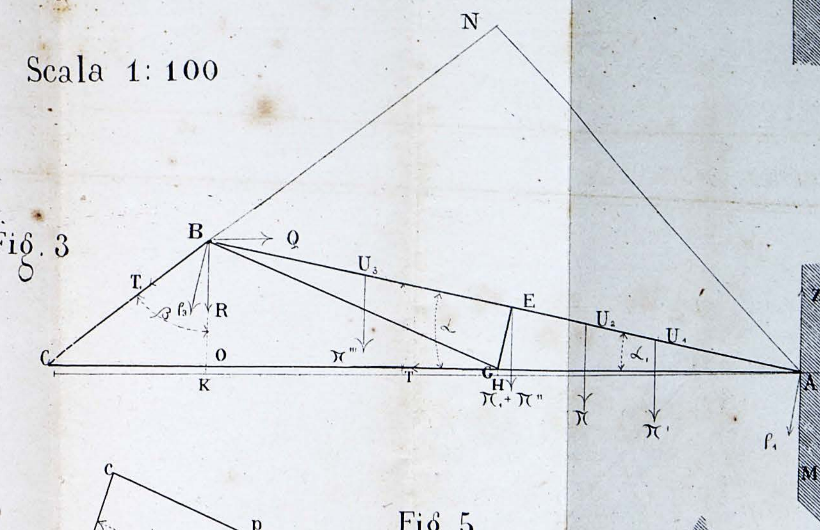


Fig. 5

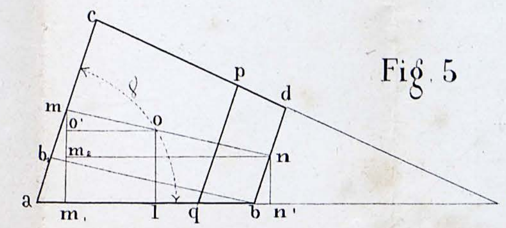


Fig. 2

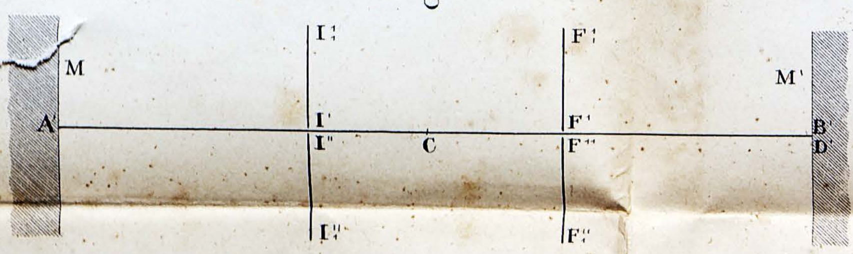


Fig. 6

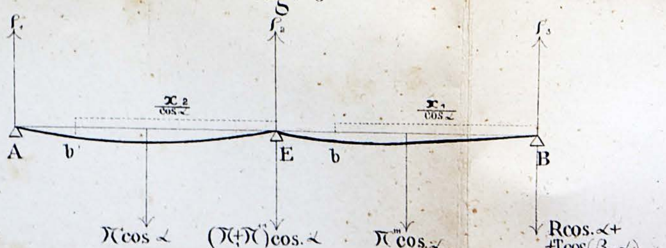
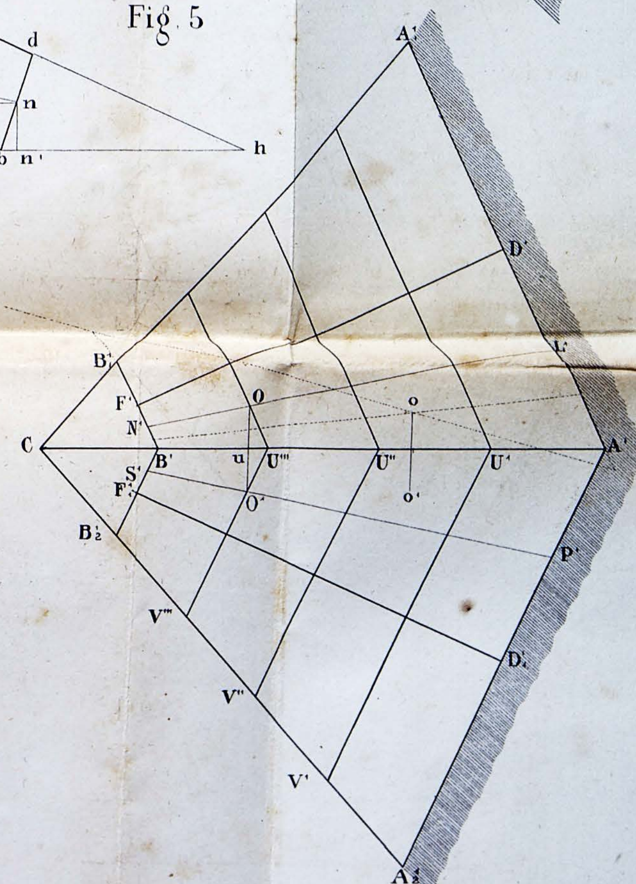


Fig. 4



Scala 3:1000

Carlo Bovone

Lab.° d'inc.° Annesi, Via Belvedere, 26, Torino