

SULLA COMPOSIZIONE GEOMETRICA

DEI TETTI A FALDE PIANE

MEMORIA DELL'INGEGNERE C. NEGRI

presentata alla Società degli Ingegneri e degli Industriali nell'Adunanza
25 maggio 1878

Quando un'area poligonale dev'essere coperta con un tetto a falde piane, di pendenze date, la composizione geometrica del tetto può riguardarsi come compiuta allorquando se ne è disegnata la proiezione orizzontale. Io ignoro se sia stata già avvertita la completa analogia che passa fra queste proiezioni orizzontali delle superficie poliedriche costituenti i tetti e le figure della statica grafica; ma basterà accennare a tale analogia per vedere immediatamente come essa possa tornare utile, sia nel caso più semplice in cui tutte le falde hanno la stessa pendenza, sia, in ispecial modo, nel caso più complicato di pendenze diverse.

I.

Tetti a falde egualmente inclinate.

Siano (fig. 1^a) AB , BC , CD le proiezioni orizzontali di tre lati di gronda consecutivi di un tetto da costituirsi con falde egualmente inclinate. È evidente che da B e C partiranno due displuvii, che si proietteranno secondo le bissettrici BF , CF degli angoli in B e C ; giunti al loro punto d'incontro F questi displuvii termineranno, ed in F avrà

origine un terzo displuvio, che, risultando dall'intersezione delle due falde BA e CD , sarà proiettato secondo la bissettrice FH dell'angolo BEC .

Se ora noi immaginiamo portata a partire da B verso A sul lato BA una lunghezza Ba , rappresentante una forza, e similmente una forza eguale Bc da B verso C ; e così ancora due forze Cb e Cd eguali alle prime, a partire da C , la BF avrà la direzione della risultante delle due forze applicate in B ; e la CF quella della risultante delle due forze applicate in C , e si vede ancora facilmente che la FH avrà la direzione della risultante delle quattro forze considerate, perché le due agenti secondo il lato BC si elidono, e non rimangono che le Ba e Cd le quali trasportate in E sulle loro direzioni danno appunto una risultante diretta secondo la bissettrice dell'angolo in E .

Ciò posto, sia da coprirsi il poligono i cui lati sono 12, 23, 34, 45, 51 (fig. 2). Immaginiamo portate a partire da ciascun vertice del poligono, nelle direzioni dei lati adiacenti, tante forze tutte eguali fra loro, cioè le due Ia , le due Iib , le due $Iiic$, ecc.

Queste forze risulteranno due a due eguali e contrarie, formeranno quindi un sistema di forze in equilibrio. Si vede di qui, che se noi facciamo la risultante delle due Ia , che cadrà secondo la bissettrice dell'angolo in I , e se parimenti facciamo la risultante delle due Iib , ecc, tutte queste risultanti formeranno ancora un sistema di forze in equilibrio, rispetto al quale il poligono dato si trova nelle condizioni di un poligono funicolare, quale sotto questa denominazione si considera nella statica grafica; questo poligono, nel nostro caso, ha di più la proprietà di avere tutte eguali fra loro le tensioni (o pressioni) di tutti i suoi lati. Ciò che precede basta per poter passare immediatamente nel campo della statica grafica, secondo le note regole della quale è condotta la costruzione che segue.

Per un polo scelto ad arbitrio, O (fig. 2'), conduciamo tante rette d'equal lunghezza 12, 23, 34, ecc. rispettivamente

parallele ai lati 12, 23, 34, ecc. del poligono dato, camminando su questo sempre nello stesso verso; esse saranno i raggi del poligono delle forze. Unendone ordinatamente le estremità, cioè quella di 51 con quella di 12, quella di 12 con quella di 23, ecc, avremo il poligono chiuso delle forze, i cui lati sono 1, 2, 3, 4, 5. Condurremo pei vertici *I, II, III*, ecc. del poligono dato (fig. 2) le rispettive parallele alle 1, 2, 3, 4, 5 della fig. 2'; esse ci daranno le proiezioni dei displuvii. Se prolungassimo sufficientemente tutti questi displuvii, verremmo a formare tanti triangoli quanti sono i lati del poligono dato; ciascuno di questi triangoli avrebbe per base il lato corrispondente del poligono, e per lati le proiezioni orizzontali dei due displuvii che partono dalle estremità di quel lato. In generale la figura farà vedere quale di questi triangoli avrà la minima altezza, vale a dire quale sarà la coppia dei displuvii successivi che si incontrano alla minima distanza dal perimetro del poligono dato. Sono, per es., i due displuvii 3 e 4. Questi displuvii dovranno terminarsi nel loro punto d'incontro; e qui daranno origine a un nuovo displuvio (34) parallelo alla risultante (34) delle forze 3 e 4, che immediatamente si ottiene dal poligono delle forze. Non avremo più allora che a considerare quattro displuvii, cioè 1, 2, 5 e (34). Analogamente a quanto abbiam fatto prima, osserveremo quale coppia di displuvii consecutivi dà un punto d'incontro più vicino al perimetro dato. Si trovano essere i displuvii 1 e 2. Termineremo questi displuvii nel loro punto d'incontro, e qui avrà origine il displuvio (12) parallelo alla risultante (12) delle forze 1 e 2 (fig. 2'). I tre displuvii (12), 5 e (34) si incontrano poi in un punto unico, che corrisponde, nella reciprocità delle figure della statica grafica, al triangolo formato dalle forze (12), (34) e 5; e così la proiezione orizzontale del tetto è ottenuta.

Nelle fig. 3 e 3', 4 e 4' sono disegnati due esempi un po' più complicati dell'applicazione di questo metodo, e le costruzioni fatte sono brevemente spiegate nella nota in fine.

II

Tetti con falde diversamente inclinate.

In molteplici circostanze può tornare necessario od almeno utile l'adottare pendenze differenti per le varie falde. Il metodo che abbiamo esposto si può dimostrare applicabile anche in questo caso, anzi risulta, a fronte di altre costruzioni prima impiegate, della massima speditezza.

Siano ancora (fig. 5) *AB, BC, CB* tre lati consecutivi di un'area da coprirsi con tetto a falde piane. La falda che termina in *AB* debba fare un angolo α col piano orizzontale; la falda *BC* l'angolo β , la falda *CD* l'angolo γ . Le due primè falde diano un displuvio la cui proiezione orizzontale sia *BF*; le due falde *BC* e *CD* diano un displuvio che si proietti in *CF*; nel punto *F* termineranno questi due displuvii, ed avrà origine un terzo displuvio *FH*, la cui direzione passerebbe pel punto *E* d'incontro delle *AB* e *DC*. Abbassiamo dal punto *F* le *FI, FL, FM* normali ad *AB, BC, CD*. Detta *h* l'altezza del punto effettivo d'incontro dei due displuvii sopra il piano *AB GB*, avremo evidentemente:

$$\frac{h}{FI} = \tan \alpha \quad \frac{h}{FL} = \tan \beta \quad \frac{h}{FM} = \tan \gamma.$$

Se ora dal punto *F* conduciamo *NFQ* parallela a *BC*, *FO* parallela ad *AB*, *FP* parallela a *CD*, avremo:

$$FI = FN \operatorname{sen} \widehat{FNI} \quad FL = FO \operatorname{sen} \widehat{FOL}$$

Ma $\widehat{FNI} = \widehat{FOL}$, quindi:

$$\frac{FO}{FN} = \frac{BN}{BO} = \frac{FL}{FI} = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}.$$

Nello stesso modo si troverebbe che:

$$\frac{CP}{CQ} = \frac{\tan \delta}{\tan \gamma}$$

Quindi si vede che la direzione della BF può riguardarsi come quella della risultante di due forze BN e BO applicate nel punto B , nelle direzioni dei lati BA e BC , di intensità proporzionali alle tangenti degli angoli che le falde terminanti ai rispettivi lati fanno con un piano orizzontale.

Così la proiezione CF del displuvio che parte da C ha la direzione della risultante di due forze CP e GQ proporzionali a $\tan \delta$ e $\tan \gamma$. Quanto al displuvio che ha origine in F , che prolungato passerebbe per E , come esso risulta dall'intersezione delle due falde AB e CD , si comprende che la direzione della sua proiezione orizzontale sarebbe quella della risultante di due forze applicate in E , proporzionali a $\tan \alpha$ e $\tan \gamma$, e dirette rispettivamente secondo EB ed EC .

Se pertanto essendo dato un poligono da coprire con falde di inclinazioni diverse, a partire da ciascun vertice noi immaginiamo portate sui lati contigui due forze rispettivamente proporzionali alle tangenti trigonometriche delle inclinazioni all'orizzonte delle falde rispettive, noi avremo nelle risultanti delle due forze applicate nei singoli vertici le direzioni delle proiezioni orizzontali dei displuvii (o impluvii) che partono da questi vertici. L'unità di forza che si sarà scelta dev'essere la stessa per tutti i vertici, cosicché le lunghezze rappresentative delle forze debbono tutte avere lo stesso rapporto colle tangenti trigonometriche rispettive. Quindi riesce facile il vedere che delle forze così rappresentate le due che cadranno su uno qualunque dei lati saranno eguali e contrarie, onde tutte insieme formeranno un sistema in equilibrio; e il poligono dato potrà considerarsi come poligono funicolare in equilibrio sotto il sistema delle risultanti delle forze applicate nei singoli vertici. Incontrandosi le proiezioni

orizzontali di due displuvii consecutivi, e diremo in seguito secondo qual ordine questi punti d'incontro si debbano prendere, i due displuvii dovranno nel loro punto d'incontro terminarsi e daranno origine alla proiezione orizzontale di un nuovo displuvio, la cui direzione sarà data dalla risultante delle quattro forze applicate nei due vertici da cui i primitivi displuvii partivano. Imperocché le due forze agenti lungo il lato frapposto a quei due vertici, come eguali e contrarie si elideranno, e non rimarranno che le due agenti secondo gli altri due lati che vanno a quei vertici, e proporzionali alle tangenti trigonometriche delle inclinazioni delle falde relative. Da quanto precede risulta perciò che si potrà, come nel caso delle falde egualmente inclinate, costruire un poligono delle forze correlativo a quello dato, essendo quest'ultimo da considerarsi come poligono funicolare; con questa differenza tuttavia che le forze agenti lungo i lati del poligono funicolare, epperò i raggi partenti dal polo del poligono delle forze, non dovranno più essere eguali fra loro, ma bensì proporzionali alle tangenti trigonometriche delle inclinazioni delle falde rispettive sull'orizzonte.

Sia da coprire il poligono (fig. 6) i cui lati sono 12, 23, 34, 45 e 51, con un tetto le cui falde abbiano rispettivamente le inclinazioni date nella fig. 7, coi numeri corrispondenti. In questa figura piglio una distanza AB arbitraria sulla retta orizzontale, elevo in A una perpendicolare ad AB sulla quale potrò prendere le lunghezze proporzionali alle tangenti delle date inclinazioni. Poi per un polo arbitrario O , (fig. 6') conduco le rette 12, 23, 34, 45, 51 ordinatamente parallele ai lati del poligono dato, e di lunghezze quali si ottengono dalla figura 7, pei numeri corrispondenti. Unendo le estremità dei raggi del poligono delle forze ottengo le forze 1, 2, 3, 4, 5 a cui conduco poi nella fig. 6 le rispettive parallele pei vertici che portano i numeri romani corrispondenti. Anche qui le coppie successive degli spigoli o displuvii consecutivi darebbero tanti punti d'incontro quanti sono i lati del poligono dato. L'avvertenza che bisogna usare

è questa: si comincino a considerare quei due displuvii successivi che si incontrano *nel punto meno elevato* sul piano del dato poligono di gronda. Questi due displuvii termineranno a questo punto, e qui avrà origine un nuovo displuvio di cui vedremo tosto come si determina la direzione. A partire da questo punto il numero dei displuvii da considerare risulterà diminuito di uno; e di nuovo andremo a vedere quali sono i due displuvii consecutivi che danno un punto d'incontro alla minima altezza: li arresteremo a questo punto, in cui avrà origine un nuovo displuvio. Così sarà diminuito di due il numero totale dei displuvii, e procedendo per tal modo si arriverà in ultimo, in generale, a tre displuvii che si incontreranno in un punto che sarà il culmine più elevato del tetto da comporre.

La figura permette in generale di fare queste costruzioni senza difficoltà. Così nel nostro caso vediamo che il displuvio 2 è incontrato prima dal 3 che dall'1. Quindi arresteremo i displuvii 2 e 3 nel loro punto d'incontro, ove ha origine il displuvio (23) la cui direzione è data dalla risultante (23) delle forze 2 e 3 nella fig. 6'. Così si vede subito che i displuvii 4 e 5 si incontrano fra loro prima che l'un d'essi possa essere incontrato dai displuvi (23) o 1. Perciò limiteremo 4 e 5 nel loro punto d'incontro, da cui partirà un nuovo displuvio (54) parallelo alla risultante (54) delle forze 5 e 4. I tre displuvii 1, (23) e (54) concorrono poi in un punto, che è il nodo corrispondente al triangolo formato dalle tre forze 1, (23) e (54) nella fig. 6'. E per tal modo è ottenuta la proiezione orizzontale del tetto che si voleva comporre.

NOTA.

Nell'esempio delle figure 3 e 3', di tetto con falde di eguali pendenza, dopo condotte pel polo 0 le 12, 23, 34, 45, 56, 71 rispettivamente parallele ai lati omonimi del poligono dato, ed eguali fra loro, si ottengono nella fig. 3' le 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a cui si conducono le parallele corrispondenti nella fig. 3. I displuvii 6 e 7 sono quelli che si

incontrano nei primi, cioè alla minima distanza dai lati del poligono. Si limitano nel loro punto d'incontro, dove ha origine il displuvio (67) parallelo alla risultante (67) delle 6 e 7 data dalla fig. 3'. Poi, dei displuvii rimanenti, le coppie di displuvii successivi che danno i punti d'incontro più vicini al perimetro sono (67) ed 1, e 3 e 4; che danno rispettivamente origine ai displuvii (671) e (34) rispettivamente paralleli alle rette omonime della fig. 3'. La (34) incontrando la 2 dà poi origine a (342), che concorre in un medesimo punto con 5 e (671), perché nel poligono delle forze le (342), 5 e (671) formano un triangolo.

Fig. 4 e 4'. Si conducono i soliti raggi polari paralleli ai lati del poligono dato. Quindi congiungendone ordinatamente le estremità si hanno le direzioni dei displuvii. I primi ad incontrarsi sono 5 e 6, e danno origine a (56). Poi 7 e 8 che danno (78). Poi (56) e 4, danno (456). Quindi (456) e (78) incontrandosi danno (45678). Dopo questi, i due displuvii consecutivi ad incontrarsi alla minor distanza dal perimetro sono 1 e 11, dando origine a (1 11). Poi (1 11) con 10 dà (1 11 10), quest'ultimo con 2 dà quindi (1 11 10 2); quest'ultimo incontra il S prima d'ogni altro, e dà luogo a (1 11 10 2 3). Questo displuvio infine concorre con 9 e con (45678) in un medesimo punto, che è correlativo al triangolo formato, nella fig. 4', dalle (1 11 10 2 3), 9 e (45678); e così anche la proiezione orizzontale di questo tetto assai complicato è ottenuta molto facilmente.

Ing. C. NEGRI.