ATTI DELLA SOCIETÀ DEGLI INGEGNERI E DEGLI INDUSTRIALI

Fascicolo 3

SULLA CURVA INVILUPPO DEI MOMENTI INFLETTENTI NELLE TRAVI LONGITUDINALI DEI PONTI IN FERRO A TRAVATE RETTILINEE

e sulla sua applicazione nel determinare le lamiere da impiegarsi nella composizione di queste travi per resistere alla flessione.

Memoria letta nell'adunanza 2 luglio 1868.

1. I ponti costituiti da travi rettilinee, continue da una testata all'altra e formanti solidi sostenuti da appoggi fissi nei loro estremi ed in punti intermedii, presentano in alcune circostanze tali e tanti vantaggi da non farsi luogo a meraviglia che il loro impiego siasi così rapidamente esteso, malgrado l'aspetto poco elegante ed i timori che si possono avere sulla loro durata. Le grandi travate metalliche costituiscono generalmente il mezzo più facile è più economico per risolvere il problema della traversata di una bassura e di un corso d'acqua quando la costruzione di numerose pile risulta opera eccessivamente costosa; in quei luoghi in cui incontrasi un fondo presentante eccezionali difficoltà di fondazione; in quelle circostanze nelle quali è piccola l'altezza del suolo stradale sul livello delle acque massime; ed in tutti quei casi in cui è imperiosa necessità di non restringere eccessivamente la luce libera di un fiume o torrente con un numero troppo grande di pile.

Il calcolo della resistenza e delle dimensioni della maggior parte dei ponti a travate rettilinee finora costrutti venne fatto coll'impiego di formole empiriche basate su ipotesi completamente gratuite, e principalmente o su quella dell'indipendenza totale o sull'altra dell'incastramento parziale delle diverse travate. A qual grado di approssimazione conducessero queste ipotesi nessuno lo seppe indicare. I calcoli lunghi e faticosi, ai quali dava luogo l'applicazione della teoria sulla resistenza dei materiali, costituivano il titolo di cui facevansi forti i fautori dei metodi empirici per giustificare il falso loro procedere; e così, con enorme spreco di materia e con gravi spese sovente inutili, oppure con pericolo più o meno lontano di funesti e sgraziati accidenti, quasi sempre si arrivava ad avere un eccesso oppure un difetto di stabilità in opere costosissime e della massima importanza.

Le formole empiriche però, risultanti da ipotesi le quali non possono essere confermate da numerose esperienze, non sono suscettive di lungo impiego nella risoluzione di quelle quistioni che, per le stesse esigenze dei tempi e delle circostanze, ad ogni momento devono essere trattate e che, per la loro importanza, vanno annoverate fra le opere di generale interesse e di pubblica utilità. La scienza non tarda ad impossessarsi di queste quistioni, ad intimamente studiarle; quasi sempre arriva a risoluzioni razionali delle quistioni prese ad esame; ai metodi empirici fondati su basi incerte sa contrapporre procedimenti di non dubbia riuscita e d'inconcussa esattezza; rilevando le incongruenze a cui sovente conducono quelli e facendo spiccare i vantaggi di questi, condanna i primi all'assoluto obblìo, fa dei secondi la vera e l'unica guida nelle pratiche applicazioni. Questo avvenne per l'importante problema del calcolo della resistenza dei ponti

in ferro a travate rettilinee. Pei bisogni ognor crescenti di stabilire vie ferrate in circostanze nuove ed eccezionali fra difficoltà non mai superate, queste opere sono diventate al giorno d'oggi d'un'importanza superiore ad ogni aspettazione; i procedimenti empirici per valutare il loro modo di resistere non possono più convenire all'importanza del problema; ed infatti il quesito già venne studiato e risoluto dal lato scientifico. L'ingegnere costruttore è ormai in possesso di un metodo razionale, mediante il quale in ogni caso può accingersi alla redazione del progetto di un ponte in ferro a travate rettilinee, assegnare ad esso la necessaria stabilità, e contemporaneamente mantenere la spesa nei limiti dello strettamente necessario.

Navier, insegnando a valutare la resistenza di un solido prismatico orizzontalmente collocato su più appoggi e caricato di pesi, diede le basi fondamentali da cui dovevasi partire per assicurare la necessaria stabilità ai ponti a travate rettilinee. Gli ingegneri Clapeyron e Bertot, colle semplificazioni che felicemente seppero apportare al metodo di Navier, fecero vedere come la risoluzione del problema, avente per oggetto lo studio della flessione e della stabilità di un solido rettilineo orizzontalmente collocato su più appoggi e caricato di pesi uniformemente distribuiti sulla lunghezza delle diverse travate, poteva benissimo passare dal campo della teoria a quello della pratica e fornire all'ingegnere un metodo facile e prezioso per assicurarsi della stabilità delle travi longitudinali dei ponti a travate rettilinee. Il metodo di Clapeyron venne impiegato in parecchie circostanze, ed il commendevole lavoro degli ingegneri Molinos e Prennier, intitolato *Traité théorique et pratique de la construction des ponts métalliques,* chiaramente fa vedere in qual modo e con quale spirito fu applicato. Il signor Piarron de Mondésir, ingegnere di ponti e strade addetto alla Compagnia delle vie ferrate russe, dimostrando alcuni teoremi sulle posizioni dei carichi, supposti distribuiti su travate intiere, nel momento in cui per alcune sezioni delle travi longitudinali dei ponti in ferro a travate rettilinee potevano venir provocate le massime resistenze, diede un carattere veramente pratico 'al metodo razionale pel calcolo della resistenza dei ponti in ferro a travate rettilinee. Finalmente al signor Eresse, ingegnere di ponti e strade e Professore di Meccanica alla Scuola di ponti e strade di Parigi, fu riserbata la gloria di notevolmente perfezionare la teoria diretta alla valutazone della resistenza delle travi rettilinee collocate su più appoggi e caricate di pesi, di completarla e di ridurla a forma rigorosa conservando ad essa la massima generalità.

2. Il Bresse nell'aprile e nel settembre dell'anno 1862 presentò all'Accademia delle scienze di Parigi un trattato sulla resistenza dei ponti-travi a più travate, e finalmente questo lavoro venne pubblicato nell'anno 1865 come terzo volume costituente la terza parte del corso di meccanica professato dall'autore nella scuola di ponti e strade. Dovendo servire l'opera del Bresse per una scuola d'ingegneri pratici, era ben naturale l'astenersi dall'esporla colla teoria generale dell'elasticità, la quale costituisce d'altronde una scienza poco avanzata e completamente estranea alla maggior parte degli ingegneri. Era imperiosa necessità per l'autore di attenersi alle ipotesi sulle quali fondasi la teoria di Navier sulla resistenza dei solidi alla flessione, e di servirsi nella risoluzione del problema di formole derivanti da questa teoria, ormai divenuta classica presso gl' ingegneri costruttori, e la quale, tuttocchè non assolutamente esente da critiche, rende sufficientemente ragione dei fenomeni dovuti all'elasticità dei materiali.

Il lavoro del Bresse è diviso in due capitoli, ed è accompagnato da numerose tavole numeriche e da un formulario analitico. Nel primo capitolo trovasi svolto l'importante problema sullo studio della flessione e della stabilità delle travi longitudinali dei ponti in ferro a travate rettilinee in tutta la sua generalità, e si hanno le norme per calcolare le dimensioni di queste travi, essendo qualunque i rapporti esistenti fra le distanze degli appoggi. Nel secondo capitolo viene

trattato il caso più frequente della pratica in cui le travate estreme sono eguali, essendo pure eguali le travate intermedie, ma diverse dalle due estreme. Le tavole numeriche rappresentano i risultati ottenuti applicando diverse formole date nel secondo capitolo con ipotesi particolari sul valore del rapporto della lunghezza d' una travata intermedia e d' una travata estrema, e sul numero totale delle travate. Finalmente il formulario analitico dà gli elementi già calcolati per la costruzione delle curve rappresentative dei massimi momenti degli sforzi che possono aver luogo in ciascuna sezione di travi composte di tre a dodici travate nel caso delle due travate estreme eguali e delle travate intermedie pure eguali fra di loro, ma diverse dalle estreme, e per rapporti fra la lunghezza di una travata intermedia e la lunghezza di una travata estrema eguali ai numeri 0,7, 0,8, 0,9, 1, 1,1, 1,2, 1,25 e 1,3. Annesso al lavoro del Bresse trovasi pure un atlante di ventiquattro tavole, costituente un formulario grafico destinato allo stesso scopo del formulario analitico, e valevole per gli otto accennati rapporti fra la lunghezza di una travata intermedia e quella di una travata estrema e per travi composte di tre a sette travate inclusivamente.

L'elaborato del Bresse in tutto e per tutto è condotto con tale profondità di cognizioni, con tanta eleganza di metodi, con tal ordine e con tale chiarezza che nulla si potrebbe desiderare di meglio. Questo lavoro è indubitatamente della massima utilità pratica, e deve studiarlo in tutte le sue parti chi vuol farsi un completo corredo di cognizioni sulla flessione e sulla stabilità delle travi rettilinee a più travate solidarie le une alle altre. Se però osservasi che, per apprendere uno solo dei molteplici problemi che si presentano all'ingegnere costruttore nell'esercizio della sua carriera, è necessario studiare per intiero un volume di 360 pagine in ottavo, e rendersi ragione di dimostrazioni le quali esigono calcoli, se non difficili, lunghi almeno e poco famigliari a quanti trovansi dedicati alla pratica, riesce facile il persuadersi: che giammai potranno spiegare l'opera del Bresse i professori cui trovasi affidato l'insegnamento delle costruzioni nelle nostre scuole d'applicazione per gli allievi ingegneri, ed ai quali, atteso la molteplicità degli argomenti che devono esporre, tutto al più saranno concesse otto o dieci lezioni per dare le norme direttive nell' esecuzione di progetti di ponti in ferro a travate rettilinee; che l'ingegnere pratico, in mezzo alle strettezze di tempo nelle quali generalmente si trova, difficilmente potrà arrivare alla fine dello studio dell'interessante lavoro del Bresse, quantunque a tale studio siasi accinto con tutta la buona volontà e col deciso proposito di volerne fare l'applicazione ad un particolare progetto. È bensì vero che all'ingegnere pratico può benissimo servire l'esteso e ben disposto formulario analitico di cui il Bresse ha voluto fornire il prezioso suo libro, e tanto più che questo formulario è preceduto da una nota esplicativa atta a far conoscere d' una maniera sufficiente, tuttoché senza dimostrazione alcuna, le operazioni da farsi allorché l'uomo pratico se ne vuoi servire. Su questo proposito però mi faccio lecito di domandare : i giovani allievi d' una scuola d'ingegneria, assuefatti come sono al rigore delle dimostrazioni delle matematiche teoriche e portati per naturale istinto a voler conoscere il perché d'ogni cosa, vorranno eglino adattarsi all'applicazione di procedimenti di cui non conoscono la ragione e la convenienza in lavori della massima importanza ? gli ingegneri pratici vorranno acconciarsi all'applicazione di forinole delle quali non conoscono l'origine e di cui non sanno verificare l'esattezza? la facilità d'ingannarsi sui significati delle notazioni e di prendere una indicazione per una altra non saranno per porre gli operatori nel continuo rischio di commettere gravi errori quando si accingano all'applicazione di formole di cui per nulla conoscono la derivazione ? Grandemente c'è da dubitare se tanto gli allievi ingegneri quanto gli ingegneri pratici, non saranno per rendersi ribelli all'idea di meccanicamente applicare il formulario del Bresse ; prima di applicarlo vorranno conoscere le fonti di verità da cui deriva; vorranno sapere quale fiducia si può avere nei

risultamenti a cui esso conduce. Ma il formulario analitico del Bresse è la conclusione di tutta l'opera che lo precede ; è impossibile rendersi ragione dell'uso di quello senza un lungo e maturo studio di questa; e quindi, volendosi con conoscenza di causa applicare il detto formulario, è giuocoforza accingersi ad un lavoro lungo e soventi volte impossibile per le strettezze di tempo in cui generalmente versano tutti coloro che lo dovrebbero condurre a compimento.

Nell'intento di rendere più numerose le applicazioni di cui è suscettivo l'interessante lavoro del Bresse sul calcolo della resistenza e della stabilità delle travi a più travate solidarie, venni nel divisamento di cercare se, per una via più facile e più spedita di quella tenuta dall'illustre autore, non era per avventura possibile arrivare ai medesimi risultati, almeno per quanto si riferisce alla pratica delle costruzioni. Attentamente studiai la quistione; cercai di dimostrare con metodi facili e piani i teoremi fondamentali su cui fondasi la sua risoluzione ; mi attenni alle definizioni strettamente necessarie; e parmi di essere giunto alla deduzione di un metodo che in cinque o sei lezioni comodamente può essere spiegato in un corso di costruzioni per allievi ingegneri, che soddisfa a tutte le esigenze della pratica relativamente alla determinazione delle lamiere da impiegarsi per resistere alla flessione nei ponti in ferro a travate rettilinee, e che trovasi alla portata di quanti hanno soltanto famigliarità cogli ordinarii processi di calcolo. Questo metodo ora sottopongo all'autorevole giudizio di quest'Associazione ; decida essa se veramente può essere di qualche pratica utilità, se gode del vantaggio di potersi speditamente ed utilmente esporre ad altri, e se l'ingegnere costruttore può in esso confidare per la compilazione dei progetti di ponti in ferro a travate rettilinee fra loro solidarie.

Definizioni, ipotesi, nozioni teoriche, principi e teoremi fondamentali.

3. In una trave orizzontalmente collocata su più appoggi e caricata di pesi, chiamasi *momento inflettente* rispetto ad una data sezione della trave stessa la somma algebrica dei momenti delle forze comprese fra questa sezione ed una delle sue estremità, ossia la somma algebrica dei prodotti delle dette forze per le loro distanze dal centro di superficie della sezione considerata. In questo lavoro vengono assunti come positivi i momenti inflettenti che tendono a far rotare l'asse della trave dal basso all'alto, e come negativi invece quelli che operano per farlo rotare in senso contrario.

Venendo poi a considerare principalmente le travi longitudinali costituenti le parti resistenti dei ponti in ferro a travate rettilinee chiamansi: *carichi permanenti* quelli che esse continuamente sopportano, e quindi l'assieme dei proprii pesi con quelli del palco e delle vie che loro spetta di sopportare; *carichi accidentali* o più semplicemente *sovraccarichi* quei pesi che di tanto in tanto vengono a gravitare su una o più travate.

4. Tanto i carichi permanenti quanto i sovraccarichi si suppongono uniformemente distribuiti: sulle lunghezze intiere delle travi i primi, su lunghezze intiere di travate successive ed anche non successive i secondi. Questa legge di distribuzione dei carichi non si può dire rigorosamente vefificata; facilmente però si comprende come non si "scosti molto dal vero, e come l'ipotesi dei sovraccarichi distribuiti con tutte le combinazioni possibili su una o su più travate debba condurre a risultamenti in vantaggio anziché a scapito della stabilità.

Oltre le accennate ipotesi sulla legge di ripartizione dei

carichi portati dalle travi longitudinali dei ponti a travate rettilinee, si ammette innanzitutto che le dette travi abbiano sezione trasversale costante e quindi, colle forinole che risultano dopo quest'ipotesi, si determinano le sezioni trasversali definitive in modo che almeno approssimativamente si possano esse risguardare siccome appartenenti a solidi di eguai resistenza. Si trascura la larghezza degli appoggi nella direzione parallela all'asse della strada e si suppone che ciascuno di essi produca lo stesso effetto come se il solo centro della sezione trasversale corrispondente fosse sostenuto. Finalmente, atteso il considerevole peso permanente dei ponti in ferro a travate rettilinee, si ammette che le travi longitudinali si conservino tutte in contatto dei loro appoggi comunque trovi distribuito il sovraccarico sulle lunghezze di travate intiere.

5. In tutti i' trattati sulla resistenza dei materiali trovansi le nozioni teoriche e le forinole fondamentali che servono al calcolo dei momenti inflettenti per sezioni qualunque delle travi orizzontalmente collocate su più appoggi e caricate di pesi uniformemente distribuiti sulle diverse travate. Queste nozioni e queste forinole costituiscono il fondamento del metodo che intendo esporre per la determinazione dei momenti inflettenti nelle travi longitudinali dei ponti in ferro a travate rettilinee, ed eccone un succinto riassunto tratto dal volume della mia opera sull'arte di fabbricare il quale tratta della *Resistenza dei materiali e della stabilità delle costruzioni.*

Considerando due travate qualunque successive LM ed MN (fig. 1) di una medesima trave, assumendo come verso positivo dei momenti inflettenti quello che tende a far girare l'asse $L\,N$ del solido nel senso marcato dalla freccia F, e chiamando

a' ed a'' le loro lunghezze $\overline{LM}$ ed $\overline{MN}$, ossia le distanze orizzontali fra i mezzi dei tre appoggi successivi L, M, ed N, *p'* e *p''* i pesi per ogni unità di lunghezza che gravitano rispettivamente sulle due parti $\overline{LM}$ ed $\overline{MN}$,

m', ni' ed *ni''* i momenti inflettenti relativi alle sezioni corrispondenti agli appoggi *L, M* ed *N,*

fra le quantità a', *a''*, *p'*, *p''*, *m', m''*, ed m'' si ha la rimarchevole relazione, conosciuta col nome di relazione fra i momenti inflettenti su tre appoggi successivi,

$$m'a' + 2m''(a'+a'') + m'''a'' + \frac{1}{4}(p'a'^3 + p''a''^3) = 0 \quad (1),$$

la quale, dividendo per m'', può anche essere scritta

$$a'\frac{m'}{m''} + 2(a'+a'') + a''\frac{m'''}{m''}$$

$$+ \frac{1}{4}(p'a'^3 + p''a''^3)\frac{1}{m''} = 0 \qquad \textbf{(2).}$$

Dicendo poi

M il momento inflettente relativo ad una sezione qualunque *m* di una travata qualsiasi $\overline{MN}$ (fig. 2),

z la distanza Mm' dal centro di superficie della sezione *m* dal centro di superficie della sezione *M* corrispondente al mezzo dell'appoggio di sinistra,

p il peso uniformemente distribuito su ogni unità di lunghezza della travata che si considera,

α la sua lunghezza $\overline{MN}$

m' ed *m''* i momenti inflettenti per le sezioni le quali corrispondono ai mezzi degli appoggi *M* ed *N,*

il valore di μ. risulta dalla semplicissima forinola

$$\mu = A + Bz - \frac{1}{2}pz^2 \qquad \textbf{(3),}$$

nella quale *A* e *B* rappresentano due numeri da calcolarsi colle forinole

$$A = m', \qquad B = \frac{1}{2}pa + \frac{m''-m'}{a} \qquad (4).$$

Cercando di rappresentare graficamente i momenti inflettenti per le diverse sezioni di una travata qualunque *MN,* ponendo l'origine delle coordinate nel centro *M* della sezione corrispondente all'appoggio di sinistra, assumendo orizzontale e verso destra l'asse positivo delle ascisse *e,* verticale e volto all'insù l'asse positivo delle ordinate rappresentanti i momenti inflettenti, si trova che queste non sono altro che le ordinate di una parabola col suo asse verticale, di parametro $\frac{2}{p}$ ed il cui vertice ammette rispettivamente per ascissa e per ordinata i valori di *h* e di k dati da

$$h = \frac{B}{p}, \qquad k = \frac{B^2}{2p} + A \qquad (5),$$

nelle quali, essendo *p* il peso che trovasi sull'unità di lunghezza della travata che si considera, *A* e *B* ammettono i valori che si ottengono dalle equazioni (4).

Eguagliando a zero il secondo membro dell'equazione (3) si ottengono quei due valori particolari dell'ascissa z per cui i momenti inflettenti sono nulli, ossia si hanno le ascisse dei due punti D ed E nei quali la parabola, le cui ordinate rappresentano i momenti inflettenti, taglia l'asse delle ascisse.

6. In un solido rettilineo il quale, senza che avvenga snervamento, si deforma per flessione, si può ammettere che abbia luogo rotazione di una sua sezione trasversale qualunque relativamente alla sezione trasversale infinitamente vicina, e si può accettare come principio che la rotazione la quale corrisponde alla deformazione totale sia la somma algebrica delle rotazioni parziali prodotte dalle forze estrinseche supposte agire l'una indipendentemente dall'altra. Il principio che qui si ammette non è altro che un caso particolare del noto principio della sovrapposizione degli effetti, il quale applicato alla flessione di una trave longitudinale di ponte a travate rettilinee, si può enunciare in questi termini: *in una trave longitudinale di ponte a travate rettilinee, l'effetto prodotto in una sezione qualunque dal carico permanente e dall'assieme dei sovraccarichi esistenti su diverse travate è la somma algebrica degli effetti parziali che isolatamente produrrebbe nella sezione che si considera ciascuno dei carichi supposti agire parzialmente.*

Siccome poi in seguito alla rotazione di una sezione qualunque relativamente alla sezione infinitamente vicina vien messa in giuoco quella resistenza molecolare il cui momento rispetto all'asse neutro della prima sezione deve far equilibrio al momento inflettente rispetto alla stessa sezione, si può stabilire che *per una trave longitudinale di ponte in ferro a travate rettilinee il momento inflettente per una sezione qualunque è la somma algebrica dei momenti inflettenti che alla stessa sezione corrispondono quando da soli si considerano il carico permanente e ciascuno dei sovraccarichi.*

7. Assumendo, come già si è detto al numero 3, per

verso positivo dei momenti inflettenti quello che tende a far rotare dal basso all'alto l'asse primitivo della trave, e dicendo *concava* o *convessa* la curva che prende l'asse del solido deformato sotto l'azione delle forze estrinseche secondochè volge essa la sua concavità o la sua convessità in alto, risulta ad evidenza: *che i momenti inflettenti sono positivi per quelle sezioni i cui centri di superficie sono sulle parti concave dell'asse deformato, negativi per quelle altre i cui centri di superficie si trovano nelle parti convesse dello stesso asse.*

8. Quando si carica una sola travata di una trave orizzontalmente posta su più appoggi e che suppongonsi assolutamente destituite di peso tutte le altre, l'asse primitivamente rettilineo della travata carica $A\,B$ (fig. 3) si dispone secondo una linea curva $AMNB$, concava in un tratto MN situato verso il mezzo della travata stessa, convessa in due tratti AM e BN a partire dagli appoggi. Risulta da ciò che, *trovandosi sovraccaricata una sola travata dì una trave rettilinea orizzontalmente posta su più appoggi, i momenti inflettenti sono positivi per diverse sezioni site verso il suo mezzo, negativi per le due sezioni corrispondenti agli appoggi e per diverse sue sezioni a partire dagli appoggi stessi, e quindi nulli per due sezioni intermedie della travata.*

In quanto alle travate scariche, che precedono e che seguono la travata carica, l'ipotesi che la trave non si stacchi dagli appoggi naturalmente porta a conchiudere: che su ciascuna di esse, come lo rappresenta la figura 4ª per le travate BC, CD, DE, ... le quali seguono la travata carica AB, si debbano considerare due diversi tratti dell'asse deformato della trave separati dai punti 0, P, Q, ...; che questi tratti siano, convesso e concavo per la travata $B\,C$, concavo e convesso per la travata CD, convesso e concavo per la travata D E, ... Segue da ciò potersi stabilire *che, trovandosi sovraccaricata una sola travata di una trave* *rettilinea orizsontalmente posta su più appoggi, per le travate scariche i momenti inflettenti relativi agli appoggi hanno segni alternati, che in ciascuna travata vi sono alcune sezioni cui corrispondono momenti inflettenti positivi, alcune altre cui corrispondono momenti inflettenti negativi ed una sezione cui corrisponde un momento inflettente nullo.*

9. In una travata appartenente ad una trave orizzontalmente posta su più appoggi e sovraccaricata in modo uniforme, il momento inflettente in una sua sezione trasversale qualunque è dato dall'equazione (3) del numero 5, e quindi graficamente viene rappresentato dall'ordinata di una parabola. Se invece si considera una travata senza sovraccarico, il momento inflettente in una sua sezione qualunque in modo generico è sempre dato dalla citata equazione (3), salvo che, a motivo della non esistenza di sovraccarico, svanisce il termine $\frac{1}{2}$, e quindi invece di essere graficamente rappresentato dall'ordinata di una parabola lo è dall'ordinata di una linea retta.

Premesso questo, si consideri una trave orizzontalmente sostenuta da $n+1$ appoggi, e suppongasi che un sovraccarico passi successivamente dall'una all'altra delle $n — m$ travate appartenenti alla parte di trave A_{m+1} A_{m+1} (fig. 5), la quale si trova a diritta della m^{ma} travata $A_{,n}$ A_{m+1}. L'equazione (2) del numero 5, applicata alla 1^a ed alla 2^a, alla 2^a ed alla 3^a, alla 3^a ed alla 4^a,. . . ., alla $(m — 1)^{ma}$ ed alla m^{ma} travata, conduce ad $m — 1$ equazioni le quali, osservando che è nullo il momento inflettente per la sezione corrispondente al punto A_i e chiamando

a_1 a_2, a_3, a_4,...., a_{m-1}, a_m le lunghezze delle m travate di cui consta la parte A_1 A_{m+1} dell'intiera trave,

$m_2, m_3, m_4, m_5, \ldots, m_{m-1}, m_m, m_{m+1}$ i momenti inflet-

tenti per le sezioni determinate dai punti A_2 , A_3, 4_4, A_5...., A_{m-1}, A_m , A_{m+1} corrispondenti ai mezzi degli appoggi, risultano:

$$2(a_1+a_2)+\frac{m_3}{m_2}a_2=0$$

$$\frac{m_2}{m_3}a_2+2(a_2+a_3)+\frac{m_4}{m_3}a_3=0$$

$$\frac{m_3}{m_4}a_3+2(a_3+a_4)+\frac{m_5}{m_4}a_4=0$$

. . . .

$$\frac{m_{m-1}}{m_m}a_{m-1}+2(a_{m-1}+a_m)+\frac{m_{m+1}}{m_m}a_m=0.$$

Queste equazioni mettono in evidenza come i rapporti $\frac{m_3}{m_2}$, $\frac{m_4}{m_3}$, $\frac{m_5}{m_4}$, ..., $\frac{m_{m+1}}{m_m}$, dipendenti soltanto dalle lunghezze —- , —- ,. . . ., —1!±L dipendenti soltanto dalle lunghezze delle prime m travate su cui per ipotesi non viene a portarsi il sovraccarico, devono conservarsi costanti qualunque sia la posizione del sovraccarico su una delle altre $n — m$ travate, e come, essendo rappresentati dalle ordinate di linee rette i momenti inflettenti per sezioni qualunque della parte di trave A_i $J_{\cdot m}$_f.i ed avendo segni alternati (num. 8) i valori dei momenti inflettenti m_{m+x}, m_m, w_{m-i},. . . ., m_A, m_3 ed m_v si deve trovare su ciascuna delle travate poste a sinistra della sezione corrispondente al punto $J_{\cdot m}+i$ un punto, pel quale passano tutte le rette le cui ordinate rappresentano i momenti inflettenti dovuti ai sovraccarichi esistenti in una qualunque delle travate poste a diritta della sezione corrispondente allo stesso punto A_{m+1}.

Quanto ha luogo per la parte di trave $A_1 A_{m+1}$ posta a sinistra della sezione corrispondente al punto A_{m+1} allorquando il sovraccarico si trova su una travata qualunque della parte di trave $A_{m+1} A_{n+1}$ situata a destra dello stesso punto, evidentemente si deve verificare per l'altra parte di trave $A_{m+1} A_{n+1}$ allorquando il sovraccarico esiste su una delle travate della parte di trave $A_1 A_{m+1}$, e quindi si può conchiudere il seguente teorema: *in ciascuna delle travate di una trave longitudinale di ponte in ferro collocata su più appoggi, esistono sull'asse della trave stessa due punti, pei quali passano tutte le rette le cui ordinate rappresentano i momenti inflettenti dovuti a sovraccarichi esistenti su altre travate. Uno di questi punti è quello per cui passano le rette le cui ordinate rappresentano i momenti inflettenti dovuti all'azione di sovraccarichi esistenti sulle travate di destra; l'altro invece è quello pel quale vengono a concorrere le rette le cui ordinate rappresentano i momenti inflettenti che corrispondono ai sovraccarichi posti sulle travate di sinistra.*

Per ciascuna delle due travate estreme, che si possono chiamare *prima travata* quella di sinistra $A_1 A_2$ ed *ultima travata* quella di destra $A_n A_{n+1}$ gli accennati due punti si riducono ad uno solo e si confondono rispettivamente coll'e*stremo di sinistra* A_1 e coll'*estremo di destra* A_{n+1} dell'intiera trave. Gli stessi due punti poi considerati sulle travate intermedie si chiameranno *punti di concorso pel sovraccarico sulle travate di sinistra* oppure *punti di concorso pel sovraccarico sulle travate di destra* secondo che passano per essi quelle rette le cui ordinate rappresentano i momenti inflettenti per sovraccarichi esistenti su travate poste a sinistra oppure su travate poste a destra di quelle che si considerano.

Ricavando dalle equazioni stabilite in questo numero i rapporti $\frac{m_2}{m_1}$, $\frac{m_3}{m_2}$, $\frac{m_4}{m_3}$, ..., $\frac{m_{m+1}}{m_m}$ si ottengono le formole

$$\frac{m_2}{m_1} = -2\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right)$$

$$\frac{m_3}{m_2} = -\left[2 + \frac{a_2}{a_3}\left(2 + \frac{m_1}{m_2}\right)\right]$$

$$\frac{m_4}{m_3} = -\left[2 + \frac{a_3}{a_4}\left(2 + \frac{m_2}{m_3}\right)\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{m_{m+1}}{m_m} = \text{[illegible]}$$

dalle quali risulta facile il vedere che i valori assoluti dei detti rapporti sono tutti maggiori di 2. Segue da ciò che

$$m_{m+1} > m_m, \ldots, m_5 > m_4, m_4 > m_3, m_3 > m_2$$

e che quindi i punti di concorso pel sovraccarico sulle travate di destra devono trovarsi a sinistra dei mezzi delle travate alle quali appartengono. Quanto si è conchiuso relativamente ai punti di concorso pel sovraccarico sulle travate di destra si applica evidentemente anche ai punti di concorso pel sovraccarico sulle travate di sinistra, per cui in generale si può conchiudere : *i punti di concorso pei sovraccarichi sulle travate di sinistra sono a destra ed i punti di concorso pei sovraccarichi sulle travate di destra sono a sinistra per rapporto ai messi delle travate sulle quali essi si considerano.*

10. Se, per una trave a più travate e particolarmente per una travata, si procede al tracciamento delle linee rappresentative dei momenti inflettenti che corrispondono a tutte le possibili combinazioni del sovraccarico non che al carico permanente, si troverà senza dubbio che alcune di queste linee sono esteriori a tutte le altre tanto al di sopra quanto

al di sotto dell'asse della trave, nella cui direzione si suppone assunto l'asse delle ascisse nella costruzione delle linee stesse. Risulteranno due curve presentanti dei vertici, una al di sopra e l'altra al di sotto dell'asse delle ascisse; la prima di queste curve si potrà chiamare *Vinviluppo dei momenti inflettenti positivi* e la seconda si potrà denominare *l'inviluppo dei momenti inflettenti negativi.*

Gli accennati due inviluppi tornano utili per verificare la stabilità e per convenientemente distribuire le lamiere nel dare i progetti di ponti in ferro a travate rettilinee; che anzi, siccome seguendo la pratica che generalmente venne finora adottata dagli ingegneri costruttori, di fare cioè le travi longitudinali costituenti le parti resistenti di detti ponti con sezione simmetrica rispetto ali' orizzontale passante pel suo centro di superficie, basta conoscere il solo valore assoluto del più gran momento inflettente che si verifica in ciascuna sezione, è sufficiente di considerare un tale inviluppo, che le sue ordinate rappresentino per ciascuna sezione della trave il massimo momento inflettente positivo o negativo che essa deve sopportare.

Quest'inviluppo si può denominare *inviluppo utile,* e si determina esso dietro la conoscenza degli inviluppi dei momenti inflettenti positivi e dei momenti inflettenti negativi; giacché prendendo in ciascuna sezione della trave la più grande in valore assoluto delle due ordinate di questi inviluppi, facendo in modo che tutte si trovino da una medesima parte dell'asse della trave stessa, le estremità di tutte queste ordinate danno la curva i cui punti distano dall'asse delle ascisse di quantità rappresentanti i valori assoluti dei massimi momenti inflettenti e quindi la curva la quale venne chiamata *inviluppo utile.*

11. Considerando in una travata qualunque la parabola le cui ordinate rappresentano i momenti inflettenti dovuti al complesso del carico permanente e del sovraccarico su tutte le travate, l'ordinata in un suo punto qualunque non è altro

che la somma algebrica delle due ordinate corrispondenti allo stesso punto prese, una sull'inviluppo dei momenti inflettenti positivi e l'altra sull'inviluppo dei momenti inflettenti negativi. Considerando invece nella stessa travata la parabola le cui ordinate rappresentano i momenti inflettenti dovuti al solo carico permanente, non differisce essa dall'altra parabola che nella scala delle ordinate, giacché, tanto nell'ipotesi del complesso del carico permanente e del sovraccarico, quanto nell'ipotesi del solo carico permanente, si ha sempre un peso uniformemente distribuito sulla lunghezza intiera della trave a cui la travata appartiene. Segue da ciò potersi stabilire: *che le parabole del carico permanente tagliano l'asse della trave dove questo verrebbe intersecato dalle parabole del carico totale, e che sono eguali le ordinate dei due punti dell'inviluppo dei momenti inflettenti positivi e dell'inviluppo dei momenti inflettenti negativi nei punti in cui l'asse della trave viene intersecato dalle parabole le cui ordinate rappresentano i momenti inflettenti dovuti all'azione del carico permanente.*

Determinazione e tracciamento dell'inviluppo utile.

12. L'inviluppo utile, ossia la curva le cui ordinate rappresentano i massimi valori assoluti dei momenti inflettenti che si verificano nelle diverse sezioni di una trave orizzontalmente disposta su più appoggi e. sottoposta all'azione di un carico permanente uniformemente distribuito sulla sua lunghezza non che di un sovraccarico il quale cangia di posizione in modo però da caricare uniformemente delle intiere travate, si può determinare tenendo il seguente procedimento :

— 1° Supporre che il sovraccarico esista soltanto sulla prima travata e determinare :

a) i momenti inflettenti per le sezioni corrispondenti ai mezzi dei diversi appoggi intermedii;

,*b)* i momenti inflettenti per sezioni qualunque delle diverse travate;

e) le ascisse dei punti in cui questi momenti inflettenti sono nulli, le quali determineranno sulle travate scariche i punti di concorso pel sovraccarico sulle travate di sinistra,

— 2° Sapporre che il sovraccarico esista soltanto sull'ultima travata e cercare pure:

a) i momenti inflettenti per le sezioni corrispondenti ai mezzi dei diversi appoggi intermedii;

b) i momenti inflettenti per sezioni qualunque delle diverse travate;

e) le ascisse dei punti in cui questi momenti inflettenti sono nulli, le quali determineranno sulle travate scariche i punti di concorso pel sovraccarico sulle travate di destra.

— 3° Supporre che il sovraccarico esista successivamente sulla seconda, sulla terza, sulla quarta,. . . . . , sulla penultima travata e determinare in ciascuna di queste ipotesi:

a) i momenti inflettenti per le sezioni corrispondenti ai mezzi dei due appoggi fra cui cade la travata sovraccaricata;

b) i momenti inflettenti per le sezioni corrispondenti ai mezzi degli altri appoggi intermedii;

t) i momenti inflettenti per sezioni qualunque delle diverse travate;

d) le ascisse dei punti in cui i momenti inflettenti sono nulli per le travate con sovraccarico.

— 4° Considerare il carico permanente sulla lunghezza intiera della trave e dedurre:

a) i corrispondenti momenti inflettenti per le sezioni corrispondenti ai mezzi dei diversi appoggi;

b) i momenti inflettenti per sezioni qualunque dell'intiera trave;

e) le ascisse dei punti in cui questi momenti inflettenti sono nulli.

— 5° Costruire, o con tutto il rigore geometrico od anche in modo semplicemente dimostrativo, le linee le cui ordinate rappresentano i momenti inflettenti calcolati nelle accennate ipotesi.

— 6° Trovare per ciascuna travata, per l'inviluppo dei momenti inflettenti positivi e per l'inviluppo dei momenti inflettenti negativi :

a) le ordinate corrispondenti ai mezzi dei diversi appoggi ;

b) le ordinate corrispondenti ai punti di concorso pel sovraccarico sulle travate di sinistra e sulle travate di destra;

e) le ordinate corrispondenti ai punti in cui ciascuna parabola dei sovraccarichi taglia l'asse della trave;

d) le ordinate corrispondenti ai punti in cui le parabole del carico permanente tagliano l'asse della trave.

— 7° Procacciarsi per ciascuna travata le coordinate del punto di massima altezza che verso il suo mezzo presenta la curva inviluppo dei momenti inflettenti positivi.

— 8° Costruire con regole'geometriche le linee appartenenti agli inviluppi dei momenti inflettenti positivi e dei momenti inflèttenti negativi, incominciando dal porre a sito tutti i punti di cui si conoscono le coordinate.

— 9° Dedurre finalmente la curva inviluppo utile riproducendo dalla parte verso cui esiste la curva inviluppo dei momenti inflettenti positivi le porzioni di inviluppo dei momenti inflettenti negativi, le quali trovansi fra gli appoggi e le perpendicolari all'asse della trave elevate pei punti in cui le parabole del carico permanente tagliano l'asse della trave stessa.

13. Nell'intento di ben far comprendere come in ogni caso particolare debbasi applicare il metodo generale or ora esposto, considero il caso di una trave longitudinale di ponte in ferro a travate rettilinee orizzontalmente collocata su più appoggi che indico colle lettere A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, ed A_6 e chiamo

a_1, a_2, a_3, a_4 ed a_5 le distanze $\overline{A_1 A_2}$, $\overline{A_2 A_3}$, $\overline{A_3 A_4}$, $\overline{A_4 A_5}$, ed $\overline{A_5 A_6}$ fra gli accennati appoggi (fig. 6ª),

p e p' il sovraccarico ed il carico permanente per ogni unità di lunghezza della trave.

1° Nell'ipotesi che il sovraccarico esista soltanto sulla prima travata bisogna trovare: i momenti inflettenti per le sezioni corrispondenti ai mezzi dei diversi appoggi intermedii; i momenti inflettenti per sezioni qualunque delle diverse travate; le ascisse dei punti in cui questi momenti inflettenti sono nulli:

a) i momenti inflettenti per le sezioni corrispondenti ai mezzi degli appoggi intermedii si deducono applicando l'equazione (2) del numero 5 considerando la prima e la seconda, la seconda e la terza, la terza e la quarta, la quarta e la quinta travata. I momenti inflettenti per le sezioni le quali corrispondono al primo ed all'ultimo appoggio sono nulli, e fra i momenti inflettenti m'_2, m'_3, m'_4 ed m'_5 per le sezioni corrispondenti ai mezzi del secondo, del terzo, del quarto e del quinto appoggio si hanno le quattro relazioni:

$$2(a_1 + a_2) + a_2 \frac{m'_3}{m'_2} + \frac{1}{4} p (a_1)^3 \frac{1}{m'_2} = 0$$

$$\frac{m'_2}{m'_3} + 2(a_2 + a_3) + a_3 \frac{m'_4}{m'_3} = 0$$

$$a_3 \frac{m'_3}{m'_4} + 2(a_3 + a_4) + a_4 \frac{m'_5}{m'_4} = 0$$

$$a_4 \frac{m'_4}{m'_5} + 2(a_4 + a_5) = 0.$$

Dalle ultime tre di queste equazioni immediatamente si possono dedurre i rapporti

$$\frac{m'_4}{m'_5} = H'_4, \qquad \frac{m'_3}{m'_4} = H'_3, \qquad \frac{m'_2}{m'_3} = H'_2;$$

e quindi, mediante la prima, si può passare alla determinazione del momento inflettente m'_2. Trovato il valore di m'_2 servono rispettivamente la terza, la seconda e la prima delle ultime tre equazioni al calcolo dei momenti inflettenti m'_3, m'_4, ed m'_5.

Nel calcolare i momenti inflettenti m'_2, m'_3, m'_4 ed m'_5 converrà mantenere in evidenza il sovraccarico p, per cui, chiamando n'_2, n'_3, n'_4 ed n'_5 i valori di quei coefficienti numerici i quali rispettivamente moltiplicano p nell'espressione degli accennati momenti, si avrà:

$$m'_2 = n'_2 p, \quad m'_3 = n'_3 p, \quad m'_4 = n'_4 p, \quad m'_5 = n'_5 p.$$

i) I momenti inflettenti per sezioni qualunque delle diverse travate si ottengono coll'applicare le equazioni (3) e (4) del numero 5. Chiamando:

μ'_1, μ'_2, μ'_3, μ'_4 e μ'_5 le espressioni generali dei momenti inflettenti per ciascuna delle travate $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$, $A_4 A_5$ ed $A_5 A_6$,

Si, z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5, le distanze che cinque sezioni qualunque, prese rispettivamente, una nella prima, una nella seconda, una nella terza, una nella quarta ed una nella quinta travata, hanno dall'appoggio sinistro della travata che si considera,

risultano le equazioni:

$$\mu'_1 = \qquad + \frac{m'_2}{a_1}\Big) z_1 - \qquad (z_1)^2 \Big] p$$

$$\mu'_2 = \left(m'_2 + \frac{m'_3 - m'_2}{a_2} z_2\right) p$$

$$\mu'_3 = \left(m'_3 + \frac{m'_4 - m'_3}{a_3} z_3\right) p$$

$$\mu'_4 = \left(m'_4 + \frac{m'_5 - m'_4}{a_4} z_4\right) p$$

$$\mu'_5 = \left(m'_5 - \frac{m'_5}{a_5} z_5\right) p$$

e) Le ascisse dei punti in cui i momenti inflettenti sono nulli si determinano eguagliando a zero le travate espressioni dei momenti μ'_1, μ'_2, μ'_3, μ'_4 e μ'_5. I due valori particolari z_1 e z'_1 di z_1 che ricavansi eguagliando a zero il valore di μ'_1 definiscono quelle due sezioni della prima travata in cui i momenti inflettenti sono nulli, una delle quali è la stessa sezione corrispondente al primo appoggio, giacché per essere z_1 fattore comune nel valore di μ'_1, si ha $z_1 = 0$. I valori particolari z'_2, z'_3, z'_4 e z'_5 di z_2, z_3, z_4 e z_5 che si otten-

gono coll'eguagliare a zero i valori di μ'_2, μ'_3, μ'_4 e μ'_5 danno le ascisse dei punti di concorso pel sovraccarico sulle travate di sinistra per la seconda, per la terza, per la quarta e per la quinta travata. Il valore di z'_5 risulta eguale ad a_5, ossia il punto di concorso sull'ultima travata è lo stesso punto dell'asse della trave corrispondente all'ultimo appoggio.

2° Supponendo che il sovraccarico esista solamente sull'ultima travata bisogna trovare ancora: i momenti inflettenti per le sezioni corrispondenti ai mezzi dei diversi appoggi intermedii; i momenti inflettenti per sezioui qualunque delle diverse travate; le ascisse dei punti in cui questi momenti inflettenti sono nulli.

a) I momenti inflettenti m^5_2, m^5_3, m^5_4 ed m^5_5 per le sezioni corrispondenti ai mezzi degli appoggi intermedii si devono determinare prendendo le mosse dalle equazioni che risultano applicando l'equazione (2) del numero 5 alla prima ed alla seconda, alla seconda ed alla terza, alla terza ed alla quarta, alla quarta ed alla quinta travata. Essendo nulli i momenti inflettenti per le sezioni che corrispondono al primo ed all'ultimo appoggio, risultano le equazioni:

$$2(a_1 + a_2) + a_2 \frac{m^5_3}{m^5_2} = 0$$

$$a_2 \frac{m^5_2}{m^5_3} + 2(a_2 + a_3) + a_3 \frac{m^5_4}{m^5_3} = 0$$

$$a_3 \frac{m^5_3}{m^5_4} + 2(a_3 + a_4) + a_4 \frac{m^5_5}{m^5_4} = 0$$

$$a_4 \frac{m^5_4}{m^5_5} + 2(a_4 + a_5) + \frac{1}{4} p (a_5)^2 \frac{1}{m^5_5} = 0,$$

le prime tre delle quali si prestano all'immediata e facile determinazione dei rapporti

$$\frac{m^5_3}{m^5_2} = H^5_2, \qquad \frac{m^5_4}{m^5_3} = H^5_3, \qquad \frac{m^5_5}{m^5_4} = H^5_4,$$

mentre l'ultima serve alla deduzione del momento m^5_5. Ottenuto il valore di m^5_5, servono la terza, la seconda e la prima delle ultime tre equazioni per il calcolo dei momenti m^5_4, m^5_3 ed m^5_2; e, dicendo rispettivamente n^5_2, n^5_3, n^5_4 ed n^5_5 i valori di quei coefficienti numerici che nei valori di m^5_2, m^5_3, m^5_4 ed m^5_5, moltiplicano il peso p, si ha:

$$m^5_2 = n^5_2\, p, \quad m^5_3 = n^5_3\, p, \quad m^5_4 = n^5_4\, p, \quad m^5_5 = n^5_5\, p.$$

b) Attribuendo alle lettere z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5 i significati che alle medesime vennero dati nell'ipotesi del sovraccarico sulla prima travata, si ottengono le espressioni generali μ^5_1, μ^5_2, μ^5_3, μ^5_4 e μ^5_5 dei momenti inflettenti per ciascuna delle travate A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 ed A_5A_6 applicandole equazioni (3) e (4) del numero 5. Queste espressioni risultano:

$$\mu^5_1 = \frac{n^5_2}{a_1}\, p\, z_1$$

$$\mu^5_2 = \left(n^5_2 + \frac{n^5_3 - n^5_2}{a_2}\, z_2\right) p$$

$$\mu^5_3 = \left(n^5_3 + \frac{n^5_4 - n^5_3}{a_3}\, z_3\right) p$$

$$\mu^5_4 = \left(n^5_4 + \frac{n^5_5 - n^5_4}{a_4}\, z_4\right) p$$

$$\mu^5_5 = \quad [illegible] \quad \Big)\, z_5 - \frac{1}{2}(z_5)^2 \Big]\, p.$$

(e) Eguagliando a zero le trovate espressioni dei momenti inflettenti μ^5_1, μ^5_2, μ^5_3, μ^5_4 e μ^5_5, si hanno le equazioni determinatrici dei punti in cui i momenti inflettenti sono nulli. I quattro valori particolari ζ^5_1, ζ^5_2, ζ^5_3 e ζ^5_4 di z_1, z_2, z_3 e z_4 che si ottengono eguagliando a zero i valori di μ^5_1, μ^5_2, μ^5_3 e μ^5_4 sono le ascisse dei punti di concorso quando il sovraccarico è sulle travate di destra per la prima, per la seconda, per la terza e per la quarta travata. Per la prima travata questo punto è lo stesso estremo di sinistra, giacché $\zeta^5_1 = 0$. Per l'ultima travata si ottengono le ascisse dei punti, in cui i momenti inflettenti sono nulli, nei due valori particolari Z^5_5 e Z'^5_5 quando si eguagli a zero il valore del momento inflettente μ^5_5 di z_5.

3° Nell'ipotesi che il sovraccarico venga successivamente a portarsi sulla seconda, sulla terza e sulla quarta travata bisogna trovare: i momenti inflettenti per le sezioni corrispondenti ai mezzi dei due appoggi fra cui cade la travata sovraccaricata; i momenti inflettenti per le sezioni corrispondenti ni mezzi degli altri appoggi intermedii; i momenti inflettenti per sezioni qualunque delle diverse travate; le ascisse dei punti in cui i momenti inflettenti sono nulli per le travate sovraccaricate.

a) I momenti inflettenti m^2_1 ed m^2_3, m^3_2 ed m^3_4, m^4_3 ed m^4_5 per le sezioni corrispondenti ai mezzi degli appoggi A_1 ed A_3, A_2 ed A_4, A_3 ed A_5, fra cui cade la travata sovraccaricata quando il sovraccarico trovasi sulla seconda, sulla terza e sulla quarta, si ottengono applicando l'equazione (2) del numero 5 col considerare la prima e la seconda e quindi la seconda e la terza, la seconda e la terza e quindi la terza e la quarta, la terza e la quarta e quindi la quarta e la quinta travata. Così procedendo si ottengono le equazioni:

$$2(a_1+a_2)+a_2\frac{m^2_3}{m^2_2}+\frac{1}{4}p(a_2)^3\frac{1}{m^2_2}=0$$

$$a_2\frac{m^2_2}{m^2_3}+2(a_2+a_3)+a_3\frac{m^2_4}{m^2_3}+\frac{1}{4}p(a_2)^3\frac{1}{m^2_3}=0,$$

$$a_2\frac{m^3_2}{m^3_3}+2(a_2+a_3)+a_3\frac{m^3_4}{m^3_3}+\frac{1}{4}p(a_3)^3\frac{1}{m^3_3}=0$$

$$a_3\frac{m^3_3}{m^3_4}+2(a_3+a_4)+a_4\frac{m^3_5}{m^3_4}+\frac{1}{4}p(a_3)^3\frac{1}{m^3_4}=0,$$

$$a_3\frac{m^4_3}{m^4_4}+2(a_3+a_4)+a_4\frac{m^4_5}{m^4_4}+\frac{1}{4}p(a_4)^3\frac{1}{m^4_4}=0$$

$$a_4\frac{m^4_4}{m^4_5}+2(a_4+a_5)+\frac{1}{4}p(a_4)^3\frac{1}{m^4_5}=0.$$

Osservando ora che, a motivo dell'esistenza dei punti di concorso pel sovraccarico sulle travate di sinistra e sulle travate di destra (num. 9), si ha:

$$\frac{m^2_3}{m^2_4}=\frac{m^1_3}{m^1_4}=H'_3 \quad \text{e quindi} \quad \frac{m^2_4}{m^2_3}=\frac{1}{H'_3}$$

$$\frac{m^3_3}{m^3_2}=\frac{m^2_3}{m^2_2}=H'_2 \quad , \quad \frac{m^3_2}{m^3_3}=\frac{1}{H'_2}$$

$$\frac{m^2_4}{m^2_5}=\frac{m^1_4}{m^1_5}=H'_4 \quad , \quad \frac{m^2_5}{m^2_4}=\frac{1}{H'_4}$$

$$\frac{m^3_4}{m^3_5}=\frac{m^2_4}{m^2_5}=H'_4 \quad , \quad \frac{m^3_5}{m^3_4}=\frac{1}{H'_4},$$

si potranno dedurre: i momenti inflettenti m^2_2 e m^2_3 dalle prime due delle sei equazioni stabiliteci; i momenti inflettenti m^3_3 ed m^3_4 dalla terza e dalla quarta considerate simultaneamente; e finalmente i momenti inflettenti m^4_4 ed m^4_5 dalla quinta e dalla sesta.

Questi momenti inflettenti, mantenendo in evidenza il fattore p e chiamando n^2_2, n^2_3, n^3_3, n^3_4, n^4_4 ed n^4_5 i coefficienti numerici per cui questo fattore è moltiplicato nella formazione dei loro valori, verranno espressi da:

$$m^2_2=n^2_2\,p, \qquad m^2_3=n^2_3\,p,$$

$$m^3_3=n^3_3\,p, \qquad m^3_4=n^3_4\,p,$$

$$m^4_4=n^4_4\,p, \qquad m^4_5=n^4_5\,p.$$

b) Quanto si è detto nel già citato numero 9 facilmente conduce a trovare i momenti inflettenti m^2_4 ed m^2_5, m^3_2 ed m^3_5, m^4_2 ed m^4_3 per le sezioni corrispondenti ai mezzi degli appoggi A_4 ed A_5, A_2 ed A_5, A_2 ed A_3 trovandosi rispettivamente il sovraccarico sulla seconda, sulla terza, sulla quarta travata. Si ha infatti:

$$\frac{m^2_3}{m^2_4}=\frac{m^1_3}{m^1_4}=H'_3, \qquad \frac{m^3_4}{m^3_5}=\frac{m^1_4}{m^1_5}=H'_4,$$

$$\frac{m^2_4}{m^2_5}=\frac{m^1_4}{m^1_5}=H'_4, \qquad \frac{m^4_4}{m^4_3}=\frac{m^5_4}{m^5_3}=H^5_3,$$

$$\frac{m^3_3}{m^3_2}=\frac{m^5_3}{m^5_2}=H^5_2, \qquad \frac{m^4_3}{m^4_2}=\frac{m^5_3}{m^5_2}=H^5_2.$$

La prima di queste equazioni serve a ricavare m^2_4 e la seconda si presta a dedurre m^2_5; il valore di m^3_2 si ottiene colla terza, e quello di m^3_5 colla quarta; mediante la quinta si calcola m^4_3, e si trova m^4_2 colla sesta. Se poi si indicano con n^3_4, n^2_5, n^3_2, n^3_5, n^4_3 ed n^4_2 quei coefficienti numerici i quali moltiplicano il sovraccarico p nei valori di m^3_4, m^2_5, m^3_2, m^3_5, m^4_3 ed m^4_2, si ha:

$$m^3_4 = n^3_4\, p, \qquad m^2_5 = n^2_5\, p,$$

$$m^3_2 = n^3_2\, p, \qquad m^3_5 = n^3_5\, p,$$

$$m^4_2 = n^4_2\, p, \qquad m^4_3 = n^4_3\, p.$$

e) I momenti inflettenti μ^2_1, μ^2_2, μ^2_3, μ^2_4 e μ^2_5 per sezioni qualunque della prima, della seconda, della terza, della quarta e della quinta travata, quando il sovraccarico è sulla seconda, sono dati dalle equazioni:

$$\mu^2_1 = \frac{n^2_2}{a_1}\, p\, z_1$$

$$\mu^2_2 = \left[n^2_2 + \left(\frac{1}{2}\, a_2 + \frac{n^2_3 - n^2_2}{a_2}\right) z_2 - \frac{1}{2}\,(z_2)^2\right] p$$

$$\mu^2_3 = \left(n^2_3 + \frac{n^2_4 - n^2_3}{a_3}\, z_3\right) p$$

$$\mu^2_4 = \left(n^2_4 + \frac{n^2_5 - n^2_4}{a_4}\, z_4\right) p$$

$$\mu^2_5 = \left(n^2_5 - \frac{n^2_5}{a_5}\, z_5\right) p.$$

I momenti inflettenti μ^3_1, μ^3_2, μ^3_3, μ^3_4 e μ^3_5, pure per sezioni qualunque della prima, della seconda, della terza, della quarta e della quinta travata, quando il sovraccarico trovasi

sulla terza, vengono espressi da:

$$\mu^3_1 = \frac{n^3_2}{a_1}\, p\, z_1$$

$$\mu^3_2 = \left(n^3_2 + \frac{n^3_3 - n^3_2}{a_2}\, z_2\right) p$$

$$\mu^3_3 = \left[n^3_3 + \left(\frac{1}{2}\, a_3 + \frac{n^3_4 - n^3_3}{a_3}\right) z_3 - \frac{1}{2}\,(z_3)^2\right] p$$

$$\mu^3_4 = \left(n^3_4 + \frac{n^3_5 - n^3_4}{a_4}\, z_4\right) p$$

$$\mu^3_5 = \left(n^3_5 - \frac{n^3_5}{a_5}\, z_5\right) p$$

Finalmente i momenti inflettenti μ^4_1, μ^4_2, μ^4_3, μ^4_4 e μ^4_5 per una sezione qualunque di ciascuna delle cinque travate, quando il sovraccarico trovasi solamente sulla quarta travata, ammettono i valori:

$$\mu^4_1 = \frac{n^4_2}{a_1}\, p\, z_1$$

$$\mu^4_2 = \left(n^4_2 + \frac{n^4_3 - n^4_2}{a_2}\, z_2\right) p$$

$$\mu^4_3 = \left(n^4_3 + \frac{n^4_4 - n^4_3}{a_3}\, z_3\right) p$$

$$\mu^4_4 = \left[n^4_4 + \left(\frac{1}{2}\, a_4 + \frac{n^4_5 - n^4_4}{a_4}\right) z_4 - \frac{1}{2}\,(z_4)^2\right] p$$

$$\mu^4_5 = \left(n^4_5 - \frac{n^4_5}{a_5}\, z_5\right) p.$$

Nelle espressioni dei momenti inflettenti μ^1_2, μ^2_2, μ^1_3, μ^2_3, μ^3_3, μ^1_4, μ^2_4, μ^3_4, μ^4_4, μ^1_5, μ^2_5, μ^3_5, μ^4_5 e μ^5_5 le lettere z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5 hanno i significati che già loro vennero attribuiti fin dal principio di questo numero supponendo il sovraccarico esistente soltanto sulla prima travata.

d) Le ascisse dei punti in cui i momenti inflettenti sono nulli per le travate sovraccaricate si ottengono eguagliando a zero i valori dei momenti inflettenti μ^2_2, μ^3_3 e μ^4_4. Ciascuna delle tre equazioni che risultano è del secondo grado. La prima dà due valori particolari Z'_2 e Z''_2 di z_2, la seconda dà due valori particolari Z'_3 e Z''_3 di z_3, e la terza dà pure due valori particolari Z'_4 e Z''_4 di z_4. Queste ascisse Z'_2 e Z''_2, Z'_3 e Z''_3, Z'_4 e Z''_4 determinano rispettivamente sulla seconda, sulla terza e sulla quarta travata i punti in cui la parabola del sovraccarico, supposto esistere soltanto sulla seconda, o sulla terza, o sulla quarta travata, taglia l'asse della trave.

4° Considerando ora il carico permanente sulla lunghezza dell'intiera trave bisogna dedurre: i corrispondenti momenti inflettenti per le sezioni corrispondenti ai mezzi dei diversi appoggi; i momenti inflettenti per sezioni qualunque dell'intiera trave; le ascisse dei pnnti in cui questi momenti inflettenti sono nulli.

a) Per trovare i momenti inflettenti m_2, m_3, m_4 ed m_5 relativi alle sezioni corrispondenti ai mezzi degli appoggi intermedii quando si considera l'intiero carico permanente distribuito in ragione di p' unità di peso per ogni unità di lunghezza della trave, si può tenere la seguente via semplice e spedita. Fare, mediante il principio enunciato al numero 6, i momenti inflettenti $m_2^{1.2.3.4.5}$, $m_3^{1.2.3.4.5}$, $m_4^{1.2.3.4.5}$ ed $m_5^{1.2.3.4.5}$ per le sezioni corrispondenti ai mezzi degli appoggi intermedii nell'ipotesi che il sovraccarico si trovi sull'intiera trave, o, più semplicemente, ottenere i coefficienti numerici n_2, n_3, n_4

ed n_5 che moltiplicano il fattore p nell'espressione dei detti momenti; osservare che, tanto nell'ipotesi del sovraccarico sull'intiera trave quanto in quella del carico permanente, trattasi di un carico uniformemente distribuito su tutta la trave; e che nelle due ipotesi le espressioni dei momenti inflettenti per le sezioni corrispondenti ai mezzi degli appoggi intermedii devono soltanto variare nel fattore rappresentante il carico uniformemente distribuito. Ora i coefficienti numerici che nell'espressione dei momenti inflettenti $m_2^{1.2.3.4.5}$, $m_3^{1.2.3.4.5}$, $m_4^{1.2.3.4.5}$ ed $m_5^{1.2.3.4.5}$ moltiplicherebbero il fattore p sono dati dalle forinole:

$$n_2 = n^1_2 + n^2_2 + n^3_2 + n^4_2 + n^5_2$$
$$n_3 = n^1_3 + n^2_3 + n^3_3 + n^4_3 + n^5_3$$
$$n_4 = n^1_4 + n^2_4 + n^3_4 + n^4_4 + n^5_4$$
$$n_5 = n^1_5 + n^2_5 + n^3_5 + n^4_5 + n^5_5$$

e quindi i valori di m_2, m_3, m_4 ed m_5, quando si mantenga in evidenza il fattore p e quando si faccia

$$\frac{p'}{p} = K,$$

risultano

$$m_2 = n_2\,Kp, \qquad m_3 = n_3\,Kp, \qquad m_4 = n_4\,Kp, \qquad m_5 = n_5\,Kp.$$

b) Conservando alle lettere z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5 i significati che già loro vennero attribuiti, i momenti inflettenti μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 e μ_5 per sezioni qualunque della prima, della seconda, della terza, della quarta e della quinta travata, da ottenersi coll'applicazione delle equazioni (3) e (4) del numero 5 risultano:

$$\mu_1=\left[\left(\frac{1}{2}a_1+\frac{n_2}{a_1}\right)z_1-\frac{1}{2}(z_1)^2\right]Kp$$

$$\mu_2=\left[n_2+\left(\frac{1}{2}a_2+\frac{n_3-n_2}{a_2}\right)z_2-\frac{1}{2}(z_2)^2\right]Kp$$

$$\mu_3=\left[n_3+\left(\frac{1}{2}a_3+\frac{n_4-n_3}{a_3}\right)z_3-\frac{1}{2}(z_3)^2\right]Kp$$

$$\mu_4=\left[n_4+\left(\frac{1}{2}a_4+\frac{n_5-n_4}{a_4}\right)z_4-\frac{1}{2}(z_4)^2\right]Kp$$

$$\mu_5=\left[n_5+\left(\frac{1}{2}a_5-\frac{n_5}{a_5}\right)z_5-\frac{1}{2}(z_5)^2\right]Kp.$$

e) Le ascisse dei punti in cui sono nulli i momenti inflettenti μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 e μ_5, ossia le ascisse dei punti in cui le parabole del carico permanente tagliano gli assi delle diverse travate, si deducono eguagliando a zero i valori di questi stessi momenti, e ricavando i valori particolari z'_1 e z''_1 di z_1, z'_2 e z''_2 di z_2, z'_3 e z''_3 di z_3, z'_4 e z''_4 di z_4, z'_5 e z''_5 di z_5 che verificano alle equazioni così stabilite. Il valore di z'_1 si troverà eguale a zero, e sarà eguale ad a_5 quello di z''_5.

5° Una volta determinati i momenti inflettenti per le sezioni corrispondenti agli appoggi considerando il sovraccarico su ciascuna delle cinque travate ed il carico permanente sulla lunghezza della trave intiera, e calcolate le ascisse dei punti in cui i momenti inflettenti sono nulli, riesce agevole il costrurre, almeno in modo indicativo, le linee le cui ordinate rappresentano i momenti inflettenti per tutte le fatte ipotesi. Perciò si portino su una retta, assunta per

rappresentare la direzione orizzontale dell'asse della trave, le distanze $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_4A_5}$ ed $\overline{A_5A_6}$ (fig. 6) rappresentanti rispettivamente le lunghezze a_1, a_2, a_3, a_4 ed a_5 delle cinque travate. Mediante le ascisse z'_1 e z''_1 si fissino sulla prima travata i due punti Z'_1 e Z''_1, e mediante le ascisse z'_2, z''_2, ... si determinino sulla seconda travata i punti individuati colle stesse lettere rappresentanti le loro ascisse rispetto all'origine A_1. Analogamente si fissino le posizioni dei punti Z'_3, Z''_3, ... sulla terza travata, quelle dei punti Z'_4, Z''_4, ... sulla quarta, e finalmente quelle dei punti Z'_5 e Z''_5 sulla quinta. Pei punti A_2, A_3, A_4 ed A_5 si conducano delle perpendicolari alla retta A_1A_6; al di sotto di questa sulle accennate perpendicolari a partire dai punti A_2, A_3, A_4 ed A_5 si portino i momenti inflettenti negativi per le sezioni corrispondenti ai mezzi degli appoggi intermedii, al di sopra i momenti inflettenti positivi, e si determinino così i punti m^1_2, m^2_2, m^3_2, m^4_2, m^5_2 ed m_2 sulla verticale passante per A_2, i punti m^1_3, m^2_3, m^3_3, m^4_3, m^5_3 ed m_3 sulla verticale passante per A_3, i punti m^1_4, m^2_4, m^3_4, m^4_4, m^5_4 ed m_4 sulla verticale passante per A_4, ed i punti m^1_5, m^2_5, m^3_5, m^4_5, m^5_5 ed m_5 sulla verticale corrispondente al punto A_5.

Le linee le cui ordinate rappresentano i momenti inflettenti sono: $A_1Z''_1m^1_2m^1_3m^1_4m^1_5A_6$, che indico col num. 1, nell'ipotesi del sovraccarico sulla prima travata; $A_1m^2_2Z'_2Z''_2m^2_3m^2_4m^2_5A_6$, che indico col numero 2, nell'ipotesi del sovraccarico sulla seconda travata; $A_1m^3_2m^3_3Z'_3Z''_3m^3_4m^3_5A_6$, che indico col numero 3, nell'ipotesi del sovraccarico sulla terza travata; $A_1m^4_2m^4_3m^4_4Z'_4Z''_4m^4_5A_6$, che indico col numero 4, nell'ipotesi del sovraccarico sulla quarta travata; $A_1m^5_2m^5_3m^5_4m^5_5Z'_5A_6$, che indico col numero 5, nell'ipotesi del sovraccarico sulla quinta travata; e finalmente $A_1Z''_1m_2Z'_2Z''_2m_3Z'_3Z''_3m_4Z'_4Z''_4m_5Z'_5A_6$, che indico colla lettera P, nell'ipotesi del carico permanente sull'intiera trave.

b) Le ordinate dell'inviluppo dei momenti inflettenti positivi, corrispondenti ai punti di concorso pel sovraccarico sulle travate di sinistra, sono le b'_2, b'_3 e b'_4 date dalle formole:

$$b'_3 = (\mu^3_1 + \mu^2_2 + \mu_2)_{\xi'_1}$$

$$b'_4 = (\mu^3_4 + \mu_4)_{\xi'_4};$$

e le ordinate b''_2, b''_3 e b''_4 dell'inviluppo dei momenti inflettenti negativi per gli stessi punti ammettono i valori:

$$b''_2 = (\mu^2_2 + \mu^2_3 + \mu_3)_{\xi_2}$$

$$b''_3 = (\mu^3_3)_{\xi'_2}$$

$$b''_4 = (\mu^3_4)_{\xi'_4}.$$

Le ordinate c'_2, c'_3 e c'_4 dell'inviluppo dei momenti inflettenti positivi, per le sezioni le quali sono determinate dai punti di concorso pel sovraccarico sulle travate di destra, vengono date da:

$$c'_2 = (\mu_2)_{\xi''_2}$$

$$c'_3 = (\mu^1_3 + \mu^2_3 + \mu_3)_{\xi''_3}$$

$$c'_4 = (\mu^1_4 + \mu^2_4)_{\xi''_4};$$

e le ordinate dell'inviluppo dei momenti inflettenti negativi per le stesse sezioni valgono:

$$c''_2 = (\mu^3_2 + \mu_2)_{\xi''_2}$$

$$c''_3 = (\mu^3_3)_{\xi''_4}$$

$$c''_4 = (\mu^3_4 + \mu_4)_{\xi''_4}.$$

e) Le ordinate e'_1, f'_2 ed e'_2, f'_3 ed e'_3, f'_4 ed e'_4, f'_5 dell'inviluppo dei momenti inflettenti positivi per le sezioni corrispondenti coi punti in cui ciascuna parabola dei sovraccarichi taglia l'asse della trave, sono:

$$e'_1 = (\mu^2_1 + \mu^2_1)_{Z'_1}$$

$$f'_2 = (\mu^2_2 + \mu^2_2)_{Z_2}$$

$$e'_2 = (\mu^1_2 + \mu^2_2)_{Z''_2}$$

$$f'_3 = (\mu^2_3 + \mu^2_3)_{Z_3}$$

$$e'_3 = (\mu^2_3 + \mu^2_3)_{Z''_3}$$

$$f'_4 = (\mu^2_4 + \mu^2_4)_{Z'_4}$$

$$e'_4 = (\mu^1_4 + \mu^2_4)_{Z''_4}$$

$$f'_5 = (\mu^1_5 + \mu^2_5)_{Z'_5};$$

6° Prendendo sulla retta rappresentativa dell'asse della trave un punto qualunque *lì* e volendosi per la sezione corrispondente a questo punto il massimo dei momenti inflettenti positivi ed il massimo dei momenti inflettenti negativi, ossia le due ordinate una dell'inviluppo dei momenti inflettenti positivi e l'altra dell'inviluppo dei momenti inflettenti negativi, in virtù del principio di cui venne dato l'enunciato nel numero 6, altro non si deve fare die condurre per B la verticale $v\,lì\,v'$, osservare che questa retta taglia le linee 1, 3, 5 e P nei punti b_v 6_3, $\&_5$ e i al di sopra dell'orizzontale A_i A_6, le linee 2 e 4 nei punti b_t e $b_{,k}$ al di sotto della stessa orizzontale, ed assumere quindi come ordinata dei momenti inflettenti positivi la somma

$$\overline{Bb_1} + \overline{Bb_3} + \overline{Bb_5} + \overline{Bb_i}$$

come ordinata dei momenti inflettenti negativi l'altra somma

$$\overline{Bb_2} + \overline{Bb_4}.$$

Segue da ciò potersi facilmente trovare per ciascuna travata, per l'inviluppo dei momenti inflettenti positivi e per l'inviluppo dei momenti inflettenti negativi: le ordinate corrispondenti ai mezzi dei diversi appoggi intermedii ; le ordinate corrispondenti ai punti di concorso pel sovraccarico sulle travate di sinistra e sulle travate di destra; le ordinate corrispondenti ai punti in cui ciascuna parabola dei sovraccarichi taglia l'asse della trave; le ordinate corrispondenti ai punti in cui le parabole del carico permanente tagliano pure l'asse della trave. Le lunghezze di tutte queste ordinate verranno indicate colle lettere che sulla figura trovatisi alle loro estremità; e, occorrendo di dover prendere il valore particolare dell' espressione generale di un momento ' inflettente o della somma di più momenti inflettenti per una

data sezione, si porrà fra parentesi l'espressione generale ed al piede della parentesi di destra si collocherà quell'ascissa che precisa quella sezione per la quale vuoisi il valore particolare di un momento inflettente o della somma di più momenti inflettenti. Così, per esempio $(\mu^2_1)_{z_1}$ sarà il modo di rappresentare il valore particolare del momento inflettente μ^2_1 per la sezione della prima travata determinata dall'ascissa $z_1 = z'_1$ e $(M^3_3 + M^5_3 + M_3)_{z'_3}$ indicherà il valore particolare che prende la somma dei momenti inflettenti μ^3_3, μ^5_3 e μ_3 in quella sezione della terza travata la quale dista dall'estremo di sinistra della stessa travata dell'ascissa $z_3 = z'_3$.

a) Le ordinate dell'inviluppo dei momenti inflettenti positivi per gli appoggi A_2, A_3, A_4 ed A_5 sono rispettivamente rappresentate dai valori M'_2, M'_3, M'_4 ed M'_5 da calcolarsi colle forinole

$$M'_2 = m^3_2 + m^5_2$$

$$M'_3 = m^1_3 + m^i_3$$

$$M'_4 = m^1_4 + m^3_4$$

$$M'_5 = m^1_5 + m^3_5;$$

e le ordinate M''_2, M''_3, M''_4 ed M''_5 dell'inviluppo dei momenti inflettenti negativi per le sezioni corrispondenti ai mezzi degli stessi appoggi vengono date da:

$$M''_2 = m^2_2 + m^2_2 + m^4_2 + m_2$$

$$M''_3 = m^2_3 + m^4_3 + m^5_3 + m_3$$

$$M''_4 = m^1_4 + m^2_4 + m^5_4 + m_4$$

$$M''_5 = m^2_5 + m^4_5 + m^5_5 + m_5.$$

e le ordinate e''_1, f''_2 ed e''_2, f''_3 ed e''_3, f''_4 ed e''_4, f''_5 dell'inviluppo dei momenti inflettenti negativi per le stesse sezioni ammettono i valori:

$$e''_1 = (\mu^2_1 + \mu^3_1 + \mu_1)_{z''_1}$$

$$f''_2 = (\mu^1_2 + \mu^4_2 + \mu_2)_{z''_2}$$

$$e''_2 = (\mu^3_2 + \mu^5_2 + \mu_2)_{z''_2}$$

$$f''_3 = (\mu^1_3 + \mu^5_3 + \mu_3)_{z''_3}$$

$$e''_3 = (\mu^2_3 + \mu^4_3 + \mu_3)_{z''_3}$$

$$f''_4 = (\mu^1_4 + \mu^3_4 + \mu_4)_{z''_4}$$

$$e''_4 = (\mu^2_4 + \mu^5_4 + \mu_4)_{z''_4}$$

$$f''_5 = (\mu^1_5 + \mu^3_5 + \mu_5)_{z''_5}$$

d) Le ordinate g'_1, h'_2 e g'_2, h'_3 e g'_3, h'_4 e g'_4, h'_5 degli inviluppi dei momenti inflettenti positivi e dei momenti inflettenti negativi corrispondenti ai punti in cui le parabole del carico permanente tagliano l'asse della trave, per quanto si è detto al numero 11, sono eguali, ed i loro valori assoluti vengono dati dalle semplicissime forinole

$$g'_1 = (\mu^1_1 + \mu^3_1 + \mu^5_1)_{x''_1} = -(\mu^2_1 + \mu^4_1)_{x''_1}$$

$$h'_2 = (\mu^3_2 + \mu^4_2)_{x'_2} = -(\mu^1_2 + \mu^2_2 + \mu^5_2)_{x'_2}$$

$$g'_2 = (\mu^2_2 + \mu^4_2)_{x''_2} = -(\mu^1_2 + \mu^3_2 + \mu^5_2)_{x''_2}$$

$$h'_3 = (\mu^1_3 + \mu^2_3 + \mu^4_3)_{x'_3} = -(\mu^3_3 + \mu^5_3)_{x'_3}$$

$$g'_3 = (\mu^2_3 + \mu^3_3 + \mu^5_3)_{x''_3} = -(\mu^1_3 + \mu^4_3)_{x''_3}$$

$$h'_4 = (\mu^2_4 + \mu^5_4)_{x'_4} = -(\mu^1_4 + \mu^3_4 + \mu^4_4)_{x'_4}$$

$$g'_4 = (\mu^1_4 + \mu^3_4 + \mu^5_4)_{x''_4} = -(\mu^2_4 + \mu^4_4)_{x''_4}$$

$$h'_5 = (\mu^1_5 + \mu^2_5 + \mu^4_5)_{x'_5} = -(\mu^3_5 + \mu^5_5)_{x'_5}$$

7° Per procacciarsi le coordinate dei punii di massima altezza che verso il mezzo di ciascuna travata presenta la curva inviluppo dei momenti inflettenti positivi, bisogna ottenere le espressioni dei momenti inflettenti per una sezione qualunque posta nella regione centrale della prima, della seconda, della terza, della quarta e della quinta travata. Queste espressioni sono :

$$\mu^2_1 + \mu^4_1 + \mu^5_1 + \mu_1$$

$$\mu^3_2 + \mu^4_2 + \mu_2$$

$$\mu^1_3 + \mu^3_3 + \mu^5_3 + \mu_3$$

$$\mu^2_4 + \mu^4_4 + \mu_4$$

$$\mu^1_5 + \mu^3_5 + \mu^5_5 + \mu_5 ;$$

La prima di esse è funzione di z_1, la seconda di z_2, la terza di g_v la quarta di s_A e la quinta di £$_5$; e le loro derivate per rapporto a queste variabili, eguagliate a zero, somministrano le cinque equazioni determinatrici delle ascisse H_v H_v Jf$_3$, H_i ed J/$_5$ dei domandati punti d'altezza massima. Le ordinate M_v M_v $M_vM_i$eà M_5 degli stessi punti immediatamente si ottengono nei valori particolari che prendono le cinque espressioni dei momenti inflettenti per una sezione qualunque posta nella regione centrale di ciascuna travata, quando in esse si faccia ts_lz=:H_{li} #$_2$ = H_v $s_{\%}$ rr H_3, *$_4$ = fl4 e £$_5$ = 2T$_5$.

8° Determinate così le coordinate dei punti singolari, tanto per l'inviluppo dei momenti inflettenti positivi quanto per l'inviluppo dei momenti inflettenti negativi, si può passare alla geometrica loro descrizione. Perciò s'incominci dal portare a sito tutti i punti di cui vennero determinate le coordinate i quali, oltre i vertici corrispondenti agli appoggi, sono in numero di tre per la prima e per l'ultima travata, in numero di sette per le travate intermedie; fra questi punti singolari si determinino quanti punti si vogliono, o fissandosi diverse ascisse e calcolando le ordinate corrispondenti, oppure segnando diverse verticali analoghe a vBv' ed operando per tutte come su questai per la quale si determina il punto y' sulla parte positiva Bv col prendere:

$$\overline{8\,y'} = \overline{B\,i;}\ \text{-+-}\ \overline{B\,b_3} + \overline{6\,i_s} + \overline{B\,6},$$

ed il punto y" sulla parte negativa $8\,v'$ coll'assumere

$$\overline{8\,y''} = \overline{8\,b_2} + \overline{8\,b_4}\,.$$

Determinato per tal modo un sufficiente numero di punti, si passi al tracciamento dei due inviluppi rappresentati: il positivo dalla linea A_i M_i $g\backslash$ $e\backslash$ $M\backslash$ $f\backslash$ c'$_2$ h'_2 -M$_2$ $g\backslash$ $h\backslash$ e'$_2$ M'_3 $f\backslash K_3\, c\backslash\, M._{\grave{o}}\, b\backslash g\backslash e\backslash\, M_A f\backslash c\backslash h\backslash M_A\, b\backslash g\backslash\, e\backslash\, W, f_5\, U_5\, M$, $A\{$, il negativo dalla linea $'A_i$ $g'\backslash$ e"$_t$ $M\backslash f'\backslash é\backslash$ $h''\backslash$ $g'\backslash$ $V\backslash$

$e\backslash$ $M\backslash$ $f\backslash$ $h\backslash$ $e\backslash$ b''_3 $g\backslash$ $é\backslash$ $M\backslash f\backslash$ $c\backslash$ $h\backslash$ $l\backslash$ $g\backslash$ e'', M'', $f\backslash$ **K\A-**

9° Resta finalmente a dedursi la curva inviluppo utile ossia quella linea le cui ordinate rappresentano in ciascuna sezione il massimo valore assoluto dei momenti inflettenti che per essa si possono verificare. Basta pei'ciò osservare : che le ordinate dell'inviluppo dei momenti inflettenti positivi sono maggiori delle ordinate dell'inviluppo dei momenti inflettenti negativi per le sezioni comprese fra i punti in cui ciascuna travata è tagliata dalla corrispondente parabola del carico permanente, e quindi per le sezioni poste fra $A_\{$ e $s'\backslash$, fra $z\backslash$ e $e\backslash$, fra z'_3 e z''_3, fra $ts\backslash$ e $z'\backslash$ e fra $s\backslash$ ed A_6; che le ordinate dell'inviluppo dei momenti inflettenti negativi sono maggiori delle ordinate dell'inviluppo dei momenti inflettenti positivi per tutte le altre sezioni; e che le ordinate dell'inviluppo dei momenti inflettenti positivi sono eguali alle ordinate dell'inviluppo dei momenti inflettenti negativi per le sezioni corrispondenti ai punti in cui le parabole del carico permanente tagliano l'asse della trave, e quindi per le sezioni corrispondenti ai punti s''_t, $z\backslash$, #"$_2$, $s'_{tì}$ $s''_{3ì}$ $z\backslash$, $s'\backslash$ e $z\backslash$. Segue da ciò che per avere la curva inviluppo utile, basta riprodurre al di sopra dell'asse A_i A_6 della trave: la linea $g\backslash$ $e\backslash$ $M\backslash$ $f\backslash$ $c\backslash$ $h\backslash$ in $g\backslash$ $é\backslash$ $M'\backslash f\backslash$ $c'\backslash$ $li\backslash$; la linea $g\backslash$ $b\backslash$ $e\backslash$ $M\backslash$ $f\backslash$ $h\backslash$ in $g\backslash$ $b'\backslash$ $e\backslash$ $M''\backslash$ $f'\backslash$ h_3 ; la linea $g\backslash$ $e\backslash M''_A f''_i c''_i h'\backslash$ in $g\backslash é\backslash M\backslash f\backslash 6\backslash V\backslash$ e la linea $g\backslash$ $e\backslash$ $M'_5\, f\backslash V\backslash$ in $g\backslash$ $e''\backslash$ $M''\backslash$ $f'\backslash$ $h\backslash_y$ Questa riproduzione si fa ribattendo al di sopra dell'asse della trave le ordinate che cadono al di sotto: così si determina il punto $b''\backslash$ corrispondente di 5"$_2$ col prendere $\overline{ì\text{-}\backslash\ b''\backslash} = \overline{\%\backslash\ V\backslash}$.

14. Nelle ordinarie e più frequenti circostanze della pratica, o sono tutte eguali fra di loro le travate dei ponti in ferro a travate rettilinee, oppure, essendo eguali fra di loro le due estreme, lo sono pure le intermedie, ma diverse dalle prime. Questa disposizione di cose notevolmente semplifica la risoluzione

del problema relativo, alla determinazione degli inviluppi dei momenti inflettenti, il quale, come appare dal caso particolare che venne trattato nel precedente numero, senza presentare difficoltà, riesce un poco lungo e faticoso. Le travi longitudinali sono simmetriche rispetto alla loro sezione di mezzo; i medesimi valori delle ascisse e delle ordinate dei punti singolari delle curve inviluppo si riproducono a distanze eguali dai due estremi; e quindi per una trave composta di *n* travate basta fare i calcoli nelle ipotesi che il sovraccarico venga a trovarsi soltanto su $\frac{n}{2}$ o su $\frac{n+1}{2}$ travate, secondo che *n* è numero pari od impari.

Nel caso di una trave composta di un gran numero di travate intermedie eguali, essendo pure eguali le due estreme ma anche diverse dalle intermedie, a misura che si considerano delle travate poste verso il mezzo della trave, si approssimano esse a trovarsi nelle condizioni di solidi orizzontalmente incastrati ai loro estremi. Segje da ciò che gli inviluppi corrispondenti ad un certo numero di travate di mezzo, per una trave orizzontalmente posta su molti appoggi, devono essere sensibilmente eguali fra di loro, e potersi quindi, con sufficiente approssimazione per la pratica, far dipendere la costruzione degli inviluppi per le travi a molte travate dalla costruzione degli inviluppi per travi ad un minor numero di travate. Per accertarsi come questa previsione realmente si verifichi basta calcolare e costrurre gli inviluppi, nel caso delle due travate estreme eguali e delle travate intermedie pure eguali fra di loro, per travi composte di otto e di più di otto travate. Da tali calcoli e da tali costruzioni risulta: che per le travate comprese fra le prime quattro e le ultime quattro gli inviluppi sensibilmente non differiscono da quello che corrisponde alla quarta travata; e che per , conseguenza, dovendosi considerare una trave composta di più di otto travate, non si deve far allro che eseguire i calcoli su quella di otto travate, e ripetere per tutte le travate centrali i risultati corrispondenti alla quarta, distinguendo, a

motivo della simmetria, il caso in cui il numero delle Iravate è pari da quello in cui questo numero è impari.

Parlando del caso dell'inviluppo utile per la determinazione delle lamiere da impiegarsi n^'a composizione delle travi longitunali dei ponti in ferro a travate rettilinee, chiaramente risulterà come basti avere nella pratica un tracciamento approssimato del detto inviluppo. Segue da ciò che, una volta ottenuti i punti singolari," si possono a dirittura sostituire le corde agli archi parabolici rappresentanti gli inviluppi per le parti non centrali delle diverse travate. Per le parabole poi le cui ordinate rappresentano i momenti inflettenti nelle parti centrali, basta generalmente determinare due punti uno a diritta e l'altro a sinistra del vertice, e servirsi per questa determinazione della nota proprietà che in una parabola la sottotangente è doppia dell'ascissa. Così, volendosi determinare il punto S posto sulla parabola c'_3 *31_3 ò* a diritta del suo vertice M_v si tirino l'orizzontale M_3T e la corda *M^Tf^* dividasi per metà quest'ultima e si conduca la verticale *Ys'* il punto 5 posto sul mezzo di questa verticale è un punto della curva, perché, conducendo per questo punto una retta & » parallela alla corda $M_sb'_3$ eduna perpendicolare 5 JT, all'asse M_3H_3, si ottiene il segmento *n %* doppio di $M_3 K$, il qual risultato porta a conchiudere essere 5 *n* tangente alla parabola in & ed essere quindi questo punto un punto della parabola. Come si è determinato il punto 5 a diritta del vertice M_3, si può trovare un altro punto a destra dello stesso vertice.

15. Resta a vedersi come l'inviluppo utile dei momenti inflettenti serva a determinare le lamiere da impiegarsi nella composizione delle travi longitudinali dei ponti in ferro a travate rettilinee, affinchè presentino esse la necessaria resistenza alla flessione. Si osservi perciò che, chiamando:

u la mezza altezza della trave;

^ il momento inflettente per una sua sezione qualunque;

I il moménto d'inerzia di questa sezione per rapporto coll'asse neutro;

B il coefficiente di rottura per la materia di cui la trave è formata;

n il coefficiente di stabilità;
per quanto s'insegna in tutti i trattati sulla resistenza dei materiali si ha:

$$n B =.- \frac{\text{M/A}}{I}$$

nella quale si suoi assumere da $\frac{1}{-}$ ad $\frac{1}{-}$ per valore di *n,* e da 30 a 36 chilogrammi per millimetro quadrato per valore di *B.*

Premesso questo, si consideri una trave in ferro la cui sezione ha forma nota e per fissare le idee, quella rappresentata nella figura 7ª, con sezione simmetrica rispetto all'orizzontale *X Y*passante pel suo centro di superficie, e costituita da tavole orizzontali *A* formate con lamiere sovrapposte ed unite mediante ferri d'angolo *S* ad altre lamiere verticali *C,* fra cui trovansi le pareti reticolate *D.* Si calcoli innanzi tutto il momento d'inerzia rispetto all'asse *X Y* della sezione appartenente alla parte continua della trave ossia della sezione dei ferri d'angolo *JB* e delle lamiere verticali *C,* e mediante l'ultima forinola, assumendo per *u* la distanza $\overline{ab}$, per *I* il trovato momento d'inerzia e per *n B* il numero conveniente alla qualità di ferro di cui la trave è formata (il qual numero varia ordinariamente fra 5 e 6 chilogrammi per ogni millimetro quadrato) si deduca il corrispondente valore particolare *fj.'* di *y..* Questo valore /A' si porti da A_i in *<p* sulla figura 6ª valutandolo nella scala dei momenti inflettenti e non dimenticando se venne fatta qualche ipotesi sul valore del so-

vraccarico *p* che generalmente si assume siccome eguale all'unità. Dopo di ciò, conoscendosi le dimensioni che deve avere la sezione di ciascuna lamiera da impiegarsi nella composizione delle tavole *A,* si calcoli il momento d'inerzia per la sezione delle due lamiere unite ai ferri ed appartenenti, una alla tavola superiore e l'altra alla tavola inferiore; e mediante l'ultima forinola, ponendo in essa per *u* la distanza $\overline{de}$, per *I* il momento d'inerzia or indicato e per *n B* il numero conveniente alla natura del ferro di cui le lamiere sono formate, si deduca il valore particolare /A" di /t. Questo valore di /A", avendo riguardo alla scala in cui sono rappresentati i momenti inflettenti nella figura 6ª ed alla fatta ipotesi sul valore del sovraccarico *p,* si porti da *<p* in if. Suppongasi ora che le altre coppie di lamiere componenti le tavole, tuttoché capaci di resistere ad un momento inflettente di qualche poco maggiore di quello cui può resistere la coppia attaccata ai ferri d'angolo perché un tantino più distanti dall'asse neutro, debbano pure resistere al solo momento inflettente /A"; e si ripeta la distanza *<p* ↓ in ↓↓, ↓↓, ↓↓ e i|/"\f" finché conducendo pei punti ^, •+', 4"> *$",* e ^" dglle parallele all'asse della trave, si trova quella che passa sopra il punto più alto dell'inviluppo utile. Dopo di ciò deducasi un contorno poligonale ad angoli retti ponendo i vertici degli angoli rientranti sull'inviluppo utile o poco distanti da questo, ed è da questo contorno che risulta la distribuzione delle lamiere in ciascuna tavola. Così, stando al tracciato contenuto nella figura 6ª, si dirà che tanto per la tavola superiore quanto per la tavola inferiore occorrono una lamiera nei tratti Hi, 5~6, 21 22, 37 38, 53 54, 61 62, 61) 70 e 77 78;' due lamiere nei tratti ^ 78," I92Ò~ *W*, 35 36, 39 40, 51 52., 55 56,' 59 60, 63 64, 67 68, 71 72 e 75 76; tre lamiere nei tratti *WlO,* 17 18, 25 26, 33.34, 4142, 49 50, 57 58, "65~66 e 73 74; quattro lamiere nei tratti 11 12, 15 16, 27 28> 31 32, 43 44 e 47 48; e finalmente cinque lamiere nei tratti T3~lT, 29 30 e 45~46.

In quei siti in cui le ordinate dell'inviluppo utile sono piccole è giuocoforza eseguire il contorno poligonale in modo che si scosti molto dal detto inviluppo per la necessità di prolungare certi elementi su tutta la lunghezza della trave, quantunque non siano essi par intiero indispensabili alla stabilità. Per il caso contemplato nella figura 6^a si verifica questo nei tratti in cui la retta *f%* passa al di sopra dell'inviluppo utile.

Torino, 2 luglio 1868.

CURIONI *Ing.* GIOVANNI.

Novembre 1868.

Fig. 1

Fig. 2

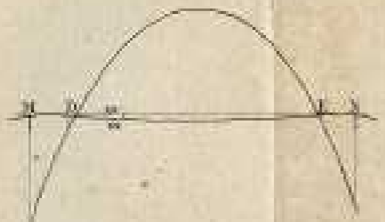
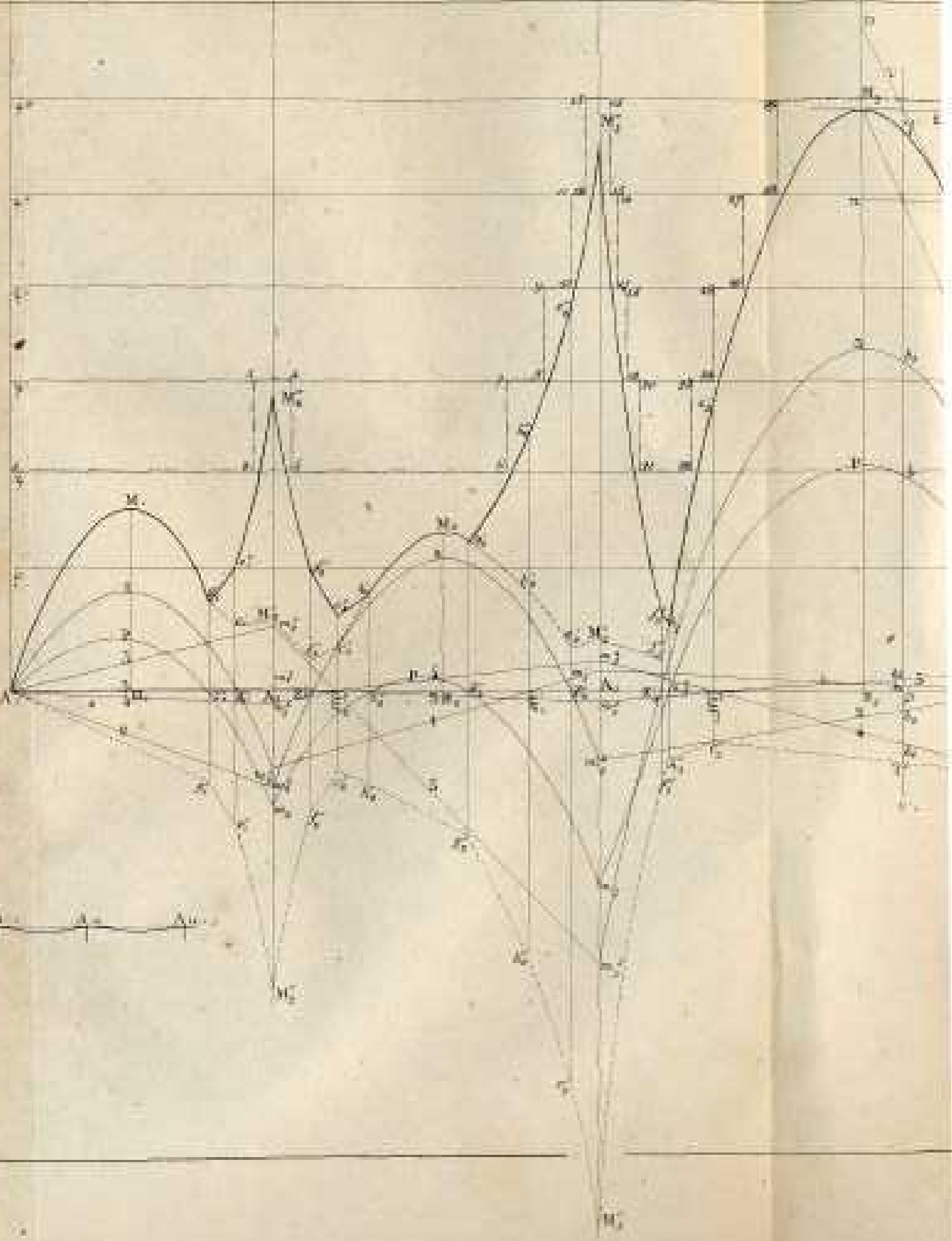


Fig. 3

Fig. 4

Fig. 5



Tav. II

Fig. 6

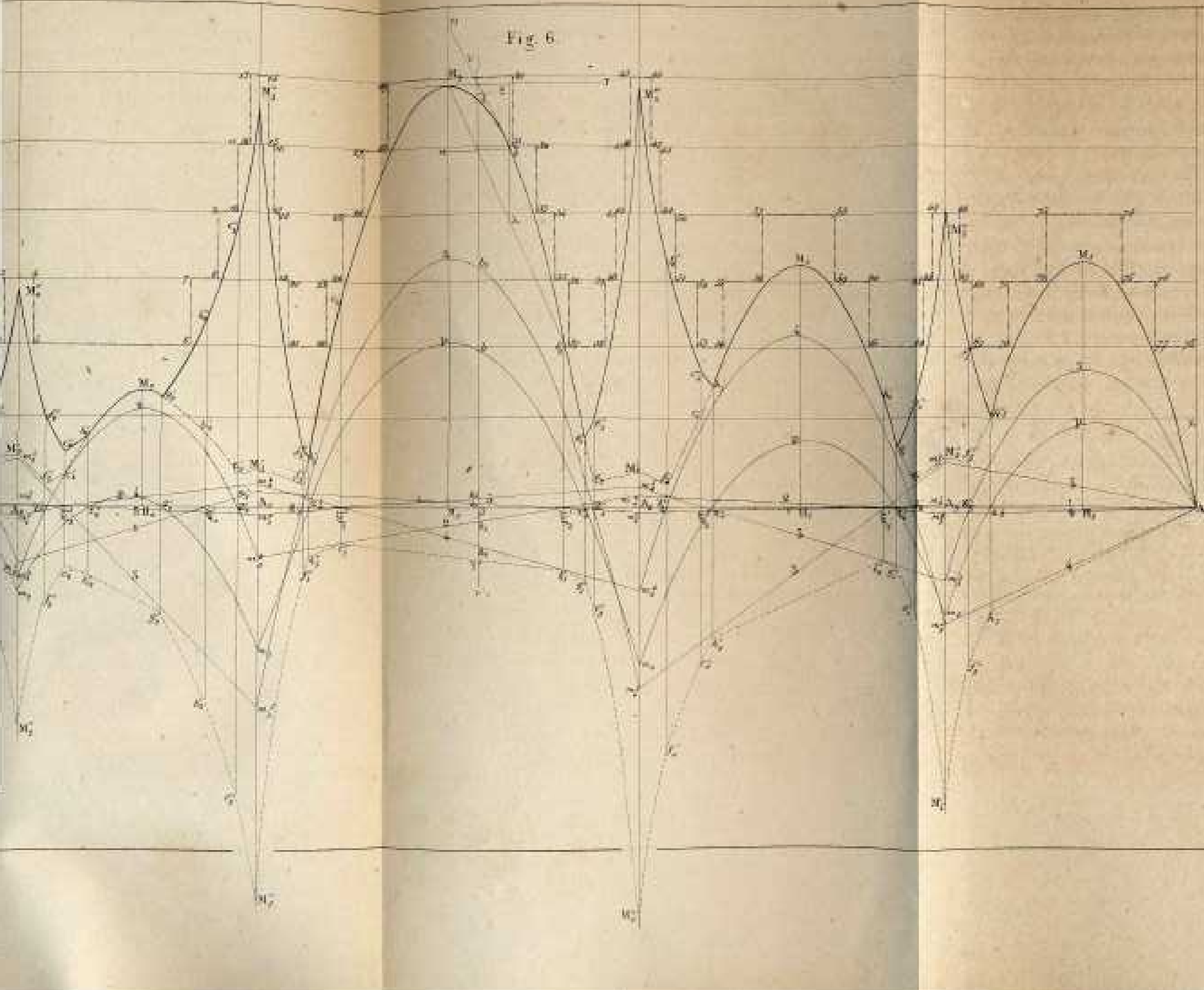


Fig. 7