PROF. EDGARDO CIANI

SCRITTI GEOMETRICI SCELTI

VOLUME PRIMO

CEDAM
CASA EDITRICE DOTT. ANTONIO MILANI
PADOVA 1937 - XV

Edgardo Cremi

Soggetti

PROF. EDGARDO CIANI

SCRITTI GEOMETRICI SCELTI

VOLUME PRIMO

Politecnico di Torino
Dipartimento di Matematica - Biblioteca

Inv. N. 8976ML

Collocazione
OP
CI
1

CEDAM
CASA EDITRICE DOTT. ANTONIO MILANI
PADOVA 1937 - XV

DONAZIONE LONGO

PROPRIETÀ LETTERARIA

Printed in Italy

Gubbio - Soc. Tipografica " Oderisi ,, - 1937-XV.

AL LETTORE

Il 1° Novembre dell'anno decorso 1936 ho compiuto 50 anni di servizio attivo (non mai interrotto) alle dipendenze dello Stato, prima assistente universitario, poi insegnante di scuole medie e dopo Professore d'Università. Ecco il titolo di benemerenza al quale io tengo più di ogni altro (e il Lettore scusi la immodestia di questa mia dichiarazione pensando che la vanità è un vizio che cresce col crescere degli anni, secondo un ben noto detto Manzoniano).

Il resto poco conta.

Ma, per gli amici e conoscenti che desiderano qualche altro dettaglio, posso aggiungere che sono nato a Rocca S. Casciano (Forlì), il 7 Ottobre 1864, da Federigo e Clorinda Mengozzi, miei primi e incomparabili educatori, che ho percorso le scuole medie tecniche a Forlì e che mi sono laureato a Pisa in matematica teorica (e sotto la guida sapiente di RICCARDO DE PAOLIS) *nel Decembre 1886 (ma fino dall'inizio del Novembre precedente ero già assistente del* PROF. A. NARDI-DEI).

Primo di sei figli maschi e in condizioni difficili di famiglia dovetti provvedere a me stesso, nel periodo universitario, vincendo per concorso, una borsa di studio Lavagna alla quale poi si aggiunse il titolo di allievo della R.ª Scuola Normale Sup.re di Pisa, titolo che ha sempre lusingato assai il mio amor proprio e che costituisce il più ambito ricordo della mia lontana gioventù.

Dalla dipendenza del compianto PROF. NARDI-DEI, *passai a quella del* PROF. RICCARDO DE PAOLIS *col quale iniziai la mia vita di studioso, divenendo poi coadiutore di* EUGENIO BERTINI *che mi fu Maestro insuperabile di scienza e di vita e col quale, in seguito, strinsi vincoli dolcissimi di parentela (un mio fratello avendo sposato la figlia di Lui).*

Nel 1898, per migliorare le condizioni economiche della mia famigliuola (avevo nel frattempo sposato mia cugina Isolina Ciani) accettai un posto d'insegnante di Matematica nel R.° istituto tecnico di Messina e (dopo un anno) fui trasferito in quello di Milano, finchè nel 1906 mi riuscì finalmente (e per effetto di concorso) di essere nominato Prof. di Geometria proiettiva nella R.ª Università di Genova realizzando così il sogno che ho sempre accarezzato, fino dall'inizio della mia carriera scolastica, quello cioè di insegnare Geometria dalla cattedra Universitaria Italiana.

« L'amore del natio loco » m'indusse (dopo 20 anni di permanenza a Genova) ad accettare le offerte di amici e colleghi Fiorentini (primi, fra tutti, ANTONIO GARBASSO *e* GUIDO PELLIZZARI) *che mi proposero il trasferimento nella R.ª Università di Firenze (allora allargatasi dal vecchio e glorioso istituto di studi superiori di perfezionamento) e quì, a Firenze, in questa incomparabile e degna sede di studi (dopo 13 anni di permanenza) mi ha colto crudele, improvviso, inaspettato, il decreto che, da 75 anni di età, ha abbassato a 70 il limite massimo da raggiungere per il collocamento a riposo dei professori universitari. Lenimento a tanto dolore mi ha recato l'amorevole bontà dei miei carissimi colleghi che mi ha concesso, quale professore emerito, di continuare nel mio ufficio ancora per due anni, ma la grave malattia (forse irreparabile !) di mia moglie che mi fu sempre compagna amorosa (senza alcuna nube !) per oltre 44 anni di vita felice, mi toglie ormai quella serenità di animo che è indispensabile per compiere coscienziosamente l'ufficio d'insegnante e vado quindi a rifugiarmi e celarmi fra le montagne del mio Appennino (nella mia casa avita e solitaria) in attesa serena del termine che Dio mi ha segnato !*

Di ciò che si suol chiamare la propria produzione scientifica, contenuta nelle pagine che seguono, chiedo venia al Lettore se mi permetto di segnalare tre punti che io riguardo con una certa compiacenza paterna!

Il primo è costituito dalla configurazione delle 10 bitangenti di una quartica piana di genere 3 che si ottiene escludendo dalle totali 28 quelle che compongono un gruppo di 2ª specie (1). *Questa configurazione parve così interessante a un collega straniero (il* PROF. E. TIMERDING *della Università di Strasburgo) da proporre di chiamarla col mio nome:* (Cianische Drei-Drei) (2).

Il 2° punto considera le biquintuple di rette dello spazio a tre dimensioni (che forse realizza un problema di statica) (3).

Il 3° è l'esagono di PASCAL *dello spazio a 4 dimensioni* (4). *Nel chiudere questi brevi autobiografici non posso a meno di mandare un caldo saluto ai miei cari colleghi e alla Facoltà di Scienze di questa Università la quale ha voluto contribuire alle spese di stampa dei presenti volumi, non che alla Ditta editrice « la Cedam » che ha dato loro una veste tipografica appropriata e di mia piena soddisfazione.*

Nè posso tacere di ricordare, con vivo compiacimento, quelli che furono miei allievi (e coadiutori) alcuni dei quali hanno raggiunto posizioni eminenti e di alto comando, o nelle amministrazioni dello stato, o nell'industria privata, o infine nel pubblico insegnamento. È poi naturale che, per affinità di tendenze e di temperamento, io mi compiaccia più particolarmente di questi ultimi segnalando fra di loro quelli (laureati in Matematica) che raggiunsero, insieme alla cattedra universitaria, posizioni cospicue

---

(1) « *Sopra le serie quadratiche di coniche inviluppanti la quartica piana* » N. 27 e 28 a p. 223 e seguenti del 1° volume.

(2) E. TIMERDING : « *Ueber die Gruppirungen der Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnmung.* (Crelle Bd. 122, p. 223 e seg.ti).

(3) *Sopra i gruppi finiti di collineazioni quaternarie oloedricamente isomorfi con quelli dei poliédri regolari,* p. 423 e anche p. 873.

(4) *Una interpretazione geometrica del gruppo totale di sostituzioni sopra sei elementi,* p. 589 e seg.ti.

nel mondo scientifico così che, dichiarandoli in ordine cronologico (e a causa di onore) ne dico quì i nomi seguenti: FEDERIGO ENRIQUES, *dell'Università di Roma*, CARLO ROSATI, ONORATO NICOLETTI *entrambi dell'Università di Pisa*, GUIDO FUBINI *dell'Università di Torino e* GIULIO RACAH *dell'Università di Firenze (e pur troppo e «ingiustamente» il 2° e il 3° di essi mi sono premorti!).*

Firenze, Università, Aprile del 1937.

EDGARDO CIANI

DELLO STESSO AUTORE

LEZIONI DI GEOMETRIA PROIETTIVA E ANALITICA — (Tre edizioni: due di Spoerri Pisa 1912-1918 e una di Zanichelli, Bologna 1922).

IL METODO DELLE COORDINATE PROIETTIVE OMOGENEE NELLO STUDIO DEGLI ENTI ALGEBRICI — (Due Edizioni: una di Spoerri Pisa 1922 e una della "Sten,, Torino 1928).

INTRODUZIONE ALLA GEOMETRIA ALGEBRICA — (Lezioni di Geometria Superiore "Cedam,, Padova 1931.

LEZIONI DI GEOMETRIA DESCRITTIVA id. id. id.

INDICE

Le superficie rigate inerenti a una linea a doppia curvatura . . pag. 1
Le linee diametrali delle curve algebriche piane e in particolare i loro assi di simmetria . . . . . » 33
Sulle superficie algebriche simmetriche . . . . . » 127
Sul pentaedro completo . . . . . » 137
Sulla superficie diagonale di Clebsch . . . . . » 145
Sopra due curve invariantive di una quartica piana . . . » 153
Sopra le hessiane delle superficie cubiche . . . . . » 165
Sopra quelle superficie cubiche le quali si possono riguardare come parti della hessiana di un'altra superficie cubica . . . » 193
Sopra le serie quadratiche di coniche inviluppanti la quartica piana » 205
Sopra la corrispondenza polare fra coniche inviluppo e coniche luogo stabilita da una quartica piana . . . . . » 231
Sopra i sistemi lineari di curve algebriche piane . . . . » 239
La quartica di Caporali . . . . . » 263
Sopra la configurazione desmica . . . . . » 283
Alcune osservazioni sopra la configurazione di Kummer . . . » 293
Sopra una certa configurazione di punti e rette relativa alla quartica piana . . . . . » 303
Sopra la configurazione di Kummer . . . . . » 305
Le bitangenti della quartica piana studiate mediante la configurazione di Kummer . . . . . » 315
I varii tipi possibili di quartiche piane più volte omologico-armoniche » 355
Un teorema sopra il convariante *s* della quartica piana . . . » 377
Contributo alla teoria del gruppo di 168 collineazioni piane . . » 883
Sopra i gruppi finiti di collineazioni quaternarie, oloedricamente isomorfi con quelli dei poliedri regolari . . . . . » 405
Sopra la configurazione di due cubiche gobbe invarianti rispetto a gruppi di collineazioni quaternarie . . . . . » 439
Quartiche e quintiche gobbe razionali invarianti rispetto a gruppi di collineazioni quaternarie . . . . . » 457

Le curve gobbe razionali di quinto ordine invarianti rispetto a gruppi finiti di collineazioni quaternarie . . . . . pag. 469
Le curve razionali di sesto ordine invarianti rispetto a gruppi finiti di collineazioni quaternarie . . . . . » 487
Sopra la configurazione del pentaedro . . . . . » 497
Sopra le sestiche gobbe dotate di infiniti piani tritangenti . . » 521
Sopra le curve gobbe razionali dotate di quattro punti d'iperosculazione . . . . . » 529
Intorno ad alcune definizioni proiettive ed analitiche delle coniche e delle quadriche . . . . . » 541
Sopra i poliedri regolari convessi . . . . . » 549
Sopra la curva meridiana della superficie d'onda del miraggio . . » 567
Una interpretazione geometrica del gruppo totale di sostituzioni sopra sei elementi . . . . . » 579
Le quartiche piane proiettive a sè stesse . . . . . » 607
Le curve piane di quart'ordine (monografia) . . . . . » 627
Sopra le collineazioni spaziali . . . . . » 673
Le quintiche piane autoproiettive . . . . . » 689
Alcune costruzioni inerenti alla quartica piana dotata di un punto doppio . . . . . » 715
Sopra alcuni gruppi notevoli di trasformazioni quadratiche piane . » 721
Le quartiche piane invertibili . . . . . » 739
Intorno ad alcuni covarianti di curve algebriche piane . . . » 779
Intorno ad alcuni covarianti di superficie cubiche . . . . » 787
Sopra le involuzioni sizigetiche di forme binarie biquadratiche . . » 795
Ricerche sopra le quartiche razionali gobbe . . . . . » 801
Alcune osservazioni sopra la superficie di Steiner . . . . » 843
La configurazione costituita da due coniche ciascuna delle quali è inversa di se stessa rispetto all'altra . . . . . » 849
Intorno alla terza formula di Plücker . . . . . » 855
Una nuova forma canonica della ternaria cubica . . . . » 859
Intorno alle biquintuple di rette . . . . . » 873
Osservazioni sopra alcune quartiche piane . . . . . » 875
Quadrangoli e quadrilateri collegati alle cubiche ellittiche piane . » 883
Sopra un fascio sizigetico di superficie cubiche . . . . » 893

SCRITTI GEOMETRICI SCELTI

LE SUPERFICIE RIGATE INERENTI A UNA LINEA A DOPPIA CURVATURA (*)

[TESI DI LAUREA]

(Pisa 6. XII. 1886)

[*Giornale di Matematica, Iª serie. Vol. XXVII*]

Formule generali per qualunque superficie rigata.

1. Movimenti per flessione. — Prima di intraprendere il nostro studio ci è necessario dare alcune formule che valgono in generale qualunque sia la superficie rigata che si considera.

Riferiamo perciò una tal superficie alle sue generatrici rettilinee e alle traiettorie ortogonali di queste chiamando con v l'arco di una traiettoria ortogonale D che assumeremo come direttrice e con u la lunghezza di generatrice rettilinea contata a partire dalla direttrice D. allora se p, q, r sono le coordinate di un punto mobile di D; se l, m, n sono i coseni di direzione della generatrice che passa per il punto p, q, r l'elemento lineare della superficie assume la forma:

$$ds^2 = du^2 + (M^2 u^2 + 2 Nu + 1)\, dv^2$$

dove

$$M^2 = \Sigma l^2 \qquad ; \qquad N = \Sigma l' p'$$

e gli apici indicano le derivate rispetto all'arco v della direttrice.

Faremo inoltre le seguenti posizioni:

$$\alpha = -\frac{N}{M^2} \qquad ; \qquad \beta = \frac{\sqrt{M^2 - N^2}}{M^2}$$

(*) I richiami di questa Memoria alla Geometria differenziale sono così numerosi e continui che io non posso fare altro che rimandare il Lettore al trattato ormai classico di « Luigi Bianchi » nella Sua prima edizione di Pisa (E. Spoerri 1894).

$$\begin{vmatrix} l'' & m'' & n'' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = \mathrm{P}\,; \quad \begin{vmatrix} p'' & q'' & r'' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l'' & m'' & n'' \\ l & m & n \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} = \mathrm{Q}\,;$$

$$\begin{vmatrix} p'' & q'' & r'' \\ l & m & n \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} = \mathrm{S}\,; \quad \begin{vmatrix} l' & m' & n' \\ l & m & n \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} = \mathrm{T}.$$

È noto che $\alpha = u$ è l'equazione della linea di stringimento e β è il coefficiente di distribuzione dei piani tangenti.

Allora le sei funzioni che caratterizzano pienamente la superficie, a meno di movimenti nello spazio, sono le seguenti che noi seguiteremo a indicare con le notazioni in uso:

$$\mathrm{E} = 1 \quad ; \quad \mathrm{F} = 0 \quad ; \quad \mathrm{G} = \mathrm{M}^2 u^2 + 2\,\mathrm{N}u + 1$$

$$\mathrm{D} = 0 \quad ; \quad \mathrm{D}' = \frac{\mathrm{T}}{\sqrt{\mathrm{G}}} \quad ; \quad \mathrm{D}'' = \frac{\mathrm{P}\,u^2 + \mathrm{Q}u + \mathrm{S}}{\sqrt{\mathrm{G}}}\,.$$

Queste sei funzioni non sono completamante arbitrarie; fra di esse debbono passare le tre relazioni differenziali del Codazzi le quali, applicate al nostro caso, divengono:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{D}''}{\sqrt{\mathrm{G}}}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{G}}}\right)$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial \mathrm{D}'}{\partial u} + \frac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{G}}}\,\frac{\partial \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} = 0$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{\mathrm{D}'^2}{\sqrt{\mathrm{G}}} = \frac{\partial^2 \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u^2}\,.$$

L'ultima ci dice che la funzione D′ non cambia quando la superficie si deforma per flessione; dunque la 1ª ci esprime che per una tale deformazione non cambia neppure la funzione:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{D}''}{\sqrt{\mathrm{G}}}\right)$$

ossia, se con D_0'' s'indica, la funzione D″, relativa a una deformata per flessione della superficie primitiva, si ha:

$$\mathrm{D}_0'' = \mathrm{D}'' + \varphi(v)\sqrt{\mathrm{G}}$$

essendo $\varphi(v)$ una funzione arbitraria della sola v, oppure una costante.

Ad ogni forma speciale della funzione $\varphi(v)$ corrisponde una superficie applicabile sulla primitiva e viceversa, di modo che tutte le deformazioni per flessione della superficie vengono a dipendere da questa sola funzione $\varphi(v)$ di cui si trova facilmente il significato geometrico rammentando che se s'indica con $\frac{1}{R_u}$ la curvatura normale delle $u = \text{cost.}$ si ha in generale, per coordinate ortogonali,

$$\frac{1}{R_u} = \frac{D''}{G}.$$

Rappresentando quindi con $\frac{1}{R_u^{(0)}}$ la curvatura normale delle $u = \text{cost.}$ dopo che la superficie ha subìto un movimento per flessione, avremo:

$$\frac{1}{R_u^{(0)}} = \frac{D'' + \varphi(v)\sqrt{G}}{G}$$

cioè

$$\frac{1}{R_u^{(0)}} - \frac{1}{R_u} = \frac{\varphi(v)}{\sqrt{G}}.$$

Il rapporto $\frac{\varphi(v)}{\sqrt{G}}$ ci indica dunque di quanto varia, nella flessione, la curvatura normale delle traiettorie ortogonali delle generatrici rettilinee.

2. Vogliamo ora mostrare come per la funzione $\varphi(v)$, che serve a darci tutte le deformate per flessione, si possa prendere il raggio di 1ª curvatura della direttrice.

Infatti la (III) sviluppata ci fornisce per D'

$$D'^2 = \frac{M^2 - N^2}{u^2 M^2 + 2Nu + 1}$$

Allora la (I) diviene:

$$u^2(2NP - QM^2) + u(2P - 2M^2S) + Q - 2NS =$$

$$= \left\{ u^2(2N^2 MM' - M^2 NN' - M^3 M') + u(2N MM' - 2M^2 N') + \right.$$

$$\left. + MM' - NN' \right\} \frac{1}{\sqrt{M^2 + N^2}}.$$

Ma questa deve essere verificata identicamente se no avverebbe che la (I) sarebbe vera solamente lungo due linee speciali della superficie, lungo

quelle due le cui equazioni si otterrebbero risolvendo rispetto a u la precedente equazione di 2° grado.

Avremo dunque le 3 relazioni differenziali

$$2\,NP - QM^2 = \left\{ 2\,N^2\,MM' - M^2\,NN' - M^3\,N' \right\} \frac{1}{\sqrt{M^2 - N^2}}\,;$$

$$P - M^2\,S = \left\{ N\,MM' - M^2\,N' \right\} \frac{1}{\sqrt{M^2 - N^2}}\,; \qquad (1)$$

$$Q - 2\,NS = \frac{MM' - NN'}{\sqrt{M^2 - N^2}}\,;$$

di cui due solamente sono sono indipendenti.

Ora, dalla posizione già fatta,

$$\begin{vmatrix} p'' & q'' & r'' \\ l & m & n \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} = S$$

quadrando risulta:

$$S = \sqrt{\Sigma\,p''^2 - (\Sigma\,l\,p'')^2}$$

ma si ha

$$\Sigma\,lp' = 0$$

perchè la direttrice è ortogonale alle generatrici, quindi

$$\Sigma\,lp'' = -\,N\,.$$

Dunque, se si rappresenta con ϱ il raggio di 1ª curvatura della direttrice, sarà

$$S = \sqrt{\frac{1}{\varrho^2} - N^2}$$

e dalle (1)

$$P = \frac{M}{\sqrt{M^2 - N^2}} \left\{ NM' - MN' \right\} + M^2 \sqrt{\frac{1}{\varrho^2} - N^2}\,; \qquad (2)$$

$$Q = \frac{MM' - NN'}{\sqrt{M^2 - N^2}} + 2N \sqrt{\frac{1}{\varrho^2} - N^2}$$

D'altra parte le sole funzioni fra le

$$E\,;\ F\,;\ G\ ;\ P\,;\ Q\ ;\ S\,;\ T$$

che variino, dopo che la superficie ha subìto un movimento pes flessione, sono

$$P \; ; \; Q \; ; \; S$$

perchè è

$$T = \sqrt{M^2 - N^2}$$

Le funzioni M ed N neanche variano perchè si ha

$$G = M^2 u^2 + 2 N u + 1$$

quindi le (2) precedentemente trovate ci rappresentano gli elementi della superficie variabili, per movimenti di flessione, espresse per un altro ed unico elemento variabile che è il raggio di 1ª curvatura della direttrice.

3. Equazione delle assintotiche. — L'equazione generale di queste linee, particolareggiata al caso nostro, si spezza in due:

$$v = \text{cost.} \quad ; \quad 2\sqrt{M^2 - N^2} \, . \, du + (P u^2 + Q u + S) \, dv = 0. \qquad (1)$$

Per una superficie deformata per flessione essa diviene quindi

$$v = \text{cost}; \; 2\sqrt{M^2 - N^2} \, du + \left\{ u^2 \left(P + M^2 \varphi(v)\right) + u \left(Q + 2N \varphi(v)\right) + \right.$$
$$\left. + S + \varphi(v) \right\} dv = 0 \, . \qquad (2)$$

Esiste una classe di deformate per le quali si conosce subito la forma della funzione $\varphi(v)$ che le caratterizza. Queste deformate sono tutte quelle che si ottengono riducendo (come è sempre possibile) la superficie data a superficie di normali principali per una qualunque traiettoria ortogonale. Infatti, dopo un tal movimente della superficie, l'equazione precedente deve essere soddisfatta da $u = k$ essendo k una costante, deve dunque essere:

$$k^2 \left((P + M^2 \varphi(v)\right) + k \left(Q + 2N \varphi(v)\right) + S + \varphi(v) = 0$$

e quindi

$$\varphi(v) = - \frac{P k^2 + Q k + S}{M^2 k^2 + 2 N k + 1}$$

e possiamo concluderne:

« *Nota una superficie rigata sono anche note tutte quelle deformate che* « *si deducono da essa riducendola a superficie di normali principali per una* « *qualunque traiettoria ortogonale delle generatrici* »

4. L'equazione delle assintotiche non s'integra che in casi particolari. Però è facile vedere come, data una superficie rigata S qualunque, esista un numero infinito di superficie rigate applicabili sopra S e per ognuna delle quali l'equazione delle assintotiche si riduca alle quadrature. Infatti sia

$$u = \psi(v)$$

l'equazione di una linea tracciata sulla S. Questa linea si può rendere assintotica deformando la S: dunque esiste una corrispondente forma della funzione $\varphi(v)$ per cui questa deformazione si verifica e questa forma si troverà ponendo $u = \psi(v)$ nella (2) e risolvendola rispetto a $\varphi(v)$. Si trova così:

$$\varphi(v) = -\frac{2\sqrt{M^2 - N^2}\,\psi'(v) + P(\psi(v))^2 + Q\,\psi(v) + S}{M^2(\psi(v))^2 + 2N\,\psi(v) + 1}.$$

Ponendo allora nella (2) questa forma particolare della $\varphi(v)$ otterremo l'equazione delle assintotiche della deformata S_1; ma di questa equazione si conosce un integrale particolare

$$u = \psi(v)$$

quindi essa si riduce lineare del 1° ordine e perciò alle quadrature. Dunque ad ogni forma speciale della funzione $\psi(v)$ corrisponde una forma speciale di $\varphi(v)$ e a questa una superficie S_1 la quale gode la proprietà che le sue linee assintotiche si determinano con sole quadrature.

5. Superficie rigate coniugate. — Assumiamo per direttrice di una superficie rigata qualunque la sua linea di stringimento C. Indichiamo con

$$(\cos\alpha\,,\ \cos\beta\,,\ \cos\gamma)\ ;\quad (\cos\xi\,,\ \cos\eta\,,\ \cos\zeta)\ ;\quad (\cos\lambda\,,\ \cos\mu\,,\ \cos\nu)$$

rispettivamente i coseni di direzione della tangente, della normale principale e della binormale di C; con ϱ e con r i raggi di 1ª e 2ª curvatura. Si ha quindi:

$$(1)\qquad \begin{cases} l\cos\alpha + m\cos\beta + n\cos\gamma = \cos\theta \\ l\cos\xi + m\cos\eta + n\cos\zeta = -\varrho\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot\theta' \\ l\cos\lambda + m\cos\mu + n\cos\nu = \mathrm{sen}\,\theta\cdot\sqrt{1-\varrho^2\theta'^2} \end{cases}$$

essendo θ l'angolo della tangente alla linea di stringimento con la generatrice rettilinea passante per il punto di contatto.

Intanto risolvendo rispetto a l ; m ; n le precedenti equazioni si trova :

$$l = \cos\alpha\cdot\cos\theta + \cos\xi\cdot\varrho\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\theta' + \cos\lambda\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\sqrt{1-\varrho^2\theta'^2}\ ;$$

$$m = \cos\beta\cdot\cos\theta + \cos\eta\cdot\varrho\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\theta' + \cos\mu\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\sqrt{1-\varrho^2\theta'^2}\ ;$$

$$n = \cos\gamma\cdot\cos\theta + \cos\zeta\cdot\varrho\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\theta' + \cos\nu\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\sqrt{1-\varrho^2\theta'^2}\ .$$

Se s'indica con σ l'angolo della binormale alla linea di stringimento con la normale alla superficie e con X ; Y ; Z i coseni di direzione di quest'ultima retta, abbiamo :

$$X = \operatorname{sen}\sigma\cdot\cos\xi + \cos\sigma\cdot\cos\lambda$$

$$Y = \operatorname{sen}\sigma\cdot\cos\eta + \cos\sigma\cdot\cos\mu$$

$$Z = \operatorname{sen}\sigma\cdot\cos\zeta + \cos\sigma\cdot\cos\nu\,.$$

Moltiplicando la 2ª delle (1) per $\operatorname{sen}\sigma$; la 3ª per $\cos\sigma$ e sommando si trova

$$\cos\sigma\cdot\sqrt{1-\varrho^2\theta'^2} = \varrho\theta'\operatorname{sen}\sigma$$

ossia

$$\theta = \int\frac{\cos\sigma}{\varrho}\,dv + \text{cost.}$$

essendo dv l'arco elementare della direttrice.

La formula precedente definisce per mezzo degli elementi ϱ e σ l'angolo delle generatrici sulla linea di stringimento. Viceversa si può dimostrare che, se per una linea C tracciata su di una superficie rigata, si sa che l'angolo della sua tangente con la generatrice passante per il punto di contatto è la funzione definita dal 2° membro della formula precedente, tal linea C non può essere altro che la linea di stringimento della superficie.

Infatti per questa linea deve essere

$$l\cos\alpha + m\cos\beta + n\cos\gamma = \cos\left(\int\frac{\cos\sigma}{\varrho}\,dv + k\right),$$

$$l\cos\xi + m\cos\eta + n\cos\zeta = \cos\sigma\cdot\operatorname{sen}\left(\int\frac{\cos\sigma}{\varrho}\,dv + k\right),$$

$$l\cos\lambda + m\cos\mu + n\cos\nu = \operatorname{sen}\sigma\cdot\operatorname{sen}\left(\int\frac{\cos\sigma}{\varrho}\,dv + k\right).$$

Risolvendo rispetto a l , m , n ,

$$l = \cos\alpha \cos\left(\int \frac{\cos\alpha}{\varrho}\, dv + k\right) - \cos\xi \cos\sigma \operatorname{sen}\left(\int \frac{\cos\sigma}{\varrho}\, dv + k\right) +$$

$$+ \cos\lambda \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\left(\int \frac{\cos\sigma}{\varrho}\, dv + k\right.;$$

$$m = \cos\beta \cdot \cos\left(\int \frac{\cos\sigma}{\varrho}\, dv + k\right) - \cos\eta \cos\sigma \operatorname{sen}\left(\int \frac{\cos\sigma}{\varrho}\, dv + k\right) +$$

$$+ \cos\mu \cdot \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\left(\int \frac{\cos\sigma}{\varrho}\, dv + k\right);$$

$$n = \cos\gamma \cdot \cos\left(\int \frac{\cos\sigma}{\varrho}\, dv + k\right) - \cos\zeta \cos\sigma \operatorname{sen}\left(\int \frac{\cos\sigma}{\varrho}\, dv + h\right) +$$

$$+ \cos\nu \cdot \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\left(\int \frac{\cos\sigma}{\varrho}\, dv + k\right).$$

Calcolando $\Sigma\, l' \cos\alpha$ si trova:

$$\Sigma\, l' \cos\alpha = 0$$

ciò che indica che la direttrice è la linea di stringimento.

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema:

« *La condizione necessaria è sufficiente affinchè la direttrice sia la linea* « *di stringimento è espressa dalla relazione:*

$$\theta = \int \frac{\cos\sigma}{\varrho}\, dv + \text{cost.}$$

« *essendo* θ , σ , ϱ *rispettivamente l'angolo della tangente alla direttrice con* « *la generatrice che passa per il punto di contatto; l'angolo della binormale* « *alla direttrice con la normale alla superficie, il raggio di prima curvatura* « *della direttrice* ».

6. Dal teorema precedente segue che se due superficie rigate si toccano lungo la loro comune linea di stringimento e θ_1 e θ_2 sono rispettivamente gli angoli di questa linea con le generatrici dell'una e dell'altra superficie, si ha:

$$\theta_1 = \int \frac{\cos\sigma}{\varrho}\, dv + \text{cost.} \quad ; \quad \theta_2 = \int \frac{\cos\sigma}{\varrho}\, dv + \text{cost.}$$

e quindi

$$\theta_1 - \theta_2 = \text{cost.}$$

cioè:

« *Se due superficie rigate si toccano lungo la comune linea di stringi-* « *mento, esse hanno le generatrici corrispondenti inclinate le une sulle altre* « *di un angolo costante* ».

7. Dalla formula

$$\theta = \int \frac{\cos \sigma}{\varrho} dv + \text{cost}.$$

per $\sigma = \frac{\pi}{2}$ si ha $\theta = \text{cost.}$: si ritrova così un risultato già ottenuto dal Bonnet. « *Se una linea di una superficie rigata è contemporaneamente* « *linea di stringimento e geodetica, incontra le generatrici sotto angolo costante* ».

Per $\sigma = 0$ si ha

$$\theta = \int \frac{dv}{\varrho} + \text{cost}.$$

ossia: « *La condizione necessaria e sufficiente perchè una linea di una su-* « *perficie rigata sia contemporaneamente assintotica e linea di stringimento è*

$$\varrho\theta' = 1 \text{ ».}$$

8. Le rette che passano per i punti centrali delle generatrici rettilinee di una superficie rigata e sono ognuna la posizione limite della perpendicolare comune a due generatrici infinitamente vicine costituiscono una superficie rigata che si chiama *coniugata* della primitiva. Viceversa questa è la coniugata della sua coniugata. Dalla definizione che si può dare del piano tangente a una superficie rigata, in un punto della sua linea di stringimento, risulta subito che due superficie rigate coniugate si toccano lungo la comune linea di stringimento (il pian tangente comune essendo il piano delle due generatrici corrispondenti).

Due tali superficie costituiscono un caso particolare di quello considerato al N° 6; il caso di $\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2}$.

9. Riferiamo una superficie rigata S_0 alla sua linea di stringimento come direttrice e alle generatrici. Caratterizzando con l'indice 1 gli elementi relativi alla superficie coniugata S_1, avremo:

$$ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0$$

$$(l + l' dv)\, l_1 + (m + m' dv)\, m_1 + (n + n' dv)\, n_1 = 0$$

da cui

$$l_1 = \frac{mn' - m'n}{M} \; ; \; m_1 = \frac{nl' - n'l}{M} \; ; \; n_1 = \frac{lm' - l'm}{M}$$

risulta quindi

$$\Sigma\, l_1 p' = \frac{1}{M}\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = \frac{1}{M}\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & \Sigma lp' & 0 \\ \Sigma lp' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & M^2 \end{vmatrix}}$$

cioè

$$\cos\theta_1 = \Sigma\, l_1\, p' = \sqrt{1 - (\Sigma\, lp')^2} = \operatorname{sen}\theta$$

e resta confermato anche analiticamente che due superficie rigate coniugate si toccano lungo la comune linea di stringimento.

Se dunque l'elemento lineare di una superficie rigata (quando la direttrice è la linea di stringimento) assume la forma

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\, du\, dv + (M^2 u^2 + 1)\, dv^2$$

l'elemento lineare della coniugata S_1 sarà

$$ds_1^{\,2} = du_1^{\,2} + 2\operatorname{sen}\theta\, du_1\, dv + (M_1^{\,2} u_1^{\,2} + 1)\, dv^2.$$

Determiniamo M_1 per mezzo degli elementi della superficie S_0. Si ha perciò

$$l_1' = \frac{mn'' - m''n}{M} - \frac{M'}{M^2}(mn' - m'n)$$

$$m_1' = \frac{nl'' - n''l}{M} - \frac{M'}{M^2}(nl' - n'l)$$

$$n_1' = \frac{lm'' - l''m}{M} - \frac{M'}{M^2}(lm' - l'm)$$

e quindi:

$$M_1^{\,2} = \Sigma l_1'^2 = \frac{M'^2}{M^2} + \frac{1}{M^2}\{(\Sigma l''^2 + (\Sigma ll'')^2\} - 2\frac{M'}{M^3}\Sigma(mn'' - m''n)(mn' - m'n) =$$

$$= \frac{M'^2}{M^2} + \frac{1}{M^2}\{\Sigma l''^2 + (\Sigma ll'')^2\} - 2\frac{M'}{M^3}\{\Sigma l' l'' - \Sigma ll''\,\Sigma ll'\}.$$

Ma è

$$(\Sigma\, ll'')^2 = M^4 \quad ; \quad \Sigma\, l'\, l'' = MM' \quad ; \quad \Sigma\, ll' = 0$$

e perciò

$$M_1^2 = M^2 + \frac{\Sigma\, l''^2 - M'^2}{M^2}.$$

Consideriamo le due coniugate di due deformate di una medesima superficie rigata. Siccome θ non varia nelle deformazioni, così perchè le due coniugate siano applicabili bisognerà che la funzione M_1 sia la stessa per entrambe le coniugate, dunque:

« *La condizione necessaria e sufficiente affinchè le varie coniugate delle* « *possibili deformazioni che conservano rettilinee le generatrici di una me-* « *desima superficie rigata siano applicabili fra loro è che la funzione* $\Sigma\, l''^2$ « *non muti deformando in tutti i modi possibili la superficie* S_0 ».

« *Due superficie rigate e coniugate fra loro sono applicabili se la tan-* « *gente alla loro comune linea di stringimento è bissettrice dell'angolo for-* « *mato dalle generatrici che passano per il punto di contatto e se*

$$\Sigma\, l''^2 = M'^2 \text{ »}$$

Segue, per un noto teorema del Bonnet:

« *La linea di stringimento di due superficie rigate coniugate e applica-* « *bili è geodetica per entrambe* ».

10. Calcolando la curvatura totale della superficie coniugata si trova

$$k_1 = -\left\{ \frac{M_1 \cos^2\theta}{M_1^2\, u^2 + \cos^2\theta} \right\}^2.$$

Dunque la coniugata di S_0 è sviluppabile nei due soli casi

$$1^0 \quad ; \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$2^0 \quad ; \quad M^4 + \Sigma\, l''^2 = M'^2$$

nel 1^0 caso la coniugata coincide con la sviluppabile osculatrice della linea di stringimento di S_0 ed è l'unico caso in cui le due coniugate in luogo di toccarsi si tagliano normalmente; nel 2^0 caso la coniugata è un cilindro.

Le superficie rigate inerenti a una curva a doppia curvatura.

11. Noi intendiamo per tali superficie le seguenti:

1° Il luogo delle normali principali;

2° Il luogo delle binormali;

3° Il luogo degli assi delle eliche osculatrici;

4° Il luogo delle tangenti che è anche l'inviluppo dei piani osculatori e si chiama sviluppabile osculatrice;

5° Il luogo delle rette rettificanti che è anche l'inviluppo dei piani rettificanti e si chiama sviluppabile rettificante;

6° L'inviluppo dei piani normali, o sviluppabile polare.

Faremo uso delle seguenti notazioni. Indicheremo con

ϱ Il raggio di flessione, o di 1ª curvatura della curva;
r il raggio di torsione, o di 2ª curvatura della curva;

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ i coseni di direzione della tangente della curva
$\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ i coseni di direzione della normale principale della curva;
$\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ i coseni di direzione della binormale della curva;
v arco della curva.

1° La superficie luogo delle normali principali.

12. Se si riferisce la superficie alla curva data come direttrice e alle generatrici rettilinee e si calcolano le funzioni date al N° 1 per una superficie rigata qualunque, tenendo conto delle formule di Frenet, abbiamo

$$M^2 = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2} \quad ; \quad N = \frac{1}{\varrho}$$

$$P = \frac{1}{\varrho r}\frac{d}{dv}\left(\log\frac{r}{\varrho}\right) \quad ; \quad Q = -\frac{r'}{r^2} \quad ; \quad S = 0 \quad ; \quad T = \frac{1}{r}$$

dove gli indici indicano le derivate rispetto a v.

L'elento lineare della superficie è

$$ds^2 = du^2 + \left\{\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}\right)u^2 + \frac{2u}{\varrho} + 1\right\} dv^2$$

l'equazione della linea di stringimento

$$u = \frac{\varrho r^2}{\varrho^2 + r^2}$$

il coefficiente di distribuzione del pian tangente

$$\beta = \frac{\varrho^2 r}{\varrho^2 + r^2}$$

13. Della funzione M^2 si può dare con molta facilità un significato geometrico intimamente collegato con la natura della superficie che noi studiamo. Ecco come:

Secondo le notazioni adottate, noi rappresentiamo con $\cos \xi$; $\cos \eta$; $\cos \zeta$ i coseni di direzione della normale principale nel punto della curva in cui il suo arco ha il valore v; indichiamo con $\cos \xi_1$; $\cos \eta_1$; $\cos \zeta_1$ i coseni di direzione della normale principale nel punto infinitamente vicino $v + dv$, avremo allora:

$$\cos \xi_1 = \cos \xi - \left(\frac{\cos \alpha}{\varrho} + \frac{\cos \lambda}{r}\right) dv$$

$$\cos \eta_1 = \cos \eta - \left(\frac{\cos \beta}{\varrho} + \frac{\cos \mu}{r}\right) dv$$

$$\cos \zeta_1 = \cos \zeta - \left(\frac{\cos \gamma}{\varrho} + \frac{\cos \nu}{r}\right) dv$$

dunque, rappresentando con dk l'angolo infinitesimo di due normali principali consecutive, sarà

$$\operatorname{sen}^2 dk = \left\| \begin{matrix} \cos \xi & \cos \eta & \cos \zeta \\ \cos \xi_2 & \cos \eta_1 & \cos \zeta_1 \end{matrix} \right\|^2$$

e a meno d'infinitesimi d'ordine superiore al primo

$$\left(\frac{dk}{dv}\right)^2 = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2} = \mathrm{M}^2$$

il rapporto $\frac{dk}{dv}$ si suol chiamare la *curvatura totale della curva* e il suo inverso, che indicheremo sempre con R, *raggio di curvatura totale.*

La funzione M^2 sta dunque a rappresentare in questo caso la curvatura totale della curva data, o altrimenti il rapporto fra l'angolo infinitesimo di due generatrici consecutive della superficie e l'arco elementare della curva.

Impiegando la notazione del raggio di curvatura totale, l'equazione

della linea di stringimento e il coefficiente di distribuzione del pian tangente divengono rispettivamente

$$u = \frac{R^2}{\varrho} \quad ; \quad \beta = \frac{R^2}{r}$$

Dunque:

« *La superficie delle normali principali non è sviluppabile se non quando la* « *curva è piana* ».

14. Qualunque superficie rigata può rendersi superficie di normali principali per una qualsiasi traiettoria ortogonale delle generatrici giacchè basta deformare la superficie in modo che la traiettoria divenga assintotica; però non è ugualmente vero che presa una superficie rigata qualunque essa possa riguardarsi come la superficie delle normali principali di una traiettoria ortogonale delle generatrici. Perchè questo avvenga occorrono delle condizioni che ora ci proponiamo di trovare.

L'equazione delle assintotiche non rettilinee è

$$2\sqrt{M^2-N^2}\cdot du + (Pu^2 + Qu + S)\, dv = 0$$

Assumendo per direttrice una traiettoria ortogonale $u =$ cost. la condizione cercata si otterrà ponendo $u = k$ nell'equazione precedente; si trova così che questa condizione è espressa dalla relazione

$$k_1 = \frac{-Q+\sqrt{Q^2-4PS}}{2P} \qquad (\alpha)$$

oppure dall'altra

$$k_2 = \frac{-Q-\sqrt{Q^2-4PS}}{2P} \qquad (\beta)$$

od anche contemporanecmente da entrambe, dove k_1 e k_2 sono costanti reali.

Quando è soddisfatta la (α) l'equazione della curva C di cui le normali principali sono le generatrici della superficie è

$$u = \frac{-Q+\sqrt{Q^2-4PS}}{2P}$$

Se è soddisfatta la (β) l'equazione di C è

$$u = \frac{-Q-\sqrt{Q^2-4PS}}{2P}$$

Se sono soddisfatte entrambe, la superficie data è il luogo delle normali

principali comuni a due curve le cui equazioni sono

$$u = \frac{-Q + \sqrt{Q^2 - 4PS}}{2P} \quad ; \quad u = \frac{-Q - \sqrt{Q^2 - 4PS}}{2P}.$$

La condizione che il discriminante $Q^2 - 4PS$ sia positivo è inutile porla; essa è implicitamente contenuta nell'altra che k_1 e k_2 siano costanti reali.

Se finalmente si volesse che la superficie data fosse superficie di normali principali per la direttrice $u = 0$, l'unica condizione da porsi sarebbe

$$S = 0.$$

Resulta quindi:

« *Fra le assintotiche non rettilinee di una superficie rigata non più di* « *due di esse possono essere traettorie ortogonali delle generatrici senza che* « *lo siano tutte* ».

Oppure:

« *Una superficie rigata non può essere il luogo delle normali principa-* « *li comuni a più di due delle traiettorie ortogonali delle generatrici senza* « *esserlo per tutte* ».

Se la superficie è il luogo delle normali principali comuni a tutte le traiettorie ortogonali delle sue generatrici, il sistema doppio delle sue assintotiche è ortogonale, quindi la superficie è d'area minima e dovendo essere rigata non può essere che l'elicoide a piano direttore.

15. Come applicazione dei risultati precedenti cerchiamo a quale condizione deve soddisfare una curva C affinchè la superficie S_0 delle sue normali principali sia tale anche per un'altra curva. Secondo le considerazioni del N° precedente, per la superficie S_0 abbiamo le due condizioni

$$k_1 = \frac{-Q + \sqrt{Q^2 - 4PS}}{2P} \quad ; \quad k_2 = \frac{-Q - \sqrt{Q^2 - 4PS}}{2P}.$$

Di queste la 1ª esprimerà che S_0 è superficie delle normali principali di C; l'altra sarà la condizione richiesta.

Servendosi dei valori di P, Q, S espressi per ϱ e per r (N° 12) le due equazioni precedenti divengono

$$k_1 = 0 \quad ; \quad k_2 \left\{ \frac{r'}{\varrho r^2} - \frac{\varrho'}{\varrho^2 r} \right\} = -\frac{r'}{r^2}.$$

Sa 1ª ci dice infatti che S_0 è superficie delle anormali principali di C; la

2ª è la condizione richiesta. Essa può anche scriversi così:

$$-r' = k_2 \frac{r'\varrho - \varrho' r}{\varrho^2}$$

da cui, integrando

$$-r = k_2 \frac{r}{\varrho} + c \qquad c = \text{cost.}$$

e quindi

$$-1 = \frac{k_2}{\varrho} + \frac{c}{r}$$

che è la relazione trovata per la prima volta dal Bertrand.

16. Abbiamo già scritto al N° 3 l'equazione generale delle assintotiche di una superficie rigata e abbiamo anche osservato, come questa equazione in generale non s'integra. Il caso che ora trattiamo è uno dei pochi che fa eccezione. Infatti l'equazione di queste linee diviene, nel nostro caso

$$\frac{r'\varrho - \varrho' r}{\varrho^2 r^2} u^2 - u \frac{r'}{r^2} + 2 \frac{u'}{r} = 0.$$

Di questa noi conosciamo un integral particolare $u = 0$; se si pone $u = \frac{1}{u_1}$ si trova per u_1 l'equazione lineare del 1° ordine

$$\frac{u_1'}{r} + \frac{1}{2} \frac{r'}{r^2} u_1 - \frac{1}{2} \frac{r'\varrho - \varrho' r}{\varrho^2 r^2} = 0$$

da cui

$$u_1 = \frac{1}{2\sqrt{r}} \left\{ \int \frac{r'\varrho - \varrho' r}{\sqrt{r}\, \varrho^2} dv + c \right\} \quad ; \qquad c = \text{cost.}$$

ossia

$$u = \frac{2\sqrt{r}}{\int \frac{r'\varrho - \varrho' r}{\sqrt{r}\, \varrho^2} dv + c}$$

e l'integrazione è ridotta alle quadrature. Se la curva data è una elica

$$\frac{r}{\varrho} = \text{cost.} \qquad \text{cioè} \qquad \frac{r'\varrho - \varrho' r}{\varrho^2} = 0$$

e rimane

$$u = k\sqrt{r} \qquad ; \qquad k = \text{cost.}$$

Cioè:

« *Un'assintotica non rettilinea della superficie delle normali principali* « *di una elica, intercetta sulle generatrici dei segmenti proporzionali alla ra-* « *dice quadrata del raggio di torsione* ».

17. È noto che il piano tangente in un punto A di una superficie rigata è normale in un altro punto B della superficie situato sulla generatrice che passa per A e viceversa il piano tangente nel punto B è normale in A. Le coppie di punti analoghe alla coppia A ; B generano sulla generatrice AB una involuzione di cui il punto centrale è anche il punto centrale della generatrice stessa. Se O è questo punto avremo dunque

$$OA \cdot OB = \text{cost.}$$

L'angolo che il piano tangente alla superficie in un punto di una generatrice l col piano tangente nel punto centrale di l dipende dall e funzioni M ed N e quindi non cambia flettendo la superficie; dunque flettendo la superficie la involuzione AB non cambia su ciascuna generatrice, se cioè A , B sono punti coniugati, rimangono coniugati qualunque sia la flessione che subisce la superficie; segue che su di ogni generatrice la costante dell'involuzione AB non varia comunque la superficie si fletta. Per trovare sopra ogni generatrice il valore di questa costante deformiamo la superficie finchè divenga superficie di normali principali per una traiettoria ortogonale C delle generatrici. Se A è un punto di C e B e il relativo centro di curvatura, A e B costituiscono una delle coppie di punti coniugati appartenenti all'involuzione di cui abbiamo gia parlato e infatti è noto che la superficie delle normali principali e la sviluppabile polare di una curva si toccano lungo la linea dei centri di curvatura dunque il piano normale in A alla superficie delle normali principali è tangente in B alla stessa superficie. Se dunque O è il punto centrale della generatrice AB, si ha:

$$OA = \frac{R^2}{\varrho} \qquad ; \qquad OB = \frac{R^2}{\varrho}$$

e quindi

$$OA \cdot OB = -\frac{R^4}{r^2}.$$

Abbiamo già osservato che l'involuzione AB non cambia flettendo la superficie; se dunque deformiamo questa superficie finchè diviene il luogo delle normali principali per un'altra traiettoria ortogonale C, che dopo la

flessione acquisti i raggi ϱ_i ; r_i ; R_i avremo :

$$OA_i \cdot OB_i = -\frac{R_i^4}{r_i^2}$$

$$OA \cdot OB = OA_i \cdot OB_i$$

ossia

$$\frac{R^2}{r} = \frac{R_i^2}{r_i} .$$

Dunque:

« *Se si deforma una superficie rigata successivamente in superficie di nor-* « *mali principali per le traiettorie ortogonali delle generatrici ; queste traiet-* « *torie acquistano raggi di curvatura tali che la funzione*

$$\frac{R^2}{r}$$

non cambia da traiettoria, a traiettoria ».

18. Consideriamo ora una linea tracciata su di una superficie rigata qualunque. Essa incontra le generatrici nei punti consecutivi A_1 ; A_2 ; A_3 ; ... i punti coniugati B_1 ; B_2 ; B_3 ; ... costituiranno pure una linea continua perchè le lunghezze consecutive $(O_1A_1 ; O_2A_2)$; $(O_3A_3 ; . .)$; . . differiscono infinitamente poco fra loro e la costante dell'involuzione varia con continuità nel passare da generatrice, a generatrice. Chiameremo « *coniugate* » le due linee

$$A_1 \; A_2 \; A_3 , \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$B_1 \; B_2 \; B_3 , \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

Esse si mantengono coniugate per ogni flessione della superficie.

Relativamente a queste linee risulta :

« *Le linee coniugate delle traiettorie ortogonali delle generatrici sono* « *distribuite in modo sulla superficie che ognuna di esse diviene la linea dei* « *centri di curvatura della traiettoria coniugata quando la superficie diviene* « *il luogo delle normali principali di questa traiettoria* ».

Il piano tangente alla superficie è piano osculatore dell'assintotica passante per il punto dunque :

« *Un'assintotica è lo spigolo di regresso della sviluppabile inviluppo dei* « *piani normali alla superficie contenenti ognuno la generatrice lungo la li-* « *nea coniugata dell'assintotica* ».

Riguardo all'elicoide rigato d'area minima, abbiamo :

« *L'eliche di un elicoide a piano direttore sono a due a due coniugate:* « *quelle di una stessa coppia sono tali che una è il luogo dei centri di cur-* « *vatura dell'altra* ».

19. Sia S_0 la superficie delle normali principali per una curva C di raggi ϱ, r, R: deformiamola nella superficie luogo delle normali principali di una traiettoria ortogonale C_i delle generatrici di S_0; sia k_i la distanza costante fra C e C_i, ϱ_i, r_i, R_i siano i raggi che acquista C_i dopo che S_0 ha subìto la deformazione. Secondo i teoremi del N° 17 avremo la relazione

$$\frac{R_i^2}{r_i} = \frac{R^2}{r} \tag{1}$$

Inoltre $\frac{R^2}{\varrho}$ rappresenta la distanza che passa fra C e la linea di stringimento di S_0 prima che S_0 si deformi; $\frac{R_i^2}{\varrho_i}$ rappresenta la distanza fra C_i e la linea di stringimento di S_0 dopo che S_0 ha subìto la deformazione. Sarà dunque

$$\frac{R_i^2}{\varrho_i} = \frac{R^2}{\varrho} \pm k_i$$

da questa e dalla (1) possiamo ricavare ϱ_i ed r_i in funzione di ϱ e di r

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\varrho_i} = \left(\dfrac{R^2}{\varrho} \pm k_i\right) \dfrac{1}{\left(\dfrac{R^2}{\varrho} \pm k_i\right)^2 + \dfrac{R^4}{r^2}} \\ \dfrac{1}{i} = \dfrac{R^2}{r} \dfrac{1}{\left(\dfrac{R^2}{\varrho} \pm k_i\right)^2 + \dfrac{R^4}{r^2}} \end{cases} \tag{2}$$

Queste formule ci danno i raggi che acquista una traiettoria ortogonale C_i delle normali principali di una curva C quando queste normali principali divengono quelle di C_i espressi per i raggi che possedeva C prima che le sue normali principali subissero la detta trasformazione.

Esse ci esprimono anche il seguente teorema:

« *Tutte le curve le cui superficie di normali principali sono applicabili* « *sopra la superficie delle normali principali di una curva di raggi* ϱ *ed* r « *sono definite per mezzo delle corrispondenti funzioni* ϱ_i *ed* r_i *dalle due* « *formole (2) precedentemente trovate* ».

20. Se nelle (2) del N° precedente secondo le notazioni dei N.

11 e 12 si pone in luogo di $\frac{R^2}{\varrho}$ e di $\frac{R^2}{r}$ α e β rispettivamente, si ottengono le altre due

$$\frac{1}{\varrho_i} = \frac{\alpha \pm k_i}{(\alpha \pm k_i)^2 + \beta^2} \quad ; \quad \frac{1}{r_i} = \frac{\beta}{(\alpha \pm k_i)^2 + \beta^2}$$

le quali risolvono il problema più generale seguente:

« *Data una superficie rigata qualunque riferita alle generatrici e alle* « *loro traiettorie ortogonali, determinare i raggi che acquista una traiettoria* « *ortogonale* T_i *che dista di* k_i *dalla direttrice, quando la superficie si flette* « *riducendola il luogo delle normali principali di* T_i ».

2.° La superficie luogo degli assi delle eliche osculatrici.

21. È noto che una curva gobba è determinata a meno di movimenti nello spazio quando si conoscono i suoi raggi di curvatura in funzione dell'arco v della curva. Per fissare una di queste posizioni nello spazio basta dare la posizione di un suo punto, della tangente e del piano osculatore in esso; dunque l'elica circolare che in un punto M di una curva ha comuni con essa i raggi di 1ª e 2ª curvatura, la tangente e il piano osculatore è perfettamente determinata e si chiama « *l'elica osculatrice della curva data nel punto M* ».

Quest'elica ha pure comuni con la curva la normale principale, la binormale quindi il piano rettificante (piano della tangente e della binormale). L'angolo della retta rettificante (la retta di due piani rettificanti consecutivi) della curva con la tangente è una funzione dei raggi della curva stessa e siccome questi raggi appartengono anche all'elica osculatrice, così ne viene che anche la retta rettificante sarà comune alla curva e all'elica osculatrice. Ma la retta rettificante è perpendicolare a due normali principali consecutive, dunque agli elementi già notati comuni alla curva e all'elica osculatrice sono da aggiungersi anche le direzioni di due normali principali infinitamente vicine.

Per ognuno dei punti di una curva a doppia curvatura passa una di queste eliche; il luogo di tutti i loro assi costituisce una superficie rigata che ora vogliamo studiare.

22. Cominceremo dal determinare la direzione dell'asse di ogni elica osculatrice. Siccome quest'asse è parallelo alla retta rettificante dell'elica e quindi della curva data, basterà associare l'equazione del piano rettificante nel punto x, y, z col piano rettificante nel punto consecutivo, sicchè la retta rettificante sarà quella comune ai due piani

$$(X - x)\cos\xi + (Y - y)\cos\eta + (Z - z)\cos\zeta = 0$$

$$(X - x)\left(\frac{\cos\alpha}{\varrho} + \frac{\cos\lambda}{r}\right) + (Y - y\left(\frac{\cos\beta}{\varrho} + \frac{\cos\mu}{r}\right) + (Z - z)\left(\frac{\cos\gamma}{\varrho} + \frac{\cos\nu}{r}\right) = 0$$

dunque i coseni di direzione della retta rettificante, o dell'asse dell'elica osculatrice saranno:

$$(1)\qquad \begin{cases} \cos m = R\left\{\dfrac{\cos\alpha}{r} - \dfrac{\cos\lambda}{\varrho}\right\} \\ \cos n = R\left\{\dfrac{\cos\beta}{r} - \dfrac{\cos\mu}{\varrho}\right\} \\ \cos p = R\left\{\dfrac{\cos\gamma}{r} - \dfrac{\cos\nu}{\varrho}\right\}. \end{cases}$$

Quindi, indicando con H l'angolo della tangente colla retta rettificante

$$(2)\qquad \operatorname{tang} H = \frac{r}{\varrho}$$

e con u il raggio della sezione retta del cilindro che contiene l'elica osculatrice sarà

$$u = \varrho \operatorname{sen}^2 H = \frac{R^2}{\varrho}.$$

Per conseguenza l'equazioni dell'asse dell'elica osculatrice potranno porsi sotto la forma

$$(3)\qquad \frac{\varrho(X - x) - R^2\cos\xi}{\varrho\cos\alpha - r\cos\lambda} = \frac{\varrho(Y - y) - R^2\cos\eta}{\varrho\cos\beta - r\cos\mu} = \frac{\varrho(Z - z) - R^2\cos\zeta}{\varrho\cos\gamma - r\cos\nu}.$$

23. Per mezzo delle formule precedenti si determina molto facilmente di quale ordine è il contatto fra la curva e la sua elica osculatrice. Osserveremo perciò che quest'elica potrebbe anche definirsi come l'elica che ha comuni con la curva tre punti consecutivi e la retta rettificante. Ne conseguirebbe infatti che essa avrebbe a comune con la curva anche il piano osculatore, la tangente, la normale principale, la binormale, il piano rettificante, il cerchio osculatore, dunque il raggio di flessione e per la (2) anche il raggio di torsione. Mentre esiste una sola elica circolare che ha a comune con la curva tre punti infinitamente vicini e la retta rettificante; ne esistono un numero infinito che passano per i tre punti infinitamente vicini. E infatti siano M_1, M_2, M_3 questi punti: tiriamo per essi tre rette ugualmente inclinate (e parallele) sulle tangenti M_1M_2, M_1M_3 e tagliamo queste tre rette con un piano perpendicolare ad esse; si ottengono così tre punti i quali definiscono un cerchio che può riguardarsi

come sezione retta di un cilindro circolare sul quale è tracciata un'elica passante per i punti M_1, M_2, M_3. Ora, esistono infinite direzioni ugualmente inclinate sulle tangenti $M_1 M_2$, M_2M_3 dunque esistono infinite eliche circolari passanti per M_1, M_2, M_3. Fra tutte queste, l'elica osculatrice è quella che si scosta meno dalla curva perchè essa ha a comune la retta rettificante, dunque l'ordine del contatto fra l'elica osculatrice e la curva è superiore al secondo perchè l'ordine del contatto fra la curva e le altre eliche passanti per i punti M_1, M_2, M_3 è appunto il secondo. Però quest'ordine, quantunque superiore al 2°, non può in generale arrivare al 3° perchè allora dovrebbero coincidere quattro punti infinitamente vicini dell'elica e della curva e quindi i centri delle rispettive sfere osculatrici. Ma il raggio della sfera osculatrice della curva è dato da

$$S^2 = \varrho^2 + r^2\varrho'^2$$

per l'elica è $\varrho' = 0$ quindi $S = \varrho$ cioè dovrebbe il centro del cerchio osculatore essere anche il centro della sfera osculatrice ciò che non avviene per le curve in generale, ma solamente per quelle il cui raggio di flessione è costante.

Riassumendo, possiamo dire che « il contatto fra l'elica osculatrice e « la curva è di un ordine compreso fra il secondo e il terzo: è del terzo so- « lamente per quelle curve il cui raggio di flessione è costante ».

24. Come il raggio del cerchio osculatore serve a darci una misura del quanto la curva si scosta dalla tangente, così noi possiamo ugualmente determinare un elemento che servirà a misurare di quanto la curva si allontana dall'elica osculatrice; e questa misura si otterrà evidentemente dividendo per l'arco elementare l'angolo infinitesimo formato dagli assi di due eliche osculatrici infinitamente vicine. Abbiamo già rappresentato con

$$\cos m \ , \ \cos n \ , \ \cos p$$

i coseni di direzione dell'asse dell'elica osculatrice in un punto della curva in cui l'arco ha il valore v: nel punto infinitamente vicino $v + dv$ essi diverranno:

$$\cos m_1 = \cos m + \frac{d \cos m}{dv} dv$$

$$\cos n_1 = \cos n + \frac{d \cos n}{dv} dv$$

$$\cos p_1 = \cos p + \frac{d \cos p}{dv} dv$$

dunque, indicando con de l'angolo suddetto, sarà

$$\operatorname{sen}^2 de = \left\| \begin{matrix} \cos m & \cos n & \cos p \\ \cos m_1 & \cos n_1 & \cos p_1 \end{matrix} \right\|^2$$

e a meno d'infinitesimi del secondo ordine

$$\frac{de}{dv} = \frac{d}{dv}\left(\frac{r}{\varrho}\right)\frac{\varrho^2}{\varrho^2 + r^2}$$

che è la misura cercata. Essa infatti è nulla per tutte le eliche e in particolare per quelle che hanno a comune con la curva, nel punto considerato, la tangente e il piano osculatore. Noi chiameremo questo rapporto *curvatura elicoidale* e il suo inverso, che rappresenteremo sempre con la lettera E, *il raggio di curvatura elicoidale*

$$\frac{1}{\mathrm{E}} = \frac{d}{dv}\left(\frac{r}{\varrho}\right)\frac{\varrho^2}{\varrho^2 + r^2}.$$

25. L'asse dell'elica osculatrice, essendo parallelo alla retta rettificante, è perpendicolare a due normali principali infinitamente vicine: dunque la superficie luogo delle normali principali e quella luogo degli assi delle eliche osculatrici sono due superficie rigate coniugate e per esse varranno tutte le considerazioni svolte al n. 5 e seguenti.

Per queste due superficie possiamo quindi enunciare i seguenti teoremi:

« *Esse si toccano lungo la comune linea di stringimento la cui equazione è*

$$u = \frac{\mathrm{R}^2}{\varrho} \text{ ».}$$

Se poi si ha

$$\frac{\mathrm{R}^2}{\varrho} = \text{cost.}$$

la superficie degli assi delle eliche osculatrici è sviluppabile e coincide precisamente con la sviluppabile osculatrice della linea di stringimento della superficie delle normali principali, lungo la quale linea, le due superficie, in luogo di toccarsi si tagliano ortogonalmente.

Se dunque

$$\frac{\mathrm{R}^2}{\varrho} = \text{cost.}$$

la linea comune alle due superficie gode le seguenti proprietà:

« *È traiettoria ortogonale delle normali principali;*

« *È geodetico e linea di stringimento della superficie da esse generata;*

« *È spigolo di regresso del luogo degli assi delle eliche osculatrici* ».

26. Non solamente nel caso in cui

$$\frac{R^2}{\varrho} = \text{cost.}$$

avviene che la linea di stringimento della superficie delle normali principali sia geodetica della superficie, ma per il teorema di Bonnet, quando è costante l'angolo sotto il quale questa linea taglia le generatrici della superficie; se questo angolo s'indica con θ; si ha

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{R}{r} \cdot \frac{1}{\frac{d}{dv}\left(\frac{R^2}{\varrho}\right)}$$

dunque, se k è una costante, possiamo enunciare il seguente teorema:

« *Le curve per le quali si ha*

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{R^2}{\varrho}\right) = k \cdot \frac{R}{r}$$

« *godono della proprietà che la linea comune al luogo delle normali princi-*
« *pali e a quello degli assi delle eliche osculatrici, oltre a essere per entram-*
« *bi linea di stringimento, è geodetica e incontra sotto angolo costante le ge-*
« *neratrici tanto dell'una quanto dell'altra superficie* »

Fra queste curve si possono cercare le eliche. Abbiamo allora le due condizioni per le due funzioni ϱ ed r

$$\frac{r}{\varrho} = k_1 \quad ; \quad \frac{d}{dv}\left(\frac{R^2}{\varrho}\right) = k_2 \frac{R}{r}$$

dove k_1 e k_2 sono costanti; da queste risulta

$$\frac{\varrho}{v} = \text{cost.}$$

Se ϱ_0 e v_0 sono rispettivamente il raggio di curvatura e l'arco della sezione retta del cilindro sul quale giace l'elica segue ancora

$$\varrho_0 = k_3 v_0$$

dove k_3 è una terza costante; l'elica è la cilindro-conica. Essa perciò è la sola elica (all'infuori dell'elica circolare) per la quale sia geodetica della superficie luogo delle normali principali la linea di stringimento della superficie stessa.

3° La superficie luogo delle binormali.

27. La superficie delle binormali di una curva è una superficie rigata non sviluppabile altro che nel caso che la curva data sia piana. Se si

prende per direttrice la curva, le funzioni M ed N del N° 1 sono date da

$$M^2 = \frac{1}{r^2} \quad ; \quad N = O .$$

Segue che la direttrice è linea di stringimento dunque:

« *Una curva è traiettoria ortogonale, geodetica e linea di stringimento* « *della superficie luogo delle sue binormali* ».

« *La condizione necessaria e sufficiente affinchè le superficie delle bi-* « *normali di due curve siano applicabili è che le curve date abbiano lo stesso* « *raggio di torsione* ».

28. La superficie coniugata di questa è costituita dalla sviluppabile osculatrice e lungo la loro linea comune queste due superficie sono ortogonali (N° 10). Se la superficie delle binormali di una curva C deve essere superficie di normali principali per un'altra curva C_0; i raggi di C_0 debbono evidentemente (N° 25) essere legati dalla relazione

$$\frac{R_0^{\,2}}{\varrho_0} = \text{cost.}$$

In questo caso la superficie degli assi delle eliche osculatrici di C_0 coincide con la sviluppabile osculatrice di C.

29. Consideriamo un caso particolare che conduce a una deformazione notevole della superficie luogo delle binormali.

Supponiamo che la curva data abbia costante il suo raggio di torsione: allora è noto che la superficie delle sue binormali è applicabile sull'elicoide a piano direttore; ma a sua volta quest'ultimo è applicabile sul catenoide ed è pure noto che l'asse dell'elicoide si distende sul cerchio di gola del catenoide, abbiamo dunque il seguente teorema:

« *Esiste una deformazione della superficie luogo delle binormali di una* « *curva a torsione costante per la quale la curva data si può trasformare* « *in una circonferenza.*

« *Questa deformata è il catenoide.*

« *Il cerchio su cui si dispone la curva data è il cerchio di gola del catenoide* ».

4° La sviluppabile osculatrice.

30. Caratterizziamo con l'indice 1 tutti gli elementi relativi a una evolvente della curva data; avremo; se x, y, z, sono le coordinate di un suo punto

$$x_1 = x - v \cos \alpha \quad ; \quad y_1 = y - v \cos \beta \quad ; \quad z_1 = z - v \cos \gamma$$

differenziando, quadrando e sommando

$$dv_1 = \frac{v}{\varrho}\, dv.$$

$$\cos \alpha_1 = -\cos \xi \quad ; \quad \cos \beta_1 = -\cos \eta \quad ; \quad \cos \gamma_1 = -\cos \zeta$$

e per il raggio di flessione

$$\frac{1}{\varrho_1} = \sqrt{\Sigma \left(\frac{d \cos \alpha_1}{dv_1}\right)^2} = \frac{\varrho}{\mathrm{R}v}$$

per le direzioni della normale principale e binormale

$$\cos \xi_1 = \mathrm{R} \left\{\frac{\cos \alpha}{\varrho} + \frac{\cos \lambda}{r}\right\},$$

$$\cos \eta_1 = \mathrm{R} \left\{\frac{\cos \beta}{\varrho} + \frac{\cos \mu}{r}\right\},$$

$$\cos \zeta_1 = \mathrm{R} \left\{\frac{\cos \gamma}{\varrho} + \frac{\cos \nu}{r}\right\},$$

$$\cos \lambda_1 = \mathrm{R} \left\{\frac{\cos \lambda}{\varrho} - \frac{\cos \alpha}{r}\right\},$$

$$\cos \mu_1 = \mathrm{R} \left\{\frac{\cos \mu}{\varrho} - \frac{\cos \beta}{r}\right\},$$

$$\cos \nu_1 = \mathrm{R} \left\{\frac{\cos \nu}{\varrho} - \frac{\cos \gamma}{r}\right\},$$

Da queste formule risulta:

« *La tangente e la binormale dell'evolvente sono rispettivamente paral-* « *lele alla normale principale e alla retta rettificante della curva data* ».

Segue che, nei punti delle evolventi situati su di una stessa tangente alla curva, le loro tangenti sono parallele fra loro e così pure le binormali quindi le normali principali, per conseguenza le rette rettificanti e gli assi delle eliche osculatrici. Dunque:

« *Le superficie degli assi delle eliche osculatrici di tutte le evolventi co-* « *stituiscono una serie di superficie a generatrici parallele* ».

Per il raggio di torsione di una evolvente si ha:

$$\frac{1}{r_1} = \sqrt{\frac{\mathrm{R}^2}{\varrho v} \frac{d}{dv}\left(\frac{\varrho}{r}\right)}.$$

Dunque

« *Le evolventi delle eliche sono curve piane* ».

31. È noto che la curva data giace sulla sviluppabile polare comune a tutte le sue evolventi; ma queste superficie è l'inviluppo dei piani normali delle evolventi i quali sono piani rettificanti della curva data; dunque:

« *La sviluppabile polare di tutte le evolventi è la sviluppabile rettifi-* « *cante della curva data* ».

« *Lo spigolo di regresso della sviluppabile rettificante della curva data* « *è il luogo dei centri delle sfere osculatrici delle evolventi* ».

32. La distanza u che passa fra un punto di una evolvente e il punto centrale della normale principale dell'evolvente che passa per quel punto, è data da

$$u = \frac{R_1^2}{\varrho_1}$$

Ma per la (2) del N° 21 si ha:

$$\operatorname{tang} H_1 = \frac{r_1}{\varrho_1}$$

dunque

$$u = \varrho_1 \operatorname{sen}^2 H_1$$

ora è

$$\operatorname{tang}^2 H_1 = \frac{r_1^2}{\varrho_1^2} = \frac{\varrho^2}{R^2 \frac{d}{dv}\left(\frac{\varrho}{r}\right)}$$

ossia $\operatorname{tang}^2 H_1$ e per conseguenza $\operatorname{sen}^2 H_1$ è costante per tutti i punti delle evolventi situati su di una medesima tangente alla curva data; dunque il valore di u in questi punti è proporzionale a ϱ_1. Ora se M è il punto di contatto di questa tangente con la curva data, si vede subito che i centri di curvatura delle evolventi, nei punti di esse situati sulla tangente in M, sono tutti su di una retta che passa per M. D'altra parte le normali principali delle evolventi, in questi stessi punti, sono parallele, dunque i punti centrali di queste normali principali sono anche in linea retta con M, o altrimenti:

« *Le linee di stringimento delle superficie luogo delle normali principa-* « *li delle evolventi generano una superficie rigata che contiene la curva* « *primitiva* ».

33. Noteremo inoltre che « *la sviluppabile osculatrice tocca la super-* « *ficie delle normali principali e incontra ortogonalmente la sviluppabile ret-* « *tificante lungo la curva data* ».

5° La sviluppabile polare.

34. Indichiamo con $d\tau$, $d\sigma$, dk gli angoli di contingenza, di torsione e di curvatura totale della curva data; con θ l'angolo che la tangente a un'evoluta in un punto fa con la generatrice che passa per il punto di

contatto (questa generatrice è l'asse di un cerchio osculatore); caratterizziamo con l'indice 1 gli elementi di una evoluta; risulta allora molto facilmente

$$d\tau_1 = d\tau . \operatorname{sen}\theta \quad ; \quad dk_1 = d\tau \quad ; \quad d\sigma_1 = d\tau . \operatorname{sen}\theta .$$

Rappresentando con a la lunghezza di generatrice rettilinea, compresa fra l'evoluta e lo spigolo di regresso della superficie, si ha pure

$$dV_1 = \frac{a\, d\sigma}{\operatorname{sen}\theta}$$

e per conseguenza

$$\varrho_1 = \frac{a\varrho}{r \operatorname{sen}^2\theta} \quad ; \quad r_1 = \frac{a\varrho}{r \operatorname{sen}\theta \cos\theta} \quad ; \quad R_1 = \frac{a\varrho}{r \operatorname{sen}\theta}$$

$$\operatorname{tang} H_1 = \frac{r_1}{\varrho_1} = \operatorname{tang}\theta .$$

Segue: « *Le evolute sono geodetiche della sviluppabile polare* ».

35. Su questa superficie abbiamo due linee notevoli: lo spigolo di regresso che è anche il luogo dei centri delle sfere osculatrici e la linea dei centri di curvatura. Nessuna di queste due curve è un'evoluta.

Per definire una evoluta bisogna che sia dato l'angolo che la sua tangente fa con la normale principale della curva data nel punto corrispondente al punto di contatto della tangente dell'evoluta. Di più, siccome la normale principale alla curva primitiva divide in due regioni il piano normale alla curva, così occorre anche fissare in quale di queste regioni deve essere situato il punto di principio della evoluta stessa. Le evoluta si presentano a coppie, ogni coppia disposta simmetricamente rispetto e questa linea.

Variando l'angolo θ fra 0 e π passerà per $\frac{\pi}{2}$, allora la tangente dell'evoluta coincide con la normale principale della curva e siccome quest'ultima non tocca, ma incontra la linea dei centri di curvatura, così ne viene che tutte le evolute non toccano, ma incontrano questa linea. Per $\theta = \frac{\pi}{2}$ segue dalle formule del N⁰ precedente

$$r_1 = \infty$$

quindi:

« *Tulte le evolute ai punti d'incontro con la linea dei centri di curva-* « *tura della curva primitiva hanno il piano osculatore stazionario* ».

36. La normale principale dell'evoluta nel punto dell'evoluta situato

sulla linea dei centri di curvatura è evidentemente parallela alla tangente della curva primitiva. Se dunque si porta sopra ognuna di queste parallele, a partire dal corrispondente punto d'incontro dell'evoluta con la linea dei centri di curvatura, una lunghezza

$$\frac{R_1^2}{\varrho_1} = \frac{a\varrho}{r}$$

il luogo di questi estremi sarà il luogo dei punti centrali delle normali principali e degli assi delle eliche osculatrici di tutte le evolute. Ma d'altra parte $\frac{R_1^2}{\varrho_1}$ si annulla anche nel punto d'incontro dell'evoluta con lo spigolo di regresso della superficie. Dunque:

« *Le linee di stringimento delle superficie delle normali principali di* « *tutte le evolute si appoggiano al luogo dei centri delle sfere osculatrici e* « *sulla curva precedentemente costruitta* ».

37. Dato l'angolo della tangente all'evoluta colla normale principale della curva, abbiamo veduto che si ottengeno due evolute simmetricamente disposte rispetto alla linea dei centri di curvatura di modo che a un punto della curva data corrispondono due punti di queste due evolute situati sull'asse del cerchio osculatore e a ugual distanza del centro di questo cerchio. Le normali principali delle evolute in questi due punti sono parallele; la distanza di ognuno di questi punti G dal punto centrale E della normale principale dell'evoluta, passante per esso, è

$$a\frac{\varrho}{r}$$

quindi è proporzionale alla distanza di G dal punto corrispondente K dello spigolo di regresso della superficie: segue che i punti E, E′, K sono in linea retta. Quindi:

« *Le linee di stringimento delle superficie di normali principali di* « *due evolute simmetriche, rispetto alla linea dei centri di curvatura, stanno* « *su di una superficie rigata che contiene il luogo dei centri delle sfere o-* « *sculatrici della curva primitiva* ».

38. Se x, y, z sono le coordinate di un punto della curva data e si caratterizzano con l'indice 1 gli elementi relativi allo spigolo di regresso della sviluppabile polare si ha:

$$X_1 = x + \varrho \cos\xi - r\varrho' \cos\lambda$$
$$Y_1 = y + \varrho \cos\eta - r\varrho' \cos\mu$$
$$Z_1 = z + \varrho \cos\zeta - r\varrho' \cos\nu$$

la curva data e il luogo dei centri delle sue sfere osculatrici sono tali che la tangente e la binormale di una di esse sono parallele rispettivamente alla binormale e alla tangente dell'altra. Sono dunque paralleli i piani rettificanti quindi le rette rettificanti, e per conseguenza gli assi delle eliche osculatrici.

Dalle formule precedenti segue

$$dv_1 = \frac{S.dS}{rd\varrho} dv$$

essendo S il raggio della sfera osculatrice: avendosi poi

$$d\tau_1 = d\sigma \quad , \quad dk_1 = dk \quad , \quad d\sigma_1 = d\tau$$

risulta

$$\varrho_1 = \frac{S\, dS}{d\varrho} \quad , \quad r_1 = \frac{S \cdot \varrho}{r} \frac{dS}{d\varrho} \quad , \quad R_1 = \frac{S \cdot R}{r} \frac{dS}{d\varrho}$$

$$\frac{1}{E_1} = \frac{d}{dv_1}\left(\frac{\varrho}{r}\right) \frac{r^2}{\varrho^2 + r^2}$$

e quindi:

« *Se la curva data è un'elica, è un'elica anche il luogo dei centri delle* « *sue sfere osculatrici* ».

39. Noteremo finalmente che le coordinate x_0, y_0, z_0 di un punto dalla linea dei centri di curvatura sono date da

$$x_0 = x + \varrho \cos \xi \quad , \quad y_0 = y + \varrho \cos \eta \quad , \quad z_0 = z + \varrho \cos \zeta$$

e quindi il suo arco elementare dv_0

$$dv_0^{\,2} = \frac{\varrho^2 + \varrho'^2 r^2}{r^2} dv = \frac{S^2}{r^2} dv.$$

Se con $\cos \alpha_0$, $\cos \beta_0$, $\cos \gamma_0$ si rappresentano i coseni di direzione della sua tangente, avremo

$$\cos \alpha_0 = \frac{r}{S}\left\{\varrho' \cos \xi - \frac{\varrho}{r} \cos \lambda\right\}$$

$$\cos \beta_0 = \frac{r}{S}\left\{\varrho' \cos \eta - \frac{\varrho}{r} \cos \mu\right\}$$

$$\cos \gamma_0 = \frac{r}{S}\left\{\varrho' \cos \zeta - \frac{\varrho}{r} \cos \nu\right\}.$$

Dunque:

« *La curva data e la linea dei suoi centri di curvatura hanno le tan-* « *genti nei punti corrispondenti ortogonali tra loro* ».

Se con a, a_0 si rappresentano i coseni di direzione della tangente alla linea dei centri di curvatura colla normale principale e con la binormale della curva data si trova

$$\operatorname{sen} a_0 = \cos a$$

cioè la tangente alla linea dei centri di curvatura, la normale principale e l'asse del cerchio osculatore della curva data stanno in un medesimo piano: da cui segue

« *La sviluppabile polare e la superficie delle normali principali si toc-* « *cano lungo la linea dei centri di curvatura* »

6° La sviluppabile rettificante.

40. Cominciamo dal determinare le coordinate di un punto dello spigolo di regresso di questa superficie.

Basterà perciò associare all'equazione del piano rettificante

$$(X - x)\cos\xi + (Y - y)\cos\eta + (Z - z)\cos\zeta = 0$$

le due che si ottengono derivando una e due volte rispetto all'arco. Se si caratterizzano con l'indice 1 gli elementi relativi a questo spigolo di regresso si trova

$$x_1 = x + \frac{1}{\frac{d}{dv}\left(\frac{\varrho}{r}\right)}\left\{\cos\lambda - \frac{\varrho}{r}\cos\alpha\right\},$$

$$y_1 = y + \frac{1}{\frac{d}{dv}\left(\frac{\varrho}{r}\right)}\left\{\cos\mu - \frac{\varrho}{r}\cos\beta\right\},$$

$$z_1 = z + \frac{1}{\frac{d}{dv}\left(\frac{\varrho}{r}\right)}\left\{\cos\nu - \frac{\varrho}{r}\cos\gamma\right\}.$$

Segue che la distanza d fra i due punti (x, y, z) ; (x_1, y_1, z_1) è data da

$$d = \frac{1}{\frac{d}{dv}\left(\frac{\varrho}{r}\right)}\sqrt{\frac{r^2 + \varrho^2}{r^2}}$$

e risulta che la sviluppabile rettificante dell'elica è il cilindro che la contiene.

41. Per i raggi ϱ_1, r_1, R_1 dello spigolo di regresso della sviluppabile rettificante si hanno le formloe :

$$\varrho_1 = -\frac{1}{\operatorname{sen} H}\frac{d}{dH}(E \operatorname{sen} H) \quad ; \quad r_1 = -\frac{1}{\operatorname{sen} H}\frac{d(E \operatorname{sen} H)}{dk} ;$$

$$R_1 = -\frac{1}{\operatorname{sen} H}\frac{d(E \operatorname{sen} H)}{\sqrt{dk^2 + dH^2}}$$

e quindi

$$\frac{1}{E_1} = -\frac{\operatorname{sen} H}{d(E \operatorname{sen} H)}\, d\left(\frac{R}{E}\right)\frac{E^2}{E^2 + R^2} .$$

Se R è proporzionale ad E senza che sia

$$E \operatorname{sen} H = \text{cost.}$$

lo spigolo di regresso della sviluppabile rettificante è un'elica, la sviluppabile rettificante è un elicoide e la curva data ne è una geodetica. Dunque:

« *Una geodetica di un elicoide sviluppabile ha costante il rapporto fra* « *il raggio di curvatura totale e quello di curvatura elicoidale* ».

42. Abbiamo già osservato al N° 31 che lo spigolo di regresso della sviluppabile rettificante coincide con il luogo dei centri delle sfere osculatrici delle evolventi; se quest'ultima curva è un'elica, è un'elica pure ogni evolvente (N° 38 teorema reciproco) dunque:

« *Le evolventi di una geodetica di un elicoide sviluppabile sono eliche* ».

43. La binormale dello spigolo di regresso della sviluppabile rettificante è parallela alla normale principale della curva data e quindi il piano di questa retta e della retta rettificante della curva data è piano rettificante dello spigolo di regresso della sviluppabile rettificante. Quindi

« *La superficie inviluppo del piano definito dalla normale principale e* « *dalla retta rettificante (o dall'asse dell'elica osculatrice) è la sviluppabile* « *rettificante dello spigolo di regresso della sviluppabile rettificante della cur-* « *va primitiva* ».

44. La curva data è geodetica della superficie delle sue binormali e della sviluppabile rettificante; dunque:

« *La sviluppabile rettificante e la superficie luogo delle binormali si toc-* « *cano lungo la curva data* ».

LE LINEE DIAMETRALI DELLE CURVE ALGEBRICHE PIANE E IN PARTICOLARE I LORO ASSI DI SIMMETRIA

TESI PER L'ESAME DI ABILITAZIONE ALL' INSEGNAMENTO

(Pisa, 30 Giugno 1888)

[*Annali della R.a Scuola Normale Sup.re di Pisa 1889*]

Questo lavoro consta di due parti: di una parte generale che tratta delle curve piane algebriche di qualunque grado e di una speciale che applica i resultati ottenuti alle cubiche e alle quartiche, e altri ne ricava più intimamente connessi a queste curve particolari.

Lo scopo primo della parte generale, più che uno studio relativo a tutte le linee diametrali di una curva, è una ricerca rivolta a quelle fra di esse rispetto alle quali la curva può possedere una simmetria ortogonale.

Per definire nel modo che mi è parso più opportuno queste linee mi sono fondato sopra alcuni teoremi della teoria delle polari dimostrati dal prof. Cremona nella ben nota e classica memoria « *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* ».

Corrispondentemente alle curve polari di punti e alle curve polari di curve, mi è sembrato conveniente distinguere due specie di linee diametrali rispetto a una curva fondamentale: le polari di punti all'infinito che ho chiamato *linee diametrali ordinarie;* le polari della retta all'infinito che ho chiamato *linee diametrali principali.* Le prime sono in numero infinito; le seconde una di meuo del grado della curva fondamentale. — Con considerazioni molto semplici ho potuto dare di quest'ultime una nuova definizione (N^0 3) di cui mi sono molto giovato nello svolgimento della parte speciale che riguarda principalmente le quartiche.

Fra le linee diametrali ordinarie figurano naturalmente le rette di simmetria e comincia a questo punto la ricerca relativa a queste rette. I più notevoli resultati che ho ottenuto si possono riassumere nei teoremi dei N^i. 25, 36 i quali mi pare che risolvano completamente la questione circa al numero degli assi che una curva piana può possedere mostrando inoltre,

caso per caso, (N^{i}. 22, 23 e seguenti) quali sono le forme delle equazioni corrispondenti alle diverse curve simmetriche, e i metodi da seguirsi per ottenerle. E per applicarli ho costruito le equazioni che rappresentano tutte le possibili curve simmetriche dei primi sei ordini (N^{0} 37).

Nella parte speciale più largo studio è fatto sulle linee diametrali che non sono assi di simmetria. Così è interessante la forma che può assumere il quadrangolo dei centri di una cubica. Questri centri costituiscono la prima linea diametrale principale (che è di ordine zero).

Essendomi proposto di esaminare se essi potevano situarsi nei vertici di quadrilateri semplici delle specie considerate ordinariamente nella geometria elementare, ho ottenuto resultato negativo per il solo trapezio e condizioni abbastanza semplici nei coefficienti della curva per il parallelogrammo, rombo, rettangolo e quadrato.

Per dare un esempio del come si possa riconoscere la figura della parte reale di qualche cubica simmetrica dalla equazione della curva stessa, ho preso a trattare quelle che godono simmetria rispetto a tre assi rinvenendo quattro forme diverse di cui una sola appartenente a cubiche di genere zero.

Fra le linee diametrali principali di una quartica è notevole la terza, cioè l'inviluppo dei diametri. Se la quartica data non ha punti singolari, quest'inviluppo è di 4^{0} ordine e di 3ª classe, possiede quindi tre cuspidi: è dunque naturale di ricercare se può essere una ipocicloide di Steiner. In generale questo non succede. Però si determinano con facilità le condizioni analitiche, fra i coefficienti della quartica data, affinchè ciò avvenga. Queste condizioni sono soddisfatte se la quartica data è di genere 3 ed è bitangente alla retta all'infinito nei punti ciclici del suo piano, se cioè non avendo punti singolari, possiede la stessa proprietà che caratterizza, fra le qaartiche con tre cuspidi, l'ipocicloide Steineriana.

A queste quartiche appartengono tutte quelle di genere 3 simmetriche rispetto a tre assi.

Ne risulta quindi un altro modo di generazione di questa curva così notevole e così feconda di proprietà singolari dimostrate nei celebri lavori di Steiner e Cremona.

Relativamente alle altre linee diametrali principali di una quartica, la seconda gode di particolarità abbastanza interessanti riguardo alla Hessiana, alla Steineriana e alla Cayleyana della curva data.

La teoria di queste linee diametrali subisce qualche modificazione se la quartica possiede dei punti singolari.

Ne ho fatto un'applicazione a due quartiche cartesiane notissime e cioè alla lumaca di Pascal e alla Cardioide e a una quartica bicircolare, ugualmente nota, che è la lemniscata di Bernoulli.

Come per le cubiche, così per le quartiche, ho voluto dare un esempio del modo con cui si possono riconoscere e classificare, secondo la loro forma, tutte le quartiche simmetriche rispetto a tre assi. Di queste nessuna è di genere 1; se ne hanno tre di genere 2 e cinque di genere zero, non computando quelle costituite da soli punti, nè quelle che si spezzano. Fra quelle di genere zero figura naturalmente l'ipocicloide Steineriana che è l'unica quartica a tre cuspidi simmetrica rispetto a tre assi e, fra quelle che non hanno punti singolari, figura una notevolissima (fig. VIII) studiata incidentalmente da Klein nel suo lavoro « *Ueber die transformation siebenter ordnung der elliptischen functionem.* (*Mat. ann. Bd. 14*)».

A questa curva viene quindi a collegarsi intimamente l'ipocicloide di Steiner la quale è l'inviluppo dei diametri della quartica di Klein come lo è dei diametri di ogni quartica di genere 3 simmetrica rispetto a tre assi.

Oltre le bellissime lezioni sulla teoria delle curve algebriche del mio Maestro, prof. R. De Paolis, mi sono servito principalmente delle seguenti opere:

Cremona: — *Introduzione a una teoria geometrica delle curve piane (tomo XII, 1ª serie, memorie dell'accademia delle scienze dell'istituto di Bologna).*

Salmon: — *A treatise on the higher plane curves* (*Chapter IV. Metrical properties of curves*).

Clebsch: — *Vorlesungen über geometrie bearbeitet und herausegegeben von Lindemann (fünfte abtheilung).*

Cremona: — *Sur l'hypocicloïde à trois rebroüssement (Crelle Bd. 64).*

Steiner: — *Ueber eine besondere curve dritter classe und vierten Grades* (*Jacob Steiner's gesammelte Werke herausgegeben von Weierstross. Bd. 2).*

Klein: — *Ueber die transformation siebenter ordnung der elliptischen functionen (Mathematischen Annalen Bd. 14).*

Zeuthen: — *Sur le différentes formes des courbes planes du quatrieme ordre (Mathematischen Annalen Bd. 7.).*

Considerazioni Generali

1. Porremo a fondamento dei nostri studi i seguenti risultati relativi alle curve polari ottenuti dal prof. Cremona nella sua importante memoria « *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* ».

Siano due curve, una C_ν di ordine ν e una C_n di cui indicheremo secondo l'uso

con n l'ordine
» m la classe
» δ il numero dei punti doppi
» τ » delle tangenti doppie
» k » delle cuspidi
» i » dei flessi

Se un punto P si muove sulla linea C_n la polare r^{ma} di P rispetto alla curva fondamentale C_ν inviluppa una curva Y che si chiama polare r^{ma} di C_n rispetto a C_ν; l'ordine di Y è

$$n_y = (\nu - r)\left\{ n(n + 2r - 3) - (2\delta + 3k) \right\}$$

Per il caso speciale $r = \nu - 1$ si determinano con facilità le altre caratteristiche di Y e sono le seguenti:

$$n_y = n(n + 2\nu - 5) - (2\delta + 3k)$$

$$m_y = n(\nu - 1)$$

$$\delta_y = \frac{1}{2}\left\{ n(n + 2\nu - 5) - (2\delta + 3k) \right\}^2 - n(5n + 6\nu - 21) + 10\delta + \frac{27}{2}k$$

$$k_y = 3n(n + \nu - 4) - (6\delta + 8k)$$

$$\tau_y = \frac{1}{2} n(\nu - 2)(n\nu - 3) + \delta$$

$$i_y = k$$

L'introduzione del concetto della polare di una curva rispetto a un'altra, fornisce la definizione doppia delle curve polari di punti:

« *La polare r^{ma} di un punto P rispetto a una curva C_ν può considerarsi:*

1° *Come il luogo dei punti le cui* $(\nu - r)^{me}$ *polari passano per* P;

2° *Come l'inviluppo delle rette le polari* $(\nu - r)^{me}$ *delle quali contengono il punto* P.

2. Vediamo se è possibile dare analogamente una doppia definizione per le curve polari di curve.

Le coordinate di P entrano al grado r nella polare r^{ma} di P rispetto a C_v; dunque per un punto qualunque M del piano delle due curve C_n, C_v passano $n\,r$ polari r^{me} di $n\,r$ punti P situati sulla curva C_n. — Questi $n\,r$ punti costituiscono evidentemente il gruppo completo delle intersezioni della curva C_n con la polare $(n - r)^{ma}$ di M. rispetto a C_v.

Sia P_i uno qualunque di questi $n\,r$ punti; siano a_i, b_i rispettivamente la polare r^{ma}, ed $(r - 1)^{ma}$ di P_i rispetto a C_v: la a_i sarà anche la prima polare di P_i rispetto a b_i; ma a_i passa per M, dunque la retta polare di M rispetto a b_i passerà per P_i.

Supponiamo ora che due qualunque fra i punti P (per esempio P_h, P_k) si avvicinino l'uno all'altro e tendano a coincidere; la stessa cosa succederà per a_h ed a_k, onde la posizione limite che assumerà il punto M sarà un punto dell'inviluppo di a_h, a_k, a_i; . . . cioè un punto della polare r^{ma} di C_n rispetto a C_v: d'altra parte b_h e b_k tenderanno pure verso una posizione limite comune e così anche per conseguenza le rette polari di M, rispetto a b_h e b_k, ma abbiamo già osservato che queste rette passano rispettivamente per P_h, P_k onde la posizione limite che assumeranno sarà la tangente alla curva C_n nel punto posizione-limite di P_h e P_k.

Ecco quindi la definizione richiesta:

« *La polare* r^{ma} *di una curva* C_n *rispetto a un'altra* C_v *può considerarsi:*

1.° *Come il luogo dei poli delle tangenti di* C_n *rispetto a quelle curve che sono polari* $(r - 1)^{me}$ *dei punti di contatto rispetto alla curva fondamentale* C_v,

2.° *Come l'inviluppo delle polari* r^{me} *dei punti di* C_n *rispetto a* C_v ».

3. Quando il punto P è uno dei punti all'infinito di C_n, la polare r^{ma} di P rispetto a C_v prende il nome di linea diametrale r^{ma}. Se C_n ha tutti i punti all'infinito e si riduce quindi alla retta all'infinito; mentre il punto P si sposta su di essa, la linea diametrale r^{ma} di P inviluppa la linea diametrale r^{ma} della retta all'infinito e il cui ordine sarà dato, secondo le formole del N° 1 da

$$n_y = 2\,(\nu - r)\,(r - 1)$$

Abbiamo dunque due sorta di linee diametrali.

1° Le linee diametrali che chiameremo *ordinarie* e che non sono

altro che le polari rispetto a C_v dei punti all'infinito. Queste linee sono in numero infinito e ogni punto ne individua $v - 1$.

2° Le linee diametrali che chiameremo *principali* e che costituiscono le $\nu - 1$ polari della retta all'infinito rispetto a C_v. — Queste ultime a differenza delle prime sono dunque in numero finito. — Fra di esse ve ne ha una di ordine zero ed è la prima linea diametrale principale.

Essa è infatti rappresentata dai $(\nu - 1)^2$ poli della retta all'infinito che sono i $(\nu - 1)^2$ punti base del fascio delle prime linee diametrali ordinarie.

Dunque il grappo dei $(\nu - 1)^2$ centri della curva C_v può considerarsi come la prima linea diametrale che è di ordine zero.

Noteremo poi che dalle formule del N° 1, resultano le seguenti caratteristiche per la $(\nu - 1)^{ma}$ linea diametrale principale ovvero per l'inviluppo dei diametri:

$$n_y = 2(\nu - 2) \;;\; \delta_y = 2(\nu - 3)(\nu - 4) \;;\; \tau_y = \frac{(\nu - 2)(\nu - 3)}{2}$$

$$m_y = \nu - 1 \;;\; k_y = 3(\nu - 3) \;;\; i_y = 0$$

Finalmente osserveremo come, dal teorema del N, 2. consegua che

« *La r^{ma} linea diametrale principale può anche riguardarsi come il luogo dei centri delle $(r - 1)^{me}$ linee diametrali ordinarie* ».

Assi di simmetria

Gli assi di simmetria considerati come linee diametrali.

4. Diremo che una curva piana c è simmetrica rispetto a una retta r, quando preso un punto qualunque C di c e da esso tirata la perpendicolare p a r e chiamato P il punto $p\ r$; sulla perpendicolare p esista [dall'altra parte di P rispetto a r] un punto C_1 di c tale che in valore assoluto sia

$$PC = PC_1$$

I punti C e C_1 costituiscono una *coppia simmetrica.*

Noi intendiamo di riferirci, in tutto quel che segue, a curve generali del proprio ordine, mancanti quindi di punti multipli.

Supponiamo dapprima che l'ordine della curva sia un numero dispari. Allora il fascio delle perpendicolari a un medesimo asse di simmetria deve avere il centro in uno dei punti all'infinito della curva, giacchè ognuna di queste perpendicolari la incontra in un numero dispari di punti che debbono

costituirsi in coppie simmetriche. Se quindi un asse esiste esso deve essere perpendicolare a un asintoto.

Di più, se per esempio l'asse delle y è asse di simmetria (di coord. ortogonali) l'equazione della curva non cambia per la sostituzione lineare che porta x in $-x$ dunque:

« *Tutte le curve covarianti e contravarianti della primitiva sono simmetriche rispetto al medesimo asse* ».

Così in particolare l'Hessiana che è pure di grado dispari:

Segue che essa ha a comune con la curva quell'asintoto che è perpendicolare al comune assi di simmetria, o in altre parole:

« *Se una curva di grado dispari possiede un asse di simmetria, essa ha uu flesso all'infinito che è il coniugato armnnico del punto all'infinito della polare armonica del flesso rispetto alla coppia dei punti ciclici del piano* ».

« *Questa polare armonica è l'asse richiesto* ».

« *Ogni retta che passa per il flesso taglia ulteriormente la curva in un numero pari di punti che si costituiscono in coppie in involuzione di cui i punti doppi sono il flesso e il punto d'incontro con l'asse di simmetria* ».

Se poi l'ordine della curva è pari un asse di simmetria è certamente un diametro perpendicolare al sistema di corde cui si riferisce (Cf. il capitolo « Metrical properties of Curves » dell'opera del Salmon « A treatise on the higher plane curves »).

5. Riassumendo: « Un asse di simmetria fa sempre parte delle linee diametrali ordinarie: per una curva di grado pari è un diametro; per una curva di grado dispari costituisce una conica diametrale ordinaria insieme a quell'assintoto che gli è perpendicolare ».

Condizioni analitiche che debbono verificarsi affinchè una data retta sia asse di simmetria per una data curva.

6. Per mezzo delle osservazioni seguenti si determinano queste condizioni indipendentemente dalla distinzione fatta nel N° precedente relativamente all'essere pari, o dispari l'ordine della curva.

La retta data sia

$$y = m x + n$$

riferita come la curva a un sistema cartesiano ortogonale. Cambiamo sistema di coord. prendendo la retta precedente per asse delle x e una perpendicolare a essa passante per il punto $(o\ ,\ n)$ per asse delle y: se (dopo fatto questo cambiamento) annulliamo tutti i coefficienti dei termini che contengono la nuova y a grado dispari, è certo che il nuovo asse delle x, cioè la retta data sarà una retta di simmetria.

Le formole di trasformaz. delle coord. sarebbero:

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left\{ X - (Y+n)m \right\}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left\{ m X + Y + n \right\}$$

ma per i calcoli da farsi val meglio immaginare l'equazione della curva scritta in coordinate omogenee $x_1; x_2; x_3$ essendo il triangolo fondamentale costituito dall'antico sistema cartesiano e dalla retta all'infinito: allora in luogo della trasformazione precedente si può assumere l'altra

$$x_1 = y_1 - m\, y_2 - m\, n\, y_2$$

$$x_2 = m\, y_1 + y_2 + n\, y_3$$

$$x_3 = y_3$$

La legge secondo la quale si possono trovare i coefficienti della equazione trasformata, per mezzo dei coefficienti della equazione primitiva e di quelli della sostituzione lineare è semplicissima e consiste in questo:

« *Se si effettua la sostituzione lineare*

$$x_i = \sum_1^n a_i^{(k)} y_k$$

su di una ennaria qualunque $a_x{}^r = 0$ *di grado r la forma trasformata si ottiene dalla primitiva cambiando ogni coefficiente simbolico,*

$$a_j$$

nel coefficiente simbolico corrispondente:

$$a_{\alpha^{(i)}}$$

Basterà dunque nel nostro caso speciale [di una ternaria] valersi di questa legge, osservando che si ha

$$a_1^{(1)} = a_2^{(2)} = a_3^{(3)} = 1 \quad ; \quad a_3^{(1)} = a_3^{(2)} = 0$$

$$a_1^{(3)} = -m\,n \;;\; a_2^{(3)} = n \quad ; \quad a_1^{(2)} = -a_2^{(1)} = -m$$

Una volta ottenuta l'equazione trasformata, bisognerà annullare i coef-

ficienti dei termini che contengono la y_2 a potenze dispari. Se n è il grado della curva si hanno così

$$\frac{(n+1)^2}{4}$$

ovvero

$$\frac{n(n+2)}{4}$$

relazioni a seconda che n è dispari, o pari. Queste relazioni contengono linearmente i coefficienti della curva; d'altra parte questi coefficienti sono:

$$\frac{n(n+3)}{2}$$

dunque:

« *Presa una retta qualunque del piano, tutte le curve di ordine n simmetriche rispetto a questa retta costituiscono un sistema lineare:*

$$\infty^{\frac{n^2+4n-2}{4}} \quad , \text{ ovvero } \infty^{\frac{n^2+4n-1}{4}}$$

a seconda che n è pari, o dispari ».

Curve che posseggono più di un asse di simmetria.

7. Dopo aver determinato le condizioni analitiche che si richiedono perche una data retta sia asse di simmetria per una curva, si affaccia naturalmente la questione relativa al numero degli assi che una curva può possedere. E questa questione si presenta e si risolve in modi abbastanza diversi a seconda che si riferisce a una curva di grado pari, o a una curva di grado dispari. Prima però di fare questa distinzione è necessario dare un limite massimo per questo numero, senza però intendere di dimostrare, almeno per ora, che questo limite massimo possa essere effettivamente raggiunto.

Questo limite è uguale al grado della curva sia esso pari, o dispari e solamente per una certa classe di curve di ordine pari le considerazioni seguenti non dànno resultato decisivo.

Che una curva di grado dispari non possa possedere più di n assi

di simmetria risulta subito da ciò che si disse al N° 4; ogni asse porta l'esistenza di un flesso reale all'infinito; se la curva possedesse più di n assi, avrebbe più di n punti all'infinito e si spezzerebbe.

Se poi n è un numero pari, osservammo già al N° 4. che ogni asse di simmetria è un diametro perpendicolare al relativo sistema di curve. Vediamo come si può analiticamente esprimere questa condizione.

L'equazione della curva può scriversi sotto la forma

$$\begin{aligned}
& a_{0,n}\, y^n + a_{1,n-1}\, y^{n-1} + a_{2,n-2}\, y^{n-2} + \ldots + a_{n,0} + \\
& + x \left\{ a_{0,n-1}\, y^{n-1} + a_{1,n-2}\, y^{n-2} + a_{2,n-3}\, y^{n-3} + \ldots \right\} + \\
& + x^2 \left\{ a_{0,n-2}\, y^{n-2} + a_{1,n-3}\, y^{n-3} + a_{2,n-4}\, y^{n-4} + \ldots \right\} + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + x^{n-2} \left\{ a_{0,2}\, y^2 + a_{1,1}\, y + a_{2,0} \right\} + \\
& + x^{n-1} \left\{ a_{0,1}\, y + a_{1,0} \right\} + \\
& + x^n a_{0,0} = 0
\end{aligned}$$

dove n è pari.

Il coefficiente angolare del diametro coniugato a una direzione θ è dato da

$$\begin{aligned}
& a_{0,n-1} (\operatorname{tg} \theta)^{n-1} + 2a_{0,n-2} (\operatorname{tg} \theta)^{n-2} + 3\, a_{0,n-3} (\operatorname{tg} \theta)^{n-3} + \ldots \\
& + (n-2)\, a_{0,2} \operatorname{tg}^2 \theta + (n-1)\, a_{0,1} \operatorname{tg} \theta + n\, a_{0,0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& n\, a_{0,n} (\operatorname{tg} \theta)^{n-1} + (n-1)\, a_{0,n-1} (\operatorname{tg} \theta)^{n-2} + \ldots\ldots \\
& \quad + 3\, a_{0,3} \operatorname{tg}^2 \theta + 2\, a_{0,2} \operatorname{tg} \theta + a_{0,1}
\end{aligned}$$

Affinchè questo diametro sia perpendicolare al sistema di corde cui è relativo basta che il precedente rapporto sia uguale a $\frac{1}{\operatorname{tg} \theta}$:

Si ottiene allora per tg θ la seguente equazione di grado n.

$$\begin{aligned}
& a_{0,n-1} (\operatorname{tg} \theta)^n + (\operatorname{tg} \theta)^{n-1} \left\{ 2\, a_{0,n-2} - n\, a_{0,n} \right\} + \\
& + (\operatorname{tg} \theta)^{n-2} \left\{ 3\, a_{0,n-2} - (n-1)\, a_{0,n-1} \right\} + \\
& + (\operatorname{tg} \theta)^{n-3} \left\{ 4\, a_{0,n-4} - (n-2)\, a_{0,n-2} \right\} + \ldots\ldots + \\
& + \operatorname{tg}^5 \theta \left\{ (n-4) a_{0,4} - 6 a_{0,6} \right\} \theta + \operatorname{tg}^4 \left\{ (n-3) a_{0,3} - 5 a_{0,5} \right. + \\
& + \operatorname{tg}^3 \theta \left\{ (n-2)\, a_{0,2} - 4\, a_{0,4} \right\} + \\
& + \operatorname{tg}^2 \theta \left\{ (n-1) a_{0,1} - 3\, a_{0,2} \right\} + \operatorname{tg} \theta \left\{ n\, a_{0,0} - 2\, a_{0,2} \right\} - a_{0,1} = 0
\end{aligned}$$

Resulta intanto che « *Esistono n diametri perpendicolari ai loro corrispondenti sistemi di corde* ».

Se poi la curva è simmetrica rispetto all'asse delle y ed è di grado pari, allora si ha

$$a_{0,n-1} = a_{0,n-3} = a_{0,n-5} = \ldots = a_{0,5} = a_{0,3} = a_{0,1} = 0$$

Se inoltre si esige che debbano esistere più di n diametri perpendicolari ai corrispondenti sistemi di corde, annullando identicamente la equazione precedente si trova:

$$a_{0,n-2} = \left(\frac{n}{2}\right)_1 a_{0,n} \; ; \; a_{0,n-4} = \left(\frac{n}{2}\right)_2 a_{0,n} \; ; \; a_{0,n-6} = \left(\frac{n}{2}\right)_3 a_{0,n} \; ; \ldots$$

In questo caso la binaria di grado n in x e y che comparisce nell'equazione della curva è la potenza $\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{esima}}$ di

$$x^2 + y^2$$

« *La curva tocca* $\frac{n}{2}$ *volte la retta all'infinito nei punti ciclici del piano* ».

All'infuori dunque di queste curve speciali (e che noi per brevità chiameremo *ipercicliche*) siamo sicuri che anche le curve di grado pari non possono possedere un numero di assi superiore al loro grado.

Dimostreremo poi in seguito come effettivamente questo limite massimo possa essere sempre raggiunto senza che la curva si spezzi.

8. Una conseguenza del teorema ora dimostrato è anche la seguente: « ammesso che una curva possa possedere più di due assi, essi debbono passare tutti per lo stesso punto disponendosi regolarmente intorno ad esso come si dispongono i raggi di un cerchio che dal centro vanno ai vertici di un poligono regolare inscritto nel cerchio ». E infatti supponiamo pure che una curva possegga un certo numero di assi, per esempio tre, non passanti per uno stesso punto e costituenti quindi un triangolo. Facciamo compiere a questo triangolo una rotazione attorno a un lato, i lati del nuovo triangolo saranno nuovi assi della curva; ora di queste rotazioni se ne possono compiere un numero infinito e non solamente rispetto a un solo lato del triangolo primitivo; la curva verrebbe quindi a possedere un numero infinito di assi che sarebbero tutte le rette di una rete parallelogrammica distesa sul piano; e questo il teorema del N precedente esclude.

Se dunque arriveremo a dimostrare che una curva possiede più di due assi; ne conseguirà che essi dovranno avere un punto comune. Di più dovranno disporsi simmetricamente rispetto a questo punto altrimenti una rotazione intorno a uno qualunque di essi ne origenerebbe sempre dei nuovi.

Così, ad esempio, se una curva possiede due assi soli di simmetria, essi saranno perpendicolari, se ne possiede tre saranno inclinati di 60°; se ne possiede n saranno inclinati l'uno sul consecutivo di un angolo uguale a $\frac{\pi}{n}$.

Curve di grado dispari.

9. Noi abbiamo già trattato il problema in questo caso speciale al N° 4. da un lato puramente proiettivo, ci occorre ora di riguardarlo sotto un aspetto essenzialmente diverso. È dal confronto dei resultati già ottenuti al N° 4. con quelli che ora otterremo che si può giungere a risolvere completamente la questione.

Abbiasi una curva di grado dispari simmetrica rispetto all'asse delle y. La sua equazione potrà essere scritta,

$$\begin{aligned}
& a_{0,n}\, y^n + a_{1,n-1}\, y^{n-1} + \ldots\ldots + \\
& + x^2 [\, a_{0,n-2}\, y^{n-2} + a_{1,n-3}\, y^{n-3} \ldots\ldots] + \\
& + x^4 [\, a_{0,n-4}\, y^{n-4} + a_{1,n-5}\, y^{n-5} + \ldots\ldots] + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; + \\
& + x^{n-5} [\, a_{0,5}\, y^5 + a_{1,4}\, y^4 + \ldots\ldots] + \\
& + x^{n-3} [\, a_{0,3}\, y^3 + a_{1,2}\, y^2 + \ldots\ldots\ldots] + \\
& + x^{n-1} [\, a_{0,1}\, y + a_{1,0}] = 0
\end{aligned}$$

dove nè un numero dispari.

Dalla forma di questa equazione risulta intanto che una curva di ordine dispari non può possedere un numero pari di assi reali giacchè in tal caso si richiederebbe che essa fosse simmetrica rispetto a due rette ortogonali; ma allora nella equazione precedente sarebbero certamente nulli i cofficienti dei termini che contengono potenze dispari di y e in particolare

$$a_{0,n} = 0$$

La curva si spezzerebbe allora nella retta all'infinito e in una curva di grado pari simmetrica rispetto a due rette perpendicolari.

Dunque per le curve di grado dispari la questione è ridotta ad esaminare se possono possedere: 3; 5; 7; 9 .... n assi di simmetria essendo n il grado della curva.

10. Facciamo perciò compiere al sistema cartesiano, ortogonale cui è riferita la curva, una rotazione di ampiezza θ mantenendo fissa l'origine ed esprimiamo analiticamente le condizioni che debbono essere verificate affinchè il nuovo asse delle y sia ancora retta di simmetria. Queste condizioni evidentemente si ottengono annullando i coefficienti dei termini che contengono la x a grado dispari, dopo che si è, sulla equazione, effettuata la trasformazione

$$x = X \cos\theta - Y \operatorname{sen}\theta$$
$$y = X \operatorname{sen}\theta + Y \cos\theta$$

Ora, l'annullarsi dei coefficienti di grado n complessivo in x e y e di grado dispari in x ci fornisce $\frac{n+1}{2}$ relazioni che contengono omogeneamente e linearmente le $\frac{n+1}{2}$:

$$a_{0,n}\ ;\ a_{0,n-2}\ ;\ a_{0,n-4}\ ;\ \ldots\ldots\ a_{0,5}\ ;\ a_{0,3}\ ;\ a_{0,1}$$

Così l'annullarsi dei coefficienti dei termini di grado $n-2$ complessivo in x e y e di grado dispari in x, ci fornisce $\frac{n-1}{2}$ relazioni che legano linearmente e omogeneamente le $\frac{n-1}{2}$

$$a_{2,n-2}\ ;\ a_{2,n-4}\ ;\ a_{2,n-6}\ ;\ \ldots\ldots\ a_{2,3}\ ;\ a_{2,1}$$

E in generale l'annullarsi dei coefficienti dei termini di grado $n-2m$ complessivo in x e y e di grado dispari in x, ci fornisce $\frac{n-2m+1}{2}$ relazioni lineari e omogenee nelle $\frac{n-2m+1}{2}$:

$$a_{2m,\,n-2m}\ ;\ a_{2m,\,n-2m-2}\ ;\ \ldots\ldots\ a_{2m,\,3}\ ;\ a_{2m,\,1}$$

Questi diversi gruppi di relazioni presentano una certa analogìa fra di loro perchè in ognuno il numero delle equazioni è uguale al numero delle variabili.

In ciascuno di questi altri gruppi di relazioni, che ora esamineremo, il numero delle variabili supera di una unità il numero delle equazioni.

E infatti annullando i coefficienti dei termini di grado complessivo $n-1$ in x e y e di grado dispari in x si ottengono $\frac{n-1}{2}$ relazioni lineari e omogenee nelle $\frac{n+1}{2}$:

$$a_{1,n-1}\ ;\ a_{1,n-3}\ ;\ a_{1,n-5}\ ;\ \ldots\ a_{1,4}\ ;\ a_{1,2}\ ;\ a_{1,0}$$

Similmente annullando i coefficienti dei termini di grado complessivo $n-3$ in x e y e di grado dispari in x si ottengono $\frac{n-3}{2}$ relazioni lineari e omogenee nelle $\frac{n-1}{2}$:

$$a_{3,n-3}\ :\ a_{3,n-5}\ ;\ \ldots\ a_{3,2}\ ;\ a_{3,0}$$

e in generale annullando i coefficienti dei termini di grado complessivo $n-2m-1$ in x e y e di grado dispari in x otteniamo $\frac{n-2m-1}{2}$ relazioni lineari e omogene nelle $\frac{n-2m+1}{2}$:

$$a_{2m+1,n-2m-1}\ ;\ a_{2m+1,n-2m-3}\ ;\ \ldots\ a_{2m+1,2}\ ;\ a_{2m+1,0}$$

Dunque tutte le relazioni che provengono dall'annullamento dei coefficienti dei termini di grado dispari in x possono distinguersi in queste due specie di gruppi. Per la coesistenza delle equazioni di ogni gruppo della 1.ª specie, occorre una condizione per l'angolo θ che si ottiene annullando la resultante corrispondente; per la coesistenza delle equazioni di ogni gruppo di seconda specie non si richiede nessuna condizione analitica potendosi da ogni gruppo ricavare il valore di una variabile espresso per mezzo di θ e di una qualunque di esse.

Ci occorrerebbe dunque adesso costruire tutte le resultanti dei gruppi di 1.ª specie ed esaminare se possono avsre soluzioni comuni.

11. Per abbreviare questo calcolo basterà tener conto dei resultati ottenuti al N⁰ 4. Vedremo allora che sarà sufficiente studiare solamente il primo dei gruppi di 1.ª specie e cioè le $\frac{n+1}{2}$ relazioni lineari omogene nelle $\frac{n+1}{2}$:

$$a_{0,n}\ ;\ a_{0,n-2}\ ;\ a_{0,n-4}\ ;\ \ldots\ a_{0,5}\ ;\ a_{0,3}\ ;\ a_{0,1}$$

Se s'indicano con:

$$C_{xy^{n-1}}\ ;\ C_{x^3y^{n-3}}\ ;\ \ldots\ C_{x^n}$$

i primi membri di queste relazioni; esse possono compendiarsi nell'unica seguente:

$$\begin{aligned} C_{xty^{n-t}} = \sum_{p=0}^{p=n-1} a_{0,n-p} \Big\{ & (n-p)_t + (\cos\theta)^{n-p-t}(\operatorname{sen}\theta)^{p+1-1} - \\ & - p_1 (n-p)_{t-1} (\cos\theta)^{n-p-t+2} (\operatorname{sen}\theta)^{p+t-3} + \\ & + p_2 (n-p)_{t-2} (\cos\theta)^{n-p-t+4} (\operatorname{sen}\theta)^{p+t-5} - \\ & - p_3 (n+p)_{t-3} (\cos\theta)^{n-p-t+6} (\operatorname{sen}\theta)^{p+t-7} + \ldots\ldots + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots - p_t (\cos\theta)^{n-p+t} (\operatorname{sen}\theta)^{p-t-1} \Big\} = 0 \end{aligned}$$

dove t è dispari e p è pari.

Si trova una facile interpretazione geometrica di due di queste relazioni: di quella che si ottiene per $t = 1$ e dell'altra per $t = n$.

La 1.ª è

$$\begin{aligned} C_{xy^{n-1}} = {} & n\, a_{0,n} (\cos\theta)^{n-1} + \\ & + a_{0,n-2} \Big[(n-2) \operatorname{sen}^2\theta (\cos\theta)^{n-3} - 2 (\cos\theta)^{n-1} \Big] + \\ & + a_{0,n-4} \Big[(n-4) \operatorname{sen}^4\theta (\cos\theta)^{n-5} - 4 (\cos\theta)^{n-3} \operatorname{sen}^2\theta \Big] + \\ & + a_{0,n-6} \Big[(n-6) \operatorname{sen}^6\theta (\cos\theta)^{n-7} - 6 (\cos\theta)^{n-5} \operatorname{sen}^4\theta \Big] + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + a_{0,3} \Big[3 (\operatorname{sen}\theta)^{n-3} \cos^2\theta - (n-3) \cos^4\theta (\operatorname{sen}\theta)^{n-5} \Big] + \\ & + a_{0,1} \Big[(\operatorname{sen}\theta)^{n-1} - (n-1) \cos^2\theta (\operatorname{sen}\theta)^{n-3} \Big] = 0 \end{aligned}$$

Questa coincide con quella ottenuta al N° 7, quando sia particolarizzata a una curva simmetrica rispetto all'asse y. Essa ci dice dunque che esistono altri $(n-1)$ diametri (oltre l'asse delle y) perpendicolari ai corrispondenti sistemi di corde e questa è certo una delle condizioni analitiche a cui devono soddisfare gli assi.

La 2.ª è

$$C_{x^n} = a_{0,n}(\text{sen}\,\theta)^{n-1} + a_{0,n-2}(\text{sen}\,\theta)^{n-3}\cos^2\theta +$$

$$+ a_{0,n-4}(\text{sen}\,\theta)^{n-5}\cos^4\theta + \ldots\ldots$$

$$+ \ldots\ldots + a_{0,1}(\cos\theta)^{n-1} = 0$$

essa ci esprime che gli $n-1$ assi (se esistono), diversi dall'asse delle y, debbono passare per gli $n-1$ punti coniugati armonici degli $n-1$ punti all'infinito della curva rispetto ai punti ciclici del piano; in altre parole, se gli assi esistono, debbono essere perpendicolari agli asintoti della curva.

12. Prima di studiare la risultante delle precedenti equazioni ci occorre di esprimere analiticamente i resultati delle considerazioni fatte al N° 4.

Secondo quei risultati, se una curva deve possedere n assi di simmetria, le coniche polari degli n punti all'infinito della curva debbono spezzarsi in n coppie di rette ortogonali.

Sia

$$U_x = 0$$

l'equazione della curva scritta in coord. omogenee; la conica polare di un punto $(y_1\,;\,y_2\,;\,y_3)$ è:

$$x_1^2\frac{\partial^2 U_y}{\partial y_1^2} + x_2^2\frac{\partial^2 U_y}{\partial y_2^2} + x_3^2\frac{\partial^2 U_y}{\partial y_3^2} + 2\,x_1\,x_1\frac{\partial^2 U_y}{\partial y_1 \partial y_2} + 2\,x_2\,x_3\frac{\partial^2 U_y}{\partial y_2 \partial y_3} +$$

$$+ 2\,x_3\,x_2\frac{\partial^2 U_y}{\partial y_3 \partial y_1} = 0$$

Se il punto $(y_1\,,\,y_2\,,\,y_3)$ deve appartenere contemporaneamente alla curva e alla sua hessiana, le due rette in cui si spezza la conica precedente sono:

$$x_1 \left\{ \frac{\partial^2 U_x}{\partial y_1 \partial y_2} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^2 U_y}{\partial y_1 \partial y_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 U_y}{\partial y_1^2} \frac{\partial^2 U_y}{\partial y_2^2}} + x_2 \frac{\partial^3 U_y}{\partial y_2^2} + \right.$$

$$+ x_3 \left\{ \frac{\partial^2 U_y}{\partial y_2 \partial y_3} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^2 U_y}{\partial y_2 \partial y_3}\right)^2 - \frac{\partial^2 U_y}{\partial y_2^2} \frac{\partial^2 U_y}{\partial y_3^2}} = 0 .\right.$$

Se il punto (y_1 , y_2 , y_3) deve essere all'infinito e le due rette precedenti debbono essere ortogonali dovrà aversi :

$$\left[\frac{\partial^2 U_y}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y_2^2} \right]_{y_3 = 0} = 0 .$$

Applicando questa condizione all'equazione della curva, sotto la forma data al N° 9, si trova :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} y_1^{n-2} \left[n(n-1) a_{0,n} + 2 a_{0,n-2} \right] + \\ + y_1^{n-4} y_2^2 \left[(n-2)(n-3) a_{0,n-2} + 3 \,.\, 4 \, a_{0,n-4} \right] + \\ y_1^{n-6} y_2^4 \left[(n-4)(n-5) a_{0,n-4} + 5 \,.\, 6 \, a_{0,n-6} \right] + \\ \quad + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + \\ + y_1^3 y_2^{n-5} \left[5 \,.\, 4 \, a_{0,5} + (n-3)(n-4) a_{0,3} \right] + \\ + y_1 y_2^{n-3} \left[3 \,.\, 2 \, a_{0,3} + (n-1)(n-2) a_{0,1} \right] = 0 \end{array} \right.$$

Essa è verificata per $y_1 = 0$ (com'è naturale perchè la curva possiede già l'asse delle y per asse di simmetria): all'infuori di questa soluzione si hanno altri $n - 3$ valori del rapporto $\frac{y_1}{y_2}$ che ci individuano $n - 3$ punti all'infinito le cui coniche polari si spezzano in coppie di rette ortogonali.

Tutto questo però nell'ipotesi che il punto $(y_1 , y_2 , 0)$ verifichi contemporaneamente l'equazione della curva e dell'hessiana.

13. L'equazione (1) del N° precedente è verificata identicamente quando sia :

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} a_{0,n-2} = - n_2 a_{0,n} \,;\; a_{0,n-4} = n_4 a_{0,n} \,;\; a_{0,n-6} = - n_6 a_{0,n} \,;\; \ldots \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{0,3} = (-1)^{\frac{n-3}{2}} n_3 a_{0,n} \quad ; \quad a_{0,1} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n_1 a_{0,n} \end{array} \right.$$

Ma la (1) presuppone già per y_1, y_2 non dei valori qualunque, o meglio non delle variabili ordinarie, ma valori tali da annullare contemporaneamente, per $x_3 = 0$, l'equazione della curva e dell'hessiana: dunque, allorchè saranno soddisfatte le relazioni ora trovate e la curva data avrà i suoi punti all'infinito comuni con l'hessiana, le coniche polari di questi n punti si spezzeranno in n coppie di rette ortogonali, cioè la curva possiederà n assi di simmetria.

Però queste condizioni che si richiedono per i coefficienti

$$a_{0,n} \; ; \; a_{0,n-2} \; ; \; \ldots\ldots \; a_{0,3} \; ; \; a_{0,1}$$

a prima vista sembrano troppe giacchè oltre le (A), che ne lasciano uno solo indipendente, occorrono anche le altre che si ottengono esprimendo che i punti all'infinito della curva appartengono anche all'hessiana, onde il problema della determinazione degli n assi di simmetria sembrerebbe impossibile. Ma non è così perchè ora noi dimostreremo che le sole relazioni (A) fra i coefficienti:

$$a_{0,n} \; ; \; a_{0,n-2} \; ; \; \ldots\ldots \; a_{0,3} \; ; \; a_{0,1}$$

sono sufficienti: in altre parole dimostreremo che dalle relazioni (A) consegue anche che i punti all'infinito della curva appartengono pure all'hessiana; che finalmente queste relazioni (A) sono quelle sole che è necessario di porre fra i coefficienti suddetti affinchè la curva possegga n assi di simmetria.

14. Per convincersene, sostituiamo nelle $\frac{n+1}{2}$ equazioni:

$$C_{x^t y^{n-t}} = 0 \; ; \; (t = 1 \; ; \; 3 \; ; \; 5 \; ; \; \ldots . \; n)$$

del N° 11. i valori dati dalle (A).

Il coefficiente di

$$(\text{sen } \theta)^{p+t-1} \, (\cos \theta)^{n-p-t}$$

dopo eseguita la suddetta sostituzione nella:

$$C_{x^t \, y^{n-t}} = 0$$

è:

$$(-1)^{\frac{p}{2}} \Big((n-p)_t n_p + (p+2) \, (n-p-2)_{t-1} \, n_{p+2} +$$

$$+ (p+4)_2 (n-p-4)_{t-2} \, n_{p+4} + \ldots + (p+2t)_t \, n_{p+2t} \Big) =$$

$$= (-1)^{\frac{p}{2}} \Big((n-t)_p + t(n-t)_{p+1} + t_3 (n-t)_{p+2} + \ldots . +$$

$$+ t(-n)_{p+t-1} + (n-t) n_{2p+t} \Big)$$

ma, per una proprietà fondamentale dei coefficienti binomiali per cui si ha in generale:

$$(\alpha+\beta)_n = \alpha_n + \alpha_{n-1}\,\beta + \alpha_{n-2}\,\beta_2 + \ldots\ldots + \beta_n$$

resulta:

$$(n-t)_p + t(n-t)_{p+1} + t_2(n-t)_{p+2} + \ldots + (n-t)_{p+t} = n_{p+t},$$

onde il coefffciente cercato si riduce a:

$$(-1)^{\frac{p}{2}}\; n_t\, n_{p+t}$$

per cui, a meno del fattore comune a tutti i termini n_t, si ha:

$$C_{x^t\, y^{n-t}} = (\operatorname{tg}\theta)^{n-1} - n_2\,(\operatorname{tg}\theta)^{n-3} +$$

$$+ n_4(\operatorname{tg}\theta)^{n-5} + \ldots\ldots (-1)^{\frac{n-3}{2}} n_3 \operatorname{tg}^2\theta + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n_1 = 0$$

la quale è indipendente da t contiene n e θ.

Se ne conclude dunque che le relazioni (A) fra i coefficienti:

$$a_{0,n}\ ;\ a_{0,n-2}\ ;\ \ldots\ldots\ a_{0,3}\ ;\ a_{0,1}$$

riducono a una medesima equazione le $\frac{n+1}{2}$ equazioni:

$$C_{x^t\, y^{n-t}} = 0$$

e questa equazione non contiene più traccia dei coefficienti della equazione della curva, ma contiene semplicemente θ ed n. Essa quindi deve essere un fattore della resultante delle equazioni:

$$C_{x^t\, y^{n-t}} = 0$$

e agli n valori di θ che la soddisfano debbono corrispondere n assi di simmetria per la curva. Se questi assi saranno tutti reali (per le osservazioni fatte al N° 8) essi debbono essere disposti simmetricamente rispetto al loro punto comune.

15. Che ciò avvenga effettivamente, si rileva determinando le radici della equazione già trovata nel N°. precedente e il cui primo membro indicheremo con K_{n-1}

$$(B)\quad \begin{cases} K_{n-1} = (\operatorname{tg}\theta)^{n-1} - n_2(\operatorname{tg}\theta)^{n-3} + n_4(\operatorname{tg}\theta)^{n-5} - \ldots\ldots + \\ \qquad + (-1)^{\frac{n-3}{2}} n_3 \operatorname{tg}^2\theta + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n_1 = 0\,. \end{cases}$$

Infatti dalla formula di *Moivre*,

$$\cos n\,x + i \operatorname{sen} n\,x = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^n$$

nell'ipotesi che n sia dispari, uguagliando i coefficienti dell'immaginario di ambo i membri si trova:

$$\operatorname{sen} n\,x = n_1(\cos x)^{n-1} \operatorname{sen} x - n_3(\cos x)^{n-3} \operatorname{sen}^3 x +$$

$$+ n_5 (\operatorname{sen} x)^{n-5} \operatorname{sen}^5 x + \ldots\ldots (-1)^{\frac{n-1}{2}} (\operatorname{sen} x)^n$$

facendo $x = \frac{\pi}{n}$ e dividendo quindi per $\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$ resulta:

$$\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}\right)^{n-1} - n_2 \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}\right)^{n-3} + \ldots\ldots$$

$$+ \ldots\ldots (-1)^{\frac{n-3}{2}} n_4 \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}\right)^2 + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n_1 = 0 .$$

Dunque la (B) ammette le radici

$$\frac{\pi}{n} ; \frac{2\pi}{n} ; \frac{3\pi}{n} ; \ldots\ldots \frac{(n-1)\pi}{n}$$

cioè le relazioni (A) fra i coefficienti

$$a_{0,n} ; a_{0,n-2} ; \ldots\ldots a_{0,3} ; a_{0,1}$$

sono veramente tutte e le sole che occorre stabilire fra i detti coefficienti perchè la curva possegga n assi di simmetria.

16. Non ci restano ora a trovare che le relazioni fra gli altri coefficienti che compariscono nell'equazione della curva data al N° 9. per completare la dimostrazione relativa alla possibilità dell'esistenza di curve di grado dispari con un numero di assi reali uguale al loro grado.

Queste relazioni che mancano si ottengono, con grande facilità, dietro le considerazioni seguenti.

La curva che si ottiene sopprimendo nella equazione del N° 9. le

$$a_{0,n} ; a_{0,n-2} ; \ldots\ldots ; a_{0,3} ; a_{0,1}$$

è di grado pari $n-1$ e deve possedere n assi di simmetria; uno più del suo grado e quindi (N° 7) è una curva iperciclica: per conseguenza si ha:

$$(1) ; a_{1,n-3} = \left(\frac{n-1}{2}\right)_1 a_{1,n-1} ; a_{1,n-5} = \left(\frac{n-1}{2}\right)_2 a_{1,n-1} ; \ldots .$$

La curva che si ottiene opprimendo oltre le

$$a_{0,n} ; a_{0,n-2} ; \ldots\ldots a_{0,3} ; a_{0,1}$$

anche le

$$a_{1,n-1} ; a_{1,n-3} ; \ldots\ldots a_{1,2} ; a_{1,0}$$

è di grado dispari $n-2$ e deve ammettere n assi di simmetria; dunque (N° 7) essa si spezza nella retta all'infinito e in una curva di grado $n-3$: segue perciò

$$a_{2,n-2} = a_{2,n-4} = a_{2,n-6} = \ldots\ldots = 0 .$$

Procedendo a sopprimere nuove e analoghe serie successive di coefficienti, si conclude che tutti i coefficienti il cui primo indice è pari (purchè non sia zero) si annullano; tutti i coefficienti il cui 1° indice è dispari (a gruppi, a gruppi quelli che hanno uguali il 1° indice) sono legati da relazioni analoghe alle (1); per cui riassumendo si ha

$$a_{0,n-p} = (-1)^{\frac{p}{2}} n_p \, a_{0,n} \quad ; \quad (p=2\,,\,4\,,\,\ldots\,n-1)$$

$$a_{2r+1\,,\,n-(2r+1+2s)} = \binom{n-2r-1}{2}_s a_{2r+1\,,\,n-(2r+1)}$$

$$a_{2r\,,\,n-2r-2s} = 0 \qquad \left(r \lessgtr 0\right)$$

o altrimenti:

« *L'equazione di una curva di grado n dispari simmetrica rispetto a n assi reali è della forma*:

$$a_{0,n} \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^{\frac{p}{2}} n_p \, x^p \, y^{n-p} +$$

$$+ \sum_{r=0}^{r=\frac{n-1}{2}} (x^2+y^2)^{\frac{n-2r-1}{2}} a_{2r+1\,,\,n-r-1} = 0$$

dove p è pari »

« *Le curve di grado n dispari simmetriche rispetto agli stessi n assi reali sono*

$$\frac{n+1}{2} \text{ »} .$$

$$\infty$$

Dunque la questione propostaci al principio di questo N° è così definitivamente risolta, nè può nascere il sospetto che la curva rappresentata dalla equazione precedente possa spezzarsi. Se ciò avvenisse, la retta all'infinito dovrebbe farne parte, ciò che l'equazione stessa esclude.

17. Si tratta ora di esaminare se la nostra curva può possedere un numero inferiore ad n di assi reali.

Io dico che essa può possedere $n-2$ assi reali disposti simmetricamente e passanti per un medesimo punto, non solo, ma oltre questi può possederne

altri due immaginari coniugati che dal punto comune agli assi reali vanno ai punti ciclici del piano.

E infatti l'equazione di grado $n-1$:

$$K_{n-3} = \Big\{ (\operatorname{tg}\theta)^{n-3} - (n-2)_2 (\operatorname{tg}\theta)^{n-5} +$$
$$+ (n-2)_4 (\operatorname{tg}\theta)^{n-7} - (n-2)_6 (\operatorname{tg}\theta)^{n-9} + \ldots\ldots +$$
$$+ \ldots\ldots (-1)^{\frac{n-3}{2}} (n-2)_1 \Big\} \Big\{ \operatorname{tg}_2 \theta + 1 \Big\} = 0$$

ammette le $n-1$ radici:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{n-2}\ ;\ \operatorname{tg}\frac{2\pi}{n-2}\ ;\ \ldots\ldots\ \operatorname{tg}\frac{(n-3)\pi}{n-2}\ ;\ i\ ;\ -i\,.$$

Essa può anche scriversi sotto la forma:

$$(\operatorname{tg}\theta)^{n-2} (\operatorname{tg}\theta)^{n-3} \Big[1 - (n-2)_2 \Big] +$$
$$(\operatorname{tg}\theta)^{n-5} \Big[(n-2)_4 - (n-2)_2 \Big] + (\operatorname{tg}\theta)^{n-7} \Big[(n-2)_4 - (n-2)_6 \Big] +$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad +$$
$$+ (-1)^{\frac{n-5}{2}} \operatorname{tg}^4\theta \Big[(n-2)_3 - (n-2)_5 \Big] +$$
$$+ (-1)^{\frac{n-3}{2}} \operatorname{tg}^2\theta \Big[(n-2)_1 - (n-2)_3 \Big] + (-1^{\frac{n-3}{2}} (n-2)_1 = 0\,.$$

Basterà dunque dimostrare che, se si prende in generale

$$\text{(C)} \quad ; \quad a_{0,n-p} = (-1)^{\frac{p}{2}} \Big\{ (n-2)_p - (n-2)_{p-2} \Big\} a_{0,n}$$

dove p è pari, tutte le relazioni

$$C_{x^t y^{n-t}} = 0 \qquad (t \text{ dispari})$$

vengono a coincidere in una sola: nella

$$K_{n-3} = 0$$

Per convincersene, calcoliamo il coefficiente di

$$(\operatorname{sen}\theta)^{p+t-1} (\cos\theta)^{n-p-t}$$

nella

$$C_{x^t y^{n-t}} = 0$$

dopo che vi si sono eseguite le sostituzioni (D). — Questo coefficiente è:

$$Y=(n-2)_{p-2}(n-p)_t+(n-2)_p\left\{(p+2)(n-p-2_{t-1}-(n-p)_t\right\}+$$

$$+(n-2)_{p+2}\left\{(p+4)_2(n-p-4)_{t-2}-(p+2)(n-p-2)_{t-1}\right\}+$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad +$$

$$+(n-2)^{p+2s}\left\{(p+2s+2)_{s+1}(n-p-2s-2)_{t-s-1}-\right.$$

$$\left.-(p+2s)^s(n-p-2s)_{t-s}\right\}+\ldots\ldots$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots-(n-2)^{p+2t}(p+2t)_t.$$

Ora il coefficiente di $(\operatorname{tg}\theta)^{p+t-1}$ nella $K_{n-5}=0$ è (a meno del segno)

$$(n-2)^{p+t-2}-(n-2)_{p+t}=Y'$$

tutto dunque si riduce a dimostrare che Y è uguale a Y', o almeno che ne differisce per un fattore indipendente da p.
Dimostreremo infatti che è

$$Y=Y'\,Y''$$

dove

$$Y''=(n-2)_{t-2}-(n-2)_t$$

Sviluppando il prodotto $Y'\,Y''$ è:

$$Y'\,Y''=(n-2)_{p+t-2}(n-2)_{t-2}-(n-2)_{p+t-5}(n-2)_t-$$

$$-(n-2)_{p+t}(n-2)_{t-2}+(n-2)_{p+t}(n-2)_t\,,$$

ma per l'identità:

$$(n-p)_t n_p+(p+2)(n-p-2)_{t+1}n_{p+2}+(p+4)_2(n-p-4)_{t-2}n_{p+4}+\ldots\ldots+$$

$$+(p+2t)_t n_{p+2t}=n_t n_{p+t}$$

dimostrata al N⁰ 14 e attribuendo convenienti valori a n, p, t si ottiene:

$$(n-2)_{p+t-2}(n-2)_{t-2}=(n-p-2)_{t-2}(n-2)_p+(p+2)(n-p-4)_{t-3}(n-2)_{p+2}+$$

$$+(p+4)_2(n-p-6)_{t-4}(n-2)_{p+4}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+(n-2)_{p+t-2}(n-2)_t=(n-p)_t(n-2)_{p-2}+p(n-p-2)_{t-1}(n-2)_p+$$

$$+(p+2)_2(n-p-4)_{t-2}(n-2)_{p+2}+(p+4)_3(n-p-6)_{t-3}(n-2)_{p+4}+$$

$$+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$n-2)_{p+t}(n-2)_{t-2}=(n-p-4)_{t-2}(n-2)_{p+2}+(p+4)(n-p-6)_{t-3}(n-2)_{p+4}+$$

$$+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$(n-2)_{p+t}(n-2)_t=(n-p-2)_t(n-2)_p+(p+2)(n-p-4)_{t-1}(n-2)_{p+2}+$$

$$(p+4)_2(n-p-6)_{t-2}(n-2)_{p+4}+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$+(p+2t)_t(n-2)_{p+2t}.$$

Dunque $Y' \, Y''=-(n-2)_{p-2}\Big[(n-p)_t\Big]+$

$$+(n-2)_p\Big[(n-p-2)_{t-2}-p(n-p-2)_{t-1}+(n-p-2)_t\Big]+$$

$$+(n-2)_{p+2}\Big[(n-p-4)_{t-3}-(p+2)_2(n-p-4)_{t-2}-(n-p-4)_{t-2}+$$

$$+(p+2)((n-p-4)_{t-1}\Big]+$$

$$+(n-2)_{p+4}\Big[(p+4)_2(n-p-6)_{t-4}-(p+4)_3(n-p-6)_{t-3}-$$

$$-(p+4)(n-p-6)_{t-3}+(p+4)_2(n-p-6)_{t-2}\Big]+$$

$$+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .

ossia provare l'identità:

$$(p+2s)_s(n-p-2s)_{t-s}-(p+2s+2)_{s+1}(n-p-2s-2)_{t-s-1}=$$
$$=(p+2s)_s(n-p-2s-2)_{t-s-2}-(p+2s)_{s+1}(n-p-2s-2)_{t-s-1}-$$
$$-(p+2s)_{s-1}(n-p-2s-2)_{t-s-1}+(p+2s)_s(n-p-2s-2)_{t-s}$$

o, sopprimendo i fattori comuni,

$$(p+2s)_{s-1}(n-p-2s-2)_{t-s-2}$$

basterà dimostrare l'altra:

$$-\frac{(n-p-t-s)\,(p+2s+2)\,(p+2s+1)}{(t-s-1)\,s\,(s+1)}+$$
$$+\frac{(p+s+1)\,(n-p-2s)\,(n-p-2s-1)}{s\,(t-s)\,(t-s-1)}=$$
$$=\frac{p+s+1}{s}-\frac{(p+s+1)\,(p+s)\,(n-p-s-t)}{s\,(s+1)\,(t-s-1)}-$$
$$-\frac{n-p-s-t}{t-s-1}+$$
$$+\frac{(p+s+1)\,(n-p-s-t)\,(n-p-s-t-1)}{s\,(t-s)\,(t-s-1)}$$

e per verificare con facilità quest'ultima basta osservare che ambo i membri sono del 2.° grado in n; hanno uguali i coefficienti di n^2 e per i due valori di n:

$$n=p+s+t \quad ; \quad n=p+s+t+1$$

divengono identici.

Dunque i valori assoluti di Y e di Y′ Y″ sono uguali: inoltre i termini della

$$C_{x^t y^{n-t}}=0$$

dopo effettuata la sostituzione delle (C), divengono alternativamente positivi e negativi.

Da tutto questo si conclude che tutte le relazioni

$$C_{x^t y^{n-t}}=0$$

fra le

$$a_{0,n}\ ;\ a_{0,n-2}\ ;\ a_{0,n-4}\ ;\ \ldots\ldots\ a_{0,3}\ ;\ a_{0,1}$$

per opera delle (C), divengono tutte identiche alla

$$K_{n-3}=0$$

la quale non contiene altro che θ ed n; quindi K_{n-4} sarà un 2.° fattore (uno è già stato trovato in K_{n-1} N.° 14) della risultante delle

$$C_{x^t y^{n-t}} = 0$$

18. Per trovare la forma dell'equazione della curva occorre determinare le relazioni che passano fra gli altri coefficienti e perciò seguiremo lo stesso metodo impiegato al N° 16.

Supponiamo dapprima che la curva debba possedere $n-2$ assi reali, ma non i due assi immaginarî coniugati che dal punto comune agli assi reali vanno ai punti ciclici e che noi per brevità chiameremo *assi ciclici*.

Cominciamo allora dalle relazioni che legano i coefficienti:

$$a_{1n,-1} \; ; \; a_{1,n-3} \; ; \; a_{1,n-5} \; ; \; \ldots\ldots a_{1,0} \, .$$

Essi, per quanto già osservammo al N.° 10., sono in numero di $\frac{n+1}{2}$ e sono legati da $\frac{n-1}{2}$ relazioni lineari e omogenee. È dunque possibile esprimerli tutti in funzione di uno di essi e di θ risolvendo un sistema di equazioni lineari. Sa il determinante dei coefficienti fosse nullo, vorrebbe dire che due, invece di uno, dei coefficienti suddetti, possono essere scelti arbitrariamente e niente sarebbe infirmato.

Una sola osservazione è da farsi, cioè la seguente. Una volta ottenute le espressioni letterali di questi coefficienti, occorre sostituire per tg θ uno qualunque dei valori

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{n-2} \; ; \; \operatorname{tg} \frac{2\pi}{n-2} \; ; \; \ldots\ldots \operatorname{tg} \frac{(n-3)\pi}{n-2} \; ; \; i \; ; \; -i$$

i valori dei coefficienti non debbono naturalmente cambiare prendendo per tg θ uno, ptuttosto che un altro, di questi valori giacchè la curva rimane la stessa; segue che a calcoli fatti, o saranno indipendenti da θ, come in qualche esempio abbiamo potuto constatare (curve di 5.° ordine simmetriche rispetto a tre assi N° 37), o saranno tali funzioni di θ da godere le proprietà suenunciate.

La curva che si ottiene sopprimendo le

$$a_{0,n} \; ; \; a_{0,n-2} \; ; \; a_{0,n-4} \; ; \; \ldots\ldots$$

e le

$$a_{1,n-1} \; ; \; a_{1,n-3} \; ; \; a_{1,n-5} \; ; \; \ldots\ldots$$

è di grado $n-2$ e deve possedere $n-2$ assi reali dunque la sua equazione si otterrà da quella scritta al N° 16, cambiando n in $n-2$. D'altra parte è appunto il 1.° membro di questa equazione che costituisce la parte della equazione della curva primitiva che rimaneva a determinare.

19. Se poi si esigesse che la curva primitiva, oltre a possedere $n-2$ assi reali, possedesse anche i due assi ciclici; ne verrebbe che tutte le curve di ordine pari che si otterrebbero sopprimendo successivamente linee verticali di coefficienti nella equazione del N° 9. sarebbero tutte ipercicliche e quindi l'equazione della curva assumerebbe una forma determinata che è:

$$a_{0,n} \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^{\frac{p}{2}} \left\{ (n-2)_p - (n-2)_{p-2} \right\} x^p y^{n-p} +$$

$$+ \sum_{r=0}^{r=\frac{n-1}{2}} a_{2r+1\,,\,n-2r-1} (x^2+y^2)^{\frac{n-2r-1}{2}} = 0$$

dove p è pari.

Richiamando anche i risultati del N° 16. possiamo enunciare il seguente teorema;

« *L'equazione di una curva di grado n dispari con n assi reali, o con* $n-2$ *assi reali e due assi ciclici ha rispettivamente le forme:*

$$a_{0,n} \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^{\frac{p}{2}} n_p x^p y^{n-p} + U_1 U_2 \ldots U_{\frac{n-1}{2}} = 0$$

$$a_{0,n} \sum_{p=0}^{p=n-1} \left\{ (-1)^{\frac{p}{2}} (n-2)_p - (n-2)_{p-2} \right\} x^p y^{n-p} +$$

$$+ U_1 U_2 \ldots\ldots U_{\frac{n-1}{2}} = 0$$

dove p assume i soli valori pari e

$$U_1 = 0 \; ; \; U_2 = 0 \; ; \ldots\ldots U_{\frac{n-1}{2}} = 0$$

sono l'equazioni di $\frac{n-1}{2}$ *cerchi concentrici al punto comune agli assi e i cui raggi sono le radici quadrate delle radici della equazione:*

$$a_{1,n-1} z^{\frac{n-1}{2}} + a_{3,n-3} z^{\frac{n-3}{2}} + a_{5,n-5} z^{\frac{n-5}{2}} + \ldots + a_{n,0} = 0 \text{ ».}$$

20. Si tratta ora di generalizzare i resultati ottenuti nei N.i precedenti ricercando se una curva di grado n dispari può possedere un numero dispari qualunque, purchè inferiore ad n di assi reali.

Io dico che essa può in generale possedere $n-2r$ *assi reali; o* $n-2r$ *assi reali e i due ciclici:*

E infatti l'equazione di grado $n-1$:

$$K_{n-2r-1} = \Big\{ (\operatorname{tg}\theta)^{n-2r-1} - (n-2r)_2 (\operatorname{tg}\theta)^{n-2r-3} +$$

$$(n-2r)_4 (\operatorname{tg}\theta)^{n-2r-5} - (n-2r)_2 (\operatorname{tg}\theta)^{n-2r-7} +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; +$$

$$(-1)^{\frac{n-2r-5}{2}} (n-2r)_1 \Big\} \Big\{ \operatorname{tg}^2\theta + 1 \Big\}^r = 0$$

ammette le radici:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{n-2r} ; \operatorname{tg}\frac{2\pi}{n-2r} ; \ldots\ldots \operatorname{tg}\frac{n-2r-1}{n-2r}\pi ; i ; -i$$

di cui le ultime due sono contate ognuna r volte.

Ora, in generale, il coefficiente di

$$(\operatorname{tg}\theta)^{n-p-1}$$

nella precedente equazione, è:

$$(-1)^{\frac{p}{2}} \Big\{ (n-2r)_p - r_1 (n-2r)_{p-2} +$$

$$+ r_2 (n-2r)_{p-1} - r_3 (n-2r)_{p-6} + \ldots\ldots$$

$$+ \ldots\ldots (-1)^{\frac{p}{2}} r_{\frac{p}{2}} \Big\}.$$

Si tratta dunque di dimostrare, analogamente a quanto già facemmo ai N.i 14 e 17, che se si stabiliscono fra le

$$a_{0,n} ; a_{0,n-2} ; \ldots\ldots a_{0,3} ; a_{0,1}$$

le relazioni generali

$$(D) \begin{cases} ; a_{0,n-p} = (-1)^{\frac{p}{2}} \Big\{ (n-2r)_p - r_1 (n-2r)_{p-2} + \\ \quad + r_2 (n-2r)_{p-5} \ldots\ldots + (-1)^{\frac{p}{2}} r_{\frac{p}{2}} \Big\} a_{0,n} \end{cases}$$

di cui le (A) e le (C) non sono che casi particolari ($r = 0$; $r = 1$); tutte le equazioni

$$C_{x^t y^{n-t}} = 0$$

vengono a coincidere in una sola che è la

$$K_{n-2r-1} = 0.$$

Per persuadersene basta generalizzare i processi già impiegati ai N.i 14. e 17.

Cominciamo dal calcolare il coefficiente di:

$$(\text{sen}\,\theta)^{p+t-1}\,(\cos\theta)^{n-p-t}$$

nella

$$C_{x^t y^{n-t}} = 0$$

dopo che in essa si sono effettuate le sostituzioni (D).

Questo coefficiente è dato da:

$$\begin{aligned}
\Delta = {} & (n-p)_t \left\{(n-2r)_p - r_1(n-2r)_{p-2} + r_2(n-2r)_{p-4} - r_3(n-2r)_{p-6} + \dots\right\} + \\
& + (p+2)(n-p-2)_{t-1} \left\{(n-2-r)_{p+2} - r_1(n-2-r)_p + \right. \\
& \qquad \left. + r_2(n-2r)_{p-2} - r_3(n-2r)_{p-4} + \dots\right\} + \\
& + (p+4)_2(n-p-4)_{t-2} \left\{(n-2r)_{p+4} - r_1(n-2r)_{p+2} + \right. \\
& \qquad \left. + r_2(n-2r)_p - r_3(n-2r_{p-2} + \dots\right\} + \\
& + (p+6)_3(n-p-6)_{t-3} \left\{(n-2r)_{p+6} - r_1(n-2r)_{p+4} + \right. \\
& \qquad \left. + r_2(n-2r)_{p+2} - r_3(n-2r)_p + \dots\right\} + \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Il coefficiente di

$$(\text{tg}\,\theta)^{p+t-1}$$

nella

$$K_{n-2\,r-1} = 0$$

è (a meno del segno):

$$\begin{aligned}
\Delta' = {} & (n-2r)_{p+t-2r} - r_1(n-2r)_{p+t-2r+2} + \\
& + r_2(n-2r)_{p+t-2r+4} - \dots + (-1)^{\frac{n-p-t}{2}}\, r_{\frac{2r-n-t-p}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Tutto quindi si riduce a dimostrare che Δ è uguale in valore assoluto a Δ', o almeno che ne differisce per un fattore indipendente da p.

Dimostreremo infatti che in valore assoluto è

$$\Delta = \Delta'\,\Delta''$$

dove:

$$\Delta'' = (n-2r)_{t-2r} - r_1(n-2r)_{t-2r+2} +$$

$$+ r_2(n-2r)_{t-2r+4} - \ldots\ldots + (-1)^{\frac{n-t}{2}} r_{\frac{2r-n+t}{2}}.$$

Trasformiamo perciò il prodotto $\Delta'\ \Delta''$ facendo uso della identità:

$$(n-p)_t n_p + (p+2)(n-p-2)_{t-1} n_{p+2} + \ldots\ldots\ldots +$$

$$+ (p+2t)_t n_{p+2t} = n_t\, n_{p+t}$$

dimostrata al N.° 14, è gia impiegata per un simile uso al N.° 17.

Si ottiene così il vantaggio che tanlo Δ quando $\Delta'\ \Delta''$ vengono ordinati secondo gl'indici ascendenti dei numeri figurati:

$$\ldots\ldots (n-2)_{p+4}\ ;\ (n-2)_{p-2}\ ;\ (n-2)_p\ ;\ (n-2)_{p+2}\ ;\ (n-2)_{p+4}\ ;\ \ldots\ldots$$

Basta dunque dimostrare che il coefficiente di

$$(n-2)_p$$

in Δ è uguale al coefficiente di

$$(n-2)_p$$

in $\Delta'\ \Delta''$.

Indicandoli rispettivamente con C e con C′ si ha:

$$C = (n-p)_t - r_1(p+2)(n-p-2)_{t-1} +$$

$$+ r_2(p+4)_2(n-p-4)_{t-2} - r_3(p+6)_3(n-p-6)_{t-3} + \ldots\ldots$$

$$+ \ldots\ldots (-1)^r (p+2r)_r (n-p-2r)_{t-r}$$

$$C' = (n-2r-p)_{t-2r} - (n-2r-p)_{t-2r+1} r_1 p_1 +$$

$$+ (n-2r-p)_{t-2r+2} \left\{ p_2 r_2 + r_{12} \right\} - (n-2r-p)_{t-2r+3} \left\{ r_3 p_3 + r_1 r_2 p_1 \right\} +$$

$$+ (n-2r-p)_{t-2r+4} \left\{ r_4 p_4 + r_1 r_3 p_2 + r_2^2 \right\} - \ldots\ldots$$

. . . . . .

Il termine generale di questo polinomio è

$$(-1)^s (n-2r-p)_{t-2r+s} \Sigma r_i r_k p_l$$

dove se s è pari i comincia da o e va fino a $\frac{s}{2}$; k va da s fino a $\frac{s}{2}$ e l va da s a o ; i e k passando per tutte le unità intermedie; l invece assumendo i soli valori:

$$s\ ;\ s-2\ ;\ s-4\ ;\ \ldots\ldots 4\ ;\ 2\ ;\ 0.$$

Se s è dispari i va da o a $\frac{s-1}{2}$; k va da s a $\frac{s+1}{2}$ e l da s fino a 1; i e k passando per tutti i numeri intermedî, l invece assumendo i soli valori

$$s\ ;\ s-2\ ;\ s-4\ ;\ \ldots\ldots\ 3\ ;\ 1.$$

L'ultimo termine è positivo e uguale a

$$(n-2r-p)_t$$

La questione è dnnque ridotta a provare $C=C'$; ovvero, dopo soppressi i fattori comuni, a verificare l'identità:

$$\frac{(n-p)\ \ldots\ldots\ (n-p-2r+1)}{(t-2r+1)\ \ldots\ldots\ t}$$

$$-\frac{r_1(p+2)(n-p-2)\ \ldots\ (n-p-2r+1)(n-p-t)}{(t-2r+1)\ \ldots\ldots\ (t-1)}+$$

$$+\frac{r_2(p+4)_2(n-p-4)\ \ldots\ (n-p-2r+1)(n-p-t)(n-p-t-1)}{(t-2)r+1\ \ldots\ldots\ (t-2)}-$$

$$-\frac{r_3(p+6)_3(n-p-6)\ \ldots\ (n-p-2r+1)(n-p-t)(n-p-t-1)(n-p-t-2)}{(t-2r+1)\ \ldots\ldots\ (t-3)}+$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ +$$

$$+\frac{(-1)_r(p+2r)_r(n-p-t)\ \ldots\ldots\ (n-p-r-t+1)}{(t-2r+1)\ \ldots\ldots\ (t-r)}=$$

$$=1-\frac{n-p-t}{t-2r+1}r_1p_1+$$

$$+\frac{(n-p-t)(n-p-t-1)}{(t-2r+1)(t-2r+2)}\left\{p_2r_2+r_1^2\right\}-$$

$$-\frac{(n-p-t)(n-p-t-1)(n-p-t-2)}{(t-2r+1)(t-2r+2)(t-2r+2)}\left\{p_3r_3+r_1r_2p_1\right\}+\ldots$$

$$+\ldots+\frac{(n-p-t)\ \ldots\ldots\ (n-2r-p-t+1)}{(t-2r+1)\ \ldots\ldots\ t}$$

Per verificarla, si può osservare che ambo i membri sono di grado $2r$ in n e che hanno uguali i coefficienti della massima potenza di n. Se dunque essi divengono uguali per $2r$ valori di n, saranno certamente uguali per qualunque valore di n e l'identità sarà dimostrata. È opportuno scegliere per questi valori di n successivamente:

$$p+t\ ;\ p+t+1\ ;\ p+t+2\ ;\ \ldots\ldots$$

Per i primi di questi valori l'identità, si manifesta immediatemente. In generale supponendola vera per

$$n = p + t + k$$

si vede subito che è pur vera per

$$n = p + t + k + 1.$$

Riassumendo: abbiamo dimostrato che in valore assoluto è

$$\Delta = \Delta' \, \Delta''$$

d'altra parte i coefficienti di

$$(\operatorname{sen} \theta)^{i-1} \, (\cos \theta)^{n-i}$$

nella

$$C_{x^t \, y^{n-t}} = 0$$

dopo eseguite le sostituzioni (D) sono alternativamente positivi e negativi; questo basta per concludere che le relazioni

$$a_{0,n-} = (-1)^{\frac{p}{2}} \Big\{ (n-2\,r)_p - r_1 \, (n-2\,r)_{p-2} + r_2 \, (n-2\,r)_{p-5} -$$

$$- \, . \, . \, . \, . \, . \, (-1)^{\frac{p}{2}} \, r_{\frac{p}{2}} \Big\} \, a_n \; ; \; (p \text{ pari})$$

riducono a una sola equazione che contiene n e θ solamente, le $\frac{n+1}{2}$ relazioni:

$$C_{x^t \, y_{n-t}} = 0.$$

Questa equazione è

$$K_{n-2\,r-1} = 0$$

dunque $K_{n-2\,r-1}$ è un fattore della resultante delle

$$C_{x^t \, y^{n-t}} = 0$$

21. Ora, se la nostra curva deve possedere $n-2\,r$ assi reali, è certo che fra i coefficienti:

$$a_{0,n} \; ; \; a_{0,n-2} \; ; \; a_{0,n-5} \; ; \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

debbono passare le relazioni

$$a_{0,n-p} = (-1)^{\frac{p}{2}} \Big\{ (n-2r)_p - r_1 \, (n-2r)_{p-2} + r_2 \, (n-2\,r)_{p-5} -$$

$$- \ldots\ldots + (-1)^{\frac{p}{2}} r_{\frac{p}{2}} \Big\} a_{0,n}; \ (p \text{ pari})$$

Vediamo come si possa esigere che, oltre questi $n - 2r$ assi reali, esistano i due assi ciclici contati un certo numero di volte e come si possa trovare l'equazione della curva corrispondente.

22. — 1° Caso — « *La curva possiede, oltre gli $n-2r$ assi reali, i due assi ciclici contati ognuno r volte* ».

Allora, tutte le curve di grado pari che si ottengono sopprimendo colonne verticali di coefficienti nella equazione del N.° 9. sono tutte ipercicliche perchè possiedono un numero di assi superiore al loro grado: quelle di grado dispari per la stessa ragione si spezzano nella retta al. l'infinito e in curve ipercicliche.

L'equazione richiesta è dunque:

$$a_{0,n} \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^{\frac{p}{2}} \Big\{ (n-2r)_p - r_1 n(-r)_{p-2} + \ldots\ldots + (-1)^{\frac{p}{2}} r_{\frac{p}{2}} \Big\} \times$$

$$\times x^p y^{n-p} + \sum_{r=0}^{r=\frac{n-1}{2}} a_{2r+1,\, n-(2r+1)} (x^2 + y^2)^{\frac{n-2r-1}{2}} = 0 .$$

Possiamo anche enunciare questo resultato così:

« *L'equazione di una curva di grado n dispari con $n-2r$ assi reali e i due assi ciclici, contato ognuno r volte, può mettersi sotto la forma:*

$$a_{0,n} \sum_{p=0}^{p=\frac{n-1}{2}} (-1)^{\frac{p}{2}} \Big\{ (n-2r)_p - r_1 (n-2r)_{p-2} +$$

$$+ r_2 (n-2r)_{p-4} - r_3 (n-2r)_{p-6} + \ldots\ldots + (-1)^{\frac{p}{2}} r_{\frac{p}{2}} \Big\} x^p y^{n-p} +$$

$$+ U_1 \,.\, U_2 \,.\, \ldots\ldots \, U_{\frac{n-1}{2}} = 0$$

dove p è pari e

$$U_1 = 0 \ , \ U_2 = 0 \ , \ \ldots\ldots \ U_{\frac{n-1}{2}} = 0$$

rappresentano le equazioni di $\frac{n-1}{2}$ cerchi concentrici nel punto comune agli assi e i cui raggi sono le radici quadrate delle radici della equazione:

$$a_{1,n-1} z^{\frac{n-1}{2}} + a_{3,n-3} z^{\frac{n-3}{2}} + a_{5,n-5} z^{\frac{n-5}{2}} + \ldots\ldots a_{n,0} = 0 \text{ »}$$

I teoremi del N.° 19 sono dunque casi particolari di questo ($r=0$; $r=1$).

23. — 2.° Caso — « *La curva possiede, oltre gli $n-2r$ assi reali, i due assi ciclici contati ognuno s volte essendo $s < r$* ».

Le relazioni che servono a determinare

$$a_{0,n-2}\ ;\ a_{0,n-4}\ ;\ a_{0,n-6}\ ;\ \ldots\ldots$$

in funzione di $a_{0,n}$ sono le solite

$$a_{0,n-p} = (-1)^{\frac{p}{2}} \left\{ (n-2r)_p - r_1 (n-2r)_{p-2} + \ldots + (-1)^{\frac{p}{2}} r_{\frac{p}{2}} \right\} a_{0,n}.$$

La seconda serie di coefficienti:

$$a_{1,n-1}\ ;\ a_{1,n-3}\ ;\ a_{1,n-5}\ ;\ \ldots\ldots$$

dà luogo, com'è noto, a $\frac{n-1}{2}$ relazioni lineari omogenee con $\frac{n+1}{2}$ variabili e potremo dunque esprimerle tutte in funzione di una di esse, di n e di θ. Solamente occorre ripetere quì l'osservazione già fatta al N° 18 relativamente al calcolo di questi coefficienti.

Sopprimendo la prima e la seconda serie di coefficienti, si ottiene l'equazione di una curva di grado dispari $n-2$ che possiede $n-2r$ assi reali e $2s$ assi ciclici. Le relazioni che legheranno i coefficienti della terza serie e cioè:

$$a_{2,n-2}\ ;\ a_{2,n-4}\ ;\ a_{2,n-6}\ ;\ \ldots\ldots$$

si otterranno dunque da quelle che legano le

$$a_{0,n}\ ;\ a_{0,n-2}\ ;\ a_{0,n-4}\ ;\ \ldots\ldots$$

cambiando n in $n-2$.

Così il calcolo per ottenere i coefficienti della 4.ª serie:

$$a_{3,n-3}\ ;\ a_{3,n-5}\ ;\ a_{3,n-7}\ ;\ \ldots\ldots$$

sarà perfettamente simile a quello che serve per calcolare quelli della 2.ª.

Seguitando in questo modo a sopprimere a volta, a volta, linee verticali di coefficienti nella equazione del N° 9. giungeremo a una curva di grado dispari

$$n-2r+2s$$

minore di n perchè $s<r$ che possiede $n-2r$ assi reali e $2s$ assi ciclici cioè in tutto un numero di assi uguale al suo grado: siamo allora ridotti al 1° Caso (N° 23). e basterà perciò ripetere il ragionamento e i risultati ivi ottenuti, per trovare l'equazione di questa curva di grado

$$n-2r+2s$$

e aggiungerla a quella parte già calcolata per ottenere l'intera equazione della curva primitiva.

24. Osserveremo quì che il 1.° caso poteva includersi nel secondo supponendo $r=s$: l'abbiamo voluto distinto perchè è solamente per $s=r$ che la forma dell'equazione si manifesta immediatamente, mentre per s diverso da r non si può dare che il processo per ottenerla. Se finalmente, nel N° precedente, si suppone $s=0$, si ottiene il modo di calcolare l'equazione di una curva di grado dispari n che possiede $n-2r$ assi reali e nessuna coppia di assi ciclici.

In tutti questi casi così generalmente studiati potrebbe nascere il sospetto di avere qualche volta costruito delle curve simmetriche degeneri. Ciò non è possibile: se una curva di grado dispari simmetrica si spezza, essa, come abbiamo già notato, per le osservazioni fatte al N° 4. non può farlo senza che la retta all'infinito ne costituisca parte e questo escludono tutte le equazioni che abbiamo calcolato.

25. Tutti i resultati ottenuti per gli assi reali di una curva di grado dispari possono riassumersi così:

« *Una curva di grado dispari* $2r+1$ *non degenere, può essere simmetrica separatamente rispetto a:*

$$1\ ,\ 3\ ,\ 5\ ;\ \ldots\ldots\ 2r+1$$

assi reali. In ogni caso questi assi reali hanno un punto comune attorno al quale si dispongono simmetricamente.

La curva possiede un numero di flessi all'infinito uguale al numero degli assi reali e situati in direzioni a loro normali.

Non ha altri punti reali all'infinito all'infuori di questi.

Gli assi sono le polari armoniche dei flessi all'infinito.

L'Hessiana, la Steineriana e la Cayleyana godono la stessa simmetria della curva primitiva.

Gli asintoti e gli assi costituiscono coppie di tangenti ortogonali della Cayleyana ».

Curve di grado pari.

26. Noi supponiamo che la curva sia già simmetrica rispetto all'asse delle y onde la sua equazione potrà scriversi:

$$a_{0,n}\,y^n + a_{1,n-1}\,y^{n-1} + a_{2,n-2}\,y^{n-2} + \ldots\ldots +$$

$$+\,x^2\left\{a_{0,n-2}\,y^{n-2} + a_{1,n-3}\,y^{n-3} + a_{2,n-4}\,y^{n-4} + \ldots\ldots\right\} +$$

$$+\,x^4\left\{a_{0,n-4}\,y^{n-4} + a_{1,n-5} + a_{2,n-6}\,y^{n-6} + \ldots\ldots\ldots\right\} +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ x^{n-4} \left\{ a_{0,4}\, y^4 + a_{1,3}\, y^3 + a_{2,2}\, y^2 + a_{3,1}\, y + a_{4,0} \right\} +$$

$$+ x^{n-3} \left\{ a_{0,2}\, y^2 + a_{0,1}\, y + a_{2,0} \right\} +$$

$$+ x^n\, a_{0,0} = 0$$

dove n è pari.

Analogamente a quanto facemmo per le curve di grado dispari, trasformeremo l'equazione della curva per mezzo della sostituzione

$$x = \mathrm{X} \cos \theta - \mathrm{Y} \operatorname{sen} \theta$$

$$y = \mathrm{X} \operatorname{sen} \theta + \mathrm{Y} \cos \theta$$

ciò che corrisponde a una rotazione di ampiezza θ attorno all'origine del sistema cartesiano ortogonale a cui s'immagina riferita la curva: porremo quindi le condizioni analitiche necessarie perchè il nuovo asse delle y sia ancora asse di simmetria. Queste condizioni si ottengono evidentemente annullando tutte le potenze dispari della x nella equazione trasformata.

Si ottengono così un certo numero di relazioni che contengono linearmente e omogeneamente i coefficienti della curva.

Per queste relazioni valgono le osservazioni analoghe a quelle già fatte al N^0 9. per le curve di grado dispari. Noi non staremo quì a ripeterle: piuttosto altre ne faremo che solamente sono valide per l'equazione che ora studiamo cioè per le curve di grado pari.

27. Prima di tutto, se la curva deve possedere un numero pari di assi, essi si distribuiscono in coppie ortogonali (N^0 8.) ossia, se la curva ha un numero pari di assi ed è simmetrica, come nel caso nostro, rispetto all'asse delle y, lo sarà anche rispetto all'asse delle x: segue che in questo caso tutti i coefficienti il cui primo indice è un numero pari sono nulli.

Poi noteremo che l'annullarsi dei coefficienti dei termini di grado complessivo $n-2\,m$ in x e y e di grado dispari in x, dà luogo all'equazione

$$\mathrm{C}_{x^i\, y^{n-2\,m-i}} = 0 \; ; \; (i = 1 \, , \, 3 \, , \, \ldots \, n-2\,m-1)$$

e questa si ottiene dalla

$$\mathrm{C}_{y^i\, x^{n-2m-i}} = 0$$

permutando fra loro $\operatorname{sen} \theta$ e $\cos \theta$. Inoltre queste $\dfrac{n-2\,m}{2}$ relazioni contengono linearmente e omogeneamente le

$$a_{2m,n-2m} \; ; \; a_{2m,n-2m-2} \; ; \; a_{2m,n-2m-4} \; ; \; \ldots \; a_{2m,0}$$

che sono $\frac{n-2m}{2} + 1$ e il coefficiente di

$$a_{2m\,,\,n-2m-2k} \qquad ; \qquad (2k < n-2m)$$

si ottiene dal coefficiente di

$$a_{2m\,,\,2k}$$

cambiando il segno e permutando sen θ in cos θ.

Segue che se si sommano le relazioni

$$C_{x^i y^{n-2m-i}} = 0$$

$$C_{y^i x^{n-2m-i}} = 0$$

si ottiene una equazione che contiene linearmente e omogeneamente le differenze

$$a_{2m\,,\,n-2m-2k} - a_{2m\,,\,2k} \; .$$

Indicheremo questa equazione con

$$Y_{i\,,\,n-2m-i} = 0 \, .$$

Finalmente osserveremo che se la nostra curva può ammettere un numero di assi multiplo di 4, debbono seguirne le relazioni

$$a_{2m\,,\,m-2m-2k} = a_{2m\,,\,2k}$$

perchè la sostituzione

$$x = X - Y$$

$$y = X + Y$$

e il successivo annullamento dei termini di grado dispari in x, portano che l'equazione della curva non deve cambiare permutando fra loro x e y.

In questo caso quindi le equazioni:

$$Y_{i\,,\,n-2m-i} = 0$$

sono soddisfatte identicamente.

28. Premesse queste considerazioni generali, cominciamo a trattare il problema per le curve il cui grado è pari, ma non è multiplo di 4. S'intende naturalmente di escludere da queste ricerche le curve ipercicliche che studieremo a parte.

Esaminiamo se la curva può possedere un numero pari di assi. Per esempio n assi.

In questo caso le relazioni

$$Y_{i\,,\,n-i} = 0$$

non sono soddisfatte identicamente. Segue che per i valori di θ:

$$\frac{\pi}{n}\,;\ \frac{2\pi}{n}\,;\ \ldots\ldots\ \frac{(n-1)\pi}{n}$$

la resultante delle

$$Y_{i\,,\,n-i} = 0$$

deve annullarsi. — Ora le due equazioni:

$$C_{x^i\,y^{n-i}} = 0 \quad ; \quad C_{y^i\,x^{n-i}} = 0$$

la cui differenza è appunto la

$$Y_{i\,,\,n-i} = 0$$

coincidono per $i = \frac{n}{2}$ onde sarà:

$$Y_{\frac{n}{2}\,,\,\frac{n}{2}} = C_{x^{\frac{n}{2}}\,y^{\frac{n}{2}}}$$

e poichè la resultante delle Y è nulla per i valori di θ:

$$\frac{\pi}{n}\,;\ \frac{2\pi}{n}\,;\ \ldots\ldots\ \frac{(n-1)\pi}{n}\,,$$

così ne viene che per i medesimi valori di θ l'equazione:

$$C_{x^{\frac{n}{2}}\,y^{\frac{n}{2}}} = 0$$

sarà una conseguenza delle altre:

$$C_{x^i\,y^{n-i}} = 0.$$

Ma quest'ultime sono $\frac{n}{2}$: dunque, di indipendenti, non se ne hanno certamente più di

$$\frac{n}{2} - 1.$$

D'altra parte le

$$a_{0,n}\,;\ a_{0,n-2}\,;\ a_{0,n-4}\,;\ \ldots\ldots$$

che sono i coefficienti che entrano appunto tutti (e soli essi) in ognuna delle equazioni

$$C_{x^i y^{n-i}} = 0$$

sono in numero di

$$\frac{n}{2} + 1.$$

Questo basta per concludere che, risolvendo le

$$C_{x^i y^{n-i}} = 0$$

rispetto ai coefficienti

$$a_{0,n} \; ; \; a_{0,n-2} \; ; \; a_{0,n-4} \; ; \; \ldots\ldots$$

per i valori suddetti di θ, due di questi coefficienti almeno possono scegliersi arbitrariamente.

Ecco dunque il modo di costruire i termini di grado n complessivo in x e y.

Relativamente agli altri coefficienti osserveremo:

1.° che quelli che hanno dispari il primo indice si annullano tutti;

2.° che i rimanenti si determineranno in modo che i termini di grado $n-2$, $n-4$, $n-6$; . . . . . complessivo in x e y sieno rispettivamente la potenza $\frac{n-2}{2}$, $\frac{n-4}{2}$, $\frac{n-6}{2}$; . . . . . di

$$x^2 + y^2$$

giacchè le curve di ordine pari che si ottengono sopprimendo linee verticali di coefficienti nella equazione del N° 26. debbono possedere un numero di assi superiore al proprio grado e sono perciò tutte ipercicliche. In conclusione, la parte dell'equazione della curva che è di grado inferiore ad n è della forma:

$$(1) \qquad \sum_{q=1}^{q=\frac{n}{2}} a_{2q,n-2q} \left(x^2 + y^2 \right)^{\frac{n}{2}-q} .$$

Bisogna però dimostrare che una tal curva non si spezza. E infatti se si spezzasse, non potrebbe farlo che in $\frac{n}{2}$ cerchi concentrici all'origine: ma perchè avvenisse questo occorrerebbe che i termini di grado n complessivo in x e y fossero raggruppati nella potenza $\left(\frac{n}{2}\right)^{esima}$ di

$$x^2 + y^2$$

e quindi la parte che manca alla (1) precedente per formare l'equazione della curva fosse

$$(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}$$

con sol parametro arbitrario, mentre, nella determinazione dei coefficienti dei termini di grado n, abbiamo dimostrato che si possono scegliere arbitrariamente almeno due parametri arbitrarî.

29. Rimanendo sempre nell'ipotesi che n sia multiplo di due, ma non di quattro consideriamo il caso generale in cui il numero degli assi è pure multiplo di due, ma non di quattro. Vediamo cioè come si costruisce l'equazione della curva quando il numero degli assi è $n-4m$ dove m è dispari.

Intanto osserveremo che i coefficienti il cui primo indice è dispari si annullano tutti: in secondo luogo, se si sopprimono nell'equazione del N° 26. tutti i coefficienti il cui 1.° indice è uno qualunque dei numeri

$$0\ ,\ 2\ ,\ 4\ \ldots\ldots\ 4m-2\ ,$$

otterremo l'equazione di una curva di grado $n-4m$ con $n-4m$ assi di simmetria e quindi la sua equazione sarà determinata col metodo dato nel N.° precedente: questa equazione fa parte di quella che noi cerchiamo e precisamente quella parte che contiene tutti i termini il cui grado è minore, o uguale di $n-4m$.

Rimangono dunque da determinarsi solamente i coefficienti il cui primo indice è uno qualunque dei numeri

$$0\ ,\ 2\ ,\ 4\ ,\ \ldots\ldots\ 4m-2\ .$$

Fra questi, quelli il cui 1.° indice è

$$0\ ,\ 4\ ,\ 8\ ,\ \ldots\ldots\ 4m-4$$

si ottengono nel modo già indicato nel N° precedente quando si è fatta l'analoga determinazione per i coefficienti il cui primo indice è lo zero.

Per quelli che rimangono e il cui primo indice è

$$2\ ,\ 6\ ,\ 10\ ;\ \ldots\ldots\ 4m-2$$

il modo di calcolarli è pure semplicissimo. Per esempio, prendiamo quelli che hanno per primo indice il 2 e che sono:

$$a_{2,n-2}\ ;\ a_{2,n-4}\ ;\ a_{2\ n-6}\ \ldots\ldots\ldots$$

Essi compariscono linearmente e omogeneamente nelle $\frac{n-2}{2}$ relazioni

$$C_{x^i y^{n-2-i}} = 0$$

e sono in numero di $\frac{n-2}{2}+1$. È dunque possibile assumerne uno di essi arbitrario ed esprimere gli altri in funzione di questo, di n e di θ. Lo stesso ragionamento vale per gli altri che hanno per primo indice 6; 10....

Una volta costruita l'equazione della curva, si vede subito che essa non può spezzarsi in $\frac{n}{2}$ cerchi concentrici contando al solito il numero delle costanti arbitrarie di cui si può disporre.

30. Per completare le ricerche relative a un numero pari di assi per una curva il cui grado è un multiplo di due, ma non di quattro, non manca di studiare che il caso in cui il numero degli assi sia un multiplo di 4.

Cominciamo quindi dall'esaminare se la curva può possedere $n-2$ assi cercando i coefficienti:

$$a_{0,n}\ ;\ a_{0,n-2}\ ;\ a_{0,n-4}\ ;\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Siccome $n-2$ è multiplo di 4 (secondo ciò che osservammo al N° 27) sarà in generale

$$a_{2m,\,n-2m-2k} = a_{2m,\,2k}\ ,$$

Onde non è qui il caso di parlare delle equazioni

$$Y_{i,\,n-2m-i} = 0\ .$$

Esse sono soddisfatte identicamente, così è soddisfatta identicamente la

$$C_{x^{\frac{n}{2}}\,y^{\frac{n}{2}}} = 0$$

che al N° 28 abbiamo dimostrato coincidere con

$$Y_{\frac{n}{2},\,\frac{n}{2}} = 0\ .$$

In questo caso dunque le

$$a_{0,n}\ ;\ a_{0,n-2}\ ;\ a_{0,n-4}\ ;\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

si riducono a $\frac{n+2}{4}$ legate da $\frac{n-2}{4}$ relazioni lineari e omogenee: ne rimane quindi una di esse arbitraria.

Passiamo alle

$$a_{2,n-2}\ ;\ a_{2,n-4}\ ;\ a_{2,n-6}\ ;\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Esse pure sono in numero di $\frac{n+2}{4}$ giacchè la relazione:

$$a_{2,n-2-2k} = a_{2,2k}$$

diviene una identità per $k = \frac{n-2}{4}$ e sono legate da $\frac{n-2}{4}$ relazioni lineari e omogenee, dunque anche di queste ne resta una arbitraria.

Le curve che si ottengono successivamente sopprimendo, oltre le due serie di coefficienti,

$$a_{0,n} \; ; \; a_{0,n-2} \; ; \; a_{0,n-4} \; ; \; \cdots\cdots$$

$$a_{2,n-2} \; , \; a_{2,n-4} \; a_{2,n-6} \; ; \; \cdots\cdots$$

altre serie analoghe di coefficienti, possiedono un numero di assi superiore al loro grado e quindi sono tutte ipercicliche.

Dunque la parte dell'equazione richiesta che è di grado minore, o uguale ad $n-4$, è della forma:

$$+ \sum_{p=2}^{p=\frac{n}{2}} a_{2p\,,\,n-2p} \, (x^2 + y^2)^{\frac{n-2p}{2}} .$$

Si potrebbe però obiettare che la determinazione dei termini di grado $n-2$ e n dà luogo ad assumere altri due soli parametri arbitrarî, non potrebbe dunque darsi che i termini di grado $n-2$ e n si raggruppassero nelle due potenze:

$$\alpha (x^2 + y^2)^{\frac{n-2}{2}} + \beta (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}$$

essendo α e β i parametri arbitrarî? In questo caso la curva degenererebbe in $\frac{n}{2}$ cerchi concentrici. Si risponde a questa obiezione osservando che, appunto perchè si hanno due parametri in arbitrio, si può fare in modo che questo non avvenga; per esempio scegliendo

$$a_{0,n-2} = 1 \; ; \; a_{2,n-4} = 1$$

e in questo caso particolarissimo si vede che la possibilità che la curva degeneri manca assolutamente.

31. In modo analogo si risolve il problema nel caso che la curva debba possedere un numero di assi multiplo di 4 e inferiore a $n-2$ e il grado n della curva sia multiplo di 2 e non di 4.

32. Veniamo ora a trattare delle curve il cui grado è multiplo di 4.

Il caso in cui il numero degli assi sia pure multiplo di 4 e in particolare uguale al grado della curva, è considerato implicitamente al N° 30. Se infatti, nelle osservazioni svolte in quel N°, si suppone di aver soppresso i coefficienti

$$a_{0,n} \; ; \; a_{0,n-2} \; ; \; a_{0,n-4} \; ; \; \cdots\cdots$$

si ottiene l'equazione di una curva di grado $(n-2)$ simmetrica rispetto a $(n-2)$ assi e siccome è supposto in quel N° che n sia pari, ma non multiplo di 4, così segue che $(n-2)$ è multiplo di 4.

33. Non rimane da studiare che il caso in cui l'ordine della curva sia ancora un multiplo di 4 e il numero degli assi un multiplo di due e non di 4. Prendiamo l'equazione sotto la forma scritta al N° 26. con la ipotesi che n sia multiplo di 4. Siano $n-2$ gli assi che debba ammettere la curva e di cui si voglia ora determinare l'equazione.

Cerchiamo le relazioni da cui sono legate le

$$a_{0,n} \; ; \; a_{0,n-2} \; ; \; a_{0,n-4} \; ; \cdots\cdots$$

In questo caso le

$$Y_{i,\,n-i} = 0$$

non sono soddisfatte identicamente; dunque per i valori di θ:

$$\frac{\pi}{n-2} \; ; \; \frac{2\pi}{n-2} \; ; \; \frac{3\pi}{n-3} \; ; \cdots\cdots$$

la risultante delle $Y_{i,\,n-i} = 0$ deve annullarsi. Però non accade come al N° 28. che la

$$Y_{\frac{n}{2},\,\frac{n}{2}} = 0 \; ; \cdots\cdots$$

coincida con la $C_{x^{\frac{n}{2}} y^{\frac{n}{2}}} = 0$: quest'ultima ora non esiste perchè $\frac{n}{2}$ è pari.

Dunque le

$$a_{0;n} \; ; \; a_{0,n-2} \; ; \; a_{0,n-4} \; ; \cdots\cdots$$

sono $\frac{n}{2} +$ legate da $\frac{n}{2}$ relazioni. Una di esse è sempre arbitraria.

La curva che si ottiene sopprimendo le:

$$a_{0,n} \; ; \; a_{0,n-2} \; ; \; a_{0,n-4} \; ; \cdots\cdots$$

è di grado pari non multiplo di 4 e possiede un numero di assi uguale al suo grado: la sua equazione si formerà dunque secondo i criteri stabiliti al N° 28. D'altra parte è il 1° membro dell'equazione di questa curva che costituisce l'insieme di tutti i termini il cui grado è uguale, o minore di $(n-2)$ nella equazione richiesta.

Finalmente il caso generale in cui la curva sia di grado n multiplo di 4, con un numero di assi multiplo di 2 ma non di 4 e minore di $n-2$, è perfettamente analogo a questo, nè ci insisteremo.

34. Piuttosto noteremo come una curva di grado pari possa anche

ammettere un numero dispari di assi. E infatti, tolta ora la condizione che siano nulli i coefficienti (nella equazione del N° 26) il cui primo indice è dispari, supponiamo debbasi trovare l'equazione di una tal curva possedente p assi reali di simmetria essendo p un numero dispari.

Per determinare le $\frac{n}{2}+1$:

$$a_{0,n}\ ;\ a_{0,n-2}\ ;\ a_{0,n-4}\ ;\ \ldots\ldots$$

abbiamo allora le $\frac{n}{2}$ relazioni:

$$C_{x^i y^{n-i}} = 0$$

che ne lasciano una almeno arbitraria, la quale sceglieremo in modo che la curva non sia di conseguenza iperciclica. Soppresse le

$$a_{0,n}\ ;\ a_{0,n-2}\ ;\ a_{0,n-4}\ ;\ \ldots\ldots$$

rimane una curva di ordine dispari che possiede un numero dispari di assi reali e la cui equazione sappiamo già trovare con i metodi esposti al N° 23. È il primo membro dell'equazione di questa curva che ci rappresenta tutti i termini di grado uguale, o inferiore ad $n-1$, che entrano a far parte dell'equazione richiesta.

Curve ipercicliche.

35. La loro equazione è della forma

$$\begin{aligned} U_i = a(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}} + a_{1,n-1}y^{n-1} + a_{2,n-2}y^{2-n} + \ldots\ldots + \\ + x^2\left\{a_{1,n-3}y^{n-3} + a_{2,n-4}y^{n-1} + \ldots\right\} + \\ + x^4\left\{a_{1,n-5}y^{n-5} + a_{2,n-6}y^{n-6} + \ldots\ldots\right\} + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ + x^{n-2}\left\{a_{1,1}y + a_{2,0}\right\} = 0 \end{aligned}$$

dove si suppone che l'asse delle y sia già retta di simmetria. Notammo al N° 7. come queste curve abbiano ogni diametro perpendicolare al corrispondente sistema di corde: esse quindi non potevano fornirci per mezzo di quelle sole considerazioni un limite massimo per il numero degli assi, onde le escludemmo da tutte le ricerche successive.

Riesce però evidente che esse, all'infuori di n assi, possono come le

altre curve di ordine pari possederne

$$n-1\ ;\ n-2\ ;\ \ldots\ldots\ 3\ ;\ 2\ ;\ 1\ ;\ 0\,.$$

Infatti se ne possedessero n, la curva che si otterrebbe sopprimendo i termini di grado n e quelli di grado $n-1$, sarebbe di grado $n-2$ e possederebbe un numero di assi superiore al suo grado: essa e tutte le sue analoghe sarebbero pure ipercicliche onde la parte della equazione di U, che è di grado inferiore ad n sarebbe costituita da

$$\sum_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} a_{2p\,,\,n-2p}\,(x^2+y^5)^{\frac{n}{2}-p}$$

e a questo aggiunto

$$a\,(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}$$

si otterrebbe l'equazione di una curva degenere in $\frac{n}{2}$ cerchi concentrici.

36. Riassumendo dunque i resultati ottenuti, per le curve di grado pari, possiamo enunciare il seguente teorema:

« *Una curva di grado pari, non degenere, può possedere separatamente* « *un numero di assi reali uguale a uno qualunque dei numeri che precedono* « *quello che esprime il suo grado e, se non è iperciclica, può anche possederne* « *tanti quante sono le unità contenute nel suo grado* ».

37. Citeremo qui alcuni esempi:

Curve di terzo ordine

I. — Simmetria rispetto a un asse reale:

$$a_{0,3}\,y^3 + a_{1,2}\,y^2 + a_{2,1}\,y + a_{3,0} + x^2\left\{a_{0,1}\,y + a_{1,0}\right\} = 0$$

II. — Simmetria rispetto a un asse reale e ai due ciclici contati ognuno una volta:

$$a_{0,3}\left\{y^3 + y\,x^2\right\} + a_{1,2}\left\{x^2 + y^2\right\} + a_{3,0} = 0$$

III. — Simmetria rispetto a tre assi reali:

$$a_{0,3}\left\{y^3 - 3\,y\,x^2\right\} + a_{1,2}\left\{x^2 + y^2\right\} + a_{3,0} = 0$$

Curve di quarto ordine.

I. — Simmetria rispetto a un asse reale:

$$a_{0,4}\,y^4 + a_{1,3}\,y^3 + a_{2,2}\,y^2 + a_{3,1}\,y + a_{4,0} +$$

$$+ x^2 \left\{ a_{0,2}\, y^2 + a_{1,1}\, y + a_{2,0} \right\} + x^4\, a_{0,0} = 0$$

II. — Simmetria rispetto a due assi reali:

$$a_{0,4}\, y^4 + a_{2,2}\, y^2 + a_{4,0} + x^2 \left\{ a_{0,2}\, y^2 + a_{2,0} \right\} + a_{0,0}\, x^4 = 0$$

III. — Simmetria rispetto a tre assi reali:

$$a_{0,4} \left\{ x^2 + y^2 \right\}^2 + a_{1,3} \left\{ y^3 - 3\, y\, x^2 \right\} + a_{2,2} \left\{ x^2 + y^2 \right\} + a_{4,0} = 0$$

IV. — Simmetria rispetto a quattro assi reali:

$$a_{0,4}\, (x^4 + y^4) + a_{0,2}\, x^2\, y^2 + a_{2,2}\, (x^2 + y^2) + a_{4,0} = 0$$

Curve di quinto ordine.

I. — Simmetria rispetto a un asse reale:

$$a_{0,5}\, y^5 + a_{1,4}\, y^4 + a_{2,3}\, y^3 + a_{3,2}\, y^2 + a_{4,1}\, y + a_{5,0} +$$
$$+ x^2 \left\{ a_{0,3}\, y^3 + a_{1,2}\, y^2 + a_{2,1}\, y + a_{3,0} \right\} + x^4 \left\{ a_{0,1}\, y + a_{1,0} \right\} = 0$$

II. — Simmetria rispetto a un asse reale e ai due ciclici contati ognuno una volta:

$$a_{0,5} \left\{ y^5 - 2\, x^2\, y^3 - 3\, x^4\, y \right\} + a_{1,4} \left\{ x^2 + y^2 \right\}^2 +$$
$$+ a_{2,3} \left\{ y^3 + y\, x^2 \right\} + a_{3,2} \left\{ x^2 + y^2 \right\} + a_{5,0} = 0$$

III. — Simmetria rispetto a un asse reale e ai due ciclici contati, (ognuno di questi ultimi) due volte:

$$a_{0,5} \left\{ y^5 + 2\, y^3\, x^2 + y\, x^4 \right\} + a_{1,4} \left\{ x^2 + y^2 \right\}^2 +$$
$$+ a_{3,2} \left\{ x^2 + y^2 \right\} + a_{5,0} = 0$$

IV. — Simmetria rispetto a tre assi reali:

$$a_{0,5} \left\{ y^5 - 2\, x^2\, y^3 - 3\, x^4\, y \right\} + a_{1,4} \left\{ x^2 + y^2 \right\}^2 +$$
$$+ a_{2,3} \left\{ y^3 - 3\, y\, x^2 \right\} + a_{3,2} \left\{ x^2 + y^2 \right\} + a_{5,0} = 0$$

V. — Simmetria rispetto a tre assi reali e ai due ciclici, contati ognuno una volta:

$$a_{0,5}\left\{y^5 - 2\,x^2\,y^3 - 3\,x^4\,y\right\} + a_{1,4}\left\{x^2 + y^2\right\}^2 +$$

$$+\, a_{3,2}\left\{x^2 + y^2\right\} + a_{5,0} = 0$$

VI. — Simmetria rispetto a cinque assi reali:

$$a_{0,5}\left\{y^5 - 10\,x^2\,y^3 + 5\,x^4\,y\right\} + a_{1,4}\left\{x^2 + y^2\right\}^2 +$$

$$+\, a_{3,2}\left\{x^2 + y^2\right\} + a_{5,0} = 0$$

Curve di sesto ordine.

I. — Simmetria rispetto a un asse reale:

$$a_{0,6}\,y^6 + a_{1,5}\,y^5 + a_{2,4}\,y^4 + a_{3,3}\,y^3 + a_{4,2}\,y^2 + a_{5,1}\,y + a_{6,0} +$$

$$+\, x^2\left\{a_{0,4}\,y^4 + a_{1,3}\,y^3 + a_{2,2}\,y^2 + a_{3,1}\,y + a_{4,0}\right\} +$$

$$+\, x^4\left\{a_{0,2}\,y^2 + a_{1,1}\,y + a_{2,0}\right\} + x^6\,a_{0,0} = 0$$

II. — Simmetria rispetto a assi reali:

$$a_{0,6}\,y^6 + a_{2,4}\,y^4 + a_{4,2}\,y^2 + a_{6,0} + x^2\left\{a_{0,4}\,y^4 + a_{2,2}\,y^2 + a_{4,0}\right\} +$$

$$+\, x^4\left\{a_{0,2}\,y^2 + a_{2,0}\right\} + a_{0,0}\,x^6 = 0$$

III. — Simmetria rispetto a tre assi reali:

$$a_{0,6}\left\{y^3 - 3\,y\,x^2\right\}^2 + a_{0,0}\left\{x^3 - 3\,x\,y^2\right\}^2 +$$

$$a_{1,5}\left\{y^5 - 2\,x^2\,y^3 - 3\,x^4\,y\right\} + a_{2,4}\left\{x^2 + y^2\right\}^2 +$$

$$a_{3,5}\left\{y^3 - 3\,y\,x^2\right\} + a_{4,2}\left\{x^2 + y^2\right\} + a_{6,0} = 0$$

IV. — Simmetria rispetto a quattro assi reali:

$$a_{0,6}\left\{x^6 + y^6\right\} + a_{0,4}\,x^2\,y^2\left\{x^2 + y^2\right\} + a_{2,4}\left\{x^3 + y^2\right\}^2 +$$

$$+ a_{2,2}\, x^2 y^2 + a_{4,2}\,(x^2 + y^2) + a_{6,0} = 0$$

V. — Simmetria rispetto a cinque assi reali:

$$a_{0,6}\left\{x^2 + y^2\right\}^3 + a_{1,5}\left\{y^5 - 10\, x^2 y^3 + 5\, x^4 y\right\} +$$

$$a_{2,4}\left\{x^2 + y^2\right\}^2 + a_{4,2}\left\{x^2 + y^2\right\} + a_{6,0} = 0$$

VI. — Simmetria rispetto a sei assi reali:

$$a_{0,6}\left\{y^3 - 3\, y\, x^2\right\}^2 + a_{0,0}\left\{x^3 - 3\, x\, y^2\right\}^2 +$$

$$+ a_{2,4}\left\{x^2 + y^2\right\}^2 + a_{4,2}\left\{x^2 + y^2\right\} + a_{6,0} = 0$$

Applicazione dei resultati precedenti al caso particolare delle cubiche.

Linee diametrali

38. *Diametri e coniche diametrali ordinarie.* — Prendiamo l'equazione della cubica sotto la forma:

$$U_x = a_0\, x_5^3 + 3\, a_1\, x_3^2 + 3 a_2\, x_3 + a_3 = 0$$

dove le a sono binarie in x_1, x_2 di grado uguale al loro indice

$$a_3 = a_{111}\, x_1^3 + 3\, a_{112}\, x_1^2\, x_2 + 3\, a_{122}\, x_1\, x_2^2 + a_{222}\, x_2^3$$

$$a_2 = \beta_{11}\, x_1^2 + 2\, \beta_{12}\, x_1\, x_2 + \beta_{22}\, x_2^2$$

$$a_1 = \gamma_1\, x_1 + \gamma_2\, x_2\,.$$

Assumiamo per lato $x_3 = 0$ del triangolo fondamentale la retta all'infinito del piano della cubica.

L'equazioni del diametro e della conica diametrale di un punto di coordinate $(y_1\,,\ y_2\,,\ 0)$ sono rispettivamente:

$$\left[x_1 \frac{\partial\, U_y}{\partial\, y_1} + x_2 \frac{\partial\, U_y}{\partial\, y_2} + x_3 \frac{\partial\, U_y}{\partial\, y_3}\right]_{y_3=0} = 0$$

$$\left[\left(x_1 \frac{\partial}{\partial\, y_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial\, y_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial\, y_3}\right)^2 U_y\right]_{y_3=0} = 0$$

Ossia, eseguendo i calcoli:

$$x_1\left[a_{111}\,y_1^2+2\,a_{112}\,y_1\,y_2+a_{122}\,y_2^2\right]+$$

$$+\,x_2\left[a_{112}\,y_1^2+2\,a_{122}\,y_1\,y_2+a_{222}\,y_2^2\right]+$$

$$+\,x_3\left[\beta_{11}\,y_1^2+2\,\beta_{12}\,y_1\,y_2+\beta_{22}\,y_2^2\right]=0\,,$$

$$x_1^2\left[a_{111}\,y_1+a_{112}\,y_2\right]+x_2^2\left[a_{122}\,y_1+a_{222}\,y_2\right]+$$

$$+\,x_3^2\,(\gamma_1\,y_1+\gamma_2\,y_2)+2\,x_1\,x_2\left[a_{112}\,y_1+a_{122}\,y_2\right]+$$

$$+\,2\,x_1\,x_3\left[\beta_{11}\,y_1+\beta_1\,y_{22}\right]+2\,x_2\,x_3\left[\beta_{12}\,y_1+\beta_{22}\,y_2\right]=0\,.$$

Segue:

« *Per un punto P qualunque del piano passano due diametri e una conica diametrale ordinarî* ».

Se $(m\ ,\ n\ ,\ p)$ sono le coordinate omogenee di P e s'indica con λ il rapporto $\frac{y_1}{y_2}$ che serve ad individuare un punto sulla retta all'infinito; l'equazioni che determinano λ per mezzo di $(m\ ,\ n\ ,\ p)$ sono:

$$\lambda^2\left[a_{111}\,m+a_{112}\,n+\beta_{11}\,p\right]+2\,\lambda\left[a_{112}\,m+a_{122}\,n+\beta_{12}\,p\right]+$$

$$+\,a_{122}\,m+a_{222}\,n+\beta_{22}\,p=0\ ,$$

$$(1)\quad\begin{cases}\lambda\left[a_{111}\,m^2+a_{122}\,n^2+\gamma_1\,p^2+2\,a_{112}\,m\,n+2\,m\,p\,\beta_{11}+2\,n\,p\,\beta_{12}\right]+\\ +\,a_{112}\,m^2+a_{222}\,n^2+\gamma_2\,p^2+2\,a_{122}\,m\,n+2\,m\,p\,\beta_{12}+2\,n\,p\,\beta_{22}=0\,.\end{cases}$$

Finalmente le due equazioni lineari:

$$(2)\quad\begin{cases}x_1\,(a_{111}\,\lambda+a_{112})+x_2\,(a_{112}\,\lambda+a_{122})+x_3\,(\beta_{11}\,\lambda+\beta_{12})=0\\ x_1\,(a_{112}\,\lambda+a_{122})+x_2\,(a_{122}\,\lambda+a_{222})+x_3\,(\beta_{12}\,\lambda+\beta_{22})=0\end{cases}$$

servono ad individuare il centro della conica diametrale ordinaria del punto di parametro λ.

39. *Linee diametrali principali.* — Secondo i resultati generali ottenuti al N° 3. abbiamo in questo caso due linee diametrali principali e cioè:

« *La prima linea diametrale principale ossia l'inviluppo delle prime linee diametrali ordinarie. È una curva d'ordine zero costituita dai 4 centri*

della cubica che sono i quattro punti base del fascio delle coniche diametrali ordinarie ».

« *La seconda linea diametrale principale che può riguardarsi* (N⁰ 3.) :

1° *Come luogo dei centri delle coniche diametrali ordinarie* ;

2° *Come inviluppo dei diametri.*

Questa curva è una conica e la sua equazione si può ottenere in due modi :

1° *Eliminando* λ *fra le due lineari* (2) *del* N° *precedente ;*

2° *Annullando il discriminante della binaria quadratica* (1) *considerata come tale nelle due viriabili* y_1 , y_2 *il cui rapporto è* λ.

Questa equazione è la seguente :

$$x_1^2 (a_{111} a_{122} - a^2_{112}) + x^2_2 (a_{112} a_{222} - a^2_{122}) + x_3^2 (\beta_{11} \beta_{22} - \beta^2_{12}) +$$
$$+ x_1 x_2 (a_{111} a_{222} - a_{112} a_{122}) + x_1 x_3 (a_{111} \beta_{22} + \beta_{11} a_{122} - 2a_{112} \beta_{12}) +$$
$$+ x_2 x_3 (\beta_{11} a_{222} + \beta_{22} a_{112} - \beta_{12} a_{122}) = 0 .$$

Linee diametrali coniugate.

40. Chiameremo coniugati un diametro di un punto o e una conica diametrale di un punto o' ; quando o è uno dei punti all'infinito del diametro di o' e quindi o' è il punto all'infinito del diametro di o. Mentre un diametro ha una sola conica diametrale coniugata; una conica diametrale ha due diametri coniugati paralleli fra loro.

Riprendiamo l'equazione di un diametro :

$$x_1 \left\{ a_{111} \lambda^2 + 2a_{112} \lambda + a_{122} \right\} + x_2 \left\{ a_{112} \lambda^2 + 2a_{122} \lambda + a_{222} \right\} +$$
$$+ x_3 \left\{ \beta_{11} \lambda^2 + 2 \beta_{12} \lambda + \beta_{22} \right\} + 0$$

λ essendo il parametro del punto all'infinito del sistema di corde parallele a cui è relativo il diametro. Il parametro λ_1 del punto all' infinito del precedente diametro è :

$$\lambda_1 = - \frac{a_{112} \lambda^2 + 2a_{122} \lambda + a_{222}}{a_{111} \lambda^2 + 2a_{112} \lambda + a_{122}}$$

L'equazione di 2° grado in λ' :

$$\lambda_1 + \frac{a_{112} \lambda'^2 + 2 a_{122} \lambda' + a_{222}}{a_{111} \lambda'^2 + 2 a_{112} \lambda' + a_{122}} = 0$$

dà i parametri dei punti all' infinito della conica diametrale coniugata al

diametro che si considera e si trova che a un valore di λ' corrisponde un sol valore di λ_1, mentre a un valore di λ_1 corrispondono due valori di λ'.

L'equazione precedente è naturalmente soddisfatta per $\lambda' = \lambda$ giacchè se la retta polare di λ passa per λ_1, la conica polare di λ_1 passa per λ.

L'altra radice è

$$\lambda'_1 = \frac{\lambda (a_{111}\, a_{222} - a_{112}\, a_{122}) + 2\,(a_{112}\, a_{222} - a^2_{122})}{2\,\lambda\,(a^2_{112} - a_{111}\, a_{122}) + a_{112}\, a_{122} - a_{111}\, a_{222}}$$

Segue:

« *I due sistemi di corde parallele aventi per parametri dei due punti all'infinito rispettivamente*

$$\lambda \;\; e \;\; \lambda'_1$$

ammettono diametri paralleli. Queste ∞^1 *coppie di diametri paralleli sono le* ∞^1 *coppie di tangenti parallele della conica diametrale principale* ». Fra queste infinite coppie di sistemi, ve ne sono due costituite ognuna da sistemi coincidenti e corrispondono ai due casi in cui

$$\lambda = \lambda'_1$$

cioè alle due radici dell'equazione di 2° grado ·

$$\lambda^2\,(a^2_{112} - a_{111}\, a_{122}) + \lambda\,(a_{112}\, a_{122} - a_{111}\, a_{222}) + a_{112}\, a_{222} + {}^2_{122} = 0$$

e questo concorda col fatto che, in un fascio di coniche, e in particolare nel fascio delle coniche diametrali esistono sempre due (e non più di due) parabole.

41. *Centri.* — Come abbiamo gia notato i quattro punti base del fascio delle coniche diametrali ordinarie sono i quattro centri della cubica e insieme costituiscono la prima linea diametrale principale che è di ordine zero. Le tre coppie di lati opposti del quadrangolo dei centri costituiscono le tre coniche diametrali ordinarie che si spezzano; i tre punti diagonali appartengono contemporaneamente alla conica diametrale principale e all'hessiana: nella corrispondenza univoca che si stabilisce fra i punti dell'hessiana di una cubica, i corrispondenti di questi tre punti diagonali sono i tre punti all'infinito dell'hessiana.

Se la cubica è nodale uno dei centri cade nel nodo; se è cuspidale due centri sono riuniti nella cuspide perchè nel 1.° caso tutte le coniche polari passano per il nodo; nel 2.° caso passano per la cuspide avendo ivi per tangente comune la tangente cuspidale.

42. Premesse queste generalità, ci proponiamo la seguente ricerca: se cioè i quattro centri di una cubica possono essere i vertici di un quadrilatero semplice delle specie che ordinariamente si considerano nella geometria elementare: trapezio, parallelogrammo, rombo, rettangolo, quadrato-

Intenderemo di riferirci a cubiche di genere 1, o a cubiche nodali giacchè solamente allora i quattro centri sono distinti.

Trapezio. – Sia M N P Q (Fig. III.ª) il supposto trapezio dei centri; A il punto all'infinito comune alla coppia di lati paralleli del trapezio; r_∞ la retta all'infinito. Le rette A M , A Q costituiscono una delle tre coniche che si spezzano; il punto la cui conica polare è costituita da (A M , A Q) sarà un punto di r_∞ giacchè ogni conica passante per M , N , P , Q è una conica diametrale; non può essere A perchè A sarebbe un punto doppio e dovrebbe quindi coincidere con uno dei vertici del quadrangolo il quale non sarebbe più un trapezio; non può essere un altro punto K di r_∞ giacchè ne verrebbe che la conica polare di A si spezzerebbe in due rette parallele passanti per K : il trapezio sarebbe un parallelogrammo.

Per il trapezio dunque il problema non ha soluzione possibile.

43. *Parallelogrammo.* — Sia A B C D (Fig. Vª) il quadrangolo dei centri; F il punto comune all'infinito dei lati A B , C D ; G quello comune alla coppia A D , B C ; E il punto d'incontro delle diagonali del parallelogrammo. I punti F e G appartengono all'hessiana; dunque essa incontra la retta all'infinito in tre punti reali; sia E′ il 3⁰ punto. I punti E′ ed E sono punti corrispondenti dell'hessiana e infatti la conica polare di E′ deve essere una delle tre,

$$(A\,B\,,\,C\,D)\,;\,(A\,D\,,\,B\,C)\,;\,(A\,C\,,\,B\,D)\,.$$

Se fosse una delle due prime, per esempio la prima, ne seguirebbe che la conica polare di F si spezzerebbe in due rette parallele passanti per E′ e oltre alle tre coniche polari sopra scritte dei punti di r_∞ che si spezzano, ce ne sarebbe una quarta; dunque i punti E ed E′ sono corrispondenti. Anche G ed F sono corrispondenti e infatti il corrispondente di G deve essere sulla r_∞ perchè la conica polare che passa per G contenendo i quattro punti A , B , C , D è una conica diametrale ; non può essere G stesso perchè sarebbe un punto doppio e dovrebbe quindi coincidere con uno dei quattro punti A , B , C , D ; non può essere E′ perchè E′ corrisponde ad E; non può essere un punto K di r_∞ diverso da G , E′ , F altrimenti la conica polare di G spezzandosi in due rette passanti per K, ci sarebbero nel fascio delle coniche diametrali quattro coniche che si spezzerebbero. I punti G ed F corrispondendosi, ne viene che la retta all'infinito deve essere una tangente della Cayleyana. Viceversa se questo accade il quadrangolo dei centri è un parallelogrammo.

L'equazione della Cayleyana in coordinate (a_1 , a_2 , a_3) di rette è della forma:

$$\begin{gathered} A_{111}\,a_1^3 + A_{222}\,a_2^3 + A_{333}\,a_3^3 + 3\,A_{113}\,a_1^2\,a_1 + \\ + 3\,A_{133}\,a_1\,a_3^2 + 3\,A_{112}\,a_1^2\,a_2 + 3\,A_{122}\,a_1\,a_2^2 + \\ + 3\,A_{223}\,a_2^3\,a_3 + 3\,A_{233}\,a_2\,a_3^2 + 6\,A_{123}\,a_1\,a_2\,a_3 = 0 \end{gathered}$$

ove i coefficienti sono funzioni note dei coefficienti della cubica.

Se la retta all'infinito deve far parte di questo inviluppo, l'equazione precedente deve essere soddisfatta da:

$$\alpha_1 = 0 \quad ; \quad \alpha_2 = 0 \quad ; \quad \alpha_3 = 1$$

ossia deve essere

$$A_{333} = 0 .$$

Sostituendo il valore cognito di A_{333} espresso con i coefficienti della cubica possiamo dire che: « *la condizione necessaria e sufficiente affinchè i quattro centri di una cubica siano i vertici di un parallelogrammo è:*

$$\begin{vmatrix} \alpha_{111} & \alpha_{112} & \alpha_{122} \\ \alpha_{112} & \alpha_{122} & \alpha_{222} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

In particolare questa condizione è soddisfatta se nell'equazione della cubica mancano i termini di 1^0 grado in x_3 .

« *Esiste un sistema* ∞^8 *di cubiche i cui quattro centri sono i vertici di un parallelogrammo* ».

44. *Rettangolo.* — Perchè i quattro centri siano vertici di un rettangolo, bisognerà prima di tutto porre la condizione

$$A_{333} = 0$$

che esprime che il quadrangolo dei centri sia un parallelogrammo e poi l'altra che i due punti all'infinito della hessiana, che si corrispondono per la condizione $A_{333} = 0$, siano separati armonicamente dalla coppia dei punti ciclici del piano. Se non α' s'indicano i coefficienti dell'hessiana i quali sono funzioni note dei coefficienti della cubica, le intersezioni della hessiana con la retta all'infinito sono date da

$$(1) \qquad \alpha'_{111}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 + 3\,\alpha'_{112}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 3\,\alpha'_{122}\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + \alpha'_{222} = 0$$

Siano λ_1 , λ_2 , λ_3 le tre radici. Il porre $A_{333} = 0$ non porta altra conseguenza che la retta all'infinito sia tangente della Cayleyana; non porta cioè la conseguenza che due speciali fra i tre all'infinito dell'hessiana siano corrispondenti, ma due qualunque fra questi tre punti; quindi dopo aver messo la condizione:

$$A_{333} = 0$$

noi siamo sempre in arbitrio di scegliere due qualunque dei tre parametri λ_1 , λ_2 , λ_3 come parametri di punti corrispondenti.

Prendiamo i primi due; dovrà essere:

$$(\lambda_1 \lambda_2 i - i) = -1$$

ossia

$$\lambda_1 \lambda_2 = -1$$

e perciò

$$\lambda_3 = -\frac{\alpha'_{222}}{\alpha'_{111}}$$

cioè $-\frac{\alpha'_{222}}{\alpha'_{111}}$ deve essere una radice della (1). In questo caso dunque il problema è possibile quando sono soddisfatte le due relazioni fra i coefficienti della cubica:

$$\begin{vmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{122} \\ a_{122} & a_{122} & a_{222} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{aligned} 3\,(\alpha'_{112}\,\alpha'^2_{222} - \alpha'_{122}\,\alpha'_{111}\,\alpha'_{222}) &= \\ = \alpha'^3_{222} - \alpha'_{222}\,\alpha'^2_{111} \end{aligned}$$

essendo le α' i coefficienti dell'hessiana.

« *Esiste un sistema* ∞^7 *di cubiche i cui centri sono i vertici di un rettangolo* ».

45. *Rombo.* — Perchè i quattro centri siano vertici di un rombo, occorrerà, prima di tutto, porre $A_{333} = 0$; poi che le diagonali del parallelogrammo (che così vengono a formare i centri) siano ortogonali, cioè che la conica polare di uno qualunque dei tre punti all'infinito della hessiana, sia costituita da tre rette ortogonali. Dunque, secondo i resultati del N° 12, la nuova condizione da porsi è che

$$-\frac{a_{222} + a_{112}}{a_{111} + a_{122}}$$

sia una radice della (1) del N.° precedente.

In questo caso le condizioni cercate sono quindi:

$$\begin{vmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{122} \\ a_{112} & a_{112} & a_{122} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{aligned} &-\alpha'_{111}\,(a_{222} + a_{112})^3 + 3\,\alpha'_{112}\,(a_{222} + a_{112})^2\,(a_{111} + a_{112}) - \\ &- 3\,\alpha'_{222}\,(a_{222} + a_{112})\,(a_{111} + a_{122})^2 + \\ &+ \alpha'_{222}\,(a_{111} + a_{122})^3 = 0\,. \end{aligned}$$

« *Esiste un sistema* ∞^7 *di cubiche i cui centri sono i vertici di un rombo* ».

46. *Quadrato.* — Perchè il problema sia possibile in questo caso, basta evidentemente associare le condizioni trovate per il rombo e per il rettangolo.

« *Esiste un sistema* ∞^6 *di cubiche i cui centri sono i vertici di un quadrato* ».

Assi di simmetria.

47. Particolarizzando per una cubica i resultati ottenuti ai n. 4, 5, 6, per le curve di grado dispari in generale, abbiamo i teoremi seguenti:

« *La condizione necessaria sufficiente perchè una cubica possegga un asse di simmetria è che abbia un flesso all'infinito che sia il coniugato armonico del punto all'infinito della polare armonica del flesso rispetto alla coppia dei punti ciclici del piano* ».

« *Questa polare armonica è l'asse richiesto* ».

« *Data una retta*

$$x_2 = m\, x_1 + n\, x_3 \tag{1}$$

e una cubica

$$a_x{}^3 = 0$$

le condizioni che debbono essere soddisfatte perchè la retta (1) *sia un asse di simmetria della cubica sono*:

$$a_{\alpha(1)}\, a^2{}_{\alpha(2)} = 0 \quad ; \quad a_{\alpha(1)}\, a^2{}_{\alpha(3)} = 0 \quad ;$$

$$a_{\alpha(1)}\, a_{\alpha(2)}\, a_{\alpha(3)} = 0 \quad ; \quad a^3{}_{\alpha(1)} = 0$$

dove:

$$a_1{}^{(1)} = a_2{}^{(2)} = a_3{}^{(3)} = 1 \quad ; \quad a_3{}^{(1)} = a_3{}^{(2)} = 0 \ ,$$

$$a_1{}^{(3)} = -\, m\, n \quad ; \quad a_2{}^{(3)} = n \quad ; \quad a_1{}^{(2)} = -\, a_2{}^{(1)} = -\, m \text{ ».}$$

« *Tutte le cubiche simmetriche rispetto a una medesima retta costituiscono un sistema lineare* ∞^5 ».

48. Quando si sappia che la cubica possiede un flesso all'infinito e si conosca il parametro $\lambda = \dfrac{m}{n}$ che individua il flesso sulla retta all'infinito, il problema precedente si risolve con grande semplicità.

E infatti l'equazione della tangente di flesso sarà della forma:

$$n\, x_1 - m\, x_2 + p\, x_3 = 0$$

dove p sarà da determinarsi in modo che fra tutte le rette parallele che rappresenta le equazione precedente; quando in essa m ed n sono costanti e p varia da retta, a retta; l'equazione precedente rappresenti la tangente

di flesso. Supponiamo che ciò avvenga per il valore p' di p. Allora l'equazione della cubica può mettersi sotto la forma:

$$\left\{ n\,x_1 - m\,x_2 + p'\,x_3 \right\} \times$$

$$\times \left\{ a\,x_1^2 + b\,x_2^2 + c\,x_3^2 + 2\,h\,x_1\,x_2 + 2\,g\,x_1\,x_3 + 2\,f x_2\,x_3 \right\} = k\,x_3^3$$

La conica polare del punto $(m\,,\,n\,,\,o)$ è:

$$\left\{ n\,x_1 - m\,x_2 + p'\,x_3 \right\} \times$$

$$\times \left\{ x_1\,(a\,m + h\,n) + x_2\,(h\,m + b\,n) + x_3\,(g\,m + f\,n) \right\} = 0$$

che si spezza naturalmente nella tangente di flesso:

$$n\,x_1 - m\,x_2 + p'\,x_3 = 0.$$

e nella polare armonica corrispondente:

$$x_1\,(a\,m + h\,n) + x_2\,(h\,m + b\,n) + x_3\,(g\,m + f\,n) = 0\,.$$

Se il triangolo fondamentale è stato preso rettangolo nel vertice $(0,\,0\,,\,1)$ si passa alle coordinate cartesiane ortogonali supponendo $x_3 = 1$ e affinchè le due rette precedenti siano ortogonali deve essere

$$m\,n\,(a - b) - h\,(m^2 - n^2) = 0\,.$$

La condizione cercata è dunque che fra il parametro λ del flesso all'infinito e i coefficienti a, b, h passi la relazione:

$$\lambda^2 - \lambda\,\frac{a - b}{h} - 1 = 0$$

quando però l'equazione della cubica in coordinate cartesiane x e y sia ridotta della forma:

$$(x - \lambda\,y + p)\,(a\,x^2 + b\,y^2 + 2\,h\,x\,y + 2\,g\,x + 2\,f y + c) = k.$$

I valori di λ tratti dalla equazione:

$$\lambda^2 - \lambda\,\frac{a - b}{h} - 1 = 0$$

son sempre reali perchè il discriminante è sempre positivo; questi valori sono indeterminati quando

$$a = b \quad ; \quad h = 0$$

cioè quando la ternaria quadratica; che entra nella equazione della cubica; uguagliata a zero rappresenta un cerchio. In questo caso la cubica è ciclica, cioè passa per i punti ciclici del piano: qualunque sia λ l'equazione:

$$h\lambda^2 - (a - b)\lambda - h = 0$$

è soddisfatta; dunque:

« *La condizione necessaria e sufficiente affinchè una cubica ciclica abbia una retta di simmetria è che abbia un flesso all'infinito* ».

49. Se la tangente di flesso è la retta all'infinito, la cubica è una parabola divergente. Prendendo il flesso nel vertice (0, 1, 0) del triangolo fondamentale, l'equazione della cubica può scriversi:

$$x_3 \left\{ a x_1^2 + b x_2^2 + c x_3^2 + 2h x_1 x_2 + 2g x_1 x_3 + 2f x_2 x_3 \right\} = k x_1^3.$$

La conica polare del punto (0, 1,0) è

$$x_3 \left\{ h x_1 + b x_2 + f x_3 \right\} = 0.$$

che si spezza nella tangente di flesso $x_3 = 0$ e nella polare armonica corrispondente:

$$h x_1 + b x_2 + f x_3 = 0 .$$

Questa deve essere perpendicolare alle rette che hanno la direzione del flesso e per esempio alla

$$x_1 = 0 .$$

Se quindi il triangolo fondamentale è stato preso rettangolo in (0, 0, 1) e si passa alle coordinate cartesiane x, y ponendo $x_3 = 1$, la condizione affinchè le due rette

$$h x + b y + f = 0; \qquad x = 0$$

siano ortogonali è $h = 0$. Si giunge alla stessa conclusione ponendo il flesso nel vertice (1, 0, 0).

« *La condizione necessaria e sufficiente affinchè una cubica parabola di-*

vergente, ammetta una retta di simmetria è che, preso per punto all'infinito di un asse di un sistema cartesiano ortogonale il flesso, l'equazione della cubica manchi del prodotto delle due variabili x, y ».

50. Abbiamo già dato al n. 37 la forma delle equazioni di cubiche simmetriche. Vogliamo ora mostrare come si possano riconoscere le diverse forme che può avere qualcuna di quelle curve. Fra di esse le più notevoli sono quelle simmetriche rispetto a tre assi reali. Vediamo come si possano classificare relativamente alla forma e al numero dei rami che le compongono.

Riferendo la curva a un sistema cartesiano ortogouale di cui l'asse delle x sia un asse di simmetria e l'origine il punto comune agli assi reali, l'equazione di queste curve è della forma (n. 37):

$$x^3 - 3\,x\,y^2 + \lambda\,(x^2 + y^2) + \mu = 0$$

essendo λ e μ i paramenti che servono a individuare la curva.

L'equazione dei tre assi sono:

$$y = 0 \quad ; \quad y = x\sqrt{3} \quad ; \quad y = -x\sqrt{3}.$$

La curva ha tre flessi all'infinito nelle direzioni perpendicolari ai tre assi. Se si assume per triangolo fondamentale quello formato dagli assi cartesiani e dalla retta all'infinito, le coordinate dei flessi sono:

$$(0,\ 1,\ 0) \quad ; \quad (\sqrt{3},\ 1,\ 0) \quad ; \quad (-\sqrt{3},\ 1,\ 0).$$

Le equazioni degli asintoti:

$$x = \frac{\lambda}{3}\,; \quad x - \sqrt{3}\,y + \frac{2}{3}\lambda = 0 \quad ; \quad x + \sqrt{3}\,y + \frac{2}{3}\lambda = 0\,.$$

Essi formano un triangolo equilatero i cui vertici stanno sugli assi di simmetria; le coordinate dei vertici sono:

$$\left(\frac{\lambda}{3}\,,\ \frac{\lambda}{\sqrt{3}}\right) \quad ; \quad \left(\frac{\lambda}{3}\,,\ -\frac{\lambda}{\sqrt{3}}\right) \quad ; \quad \left(-\frac{2\lambda}{\sqrt{3}}\,,\ 0\right)$$

Dunque:

« *Tutte le cubiche simmetriche rispetto ai tre medesimi assi costituiscono una rete. In questa rete sono immersi gli infiniti fasci ognuno dei quali è formato da tutte quelle cubiche che oltre avere comuni gli assi di simmetria, hanno anche comuni gli asintoti. I nove punti base di ogni fascio si raggruppano a tre, a tre nei flessi all'infinito* ».

51. Per esaminare a quali forme diverse di curve può dar luogo la equazione del n. precedente, osserveremo che le intersezioni della cubica con la retta all'infinito sono reali e quindi la curva avrà sempre rami estendentesi indefinitamente, nè potrà essere costituita da un solo ramo tutto situato a distanza finita. Inoltre è noto che una curva di genere p possiede $p+1$ rami al massimo; dunque la nostra cubica potra essere costituita da uno, o da due rami. In ognuno di questi casi dovrà sempre esistere un ramo esteso indefinitamente in tre direzioni. Quindi nel 1° caso la curva possiederà questo sol ramo (Fig. 1ª e 2ª); nel 2° questo ramo insieme ad un altro chiuso, simmetrico rispetto ai tre assi e perciò non avente flessi altrimenti una tangente di flesso incontra in più di tre punti la cubica; questo 2° ramo sarà dunque un'ovale simmetrica rispetto ai tre assi e situata internamente al triangolo degli asintoti. Il ramo infinito può essere di due specie a seconda che incontra in tre punti reali, o in uno ogni perpendicolare agli assi. Nel 1° caso lo chiameremo ramo infinito di 1ª specie; nel 2° ramo infinito di 2ª specie.

52. Esaminiamo ora se esistono condizioni analitiche a cui debbano soddisfare i parametri λ, μ corrispondenti a questi diversi casi.

1. *Caso.* — « *La curva è costituita da un sol ramo infinito* » (Fig. 1ª e 2ª).

La condizione analitica corrispondente si trova esprimendo che l'asse delle x incontri la curva in un sol punto reale, ossia che l'equazione:

$$x^3 + \lambda x^2 + \mu = 0 \tag{1}$$

abbia una sola radice reale. Ora il suo discriminante è

$$\mu\left(\frac{4}{27}\lambda^3 + \mu\right).$$

Se dunque si pone

$$4\lambda^3 + 27\mu = \Delta$$

la condizione richiesta è che $\Delta\mu$ sia positivo. Per distinguere ulteriormente il ramo infinito di 1ª specie da quello di 2ª specie, occorre osservare che nel 1.° caso l'equazione

$$\lambda y^2 + \mu = 0$$

che dà le intersezioni (le due che sono a distanza finita) dell'asse delle y con la curva debbono essere reali (Fig. 2.ª); nel 2° immaginarie (Fig. 1ª) nel 1° caso si richiederà quindi che $\lambda\mu$ sia negativo: positivo nel 2°.

2. *Caso.* — « *La curva oltre il ramo infinito possiede anche l'ovale* » (Fig. 6ª).

L'equazione (1) del caso precedente possiede allora tre radici reali e quindi

$$\Delta\,\mu < 0.$$

Il ramo infinito non può essere in questo caso di 1ª specie, altrimenti l'asse delle y avrebbe con la curva più di tre punti a comune.

53. Se $\Delta = 0$ la curva si spezza in tre rette; se $\lambda = 0$ il discriminante della (1) è positivo e quindi si ha un ramo infinito di 2ª specie; se finalmente si annulla μ, la curva possiede un punto isolato all'origine e il rimanente è un ramo infinito di seconda specie.

Possiamo riunire questa discussione nel seguente quadro:

$\lambda \gtrless 0$:

- $\Delta\mu > 0$:
  - $\lambda\mu < 0$: **Un ramo infinito di 1ª specie** — *Es.*: ($\lambda = -1$; $\mu = 1$) *Fig.* 2ª
  - $\lambda\mu > 0$: **Un ramo infinito di 2ª specie** — *Es.*: ($\lambda = 1$; $\mu = 1$) *Fig.* 1ª
- $\Delta\mu < 0$: **Un ramo infinito di 2ª specie e un'ovale** — *Es.*: ($\lambda = 3$; $\mu = -1$) *Fig.* 6ª
- $\Delta\mu = 0$:
  - $\Delta = 0$: **La curva si spezza in tre rette** — *Es.*: ($\lambda = -3$; $\mu = 4$)
  - $\mu = 0$: **Un punto isolato all'origine e un ramo infinito di 2ª specie** — *Es.*: ($\lambda = 1$; $\mu = 0$)

$\lambda = 0$: **Un ramo infinito di 2ª specie** — *Es.*: ($\lambda = 0$; $\mu = 1$) *Fig.* 1ª

Applicazione dei risultati generali al caso particolare delle quartiche.

Linee diametrali.

54. L'equazione di una quartica può porsi sotto la forma:

$$U_x = a_0 x_3^4 + 4 a_1 x_3^3 + 6 a_2 x_3^2 + 4 a_3 x_3 + a_4 = 0$$

dove le a sono binarie in x_1 ; x_2 di grado uguale al loro indice:

$$a_4 = a_{1111} x_1^4 + 4 a_{1112} x_1^3 x_2 + 6 a_{1122} x_1^2 x_2^2 + 4 a_{1222} x_1 x_2^2 + a_{2222} x_2^4,$$

$$a_3 = \beta_{111} x_1^3 + 3 \beta_{112} x_1^2 x_2 + 3 \beta_{122} x_1 x_2^2 + \beta_{222} x_2^3,$$

$$a_2 = \gamma_{11} x_1^2 + 2 \gamma_{12} x_1 x_2 + \gamma_{22} x_2^2,$$

$$a_1 = \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2.$$

L'equazione della cubica diametrale di un punto (y_1 , y_2 , O) è:

$$y_1 \frac{\partial U_x}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial U_x}{\partial x_2} = 0$$

ossia

$$x_1^3 \left\{ a_{1111} y_1 + a_{1112} y_2 \right\} + x_2^3 \left\{ a_{1222} y_1 + a_{2222} y_2 \right\} +$$

$$+ x_3^3 \left\{ \delta_1 y_1 + \delta_2 y_2 \right\} + 3 x_1^2 x_2 \left\{ a_{1112} y_1 + a_{1122} y_2 \right\} +$$

$$+ 3 x_1 x_2^2 \left\{ a_{1122} y_1 + a_{1222} y_2 \right\} + 3 x_1^2 x_3 \left\{ \beta_{111} y_1 + \beta_{112} y_2 \right\} +$$

$$+ 3 x_1 x_3^2 \left\{ \gamma_{11} y_1 + \gamma_{12} y_2 \right\} + 3 x_2^2 x_3 \left\{ \beta_{122} y_1 + \beta_{222} y_2 \right\} +$$

$$+ 3 x_2 x_3^2 \left\{ \gamma_{12} y_1 + \gamma_{22} y_2 \right\} + 6 x_1 x_2 x_3 \left\{ \beta_{112} y_1 + \beta_{122} y_2 \right\} = 0$$

« *Tutte le cubiche diametrali formano un fascio i cui 9 punti base sono i 9 centri della quartica e costituiscono insieme la 1ª linea diametrale principale che è di ordine zero* ».

Per un punto (m , n , p) del piano passa una sola cubica diametrale: il parametro λ corrispondente è dato dalla equazione:

$$\lambda \Big\{ a_{1111}\, m^3 + a_{1222}\, n^3 + \delta_1\, p^3 + 3\, m^2\, n\, a_{1112} +$$
$$+ 3\, m\, n^2\, a_{1122} + 3\, m^2\, p\, \beta_{111} + 3\, m\, p^2\, \gamma_{11} +$$
$$+ 3\, n^2\, p\, \beta_{122} + 3\, n\, p^2\, \gamma_{12} + 6\, m\, n\, p\, \beta_{112} \Big\} +$$
$$+ a_{1112}\, m^3 + a_{2222}\, n^3 + \delta_2\, p^3 + 3\, m^2\, n\, a_{1122} +$$
$$+ 3\, m\, n^2\, a_{1222} + 3\, m^2\, p\, \beta_{112} + 3\, m\, p^2\, \gamma_{12} +$$
$$+ 3\, n^2\, p\, \beta_{222} + 3\, n\, p^2\, \gamma_{22} + 6\, m\, n\, p\, \beta_{122} = 0$$

55. L'equazione della conica diametrale di un punto $(y_1\ ,\ y_2\ ,\ 0)$ è:

$$\left[\left(x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial y_3} \right)^2 U_k \right]_{y_3 = 0} = 0$$

Ovvero:

$$x_1^2 \Big\{ a_{1111}\, y_1^2 + 2\, a_{1112}\, y_1\, y_2 + a_{1122}\, y_2^2 \Big\} +$$
$$+ x_2^2 \Big\{ a_{1122}\, y_1^2 + 2\, a_{1222}\, y_1\, y_2 + a_{2222}\, y_2^2 \Big\} +$$
$$+ x_3^2 \Big\{ \gamma_{11}\, y_1^2 + 2\, \gamma_{12}\, y_1\, y_2 + \gamma_{22}\, y_2^2 \Big\} +$$
$$+ 2\, x_1\, x_2 \Big\{ a_{1112}\, y_1^2 + 2\, a_{1122}\, y_1\, y_2 + a_{1222}\, y_2^2 \Big\} +$$
$$+ 2\, x_1\, x_3 \Big\{ \beta_{111}\, y_1^2 + 2\, \beta_{112}\, y_1\, y_2 + \beta_{122}\, y_2^2 \Big\} +$$
$$+ 2\, x_2\, x_3 \Big\{ \beta_{112}\, y_1^2 + 2\, \beta_{122}\, y_1\, y_2 + \beta_{222}\, y_2^2 \Big\} = 0.$$

Per un punto $(m\ ,\ n\ ,\ p)$ del piano passano due coniche diametrali. I parametri dei punti all'infinito di cui esse sono coniche diametrali sono le due radici della quadratica:

$$\lambda^2 \Big\{ a_{1111}\, m^2 + a_{1122}\, n^2 + \gamma_{11}\, p^2 +$$
$$+ 2\, m\, n\, a_{1112} + 2\, m\, p\, \beta_{111} + 2\, n\, p\, \beta_{112} \Big\} +$$
$$+ 2\, \lambda \Big\{ a_{1112}\, m^2 + a_{1222}\, n^2 + \gamma_{12}\, p^2 +$$
$$+ 2\, m\, n\, a_{1122} + 2\, m\, p\, \beta_{112} + 2\, n\, p\, \beta_{112} \Big\} +$$
$$+ a_{1122}\, m^2 + a_{2222}\, n^2 + \gamma_{22}\, p^2 +$$
$$+ 2\, m\, n\, a_{1222} + 2\, m\, p\, \beta_{222} + 2\, n\, p\, \beta_{222} = 0\,.$$

Se s'indica con U il coefficiente di λ^2, con V quello di 2λ e con W quello indipendente, l'equazione della conica diametrale di un punto di parametro λ assume la forma

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + W = 0$$

dove

$$U = 0 \quad , \quad V = 0 \quad , \quad W = 0 \text{ sono coniche.}$$

Allora da questa equazione e dai resultati generali ottenuti ai N.° 2 e 3 resulta:

La seconda linea diametrale principale è una quartica:

Essa può riguardarsi:

1° *Come il luogo dei centri delle cubiche diametrali ordinarie;*

2° *Come il luogo dei punti le cui coniche polari sono parabole;*

3° *Come l'inviluppo delle coniche diametrali ordinarie* ».

L'equazione di questa curva è

$$U W - V^2 = 0$$

« *Sei coniche diametrali si spezzano ognuna in due rette. Queste* 12 *rette sono* 12 *bitangenti della seconda linea diametrale principale* ».

Per uno qualunque dei sei punti doppi P_i delle coniche diametrali passano le quattro seguenti curve:

1° *La terza linea diametrale principale*;

2° *La steineriana della quartica primitiva*;

3° *La jacobiana della rete di coniche individuata dalle tre U, V, W;*

4° *L'hessiana della cubica diametrale del punto all'infinito la cui conica diametrale ha per punto doppio il punto* P_i.

La jacobiana della rete individuata da U ; V ; W contiene pure i tre punti diagonali di ogni quadrangolo determinato dai quattro centri di ogni cubica diametrale.

Le sei coppie di rette in cui si spezzano le coniche diametrali essendo bitangenti della quartica:

$$U W - V^2 = 0$$

sono anche tangenti semplici della Cayleyana della rete individuata da U , V , W.

I sei valori di λ che annullano il discriminante di

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + W = 0$$

sono i sei parametri dei sei punti all'infinito dell'hessiana della quartica primitiva. Se quindi dai sei punti P_i si tirano delle rette che abbiano per parametri dei punti all'Infinito i corrispondenti sei valori di λ suddetti, si otterranno sei tangenti della Cayleyana della quartica data.

La jacobiana della rete individuata da U , V , W incontra la seconda linea diametrale principale in 12 punti; esistono dunque 12 coniche diametrali ognuna delle quali ha a comune con questa linea un quadri-punto e due bi-punti: ma ogni quaderna di punti di contatto di una conica diametrale con la seconda linea diametrale principale; costituisce quattro centri di una cubica diametrale e se due di questi centri coincidono la cubica è cuspidale; d'altra parte nel fascio delle cubiche diametrali ve ne sono 12 e non più con un punto doppio, dunque se ne conclude che:

« *Tutte le cubiche diametrali di genere zero sono cuspidali* ».

La terza linea diametrale principale e l'ipocicloide di Steiner.

56. Fra tutte le linee diametrali di una quartica, la più notevole è la terza linea diametrale principale. Secondo i resultati generali questa linea può riguardarsi:

1° *Come il luogo dei centri delle coniche diametrali ordinarie*;

2° *Come il luogo dei punti le cui cubiche polari toccano la retta all'infinito*;

3° *Come l'inviluppo dei diametri.*

Questa curva è del 4° ordine e di 3° classe; possiede quindi tre cuspidi e una bitangente. Si presenta perciò naturalmente la questione di ricercare se essa può essese un ipocicloide di Steiner.

Vediamo intanto come si possa trovarne l'equazione.

Ponendo

$$b_0 = a_{1111}\, x_1 + a_{1112}\, x_2 + \beta_{111}\, x_3$$
$$b_1 = a_{1112}\, x_1 + a_{1122}\, x_2 + \beta_{112}\, x_3$$
$$b_2 = a_{1122}\, x_1 + a_{1222}\, x_2 + \beta_{122}\, x_3$$
$$b_3 = a_{1222}\, x_1 + a_{2222}\, x_2 + \beta_{222}\, x_3$$

il diametro di un punto $(y_1 , y_2 , 0)$ è

$$b_0\, y_1^3 + 3\, b_1\, y_1^2\, y_2 + 3\, b_2\, y_1\, y_2^2 + b_3\, y_2^3 = 0\,. \tag{1}$$

Resulta intanto che per un punto P del piano passano tre diametri della quartica. Si ritrova così che la curva di cui si cerca l'equazione è di 3ª classe.

D'altra parte essa fa certamente parte del luogo di un punto P tale che coincidano due dei tre diametri della curva che passano per esso. Siano l , m , n questi diametri. Due di queste tre rette; per esempio l , m possono cincidere per due ragioni diverse; o perchè un polo di l e uno di m coincidono in uno stesso punto all'infinito e allora il

stesso punto dell' infinito e allora il luogo del punto P è l'inviluppo dei diametri : o perchè due poli di l sono situati all' infinito (coincidenti, o no); in quest' ultimo caso il luogo del punto P costituisce l' insieme delle bitangenti dell' inviluppo precedente.

È per questo che quando si annulla il discriminante della binaria (1) in y_1 , y_2 si ottiene una equazione cui soddisfa il solo inviluppo, ma non l'insieme delle sue bitangenti, quantunque tanto per un punto di una bitangente quanto per un punto dell' inviluppo passino due diametri coincidenti della quartica.

L'equazione dell' inviluppo è dunque :

$$P_x = b_0^2 b_3^2 - 6 b_0 b_1 b_2 b_3 + 4 b_1^3 b_3 + 4 b_0 b_2^3 - 3 b_1^2 b_2^2 = 0$$

cioè una curva del 4° ordine.

L'equazione precedente può anche porsi sotto la forma di determinante:

$$P_x = \begin{vmatrix} b_0 & 2 b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & 2 b_1 & b_2 \\ b_1 & 2 b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_1 & 2 b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

57. Se si annulla identicamente l'hessiano della binaria (1) del N° 56, si ottengono le condizioni che devono essere soddisfatte affinchè le tre radici della (1) nel rapporto $\frac{y_1}{y_2}$ siano coincidenti. Queste condizioni sono le seguenti:

$$\frac{b_0}{b_1} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2}{b_3} .$$

Dunque i tre punti comuni alle tre coniche:

$$U_x = b_0 b_2 - b_1^2 = 0$$

$$V_x = b_0 b_3 - b_1 b_2 = 0$$

$$W_x = b_1 b_3 - b_2^2 = 0$$

saranno tali che i tre diametri l , m , n passanti per ognuno di essi coincideranno perchè un polo di l, uno di m, e uno di n sono riuniti in un sol punto all'infinito. È per questo che le tre coniche precedenti non passano per i punti di contatto della bitangente quantunque ognuno di questi punti sia tale che coincidano in una sola retta i tre diametri della quartica passanti per esso: questa coincidenza avviene ivi perchè due poli di l sono all'infinito non coincidenti e un polo del diametro rimanente m coincide con uno dei poli di l all'infinito.

Dunque: *Le tre coniche u_x , v_x , w_x passano per le tre cuspidi della quartica P_x . Gli altri due punti in cui v_x incontra u_x e w_x sono quelli in cui P_x è toccato dalle rette b_0 , b_3 e anche appartengono il primo alla retta b_1 ; il secondo alla retta b_2.*

Il punto comune a u_x e w_x (non giacente su v_x) sta sulle rette b_1 e b_2 contemporaneamente ma non appartiene a P_x.

Queste proprietà si verificano direttamente sulle equazioni di u_x ; v_x ; w_x e su quella di P_x la quale può anche scriversi sotto la forma:

$$v_x \left(b_0 b_3 - 4 b_1 b_2 \right) + 4 \left(b_1^2 w_x - b_2^2 u_x \right) = 0 .$$

58. Se si sostituiscono per b_0 , b_1 , b_2 , b_3 i loro valori si trova:

$$u_x = x_1^2 \left\{ a_{1111} a_{1122} - a^2_{1112} \right\} + x_2^2 \left\{ a_{1112} a_{1222} - a^2_{1122} \right\} +$$

$$+ x_3^2 \left\{ \beta_{111} \beta_{122} - \beta^2_{112} \right\} + x_1 x_2 \left\{ a_{1111} a_{1222} - a_{1112} a_{1122} \right\} +$$

$$+ x_1 x_3 \left\{ a_{1111} \beta_{122} + a_{1122} \beta_{111} - 2a_{1122} \beta_{112} \right\} +$$

$$+ x_2 x_3 \left\{ a_{1112} \beta_{122} + \beta_{122} a_{1222} - 2a_{1122} \beta_{112} \right\} = 0 .$$

$$w_x = x_1^2 \left\{ a_{1112} a_{1222} - a^2_{1122} \right\} + x_2^2 \left\{ a_{1122} a_{2222} - a^2_{1222} \right\} +$$

$$+ x_3^2 \left\{ \beta_{112} \beta_{222} - \beta^2_{222} \right\} + x_1 x_2 \left\{ a_{1112} a_{2222} - a_{1122} a_{1222} \right\} +$$

$$+ x_1 x_3 \left\{ a_{1112} \beta_{222} + a_{1222} \beta_{112} - 2a_{1122} \beta_{122} \right\} +$$

$$+ x_2 x_3 \left\{ a_{1122} \beta_{222} + a_{2222} \beta_{112} - 2a_{1222} \beta_{122} \right\} = 0.$$

Segue, per i resultati del N° 49, che le due coniche:

$$u_x = 0 \quad ; \quad w_x = 0$$

coincidono con le coniche diametrali principali delle due cubiche:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ a_4 + a_3 x_3 \right\} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ a_4 + a_3 x_3 \right\} = 0,$$

onde ogni cuspide della quartica P_x è centro comune a due delle coniche

diametrali ordinarie delle cubiche precedenti.

59. È noto che la caratteristica della ipocicloide steineriana (fra tutte le ipocicloidi) è di toccare la retta all'infinito nei punti ciclici del piano. Se dunque riesciamo a trovare le condizioni analitiche che debbono essere soddisfatte affinchè la bitangente della quartica tricuspidale P_x sia la retta all'infinito e i punti di contatto sieno i punti ciclici, i diametri della quartica primitiva invilupperanno l'ipocicloide suddetta.

Ora le condizioni perchè una curva di grado n pari tocchi $\frac{n}{2}$ volte la retta all'infinito nei punti ciclici sono state trovate in generale al N⁰ 7 e chiamammo allora ipercicliche le curve che godevano questa proprietà.

Nel caso nostro queste condizioni si riducono a che la binaria biquadratica in x_1, x_2 che entra nell'equazione della curva sia la potenza seconda, a meno di un coeffiente esterno, di

$$x_1^2 + x_2^2.$$

Se quindi s'indicano con A_{1111} ; A_{1112} ; . . . , i coefficienti di questa binaria, nella equazione di P_x, dovremmo avere:

$$A_{1111} = A_{2222} = \frac{1}{2} A_{1122},$$

$$A_{1112} = A_{1222} = 0 .$$

Ma la binaria biquadratica in x_1, x_2, nell'equazione di P_x, è evidentemente il determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{1111}x_1 + a_{1112}x_2; & 2(a_{1112}x_1 + a_{1122}x_2); & a_{1122}x_1 + a_{1222}x_2; & 0 \\ 0 \quad ; & a_{1111}x_1 + a_{1112}x_2 \; ; & 2(a_{1112}x_1 + a_{1122}x_2); & a_{1122}x_1 + a_{1222}x_2 \\ a_{1112}x_1 + a_{1122}x_2; & 2(a_{1122}x_1 + a_{1222}x_2); & a_{1222}x_1 + a_{2222}x_2; & 0 \\ 0 \quad ; & a_{1112}x_1 + a_{1122}x_2 \; ; & 2(a_{1122}x_1 + a_{1222}x_2); & a_{1222}x_1 + a_{2222}x_2 \end{vmatrix} .$$

Le condizioni richieste sono dunque le quattro seguenti:

$$2 \begin{vmatrix} a_{1111} & 2\,a_{1112} & a_{1122} & 0 \\ 0 & a_{1111} & 2\,a_{1112} & a_{1122} \\ a_{1112} & 2\,a_{1122} & a_{1222} & 0 \\ 0 & a_{1112} & 2\,a_{1122} & a_{1222} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_{1112} & 2\,a_{1122} & a_{1222} & 0 \\ 0 & a_{1112} & 2\,a_{1122} & a_{1222} \\ a_{1122} & 2\,a_{1222} & a_{2222} & 0 \\ 0 & a_{1122} & 2\,a_{1222} & a_{2222} \end{vmatrix} =$$

$$
=\left\{
\begin{vmatrix}
\alpha_{1111} & 2\,\alpha_{1112} & \alpha_{1222} & 0 \\
0 & \alpha_{1111} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{1222} \\
\alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{2222} & 0 \\
0 & \alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1222} & \alpha_{2222}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
\alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{1122} & 0 \\
0 & \alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1112} & \alpha_{1122} \\
\alpha_{1122} & 2\,\alpha_{1222} & \alpha_{1222} & 0 \\
0 & \alpha_{1122} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{1222}
\end{vmatrix}
+
\right.
$$

$$
+
\begin{vmatrix}
\alpha_{1111} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{1122} & 0 \\
0 & \alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1112} & \alpha_{1222} \\
\alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1222} & \alpha_{1222} & 0 \\
0 & \alpha_{1122} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{2222}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
\alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1112} & \alpha_{1222} & 0 \\
0 & \alpha_{1111} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{1122} \\
\alpha_{1122} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{2222} & 0 \\
0 & \alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1222} & \alpha_{1222}
\end{vmatrix}
+
$$

$$
+
\begin{vmatrix}
\alpha_{1111} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{1222} & 0 \\
0 & \alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{1122} \\
\alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1222} & \alpha_{2222} & 0 \\
0 & \alpha_{1122} & 2\,\alpha_{1222} & \alpha_{1222}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
\alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1112} & \alpha_{1122} & 0 \\
0 & \alpha_{1111} & 2\,\alpha_{1112} & \alpha_{1222} \\
\alpha_{1122} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{1222} & 0 \\
0 & \alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{2222}
\end{vmatrix}
\Bigg\};
$$

$$
\begin{vmatrix}
\alpha_{1111} & 2\,\alpha_{1112} & \alpha_{1122} & 0 \\
0 & \alpha_{1111} & 2\,\alpha_{1112} & \alpha_{1222} \\
\alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{1222} & 0 \\
0 & \alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{2222}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
\alpha_{1111} & 2\,\alpha_{1112} & \alpha_{1222} & 0 \\
0 & \alpha_{1111} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{1122} \\
\alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{2222} & 0 \\
0 & \alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1222} & \alpha_{1222}
\end{vmatrix}
+
$$

$$
+
\begin{vmatrix}
\alpha_{1111} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{1122} & 0 \\
0 & \alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1112} & \alpha_{1122} \\
\alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1222} & \alpha_{1222} & 0 \\
0 & \alpha_{1122} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{2222}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
\alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1112} & \alpha_{1122} & 0 \\
0 & \alpha_{1111} & 2\,\alpha_{1112} & \alpha_{1122} \\
\alpha_{1122} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{1222} & 0 \\
0 & \alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{1222}
\end{vmatrix}
=
$$

$$
=
\begin{vmatrix}
\alpha_{1111} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{1222} & 0 \\
0 & \alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{1222} \\
\alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1222} & \alpha_{2222} & 0 \\
0 & \alpha_{1122} & 2\,\alpha_{1222} & \alpha_{2222}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
\alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1112} & \alpha_{1222} & 0 \\
0 & \alpha_{1111} & 2\,\alpha_{1222} & \alpha_{1222} \\
\alpha_{1122} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{2222} & 0 \\
0 & \alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1222} & \alpha_{2222}
\end{vmatrix}
+
$$

$$
+
\begin{vmatrix}
\alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{1122} & 0 \\
0 & \alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1112} & \alpha_{1222} \\
\alpha_{1122} & 2\,\alpha_{1222} & \alpha_{1222} & 0 \\
0 & \alpha_{1122} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{2222}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
\alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{1222} & 0 \\
0 & \alpha_{1112} & 2\,\alpha_{1122} & \alpha_{1122} \\
\alpha_{1122} & 2\,\alpha_{1222} & \alpha_{2222} & 0 \\
0 & \alpha_{1122} & 2\,\alpha_{1222} & \alpha_{1222}
\end{vmatrix}
= 0
$$

Dunque: « *Esiste un sistema* ∞^{10} *di quartiche tali che il luogo dei centri delle loro coniche diametrali è l'ipocicloide di Steiner; ovvero tali che ogni loro diametro è la retta che unisce i piedi delle perpendicolari abbassate da un punto qualunque di un determinato cerchio del piano sopra i lati di un triangolo iscritto nel cerchio* ».

60. C'è un caso assai semplice in cui le condizioni precedenti sono soddisfatte.

Se nelle equazioni trovate poniamo:

$$a_{1112} = a_{1222} = 0$$

si ottiene:

$$a_{1111} = a_{2222} = 3\, a_{1122}$$

cioè anche nella equazione della quartica primitiva U_x la binaria biquadratica in x_1, x_2 è il quadrato di $x_1^2 + x_2^2$; o altrimenti anche U_x tocca la retta all'infinito nei punti ciclici.

Possiamo dunque dare quest'altra generazione dell'ipocicloide di Steiner:

« *Essa è il luogo dei centri delle coniche diametrali ordinarie, o l'inviluppo dei diametri di una quartica di genere tre bitangente alla retta all'infinito nei punti ciclici del piano della quartica* ».

61. I diametri di questa curva potranno quindi accoppiarsi in modo che quelli di ciascuna coppia siano ortogonali fra loro; i punti d'incontro dei diametri di ciascuna coppia sono situati sopra un cerchio che vogliamo ora determinare. Basta perciò rammentare che, secondo i resultati di Steiner relativamente a questa ipocicloide, il centro di questo cerchio e il suo raggio possono trovarsi così:

Sia M il punto comune a due tangenti ortogonali a e b; N e P i punti di contatto di a e b, se Q è il punto di mezzo di N P (la quale è un'altra tangente) il cerchio che ha per diametro M Q e per centro il punto di mezzo di M Q è il cerchio richesto.

Nel caso del n. precedente posto $a_{1111} = 1$; ciò che è sempre possibile, perchè basta dividere tutti gli altri coefficienti della quartica per a_{1111}; abbiamo:

$$b_0 = x_1 + \beta_{111}\, x_3 \quad ; \quad b_1 = \frac{x_2}{3} + \beta_{112}\, x_3;$$

$$b_2 = \frac{x_1}{3} + \beta_{122}\, x_3 \quad ; \quad b_3 = x_2 + \beta_{222}\, x_3 .$$

Se quindi il triangolo fondamentale è preso rettangolo in (0, 0, 1) le rette b_0, b_3 sono ortogonali; ma abbiamo veduto (n. 57) che esse sono tangenti alla quartice P_x nei loro punti d'incontro con b_1, b_2 rispettivamente; dunque per punti N e P possono prendersi i punti:

$$(b_0\,,\ b_1) \quad ; \quad (b_2\,,\ b_3)$$

e per punto M l'altro $(b_0\,,\ b_3)$; per punto Q il punto di mezzo del segmento che unisce i punti $(b_0\,,\ b_1)$; $(b_2,\ b_3)$.

Ora è

$$M \equiv (-\beta_{111};\ -\beta_{222})$$

$$N \equiv (-\beta_{111};\ -3\,\beta_{112}) \quad ; \quad P \equiv (-3\,\beta_{122};\ -\beta_{222})$$

e quindi:

$$Q \equiv \left(-\frac{\beta_{111}+3\,\beta_{122}}{2};\ -\frac{3\,\beta_{112}+\beta_{222}}{2}\right),$$

perciò le coordinate del centro del cerchio da determinarsi sono:

$$x_0 = -\frac{3}{4}\left\{\beta_{111}+\beta_{122}\right\}\ ;\ y_0 = -\frac{3}{4}\left\{\beta_{112}+\beta_{222}\right\},$$

il suo raggio:

$$\frac{1}{4}\sqrt{(\beta_{111}-3\,\beta_{112})^2+(\beta_{222}-3\,\beta_{112})^2}$$

e la sua equazione:

$$\left\{16\,x+3\,(\beta_{111}+\beta_{102})\right\}^2+\left\{16\,y+3\,(\beta_{112}+\beta_{222})\right\}^2 =$$

$$=(\beta_{111}-3\,\beta_{122})^2+(\beta_{222}-3\,\beta_{112})^2,$$

Conosciuto questo cerchio, esiste una costruzione semplicissima, data dal prof. Cremona, per mezzo della quale si ottengono quante tangenti si vogliono di P_x; ma il cerchio precedente si costruisce subito date le rette b_0, b_1, b_2, b_3; ecco dunque come mediante la costruzione suddetta si possano costruire quanti diametri si vogliono di una quartica bitangente alla retta all'infinito nei punti ciclici.

62. Cerchiamo le tangenti cuspidali. È noto che esse passano per il centro del cerchio precedente e sono ugualmente inclinate l'una sull'altra di $\frac{\pi}{3}$. Queste tre tangenti sono i tre diametri di U_x che passano per il punto (x_0, y_0) e quindi i parametri dei punti all'infinito di cui esse sono diametri si otterranno sostituendo nell'equazione del diametro x_0 ; y_0 ; 1 per x_1 ; x_2 ; x_3 e risolvendo rispetto a λ la cubica che ne resulta la quale è:

$$(1) \qquad \lambda^3 \left\{ 3\,\beta_{122} - \beta_{111} \right\} + 3\,\lambda^2 \left\{ \beta_{222} - 3\,\beta_{112} \right\} +$$

$$+ 3\,\lambda \left\{ \beta_{111} - 3\,\beta_{122} \right\} + 3\,\beta_{112} - \beta_{222} = 0 .$$

Se λ_1 è una radice della precedente equazione, l'angolo ω che una retta passante per λ_1 all'infinito fa con l'asse delle x, sarà dato da

$$\operatorname{cotg} \omega = \lambda_1 .$$

Sicccome ogni diametro di U_x è perpendicolare al suo corrispondente sistema di corde; così ne viene che le tre radici λ_1 , λ_2 , λ_3 della equazione precedente devono essere parametri di punti all'infinito di rette facenti a due, a due un angolo di $\frac{\pi}{3}$, o $\frac{2\pi}{3}$, dunque sarà:

$$\lambda_2 = \operatorname{cotg}\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3} + \lambda_1}{1 - \lambda_1 \sqrt{3}} ,$$

$$\lambda_3 = \operatorname{cotg}\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\lambda_1 - \sqrt{3}}{1 + \lambda_1 \sqrt{3}} .$$

Dunque le tangenti cuspidali saranno le tre rette passanti per (x_0 , y_0) e aventi per coefficienti angolari:

$$\lambda_1 \quad ; \quad \frac{\lambda_1 + \sqrt{3}}{1 - \lambda_1 \sqrt{3}} \quad ; \quad \frac{\lambda_1 + \sqrt{3}}{1 + \lambda_1 \sqrt{3}}$$

dove λ_1 è una radice della (1).

Le tre tangenti di P_x , perpendicolari rispettivamente a queste tre tangenti cuspidali, si otterranno sostituendo successivamente nell'equazione del diametro di U_x a λ:

$$\frac{1}{\lambda_1}\ ;\ \frac{1-\lambda_1\sqrt{3}}{\lambda_1+\sqrt{3}}\ ;\ \frac{1+\lambda_1\sqrt{3}}{\lambda_1-\sqrt{3}}\ .$$

Esse saranno dunque:

$$p_x = b_0 + 3\,b_1\,\lambda_1 + 3\,b_2\,\lambda_1^2 + b_3\,\lambda_1^3 = 0\,,$$

$$q_x = b_0\left\{\frac{1-\lambda_1\sqrt{3}}{\lambda_1+\sqrt{3}}\right\}^3 + 3\,b_1\left\{\frac{1-\lambda_1\sqrt{3}}{\lambda_1+\sqrt{3}}\right\}^2 + 3\,b_2\left\{\frac{1-\lambda_1\sqrt{3}}{\gamma_1+\sqrt{3}}\right\} + b_3 = 0$$

$$r_x = b_0\left\{\frac{1-\lambda_1\sqrt{3}}{\lambda_1-\sqrt{3}}\right\}^3 + 3\,b_1\left\{\frac{1+\lambda_1\sqrt{3}}{\lambda_1-\sqrt{3}}\right\}^2 + 3\,b_2\left\{\frac{1+\lambda_1\sqrt{3}}{\lambda_1-\sqrt{3}}\right\} + b_3 = 0.$$

Se s'indicano con p_x' , q_x' , r_x' le tangenti cuspidali di P_x e dal punto $(x_0\ ,\ y_0)$ nelle direzioni rispettive:

$$\begin{array}{ll} (p_x\,p_x') & (x_0\ ,\ y_0) \\ (q_x\,q_x') & (x_0\ ,\ y_0) \\ (r_x\,r_x') & (x_0\ ,\ y_0) \end{array}$$

(essendo $(p_x\,p_x')$ il punto comune a p_x , p_x' ; ec.) e si porta un segmento uguale a

$$\frac{3}{4}\sqrt{(\beta_{111}-3\,\beta_{122})^2+(\beta_{222}-3\,\beta_{112})^2}$$

si trovano le tre cuspidi della curva P_x.

63. Riassumendo: « *Possiamo costruire il luogo dei centri delle coniche diametrali di una quartica di genere 3 litangente alla retta all'infinito nei punti ciclici, facendo rotolare nell'interno del cerchio*:

$$\left\{16\,x + 3\,(\beta_{111}+\beta_{122})\right\}^2 + \left\{16\,y + 3\,(\beta_{122}+\beta_{222})\right\}^2$$

$$= 9\left\{(\beta_{111}-3\,\beta_{122})^2+(\beta_{222}-3\,\beta_{112})^2\right\}$$

un altro cerchio di raggio

$$\frac{1}{4}\sqrt{(\beta_{111}-3\,\beta_{122})^2+(\beta_{222}-3\,\beta_{112})^2}$$

il quale nella posizione iniziale tocca il cerchio precedente in uno dei tre punti $(p_x\, p_x')$; $(q_x\, q_x')$; $(r_x\, r_x')$ *antecedentemente determinati: il luogo è allora descritto da questo punto di contatto.*

L'insieme delle tangenti a questo luogo, cioè tutti i diametri della quartica data, è costituito dall'insieme di tutte le rette che uniscono i piedi delle perpendicolari tirate sui lati del triangolo delle tre rette p_x , q_x , r_x *da un punto del cerchio circoscritto a questo triangolo ». Il raggio di questo cerchio è:*

$$\frac{1}{2}\sqrt{(\beta_{111} - 3\,\beta_{122})^2 + (\beta_{222} - 3\,\beta_{112})^2}$$

64. **Linee diametrali coniugate.** La cubica diametrale di un punto A ha tre punti all'infinito B , C , D : i diametri di questi tre punti passando per A sono paralleli : questi tre diametri li chiameremo coniugati alla cubica di A e viceverca. Resulta quindi che tre tangenti parallele della terza linea diametrale principale costituiscono tre diametri coniugati a una stessa cubica diametrale.

Dalla equazione del diametro di un punto di parametro λ segue che il parametro λ_1 del punto all'infinito di questo diametro è dato da

$$\lambda_1 = -\frac{a_{1112}\,\lambda^3 + 3\,\lambda^2\,a_{1122} + 3\,\lambda\,a_{1222} + a_{2222}}{a_{1111}\,\lambda^3 + 3\,\lambda^2\,a_{1112} + 3\,\lambda\,a_{1122} + a_{1222}}$$

e si ritrova che per un valore di λ c'è un sol valore di λ_1 mentre per un valore di λ_1 ci sono tre valori per λ.

L'equazione di 3^0 grado in λ' :

$$(1) \qquad \lambda_1 + \frac{a_{1112}\,\lambda'^3 + 3\,\lambda'^2\,a_{1122} + 3\,\lambda'\,a_{1222} + a_{2222}}{a_{1111}\,\lambda'^3 + 3\,\lambda'^2\,a_{1122} + 3\,\lambda'\,a_{1122} + a_{1222}} = 0$$

dà i tre valori dei parametri dei punti all'infinito della cubica diametrale di λ_1. Uno di questi è λ naturalmente; gli altri due vengono quindi a dipendere da una equezione di secondo grado.

Se si pone per brevità:

$$a_{1112}\,\lambda^3 + 3\,\lambda^2\,a_{1122} + 3\,\lambda\,a_{1222} + a_{2222} = a\,,$$

$$a_{1111}\,\lambda^3 + 3\,\lambda^2\,a_{1112} + 3\,\lambda\,a_{1122} + a_{1222} = b\,,$$

il coefficiente di λ'^3 nella (1) è:

$$a_{1112}\,b - a_{1111}\,a$$

il coefficiente di λ'^2:

$$3\,(a_{1122}\,b - a_{1112}\,a)$$

il termine indipendente:

$$a_{2222}\, b - a_{1222}\, a\,.$$

Dunque la somma e il prodotto delle radici saranno rispettivamente:

$$\frac{3\,(a_{1112}\, a - a_{1122}\, b)}{a_{1112}\, b - a_{1111}\, a}\,,\quad \frac{a_{1222}\, a - a_{2222}\, b}{a_{1112}\, b - a_{1111}\, a}\,.$$

Perciò gli altri due valori di λ' che si cercano, saranno le radici della equazione di 2^0 grado:

$$\lambda'^2 + \left\{\frac{3\,(a_{1122}\, b - a_{1112}\, a)}{a_{1112}\, b - a_{1111}\, a} + \lambda\right\}\lambda' +$$

$$+ \frac{1}{\lambda}\,\frac{a_{1222}\, a - a_{2222}\, b}{a_{1112}\, b - a_{1111}\, a} = 0\,.$$

Se λ_1', λ_2' sono le radici di questa equazione se ne conclude:

« *I tre sistemi di corde parallele aventi per parametri dei punti all'infinito:*

$$\lambda\ ;\ \lambda_1'\ \lambda_2'$$

ammettono diametri paralleli ».

Il discriminante della (1) è di 12^0 grado in λ; dunque fra queste infinite terne ve ne sono 12 ognuna delle quali possiede due sistemi coincidenti.

65. La conica diametrale k di un punto A ha due punti all'infinito B, C; le coniche diametrali h, l di questi due punti passano per A: chiameremo h, l le due coniche diametrali coniugate della conica diametrale k.

Dall'equazione della conica diametrale di un punto di parametro λ, si deduce che i paramenti dei punti all'infinito di essa sono le radici della equazione di 2^0 grado in λ_1:

$$\begin{aligned} &\lambda_1^2 \left\{ a_{1111}\,\lambda^2 + 2\, a_{1112}\,\lambda + a_{1122} \right\} + \\ (2)\qquad &+ 2\,\lambda_1 \left\{ a_{1112}\,\lambda^2 + 2\, a_{1122}\,\lambda + a_{1222} \right\} + \\ &+ a_{1122}\,\lambda^2 + 2\, a_{1222}\,\lambda + a_{2222} = 0\,; \end{aligned}$$

se λ_1', λ_1'' sono queste radici, le coniche diametrali di λ_1', λ_1'' hanno comune la direzione di un asintoto.

66. Dai resultati precedenti apparisce chiaro che i punti all'infinito

dei diametri e quelli delle cubiche diametrali individuano sulla retta all'infinito una corrispondenza di Chasles (1; 3); al punto all'infinito di un diametro corrispondendo i tre punti all'infinito della cubica diametrale coniugata. Così dalla (2) del n. precedente resulta che le coniche diametrali coniugate individuano sulla retta all'infinito una corrispondenza di Chasles (2; 2): però quest'ultima è più notevole giacchè la (2) essendo simmetrica in λ e λ_1 succede che preso un punto sulla retta all'infinito, questo individua sempre gli stessi due corrispondenti tanto se si considera appartenente all'una, o all'altra, delle due punteggiate proiettive sovrapposte.

Queste due corrispondenze di Chasles hanno evidentemente a comune i quattro punti uniti e sono i quattro punti all'infinito della quartica.

Quartiche di genere uno.

67. I teoremi precedenti si applicano senza notevoli modificazioni alle quartiche di genere due. Fra quelle di genere uno sono interessanti quelle i cui due punti doppi sono all'infinito.

Se si prendono questi due punti per i due vertici (0, 1, 0); (1, 0, 0) del triangolo fondamentale, l'equazione di queste quartiche può porsi sotto la forma.

$$x_1^2 x_2^2 + 2 x_1 x_2 x_3 (l x_1 + m x_2) +$$
$$+ x_3^2 \left\{ a x_1^2 + b x_2^2 + c x_3^2 + 2 f x_2 x_3 + 2 g x_3 x_1 + 2 h x_1 x_2 \right\} = 0.$$

Confrontandola con l'equazione generale di una quartica, sotto la forma data nel N° 54, si ha:

$$a_{1111} = a_{1112} = a_{1222} = a_{2222} = 0 \quad ; \quad a_{1122} = \frac{1}{6}$$

$$\beta_{111} = \beta_{222} = 0 \quad ; \quad \beta_{112} \frac{l}{6} \quad ; \quad \beta_{122} = \frac{m}{6} ;$$

$$\gamma_{11} = \frac{a}{6} \quad ; \quad \gamma_{12} = \frac{h}{6} \quad ; \quad \gamma_{22} = \frac{b}{6} ;$$

$$\delta_1 = \frac{g}{2} \quad ; \quad \delta_2 = \frac{f}{2} ;$$

$$a_0 = c .$$

L'equazione del diametro di un punto (y_1 , y_2 , 0) si riduce a:

$$y_1 y_2^2 \left\{ x_1 + m x_3 \right\} + y_1^2 y_2 \left\{ x_2 + l x_3 \right\} = 0$$

I tre diametri passanti per un punto P qualunque del piano sono dunque costituiti da due rette aventi le direzioni dei punti doppi all'infinito e dalla congiungente di P col punto di coordinate $(-m, -l, 1)$: dunque la terza linea diametrale principale si spezza nei due punti doppi e nel punto $(-m; -l; 1)$. Segue che tutte le coniche diametrali sono concentriche eccettuate le due coppie di tangenti nei punti doppi le quali costituiscono le coniche diametrali di quei punti stessi. Dunque

« *Tutte le quartiche la cui equazione può dedursi dalla*:

$$x_1^2 x_2^2 + 2 x_1 x_2 x_3 (l x_1 + m x_2) + x_3^2 U = 0$$

mantenendo fissi l *ed* m *e facendo variare i coefficienti della* $U = 0$ *in modo da portarla a coincidere con qualunque conica del piano, hanno a comune il centro delle coniche diametrali* ».

68. L'equazione della conica diametrale di un punto all'infinito di parametro λ è:

$$x_1^2 + \lambda^2 x_2^2 + x_3^2 \left\{ a \lambda^2 + 2 h \lambda + b \right\} +$$
$$+ 4 x_1 x_2 \lambda + 2 x_1 x_3 \left\{ 2 l \lambda + m \right\} +$$
$$+ 2 x_2 x_3 \left\{ l \lambda^2 + 2 m \lambda \right\} = 0 .$$

Le coordinate del centro sono:

$$-3 m \lambda^2 \quad ; \quad -l \lambda^2 \quad ; \quad 3 \lambda^2 .$$

Si ha così una conferma di un resultato ottenuto nel N_0 precedente.

Se si pone

$$U = x_2 + a x_3^2 + 2 l x_2 x_3 ,$$
$$V = 2 h x_3^2 + 2 x_1 x_2 + 2 l x_1 x_3 + 2 m x_2 x_3 ,$$
$$W = x_1^2 + b x_3^2 + 2 m x_1 x_3 ,$$

l'equazione della seconda linea diametrale principale è:

$$U W - V^2 = 0$$

cioè:

$$x_1^2 x_2^2 + 2 x_1 x_2 x_3 \left\{ \frac{l}{3} x_1 + \frac{m}{3} x_2 \right\} +$$

$$+ x_3^2 \left\{ x_1^2 \left(\frac{4}{3} l^2 - \frac{a}{3} \right) + x_2^2 \left(\frac{4}{3} m^2 - \frac{b}{3} \right) + \right.$$

$$+ x_3^2 \left(\frac{4}{3} h^2 - \frac{a\,b}{3} \right) + 2 \frac{2\,h}{3} x_1 x_2 +$$

$$\left. + 2 x_2 x_3 \left(\frac{2\,h\,m}{3} - \frac{b\,l}{3} \right) + 2 x_1 x_3 \left(\frac{2\,h\,l}{3} - \frac{a\,m}{3} \right) \right\} = 0.$$

Questa equazione è della forma di quella della quartica data, dunque:

« *La seconda linea diametrale principale è una quartica che ha gli stessi punti doppi della quartica primitiva* ».

La seconda linea diametrale principale ha per centro delle sue coniche diametrali il punto $(-l, -m, 3)$; se ora di questa curva si cercasse ancora la seconda linea diametrale principale, troveremmo analogamente $(-l, -m, 9)$ per centro delle sue coniche diametrali e così continuando ne concludiamo che:

« *I centri delle coniche diametrali di quartiche dedotte l'una dall'altra in modo che ognuna sia la seconda linea diametrale principale della precedente; e la prima (e quindi tutte) abbiano due punti doppi all'infinito; si muovono sopra una retta avvicinandosi continuamente fra loro e tendendo verso un punto fisso il quale è il vertice* $(0, 0, 1)$ *del triangolo fondomentale se gli altri due sono situati nei due punti doppi* ».

69. L'equazione della cubica diametrale di un punto $(y_1, y_2, 0)$ diviene:

$$x_3^3 \left\{ g\,y_1 + y f_2 \right\} + x_1^2 x_2 y_2 + x_1 x_2^2 y_1 +$$

$$+ x_1 x_3^2 \left\{ a\,y_1 + h\,y_2 \right\} + x_1^2 x_3\, l\, y_2 + x_2 x_3^2 \left\{ h\,y_1 + b\,y_2 \right\} +$$

$$+ x_2^2 x_3\, m\, y_1 + 2 x_1 x_2 x_3 \left\{ l\,y_1 + m\,y_2 \right\} = 0.$$

Tutte le cubiche diametrali passano per i punti doppi della curva e quindi la corrispondenza $(1; 3)$ di Chasles sulla retta all'infinito viene ad essere un po' modificata, giacchè un punto di parametro λ ha per corrispondenti i due punti doppi che naturalmente non variano al variare di λ e uno solo che dipende da λ; questa dipendenza si ricava dalle formole del n. 64: da

esse resulta che il punto corrispondente di λ, diverso dai punti doppi della quartica, è il punto di parametro $-\lambda$.

In questo caso dunque i due punti doppi nei quali vengono a cadere i quattro punti uniti della corrispondenza, corrispondono a qualunque punto P della retta all'infinito insieme al coniugato armonico di P rispetto ad essi; o in altre parole, la corrispondenza (1; 3) di Chasles si riduce in questo caso a una involuzione ordinaria i cui punti doppi sono i punti doppi della quartica. Dunque:

« *Il coniugato armonico di P, rispetto a questi punti doppi, è il punto all'infinito P' del diametro di P; se questo diametro è un asse, la coppia P, P' separa armonicamente anche la coppia dei punti ciclici del piano, cioè P, P' sono gli elementi doppi dell'involuzione individuata, sulla retta all'infinito dai punti doppi della quartica e dai punti ciclici del suo piano* ».

70. La lemniscata di Bernoulli, la lumaca di Pascal e la cardioide.

Se il triangolo fondamentale è rettangolo nel vertice (1 , 0 , 0), se in questo punto è situato quello fra i punti doppi di queste tre curve che è a distanza finita e il lato $x_3 = 0$ è la retta all'infinito del loro piano, l'equazione di queste tre curve possono dedursi dall'unica

$$(x_1^2 + x_2^2 - 2\, r\, x_1\, x_3)^2 = a^2\, x_3^2\, (x_1^2 \pm x_2^2)$$

Tutte e tre queste curve sono quartiche di genere zero. Se nel 2° membro si prende il segno superiore si ha la lumaca di Pascal; r essendo il raggio del cerchio generatore; a la lunghezza costante che si riporta sul raggio vettore: questa curva ha un nodo all'origine e come caso particolare ne viene la cardioide quando $2\, r = a$; essa ha una cuspide all'origine; tanto la lumaca quanto la cardioide sono quartiche *cartesiane* cioè hanno due cuspidi nei punti ciclici, le loro tangenti cuspidali essendo le due rette che partono dal centro del cerchio generatore e vanno ai punti ciclici stessi; il lato $x_2 = 0$ del triangolo fondamentale è per entrambe una retta di simmetria e per la cardioide è la 3ª tangente cuspidale, mentre per la lumaca è una delle bissettrici dell'angolo delle tangenti nodali.

Se poi nell'equazione precedente si fa $r = 0$ e si prende il segno inferiore nel 2° membro, si ottiene l'equazione della lemniscata di Bernoulli la quale ha tre nodi, uno all'origine e gli altri nei due punti ciclici: è dunque una quartica *bicircolare*. La distanza dei due punti fissi (tali che è costante il prodotto delle loro distanze da qualunque punto della curva) dal nodo, origine delle coordinate, è $\pm \frac{a}{\sqrt{2}}$. Questa curva è una

quartica simmetrica rispetto a due rette ortogonali. Le tangenti nodali nei punti ciclici sono:

$$\left\{ x_1 + i\left(x_2 + \frac{a}{\sqrt{2}} x_3 \right) = 0 \right. \quad \left\{ x_1 - i\left(x_2 + \frac{a}{\sqrt{2}} x_3 \right) = 0, \right.$$

$$\left\{ x_1 + i\left(x_2 - \frac{a}{\sqrt{2}} x_3 \right) = 0 \right. \quad \left\{ x_1 - i\left(x_2 - \frac{a}{\sqrt{2}} x_2 \right) = 0, \right.$$

cioè le due coppie di rette che partono dai due punti fissi suddetti e vanno ai punti ciclici del piano. Questi due punti sono quindi due fuochi della lemniscata, come è un fuoco della lumaca e della cardioide il centro del cerchio generatore.

71. Noi porremo l'equazione del n. precedente sotto la solita forma

$$x_3^2 \left\{ x_1^2 (a^2 - 4 r^2) \pm a^2 x_2^2 \right\} +$$

$$+ x_3 \left\{ 4 r x_1^3 + 4 r x_1 x_2^2 \right\} - (x_1^2 + x_2^2)^2 = 0.$$

L'equazione del diametro di un punto di coordinate $(y_1, y_2, 0)$ è

$$\left\{ y_1^2 + y_2^2 \right\} \left\{ y_1 (x_1 - r x_3) - x_2 y_2 \right\} = 0$$

La terza linea diametrale si spezza quindi in tre punti che sono i tre punti doppi. Così tutte le coniche diametrali della lumaca e della cardioide sono concentriche al cerchio generatore, quelle della lemniscata al nodo che è a distanza finita.

Le coniche diametrali che si spezzano sono sei ed hanno per punto doppio il centro del cerchio generatore nel caso della conchiglia e della cardioide; questo punto sarà dunque almeno sestuplo per le Steineriane delle due curve. Nel caso della lemniscata, solamente quattro delle coniche diametrali che si spezzano hanno per punto doppio il nodo reale perchè le altre due sono le due coppie di tangenti nei punti ciclici, ma per l'origine passano pure le due tangenti nodali le quali costituiscono la conica polare dell'origine stessa; dunque la Steineriana della lemniscata ha almeno un punto quintuplo nel nodo reale della lemniscata stessa.

72. L'equazione della conica diametrale di un punto $(y_1, y_2, 0)$ è

$$-x_1^2\left\{y_1^2+\frac{y_2^2}{3}\right\}-x_2^2\left\{\frac{y_1^2}{3}+y_2^2\right\}+$$

$$+x_3^2\left\{\frac{a^2-4r^2}{6}y_1^2\pm\frac{a^2}{6}y_2^2\right\}-\frac{4}{3}x_1x_2y_1y_2+$$

$$+2x_1x_3\left\{ry_1^2+\frac{r}{3}y_2^2\right\}+2x_2x_3\cdot\frac{2}{3}ry_1y_2=0\,.$$

Le coordinate del centro sono:

$$-\frac{r}{3}(y_1^2+y_2^2)^2\quad;\quad 0\quad;\quad -\frac{1}{3}(y_1^2+y_2^2)^2$$

cio che conferma i resultati del N° precedente. Se si pone:

$$U=-x_1^2-\frac{x_2^2}{3}+\frac{a^2-4r^2}{6}x_3^2+2rx_1x_3$$

$$V=-\frac{2}{3}x_1x_2-\frac{2}{3}rx_2x_3$$

$$W=-\frac{x_1^2}{3}x_2^2\pm x_3^2\frac{a^2}{6}+\frac{2r}{3}x_1x_3$$

L'equazione della seconda linea diametrale principale è:

$$UW-V^2=0$$

Ossia:

$$(x_1^2+x_2^2)^2+x_1^2x_3^2\left\{4r^2-\frac{a^2-4r^2}{6}\pm\frac{a^2}{2}\right\}+$$

$$+x_2^2x_3^2\left\{\mp\frac{a^2}{6}-\frac{a^2-4r^2}{2}-\frac{4}{3}\right\}\pm$$

$$\pm\frac{a^2-4r^2}{12}a^2x_3^4-4rx_1^3x_3+$$

$$+x_1x_3^3\left\{\frac{r}{3}(a^2-4r^2)\pm\frac{a^2r}{2}\right\}-4rx_1x_2^2x_3=0\cdot$$

Se si adottano i segni superiori dove se ne hanno due si ottiene la seconda linea diametrale principale della conchiglia. È una quartica bicirco-

Fig. Ia

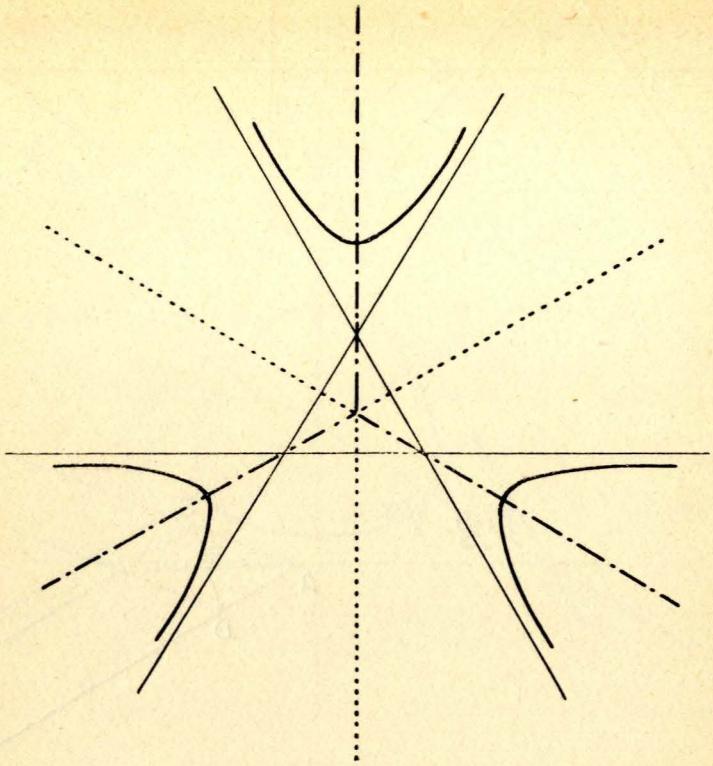


Fig. IIa

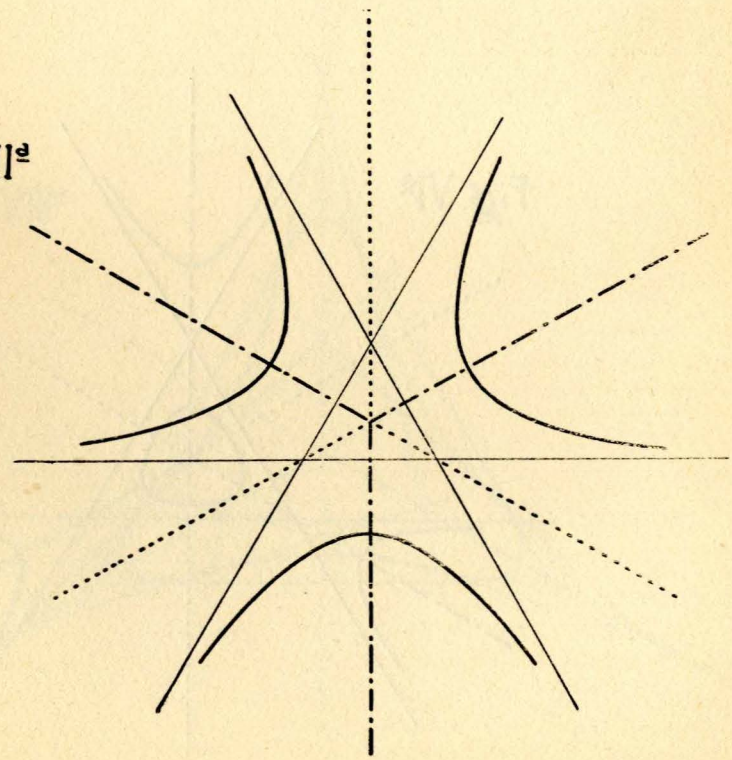


Fig. IIIª

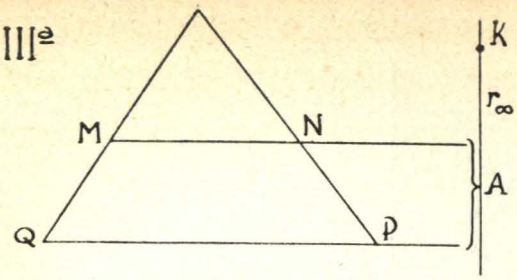


Fig. IVª

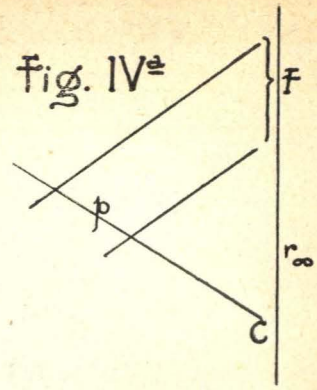


Fig. Vª

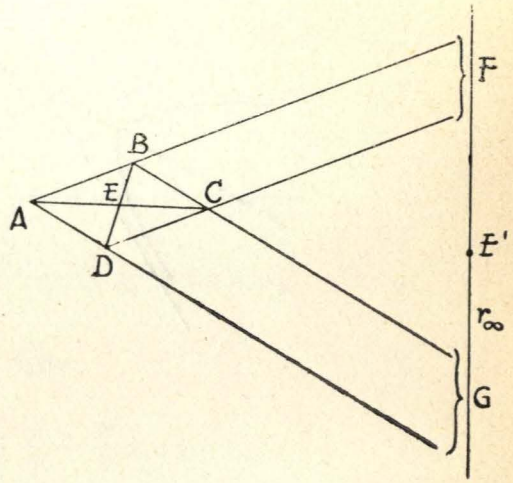


Fig. VIª

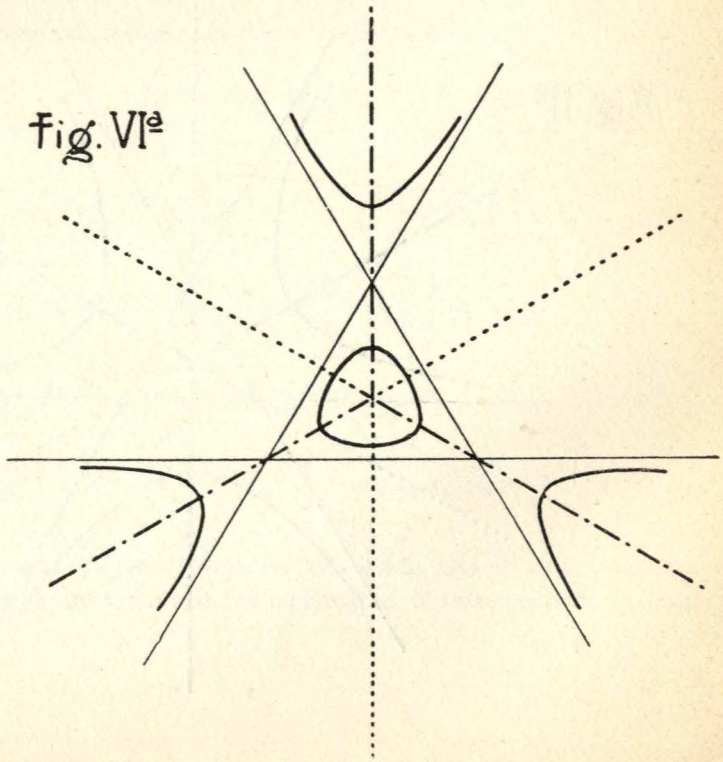


Fig. VII^a

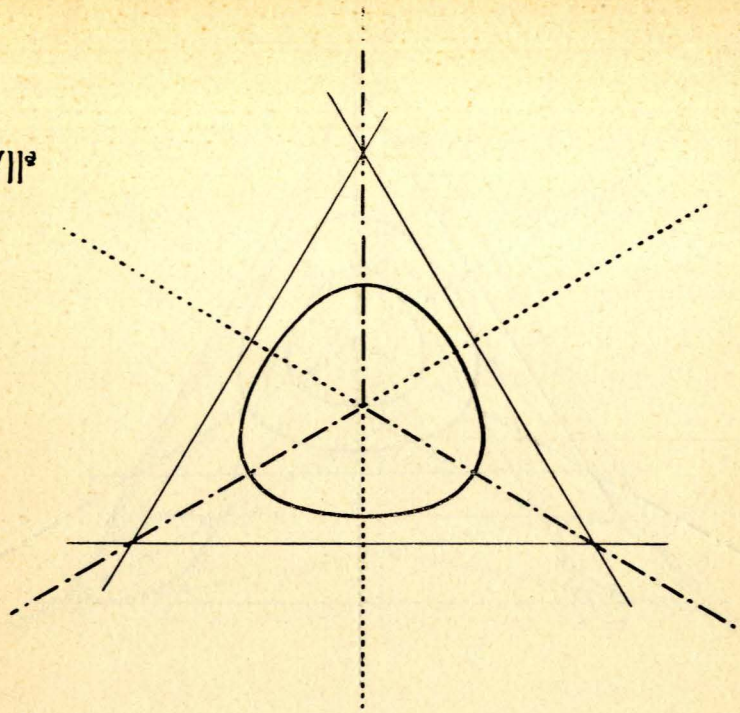


Fig. VIII^a

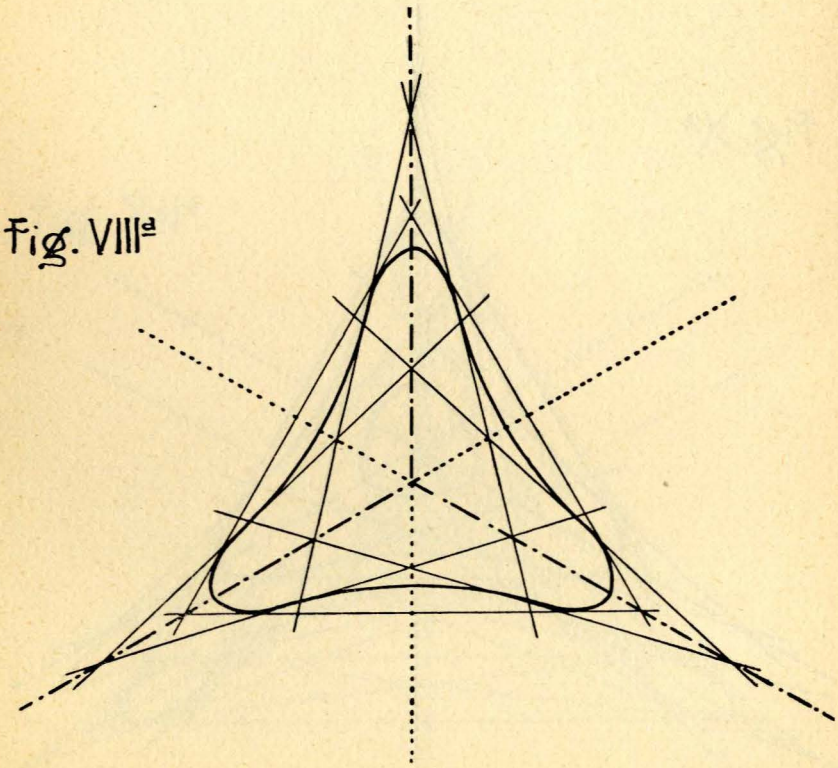


Fig. IXª

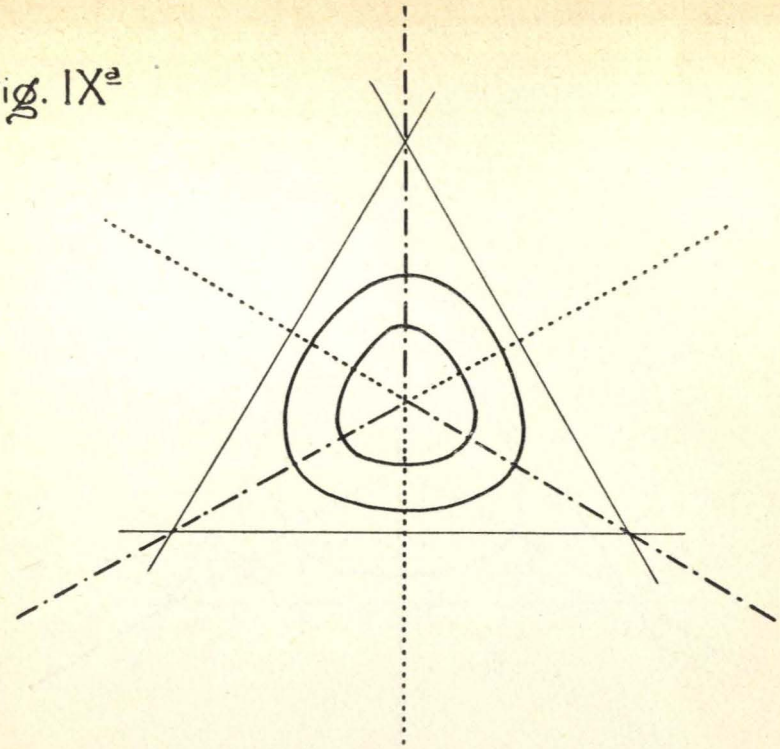


Fig. Xª

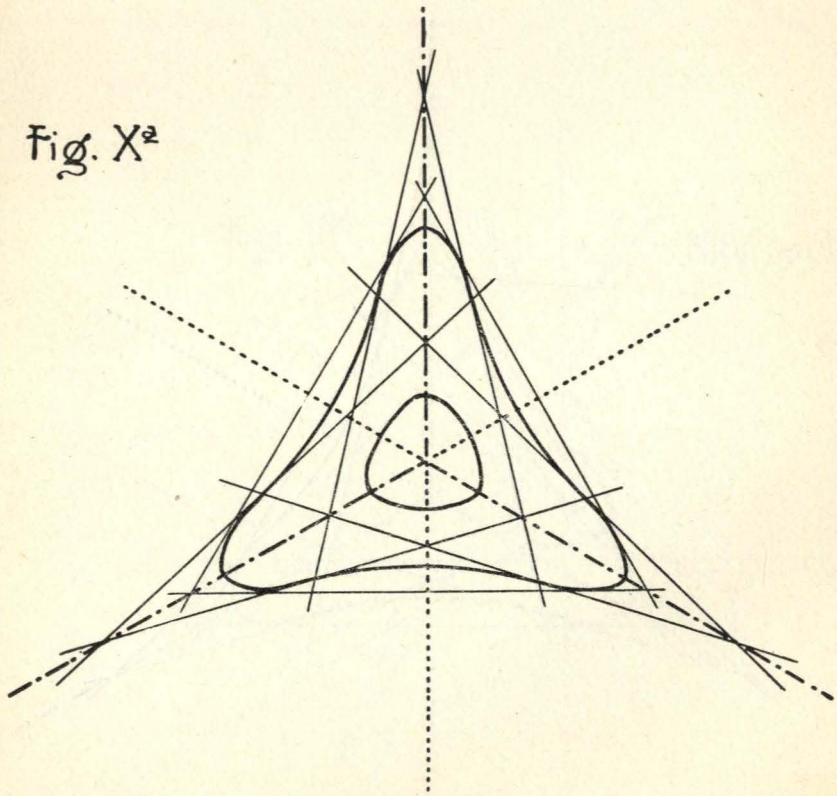


Fig. XIª

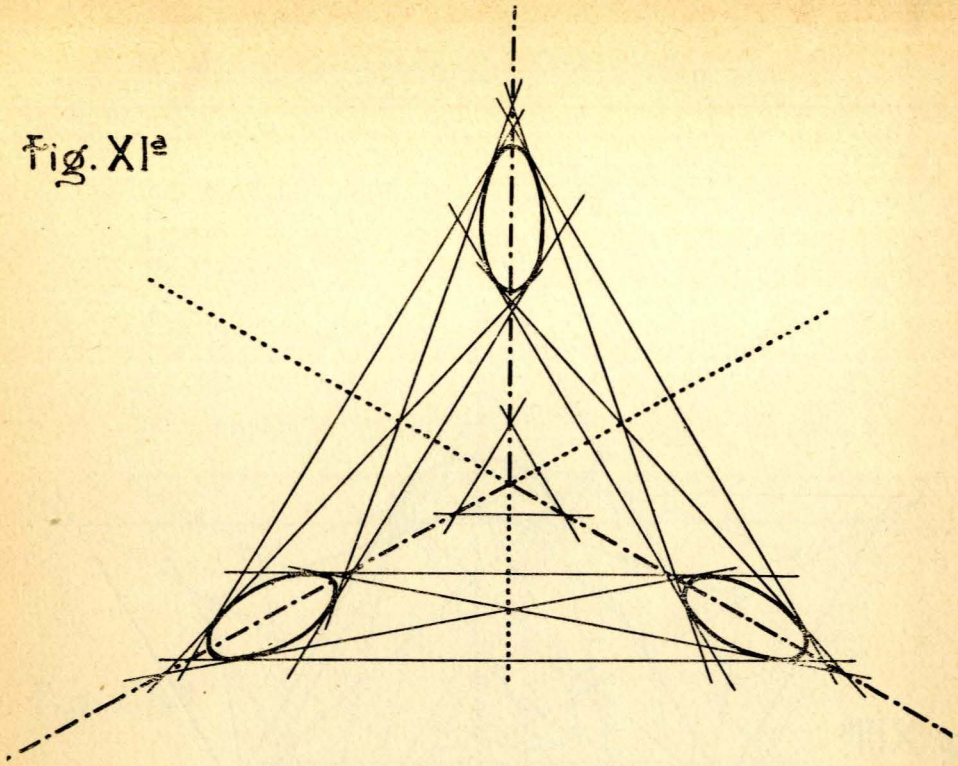


Fig. XIIª

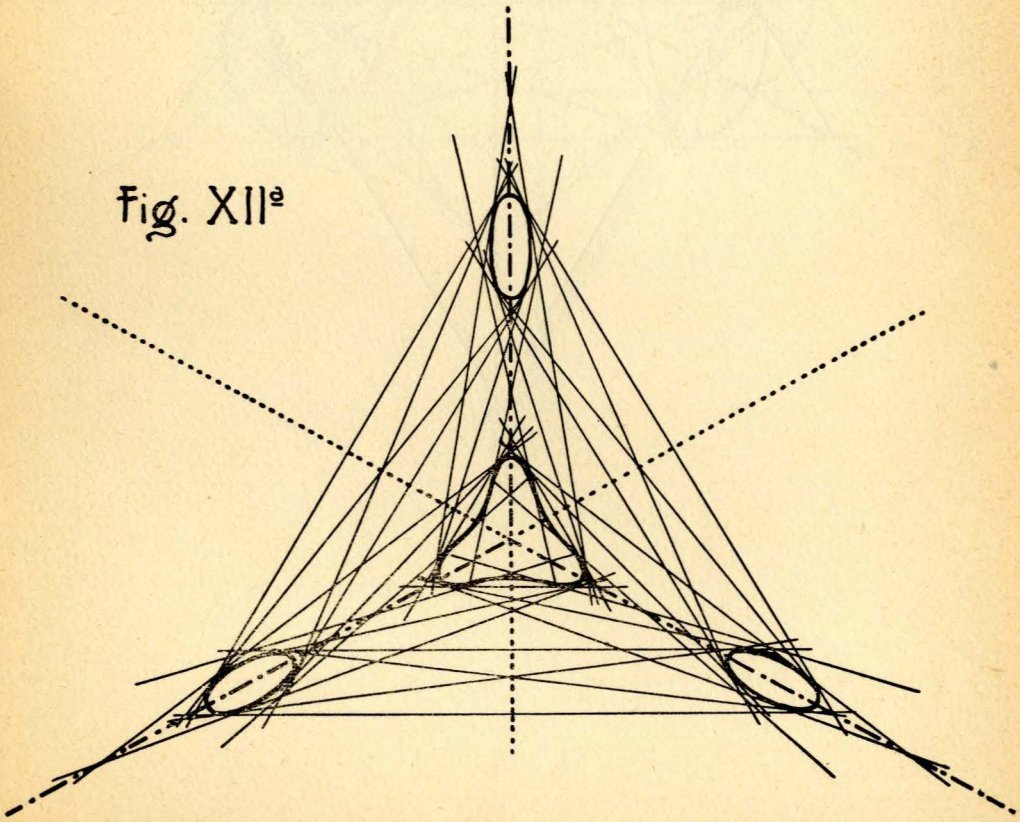
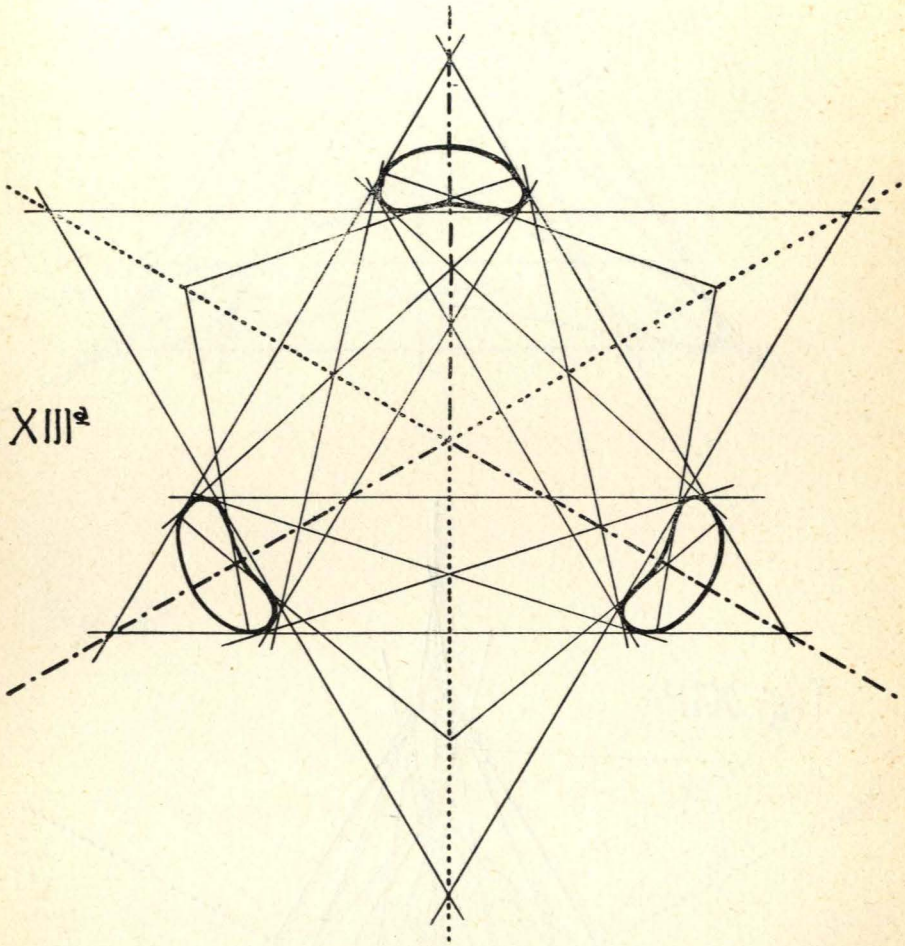


Fig. XIII²



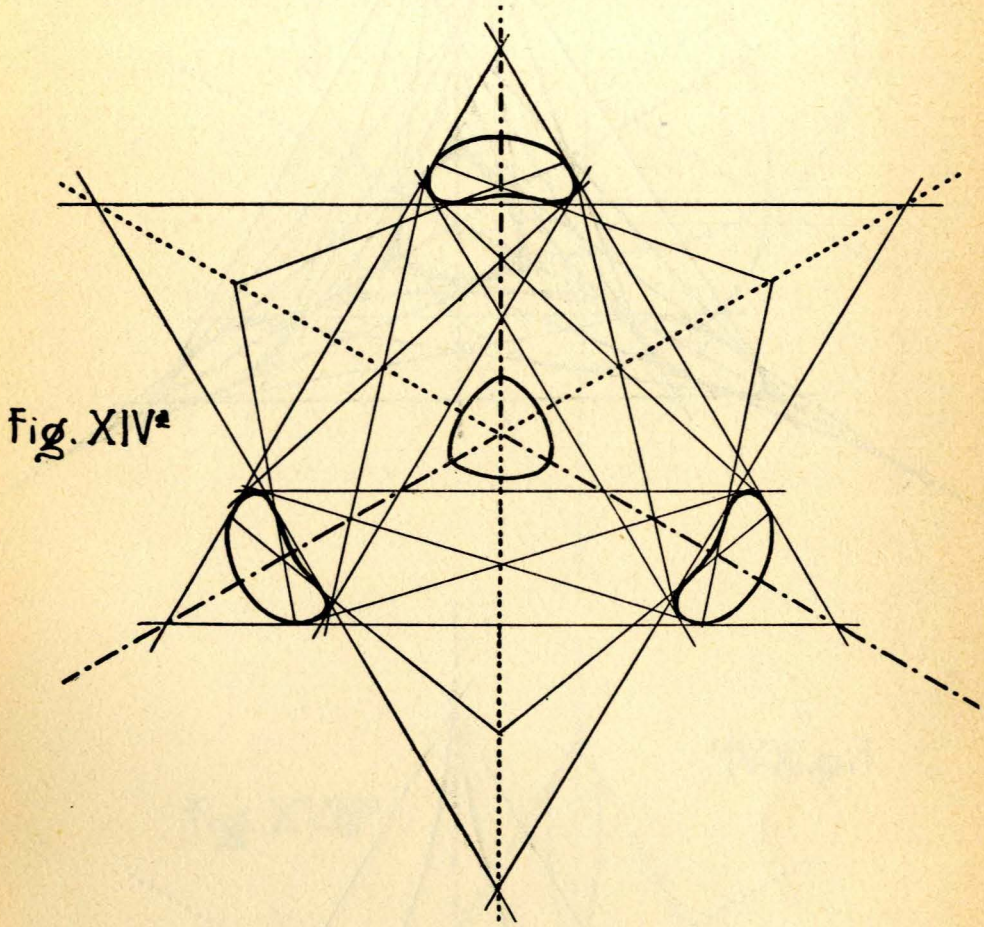


Fig. XIV²

Fig. XVª

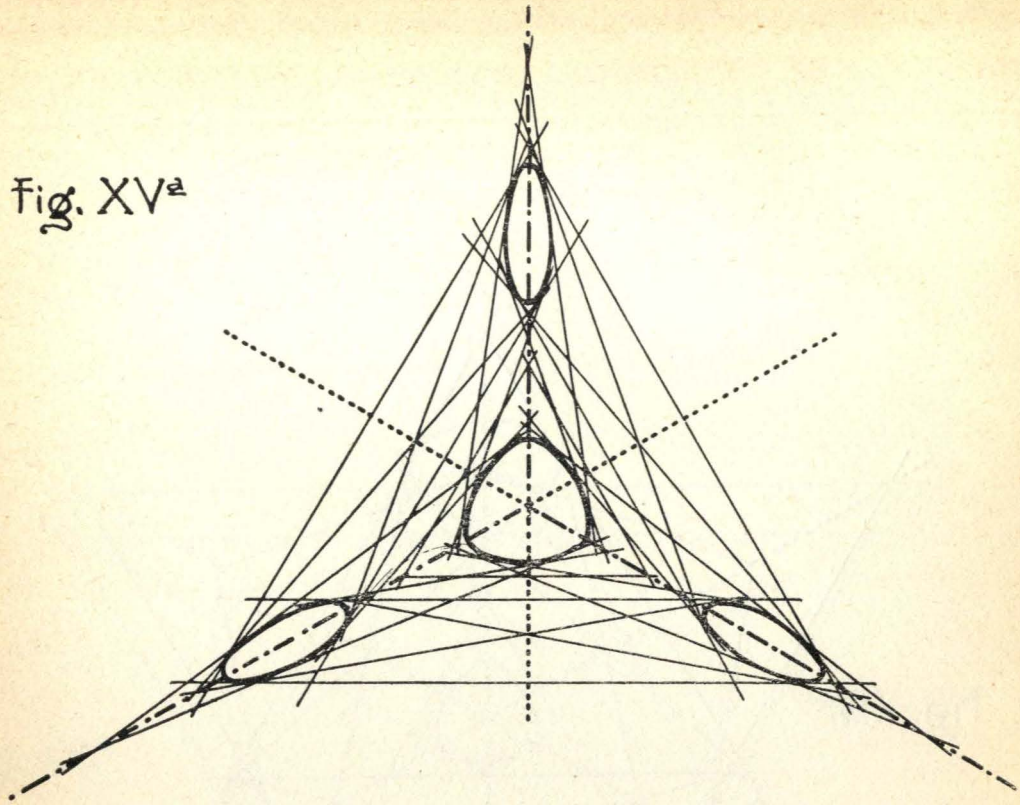


Fig. XVIª

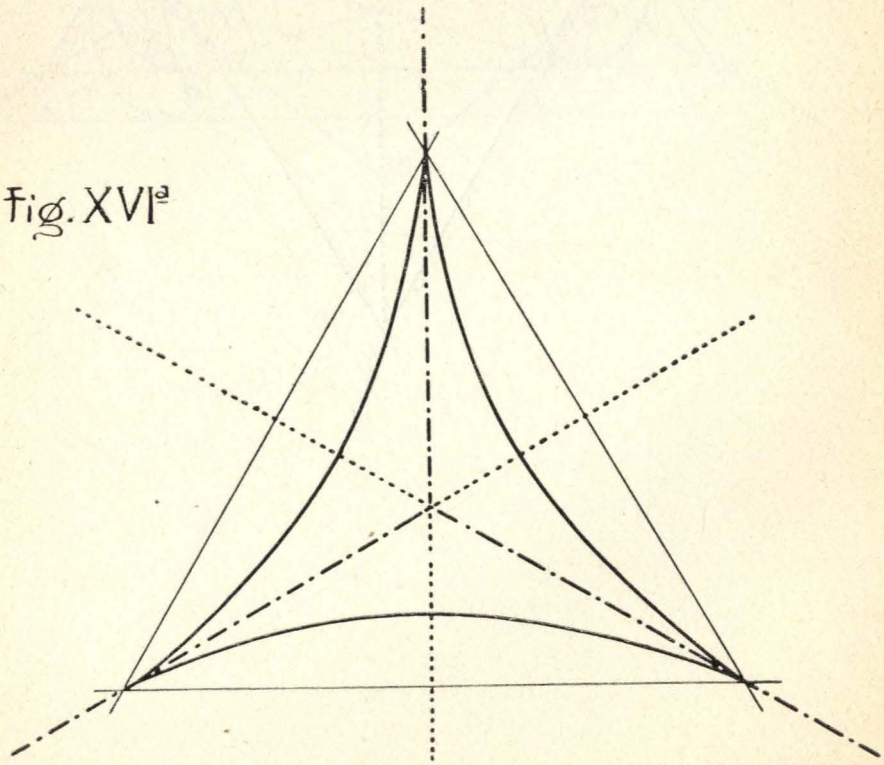


Fig. XVII^a

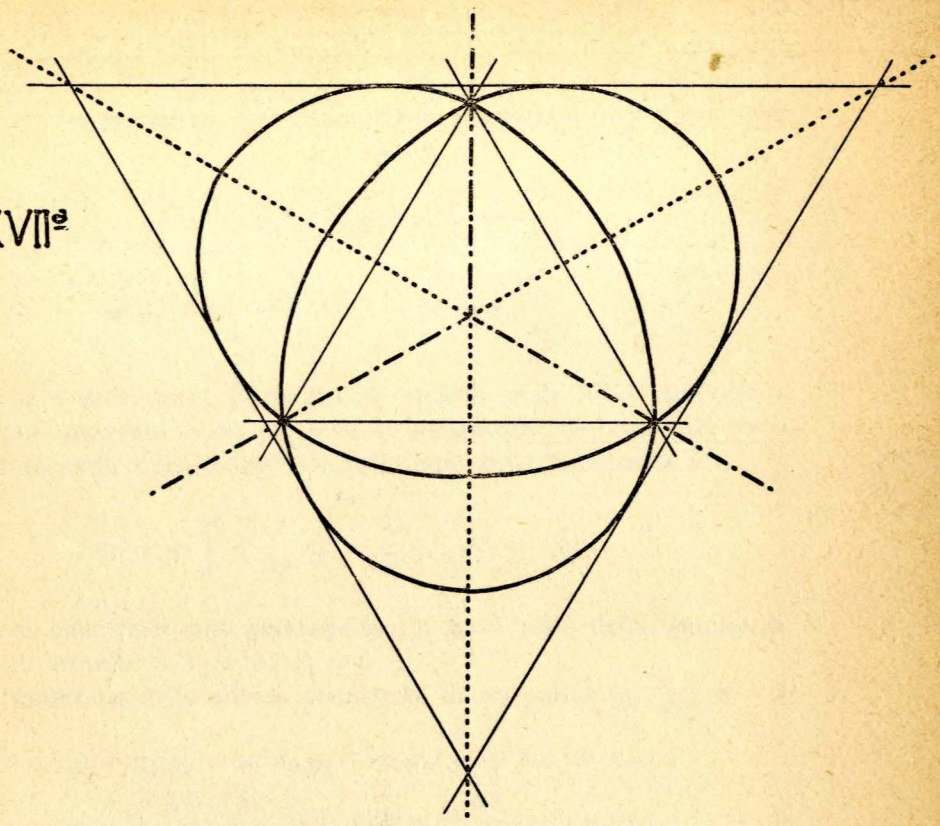
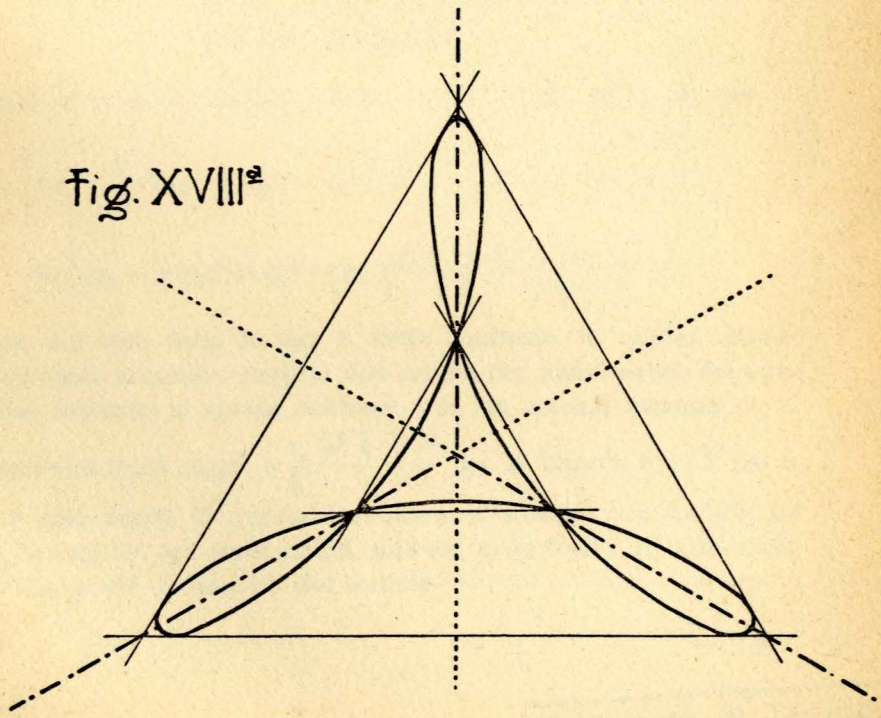


Fig. XVIII^a



lare, non passa per l'origine, ammette la retta $x_2 = 0$ per asse di simmetria: per $2r = a$ si ottiene la seconda linea diametrale principale della cardioide:

$$\left\{ x_1^2 + x_2^2 - 2\,r\,x_1\,x_3 \right\}^2 =$$

$$= x_3^2 \left\{ 2\,r^2 (x_1^2 + x_2^2 - 2\,r\,x_1\,x_3) \right\}.$$

Questa curva è cartesiana; passa per la cuspide reale della cardioide a. vendo ivi per tangente l'asse $x_1 = 0$; è simmetrica rispetto alla retta $x_2 = 0$. La seconda linea diametrale principale della lemniscata è

$$\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 + \frac{a^4}{12} x_3^4 = \frac{a^2}{3} x_3^2 \left(x_2^2 - x_1^2\right).$$

È una curva bicircolare non passante per il nodo reale della lemniscata: è simmetrica rispetto a $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

73. L'equazione della cubica diametrale di un punto $(y_1, y_2, 0)$ è:

$$- x_1^2 y_1 - x_2^3 y_2 - x_1^2 x_2 y_2 - x_1 x_2^2 y_1 + 3\,x_1^2 x_3 r y_1 +$$
$$+ x_1 x_3^2 y_1 \frac{a^2 - 4r^2}{2} + x_2^2 x_3 r\, y_1 \pm \frac{a^2}{2} x_2 x^2_3 y_2 +$$
$$+ 2\,x_1 x_2 x_3 r\, y_2 = 0.$$

In particolare le cubiche diametrali dei punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ sono:

$$x_1 \left\{ (x_1 - \frac{3}{2} r\, x_3)^2 + x_2^2 - x_3^2 \frac{2\,a^2 + r^2}{4} \right\} - x_2^2\, x_3\, r = 0,$$

$$x_2 \left\{ (x_1 - r\, x_3)^2 + x_2^2 - x_3^2 \left(\frac{\pm a^2 + 2\,r^2}{2} \right) \right\} = 0.$$

Dunque, nel caso della lumaca e della cardioide la cubica diametrale del coniugato armonico (rispetto alla coppia dei punti ciclici) del punto all'infinito dell'asse, si spezza nell'asse e in un cerchio concentrico al cerchio generatore il cui raggio è $\sqrt{\frac{a^2 + 2\,r^2}{2}}$ per la lumaca e $r\sqrt{3}$ per la cardioide. I nove centri di queste due curve si trovano con facilità. La lumaca ne ha quattro nei punti ciclici, uno nel nodo reale; gli altri quattro sono i due punti d'incontro del cerchio

Politecnico di Torino
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Corso Duca degli Abruzzi, 24
10129 TORINO (ITALIA)

$$\left(x_1 - r\,x_3\right)^2 + x_2^2 - x_3^2\left(\frac{a^2 + 4\,r^2}{2}\right) = 0$$

col lato $x_1 = 0$ e i due punti d'incontro del cerchio

$$\left(x_1 - \frac{3}{2}\,r\,x_3\right)^2 + x_2^2 - x_3^2\left(\frac{2\,a^2 + r^2}{4}\right) = 0$$

col lato $x_2 = 0$ del triangolo fondamentale.

Quindi i quattro centri della lumaca, che non cadono nei punti doppi, hanno per coordinate:

$$\left.\begin{array}{lll} 0 & ; \quad \frac{3}{2}r - \sqrt{\frac{2\,a^2 + r^2}{4}} & ; \; 1 \\ 0 & ; \quad \frac{3}{2}r + \sqrt{\frac{2\,a^2 + r^2}{4}} & ; \; 1 \end{array}\right\} \text{situati sulla retta di simmetria,}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \sqrt{\frac{a^2 - 4\,r^2}{2}} & ; \quad 0 & ; \; 1 \\ -\sqrt{\frac{a^2 - 4\,r^2}{2}} & ; \quad 0 & ; \; 1 \end{array}\right\} \text{situati sulla perpendicolare alla retta di simmetria.}$$

La cardioide ha quattro centri nei punti ciclici, uno nella cuspide reale (considerata come punto doppio); in essa, per le formole precedenti, ne vengono a coincidere altri tre, onde questa cuspide contiene quattro centri della curva; il centro rimanente (l'unico che non sia situato nei punti doppi) si trova sulla retta di simmetria distante dall'origine il triplo del raggio del cerchio generatore e nel senso del segmento che va dal nodo reale al centro del suddetto cerchio.

Le cubiche diametrali dei punti (1 , 0 , 0) , (0 , 1 , 0) rispetto alla lemniscata sono:

$$x_1\left\{x_1^2 + x_2^2 - \frac{a^2}{2}\,x_3^2\right\} = 0\,,$$

$$x_2\left\{x_1^2 + x_2^2 + \frac{a^2}{2}\,x_3^2\right\} = 0\,.$$

Esse dunque si spezzano nei due assi di simmetria della curva e in due cerchi concentrici al nodo reale e di raggio uguale ma reale nell'uno, immaginario nell'altro. Questi due cerchi si toccano dunque nei punti ciclici. Nasce quindi una contraddizione apparente, giacchè la curva ha quattro centri nei punti ciclici non avendo ivi due cuspidi. Questa

contraddizione si toglie osservando che, se una curva ha un nodo o, la prima polare di un punto o' passa semplicemente per o essendo ivi tangente alla coniugata armonica della retta $o\ o'$ rispetto alle tangenti nodali: segue che le prime polari di due punti o', o'' in linea retta con o si toccano in o e questo è appunto il caso nostro.

I nove centri della lemniscata sono dunque costituiti dai due punti ciclici contati ognuno due volte; dal nodo reale; dai due punti fissi tali che è costante il prodotto delle loro distanze da un punto della curva e da due altri punti immaginarî coniugati situati sulla congiungente i due punti fissi precedenti e alla distanza stessa dall'origine.

Noteremo finalmente come per tutte queste tre curve la corrispondenza (1 ; 3) di Chasles individuata, sulla retta all'infinito, dai diametri e dalle loro cubiche diametrali coniugate, si riduca alla involuzione segnata sulla stessa retta dai lati di un angolo retto che ruota attorno al vertice e i cui punti doppi sono i punti ciclici del piano.

Assi di simmetria.

74. Particolarizzando a una quartica i resultati ottenuti al N⁰ 6. possiamo dire che:

« *Data una retta*

$$x_2 = m\,x_1 + n\,x_3$$

e una quartica

$$a_x^4 = 0$$

le condizioni che devono essere soddisfatte perchè la retta sia un asse di simmetria della quartica sono:

$$a_{\alpha^{(1)}}\, a^3_{\alpha^{(2)}} = 0 \ ;\ a^3_{\alpha^{(1)}}\, a_{\alpha^{(2)}} = 0 \ ;\ a_{\alpha^{(1)}}\, a^3_{\alpha^{(3)}} = 0 \ ;\ a^3_{\alpha^{(1)}}\, a_{\alpha^{(3)}} = 0;$$

$$a_{\alpha^{(1)}}\, a^2_{\alpha^{(2)}}\, a_{\alpha^{(3)}} = 0 \ ;\ a_{\alpha^{(1)}}\, a_{\alpha^{(2)}}\, a^2_{\alpha^{(3)}} = 0,$$

dove:

$$\alpha_1^{(1)} = \alpha_2^{(2)} = \alpha_3^{(3)} = 1 \ ;\ \alpha_3^{(1)} = \alpha_3^{(2)} = 0$$

$$\alpha_1^{(3)} = -\,m\,n \ ;\ \alpha_2^{(3)} = n \ ;\ \alpha_1^{(2)} = -\,\alpha_2^{(1)} = -\,m. \text{ »}$$

« *Tutte le quartiche simmetriche rispetto a una medesima retta costituiscono un sistema* ∞^8 ».

75. Noi abbiamo già dato al N⁰ 37 l'equazione di quartiche simmetriche rispetto a uno, due, tre, quattro assi. Vogliamo ora, analogamente

a quanto si fece per le cubiche, dare un saggio del modo con cui si può studiare ed esaminare la forma di queste quartiche simmetriche.

Prendiamo per esempio a classificare quelle simmetriche rispetto a tre assi.

Riferendo la curva a un sistema cartesiano ortogonale di cui l'asse delle x sia una retta di simmetria e l'origine il punto comune ai tre assi, l'equazione può porsi sotto la forma:

$$(1) \qquad (x^2 + y^2)^2 + p\,(x^2 + y^2) + q\,(x^3 - 3\,x\,y^2) + r = 0$$

dove p , q , r sono i tre parametri che servono ad individuare la curva.

Essa tocca la retta all'infinito nei punti ciclici; dunque (N° 65) segue:

« *La terza linea diametrale principale di una quartica di genere 3 simmetrica rispetto a tre assi è un' ipocicloide di Steiner* ».

76. Una curva del 4° ordine non singolare possiede sempre quattro (e non più) bitangenti di prima specie annoverando fra queste anche le tangenti isolate.

Le quartiche che noi studiamo hanno dunque solamente tre bitangenti di prima specie situate a distanza finita; la simmetria richiede quindi che ognuna di esse sia perpendicolare a un asse. Le loro equazioni saranno dunque della forma:

$$x - k = 0\,,$$
$$x + \sqrt{3}\cdot y + 2\,k = 0\,,$$
$$x - \sqrt{3}\cdot y + 2\,k = 0\,.$$

Gli otto punti di contatto delle quattro bitangenti di 1ª specie stanno sopra una conica; siccome fra queste figura anche la retta all'infinito la quale tocca la quartica nei punti ciclici, così questa conica sarà un cerchio; se $\sqrt{\varrho}$ è il suo raggio, per un noto teorema di Plücker, l'equazione della quartica può scriversi:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(x^2 + y^2 - \varrho)^2 - l\,(x - k)\,(x - \sqrt{3}\cdot y + 2\,k) \times \\ &\qquad \times (x + \sqrt{3}\cdot y + 2\,k) = 0\,. \end{aligned} \right.$$

Confrontando questa equazione con la (1), se ne deducono le altre:

$$q + l = 0\ ;\ p + 2\,\varrho + 3\,k\,l = 0\ ;\ r - \varrho^2 - 4\,k^3\,l = 0$$

ovvero:

$$(\alpha)\ ;\ 16\,k^3\,q - 9\,k^2\,q^2 + 6\,p\,q\,k + 4\,r - p^2 = 0\,,$$

$$(\beta)\ ;\ 32\,\varrho^3 + \varrho^2 \left\{ 48\,p - 27\,q^2 \right\} + 24\,p^2\,\varrho + 4\,p^3 + 27\,q^2\,r = 0\,.$$

« *Nove bitangenti della quartica si dispongono dunque in tre triangoli equilateri godenti la stessa simmetria della quartica: di queste nove bitangenti tre sole sono di prima specie* ».

77. L'equazione che dà i punti d'incontro della quartica con un asse di simmetria (per esempio con l'asse delle x) è

$$(\gamma) \qquad x^4 + q\,x^3 + p\,x^2 + r = 0 .$$

Valendosi di questa equazione, si può interpretare geometricamente il fatto che la (α) possegga due, o tre radici uguali.

I discriminanti della (α) e della (γ) sono rispettivamente dati da:

$$256\,q^2 \left\{ 16\,r^2 - 8\,p^2\,r + p^4 + 9\,p\,q^2\,r - \frac{27}{16}\,q^4\,r - \frac{q^2\,p^3}{4} \right\},$$

$$256\,r \left\{ 16\,r^2 - 8\,p^2\,r + p^4 + 9\,p\,q^2\,r - \frac{27}{16}\,q^4\,r - \frac{q^2\,p^3}{4} \right\}.$$

Essi hanno dunque a comune il fattore

$$\Delta = 16\,r^2 - 8\,p^2\,r + p^4 + 9\,p\,q^2\,r - \frac{27}{16}\,q^4\,r - \frac{q^2\,p^3}{4}$$

esclusi quindi i casi $q = 0$, $r = 0$, segue che, quando la (γ) ha una radice doppia, l'ha anche la (x). Ma quando la (γ) ha una radice doppia, la curva ha tre punti doppi; dunque se la (α) ha una radice doppia la quartica è di genere zero.

La (α) ha una radice tripla se il suo hessiano si annulla identicamente, se cioè sono verificate le due relazioni:

$$r = -\frac{p^2}{12} \quad ; \quad q = \frac{4}{3}\sqrt{2\,p} .$$

La (γ) ha una radice tripla se è nullo il suo armonizzante e l'armonizzante di essa e del suo hessiano. Eseguiti i debiti calcoli, si trova che queste due condizioni coincidono con le precedenti; dunque quando la (γ) ha una radice tripla l'ha anche la (α), ma se la (α) ha una radice tripla la curva possiede tre cuspidi anzi è una ipocicloide di Steiner perchè tocca la retta all'infinito nei punti ciclici; dunque se la (γ) ha una radice tripla la curva sarà una ipocicloide Steineriana.

Se $q = 0$ si annulla il discriminante della (α) senza che si annulli quello della (γ); la curva si spezza allora in due cerchi concentrici; se invece è $r = 0$, si annulla il discriminante della (γ) senza che si annulli quello della (α) e la quartica possiede un punto isolato all'origine.

78. Premesse queste generalità, vediamo quali ipotesi, relativamente alla natura dei rami della curva, non sono in contraddizione con i principi già esposti e con i resultati ottenuti da Zeuthen nella già citata memoria. Queste ipotesi si possono raggruppare nel quadro seguente, osservando che ogni ramo deve chiudersi a distanza finita perchè la curva non ha punti reali all'infinito.

- **Quartiche non singolari**
  - I° Un ramo (*racchiude l'origine*)
    - 1ª Un'ovale *fig.* VII
    - 2ª Un trifolio *fig.* VIII
  - II° Due rami (*entrambi racchiudono l'origine*)
    - 1ª Due ovali *fig.* IX
    - 2ª Un'ovale e un trifolio *fig.* X (*l'ovale interna al trifoglio*)
  - III° Tre rami (*nessuno racchiude l'origine*)
    - 1ª Tre ovali *fig.* XI
    - 2ª Tre unifolii *fig.* XIII
  - IV° Quattro rami (*uno solo racchiude l'origine*)
    - 1ª Tre ovali e un trifolio *fig.* XII
    - 2ª Un'ovale e tre unifolii *fig.* XIV
    - 3ª Quattro ovali *fig.* XV
- **Quartiche singolari**
  - I° Tre punti doppi (*uno sopra ogni asse*)
    - 1° Tre nodi
      - di 1ª specie *fig.* XVII
      - 2ª » *fig.* XVIII
    - 2° Tre cuspidi *fig.* XVI
    - 3° Tre punti isolati e
      - Un'ovale (*nota fig.* XV)
      - Un trifolio (» » XII)
  - II° Un punto doppio
    - I° Un punto isolato all'origine e
      - Un'ovale (*nota fig.* IX)
      - Un trifolio (» » X)
      - Tre ovali (» » XII)
      - Tre unifolii (» » XIV)

79. Cerchiamo le corrispondenti condizioni analitiche.

Quartiche non singolari.

Per esse soltanto è il prodotto $\Delta\, r$ diverso da zero. Ora Δ ha segno uguale al discriminante della (α) e potrà essere positivo, o negativo. Nel 1° caso la (α) ha una sola radice reale; nel secondo le ha tutte e tre reali; nel 1° si ha quindi un solo triangolo di bitangenti (quelle di 1ª specie) che goda la stessa simmetria della quartica; nel secondo se ne hanno tre:

dunque quando $\Delta > 0$ siamo nel I° o nel II° dei casi considerati nel quadro precedente; quando invece $\Delta < 0$ siamo nel III° o nel IV°.

Per distinguere il I° dal II°, osserveremo che, nel I°, l'asse delle y incontra la curva in due soli punti reali e quindi deve essere $r < 0$; nel II° lo stesso asse l'incontra in quattro punti reali, onde dovrà aversi contemporaneamente $r > 0$; $p < 0$; $p^2 > 4\,r$.

Se, essendo $r < 0$, non fossero contemporaneamente adempiute le altre due condizioni $p < 0$; $p^2 > 4\,r$; la curva sarebbe immaginaria giacchè non incontrandola in punti reali le tre perpendicolari agli assi passanti per l'origine e dovendo la parte reale della curva chiudersi a distanza finita, essa dovrebbe essere costituita da sei rami chiusi situati nelle sei regioni in cui le 3 suddette rette dividono il piano. Ora una quartica di 3° genere non può possedere più di quattro rami.

Lo stesso criterio che vale per distinguere il I° dal II° caso, vale per distinguere il III° dal IV°.

80. Rimanendo sempre nel campo delle quartiche non singolari, abbiamo così esposto come si possono distinguere i casi I° , II° , III° , IV° fra di loro. Vediamo ora come, in ognuno di essi, si possono distinguere ulteriormente i sotto-casi stabiliti nel quadro precedente. Cominciamo dal I° e dal II° insieme.

In entrambi il criterio che ci servirà per distinguere i sotto-casi, sarà di considerare le bitangenti di prima specie.

Se la curva è costituita da una sola ovale, o da due ovali; le bitangenti di I^a specie sono isolate; se invece la curva è costituita da un trifolio; o da un'ovale e un trifolio le bitangenti di 1^a specie, all'infuori della retta all'infinito, avranno reali i loro punti di contatto. Ora l'equazione:

$$p + 2\,\varrho - 3\,k\,q = 0 \tag{2}$$

ci fornisce il raggio $\sqrt{\varrho}$ del cerchio che contiene i punti di contatto delle bitangenti di 1^a specie; se dunque ϱ è negativo, o se anche essendo positivo, $\sqrt{\varrho}$ è minore della distanza che passa fra l'origine e una delle tre bitangenti di 1^a specie; queste non avranno punti reali comuni con la curva, saranno cioè tangenti isolate; se invece ϱ è positivo e $\sqrt{\varrho}$ è maggiore della distanza suddetta, le bitangenti di 1^a specie toccheranno in punti reali la curva.

Nei casi I° e II° la (a) ha una sola radice reale; se la indichiamo con k_r e chiamiamo ϱ_r il valore che si deduce dalla (2) quando in essa per k si sostituisce k_r; posto

$$\Omega_r = \varrho_r - k_r^2$$

il criterio richiesto ci sarà fornito dal segno di Ω_r negativo nel 1° e positivo nel 2° dei due sotto-casi di I° e II°.

81. Questo medesimo criterio può valere a farci distinguere, anche nei casi III° e IV°, i rispettivi sottocasi fra di loro: però è necessario fare le le seguenti considerazioni.

Prima di tutto la (a) possiede allora tre radici reali: se s'indicano con k_1, k_2, k_3 e con ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 i valori corrispondenti di ϱ che se ne deducono per mezzo della equazione del N° precedente, si hanno tre quantità Ω del cui segno bisogna accertarsi e cioè:

$$\Omega_1 = \varrho_1 - k_1^2 \; ; \; \Omega_2 = \varrho_2 - k_2^2 \; ; \; \Omega_3 = \varrho_3 - k_3^2$$

e di queste tre, non più di una può essere negativa, giacchè dal segno negativo di una sola di esse consegue l'esistenza di tre tangenti isolate che sono bitangenti di 1ª specie; se avessimo due Ω negative avremmo sei tangenti isolate cioè più di quattro bitangenti di 1ª specie il che, secondo un teorema di *Zeuthen*, è impossibile. Potremo dunque, nei casi III° e IV°, far consistere il criterio atto a distinguere i sotto-casi rispettivi all'esame del prodotto

$$\Omega_1 \; \Omega_2 \; \Omega_3 \, .$$

Questo criterio non può sembrar decisivo nel caso IV°, giacchè tanto nel 1° che nel 2° dei due sotto-casi relativi, le tre bitangenti di 1ª specie (che sono situate a distanza finita) non sono isolate e quindi, in entrambe, il prodotto precedente è positivo. Però è facile assicurarsi che l'ipotesi relativa al 2° sotto-caso del IV° porta condizioni analitiche contraddittorie e quindi deve essere esclusa. Infatti: essa richiede $\Delta < 0$; $r < 0$: da esse consegue $p > 0$. Ora, dalla (2) del N° precedente, resulta:

$$p = -2\,\varrho_1 + 3\,k_1\,q = -2\,\varrho_2 + 3\,k_2\,q = -2\,\varrho_3 + 3\,k_3\,q\,,$$

ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 debbono essere positivi altrimenti, fra le bitangenti, ve ne sono delle isolate ciò che questa ipotesi esclude (eccezion fatta per la retta all'infinito); essendo $p > 0$ segue che

$$k_1\,q \;\; , \;\; k_2\,q \;\; , \;\; k_3\,q$$

devono essere positivi, ossia k_1, k_2, k_3 di segno uguale a quello di q e quindi di segno uguale fra loro, mentre l'esame della figura XIVª mostra che ciò non può avvenire. Nessuna delle altre ipotesi già fatte al N° 78 porta condizioni analitiche contraddittorie e di ciò fanno prova gli esempî

che in ogni sotto-caso si sono addotti al N⁰ 82. Finalmente noteremo che nessuna delle espressioni Ω può annullarsi senza che la quartica si spezzi, giacchè l'annullarsi (anche di una sola Ω) porta l'esistenza di tre flessi uno su di ogni asse e quindi di tre tac-nodi.

Quartiche singolari.

82. Allora è $r\,\Delta = 0$. Si hanno quindi le tre ipotesi ugualmente possibili:

$$(r = 0\ ,\ \Delta \gtrless 0)\ ;\ (r \lessgtr 0\ ,\ \Delta = 0)\ ;\ (r = 0\ ,\ \Delta = 0).$$

Nella 1ª, la curva possiede un punto isolato all'origine. Se Δ è positivo la (a) ha una sola radice reale e quindi il rimanente della curva non può essere che un'ovale, o un trifolio a seconda che Ω_r è negativa, o positiva. Questi due sotto-casi sono limiti del II° (l'ovale interna ridotta infinitesima). Se Δ è negativo la (a) ha tre radici reali e il rimanente della curva sarà costituito da tre ovali, nè potrà essere costituito da tre unifolii per le ragioni addotte nel N⁰ precedente relativamente alla esistenza di un ovale con tre unifolii.

Se poi è $r \lessgtr 0$, $\Delta = 0$ la curva ha tre punti doppi, uno su di ogni asse. Questi punti doppi possono essere nodi di 1ª, o di 2ª specie, punti isolati, o cuspidi. Nel 1° caso solamente avviene che l'asse delle y incontri la curva in quattro punti reali: le condizioni analitiche corrispondenti sono:

$$r > 0\ ;\ p < 0\ ;\ p^2 > 4\,r\,.$$

Se è $r > 0$ ma non $p < 0$, oppure non $p^2 > 4\,r$ la curva è immaginaria; se finalmente $r < 0$ i punti doppi possono essere nodi di secondo tipo, punti isolati, o cuspidi. Per suddistinguere fra loro questi ultimi casi occorre intanto osservare che, nel caso delle cuspidi, la (a) e la (γ) hanno una radice tripla, cioè debbono essere soddisfatte le relazioni:

$$r = -\frac{p^2}{12}\ ;\ q = \frac{4}{3}\sqrt{2\,p}\,.$$

Rimane dunque a conoscere il criterio atto a far distinguere i punti isolati dai nodi di 2ª specie. È perciò necessario conoscere le radici della (a) e osservare che la radice doppia dà luogo al triangolo dei punti dop-

pi; la radice semplice a tre bitangenti vere e proprie. Se s'indicano con k_d , k_s le radici doppia e semplice della (α); con ϱ_s il raggio relativo a k_s e si pone

$$\Omega_s = \varrho_s - k_s^2$$

il segno negativo di Ω_s ci dirà che i tre punti doppi sono tre punti isolati e di più che il rimanente della curva è costituito da un'ovale. Se invece Ω_s è positivo, ne viene un'ambiguità perchè può darsi che la curva possegga tanto tre punti isolati accompagnati da un trifolio, quanto tre nodi di 2ª specie.

E per togliere quest'ultima ambiguità occorre confrontare i valori assoluti k'_s , k'_d di k_s , k_d e osservare che se i punti doppi sono punti isolati, accompagnati da un trifolio, è $k'_d > k'_s$ e che avviene il contrario se i punti doppi sono nodi di 2ª specie.

Le condizioni analitiche trovate caso per caso anche per le quartiche non singolari, non sono riscontrate incompatibili fra loro e per prova se ne sono addotti nel quadro seguente i relativi esempi.

$\Delta r \gtrless 0$
Quartiche non singolari

- $\Delta > 0$
  - $r < 0$
    - $\Omega_r < 0$: Un'Ovale *fig.* VII
      Es : $p = 16$; $q = 4$; $r = -1$
    - $\Omega_r > 0$: Un trifolio *fig.* VIII
      Es : *la quartica di Klein i cui coefficienti-coordinate soni* :
      $p = -\frac{1}{7}$; $q = -\frac{2}{3}$; $r = -\frac{1}{147}$
  - $r > 0$ ($p < 0; p^2 > 4r$ *altrimenti la curva è immaginaria*)
    - $\Omega_r < 0$: Due Ovali *fig.* IX
      Es : $p = -64$; $q = 1$; $r = 1$
    - $\Omega_r > 0$: Un'Ovale e un trifolio *fig.* X
      Es. $p = -16$; $q = 4$; $r = 1$
- $\Delta > 0$
  - $r < 0$
    - $\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 < 0$: Quattro Ovali *fig.* XV.
      Es : $p = \frac{136}{3}$; $q = \frac{128}{9}$; $r = -\frac{496}{9}$
    - $\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 > 0$: Tre Ovali e un trifolio *fig.* XII
      Es : $p = \frac{208}{3}$; $q = 16$; $r = -\frac{3308}{9}$
  - $r > 0$
    - $\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 < 0$: Tre Ovali *fig.* XI
      Es : $p = \frac{16}{3}$; $q = \frac{80}{9}$; $r = \frac{2624}{9}$
    - $\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 > 0$: Tre unifolii *fig.* XIII
      Es : $p = -\frac{104}{3}$; $q = -\frac{32}{9}$; $r = \frac{1424}{9}$

$\Delta r = 0$
Quartiche singolari

- $r = 0$, $\Delta \gtrless 0$
  - $\Delta > 0$
    - $\Omega_s < 0$: Un punto isolato e un'ovale. $Es: p = -64 \; ; \; q = 1$
    - $\Omega_s > 0$: Un punto isolato e un trifolio. $Es: p = -4 \; ; \; q = 2$
  - $\Delta < 0$: Tre Ovali e un punto isolato. $Es: p = \frac{160}{3} + \sqrt{32} ; q = \frac{16}{9}\sqrt{32} + 16$
- $\Delta = 0$, $r \gtrless 0$
  - $r < 0$
    - $\Omega_s < 0$: Tre punti isolati e un'ovale. $Es: p = 40 \; ; \; q = \frac{112}{9} ; r = -48$
    - $\Omega_s > 0$
      - $k'_d > k'_s$: Tre punti isolati e un trifolio. $Es: p = \frac{64}{3} ; q = \frac{80}{9} ; r = -\frac{256}{9}$
      - $k'_d < k'_s$: Tre nodi di 2ª specie *fig.* XVIII. $Es. p = 64 \; ; \; q = 16 ; r = -256$
    - $q = \frac{4}{3}\sqrt{2p} ; r = -\frac{p^2}{12}$: Ipocicloide di Steiner *fig.* XVI
  - $r > 0$ ($p < 0 ; p^2 > 4r$ *altrimenti la curva è immaginaria*): Tre nodi 1ª specie *fig.* XVII. $Es. p = -104 \; ; \; q = \frac{32}{9} \; ; \; r = 1680$

NOTE ALLE FIGURE

Fig. VI. — Quando l'ovale interna al triangolo degli asintoti impiccolisce indefinitamente, si ottiene l'unica cubica di genere zero che possegga tre assi di simmetria. Essa è costituita quindi da un ramo infinito di 2ª specie e da un punto isolato all'origine.

Fig. VIII. — È di questa forma la quartica già citata di Klein.

Fig. IX. — Se l'ovale interna si riduce a un punto, la curva possiede un'ovale e un punto isolato all'origine.

Fig. X. — Anche in questa, quando l'ovale interna è ridotta a un punto, la quartica consta di un trifolio e di un punto isolato all'origine.

Fig. XII. — Questa quartica ha reali distinte tutte le sue 28 bitangenti, e di queste una sola è isolata; la retta all'infinito. Essa dà luogo a due casi limiti. Il trifolio interno ridotto a un punto isolato, nel qual caso la curva consta di questo punto isolato e di tre ovali, oppure le tre ovali ridotte a tre punti e allora la curva è costituita di tre punti isolati e un trifolio.

Fig. XIV. — Abbiamo già dimostrato al N. 81 che la curva corrispondente a questa figura non può esistere; l'abbiamo quì disegnata perchè è anche dalla disposizione delle sue bitangenti di 1ª specie che si riconosce non esservi alcuna quartica capace di assumere tale forma. È per questo che abbiamo tralasciato di disegnare tutte le bitangenti: se la curva esistesse le avrebbe tutte reali. Neppure esiste la quartica corrispondente al caso limite in cui l'ovale interna è ridotta a un punto isolato.

Fig. XV. — Essa, come la XII, ha reali e distinte tutte le sue 28 bitangenti di cui 27 a distanza finità e una all'infinito. Però a differenza della XII. possiede 4 tangenti isolate invece di una sola.

Ammette due casi limiti: l'ovale interna ridotta a un punto: allora, come nel 1º dei casi limiti della figura XII, la curva consta di un punto isolato all'origine e di tre ovali; oppure le tre ovali ridotte a tre punti e la curva consta di tre punti isolati a un'ovale.

Fig. XVIII. — Ha per caso limite la XVI. che è l'ipocicloide di Steiner.

SULLE SUPERFICIE ALGEBRICHE SIMMETRICHE

[*Rendic. Acc.: Lincei. Vol VI. Fasc. 9*]

« 1. Lo scopo di questa Nota è di esporre una proprietà riguardante le superficie algebriche che godono simmetria rispetto a piani appartenenti a un medesimo fascio, e di ricercare ciò che vi ha di caratteristico nel caso speciale delle superficie del 3° ordine.

« La possibilità dell'esistenza di tali superficie simmetriche è stata messa in luce la prima volta dal Goursat nella sua Memoria: *Étude des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier* (1). Però, in questo lavoro, non si fa menzione del massimo numero dei piani di simmetria di un fascio che può possedere una superficie senza possederne infiniti, senza cioè essere una superficie di rotazione attorno all'asse del fascio. Ci occuperemo dapprima di questa ricerca. Perciò mi permetto qui di richiamare i seguenti resultati ottenuti per le curve algebriche piane e simmetriche, pubblicati nella mia tesi di abilitazione all'insegnamento (2):

« *Una curva di grado dispari* $2r+1$ *non può possedere un numero pari di assi senza spezzarsi nella retta all'infinito e in una curva di grado pari. Essa, senza degenerare, può esser simmetrica separatamente rispetto a*

$$1\,;\,3\,;\,5\,;\ldots\,2r+1$$

assi ».

« *Una curva di grado pari invece può possedere tanti assi quante sono le unità contenute in uno qualunque dei numeri non superiori al suo grado* ».

« *In generale, una curva di grado* n *non può possedere più di* n *assi senza possederne un numero infinito e spezzarsi in* $\frac{n}{2}$ *cerchi concentrici se* n *è pari; in* $\frac{n-1}{2}$ *di tali cerchi e nella retta all'infinito se* n *è dispari* ».

(1) Annales Scientifiques de l'école Normale Supérieure de Paris. Année 1887.

(2) Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Anno 1889.

« *In ogni caso gli assi appartengono a un medesimo fascio e sono disposti simmetricamente attorno al centro del fascio* ».

« 2. Si tratta di passare agli analoghi teoremi per le superficie. Prima di tutto osserveremo che se una superficie gode simmetria rispetto a un certo numero di piani di un fascio; essi saranno disposti simmetricamente rispetto all'asse del fascio, e per conseguenza se si taglia la superficie con un piano normale a quest'asse, la sezione resultante è simmetrica rispetto a rette uscenti da un punto e ad essa saranno perciò applicabili i sopra enunciati teoremi.

« Ora l'equazione generale di una superficie di grado n può porsi sotto la forma:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + U_n = 0$$

dove le a sono costanti e $U_n = 0$ rappresenta la sezione prodotta dal piano $z = 0$. Siano n ed r due numeri dispari di cui il primo non minore del secondo e rappresenti $U_n^{(r)} = 0$ una curva con r assi (N.i 22 e seguenti della mia tesi). Allora evidentemente l'equazione:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + U_n^{(r)} = 0$$

rappresenterà una superficie di grado dispari, con un numero dispari di piani di simmetria appartenenti tutti allo stesso fascio. Se n è dispari e r è pari, allora ogni sezione, prodotta da un piano $z =$ cost, si spezza nella retta all'infinito e in una curva di grado pari; indicando con u_∞ questa retta e con $U_{n-1}^{(r-1)}$ la curva; l'equazione della superficie sarà:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + u_\infty U_{n-1}^{(r-1)} = 0.$$

Se finalmente n è pari, allora le sezioni prodotte dai piani $z =$ cost possono possedere anche un numero pari di assi senza spezzarsi e l'equazione:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + U_n^{(r)} = 0$$

dove n è pari, rappresenterà una superficie di grado pari con un numero qualunque (ma non superiore al suo grado) di piani di simmetria appartenenti al medesimo fascio.

« Perciò conseguono i seguenti resultati:

« *Una superficie algebrica può possedere tanti piani di simmetria appartenenti a un medesimo fascio, quante sono le unità contenute in uno qualunque dei numeri che non superano il suo grado.*

« *Tutte le superficie di grado dispari con un numero pari di piani di*

simmetria di un fascio contengono una retta all'infinito che è quella comune a tutti i piani normali all'asse del fascio.

« Se, finalmente, una superficie di grado n possedesse più di n piani di simmetria appartenenti a un medesimo fascio, le sezioni prodotte da piani perpendicolari all'asse del fascio possederebbero più di n assi e si spezzerebbero in $\frac{n}{2}$ cerchi concentrici, se n fosse pari; in $\frac{n-1}{2}$ di tali cerchi e nella retta all'infinito, se n fosse un numero dispari.

« Dunque:

« *Una superficie algebrica di grado n non può essere simmetrica rispetto a più di n piani del medesimo fascio, senza esserlo rispetto a tutti e convertirsi in una superficie di rotazione attorno all'asse del fascio.*

« 3. Venendo al caso particolare delle superficie di terz'ordine, abbiamo così i due tipi di simmetria rispetto a piani di un fascio:

$$\text{(I)} \qquad x^2 \{ y + a \} + z^2 \{ by + c \} + my^3 + ny^2 + py + q = 0 \, ;$$

$$\text{(II)} \quad x^3 - 3\, xz^2 + a\,(x^2 + z^2) + by\,(x^2 + z^2) + cy^3 + dy^2 + ey + f = 0 \, ;$$

di cui la (I) ammette due piani ortogonali, la (II) tre piani inclinati l'uno sull'altro di $\frac{\pi}{3}$.

« Per i resultati precedenti, saranno questi i soli tipi di superficie cubiche simmetriche quando i piani di simmetria hanno una retta comune. Però, in questo caso speciale delle superficie di terz'ordine, con considerazioni semplicissime, si può stabilire quali sono *tutti* i tipi possibili di superficie simmetriche, anche quando i piani di simmetria, invece di avere una retta a comune, hanno un sol punto (ciò che costituisce il caso più generale possibile).

4. Fra queste ultime il Goursat trova le due (1):

$$\text{(III)} \qquad x^3 - 3\, xz^2 + a\,(x^2 + z^2) + by^2 + c = 0 \, ;$$

$$\text{(IV)} \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2\, xyz + a = 0 \, ;$$

delle quali la prima possiede la stessa simmetria della piramide doppia, triangolare retta, a base regolare e la seconda la stessa simmetria del tetraedro regolare. A queste quattro equazioni tipiche è da aggiungersi anche l'altra

(1) L'equazione (IV) è stata pure ottenuta dal Sig. Lecornu contemporaneamente al Goursat. — Cf. Acta Mathematica 10, 3: *Sur les surfaces possédant les mêmes plans de symétrie que l'un de polyédres régulier.*

$$(\mathrm{V}) \qquad x^3 + ayx^2 + by^2x + cy^3 + dx^2 + ex + fy^2 + gy + hxy + \\ + k + z^2 \{ mx + ny + p \} = 0 ;$$

che rappresenta una superficie cubica con un sol piano di simmetria. Fra queste cinque equazioni, due (la (I) e la (V)) rappresentano superficie simmetriche rispetto a due, e a uno dei piani coordinati. Evidentemente non si può esigere che la superficie sia simmetrica rispetto ai tre piani coordinati, senza che si spezzi in una quadrica e nel piano all'infinito.

« Mi propongo ora di dimostrare che le precedenti cinque equazioni rappresentano tutte le possibili superficie cubiche simmetriche non degeneri, e di esporre le proprietà fondamentali di quelle appartenenti al tipo (III) che sono le più interessanti.

5. È perciò necessario richiamare qui i seguenti resultati dovuti a Eckardt (1).

« Se per un punto P di una superficie S del terzo ordine, passano tre delle ventisette rette della superficie e queste tre rette sono situate in un medesimo piano che è evidentemente il piano tangente in P ad S, il punto P è uno dei dieci punti doppî della hessiana di S cioè uno dei vertici del pentaedro di Sylvester; il piano tangente in P ad S è uno dei piani diagonali del pentaedro, chiamando piano diagonale quello che passa per un vertice e per lo spigolo corrispondente; questo piano tangente tocca l'hessiana lungo lo spigolo del pentaedro che corrisponde a P e taglia la stessa superficie secondo due rette che passano per P e che non sono spigoli del pentaedro. Chiameremo *punto di Eckardt* ogni punto di una superficie cubica che è vertice del pentaedro di Sylvester; e *superficie di Eckardt* ogni superficie cubica che possiede almeno un punto di Eckardt. È noto che una superficie cubica può possedere separatamente: 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 10 punti di Eckardt, nel qual ultimo caso è la *superficie diagonale di Clebsch.*

« Ciò premesso, sia P un punto qualunque di una superficie cubica S. Tutte le rette passanti per P incontrano in altri due punti la superficie S, e il luogo del coniugato armonico di P, rispetto a ognuna di queste coppie di punti, è manifestamente la quadrica polare di P rispetto ad S. Se ora P è un punto di Eckardt la sua quadrica polare si spezza in due piani di cui uno è il pian tangente in P ad S; l'altro è evidentemente il luogo del coniugato armonico di P rispetto a tutte le coppie di punti che sono intersezioni di S con rette passanti per P; questo piano gode di molte proprietà analoghe a quelle di cui gode la polare armonica

(1) *Ueber diejenigen Flächen dritten Grades, auf denen sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden* (Math. Annal. Bd. 10).

di un flesso nel caso delle cubiche piane: lo chiameremo *il piano polare armonico di* P.

« Possiamo così enunciare un primo teorema:

« *In ogni superficie di Eckardt, un punto di Eckardt e il suo piano polare armonico stabiliscono nello spazio una corrispondenza proiettiva che è una omologia armonica, la quale trasforma in sè stessa la superficie e tutte le sue covarianti e in particolare l'hessiana.*

« Nel caso speciale in cui il punto di Eckardt sia all'infinito, nella direzione perpendicolare al suo piano polare armonico, la superficie fondamentale e le sue covarianti sono evidentemente simmetriche rispetto a questo piano. Dunque:

« *La condizione necessaria e sufficiente perchè una superficie del terzo ordine sia simmetrica rispetto a un piano, è che il punto all'infinito delle normali a questo piano sia un punto di Eckardt per la superficie.*

« *Tutte le superficie di Eckardt, compresa anche la superficie diagonale di Clebsch, sono trasformabili proiettivamente in superficie cubiche simmetriche.*

6. Si può ora dimostrare che l'equazioni del N^0 3 rappresentano tutte e sole le possibili superficie cubiche simmetriche.

« E questo resulta per mezzo delle considerazioni seguenti. In generale se una superficie non degenere ammette un certo numero di piani di simmetria, essi appartengono a un medesimo fascio, o a una medesima stella e in ogni caso si dispongono simmetricamente rispetto all'asse del fascio, o al centro della stella.

« Per l'esistenza di un piano di simmetria è condizione necessaria, ma non sufficiente, che il pentaedro di Sylvester possegga un vertice nel piano all'infinito.

« Questo pentaedro può avere 1 , 3 , 4 , 6 dei suoi vertici in un medesimo piano (all'∞). Corrispondentemente si hanno le superficie dei tipi (V) , (II) , (III) , (IV).

« Lo stesso pentaedro non può possedere due, o cinque vertici, in un piano, senza possedervene tre, o sei rispettivamente. Sembrerebbe quindi che una superficie cubica non potesse possedere due piani di simmetria senza averne un terzo, mentre l'equazione (I) ne rappresenta una con due soli piani di simmetria. Però bisogna rammentare, come sopra abbiamo osservato, che non è sufficiente porre all'infinito un vertice del pentaedro per conseguirne un piano di simmetria; oltre a ciò bisogna che questo vertice all'infinito appartenga alle normali al piano di simmetria e sia situato sulla superficie fondamentale. Mentre dunque, per due vertici del pentaedro possono essere verificate tutte queste condizioni, per il terzo può non verificarsi altro che la prima.

« Una superficie cubica non può possedere cinque punti di Eckardt,

dunque non esistono superficie cubiche con cinque piani di simmetria.

« Una retta non può contenere più di tre vertici del pentaedro; quindi non esistono superficie cubiche simmetriche rispetto a più di tre piani di un medesimo fascio.

« Finalmente non rimane a considerare che il caso in cui la superficie possegga dieci punti di Eckardt e sia quindi una « superficie diagonale di Clebsch ». Però si vede subito che non esistono corrispondentemente superficie cubiche non degeneri con 10 piani di simmetria, perchè i dieci vertici del pentaedro dovrebbero essere in un piano e la superficie si spezzerebbe.

« Così è dimostrato che le equazioni del N° 3 ci forniscono tutti i tipi possibili di superficie cubiche simmetriche. Nè può venire il sospetto che alcune di tali equazioni rappresentino superficie degeneri. Se ciò potesse avvenire, fra le superficie di grado inferiore, a cui dovrebbero ridursi, ci sarebbe almeno un piano, e questo, per i teoremi precedenti, dovrebbe essere o il piano all'infinito, o un piano di simmetria, cioè che le equazioni stesse escludono.

7. Passiamo ora a studiare le proprietà fondamentali della superficie del tipo (III). La sua equazione è:

$$x^3 - 3\,xz^2 + \alpha\,(x^2 + z^2) + \beta y^2 + \gamma = 0,$$

quella della sua hessiana:

$$y^2\,(x^2 + z^2) + \frac{\alpha^2}{3\beta}(x^3 - 3\,xz^2) - \left(\frac{3\gamma}{\beta} + \frac{\alpha^3}{9\beta}\right)(x^2 + z^2) - \frac{\alpha^2}{9}\,y^2 + \frac{\gamma\alpha^2}{3\beta} = 0$$

la quale gode naturalmente la stessa simmetria della superficie fondamentale.

« Secondo i resultati precedenti, il pentaedro di Sylvester avrà quattro dei suoi vertici all'infinito nelle direzioni perpendicolari ai piani di simmetria, dunque tre di essi si trovano sopra una medesima retta e il piano all'infinito è uno dei piani diagonali del pentaedro. Esso quindi possiede anche uno spigolo all'infinito. Quella parte che è a distanza finita costituisce un prisma A triangolare, retto, a base regolare. Esso gode la stessa simmetria della superficie fondamentale, e per conseguenza ha le tre costole laterali sui tre piani di simmetria che passano per una medesima retta e i piani delle basi disposti a ugual distanza dal 4° piano di simmetria.

« Per le coordinate omogenee dei 4 vertici all'infinito si possono prendere le seguenti:

$$(0\,,\,0,1\,,\,0)\,,\,(\sqrt{3}\,,\,0\,,\,1\,,\,0)\,,\,(-\sqrt{3}\,,\,0\,,\,1\,,\,0)\,,\,(0\,,\,1\,,\,0\,,\,0)\,.$$

L'equazione delle cinque facce sono:

$$6x+a=0\,,\;3x\pm 3\sqrt{3}\,z-a=0\,,\;y\pm\sqrt{\frac{3\gamma}{\beta}-\frac{a^3}{18\beta}}=0\,.$$

« 8. Abbiamo già notato che, in un punto P di Eckardt, si tagliano due rette che appartengono alla hessiana della superficie fondamentale, e che non sono spigoli del pentaedro, perchè il piano che le contiene è un piano diagonale del pentaedro stesso e tocca l'hessiana lungo lo spigolo che corrisponde a P. Dunque:

« *Ogni punto di Eckardt che rende simmetrica una superficie cubica, individua sulla hessiana una coppia di rette parallele passanti per esso e diverse dagli spigoli del pentaedro.*

« Chiameremo queste rette: *rette sopranumerarie dell'hessiana* e *sopranumerarie coniugate* quelle situate sullo stesso piano diagonale. La nostra superficie darà luogo dunque, sulla sua hessiana, ad 8 rette sopranumerarie: due di esse sono all'infinito immaginarie coniugate; le altre 6 costituiscono un prisma B simile e inversamente posto al prisma A del N. precedente, in modo che le costole laterali di A stanno sulle facce laterali di B.

« Se si chiamano corrispondenti due curve situate sulla hessiana quando l'una è il luogo dei vertici dei coni polari dei punti dell'altra, è noto che a uno spigolo del pentaedro corrisponde un vertice. Ad una retta sopranumeraria, che non essere uno può di questi spigoli, qual curva corrisponderà? Sia la retta sopranumeraria:

$$x=\frac{a}{3}\,,\,y=\sqrt{\frac{4a^3}{9\beta}+\frac{3\gamma}{\beta}}\,.$$

Per coordinate omogenee di un suo punto qualunque P, si può prendere

$$\frac{a}{3}\,;\,\sqrt{\frac{4a^3}{9\beta}+\frac{4\gamma}{\beta}}\,;\,\lambda\,;\,1\,.$$

Il cono polare di questo punto ha il vertice in

$$\frac{a}{3}\,;\,-\sqrt{\frac{4a^3}{9\beta}+\frac{3\gamma}{\beta}}\,;\,\frac{a^2}{\lambda}\,;\,1$$

che è un punto della sopranumeraria coniugata. Dunque:

« *Ad una retta sopranumeraria dell'hessiana corrisponde la sopranumeraria coniugata.*

« *I piani diagonali del pentaedro relativi ai punti di Eckardt che ren-*

dono simmetrica la superficie, contengouo ognuno un numero infinito di rette congiungenti punti corrispondenti dell'hessiana. In ognuno di essi queste rette inviluppano una conica.

« Il piano $x = \frac{a}{3}$ tocca il cono polare di P lungo tutta la retta sopranumeraria coniugata. Quindi:

« *Tutti i coni polari dei punti di una retta sopranumeraria si toccano lungo la sopranumeraria coniugata, avendo per comune piano tangente il piano delle due rette.* Questi coni debbono formare un fascio perchè sono quadriche polari dei punti di una retta; essi hanno già due generatrici comuni coincidenti, avranno quindi a comune anche una conica. Per conseguenza:

« *La curva polare di una sopranumeraria si riduce a questa conica e alla sopranumeraria coniugata contata due volte.*

« 9. Si viene così a togliere un'apparente contraddizione che si manifesta appena dimostrata l'esistenza di queste rette sopranumerarie. Infatti, il professore Cremona, nella sua celebre Memoria sulle superficie del terzo ordine (1), osserva al N. 84 che, se la superficie fondamentale non ha punti doppî, il che nel nostro caso non avviene, l'hessiana non può possedere rette all'infuori delle 10 che costituiscono gli spigoli del pentaedro.

« Per dimostrarlo egli nota che se una retta r esiste sulla hessiana, i coni polari dei suoi punti debbono formare un fascio, quindi avere il vertice comune; in questo fascio entrano anche le tre diverse coppie di piani che contengono le quattro generatrici formanti la curva base del fascio; allora ne viene che il vertice V di questi coni è un vertice del pentaedro; r contiene tre punti doppî dell'hessiana ed è lo spigolo che corrisponde a V.

« Si può però obbiettare che i coni polari di r debbono bensì formare un fascio, ma non è per questo necessario che abbiano il vertice a comune; perchè formino un fascio è sufficiente che si tocchino lungo una generatrice e che abbiano a comune una conica. Questo appunto succede nel caso che la retta r sia una sopranumeraria. Essa allora non contiene più tre punti doppî dell'hessiana, ma uno soltanto, e infatti, nel corrispondente fascio di coni polari, non ce ne sono più tre che si spezzano, ma uno solo ed è costituito dal piano che li tocca tutti e dal piano della conica comune.

« È anche da notarsi che, dai teoremi precedenti, resultano pure gli altri:

« *I piani polari dei punti di una sopranumeraria fanno fascio attorno*

(1) Crelle, Bd. 68.

alla sopranumeraria coniugata.

« *Il cono osculatore dell'hessiana, in un punto di Eckardt che rende simmetrica la superficie fondamentale, tocca l'hessiana secondo tre spigoli del pentaedro di Sylvester e la taglia secondo due rette sopranumerarie coniugate.*

« 10. In questo caso speciale, il problema della determinazione delle 27 rette della superficie fondamentale viene a dipendere da una semplice equazione del terzo ordine ed ecco come si può risolverlo. Il piano all'infinito ne contiene tre che sono le

$$u = 0 \ , \ \left(x = 0 \ , \ x = \sqrt{3}\, z \ , \ x = -\sqrt{3}\, z\right)$$

intendendo di prendere, per tetraedro fondamentale quello, formato dal sistema cartesiano a cui è riferita la superficie e dal piano all'infinito $u = 0$.

« Per la retta $u = 0$, $x = 0$ passa già il piano all'infinito che rappresenta uno dei piani tritangenti della superficie; per la stessa retta quindi ne passeranno altri 4, e per trovarli basterà porre $x = ku$ nell'equazione della superficie fondamentale. La sezione si spezza nella retta $x = 0$, $u = 0$ e nella conica

$$(\alpha - 3k)\, z^2 + y^2 \beta + (k^3 + \alpha k^2 + \gamma)\, u^2 = 0 \, ,$$

β è diverso da zero altrimenti la superficie fondamentale degenera in un cilindro: la conica precedente quindi si spezza solo quando si ha $\alpha - 3k = 0$; oppure $k^3 + \alpha k^2 + \gamma = 0$.

« Per $k = \frac{\alpha}{3}$ si trovano così le due rette

$$x = \frac{\alpha}{3} \quad ; \quad y = \pm \sqrt{-\frac{4\alpha^3}{27\beta} - \frac{\gamma}{\beta}}$$

e le altre 4 che provengono per effetto della simmetria di cui gode la superficie. Queste 6 rette compongono i lati delle basi di un prisma C, simile e similmente posto ai prismi del N° 8. Se poi s'indicano con k_1 , k_2 , k_3 le radici della equazione

$$k^3 + \alpha k^2 + \gamma = 0$$

si hanno le altre 18 rette della superficie date da:

$$\left.\begin{array}{c} x = k_i \ ; \ y\sqrt{\beta} \pm z\sqrt{3k_i - \alpha} = 0 \\ x + z\sqrt{3} + 2k_i = 0 \ ; \ 2y\sqrt{\beta} \pm \left(x\sqrt{3} - z\right)\sqrt{3k_i - \alpha} = 0 \\ x - z\sqrt{3} + 2k_i = 0 \ ; \ 2y\sqrt{\beta} \pm \left(x\sqrt{3} + z\right)\sqrt{3k_i - \alpha} = 0 \end{array}\right\} \ i = 1 \, ; 2 \, ; 3 \, .$$

« Ogni gruppo di 6 rette, che si ottiene ad ogni valore di i, costituisce il gruppo delle 6 diagonali delle facce laterali di un prisma k_i triangolare, retto, a basi regolari, godente la stessa simmetria della superficie fondamentale.

« Una proprietà singolare che lega i prismi k_i al prisma C è la seguente:

« *I piani diagonali omologhi di tre prismi k_i passano per il medesimo lato di una delle basi del prisma C e dànno luogo ad altrettanti piani tritangenti della superficie fondamentale* ».

SUL PENTAEDRO COMPLETO.

[*Rendi. Acc: Lincei. Vol. VII. fasc. 5*]

« Il prof. Cremona, in una pregevole Memoria che s'intitola: *Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di Pascal* (1), studia un interessante aggruppamento di 15 rette dello spazio situate a tre, a tre, in quindici piani. Questo aggruppamento, che chiameremo *Cremoniano,* dà luogo a una figura, nello spazio, le cui parti sono fra di loro connesse per mezzo di un esaedro fondamentale che può riguardarsi come la base dell'intero sistema.

« La lettura della bella Memoria del Cremona mi ha condotto alle seguenti ricerche, le quali mirano a collegare fra di loro gli elementi della interessante figura che si ottiene combinando e aggruppando, in vario modo, le facce, gli spigoli e i vertici di un pentaedro completo. In questa figura è appunto contenuta quella di un aggruppamento Cremoniano dovuto all'insieme delle 15 diagonali di prima specie del pentaedro (N. 2).

« Tale aggruppamento vi si presenta in forma del tutto particolare e serve mirabilmente allo studio della nostra figura di cui il pentaedro dato è, per così dire, il nucleo. I risultati che se ne ottengono, in modo affatto elementare, non mi sembrano privi di un certo interesse per le applicazioni che se ne possono fare al pentaedro di Sylvester di una superficie cubica qualunque. E queste applicazioni saranno oggetto di una seconda Nota.

« 1. Indichiamo con i numeri 1, 2, 3, 4, 5 le facce di un pentaedro P fondamentale. Le combinazioni a due, a due e quelle a tre, a tre, di questi simboli, ci forniscono le notazioni che serviranno a rappresentare rispettivamente i dieci spigoli e i dieci vertici. In un vertice concorrono tre facce e tre spigoli; per ogni spigolo passano due facce e ogni spigolo contiene tre vertici. Ogni faccia contiene 4 spigoli e 6 vertici del pentaedro, lati e vertici di un quadrilatero completo. Chiameremo *corrispondenti*

(1) Accademia dei Lincei, 1877.

un vertice e una costola, quando quest'ultima è la intersezione delle due facce che non passano per il vertice: nella notazione adottata sono corrispondenti un vertice e una costola, quando non hanno alcun simbolo a comune; così 123 e 45. Analogamente, chiameremo *corrispondenti* due vertici, quando l'uno giace sulla costola che corrisponde all'altro; le notazioni di due vertici corrispondenti hanno un solo simbolo a comune; così 123 e 145.

« Un vertice 123, ne ha tre altri che gli corrispondono, e sei che non gli corrispondono. I primi giacciono sulla costola corrispondente a 123 che è la 45, e i secondi appartengono alle facce 4 e 5 (costituendo due triangoli prospettivi). Il vertice 123 e la sua costola 45 sono centro e asse di tale prospettiva.

« 2. Chiameremo *piano diagonale* del pentaedro quello che passa per un vertice e per la costola corrispondente; *retta diagonale di prima specie* quella che passa per due vertici corrispondenti.

« Il pentaedro possiede 10 piani diagonali e $\frac{10.3}{2} = 15$ rette diagonali di prima specie. Consideriamo, sulla faccia 5, il quadrilatero completo che risulta dalle intersezioni con le altre quattro. I vertici opposti di questo quadrilatero sono vertici corrispondenti del pentaedro. Infatti le loro notazioni sono: (125, 345); (245, 135); (235, 145) e quelle di ogni coppia hanno un sol indice a comune. Dunque, le tre diagonali del quadrilatero completo sono anche diagonali di prima specie del pentaedro.

« Inoltre, esse giacciono a tre, a tre, nei piani diagonali. Ecco quindi come le 15 diagonali di 1ª specie vengono a costituire un aggruppamento Cremoniano.

« Però, quì tale aggruppamento assume una forma molto particolare, perchè i 15 piani in cui le 15 rette si trovano a tre, a tre, sono costituiti dalle cinque facce del pentaedro e dai 10 piani diagonali. Ora le tre diagonali di 1ª specie, contenute in ciascuno di questi ultimi, concorrono in un medesimo punto (vertice del pentaedro); il che non avviene in alcuno dei 15 piani dell'aggruppamento Cremoniano generale.

« È quindi necessario di vedere come i risultati del prof. Cremona si modificano in questo caso particolare.

« 3. Per la costola 45 del pentaedro passa il piano diagonale di prima specie relativo al vertice 123 e le facce 4 e 5 del pentaedro. Costruiamo, in questo fascio di piani, il coniugato armonico π_{123} del piano diagonale rispetto alla coppia 4 e 5. L'omologia armonica, che rappresenteremo con Σ_{123}, di cui 123, π_{123} sono rispettivamente centro e piano fondamentale, trasforma il pentaedro in sè stesso portando in sè stesse le facce 1, 2, 3 e scambiando fra loro gli elementi delle facce 4 e 5. Evidentemente si

possono stabilire 10 di tali omologie. La Σ_{123} trasforma l'uno nell'altro i due quadrilateri, formati con spigoli pentaedrali, situati nei piani 4 e 5. Altrettanto, per conseguenza, accadrà dei loro trilateri diagonali. Cioè le 15 diagonali di 1ª specie si costituiscono in 10 coppie di triangoli prospettivi corrispondenti nelle 10 omologie armoniche Σ_{ikl}. Dunque:

« *Le diagonali di prima specie, oltre incontrarsi a tre, a tre, nei vertici; s'incontrano a due, a due, in altri 15 punti i quali giacciono a due, a due, sopra 30 altre rette passanti a tre, a tre, per i vertici del pentaedro.*

« Quindi ogni diagonale di prima specie, ne incontra altre 6: 4 nei due vertici del pentaedro che contiene, e le altre due, in due punti coniugati armonici rispetto ai vertici.

« I 15 punti del teorema precedente li chiameremo *punti diagonali di prima specie*; le 30 rette *rette diagonali di seconda specie.*

« 4. Consideriamo i piani diagonali dei vertici 145 e 345 i quali ultimi giacciono sulla medesima costola 45. « Questi piani si tagliano lungo una retta che passa per 123 vertice corrispondente a 45. Il 1° di essi contiene la costola 32 corrispondente a 145 e il 2° la costola 12 corrispondente a 345. Per conseguenza, il primo contiene le diagonali di prima specie: (145, 123); (145, 234); (145, 235) e il 2° contiene le: (345, 123); (345, 124); (345, 125). Ora le (145, 123); (345, 123) si tagliano in 123; le (145, 234), (345, 124) appartengono alla faccia 4; le (145, 235), (345, 125) appartengono alla faccia 5; dunque la retta intersezione dei piani in discorso passa per 123 e incontra le facce 4 e 5 in due punti diagonali di 1ª specie; cioè, per il teorema del N° precedente, tal retta è una diagonale di 2ª specie.

« Così queste 30 diagonali di seconda specie figurano come intersezioni di piani diagonali relativi a vertici non corrispondenti (come erano 145 e 345). Se i vertici si corrispondono, come per esempio 123 e 145, la intersezione dei loro piani diagonali è evidentemente la diagonale di prima specie (123, 145).

« Rilevando le analogie e le differenze che passano fra le diagonali di prima specie e quelle di seconda, si può osservare che tanto le prime, quanto le seconde, contengono due punti diagonali di 1ª specie e che per un vertice del pentaedro, ne passano ugualmente tre di prima e tre di seconda; però le tre di prima specie giacciono in un medesimo piano (diagonale) e ognuna contiene un altro vertice del pentaedro, il che non viene per quelle di seconda specie.

« L'insieme dei 10 piani diagonali dà luogo ad un decaedro che chiameremo *deacaedro diagonale.* Allora, dalle considerazioni precedenti, risulta che:

« *Le 45 costole del decaedro diagonale sono costituite dalle 15 diagonali di prima specie e dalle 30 diagonali di seconda.*

5. Riprendiamo la diagonale di seconda specie considerata al principio del N° precedente, quella cioè dovuta all'incontro dei piani diagonali di 145 e 345. Abbiamo visto che essa contiene i punti diagonali di prima specie: $\{(124, 345); (234, 145)\}$; $\{(125, 345); (235, 145)\}$. Risulta intanto che, per ogni punto diagonale di prima specie, passano quattro piani diagonali. Questi si taglieranno secondo 6 diagonali di cui due saranno di prima specie e 4 di seconda. Infatti, nel primo dei punti diagonali sopra indicati si tagliano i piani diagonali di 124, 345, 234, 145. Ora, nelle sei coppie a cui danno luogo questi vertici, ne abbiamo due formate con vertici corrispondenti e 4 con vertici non corrispondenti e quindi (N° 4) le prime daranno luogo a diagonali di 1ª specie; le seconde a diagonali di 2ª. Anche in un vertice del pentaedro concorrono 4 piani diagonali e cioè il piano diagonale del vertice stesso e quelli dei tre vertici che gli corrispondono. Allora, la solita diagonale di seconda specie intersezione dei piani diagonali di 145 e 345, incontra in 123 i piani diagonali di 123 e 245; nei due punti diagonali di 1ª specie che contiene incontra quelli di 124, 125, 234, 235: onde essa ulteriormente non incontra più che i piani diagonali di 134 e di 135. Per ciascuno di questi due punti passano dunque tre piani diagonali. Uno di tali punti è quello comune ai piani diagonali di 145, 345, 134. Per esso passano tre diagonali di seconda specie, perchè le tre coppie (145, 345); (145, 134); (134, 345) sono formate con vertici non corrispondenti. Dunque il numero di questi punti è $\frac{30.2}{3} = 20$. Li chiameremo *punti diagonali di 2ª specie.* I vertici 145, 345, 134 definiscono un triangolo i di cui lati e vertici sono spigoli e vertici del pentaedro. Lo chiameremo un *triangolo pentaedrale;* esso individua, per mezzo dei piani diagonali dei suoi vertici, un punto diagonale di seconda specie. Così ognuno di questi punti diagonali è coordinato a un triangolo pentaedrale in modo biunivoco. Abbiamo dunque trovato tutti i vertici del decaedro diagonale, giacchè ogni vertice del pentaedro e ogni punto diagonale di prima specie ne assorbono 4 e i 20 rimanenti sono dati dai 20 punti diagonali di seconda specie.

« Possiamo quindi dire che:

« *Le 30 diagonali di 2ª specie si tagliano a quattro, a quattro, nei 15 punti diagonali di 1ª specie; a tre, a tre, nei 10 vertici del pentaedro e nei 20 punti diagonali di 2ª specie.*

« *Il decaedro diagonale possiede due vertici tetraedri sopra ciascuna delle sue costole che è diagonale di prima specie, e tre vertici tetraedri e due triedri sopra ciascuna delle sue costole che è diagonale di 2ª specie. I vertici tetraedri coincidono con i 10 vertici del pentaedro fondamentale e con i 15 punti diagonali di 1ª specie; i vertici triedri con i 20 punti diagonali di 2ª specie.*

« 6. Abbiamo già notato al N° 3° l'esistenza delle omologie armoniche Σ che trasformano in sè stesso il pentaedro. I piani di omologia delle Σ li chiameremo per brevità i *piani armonici* del pentaedro, onde ogni vertice *ikl* individua il proprio piano armonico π_{ikl} che è piano fondamentale in Σ_{ikl}. Consideriamo in particolare π_{123}. Esso passa evidentemente per i tre punti diagonali di 1ª specie: {(124, 235); (125, 234)}; {(234, 135); (235, 134)}; {(124, 135); (125, 134)}. I lati del triangolo di questi tre punti sono diagonali di 2ª specie, perchè possono riguardarsi come intersezione dei piani diagonali di ciascuna delle 3 coppie di vertici non corrispondenti: (234, 235); (134, 135); (124, 125) e anche passano rispettivamente per 145, 245, 345. Dunque ogni piano armonico contiene tre diagonali di seconda specie. Inoltre, un vertice, come 123, ha 6 vertici che non gli corrispondono, onde il piano diagonale di 123 conterrà 6 diagonali di 2ª specie dovute all'incontro di tale piano con i 6 piani diagonali dei vertici che non gli corrispondono. Quindi:

« *Le 30 diagonali di seconda specie giacciono a sei, a sei, nei 10 piani diagonali; a tre, a tre, nei 10 piani armonici.*

« 7. Prendiamo la retta comune ai piani armonici di due vertici appartenenti a un medesimo spigolo e quindi non corrispondenti come 145 e 345. Essa passa per 123 e segna sulle facce 4 e 5 due punti A e B tali che proiettati rispettivamente da 134 e 135 sulle costole 24 e 25, dànno i coniugati armonici di 245 rispetto alle coppie 124, 234 e 125, 235. Per conseguenza A e B appartengono anche al piano armonico di 245. Cioè:

« *I 10 piani armonici passano a tre, a tre, per 10 rette ognuna delle quali contiene un vertice del pentaedro.*

« Ognuna di queste rette, che chiameremo *assi triarmonici*, è luogo di punti uniti contemporaneamente per le tre omologie Σ di cui i centri appartengono allo spigolo 45 del pentaedro. I piani armonici si tagliano evidentemente anche secondo altre 15 rette, passanti, ognuna, per un punto diagonale di prima specie. Così i piani armonici di 123 e 245 si tagliano secondo una di queste rette (che chiameremo *assi biarmonici)*, passante per il punto diagonale di 1ª specie {(124, 235); (125, 234)}. Ogni asse biarmonico è luogo di punti uniti per due omologie Σ di cui i centri appartengono a una medesima diagonale del pentaedro.

« 8. Sia r l'asse triarmonico che passa per 123, cioè la retta comune ai piani armonici di 145, 245, 345. Io dico che i due punti diagonali di 2ª specie coordinati ai triangoli pentaedrali 124, 234, 134 e 125, 235, 135, appartengono a r. Infatti, nel punto diagonale di 2ª specie che è coordinato al primo dei soprascritti triangoli pentaedrali, concorrono le tre diagonali

di 2ª specie intersezione dei piani diagonali di (124, 234); (124, 134); (234, 134). Quando si effettua una qualunque delle trasformazioni dovute a Σ_{145}, Σ_{345}, Σ_{245} si vede facilmente che una di queste tre diagonali rimane fissa e che le altre due si scambiano: dunque il punto comune a tutt'e tre è unito nelle tre omologie suddette e per conseguenza appartiene ad r.

Quindi: « *I 20 punti diagonali di seconda specie oltre trovarsi a due, a due sulle 30 diagonali di seconda specie e sulle 15 di prima, giacciono anche a due, a due, sui 10 assi triarmonici.*

« 9. Sulla faccia 4 del pentaedro abbiamo i suoi 4 spigoli:

(124, 234, 245); (234, 134, 345); (124, 134, 145); (345, 245, 145).

Evidentemente, gli assi triarmonici individuati dai primi tre passano per un medesimo punto; quello comune a: π_{124}, π_{234}, π_{134}. Ciò porta che un tal punto sia anche comune a π_{145}, π_{245}, π_{345}, cioè che esso appartenga pure all'asse triarmonico individuato dal 4° spigolo. Dunque:

« *Gli assi triarmonici s'incontrano a quattro, a quattro, in cinque punti e giacciono a tre, a tre, nei 10 piani armonici.*

« Per ciascuno di questi punti passano i 6 piani armonici di vertici che appartengono a una medesima faccia. Chiameremo questi punti: *centri esarmonici.* L'asse triarmonico che passa per 123 taglia π_{123} in un punto che non può essere centro esarmonico, giacchè ne verrebbe che gli assi triarmonici contenuti in π_{123} passerebbero per questo medesimo punto, il che non è (N° 12). Esistono dunque 10 punti per ognuno dei quali passano 4 piani armonici e cioè i 4 che sono individuati dai piani armonici dei 4 vertici che si trovano sopra un medesimo piano diagonale. Chiameremo questi punti *centri tetrarmonici.* Allora, riassumendo si ha:

« *I piani armonici passano a uno, a uno, per i 10 spigoli del pentaedro; a due, a due, per i 15 assi biarmonici; a tre, a tre, per i 10 assi triarmonici; a quattro, a quattro, per i 10 centri tetrarmonici; a sei, a sei, per i 5 centri esarmonici.*

« Ogni centro tetrarmonico è punto unito per 4 omologie Σ: ogni centro esarmonico lo è per 6.

« 10. Il teorema precedente si può anche esprimere dicendo che i 10 piani armonici sono le facce di un pentagono di cui i vertici sono i 5 centri esarmonici; gli spigoli, i 10 assi triarmonici; i punti diagonali, i 10 centri tetrarmonici; le diagonali di prima specie, i 15 assi biarmonici; ecc. (1). E relativamente a questi ultimi si ha quindi il teorema:

(1) Un pentaedro P individua un certo sistema ∞^4 di pentagoni contravarianti, relativi alle ∞^4 superficie cubiche delle quali P può riguardarsi come pentaedro di Sylvester (cf. De Paolis, *Ricerche sulla superficie di 3° ordine.* Accademia dei Lincei 1880-81). Così ogni superficie cubica ha il suo pentaedro covariente e un pentagono contravariante.

« *I 15 assi biarmonici passano a tre, a tre, per 15 punti (cioè per i 10 centri tetrarmonici e per i 5 esarmonici) e giacciono a tre, a tre, nei 10 piani armonici.*

« Od altrimenti:

« *L'insieme dei 15 assi biarmonici costituisce un aggruppamento duale dell'aggruppamento Cremoniano formato con le 15 diagonali di 1ª specie.*

« 11. In un piano diagonale abbiamo 4 vertici del pentaedro di cui 3 giacenti in un medesimo spigolo; 6 punti diagonali di 1ª specie e 6 di 2ª;3 diagonali di 1ª specie e 6 di 2ª. Quest'ultime a due, a due, concorrono nei vertici che appartengono allo stesso spigolo del pentaedro. Allora dalla disposizione di questa figura, si riconosce facilmente che:

« *I 6 punti diagonali di 1ª specie e le sei diagonali di 2ª, appartenenti a un medesimo piano diagonale, compongono una figura che è contemporaneamente un esagono di Pascal e di Brianchon.*

« Cioè:

« *Le 30 diagonali di 2ª specie sono a sei, a sei, tangenti a dieci coniche.*

« *I 15 punti diagonali di 1ª specie appartengono a sei, a sei, a dieci coniche.*

« 12 Nello stesso modo si vede che i 6 punti diagonali di 2ª specie, giacenti in un medesimo piano diagonale, stanno sopra una stessa conica.

« In un piano armonico abbiamo: 3 vertici appartenenti a un medesimo spigolo del pentaedro; 3 punti diagonali di 1ª specie e tre diagonali di 2ª vertici e lati di un medesimo triangolo; 3 assi triarmonici componenti un triangolo prospettivo del precedente; i vertici di quest'ultimo sono centri esarmonici; il centro di prospettiva e l'asse sono dati rispettivamente da un centro tetrarmonico e dallo spigolo del pentaedro. Questo piano armonico contiene anche 6 punti diagonali di 2ª specie, componenti un esagono di Pascal e situati a due, a due, sulle 3 diagonali di 2ª specie.

« Possiamo dunque concludere che:

« *I 20 punti diagonali di 2ª specie giacciono a sei, a sei, sopra 20 coniche.*

« 13 Le omologie armoniche Σ trasformano in sè stesse, o permutano fra di loro le coniche dei N precedenti. Dunque:

« *Le coniche che contengono i punti diagonali giacciono a due, a due, sopra coni quadrici aventi i vertici nei vertici del pentaedro.*

Al suddetto sistema ∞^4 di pentagoni appartiene quello dei cinque centri esarmonici. Nella sopra citata Memoria, l'autore caratterizza questo pentagono col nome di *pentagono polare* del pentaedro, perchè ogni vertice del primo è polo di una faccia del secondo rispetto al tetraedro formato dalle rimanenti.

« Le stesse omologie trasformano in sè stessa la quadrica che contiene i punti diagonali di 1ª specie. Quindi, rispetto a tale quadrica, i vertici del pentaedro hanno per piani polari i piani armonici; i 5 centri esarmonici sono poli delle facce; i 10 centri tetrarmonici sono poli dei piani diagonali; sono rette reciproche le 15 diagonali di 1ª specie e i 15 assi biarmonici; i 10 spigoli e i 10 assi triarmonici ecc. ».

SULLA SUPERFICIE DIAGONALE DI CLEBSCH.

[*Rendi. Acc: Lincei Vol VII fasc. 6*]

« 1. Eckardt, in un suo lavoro pubblicato nei Math. Annal. (1), prende a studiare quelle superficie cubiche che godono la proprietà singolare di possedere alcuni dei vertici del loro pentaedro di Sylvester. Tali superficie che io ho chiamato *di Eckardt,* in una Nota presentata a questa illustre Accademia (2), sono trasformabili proiettivamente in superficie simmetriche. Fra di esse, la più notevole è quella che contiene tutti i vertici del suo pentaedro e di cui Clebsch parla appena incidentalmente in un suo lavoro assegnandole il nome *diagonal-flache* (3). Mi propongo ora la ricerca di alcune proprietà di questa superficie, applicando al suo pentaedro i risultati già ottenuti nella Nota precedente (4); e ad essa, direttamente, altri teoremi che ho già esposte nella Nota citata in principio. Comincio dal rammentare questi ultimi.

« Seguiterò a chiamare *Punto di Eckardt* ogni vertice del pentaedro che appartiene alla superficie fondamentale. Allora, un punto P di Eckardt è doppio per l'Hessiana e semplice per la superficie fondamentale. Nel piano diagonale di P giacciono tre rette della superficie fondamentale e due *sopranumerarie coniugate* dell'Hessiana. Queste cinque rette passano tutte per P: ivi si tagliano anche altre tre rette dell'Hessiana e cioè i tre spigoli del pentaedro che concorrono in P. La quadrica polare di P

(1) *Ueber diejenigen Flächen dritten Grades, auf denen sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden.* Vol. X.

(2) Vol. VII fasc. 5.

(3) *Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen fünften Grades.* Math. Ann. Bd 4.

(4) Per i teoremi relativi al pentaedro, nonchè per la nomenclatura degli elementi che lo compongono, mi riferisco alla mia Nota « *Sul pentaedro completo* » pubblicata nel fascicolo precedente a questo (pag. 209).

è costituita dal suo piano diagonale e dal suo piano armonico. Onde si ha intanto un primo teorema:

« *I 10 vertici del pentaedro (ossia i punti di Eckardt) e i 10 piani armonici stabiliscono nello spazio 10 omologie armoniche, ciascuna delle quali trasforma in sè stesse la superficie diagonale e le sue covarianti.*

« 2. Una retta che contenga due punti di Eckardt, o è uno spigolo del pentaedro (e allora contiene un terzo vertice) oppure è una diagonale di 1. specie. Se è uno spigolo del pentaedro, è noto che allora essa appartiene completamente all'Hessiana; se invece è una diagonale di 1ª specie, essa giace, per intero, sulla superficie fondamentale. Infatti siano 123 e 145 i due punti di Eckardt: la retta che li unisce è una diagonale di 1ª specie perchè i due punti si corrispondono. Ma le quadriche polari di 123 e 145 hanno evidentemente a comune la retta che li unisce, dunque essa appartiene alle quadriche polari di tutti i suoi punti e per conseguenza giace sulla superficie fondamentale. Dunque la superficie diagonale contiene le 15 diagonali di prima specie del suo pentaedro. Così le sue 27 rette si distinguono in due specie; quelle che passano per due punti di Eckardt e che chiameremo *rette singolari* della superficie e le rimanenti 12 che non contengono nessun punto di Eckardt e che chiameremo *rette non singolari.* Il pentaedro di Sylvester è costruito in modo che i suoi spigoli appartengono all'Hessiana e le sue diagonali di 1ª specie alla superficie fondamentale.

« 3. Allora, per le esposte proprietà del pentaedro e per noti teoremi del prof. Cremona (1), resultano immediatamente anche i seguenti.

« *Le 12 rette non singolari formano una bissestupla.*

« *L'aggruppamento Cremoniano che si ottiene togliendo dalle 27 rette di una superficie diagonale la bissestupla delle rette non singolari, è costituito dalle diagonali di 1. specie del pentaedro di Sylvester.*

« *Le 15 rette singolari si possono aggruppare in 10 coppie di trilateri prospettivi; in ogni coppia essendo centro e asse di prospettiva un vertice e lo spigolo corrispondente del pentaedro. Ciascuna faccia di esso taglia l'hessiana nei lati di un quadrilatero completo il cui trilatero diagonale appartiene alla superficie fondamentale.*

« *Ciascuno dei 10 iperboloidi a una falda sui quali giacciono a sei, a sei, le 15 rette singolari, tocca la superficie diagonale in sei punti di Eckardt e in tre punti diagonali di 1. specie.*

« *Ogni retta singolare incontra sei singolari e quattro non singolari. Delle sei singolari, due coppie vanno ai punti di Eckardt che la retta con-*

(1) *Teoremi stereometrici, dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di Pascal.* Acc. de' Lincei 1877.

tiene e le altre due segnano su di essa due punti diagonali di 1ª specie coniugati armonici rispetto a quelli di Eckardt.

« *Ogni retta non singolare si appoggia a cinque singolari le quali fra di loro non s'incontrano.*

« 4. L'Hessiana della superficie diagonale, oltre i 10 spigoli del pentaedro, possiede altre 20 rette a due, a due, sopranumerarie coniugate, essendo coniugate quelle che passano per un medesimo vertice del pentaedro e giacciono nel piano diagonale di tal vertice. Relativamente a qaeste sopranumerarie dobbiamo premettere il seguente teorema:

« *Le rette sopranumerarie di due punti di Eckardt s'incontrano, o no, a seconda che i due punti appartengono a un medesimo spigolo, o a una medesima diagonale di 1ª specie del pentaedro.*

« Infatti, siano i punti di Eckardt 123 e 134 situati sullo spigolo 13. Le rette sopranumerarie, passanti per ognuno di essi, giacciono nei loro piani diagonali i quali si tagliano lungo una diagonale di seconda specie passante per il vertice 245 corrispondente di 13. Ora questa diagonale taglia in altri due punti l'Hessiana ed evidentemente, in ciascuno, di questi punti s'incontreranno una sopranumeraria di 123 e una di 134.

« Sieno invece i punti 123 e 145 i quali appartengono a una medesima diagonale di prima specie. Essa è l'intersezione dei piani diagonali di 123 e 145: le sopranumerarie di ognuno di questi vertici giacciono nei loro piani diagonali e passano per 123 e 145 rispettivamente: dunque nessuna delle sopranumerarie di 123 incontra quelle di 145.

« Possiamo anche dire che:

« *Ogni diagonale di seconda specie del pentaedro incontra l'Hessiana in un punto doppio e la taglia in altri due punti in ciascuno dei quali concorrono due rette sopranumerarie non coniugate.*

« *Una sopranumeraria incontra altre sei sopranumerarie (oltre la propria coniugata).*

« *I 12 punti, ove le sei diagonali di seconda specie, che appartengono a uno stesso piano diagonale, incontrano l'Hessiana fuori dei punti doppi, giacciono a 6, a 6, sopra due sopranumerarie coniugate.*

« 5. I piani polari, rispetto alla superficie fondamentale, dei punti di una sopranumeraria fanno fascio attorno alla sopranumeraria non coniugata (1). Sieno A, B i punti in cui una diagonale di seconda specie incontra l'Hessiana all'infuori del punto doppio e (a_1, a_2); (b_1, b_2) le sopranumerarie concorrenti in A e B rispettivamente e siano coniugate a_1 con b_1; a_2 con b_2. Allora, per il teorema citato sopra, il punto A ha per piano polare quello di b_1 e b_2; il punto B quello di a_1, a_2. Ossia:

(1) CIANI, *Sulle superficie algebriche simmetriche.* Rend. Acc. dei Lincei, 1890.

« I *punti ove una diagonale di seconda specie incontra l'Hessiana, fuori del punto doppio, sono tali che l'uno è il vertice del cono polare dell'altro.*

« 6. Prendiamo lo spigolo 45 del pentaedro e consideriamo i piani diagonali dei vertici che contiene. Essi si tagliano nelle tre diagonali di 2ª specie che passano per 123 vertice corrispondente a 45. Sieno a, b, c queste tre rette; ab, bc, ca i piani diagonali di 145, 245, 345 e siano inoltre (r_2', r_3'); (r_3'', r_1''); (r_1''', r_2''') le tre coppie di rette sopranumerarie degli stessi punti. Abbiamo già veduto che le sopranumerarie di vertici non corrispondenti s'incontrano, o meglio: nel caso, per esempio, di 145 e 245 si è dimostrato che ciascuna delle r_2', r_3' incontra una e una sola e determinata delle r_3'', r_1''. Per fissare le idee, supponiamo che s'incontrino le sopranumerarie che hanno l'indice basso diverso. Allora la a che è la diagonale di 2ª specie comune ai piani diagonali di 145 e 345 contiene i punti $(r_2' \; r_1''')$; $(r_3' \; r_2''')$ e per la stessa ragione le b e c contengono rispettivamente le due coppie di punti: $\{(r_2' \; r_3''), (r_3' \; r_1'')\}$; $\{(r_3'' \; r_1'''), (r_1'' \; r_2''')\}$.

« Abbiamo così i due triangoli $(r_2' \; r_3'' \; r_1''')$; $(r_1'' \; r_3' \; r_2''')$ che hanno per lati le sei sopranumerarie in discorso e i di cui vertici stanno a due, a due, sulle tre rette a, b, c. Dunque:

« *Le 20 rette sopranumerarie dell'Hessiana si aggruppano in 10 coppie di trilateri prospettivi in ogni coppia essendo centro e asse di prospettiva un punto di Eckardt e lo spigolo corrispondente del pentaedro ed essendo coniugate quelle che costituiscono lati corrispondenti di tali trilateri.*

« 7. Il piano di ognuno dei precedenti triangoli taglia l'Hessiana secondo 4 rette di cui tre sono sopranumerarie e una è spigolo del pentaedro. Evidentemente non esistono piani che contengano due spigoli del pentaedro e due sopranumerarie; o tre spigoli e una sopranumeraria perchè il piano di due spigoli (o di tre) è sempre una faccia del pentaedro e quindi le altre rette che contiene sono ancora spigoli del pentaedro medesimo. Neppure possono stare in un medesimo piano quattro sopranumerarie. Infatti, ogni sopranumeraria contiene un punto di Eckardt. Ora, non può essere che un tal punto sia quello comune a due delle quattro rette in discorso, altrimenti quelle due sarebbero coniugate e il piano di due coniugate non contiene altre sopranumerarie, ma tocca l'Hessiana lungo uno spigolo del pentaedro. Avremmo dunque in un piano quattro sopranumerarie e almeno quattro punti di Eckardt; mentre ogni piano che contenga almeno 4 punti di Eckardt o è un piano diagonale, o una faccia del pentaedro.

« Abbiamo quindi il teorema:

« *Le 20 rette sopranumerarie giacciono a tre, a tre, in 20 piani ognuno passante per uno spigolo del pentaedro. Questi e le facce del pentaedro costituiscono i soli 25 piani capaci di tagliare l'Hessiana secondo 4 rette.*

8. Per un punto diagonale di 2ª specie passano i piani diagonali dei vertici di un triangolo pentaedrale; e anche i tre piani armonici dei tre vertici che, insieme al triangolo suddetto, appartengono a una medesima faccia del pentaedro. Per un centro esarmonico passano i 6 piani armonici dei 6 vertici giacenti in una medesima faccia.

« Dunque:

« *I 15 punti diagonali di 1ª specie, i 20 di seconda e i 5 centri esarmonici costituiscono i 40 poli delle facce del pentaedro di Sylvester.*

« 9. La sezione di un piano armonico sull'Hessiana è costituita da uno spigolo del pentaedro e da una cubica C; sia C_0 la curva luogo dei vertici dei coni polari dei punti di C. Nell'omologia armonica Σ, in cui il piano armonico che si considera è piano unito, l'Hessiana possiede come curva unita la C; dunque anche la C_0 deve essere curva unita, cioè C_0 coincide con C.

« *Ciascuna delle 10 cubiche dell'hessiana contenute nei piani armonici del pentaedro, gode la proprietà di essere il luogo dei vertici dei coni polari dei suoi punti, cioè di essere Hessiana della cubica secondo la quale il medesimo piano taglia la superficie fondamentale e di avere tre flessi a comune con quest'ultima curva nei tre vertici del pentaedro che il suddetto piano contiene.*

« *Nel sistema di rette dello spazio che uniscono punti corrispondenti della hessiana (secondo la corrispondenza stabilita dai coni polari) sono contenute 10 curve piane di 3ª classe e 10 di 2ª; cioè: le 10 Cayleyane delle sezioni dei piani armonici con la superficie fondamentale e le 10 coniche situate nei 10 piani diagonali alle quali sono tangenti a sei, a sei, le 30 diagonali di 2 specie* (N° 5).

« 10. Un asse triarmonico è unito per tre omologie Σ. Esso passa per un punto doppio dell'Hessiana e l'incontra in altri due punti A, B: il vertice del cono polare di A deve essere evidentemente punto unito per le tre stesse omologie Σ per le quali è unito A, dunque questo vertice è B. Cioè:

« *Ogni asse triarmonico del pentaedro passa per un punto doppio dell'Hessiana e la taglia in due punti tali che l'uno è vertice del cono polare dell'altro.*

« Analogamente si vede che:

« *Ogni asse biarmonico si appoggia a due spigoli del pentaedro e taglia l'Hessiana in altri due punti fra di loro corrispondenti (nella corrispondenza dei coni polari).*

« 11. Questi teoremi che collegano gli elementi del pentaedro di Sylvester con l'Hessiana, nel caso della superficie diagonale, sono facilmente estendibili a una qualunque superficie del terz'ordine. Ne daremo ora un cenno.

« Rammentiamo perciò che, in generale, il piano polare di un vertice del pentaedro, tocca l'Hessiana lungo lo spigolo corrispondente e la incontra secondo una conica la quale appartiene anche al cono osculatore dell'hessiana nel suddetto vertice (1).

« Così ogni punto doppio di questa superficie, individua una conica situata sulla superficie medesima e che per brevità chiameremo *la conica opposta a tale punto doppio.* Esistono quindi 10 coniche opposte (nel caso della superficie diagonale ciascuna di esse si spezza, in una coppia di rette sopranumerarie coniugate).

« Consideriamo allora le coniche C_{123} e C_{145} opposte a due vertici corrispondenti 123 e 145. Il piano polare di 123 contiene C_{123} e tocca l'hessiana lungo lo spigolo 45 e siccome 45 appartiene al cono che da 145 proietta C_{145}, così questo piano polare tocca C_{145}. Analogamente si vede che il piano polare di 145 tocca C_{123}. Dunque:

« *Le coniche opposte a vertici corrispondenti hanno una tangente comune.*

« Od altrimenti:

« *Le 10 coniche opposte ai vertici si appoggiano a due, a due, a 15 bitangenti dell'Hessiana.*

« 12. La retta che unisce due vertici corrispondenti 123 e 145 è una diagonale di prima specie: ad essa è collegata biunivocamente la bitangente dell'Hessiana che tocca le coniche opposte a 123 e 145. Chiameremo questa bitangente la *bitangente opposta* della diagonale considerata. Se A e B sono rispettivamente i punti di contatto, si vede facilmente che il cono polare di A ha il vertice in 145 e passa per 123 e viceversa il cono polare di B ha il vertice in 123 e passa per 145; dunque la diagonale (123, 145) appartiene a tutte le quadriche polari dei punti della retta AB cioè il piano polare di un qualunque punto di (123, 145) passa per AB; onde:

« *Il cono polare di una diagonale di prima specie si riduce alla bitangente opposta.*

« 13. Un vertice ne ha tre che gli corrispondono: dunque nel suo piano polare avremo tre bitangenti opposte: un punto diagonale di 1ª specie appartiene a due diagonali di 1ª specie, dunque il suo piano polare conterrà le due bitangenti opposte a tali diagonali. Cioè:

« *Le 15 bitangenti dell'hessiana, opposte alle 15 diagonali di prima specie del pentaedro, giacciono a due, a due, nei 15 piani polari dei punti diagoli di prima specie e a tre, a tre, nei 10 piani polari dei vertici.*

« 14. Se i vertici non si corrispondono, come, per esempio: 123 e 124 i loro piani polari si tagliano in una retta che passa per 345. Gli altri

(1) CREMONA, *Sulle superficie di 3º ordine.* Crelle (Bd. 68).

due punti in cui questa retta incontra l'Hessiana, sono evidentemente comuni alle coniche opposte a 123 e 124.

Quindi: « *Le coniche opposte a vertici non corrispondenti hanno due punti comuni.*

« 15. È noto che i piani polari dei punti del piano diagonale di 123 toccano la conica opposta a 123 (1).

« Così abbiamo trovato che i piani polari dei punti della retta (123, 145) comune ai piani diagonali di 123 e 145 toccano entrambe le coniche opposte di 123 e 145 perchè passano sempre per la loro tangente comune. Però i piani diagonali oltre incontrarsi nelle 15 diagonali di 1ª specie, si tagliano anche nelle 30 di 2ª specie (N° 4, Mem. *Sul pentaedro*); dunque:

« *Le coniche opposte ai vertici giacciono a due, a due, sui coni polari delle 30 diagonali di seconda specie.*

« *I vertici di questi coni giacciono a 4, a 4, sui piani polari dei punti diagonali di prima specie.* Perchè per un punto diagonale di prima specie passano 4 diagonali di 2ª.

« 16. Se con C_{123}, C_{124} si rappresentano le coniche opposte di 123 e 124, abbiamo che sul cono polare della diagonale di 2ª specie, dovuta all'incontro dei piani diagonali di 123 e 124, giacciono le C_{123} e C_{124} e s'incontrano in due punti (N° 14). Questi due punti appartengono all'hessiana; i piani tangenti al cono suddetto, in ciascuno di essi, è anche piano tangente dell'hessiana in quei medesimi punti, perchè ivi tangente a C_{123} e J_{124} curve dell'hessiana. Ed evidentemente questi piani tangenti sono piani polari dei due punti in cui la diagonale di 2ª specie sopra rammentata taglia l'Hessiana fuori del punto doppio. Se ne conclude che:

« *I 60 punti ove le 30 diagonali di seconda specie incontrano l'Hessiana (all'infuori dei punti doppi) corrispondono ai 60 punti nei quali la stessa superficie è incontrata (non nei punti doppi) dalle 30 rette intersezioni dei piani polari di vertici non corrispondenti del pentaedro.*

« Tutto questo s'intende nella solita corrispondenza stabilita dai coni polari.

« Del teorema precedente è evidentemente caso particolare quello del (N° 5) ».

---

(1) CREMONA, *Superficie di 3. ord.* Crelle Bd. 68.

SOPRA DUE CURVE INVARIANTIVE DI UNA QUARTICA PIANA.

[*Annali di Mat.ca 1892*]

Mi propongo in questa Nota la ricerca delle caratteristiche plückeriane di due importanti curve invariantive di una quartica piana, cioè di quelle che sono oggetto principale di una Memoria di Clebsch (1) e che ivi sono contrassegnate col nome di covariante S e di contravariante ψ. Questa ricerca dà luogo a rilevare un errore che si trova in quella Memoria e precisamente al N° 5 alla fine del quale l'Autore conclude che il contravariante ψ (inviluppo dei triangoli polohessiani) non è altro che l'inviluppo delle rette che segano armonicamente la curva.

In un caso particolarissimo il Caporali (2) enuncia, senz'altro, che i due inviluppi suddetti sono distinti. L'impossibilità della loro coincidenza in generale, non è mai stata invertita, per quanto io sappia, anzi qualche autore (3) parlando dei risultati di Clebsch riporta, fra gli altri, anche la coincidenza sopra ricordata.

1. Sia:

$$\begin{gathered} f_4 = a_x^4 = b_x^4 = c_x^4 = \ldots = a_{1111}\, x_1^4 + a_{2222}\, x_2^4 + a_{3333}\, x_3^4 + \\ + 4\, a_{1112}\, x_1^3\, x_2 + 4\, a_{1222}\, x_1\, x_2^3 + 4\, a_{1113}\, x_1^3\, x_3 + a_{1333}\, x_1\, x_3^3 + \\ + 4\, a_{2223}\, x_2^3\, x_3 + 4\, a_{2333}\, x_2\, x_3^3 + 6\, a_{1122}\, x_1^2\, x_2^2 + \\ + 6\, a_{1133}\, x_1^2\, x_3^2 + 6\, a_{2233}\, x_2^2\, x_3^2 + 12\, a_{1123}\, x_1^2\, x_2\, x_3 + \\ + 12\, a_{1223}\, x_1\, x_2^2\, x_3 + 6\, a_{1233}\, x_1\, x_2\, x_3^2 = 0\,, \end{gathered}$$

l'equazione della curva fondamentale. Un punto y individua le 3 curve polari:

(1) CLEBSCH, *Ueber Curven vierer Ordnung.* (Crelle, Bd. 59).

(2) CAPORALI, *Volume delle memorie,* pag. 348, n° 39.

(3) MAISANO, *Sistemi completi dei primi cinque gradi della forma ternaria biquadratica.* (Giornale di Battaglini, vol. 19).

$$a_y\, a_x^3 = 0\,, \qquad a_y^2\, a_x^2 = 0\,, \qquad a_y^3\, a_x = 0.$$

L'Hessiana e la Cayleyana della cubica polare si chiamano la polohessiana e la polocayleyana del punto. Onde le loro equazioni saranno rispettivamente:

$$(a\,b\,c)^2\, a_x\, b_x\, c_x\, a_y\, b_y\, c_y = 0\,, \tag{1}$$

$$(a\,b\,c)\;(a\,b\,u)\;(a\,c\,u)\;(b\,c\,u)\, a_y\, b_y\, c_y = 0\;. \tag{2}$$

La (1) è simmetrica in x e y quindi:

(a) « Se la polohessiana di P passa per Q, viceversa la polohessiana di Q passa per P (2) ».

Per $x = y$ la (1) diviene l'equazione dell'hessiana della curva fondamentale ossia:

(b) « L'hessiana della curva fondamentale può riguardarsi come il luogo di un punto per cui passa la propria polohessiana (2) ».

Esiste un luogo ∞^1 di punti le cui polohessiane sono triangoli. Questo covariante, contrassegnato con S da Clebsch, appunto perchè può ottenersi annullando l'invariante S di una cubica polare, è il seguente:

$$S = (a\,b\,c)\;(a\,b\,d)\;(a\,c\,d)\;(b\,c\,d)\, a_x\, b_x\, c_x\, d_x = 0.$$

Se P è un punto di S e ABC il triangolo polohessiano di P, la conica polare di A, rispetto alla cubica polare di P, è costituita dal lato BC contato due volte cioè:

(c) « S è anche il luogo dei punti la cui conica polare mista si riduce a una retta contata due volte (3) ».

(d) « S è pure il luogo dei vertici dei triangoli polohessiani (3) ».

(e) « Se P è un vertice del triangolo polohessiano di Q, viceversa Q è un vertice del triangolo polohessiano di P (3) ».

L'applicazione dei teoremi a, b, c, d, e ricorre nel seguito così di sosovente, che ho creduto necessario citarli esplicitamente una volta per sempre.

2. Mentre i vertici di un triangolo polohessiano variabile descrivono il covariante S i lati inviluppano un'altra curva contravariante di f_4 che è appunto la ψ di Clebsch. Per convincersi ch'essa non può coincidere

(1) Questa forma mista per $y =$ cost. e u variabile rappresenta la G_r di Caporali. (*Volume delle sue memorie*, pag. 344, n^i 11, 12).

(2) Caporali, loc. cit., pag. 345, 346, n^i 17, 26. — Clebsch, loc. cit. N° 3.

(3) Clebsch, loc. cit. N° 4.

con l'inviluppo armonico di f_4 seguiamo passo, passo, la dimostrazione che ne dà l'Autore ai N^i 4 e 5 della sua Memoria.

Consideriamo la conica polare mista di due punti y e z ed esprimiamo le condizioni che debbono essere soddisfatte affinchè questa si riduca a una retta $u_x = 0$ contata due volte.

Queste condizioni sono evidentemente le sei seguenti:

$$\sum_{m,n} a_{ikmn}(y_m z_n + y_n z_m) = u_m u_n; \quad \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} 1, 2, \ldots 6.$$

I punti y e z apparterranno a S costituendone una coppia di punti corrispondenti, cioè tali che l'uno è situato in un vertice del triangolo polohessiano dell'altro. La retta u descriverà l'inviluppo ψ. Risolvendo le 6 equazioni precedenti rispetto alle sei quantità $y_m z_n + y_n z_m$ che vi compariscono linearmente avremo:

$$D(y_m z_n + y_n z_m) = \sum_{ik} A_{mnik} u_i u_k,$$

dove D è il determinante dei coefficienti cioè:

$$\begin{vmatrix} a_{1111} & a_{1122} & a_{1133} & a_{1112} & a_{1113} & a_{1123} \\ a_{2211} & a_{2222} & a_{2233} & a_{2212} & a_{2213} & a_{2223} \\ a_{3311} & a_{3322} & a_{3333} & a_{3312} & a_{3313} & a_{3323} \\ a_{1211} & a_{1222} & a_{1233} & a_{1212} & a_{1213} & a_{1223} \\ a_{1311} & a_{1322} & a_{1333} & a_{1312} & a_{1313} & a_{1323} \\ a_{2311} & a_{2322} & a_{2333} & a_{2312} & a_{2313} & a_{2323} \end{vmatrix} = D,$$

e A_{mnik} è l'elemento reciproco di a_{mnik}.

Ora, fra le sei quantità $y_m z_n + y_n z_m$ passa sempre la relazione identica:

$$\begin{vmatrix} y_1 z_1 + y_1 z_1 & y_1 z_2 + y_2 z_1 & y_1 z_3 + y_3 z_1 \\ y_1 z_2 + y_2 z_1 & y_2 z_1 + y_2 z_2 & y_2 z_3 + y_2 z_2 \\ y_1 z_3 + y_3 z_1 & y_2 z_3 + y_3 z_2 & y_3 z_3 + y_3 z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

Sostituendo dunque, in questa, i valori trovati otterremo:

$$\psi = \begin{vmatrix} \sum_{i,k} A_{11ik} u_i u_k & \sum_{i,k} A_{12ik} u_i u_k & \sum_{i,k} A_{13ik} u_i u_k \\ \sum_{i,k} A_{12ik} u_i u_k & \sum_{i,k} A_{22ik} u_i u_k & \sum_{i,k} A_{23ik} u_i u_k \\ \sum_{i,k} A_{13ik} u_i u_k & \sum_{i,k} A_{23ik} u_i u_k & \sum_{i,k} A_{33ik} u_i u_k \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i\,k\,i'\,k'\,i''\,k''} \begin{vmatrix} A_{11ik} & A_{12ik} & A_{13ik} \\ A_{21ik} & A_{22ik} & A_{23ik} \\ A_{31ik} & A_{32ik} & A_{33ik} \end{vmatrix} u_i\, u_k\, u_{i'}\, u_{k'}\, u_{i''}\, u_{k''} = 0.$$

A questo punto il Clebsch applica il seguente teorema sui determinanti: « Un minore A d'ordine p del determinante reciproco Δ è uguale al prodotto del complementare di A (nel determinante primitivo D) per la $(p-1)^{\text{esima}}$ potenza di D », onde ne conclude che da tutto il primo membro dell'equazione di ψ si stacca un fattore D^2. Questa conclusione non è esatta, giacchè non è vero che il determinante

$$\delta = \begin{vmatrix} A_{ik11} & A_{i'k'12} & A_{i''k''13} \\ A_{ik21} & A_{i'k'22} & A_{i'h''23} \\ A_{ik31} & A_{i'k'33} & A_{i''k''23} \end{vmatrix},$$

sia sempre un minore di Δ per qualunque combinazione degli indici i, k, i, k', i', k''. Perchè questo accada, non basta che gli elementi di una stessa colonna di δ appartengano alla medesima colonna di Δ, ma bisogna che altrettanto accada per le linee e ciò avviene solamente quando le tre coppie ik, $i'k'$, $i''k''$ hanno almeno un indice comune. In caso contrario δ, quantunque composto con elementi di Δ, non è un minore di Δ. (Così per es. per $i = k = 1$, $i' = k' = 2$, $i'' = k'' = 3$). Dunque il fattore D^2 non è comune a tutti i determinanti δ e *non si stacca dal primo membro dell'equazione di* ψ. Cadono quindi le considerazioni ulteriori che si fondavano sopra questo distacco.

3. Anche col seguente calcolo semplicissimo si può direttamente dimostrare che l'inviluppo ψ non è quello armonico. Infatti, costruiamo la conica polare mista dei due vertici $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ del triangolo fondamentale. Essa è

$$f_{12} = \sum_{i,k} a_{12ik}\, x_i\, x_k = 0.$$

Prendiamo questi due vertici in due punti corrispondenti di S e quindi tali che la loro seconda polare mista sia una retta contata due volte e su questa retta r prendiamo il terzo vertice del triangolo fondamentale e il punto unità. Dovremo avere identicamente

$$f_{12} \equiv r^2 \equiv (x_1 - x_2)^2 = 0,$$

e quindi $a_{1223} = a_{1231} = a_{1233} = 0$, $a_{1112} = a_{1222} = -a_{1122} = \alpha$. Così r è una

tangente di ψ. Ora i quattro punti d'incontro di r con f_4 sono dati dalla binaria:

$$x_2^4 \{ a_{1111} + a_{2222} + 2\, a \} + 4\, x_2\, x_3^3 \{ a_{2223} + a_{1113} \} +$$
$$+ 6\, x_2^2\, a_3^2 \{ a_{2333} + a_{1333} \} + a_{3333}\, x_3^4 = 0.$$

Se la coincidenza voluta da Clebsch fosse giusta, fra i coefficienti di questa binaria dovrebbe passare la relazione armonica $i = 0$, mentre essi sono indipendenti.

4. Per studiare le relazioni che hanno luogo fra le curve S e ψ, di cui per ora non abbiamo dato che la definizione, è necessario premettere qualche considerazione sulle possibili forme e posizioni dei triangoli polohessiani. Per brevità chiameremo polo di un tal triangolo il punto della curva $S = 0$ di cui il suddetto triangolo rappresenta la polohessiana. La Steineriana di f_4 possiede 24 cuspidi. Clebsch dimostra che la $S = 0$ incontra la Steineriana appunto nelle sue 24 cuspidi. È facile determinare anche dove la $S = 0$ incontra l'hessiana. Infatti se P è una cuspide della Steineriana, la sua cubica polare ha una cuspide nel punto P' dell'hessiana che corrisponde a P (1). P' è cuspide per la cubica polare di P e la tangente in P' è conica polare mista di P e P'. Cioè: $S = 0$ taglia l'hessiana nelle 24 cuspidi delle cubiche polari cuspidate. Vi sono dunque 24 triangoli polohessiani ognuno dei quali possiede due lati riuniti: i loro poli sono le cuspidi della Steineriana. Viceversa se un triangolo ha due vertici riuniti, il suo polo è una cuspide della Steineriana perchè la cubica polare di questo polo ha per hessiana due rette di cui una contata due volte. È utile per tutto quel che segue (N^{i} 6, 7, 8) esaminare con esattezza questo caso dando alla equazione di f_4 una forma conveniente. Perciò situeremo il vertice (1, 0, 0) del triangolo fondamentale in una cuspide della Steineriana, il vertice (0, 0, 1) nella cuspide della cubica polare di (1, 0, 0) prendendo il lato $x_1 = 0$ per tangente cuspidale di questa cubica, il terzo vertice (0, 1, 0) nel punto comune a questa tangente e alla tangente di flesso della cubica suddetta e finalmente il punto unità nel flesso medesimo.

Allora l'equazione della cubica polare di (1, 0, 0) sarà:

$$(x_1 - x_2)^3 - 3\, x_1^2\, (x_1 - x_3) = 0.$$

Ma, calcolandola dall'equazione generale di f_4, si trova:

(1) CREMONA, *Curve piane*, pag. 98.

$$a_{1111}\, x_1^3 + a_{1222}\, x_2^3 + a_{1333}\, x_3^3 + 3\, a_{1112}\, x_1^2\, x_2 + 3\, a_{1122}\, x_1\, x_2^2 +$$
$$+ 3\, a_{1113}\, x_1^2\, x_3 + 3\, a_{1133}\, x_1\, x_3^2 + 3\, a_{1223}\, x_2^2\, x_3 + 3\, a_{1233}\, x_2\, x_3^2 +$$
$$+ 6\, a_{1123}\, x_1\, x_2\, x_3 = 0\,.$$

Dovremo dunque avere:

$$a_{1111} = a_{1112} = a_{2221} = 1\ ,$$
$$a_{1122} = a_{1113} = -1\ , \qquad a_{3331} = a_{3311} = a_{3312} = a_{3112} = 0\ .$$

Chiamando per brevità con a, b, c, d, e i coefficienti rimanenti di f_4 sasà quindi:

$$f_4 = 2\, x_1^4 + 4\, x_1^3\, x_2 - 4\, x_1^3\, x_3 + 4\, x_1\, x_2^3 - 6\, x_1^2\, x_2^2 +$$
$$+ a\, x_2^4 + 4\, b\, x_2^3\, x_3 + 6\, c\, x_2^2\, x_3\, 2 + 4\, d\, x_2\, x_3^3 + e\, x_3^4 = 0.$$

La polohessiana di (1, 0, 0) è $(x_1 - x_2)\, x_1^2 = 0$; la seconda polare mista di (1, 0, 0) e di (0, 0, 1) è la $x_1 = 0$; quella di (1, 0, 0) e di (0, 1, 0) è $x_1 - x_2 = 0$.

Annullando l'invariante S di una qualunque cubica polare, otterremo l'equazione del covariante S di f_4. Si trova così:

$$S = x_1^2 \left\{ (b\, x_2 + c\, x_3)^2 - (x_1 + a\, x_2 + b\, x_3)\, (c\, x_2 + d\, x_3) \right\} +$$
$$+ \left\{ (bx_2 + cx_3)(dx_2 + ex_3) - (cx_2 + dx_3)^2 \right\} \left\{ (2x_1 + x_2 - x_3)(x_2 - x_1) - (x_1 - x_2)^2 \right\} -$$
$$- \left\{ (x_1 + ax_2 + bx_3)\, (dx_2 + ex_3) - (bx_2 + cx_3)\, (cx_2 + dx_3) \right\} (x_1 - x_2)\, x_1 +$$
$$+ (x_2 - x_1)^2\, (d\, x_2 + e\, x_3)\, x_1 = 0.$$

In queste equazioni è facile rilevare che:

« *La retta che unisce la cuspide e il flesso di una stessa cubica polare cuspidata è una tangente comune di S e ψ* ».

5. È necessario ora dimostrare il seguente teorema:

« *Una retta r la quale, contata due volte, costituisca la conica polare mista di due punti M ed N è sempre lato comune a due triangoli polohessiani e a non più di due* ».

Intanto è evidente che r appartiene ai triangoli polohesiani di M e di N, quindi basta dimostrare che M ed N sono sempre distinti e che r non può costituire la seconda polare mista di un'altra coppia di punti P e Q. Che i punti M ed N non possano essere riuniti è evidente perchè, se lo fossero, ogni punto di r sarebbe doppio per una conica polare pura e quindi r farebbe parte della Steineriana che, in generale, non si spezza.

Supponiamo allora che la retta r, oltre esser conica polare mista per la coppia M, N, lo sia anche per la coppia P, Q. Se il triangolo fondamentale ha la stessa posizione del N^0 3 $[M \equiv (1, 0, 0), N \equiv (0, 1, 0)\,;\, r \equiv x_1 - x_2]$ e se y e z sono le coordinate di P e Q, la conica polare mista di M, N è:

$$r^2 \equiv (x_1 - x_2)^2 = 0\,,$$

quella di P, Q è:

$$\begin{aligned}
&x_1^2 \{ a_{1111}\, y_1 z_1 - y_2 z_2 + a_{1133}\, y_3 z_3 + y_1 z_2 + y_2 z_1 + a_{1113}\,(y_1 z_3 + y_3 z_1) \} + \\
&+ x_2^2 \{ - y_1 z_1 + a_{2222}\, y_2 z_2 + a_{2233}\, y_3 z_3 + y_1 z_2 + y_2 z_1 + a_{2223}(y_2 z_3 + y_3 z_2) \} + \\
&+ x_3^2 \{ a_{3311} y_1 z_1 + a_{3322} y_2 z_2 + a_{3333} y_3 z_3 + a_{3323}(y_2 z_3 + y_3 z_2) + a_{3313}(y_3 z_1 + y_1 z_3) \} + \\
&+ 2\, x_1 x_2 \{ y_1 z_1 + y_2 z_2 - (y_1 z_2 + y_2 z_1) \} + 2\, x_1 x_3 \{ a_{1311}\, y_1 z_1 + a_{1333}\, y_3 z_3 + \\
&+ a_{1313}(y_1 z_3 + y_3 z_1) \} + 2\, x_2 x_3 \{ a_{2322} y_2 z_2 + a_{2333} y_3 z_3 + a_{2323}(y_2 z_3 + y_3 z_2) \} = 0.
\end{aligned}$$

Se anche questa deve ridursi alla

$$r^2 \equiv (x_1 - x_2)^2 = 0\,,$$

abbiamo le condizioni:

$$A_{13} = A_{23} = A_{33} = 0\,, \qquad A_{11} = A_{22} = - A_{12}\,,$$

chiamando con A_{ik} i coefficienti della precedente equazione. Queste condizioni portano evidentemente che i punti y e z siano coningati rispetto alle cinque coniche:

$$\left.\begin{aligned}
A_{13} &= a_{1311}\, x_1^2 + 2\, a_{1133}\, x_1 x_3 + a_{1333}\, x_3^2 = 0 \\
A_{11} + A_{12} &= (a_{1111} + 1)\, x_1^2 + 2\, a_{1113}\, x_1 x_3 + a_{1133}\, x_3^2 = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
A_{23} &= a_{2322}\, x_2^2 + 2\, a_{2333}\, x_2 x_3 + a_{2333}\, x_3^2 = 0 \\
A_{22} + A_{12} &= (a_{2222} + 1)\, x_2^2 + 2\, a_{2223}\, x_2 x_3 + a_{2233}\, x_3^2 = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$A_{33} = a_{3311}\, x_1^2 + a_{3322}\, x_2^2 + a_{3333}\, x_3^2 + 2\, a_{3323}\, x_2 x_3 + 2\, a_{3313}\, x_1 x_3 = 0\,, \qquad (3)$$

delle quali, le prime quattro sono quattro coppie di rette. Bisognerebbe dunque cercare i raggi doppi dell'involuzione (1), quelli dell'involuzione (2): essi formano un quadrilatero completo di cui M ed N sono una coppia di vertici opposti: dovremo dunque esprimere analiticamente la condizione che una (e quindi l'altra) delle due rimanenti coppie di vertici op-

posti fossero coniugati rispetto alla conica (3) ed otterremo allora una relazione fra i coefficienti di f_4 che la particolarizzerebbe.

Se le due coppie $M\,N$, $P\,Q$ potessero avere un punto comune basterebbe porre nelle formule precedenti $y_1 = 1$, $y_2 = y_3 = 0$ e si otterrebbero le condizioni:

$$a^2_{3311} - a_{3331}\,a_{1113} = 0 \qquad (a_{1111} + 1)\,a_{3313} - a_{3311}\,a_{1113} = 0\,,$$

le quali ancora particolarizzerebbero la curva. Però la dimostrazione fatta non è applicabile al caso in cui uno dei punti M, o N possa trovarsi sulla retta r e noi vogliamo anche in questo caso escludere la possibilità che r possa costituire la conica polare mista di altri due punti P, Q. Se M si trova sopra r, la cubica polare di N ha una cuspide in M, r ne è la tangente cuspidale, N è una cuspide della Steineriana. Allora, facendo uso della equazione del N^0 4, costruiamo la conica polare mista di due punti qualunque y, z

$$\begin{aligned} f^{(2)}_{yz} = x_1^2 \{ (2\,y_1 + y_2 - y_3)\,z_1 + (y_1 - y_2)\,z_2 - y_1\,z_3 \} + \\ + x_2^2 \{ z_1\,(y_2 - y_1) + z_2\,(y_1 + a\,y_2 + b\,y_3) + z_3\,(b\,y_2 + c\,y_3) \} + \\ + x_3^2 \{ z_2\,(c\,y_2 + d\,y_3) + z_3\,(d\,y_2 + e\,x_3) \} + 2\,x_1\,x_2\,(y_1 - y_2)\,(z_1 - z_2) - \\ - 2\,x_1\,x_3\,y_1\,z_1 + 2\,x_2\,x_3 \{ z_2\,(b\,y_2 + c\,y_3) + z_3\,(c\,y_2 + d\,y_3) \} = 0. \end{aligned}$$

In questo caso è dunque:

$$M \equiv (1,\ 0,\ 0)\,, \qquad N \equiv (0,\ 0,\ 1)\,,$$
$$P \equiv (y_1\,,\ y_2\,,\ y_3)\,, \qquad Q \equiv (z_1\,,\ z_2\,,\ z_3)\ \ , \quad r \equiv x_1 = 0\,.$$

Se deve essere

$$f^{(2)}_{yz} \equiv r^2 \equiv x_1^2 = 0\,,$$

si hanno le condizioni:

$$A_{22} = A_{33} = A_{12} = A_{23} = A_{31} = 0\,,$$

ove A_{ik} sono i coefficienti di $f^{(2)}_{yz}$. Si vede allora facilmente che i soli sistemi capaci di soddisfarle, che non particolarizzino la f_4, sono $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0)$, $(z_1 = 0\,,\ z_2 = 0\,,\ z_3 = 1)$ cioè i punti P e Q non possono essere distinti dai punti M ed N.

6. Ciò premesso, siano P e Q due punti corrispondenti del covariante S, cioè tali che il triangolo polohessiano di uno abbia un vertice nell'altro e quindi la loro conica polare mista sia ridotta a una retta r contata due volte la quale incontri la S nei quattro punti A, B, C, D.

È necessario ora occuparsi delle possibili coincidenze che possono avvenire fra i quattro punti A, B, C, D. Il triangolo polohessiano di P ha un vertice in Q e due in r, analogamente quello di Q: dunque A, B, C, D sono i quattro rimanenti vertici delle polohessiane di P e di Q.

Sia $Q\,C\,D$ la polohessiana di P e $P\,A\,B$ quella di Q. Intanto P e Q saranno sempre distinti altrimenti (come abbiamo già osservato al principio del N^0 5), r appartiene alla Steineriana. Relativamente alle coincidenze possibili fra A, B, C, D, bisogna distinguere il caso in cui vengano a sovrapporsi due che appartengano l'uno al triangolo polohessiano $P\,A\,B$, e l'altro al triangolo polohessiano $Q\,C\,D$, ovvero due che appartengano al medesimo triangolo polohessiano.

Se A e B sono coincidenti, la polohessiana di Q ha due lati sovrapposti, Q è una cuspide della Steneriana (N^0 4), A è cuspide della cubica polare di Q e poichè r ha in A due punti riuniti a comune con S, r è la retta che unisce la cuspide e il flesso della cubica polare di Q (N^0 4), ma allora, dalle formole dello stesso paragrafo, si ricava che essa incontra la S in altri due punti distinti. Dunque se A e B sono riuniti, C e D sono distinti. Contemporaneamente si viene ad escludere che, dei quattro punti A, B, C, D, tre, o tutti e quattro, possano essere coincidenti in uno solo.

Sieno ora riuniti A con C e B con D. Poichè A è vertice per i triangoli polohessiani di P e di Q ne viene che il triangolo polohessiano di A ha due vertici in P e Q [N^0 1 *(e)*]; per la stessa ragione il triangolo polohessiano di B ha due vertici in P e Q; cioè $P\,Q$ è lato comune ai triangoli polohessiani di A e B. Segue che B è il terzo vertice del triangolo polohessiano di A, perchè se fosse un altro punto E; la retta $P\,Q$, contata due volte, sarebbe la conica polare mista di A e di E e quindi il triangolo polohessiano di E avrebbe due vertici sopra $P\,Q$ e $P\,Q$ sarebbe lato comune a tre triangoli polohessiani il che è impossibile (N^0 5). Dunque $P\,B\,Q$ è il triangolo polohessiano di A e per la stessa ragione $P\,Q\,A$ quello di B. Ne viene che $P\,Q$ è la seconda polare mista di A e B e incontra S in due punti riuniti in P e in altri due riuniti in Q. Analogamente si vede che le rette $P\,A$, $A\,Q$, $P\,B$, $B\,Q$ sono le seconde polari miste delle coppie $B\,Q$, $B\,P$, $A\,Q$, $A\,P$ e ognuna incontra la S in due punti coincidenti. Cioè per ognuno dei punti A, B, P, Q, escono tre rette incontranti (ciascuna) nel loro punto comune la S in due punti coincidenti; dunque A, B, P, Q sono quattro punti doppi per S la quale quindi dovrebbe spezzarsi in due coniche il che in generale non avviene. È quindi impossibile la coincidenza simultanea di A con C e B con D.

a) Possiamo quindi concludere che, dei quattro punti A, B, C, D, due, al massimo, possono essere coincidenti e, quando cioè avviene, gli altri due sono sempre distinti.

7. Una prima conseguenza di questo teorema è che il covariante S non ha punti doppi. Infatti, ammettiamo che S abbia un punto doppio P. Tutte le rette uscenti da P incontrano la S fuori di P in due punti, e fra queste, sei sono tangenti di ψ perchè vedremo che la classe di ψ è 6 (N° 8). Sia r una retta uscente da P e tangente di ψ, cioè lato comune a due triangoli polohessiani di cui i vertici opposti a r staranno fuori di r, giacchè, se uno di essi stesse sopra r, questa sarebbe tangente cuspidale di una cubica polare cuspidata e sopra tali rette non esistono certo punti doppi di S, come si può verificare sull'equazione del N° 4. Sieno dunque B e C questi due vertici opposti e siano A e D gli altri due punti in cui la r incontra la S fuori di P. P sarà vertice comune a due triangoli polohessiani, perchè, se rappresentasse due vertici riuniti di uno stesso triangolo polohessiano, esso sarebbe cuspide di una cubica polare e ricadremmo in un caso già considerato (N° 4). Sia quindi $P\,C\,D$ il triangolo polohessiano di B, $A\,P\,B$ quello di C, le rette $P\,B$, $P\,C$ sono tangenti di ψ e poichè P è doppio per S, ciascuna di esse incontra ulteriormente S in un punto F e in un punto E distinti da B, C, P [N° 6 *(a)*]. Essendo $P\,C\,D$ il triangolo polohessiano di B, la $P\,C$ rappresenta la seconda polare mista di B e D, cioè il triangolo polohessiano di D deve avere un lato sopra $P\,C$ e un vertice in B. I rimanenti vertici di questo triangolo, situati sopra $P\,C$, dovranno essere: uno P perchè ivi la $P\,C$ incontra la S in due punti coincidenti, l'altro non può essere C, altrimenti esso conterebbe due volte nelle intersezioni di $P\,C$ con S, dunque sarà E. Cioè:

$P\,B\,E$ è il triangolo polohessiano di D

e analogamente:

$P\,C\,F$	»	»	»	A,
$P\,C\,D$	»	»	»	B,
$P\,B\,E$	»	»	»	A.

Dunque [N° 1 *(e)*] il triangolo polohessiano di P deve aver vertice in A, B, C, D il che è impossibile perchè due di questi punti non possono coincidere [N° 6 *(a)*]. Quindi S non ha punti doppi.

Ecco dunque le sue caratteristiche pluckeriane:

ordine $= 4$, classe $= 12$, punti doppi $=$ cuspidi $= 0$,
flessi $= 24$, bitangenti $= 28$.

8. Cerchiamo ora la classe di ψ, cioè vediamo quanti lati di triangoli polohessiani passano per un qualunque punto P. Tutte le polohessiane passanti per P sono polohessiane di punti che appartengono alla polohessiana di P [N° 1 *(a)*]. Ma quest'ultima è del 3° ordine e incontra la S in dodici punti. Vi sono dunque dodici punti i cui triangoli polohessiani passano per P. P non appartiene ad S, dunque P non è vertice per nessuno di essi, cioè due qualunque tangenti di ψ, passanti per S, non apparten-

gono a uno stesso triangolo polohessiano. Ognuna di queste tangenti deve appartenere a due e a non più di due (N° 5)] e cioè ai triangoli polohessiani di quei punti di cui essa rappresenta la seconda polare mista. Per ogni punto ψ debbono passare cinque tangenti a ψ, contando quella nel punto, e ciò non ostante nessuna di esse può appartenere a più di due triangoli polohessiani (N° 5) Possiamo dunque concluderne:

a) « *L'inviluppo dei triangoli polohessiani è una curva della sesta classe contata due volte.* »

b) « *La polohessiaua di un qualunque punto P taglia il covariante S in sei coppie di punti corrispondenti, tali che quelli di una stessa coppia hanno per seconda polare mista una tangente di ψ passante per P.* »

c) « *Se P appartiene a ψ, queste sei coppie si riducono a cinque, di cui una è costituita da due punti di contatto fra S e la polohessiana di P; la seconda polare mista di questi due punti è la tangente di ψ in P.* »

9. La tangente cuspidale di una cubica polare cuspidata, rappresenta due lati coincidenti del triangolo polohessiano della corrispondente cuspide della Steineriana: si può dunque dire che, per ogni punto di questa retta, passano due tangenti infinitamente vicine di ψ, ossia che essa appartiene alla curva ψ riguardata come luogo.

Fanno parte quindi di ψ, considerata come luogo di punti, le 24 tangenti cuspidali delle cubiche polari cuspidate. Sia Ω la curva-luogo rimanente. Si vede subito che le 24 rette suddette sono tengenti a Ω, giacchè, se r è una di esse, C la cuspide che contiene e C' la cuspide corrispondente della Steineriana, r è seconda polare mista di C e C' e quindi, oltre rappresentare due lati coincidenti del triangolo polohessiano di C', appartiene anche al triangolo polohessiano di C e quindi deve pure riguardarsi come il lato comune ai triangoli polohessiani di C e di C'. Onde sotto questo aspetto è una tangeute di Ω.

Ogni tangente di ψ, o di Ω, appartiene a due triangoli polohessiani e a non più (N° 5). Dunque nè ψ (o Ω) posseggono bitangenti, o tangenti stazionarie. La classe di Ω è uguale a quella di ψ.

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema:

« *Il contravariante ψ riguardato come luogo, é costituito da una curva di 30° ordine e di 6ª classe e da 24 tangenti semplici di questa curva, le quali non sono altro che le 24 tangenti cuspidali delle cubiche polari cuspidate* ».

Mentre dunque da ψ, riguardato come luogo, non si distaccano nè bitangenti, nè tangenti stazionarie perchè non ne possiede, si distaccano però 24 rette, cioè quelle sopra descritte.

10. L'equazione di ψ può trovarsi riflettendo che di esso si può dare questa definizione. [N° 8 *(c)*]:

« *Il contravariante* ψ *é il luogo di un punto la cui polohessiana tocca il covariante* S ».

Basterà dunque esprimere la condizione di contatto fra le due curve

$$(a\,b\,c)^2\, a_y\, b_y\, c_y\, a_x\, b_x\, c_x = 0\,,$$
$$(a\,b\,c)\,(a\,b\,d)\,(a\,c\,d)\,(b\,c\,d)\, a_x\, b_x\, c_x\, d_x = 0.$$

La curva che ne risulta dovrà essere costituita da Ω contato due volte, perchè Ω, come inviluppo, è contato due volte [N° 8 *(a)*] e dalle 24 tangenti cuspidali, contate ognuna una volta, perchè esse entrano già due volte in Ω. La condizione di contatto è di 84° ordine nelle y; dunque l'ordine di Ω è $\frac{84-24}{2} = 30$ come abbiamo già trovato (N° 9).

Sono per conseguenza trovate le caratteristiche plückeriane di ψ; classe $= 6$, ordine $= 30$, punti doppi $= 396$, cuspidi $= 72$, bitangenti $=$ flessi $= 0$ (1).

(1) L'inviluppo ψ è doppio come inviluppo di triangoli polohessiani, è semplice come inviluppo delle rette che sono seconde polari miste di coppie di punti. Riguardandole sotto questo secondo aspetto, il CAPORALI ritrova la classe di ψ per mezzo di una proprietà del covariante G_r relativa a una retta r (Jacobiana delle coniche polari dei punti di r) e del controvariante K_r farmato con le rette che, insieme ad r, costituiscono la conica polare mista di coppie di punti corrispondenti di G_r (CAPORALI, loc. cit., n. 11, 23, 24, 30).

SOPRA LE HESSIANE DELLE SUPERFICIE CUBICHE.

[*Rendic. Isti. Lomb. 1893*].

La presente Memoria è una studio della Hessiana di una superficie cubica (in casi particolari che sono fra i più notevoli). — Quando venne pubblicata nei Rendic., dell'istit. Lomb., dovette essere divisa in tre Note per ragioni tipografiche di spazio. — Nella stampa attuale, scrivendo di seguito le tre Note, ho però mantenuto la divisione del lavoro in tre parti. Nella prima ho dimostrato che esiste una sola hessiana non degenere e dotata di linea multipla. Essa possiede una retta doppia con un punto triplo su questa retta ed è relativa a una superficie cubica dotata di un punto biplanare. Viene quindi un breve studio di questa hessiana, che costituisce la seconda parte del lavoro. L'ultima considera tutti i modi e le forme possibili in cui una hessiana può spezzarsi. Ne ho fatto un riassunto in una tabella la quale comprende tutti i casi trovati e che mi sembrano anche i soli possibili.

I. PARTE.

Hessiane non degeneri dotate di linee multiple.

1. Teorema. — *L'unica superfcie del 4° ordine, irriduttibile dotata di una linea multipla, che possa riguardarsi come hessiana di una superficie cubica, possiede una sola retta doppia con un punto triplo su di essa ed è relativa a una superficie cubica dotata di un punto doppio biplanare.*

2. È facile vedere che le superficie del 4° ordine, non degeneri e dotate di linea multipla, possono classificarsi così;

1° Superficie romana di Steiner,
2° Superficie dotate di conica doppia,
3° Superficie dotate di retta doppia,
4° Superficie rigate.

Ciò premesso, la dimostrazione del suenunciato teorema può farsi per esclusione. Escluderemo cioè che l'hessiana di una superficie cubica possa appartenere alla 1ª, alla 2ª, alla 4ª delle specie sopra descritte e dimostreremo che quando appartiene alla terza, essa possiede conseguentemente gli altri requisiti indicati dal teorema medesimo. Questa esclusione si può far dipendere dai seguenti teoremi.

3. « Se esiste un punto P la cui quadrica polare (1) è costituita da un piano doppio π, e se la superficie fondamentale non è degenere, l'hessiana si spezza in quel piano e in un cono cubico col vertice in quel punto quando π non passi per P; quando poi π passi per P, l'hessiana si compone di π contato due volte e di un cono quadrico col vertice in P: P naturalmente in quest'ultimo caso è uniplanare per S_3. ».

Infatti: Se P non giace sopra π, collochiamo in P il vertice (0001) del tetraedro fondamentale e prendiamo π per faccia opposta. La quadrica polare di P è allora

$$\Sigma_{ik} a_{4ik} x_i x_k = 0.$$

Se essa deve ridursi a $x^2_4 = 0$, si esigono le condizioni:

$$a_{411} = a_{422} = a_{433} = a_{412} = a_{413} = a_{414} = a_{423} = a_{424} = a_{434} = o$$

e quindi il primo membro dell'equazione di H si spezza in $x_4 = o$ e in un cono cubico col vertice in (0001).

Se invece P giace sopra π, P è certamente uniplanare per S_3 e prendendo π per piano $x_1 = o$, avremo:

$$S_3 = x_1^2 x_4 + \varphi = o$$

dove φ è una ternaria cubica in x_1, x_2, x_3. Conseguentemente si trova:

$$H = x_1^2 \left\{ \varphi_{22} \varphi_{33} - \varphi_{23}^2 \right\} = 0; \quad \left(\varphi_{ik} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \, \partial x_k} \right)$$

il che dimostra la seconda parte del teorema.

4. Proponiamoci ora la seguente questione. — L'inviluppo dei piani polari dei punti di una retta r è un cono quadrico. Se r appartiene ad H, il vertice di questo cono è un punto doppio di H e il cono suddetto costituisce il cono osculatore di H in quel punto doppio. La quadrica polare del vertice del cono è una coppia di piani che si tagliano lungo la r (2). Chiamando dunque corrispondenti due punti di H quando uno è

(1) D'ora innanzi quando parleremo di elementi polari intenderemo di considerli tali sempre rispetto a una superficie cubica fondamentale che rappresenteremo con S_3; per indicare la sua hessiana useremo il simbolo H.

(2) CREMONA, *Sulle superficie del 3. ordine.* Crelle, Bd. 68. N. 14, 93, 56.

vertice del cono polare dell'altro, o (ciò che è lo stesso) quando il piano polare dell'uno tocca H nell'altro, segue che, *in generale*, a una retta di H corrisponde un punto (doppio) di H. Si può ora domandare, *a una retta r di H può, eccezionalmente, corrispondere una curva che non sia un punto senza che, per questo, H si spezzi?*

Intanto è certo che, se questa curva esiste, non può esser altro che una retta, perchè i coni polari dei punti di r debbono formare un fascio e il luogo dei vertici dei coni di un fascio, quando non è un punto, è una retta (1). Vediamo dunque a quali conclusioni si perviene, se a una retta r di H, si fa corrispondere un'altra retta r' pure di H. Mentre un punto variabile P percorre r, il piano polare di P tocca H in un punto P' di r' e quindi contiene r'. Cioè i piani polari dei punti di r fanno fascio attorno a r'. Dunque, in questo caso particolare, la sviluppabile formata con tutti i piani polari dei punti di r, e che è generalmente di 2ª classe, è ridotta alla prima: a un fascio di piani. Viceversa, si vede subito che anche i piani polari dei punti di r' fanno fascio attorno ad r e sotto questo aspetto le r, r' sono in posizione reciproca. I coni polari dei punti di r debbono formare un fascio, avere i vertici sulla r' e, nel fascio, non debbono esser contenuti piani doppi, altrimenti H si spezza; dunque questi coni si toccano lungo la r' (1) e si tagliano ulteriormente secondo una conica non degenere. In questo fascio esiste una sola coppia di piani costituita dal piano tangente a tutti i coni e dal piano della conica; l'intersezione di questi due piani si appoggia a r'; sia r'', e sia P_0 il punto di r la cui quadrica polare è la suddetta copia di piani. Il piano polare di P_0 deve esser tale anche rispetto alla quadrica polare di P_0, dunque esso passa per r'' e siccome P_0 appartiene ad r, così il suddetto piano passa anche per r' cioè contiene r' ed r'' e quindi è il piano tangente a tutti i coni del fascio. Esso dunque fa parte della quadrica polare di P_0, cioè passa per P_0 e per conseguenza P_0 appartiene alla superficie fondamentale S_3. Quindi l'ipotesi fatta che a una retta r di H corrisponda un'altra retta r' pure di H, si trasforma in quest'altra: la S_3 passa per un vertice del pentaedro, cioè possiede un punto di Eckardt (2). Allora, secondo i noti resultati di Eckardt, si conclude subito che le r, r' s'incontrano, che la r'' si appoggia a entrambe e che $P_0 = r, r'$. Dunque:

(*a*) *L'esistenza di una retta r di H a cui corrisponda una retta r' pure*

---

(1) SEGRE, *Ricerche sui fasci di coni quadrici in uno spazio lineare qualunque* (Acc. delle Scienze di Torino. Vol. XIX, 1884). — BERTINI, *Sui fasci di quadriche in uno spazio a n dimensioni* (Acc. dei Lincei, Rendiconti, Vol. II, serie 4ª, 1886).

(2) *Ueber diejenigen Flächen dritten Grades, auf denen sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiedn:* Math. Annal. Bd. 10.

di H, esige che r e r' s'incontrino, costituendo una coppia di rette sopranumerarie conjugate.

La proposizione reciproca è contenuta nei N^i 8 e 9 della mia Nota *Sulle superficie algebriche simmetriche* (Acc. dei Lincei, 1890).

Per le ricerche che seguono, è necessario tener presente che:

(*b*) *Se H non è degenere, a una retta di H non può corrispondere altro che un punto, od una retta.*

5. « Se a uno spigolo a del pentaedro, corrisponde un vertice A e se i tre vertici situati sopra a sono riuniti in uno stesso punto B, lo spigolo b corrispondente di B, non può possedere, riuniti in uno stesso punto, i tre vertici che contiene, senza che H si spezzi ».

Collochiamo il vertice (0001) del tetraedro fondamentale nel vertice A del pentaedro e prendiamo la retta $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, sullo spigolo corrispondente a. È così implicitamente ammesso che a non passi per A, ma se ciò avviene, A è biplanare per S_3 e vedremo a suo tempo (Cap. II) che, in quel caso, il teorema è verificato.

Otterremo che il tetraedro fondamentale abbia la sopra indicata posizione esigendo che la quadrica polare di un qualunque punto $(y_1, y_2, 0, 0)$ di a sia un cono col vertice in A. Si trova così:

$$a_{141} = a_{142} = a_{143} = a_{144} = a_{242} = a_{243} = a_{244} = 0 . \qquad (1)$$

Si può anche, senza toglier nulla alla generalità, situare il punto $B \equiv (1000)$ di a in uno dei vertici del pentaedro. Si ottiene ciò esprimendo che la quadrica polare di B sia una coppia di piani passanti per A. Intanto escludiamo subito, come contrario all'ipotesi del teorema, che la retta d'intersezione dei piani della suddetta coppia incontri a in un punto P, perchè la quadrica polare di P avrebbe un vertice in A e uno in B e quindi si spezzerebbe; onde P sarebbe un vertice del pentaedro. Ma l'ipotesi del teorema sopraenunciato, richiederebbe che P coincidesse con B, cioè che B fosse biplanare per S_3, caso il quale, come già abbiamo avvertito, sarà studiato a parte (Cap. II). Si può dunque prendere per retta $b \equiv (x_1 = 0, x_2 = 0)$ quella comune ai piani che costituiscono la quadrica polare di B. Questi piani sono distinti, altrimenti H si spezza (N° 3). Può darsi che nessuno di essi passi per B, può darsi che ce ne passi uno e non l'altro (se passassero entrambi per B, B sarebbe biplanare, ecc.). Trattiamo separatamente questi due casi.

(*a*) Nel 1^0, potremo situare il punto $C \equiv (0100)$ di a, nel conjugato armonico di B rispetto alla coppia di piani che formano la quadrica polare di B stesso. Allora questa quadrica è:

$$a_{111}\, x_1^2 + a_{122}\, x_2^2 = 0$$

onde, questa particolare scelta del punto (0100), esige che, alle condizioni già imposte (1), si aggiungano le altre:

$$a_{133} = a_{122} = a_{123} = a_{113} = 0 .$$

I tre valori del rapporto $\frac{y_1}{y_2}$ che individuano i 3 vertici del pentaedro, situati sopra a, si trovano annullando il discriminante della ternaria che rappresenta il cono polare di un qualunque punto di a. Questo discriminante è:

$$y_2 \{ y_1^2 \, a_{111} \, a_{122} \, a_{233} + y_1 \, y_2 \, (a_{111} \, a_{222} \, a_{233} - a_{111} \, a^2_{223}) -$$

$$- a^2_{212} \, a_{233} \, y_2^2 \} = 0.$$

Uno dei tre vertici suddetti è naturalmente in $y_2 = 0$: se si vuole dunque che anche gli altri due siano ivi riuniti, dovremo annullare i coefficienti di y_1^2 e di $y_1 \, y_2$. Ma a_{111} e a_{122} non possono esser nulli, altrimenti H si spezza (N° 3); dunque dovrà essere $a_{233} = 0$ e l'equazione precedente diviene $y_1 \, y_2^2 = 0$. Essa ci esprime che non si può esigere (se H non si spezza) che i tre vertici del pentaedro giacenti sopra a siano riuniti in un punto; che se due sono riuniti in B l'altro cade nel 4° armonico di B rispetto ai piani che formano la quadrica polare di B. È dunque impossibile realizzare, in questo primo caso, l'ipotesi contenuta nell'enunciato del teorema.

(b) Nel 2° caso, potremo prendere $x_1 \, x_2 = 0$ per quadrica polare di B. Allora, alle condizioni (1) già imposte, si aggiungono le altre:

$$a_{111} = a_{122} = a_{133} = a_{113} = a_{123} = 0.$$

Per trovare i tre vertici del pentaedro situati sopra a, basta annullare il discriminante della quadrica polare di un punto di a, come nel caso precedente). Si ha così:

$$a_{211} \, y_2 \{ y_2^2 \, (a_{222} \, a_{233} - a^2_{223}) - a_{233} \, a_{211} \, y_1 \} = 0 .$$

Ora a_{211} è diverso da zero, altrimenti nella equazione di S_3 manca una coordinata, S_3 è un cono e H è indeterminato (N° 19). Se dunque l'equazione precedente deve ridursi a $y_2^3 = 0$, sarà $a_{233} = 0$ e allora l'ipotesi del teorema è realizzata. La dimostrazione ne segue immediatamente.

Infatti basta calcolare il discriminante della ternaria che rappresenta la quadrica polare di un punto di b ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$).

Annullandolo, si trova:

$$a_{322}\, y_3 \left\{ y_3^2 (a_{333}\, a_{344} - a^2_{334}) + y_3\, y_4 (a_{333}\, a_{444} - a_{334}\, a_{344}) + \right.$$
$$\left. + y_4^2 (a_{334}\, a_{444} - a^2_{344}) \right\} = 0.$$

Ma $a_{322} \neq 0$, altrimenti il punto $C \equiv (0100)$ è un vertice del pentaedro e i tre vertici di esso, giacenti in a, non sono più coincidenti in un unico punto. Se l'equazione precedente deve ridursi a $y_3^3 = 0$ occorre che sia

$$a_{333}\, a_{444} - a_{334}\, a_{344} = a_{334}\, a_{444} - a^2_{344} = 0$$

e quindi $a^2_{334} - a_{333}\, a_{344} = 0$, cioè le quadriche polari di tutti i punti di b sono indeterminate, il calcolo di H mostra subito che si spezza. — c. d. d.

6. Siamo ora in grado di dimostrare il teorema enunciato al principio di questo capitolo. Prima però faremo la seguente osservazione generale. Se H possiede una linea doppia, non ne segue che ogni punto di questa linea, pur essendo doppio per H, goda della proprietà che la sua quadrica polare si spezzi. Il ragionamento che fa il prof. Cremona al n. 83 della già citata memoria, non è qui applicabile. Potrebbe darsi che tutti i punti della linea doppia fossero uniplanari, dotati cioè ognuno di un solo piano osculatore. Potrebbe anche essere che la superficie fondamentale avesse dei punti doppi. Essi apparterrebbero certo a H e il piano polare di uno d'essi, essendo indeterminato, potrebbe pure esser rappresentato da uno degli infiniti piani osculatori di H in un punto della linea doppia. Però, viceversa, se esiste un punto la cui quadrica polare è una coppia di piani, quel punto è doppio per H.

7. Cominciamo dall'escludere che ogni superficie del 4^0 ordine, non degenere, dotata di conica doppia, possa essere H di una S_3. Sia c_2 la conica doppia. Se H non ha punti singolari fuori di c_2 la sua classe è 12 (1). Ciò significa che, costruita la curva polare di una qualunque retta r dello spazio (cioè la base del fascio delle quadriche polari dei suoi punti), essa incontra H in 16 punti tali che 12 di essi hanno i loro corrispondenti situati fuori di c_2. Ora si vede facilmente che se la supposta H deve essere hessiana, possiede di conseguenza *almeno* un punto doppio fuori di c_2. Infatti: consideriamo un punto A di H la cui quadrica polare si spezzi in due piani e poniamo pure che A giaccia sopra c_2. Ad A corrisponde una retta a non passante per A (altrimenti A è biplanare per S_3) e vedremo che allora H non possiede c_2 (Cap. II). La retta a avrà a comune con c_2 un punto B al più, la retta b corrispondente di B passa per A. I tre vertici del pentaedro, situati sopra a, possono essere riuniti in B, ma allora non possono essere riuniti in A i tre che si trovano sulla b senza che H si

(1) Berzolari, *Sopra la superficie del 4° ordine dotata di conica doppia.* (Annuali di mat., tomo XIII).

spezzi (N° 5). Dunque H possiede almeno un punto doppio fuori di c_2. Quindi nel computare la classe bisogna fare una ulteriore diminuzione di due almeno, dovuta al punto doppio P ulteriormente trovato. Ciò indica che la curva polare di una qualunque retta dello spazio passa per due punti fissi, o variabili, riuniti, o distinti, ma corrispondenti di P, situati cioè sulla retta p corrispondente di P. Essi non possono essere variabili, sulla p, perchè, se ciò accadesse, i piani polari dei punti di p sarebbero così distribuiti nello spazio che per ogni retta arbitraria ne passerebbero due distinti, o riuniti), e questo è impossibile perchè i piani polari dei punti di una retta o inviluppano un cono, o formano un fascio (N° 4). Dunque i suddetti punti saranno fissi (distinti, o no). Sia Q uno di questi; esso è comune alle curve polari di tutte le rette dello spazio, dunque Q è doppio per S_3. Se è conico, il vertice del suo cono polare è Q stesso, cioè P coincide con Q, il che non può essere perchè si è già dimostrato che la quadrica polare di P è una coppia di piani; dunque Q è biplanare, o uniplanare per S_3. Ma se è uniplanare, H si spezza (N° 3), se è biplanare, studiando dettagliatamente H, dimostreremo che non contiene c_2 (Cap. II).

8. (*a*) Escludiamo ora le superficie rigate. Essa contengono infinite rette. A una retta di H corrisponde o una retta, o un punto (N° 4) se H non si spezza. Nel primo caso, il punto comune alle rette che si corrispondono, nel secondo caso il punto corrispondente alla retta ha la quadrica polare che si spezza. Potrebbe fare eccezione il caso in cui una retta coincidesse con la propria corrispondente, ma allora essa apparterrebbe a S_3 (N° 9 (a)) e quando questo si ripetesse generalmente per ogni retta di H, H si spezzerebbe in S_3 e in un un piano (N° 26). Si può dunque dire che sulla superficie H esistono infiniti punti le cui quadriche polari si spezzano. Il piano polare di uno qualunque di questi punti tocca H lungo la retta corrispondente, dunque la superficie H deve essere sviluppabile; e così intanto possiamo affermare che se H è una superficie rigata, irriduttibile, essa è sviluppabile. Basta dunque escludere che H possa essere un cono di 4° ordine, o la sviluppabile di 4° ordine e di 3ª classe osculatrice di una cubica gobba.

(*b*). Il cono di 4° ordine (irriduttibile) si esclude subito. Infatti a una sua generatrice g corrisponderà un'altra generatrice g', ovvero un punto. g' non può coincidere *generalmente* con g altrimenti S_3 fa parte di H, e H si spezza. Essendo g' distinto da g, la quadrica polare di $V \equiv g\,g'$, vertice del cono, si spezza in una coppia di piani (N° 4), la di cui retta comune dovendo appartenere a H passa per V, cioè V è biplanare per S_3. Se poi a una generatrice g corrisponde un punto G, o G è V e quindi V biplanare per S_3, o altrimenti, la quadrica polare di V, avendo infiniti vertici negli infiniti punti analoghi a G, si spezza in due piani la cui retta comune,

appartenendo a H, passa per V e ancora V è biplanare per S_3. — In ogni caso dunque l'ipotesi fatta che H sia un cono del 4° ordine irriduttibile ci fa concludere che il vertice del cono deve essere biplanare per S_3. Ora in questo caso vedremo (N° 17) che H non può esser un cono di 4° grado senza spezzarsi.

(c). Passiamo alla sviluppabile di 4° ordine. Alle sue generatrici corrispondono i punti della cubica gobba di cui è osculatrice (perchè questa cubica è doppia per la supposta H) Uno dei punti P in cui la cubica taglia S_3 è un punto di Eckardt. La generatrice p, corrispondente di P, non può passare per P, altrimenti P è biplanare per S_3 e allora H non è rigata, nè sviluppabile (Cap. II). Quindi non passando p per P, bisogna che il piano polare di P passi per P e tocchi H lungo p, cioè abbia comuni 4 punti con la cubica gobba, il che è assurdo se essa e quindi H non si spezza.

9. Finalmente dimostriamo che l'unica H che possiede una retta doppia è quella relativa a una S_3 dotata di punto biplanare. Le considerazioni seguenti spettano a qualunque superficie di 4° ordine che possegga almeno una retta doppia. Onde le conclusioni saranno applicabili tanto alla superficie di Steiner, quanto a un caso particolare di una H dotata di conica doppia che forse potrebbe non rientrare nelle considerazioni del N° 7; il caso in cui la conica doppia sia degenere. Abbiasi dunque un'H dotata di una retta doppia r. A r corrisponderà una retta, o un punto (4).

(a). Supponiamo che a r corrisponda una retta r' costituendo insieme una coppia di sopranumerarie conjugate. Sia, dapprima, la r' coincidente con la r. Allora i piani polari dei punti di r passano per r, ossia r appartiene anche ad S_3. Fra i punti di r è stabilita una projettività essendo corrispondenti due punti che siano l'uno il vertice del cono polare dell'altro. I punti uniti di questa corrispondenza sono dunque doppi per S_3 e potranno essere distinti, o coincidenti. In ogni caso uno qualunque di essi non può essere conico per S_3, perchè sarebbe tale anche per H e di più il cono osculatore ivi di S_3 sarebbe cono osculatore ivi anche per H. Ora tutti i punti di r sono biplanari, o uniplanari per H; dunque i suddetti punti uniti saranno biplanari o uniplanari per S_3 e quindi H è relativa a una S_3 che possiede almeno un punto biplanare, ovvero H si spezza. Se poi r' è distinta da r, il punto $r\,r'$ avrà per quadrica polare una coppia di piani che si taglieranno lungo una retta r'' che si appoggia a r e r' (N° 4). Il piano polare del punto $r\,r'$ è il piano $r\,r'$ e deve toccare H lungo la r'' corrispondente del punto $r\,r'$ (N° 4). Se r'' è distinto da r e da r' il piano polare suddetto taglia H in una curva del 5° ordine (composta di r, r'' contate ognuna due volte e di r' contata una volta) e quindi H si spezza. Se r'' coincide con r, o con r', il punto $r\,r'$

è biplanare per S_3 e ancora H è l'hessiana di una S_3 dotata di un punto biplanare.

(*b*). Supponiamo adesso che a r corrisponda un punto R. Io dico che r deve contenere R e quindi R deve essere biplanare per S_3. Infatti, ammettiamo che r non contenga R e prendiamo r per lato $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, del tetraedro fondamentale, R per vertice (0001) e poniamo inoltre il punto (1000) in uno dei tre vertici del pentaedro che appartengono e r. Ci occorre ora distinguere due casi a seconda che la retta comune ai piani che formano la quadrica polare di (1000) non incontra r, ovvero la incontra.

Nel 1° caso il tetraedro fondamentale potrà avere le stesse posizioni del N° 5 (a), o (b), a seconda che la quadrica polare di (1000) non passa, o passa per (1000). Si hanno così le due equazioni seguenti per H:

$$H = \left\{ a_{111}\, x_1\, (a_{221}\, x_1 + a_{222}\, x_2 + a_{223}\, x_3) - a'_{122}\, x_2^2 \right\} D -$$

$$- a_{111}\, x_1\, (a_{232}\, x_2 + a_{233}\, x_3)^2\, (a_{443}\, x_3 + a_{444}\, x_4) = 0\,,$$

$$H = \left\{ a_{112}\, x_1\, (a_{222}\, x_2 + a_{223}\, x_3) + a_{211}\, x_1^2 \right\} D - a_{112}\, x_2\, (a_{232}\, x_2 +$$

$$+ a_{233}\, x_3)^2\, (a_{443}\, x_3 + a_{444}\, x_4) = 0$$

dove:

$$D = \begin{vmatrix} a_{332}\, x_2 + a_{333}\, x_3 + a_{334}\, x_4 & a_{343}\, x_3 + a_{344}\, x_4 \\ a_{343}\, x_3 + a_{344}\, x_4 & a_{443}\, x_3 + a_{444}\, x_4 \end{vmatrix}.$$

Ora, se H possedesse, nell'una, o nell'altra delle due forme, come retta doppia la $r \equiv (x_3 = 0, x_4 = 0)$, bisognerebbe che posto $x_3 = \lambda\, x_4$ si staccasse dal primo membro il fattore x^2_4. E questo non può avvenire senza che sia $a_{223} = a_{233} = 0$, cioè senza che H si spezzi.

Nel 2° caso, la quadrica polare di (1000) potrà prendersi sotto la forma $a_{113}\, x_1\, x_3 = 0$, ovvero $a_{111}\, x_1^2 + a_{133}\, x_3^2 = 0$ a seconda che essa passa, o no per (1000). In ogni modo, calcolando H si trova, analogamente a quel che si è fatto sopra, che essa non può possedere come retta doppia la $r \equiv (x_3 = 0,\ x_4 = 0)$ senza spezzarsi. Dunque se un'H possiede una retta doppia r, ad r deve corrispondere un punto R di r, cioè R deve essere biplanare per S_3.

Il teorema enunciato al principio di questo capitolo è così dimostrato.

II. PARTE

L'Hessiana di una superficie cubica dotata di un punto biplanare.

10. Se si colloca il vertice (0001) del tetraedro fondamentale nel punto biplanare e se si prendono per piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ quelli che ne costituiscono il cono osculatore, l'equazione di S_3 può scriversi sotto la forma:

$$S_3 = x_1 x_2 x_4 + \varphi = 0$$

dove φ è una ternaria cubica in x_1, x_2, x_3. Ponendo $\varphi_{ik} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k}$ l'equazione di H è

$$\left.\begin{aligned} H = 2 x_1 x_2 x_4 \varphi_{33} - \varphi_{33} \{ x_1^2 \varphi_{11} + x_2^2 \varphi_{22} - 2 x_1 x_2 \varphi_{13} \} + \\ + (x_1 \varphi_{13} - x_2 \varphi_{23})^2 = 0 . \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Essa mostra immediatamente che il punto biplanare di S_3 è triplo per H, che la retta ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) è doppia, e che il cono osculatore nel punto triplo si spezza nei tre piani:

$$x_1 = 0 , \qquad x_2 = 0 , \qquad \varphi_{33} = 0 .$$

Il piano $x_1 = 0$, oltre la retta doppia, contiene le altre due rette di H date da

$$x_1 = 0 , \qquad \varphi_{33} \varphi_{22} - \varphi_{23}^2 = 0 .$$

Così il piano $x_2 = 0$, oltre la retta doppia, contiene le altre due

$$x_2 = 0 \qquad \varphi_{33} \varphi_{11} - \varphi_{13}^2 = 0 .$$

Finalmente il piano $\varphi_{33} = 0$ tocca H lungo le due rette:

$$\varphi_{33} = 0 \qquad x_1 \varphi_{13} - x_2 \varphi_{23} = 0 .$$

Dunque, per il punto, passano 7 rette di H: esse costuiscono la completa intersezione (di 12° ordine) del cono, osculatore in quel punto, con H, giacchè la retta doppia conta 4 volte in quella intersezione, le rette

situate in $\varphi_{33} = 0$ contano ciascuna come due, le altre 4 contano ognuna semplicemente.

11. La rappresentazione piana di H è ovvia e si può ottenere projettando H dal suo punto triplo sopra un piano, non passante per quel punto. La rappresentazione ha sette punti fondamentali di cui due coppie allineate con quello che rappresenta la retta doppia: sia 1 quest'ultimo; (2, 3), (4, 5) le coppie allineate con 1 ; 6 e 7 gli altri due. Tutte le ∞^3 quartiche piane che hanno in 1 un punto doppio, che passano semplicemente per 2, 3, 4, 5 e che in 6, 7 toccano la retta 6 . 7 sono immagini delle sezioni piane della superficie. Le rette 1 . 6 , 1 . 7 sono immagini di altre due rette della superficie che si appoggiano alla retta doppia senza passare per il punto triplo. Indichiamo con r_i la retta di H la cui immagine è i. Tanto in 6, quanto in 7, la rappresentazione ha due punti infinitamente vicini, dunque sulle rette r_6, r_7 esistono altri due punti doppi di H. Le sezioni piane di H, che passano per questi due punti doppi, sono rappresentate dal fascio di quartiche, ognuna delle quali ha 3 punti doppi in 1, 6, 7 e 4 punti semplici in 2, 3, 4, 5. Dunque H possiede altri due punti doppi situati fuori della retta doppia. Non ne esistono altri. Infatti, se un punto doppio P esiste sopra H e giace fuori della retta doppia, esso deve trovarsi sopra una delle rette di H che passano per il punto triplo T. Se giace p. es. sulla retta la cui immagine è 2 , tiriamo il piano tangente a H in un punto Q della suddetta retta distinto da P. La sezione di questo piano è costituita dalla r_2 e poi da una cubica che ha in T un punto doppio e che passa per P e per Q; dunque la r_2 fa ancora parte di questa cubica, cioè il piano suddetto tocca H lungo r_2, il che è impossibile, altrimenti le immagini delle sezioni piane non sarebbero più ∞^3. Dunque il punto doppio P sarà sopra una delle r_6, o r_7. Ma sopra ciascuna ce nè già un altro oltre P e T, essa quindi sarebbe doppia per H, il che è assurdo (Cap. I). Le singolarità di H possono dunque riassumersi così:

« *L'hessiana di una superficie cubica dotata di un punto doppio biplanare è un monoide di 4° ordine, con una retta doppia passante per il punto triplo e con altri due punti doppi fuori della retta doppia. Nel punto triplo concorrono, oltre la retta doppia, altre 6 rette della superficie: due coppie di esse si trovano in due piani passanti per la retta doppia, le altre due giacciono in un piano il quale tocca H lungo entrambe. La superficie possiede almeno altre due rette che si appoggiano alla retta doppia* ».

12. Tutti i punti della retta doppia sono biplanari. La coppia di piani che costituisce il cono osculatore in un punto di quella retta è:

$$x_1^2 \{ (a^2_{133} - a_{113}\, a_{333})\, y_3 \} + x_2^2 \{ (a^2_{233} - a_{223}\, a_{333})\, y_3 \} +$$
$$+ 2\, x_1\, x_2 \{ (a_{123}\, a_{333} - a_{133}\, a_{223})\, y_3 + 2\, a_{333}\, y_4 \} = 0.$$

Dunque: « *La retta doppia contiene due punti uniplanari* » dovuti ai due valori di $\frac{y_3}{y_4}$ per i quali è nullo il discriminante della precedente equazione. Questo discriminante può porsi sotto la forma:

$$a_{333} \begin{vmatrix} a_{311}\, y_3 & a_{312}\, y_3 + a_{333}\, y_4 & a_{313} \\ a_{312}\, y_3 + a_{333}\, y_4 & a_{322}\, y_3 & a_{313} \\ a_{313}\, y_3 & a_{323}\, y_3 & a_{333} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

esso, manifestamente non differisce dal discriminante della quadrica polare di $(0, 0, y_3, y_4)$ che per il fattore a_{333}, il quale per ora supporremo non nullo. Quindi:

« *Sulla retta doppia esistono, oltre il punto triplo, altri due punti la cui quadrica polare, rispetto a S_3, si spezza in due piani e questi due punti sono uniplanari per H* ».

Inoltre si vede facilmente che:

« *Le due rette di H, che non passano per il punto triplo, uniscono ciascuna uno dei punti doppi, che sono fuori della retta doppia, a uno dei punti uniplanari* ».

Da cui segue:

« *Nella rappresentazione piana di H la retta $6 . 7$ è toccata nei punti 6, 7 da due coniche del fascio i cui punti base sono 2, 3, 4, 5* ».

13. Indicando con T il punto triplo, con P_6, P_7 i punti doppi di H che giacciono fuori della retta doppia; con U_{17}, U_{17} i punti uniplanari in modo che sia $r_{16} \equiv P_6 . U_{16}$; $r_{17} \equiv P_7 . U_{17}$ è facile constatare che la corrispondenza fra le rette e i punti doppi di H si stabilisce così,

la retta	r_1	al	punto	T
»	»	r_{16} »	»	P_7
»	»	r_{17} »	»	P_6
»	»	r_6 »	»	U_{17}
»	»	r_7 »	»	U_{16}

Le rette $r_2\, r_3$; $r_4\, r_5$ formano due coppie di sopranumerarie conjugate.

14. Osserveremo un caso particolare di questa H: quello che corrisponde all'ipotesi $a_{333} = 0$. Allora la retta lungo la quale si tagliano i

piani osculatori di S_3 nel punto biplanare, appartiene per intero a S_3 e rappresenta due delle sei rette di S_3 che giacciono nei piani suddetti. H si specializza così:

« *Tutti i punti della retta doppia sono uniplanari* » come risulta subito dall'esame del discriminante (1) del N° 12.

15. Si può ora completare la dimostrazione del teorema del N° 8 (*a*) così enunciato « *H non può mai essere un cono del 4° ordine irriduttibile* ».

Infatti, per le considerazioni allora svolte, tale dimostrazione si riduce ad esaminare se l'H studiata in questo capitolo II può esser un cono non degenere col vertice nel punto triplo.

Ma per la speciale posizione del tetraedro è evidente che se ciò avvenisse, dovrebbe nella (1) del N° 10 mancare la coordinata x_4 e quindi, o mancare questa coordinata anche nell'equazione di S_3, ovvero essere identicamente $\varphi_{33} = 0$. Nel 1° caso S_3 è un cono e H è indeterminata (N° 17); nel 2° caso H degenera in due piani ognuno contato due volte.

III PARTE

Hessiane degeneri.

16. Prima di intraprendere le seguenti ricerche, sopra le hessiane degeneri, è necessario completare il teorema del N° 3 considerando tutti i casi in cui S_3 si spezza. Se S_3 si compone di una quadrica e di un piano secante, la sua equazione potrà scriversi

$$S_3 = x_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = 0 ,$$

da cui

$$H = x_1^2 (-3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = 0 .$$

La quadrica polare del punto (1000) è $x_1^2 = 0$. Se poi il piano che compone S_3 è tangente alla quadrica, allora potremo scrivere $S_3 = x_1 (x_1 x_2 + x_3 x_4)$, da cui $H = x_1^4 = 0$ e ancora la quadrica polare di (1000) è $x_1^2 = 0$. Se finalmente S_3 degenera in tre piani distinti, o coincidenti, H è indeterminata. Dunque:

Se la S_3 è degenere e H non è indeterminata e se esiste un punto, la cui quadrica polare è un piano doppio, la S_3 è composta di un piano e di una quadrica. Se il piano non tocca la quadrica, H è composta di quel piano contato due volte e di un'altra quadrica; se il piano tocca la quadrica, H è quel piano contato 4 volte. In entrambi i casi il punto, la cui quadrica è costituita dal piano contato due volte, è il polo di quel piano rispetto alla quadrica che compone S_3 ».

17. Aggiungeremo anche che se la S_3 fondamentale è un cono (degenere, o no) la H è indeterminata. Perchè basta osservare, che ponendo un vertice del tetraedro fondamentale nel vertice del cono, manca una coordinata nella equazione di S_3 e quindi nella equazione di H (sotto forma di determinante) manca una linea e una colonna.

18. Ammettiamo ora che H sia composta di un piano (che diremo piano hessiano) e di una superficie cubica non degenere. Un caso in cui questa ipotesi è verificata l'abbiamo già notato (N° 3). Se la superficie fondamentale non è degenere e esiste un punto la cui quadrica polare è un piano doppio non passante per il punto, quel piano appartiene ad H e il rimanente di H è un cono cubico col vertice in quel punto. Esaminiamo ora se l'ipotesi ammessa è realizzabile altrimenti. Essa può certo conseguirsi anche nel seguente modo. Supponiamo che una retta di H goda la proprietà che i coni polari dei suoi punti siano coppie di piani tali che nessuna coppia sia formata da piani coincidenti (altrimenti si ricade nel caso già considerato N° 3). Affinchè accada questo, si vede facilmente che gli assi delle infinite coppie non debbono coincidere e che tutte le coppie debbono avere un piano comune. In questo piano gli assi suddetti formano un fascio. Onde esso si staccherà da H. Sia allora $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ la retta suddetta: il piano comune a tutte le coppie che formano le quadriche polari dei punti di quella retta non la conterrà, o la conterrà. Nel primo caso potrà prendersi quel piano per $x_1 = 0$ e quindi la quadrica polare di un punto $(y_1, 0, 0, y_4)$ di $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ sarà:

$$y_1 \left\{ a_{111} x_1^2 + 2 a_{113} x_1 x_2 + 2 a_{113} x_1 x_3 + 2 a_{114} x_1 x_4 \right\} + y_4 a_{411} x_1^2 = 0$$

e quindi

$$a_{122} = a_{133} = a_{123} = a_{124} = a_{134} = a_{422} = a_{433} = a_{444} = a_{423} =$$
$$a_{414} = a_{424} = a_{434} = 0.$$

Ma allora il punto (0001) è uniplanare per S_3; x_1 si stacca due volda H e il rimanente di H è un cono quadrico col vertice in (0001) (N° 16).

Nel 2° caso il piano comune suddetto potrà esser preso per piano $x_2 = 0$ e quindi la quadrica polare di $(y_1, 0, 0, y_4)$ sarà:

$$y_1 \left\{ 2 a_{121} x_1 x_2 + a_{122} x_2^2 + 2 a_{123} x^2 x^3 + 2 a_{124} x_2 x_4 \right\} + y_4 \left\{ 2 a_{421} x_2 x_1 + \right.$$
$$\left. + a_{422} x_2^2 + 2 a_{423} x_2 x_3 + 2 a_{424} x_2 x_4 \right\} = 0$$

onde:

$$a_{111} = a_{113} = a_{114} = a_{133} = a_{144} = a_{134} = a_{433} = a_{434} = a_{444} = 0.$$

Segue che la retta $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, appartiene anche alla S_3 e su di essa esistono due punti (distinti, o coincidenti) tali che le loro quadriche polari si spezzano in coppie di piani i cui assi passano per quei punti stessi. Per ottenerli, basta scrivere l'equazione del piano il quale insieme a $x_2 = 0$ compone la quadrica polare di $(y_1, 0, 0, y_4)$ ed esprimere che il piano suddetto contenga il punto $(y_1, 0, 0, y_4)$ stesso. Si ottiene così l'equazione:

$$a_{112} y_1^2 + 2 a_{124} y_1 y_4 + a_{424} y_4^2 = 0$$

la quale individua due valori del rapporto $\frac{y_1}{y_4}$ e quindi i due punti domandati sopra $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Essi sono evidentemente biplanari per S_3.

19. Prima di esaminare, con maggiori dettagli, questo caso particolare e vedere se la parte residua di H è ulteriormente degenere, è necessario fare le seguenti considerazioni. Nel N° precedente abbiamo veduto come ai punti della retta $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, corrispondessero le rette di un fascio il cui piano passava per la retta suddetta. E così abbiamo trovato due casi in cui da H si stacca un piano: essi si ottengono facendo corrispondere a quel piano un punto, od una retta. Si può ora domandare: a un piano può corrispondere qualche altro elemento che non sia un punto, nè una retta? La risposta dipende dalle seguenti considerazioni. Esista un piano π che faccia parte di H. Escludiamo che i coni polari dei punti di π abbiano il vertice comune, giacchè allora è indubitato che la quadrica polare del vertice è π contato due volte e conosciamo quali particolarità ne seguono per S_3 e per H (N° 3 e 16). Fatta questa esclusione si presentano i due casi seguenti:

1° I coni polari dei punti di π *in generale* non si spezzano in coppie di piani.

2° Tutti i coni polari dei punti π sono formati da coppie di piani.

Tanto nel 1° caso, quanto nel 2°, bisogna avvertire che non debbono esistere quadriche polari formate da piani doppi, altrimenti si ricade nell'ipotesi già considerata, che esista un punto la cui quadrica polare è un piano doppio (N° 3 e 16).

Tenendo presente questa condizione, cominciamo dall'esaminare il primo caso.

a). I vertici dei coni polari dei punti di π costituiranno un luogo L di punti A i cui corrispondenti A' giacciono in π.

Il piano polare di A deve toccare H in A', dunque il piano polare di A è π e siccome A è un qualunque punto di L, così ne viene che L appartiene a tutti i coni polari dei punti di π. Questi coni formano dun-

que una rete particolare che ammette una base L la quale potrà essere una superficie, o una linea. Ma se è una superficie, non può esser altro che un piano comune a tutti i coni, cioè tutti questi coni si spezzano, e si cade nel 2° caso.

Sia dunque L una linea. Dico che è una retta. Infatti, preso un fascio della rete, se i coni del fascio hanno il vertice comune, si tagliano secondo 4 rette (concorrenti in un punto) alle quali deve appartenere la linea L. Ma essa non può esser costituita da più di una di queste rette, perchè se fosse costituita da due, il loro punto d'incontro sarebbe evidentemente vertice comune a tutti i coni, non solo del fascio, ma bensì della rete, il che è stato precedentemente escluso. Se poi i coni del suddetto fascio non hanno il vertice comune, il luogo L è ancora una retta (1). Onde al piano π corrisponde nel 1° caso una retta. E quindi valgono le considerazione svolte al N° 18.

b). Nel 2° caso prendiamo una retta r di π. Le quadriche polari dei suoi punti debbono essere coppie di piani sempre distinti. Bisogna dunque (N° 18) che queste coppie abbiano un piano comune passante per r e siccome r è una qualunque retta di π, si vede subito che questo piano è π. Quindi, in questo caso, la quadrica polare di un punto P qualunque di π è composta di π e di un altro piano variabile che genera al variare di P (in π) una stella il cui centro ha per quadrica polare π^2, onde π appartiene una volta a S_3 e due volte a H [perchè ogni punto la cui quadrica polare si spezza è doppio per H e (anche per il N° 16) π corrisponde a se stesso].

20. Possiamo dunque concludere che, se si richiedono tutte quelle superficie cubiche le cui H sono composte di un piano π e di una ulteriore superficie cubica non degenere, basta esaminare i due casi in cui a π corrisponde un punto, od una retta. Il caso in cui gli corrisponda un punto è già stato esaminato (N^i 3, 16): rimane dunque il caso in cui gli corrisponda una retta. In altre parole: se esistono H composte di un piano e di una superficie cubica, che non è un cono e non è degenere, esse non possono provenire altro che dal caso svolto al N° 18 e che ora vogliamo ulteriormente sviluppare.

21. In virtù di quelle considerazioni (N° 18) e della precedente conclusione, la questione dell'esistenza di un'H composta come sopra si è detto è ridotta allo studio del seguente caso abbastanza semplice:

« La S_3 fondamentale possiede *almeno* un punto biplanare e il piano che deve entrare a costituire H passa per il punto biplanare. Se l'S_3 ha un punto biplanare abbiamo (N° 10)

(1) Bertini e Segre: loc. cit..

$$\left.\begin{aligned} H = 2\, x_1\, x_2\, x_4\, \varphi_{33} - \varphi_{33} \{ x_1^2\, \varphi_{11} + x_2^2\, \varphi_{22} - 2\, x_1\, x_2\, \varphi_{12} \} + \\ + (x_1\, \varphi_{13} - x_2\, \varphi_{23})^2 = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Essa è lineare in x_4. Se si deve staccare un fattor lineare in x_1, x_2, x_3 bisogna che esso sia contenuto nel coefficiente di x_4 e nel termine indipendente da x_4. Dunque: o si stacca φ_{33}, oppure x_1 (o x_2 che è lo stesso).

Supponiamo che si stacchi $\varphi_{33} = 0$, cioè $a_{331}\, x_1 + a_{332}\, x_2 + a_{333}\, x_3 = 0$. Si hanno quindi le condizioni $a_{131} = a_{133} = a_{232} = a_{233} = 0$, onde $\varphi_{33} \equiv x_3 = 0$. Allora è facile constatare che la quadrica polare del punto $(0, 0, 1, -2\, a_{213})$ è $x_3^2 = 0$: dunque (N^i 3, 16) la parte rimanente di H è un cono cubico col vertice in $(0, 0, 1, -2\, a_{213})$. Questo calcolo esclude però che φ_{33} sia diverso da x_1, o da x_2, giacchè allora dovrebbe essere $a_{331}=0$, ovvero $a_{332}=0$. Sia dunque $\varphi_{33} \equiv x_1$, onde si abbia $a_{332} = a_{333} = 0$. Perchè dalla (1) precedente si stacchi x_1, dovrà essere anche $a_{232} = 0$. Quindi indicando con H_3 la parte residua di H, abbiamo:

$$S_3 = x_1\, x_2\, x_4 + a_{111}\, x_1^3 + a_{222}\, x_2^3 + 3\, a_{112}\, x_1^2\, x_2 + 3\, a_{122}\, x_1\, x_2^2 + \\ + 3\, a_{113}\, x_1^2\, x_3 + 3\, a_{133}\, x_1\, x_3^2 + 6\, a_{123}\, x_1\, x_2\, x_3 = 0\,,$$

$$H_3 = \{ x_1\, x_2\, x_4 - 3\, a_{111}\, x_1^3 - 3\, a_{222}\, x_2^3 + 3\, a_{112}\, x_1^2\, x_2 + 3\, a_{122}\, x_1\, x_2^2 + \\ + 3\, a_{113}\, x_1^2\, x_3 + 3\, a_{133}\, x_1\, x_3^2 + 6\, a_{123}\, x_1\, x_2\, x_3 \}\, a_{331} + 3\, a^2_{113}\, x_1^3 = 0$$

Cioè: « *tanto S_3, quanto H_3, hanno lo stesso punto biplanare e ivi gli stessi piani osculatori, e per entrambe, la retta d'intersezione di questi piani rappresenta quattro delle sei rette dell'una e dell'altra che passano per il punto biplanare* ».

Supponiamo ora che φ_{33} sia diverso da x_1 e da x_2 e che dalla (1) si stacchi x_2. Si hanno allora le condizioni:

$$a_{111} = a_{112} = a_{113} = {}_{133} = 0$$

onde:

$$S_3 = x_1\, x_2\, x_4 + a_{222}\, x_2^3 + a_{333}\, x_3^3 + 3\, a_{122}\, x_1\, x_2^2 + 3\, a_{223}\, x_2^2\, x_3 + \\ + 3\, a_{233}\, x_2\, x_3^2 + 6\, a_{123}\, x_1\, x_2\, x_3 = 0\,,$$

$$H_3 = x_1\, x_4\, (a_{332}\, x_2 + a_{333}\, x_3) - (a_{332}\, x_2 + a_{333}\, x_3) \{ 3\, a_{222}\, x_2^2 + \\ + 3\, a_{223}\, x_2\, x_3 - 3\, a_{112}\, x_1\, x_2 - 6\, a_{123}\, x_1\, x_3 \} + 3\, x_2\, (a_{232}\, x_2 + a_{233}\, x_3)^2 = 0.$$

Da cui risulta che tanto S_3 quanto H_3 godono di questa proprietà: « *Ognuna possiede due punti biplanari i quali hanno a comune un piano osculatore, senza che i piani osculatori dei punti biplanari stessi passino per una medesima retta* ».

« *Uno di questi punti biplanari appartiene contemporaneamente a* S_3 *e* H_3 ».

22. Riunendo i resultati dei N[i] precedenti, possiamo dunque affermare che:

« *Le condizioni che debbono essere soddisfatte affinchè un'H sia composta di un piano e di una superficie cubica, in generale non degenere, sono una delle seguenti:*

1ª. *Esiste un punto la cui quadrica polare è un piano doppio non passante per il punto e la* S_3 *fondamentale non è degenere. La rimanente parte di H è un cono cubico col vertice in quel punto.*

2ª. *La* S_3 *fondamentale possiede un punto biplanare tale che, nella retta d'intersezione dei suoi piani osculatori, cadono quattro delle sei rette di* S_3 *che passano per il punto biplanare stesso* ».

3ª. *La* S_3 *fondamentale possiede due punti biplanari i quali hanno un piano osculatore comune senza che i piani osculatori dei punti biplanari stessi formino un fascio* ».

« *In questi due ultimi casi la parte di H, che non è un piano, è una superficie cubica* H_3 *dotata di uguali singolarità della superficie fondamentale, onde a sua volta l'hessiana di* H_3 *si spezza in un piano e in una nuova superficie cubica completamente analoga nelle singolarità e nelle circostanze di singolarità delle due antecedenti* ».

23. Vogliamo ora esaminare, con qualche dettaglio il caso, (*b*) del N⁰ 19 in cui si è ritrovato un esempio, già notato al N⁰ 16, di un H composta di un piano e di una quadrica relativa a una S_3 composta del medesimo piano e di un altra quadrica. Onde si ha:

$$S_3 = x_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = x_1 \; S_2 = 0; \; H = x_1^2 (-3 x_1^2 + \\ + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = x_1^2 \; H_2 = 0.$$

chiamando con S_2 e H_2 le quadriche che compongono S_3 e H.

« *La quadrica-hessiana tocca* S_2 *lungo la intersezione di* S_2 *col piano-hessiano e insieme a* S_2, *al cono tangente comune e al piano suddetto contato due volte, forma un gruppo il cui rapporto anarmonico è* $-\frac{1}{3}$ ».

Inoltre, si verificano facilmente le seguenti proprietà:

« *Il piano hessiano corrisponde a se stesso: mentre un punto percorre questo piano la sua quadrica polare si spezza in due piani di cui uno è fisso e coincide col piano hessiano stesso, l'altro è il piano polare del punto rispetto a entrambe le quadriche onde passa per un punto fisso, polo del piano-hessiano rispetto alle quadriche suddette. Questo punto fisso ha per quadrica polare, rispetto alla* S_3, *il piano-hessiano contato due volte* ». Chiamando conica-hessiana l'intersezione del piano-hessiano con H_2, o con S_2, abbiamo

anche che « *ogni punto della conica hessiana corrisponde alla tangente alla conica in quel punto e le due generatrici di* H_2, *che vi passano, formano una coppia di sopranumerarie conjugate* ».

24. Sia S_2 un cono. Se il vertice giace sopra $x_1 = 0$, H è indeterminata (N° 17): se si trova fuori, avremo:

$$S_3 = x_1 (x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = 0 , \qquad H = x_1^2 (x_1^2 + x_3^2 + x_4^2) = 0.$$

cioè S_3 fa parte della propria H. È questo l'unico caso in cui accade questa singolare coincidenza. Infatti, se S_3 deve appartenere alla propria H, bisogna che H si spezzi in un piano e in una H_3 che non può essere un cono perchè se S_3 è un cono, H è indeterminata (N° 17). Esaminando allora i casi trovati al (N° 21), si vede che, in entrambi H_3 non può coincidere con S_3, senza che S_3 si spezzi in un piano e in una quadrica. Ora, quando S_3 è così composta, l'equazione di H del N° precedente, ci dice appunto che la coincidenza voluta non può avvenire se la quadrica S_2 non è un cono col vertice fuori del piano che insieme a S_2 compone S_3. D'altra parte se S_2 degenerasse in due piani, S_3 sarebbe un cono e quindi H indeterminata.

Dunque:

« *L'unica superficie cubica che appartenga per intero alla propria hessiana, senza che questa hessiana sia indeterminata, è composta di un cono quadrico non degenere e di un piano che non passa per il vertice del cono. L'hessiana è così composta della* S_3 *fondamentale e del piano contato un'altra volta* ».

Le proprietà già esposte relative alle corrispondenze stabilite fra i punti di H, quando S_3 è composta di un piano e di una quadrica si particolarizzano qui molto facilmente. Fra di esse noteremo la seguente:

« *Le generatrici del cono corrispondono a se stesse, cioè mentre un punto percorre una generatrice, il vertice del cono polare di quel punto percorre la stessa generatrice mantenendosi conjugato armonico del suo corrispondente rispetto al vertice del cono e al punto in cui la suddetta generatrice incontra il piano che fa parte di* S_3 *e di* H ».

25. Così abbiamo esaminato i casi possibili in cui un'H è composta di una superficie cubica e di un piano e abbiamo anche trovato un caso in cui essa componevasi di un piano doppio e di una quadrica (§ 23, 24). Conviene ora discutere, nel modo più completo, i casi in cui H contenga una quadrica. Cominceremo quindi dall'osservare che un'H non può esser composta di due quadriche irriduttibili che non siano entrambe coni. Ciò riesce evidente per mezzo delle considerazioni stesse con le quali al N° 8 dimostrammo, che se una superficie rigata irriduttibile era hessiana, bisognava che fosse sviluppabile. Infatti, quelle considerazioni si fondavano

sul teorema che « se un'H non si spezza, a una retta corrisponde un punto, od una retta ». Ma se H è costituita di due quadriche irriduttibili, a una retta corrisponderà ancora una retta, o un punto, giacchè, se le corrispondesse un piano, esso farebbe parte di H e una almeno delle due quadriche che compongono H sarebbe degenere. Dunque se H è composta di due quadriche, una di esse almeno sarà sviluppabile e quindi un cono C. Ma si vede subito che anche l'altra Q deve essere un cono. Giacchè l'unico caso che potrebbe, a prima vista, presentare eccezione sarebbe questo: che a una retta r di Q corrispondesse pure una retta r' di Q e che al punto $r\,r'$ corrispondesse una generatrice g del cono C. Ne seguirebbe che la quadrica polare del vertice di C avrebbe un vertice nel punto $r\,r'$; e poichè questo punto è un qualunque punto di Q, la quadrica polare suddetta sarebbe un piano doppio. Possiamo dunque dire intanto che: l'ipotesi che H sia composta di due quadriche irriduttibili è, *per ora*, ammissibile solamente quando le due quadriche sono due coni.

26. Dimostriamo ora che uno almeno di questi coni deve spezzarsi in due piani. Infatti, ammettiamo che entrambi siano irriduttibili. A una generatrice qualunque non potrà corrispondere altro che un'altra generatrice, ovvero un punto, perchè, se le corrispondesse un piano, esso apparterrebbe ad H e quindi uno dei supposti coni si spezzerebbe.

(a). Ciò premesso, consideriamo dapprima il caso in cui la quadrica polare del vertice V_1 di uno dei coni c_1 non si spezzi. È evidente allora che a non più di una generatrice del cono suddetto può corrispondere un punto, perchè, se ciò accadesse, anche solamente per due generatrici, la quadrica polare di V_1 dovrebbe avere, nei due punti corrispondenti, due vertici, e quindi spezzarsi. E nemmeno a una generatrice g_1 del cono c_1 può corrispondere un'altra retta di H che passi per V_1, altrimenti V_1, punto comune a due sopranumerarie coniugate, avrebbe la quadrica polare che si spezza (N° 4). Finalmente non può g_1 corrispondere a una generatrice g_2 dell'altro cono c_2, perchè la quadrica polare del punto $g_1\,g_2$ dovrebbe spezzarsi in due piani la cui retta comune si appoggerebbe a g_1, g_2 (N° 4). Ora questo non può avvenire, giacchè la retta suddetta apparterrebbe a entrambi i coni e quindi passerebbe per i due vertici, onde la quadrica polare di V_1 avrebbe infiniti vertici negli infiniti punti analoghi a $g_1 \cdot g_2$ e quindi si spezzerebbe. Non rimane altra ipotesi che g_1 corrisponda a sè stessa, ma allora essa appartiene a S_3 [N° 9 (a)] e tutto il cono c_1 fa parte di S_3. Ora se S_3 contiene un cono quadrico, H non è certo costituito da due coni quadrici irriduttibili (N° 24). Escludiamo dunque l'ipotesi che la quadrica polare di V_1 non si spezzi.

(b). Se essa si spezza, sia r la retta comune ai piani che la compongono: la retta r non può passare per V_1, altrimenti V_1 è biplanare per

S_3 ed H non può essere composta come l'ipotesi fatta richiede (cap. II). Quindi r sarà una generatrice del cono c_2 (e il vertice V_2 di c_2 sarà distinto da V_1, altrimenti V_2 è biplanare). Ora se a una generatrice g_1 di c_1 corrisponde un punto, esso si trova certamente sopra r ed è doppio per H (N° 6). Dunque a una generatrice *generica* di c_1 non può corrispondere un punto, altrimenti r è doppia per H e quindi c_2 si spezza in due piani per r. Le corrisponderà una retta g_1', in generale, distinta da g_1, altrimenti c_1 appartiene a S_3 [N° 9 (a)] e H non è costituita come si richiede (N° 24). Neppure accadrà, in generale, che g_1' appartenga a c_1, altrimenti la quadrica polare di V_1 ha nel piano $g_1 g'_1$ una retta doppia e avendone quindi infinite si riduce a un piano doppio che fa parte di H. Non rimane quindi altro caso che, alla g_1 generica, corrisponda una generatrice g_1' di c_2. In questo caso le g_1, g_1' s'incontrano e la quadrica polare del loro punto d'incontro ha una retta doppia che si appoggia ad entrambe ed è generatrice comune ai due coni. Segue che i coni hanno infinite generatrici comuni, cioè coincidono. Ora, si esclude facilmente che un'H possa esser composta di un cono quadrico contate due volte, perchè se la quadrica polare del vertice si spezza, quel punto è biplanare per S_3: se non si spezza si può ripetere il ragionamento (a) di questo N. e trarne la conclusione della impossibilità che H sia così costituita. Possiamo quindi affermare che:

« *Se un'H è composta di due quadriche, una almeno di esse deve spezzarsi in due piani* ».

Ora questo modo di composizione di H discenderà come caso particolare da quelli nei quali H è composta di un piano e di una superficie cubica (N. 22). Basterà dunque discutere separatamente i tre casi di quel N.

27. — 1° « Esiste un punto la cui quadrica polare è un piano doppio ». Se questo piano passa per il punto, abbiamo un primo esempio che risponde all'ipotesi fatta. *H è composta di quel piano contato due volte e di un cono quadrico col vertice in quel punto* (N. 3). Se non passa per il punto, l'equazione di S_3 può scriversi:

$$S_3 = a_{444}\, x_4^3 + \varphi = 0$$

dove φ è una ternaria cubica in x_1, x_2, x_3. Indicando con H_φ l'hessiana di questa ternaria, si trova:

$$H = x_4\, H_\varphi = 0\,.$$

Se da H_φ deve staccarsi un piano, esso deve pure staccarsi da φ (1) e allora potremo scrivere

$$S_3 = a_{444}\, x_4^3 + x_1\,(a_{111}\, x_1^2 + a_{122}\, x_2^2 + a_{133}\, x_3^2) = 0\,,$$

$$H = x_4\, x_1\,(-3\, a_{111}\, x_1^2 + a_{122}\, x_2^2 + a_{133}\, x_3^2) = 0\,.$$

La quadrica polare di un qualunque punto $(0, y_2, y_3, 0)$ della retta $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ è

$$x_1 \{ a_{122} x_2 y_2 + x_{133} x_3 y_3 \} = 0 .$$

Cioè alla retta suddetta corrisponde il piano $x_1 = 0$. Essa contiene due punti biplanari per S_3 corrispondenti ai due valori di $\frac{y_2}{y_3}$ per i quali: $a_{122} y_2^2 + a_{133} y_3^2 = 0$. Questi punti non possono essere riuniti, a meno che $a_{122} = 0$, ovvero $a_{133} = 0$, ma allora S_3 è un cono e quindi H indeterminata (17). Inoltre, si vede subito che questi punti biplanari hanno a comune un piano osculatore senza che i piani osculatori dei punti stessi passino per una medesima retta: dunque questo caso deve discendere dal 3° del N° 22 e lo tratteremo insieme agli altri che ci fornirà quell'ipotesi (N° 30).

28. Prima di trattare il 2° e il 3ª caso del N° 22, faremo la seguente osservazione che vale per entrambi. Se si rappresenta con H_3 la superficie cubica che compone H, in quei due casi, si ha

$$H_3 = x_1 x_2 x_4 + \varphi = 0.$$

Se H_3 deve degenerare in un piano $u_x = 0$ e in una quadrica $a^2_x = 0$, sarà identicamente

$$x_1 x_2 x_4 + \varphi = u_x a^2_x = 0 ,$$

e allora confrontando i coefficienti di x_4 si trova che x_4 non può comparire in u_x se a^2_x non si spezza, il che per ora escludiamo. Dunque il piano che costituisce parte di H_3 deve passare per il punto biplanare.

29. Allora, nella seconda delle ipotesi del N° 22, abbiamo

$$S_3 = x_1 x_2 x_4 + a_{111} x_1^3 + a_{222} x_2^3 + 3 a_{112} x_1^2 + 3 a_{122} x_1 x_2^3 +$$
$$+ 3 a_{113} x_1^2 x_3 + 3 a_{133} x_1 x_3^2 + 6 a_{123} x_1 x_2 x_3 = 0 ,$$
$$H_3 = \{ x_1 x_2 x_4 - 3 a_{111} x_1^3 - 3 a_{222} x_2^3 + 3 a_{112} x_1^2 x_2 + 3 a_{122} x_1 x_2^2 +$$
$$+ 3 a_{113} x_1^2 x_3 + 3 a_{133} x_1 x_3^2 + 6 a_{123} x_1 x_2 x_3 \} a_{331} + 3 a^2_{113} x_1^3 = 0$$

(1) Con considerazioni geometriche semplicissime, si vede che se l'hessiana di una cubica piana si compone di una retta e di una conica, anche la curva fondamentale è costituita di quella retta e di un'altra conica.

e, per l'osservazione del N° 28, da H_3 non può staccarsi che x_1, o x_2. Se da H_3 si stacca x_1, si ha $a_{222} = 0$ e si trova S_3 costituita da un piano e da una quadrica. H è composta di quel piano contato due volte e di un'altra quadrica che coincide con la quadrica che compone S_3, quando quest'ultima quadrica è un cono. Se da H_3 si deve staccare x_2, si trova necessariamente $a_{331} = 0$ e quindi H costituita da un piano contato 4 volte, il che non risponde a quel che cerchiamo.

30. Nella 3ª ipotesi del N° 22 si ha:

$$S_3 = x_1 x_2 x_4 + a_{222} x_2^3 + a_{333} x_3^3 + 3 a_{122} x_1 x_2^2 + 3 a_{223} x_2 x_3 +$$
$$+ 3 a_{233} x_2 x_3^2 + 6 a_{123} x_1 x_2 x_3 = 0$$
$$H_3 = x_1 x_4 (a_{332} x_2 + a_{333} x_3) -$$
$$- (a_{332} x_2 + a_{333} x_3) \{ 3 a_{222} x_2^2 + 3 a_{223} x_2 x_3 - 3 a_{122} x_1 x_2 -$$
$$- 6 a_{123} x_1 x_3 \} + 3 x_2 (a_{223} x_2 + a_{223} x_3)^2 = 0$$

e l'H di S_3 è così composta di H_3 e di $x_2 = 0$. Per l'osservazione del N° 28, da H_3 si staccherà o $x_1 = 0$, oppure $a_{332} x_2 + a_{333} x_3 = 0$, ovvero $x_2 = 0$, o finalmente $x_3 = 0$.

Se si stacca $x_1 = 0$, si hanno le condizioni $a_{222} = a_{223} = 0$ e

$$H = x_1 x_2 x_3 (a_{333} x_4 + 3 a_{122} a_{333} x_2 + 6 a_{123} a_{333} x_3) = 0$$

onde H è composta di 4 piani.

Se si stacca $a_{232} x_2 + a_{333} x_3 = 0$, o $x_3 = 0$, si hanno le condizioni:

$$a_{223} = a_{233} = 0$$

e quindi

$$S_3 = x_1 x_2 x_4 + a_{222} x_2^3 + a_{333} x_3^3 + 3 a_{122} x_1 x_2^2 + 6 a_{123} x_1 x_2 x_3 = 0 ,$$
$$H = x_2 x_3 a_{333} \{ x_4 x_1 - 3 a_{222} x_2^2 + 3 a_{122} x_1 x_2 + 6 a_{123} x_1 x_3 \} = 0$$

cioè H composta di due piani e di un cono quadrico col vertice in uno di questi piani. Il punto $(0, 0, 1, -6 a_{123})$ ha per quadrica polare $x_3^2 = 0$.

Se finalmente si stacca $x_2 = 0$, deve essere necessariamente $a_{333} = 0$, cioè x_2 fa parte anche di S_3 e quindi H è costituita di un piano doppio e di una quadrica.

31. Riunendo i risultati dei N^i 27, 28, 29, 30, possiamo ora affermare che:

« *Le condizioni che debbono essere soddisfatte perchè un cono quadrico faccia parte di un'H sono una delle seguenti :*

1°. *La S_3 ha un punto uniplanare di 1ª specie. H è composta del piano osculatore in quel punto, contato due volte, e di un cono col vertice nel punto* (Nⁱ 3, 27).

2°. *La S_3 è composta di un piano e di un cono che ha il vertice fuori del piano. H si compone di S_3 e del piano contato un'altra volta* (Nⁱ 24, 29).

3°. *La S_3 possiede le medesime singolarità che al* (N° 22, 3ª) *(cioè ha due puuti biplanari con un piano osculatore comune senza che i piani osculatori dei suddetti puuti passino per una medesima retta): inoltre esiste un punto che ha per quadrica polare un piano doppio non passante per il punto stesso. H si compone di due piani e di un cono quadrico col vertice in uno di questi piani* (Nⁱ 27, 30 ».

E finalmente:

a). « *L'unico caso in cui una quadrica propria entri a far parte di una hessiana, si ottiene quando la S_3 fondamentale è costituita di una quadrica propria e di un piano che non le è tangente. H è costituita di questo piano contato due volte e di un'altra quadrica* » (Nⁱ 23, 29, 30).

32. Passiamo ora alle H composte di quattro piani. Esse debbono ottenersi come casi particolari di quelli enumerati ai Nⁱ 22 e 31. I casi in cui i 4 piani sono tutti distinti discenderanno da quelli più generali 1°, 2°, 3° del N° 22, e dal 3° del 31 e poichè l'esame del 2° e del 3° del N° 22 si riduce all'esame del 3° del N° 31, non rimane che discutere il 1° del 22 e il 3° del 31.

Nel 1° del N° 22, conseguiremo H composta di 4 piani quando H_φ (N° 27) si spezza in tre piani. Onde ponendo $H_\varphi = x_1 x_2 x_3 = 0$, avremo:

$$S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0 ,$$
$$H = x_1 x_2 x_3 x_4 = 0 .$$

S non possiede punti doppi ed è così caratterizzata:

« *Esistono 4 punti le cui quadriche polari sono formate ognuna da un piano doppio* ».

Nel 3° del N° 31 si trova (N° 30):

$$S_3 = x_3^3 + x_1 x_2 x_4 + 3 a_{122} x_2 + 6 a_{123} x_3 = 0$$

o, con una semplicissima trasformazione di coordinate:

$$S_3 = x_1 x_2 x_3 + x_4^3 = 0 , \qquad H = x_1 x_2 x_3 x_4 = 0 .$$

« *La S_3 possiede 3 punti biplanari* ». Essi sono di 3ª specie e hanno a due, a due, a comune un piano osculatore.

Abbiamo così trovato due casi in cui H è composta di 4 piani distinti: si vede facilmente che, se essi debbono rimanere distinti, non possono possedere neanche un punto comune a tutti. Infatti, o si avrebbe un punto la cui quadrica polare è un piano doppio passante per il punto e allora quel piano farebbe parte di H non più come semplice, ma come doppio (N° 3), ovvero due dei suddetti punti biplanari sarebbero infinitamente vicini. Ma poichè essi sono di 3ª specie, si vede subito che, quando si avvicinano indefinitamente, dànno luogo a un punto uniplanare e allora il piano osculatore contato due volte fa parte di H.

33. Tutti i casi in cui, fra i 4 piani che costituiscono H, ce n'è uno doppio proverranno dunque da quelli segnati 1°, 2°, (a) del N° 31. Il 2° si esclude perchè il cono quadrico che fa parte di H non si spezza in due piani finchè non si spezzi in due piani il cono che fa parte di S_3 (N° 24) e allora H è indeterminata (N° 17). Per le stesse ragioni si esclude (a). Dunque i casi, che ci rimangono a esaminare, provengono da una S_3 dotata di punto uniplanare e della quale l'equazione può scriversi:

$$x_1^2 x_4 + \varphi = 0 \tag{1}$$

dove φ è la solita ternaria cubica in $x_1\ x_2\ x_3$.

34. Ora, nella (1) precedente, la binaria cubica:

$$a_{222} x_2^3 + 3 a_{223} x_2^2 x_3 + 3 a_{233} x_2 x_3^2 + a_{333} x_3^3$$

potrà porsi sotto l'una, o l'altra delle due forme seguenti:

$$a_{222} x_2^3 + a_{333} x_3^3 \quad , \quad 3 a_{323} x_2^2 x_3 .$$

La prima (in cui può anche essere $a_{222} = 0$, ovvero $a_{333} = 0$) comprende i casi in cui il punto uniplanare sia di 1ª o di 3ª specie, la 2ª è relativa al punto uniplanare di 2ª specie.

Assumendo la 1ª si trova:

$$\left.\begin{aligned} H = x_1^2 \{ (a_{221} a_{331} - a^2_{123}) x_1^2 + a_{221} a_{331} x_1 x_3 + \\ + a_{331} a_{222} x_1 x_2 + a_{222} a_{333} x_2 x_3 \} = x_1^2 H_2 = 0 . \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Se H_2 si spezza in pue piani, sarà $a_{222} = 0$, ovvero $a_{333} = 0$, oppure:

$$a_{221} a^2_{331} - a_{221} a_{331} a_{333} + a^2_{123} a_{333} = 0.$$

« *Nei primi due casi il punto uniplanare è di 3ª specie, cioè la sezione del piano osculatore con S_3 è costituita da tre rette coincidenti. H è composto di tre piani coincidenti e di un 4° distinto* ».

Questo piano può essere riunito agli altri tre quando, alle condizioni già trovate $a_{222} = a_{223} = a_{233} = 0$, si aggiunga $a_{122} = 0$, ovvero $a_{331} = 0$. Se si aggiunge $a_{221} = 0$, si ottiene la superficie di 2ª specie (cioè quella che ha coincidenti le direttrici rettilinee). Se invece si aggiunge $a_{331} = 0$, la S_3 non acquista per questo altri punti singolari e potrebbe caratterizzarsi così: « In una S_3 dotata di un punto uniplanare P esiste un punto Q distinto *in generale* da P, la cui quadrica polare è un piano doppio. Se Q coincide con P, si ottiene la specie corrispondente ad $a_{331} = 0$.

Se finalmente:

$$a_{221}\, a^2_{331} - a_{221}\, a_{333}\, a_{331} + a^2_{123}\, a_{333} = 0$$

H_2 si compone di due piani i quali, quando coincidessero con $x_1 = 0$, ci riporterebbero ai casi precedentemente trattati. Assumendoli per piani $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ avremo: $a_{331} = a_{123} = 0$. Allora si vede facilmente che esistono due punti, ognuno dei quali ha per quadrica polare uno di questi piani contato due volte. La forma della equazione di H ci dice che la retta d'intersezione di questi due piani giace fuori di $x_1 = 0$, e che essi non possono coincidere fra loro, finchè i piani fondamentali $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ hanno la posizione assegnata al principio di questo N°, cioè finchè il punto uniplanare è di 1ª, o di 3ª specie.

35. Sia il punto uniplanare di 2ª specie, cioè la sua sezione sopra S_3 sia composta di 3 rette di cui due sono riunite.

Allora prendendo

$$a_{222} = a_{333} = a_{233} = 0\,,$$

avremo:

$$H = x_1^2 \left\{ x_1^2 (a_{221}\, a_{331} - a^2_{123}) - 2\, a_{331}\, a_{223}\, x_1\, x_2 + a_{223}\, a_{331}\, x_1\, x_3 - \right.$$
$$\left. - a^2_{223}\, x_2^2 \right\} = x_1^2\, H_2 = 0.$$

Se H_2 si spezza, deve essere $a_{223} = 0$, oppure $a_{331} = 0$. Nel 1° caso S_3 è composta di una quadrica e di un suo piano tangente. H è composta di quel piano contato 4 volte.

Nel 2° caso S_3 è rigata di 1ª specie (con le direttrici rettilinee distinte). H è composta di due piani doppi. — E quindi possiamo anche dire che:

« *Se l'hessiana di una superficie cubica è composta di due piani doppi distinti, la superficie fondamentale è rigata con le direttrici rettilinee distinte* ».

Il qual teorema si rende evidente anche mediante la seguente osser-

vazione: Se H deve essere composta di due piani doppi distinti, essa deve possedere due punti uniplanari distinti (N° 33) situati sulla retta d'intersezione di quei piani. Un punto qualunque di questa retta è doppio per la quadrica polare dell'uno e dell'altro dei punti uniplanari (N° 3), dunque la quadrica polare di quel punto si spezza: ma la intiera suddetta retta appartiene a S_3, quindi quel punto è doppio, tutta la retta è doppia e S_3 è rigata (1).

36. Il quadro seguente riassume i risultati ottenuti nei N^i precedenti comprendendo tutti i casi in cui un'H può degenerare senza essere indeterminata. La notazione P_q^2 indica un punto la cui quadrica polare è un piano doppio q non passante per il punto.

---

(1) Relativamente a queste superficie sono forse meritevoli di nota le seguente osservazioni: La direttrice rettilinea semplice incontra i piani hessiani in due punti tali che la quadrica polare di uno di essi P è costituita da un piano passante per P e dal piano hessiano che non passa per P. — P è dunque un punto di Eckardt. Quindi:

« *In una superficie cubica rigata generale, le due omologie armoniche di ciascuna delle quali è centro il punto d'incontro della direttrice rettilinea semplice con un piano hessiano e piano di omologia l'altro piano hessiano, trasformano in sè stessa la superficie* ».

Oppnre:

« *Ogni superficie cubica rigata generale è trasformabile projettivamente e in due modi diversi in superficie simmetrica* ».

S'intende che fanno eccezione quelle superficie rigate che hanno coincidenti le due direttrici rettilinee.

- **H degeneri**
  - **H composte di un piano di una superficie cubica H_3** (n. 22)
    - **H_3 è propria .**
      - 1.° S_3 possiede un punto biplanare di 3ª specie. H è composta del piano che ha comuni con S_3 tre rette infinitamente vicine e di una H_3 analoga a S_3.
      - 2.° S_3 possiede due punti biplanari i quali hanno un piano osculatore comune senza che i tre piani osculatori passino per una stessa retta. H è composta del piano osculatore comune e di una H_3 analoga a S_3.
    - **H_3 è un cono**
      - 3.° Esiste un punto P_q^2. H è composta del piano q e di un cono cubico di vertice P_q^2.
  - **H composte di due piani e di una quadrica H_2** (n. 31) .
    - **H_2 è propria .**
      - 1.° S_3 è composta di una quadrica propria e di un piano secante. H è composta di quel piano e di un'altra quadrica.
    - **H_2 è un cono**
      - 2.° S_3 possiede due punti biplanari i quali hanno un piano osculatore comune senza che i tre piani osculatori passino per una stessa retta. Inoltre esiste un punto P_q^2. H è composta del piano q, del piano osculatore comune e di un cono col vertice in quest'ultimo.
      - 3.° S_3 possiede un punto uniplanare di 1ª specie. H è composta del piano osculatore doppio e di un cono col vertice nel punto uniplanare.
      - 4.° S_3 è composta di un cono quadrico e di un piano non passante per il vertice. H è composta di S_3 e del piano contato un'altra volta.
  - **H composte di 4 piani** (n. 32, 33, 34, 35). . . . . .
    - **4 piani distinti**
      - 1.° Esistono 4 punti P_q^2. H è costituita dal tetraedro di quei punti.
      - 2.° S_3 possiede 3 punti biplanari. H è composta dei piani osculatori e del piano dei tre punti biplanari.
    - **Un piano doppio e due distinti**
      - 3.° S_3 possiede un punto uniplanare di 1ª specie ed esistono due punti P_q^2. H è composta del piano osculatore doppio e dei due piani q.
    - **Due piani doppi.**
      - 4.° S_3 è rigata con le direttrici rettilinee distinte. H è composta dei due piani osculatori doppi nei due punti uniplanari.
    - **Un piano triplo e uno semplice**
      - 5.° S_3 possiede un punto uniplanare di 3ª specie ed esiste un punto P_q^2. H è composta del piano osculatore contato tre volte e del piano q.
    - **Un piano quadruplo . . .**
      - 6.° S_3 è rigata con le direttrici rettilinee coincidenti. H è costituita dal piano osculatore, nel punto uniplanare, contato 4 volte.
      - 7.° S_3 ha un punto uniplanare di 3ª specie e non esistono punti P_q^2. H è costituita dal piano osculatore nel punto uniplanare contato 4 volte.
      - 8.° S_3 è composta di una quadrica e di un suo piano tangente. H è costituita dal piano tangente contato 4 volte.

SOPRA QUELLE SUPERFICIE CUBICHE
LE QUALI SI POSSONO RIGUARDARE COME PARTI
DELLA HESSIANA DI UN'ALTRA SUPERFICIE CUBICA.

[*Rendic. Istit. Lomb. 1894*].

1. È noto che una binaria quadratica può considerarsi come hessiana di infinite binarie cubiche, e che una cubica piana generale può considerarsi come hessiana di tre altre cubiche. Nello spazio a tre dimensioni, si può presentare, per analogia, il problema di determinare quali sono le superficie del 3° ordine che possono riguardarsi come parti dell'hessiana di un'altra superficie del 3° ordine. La presente Nota ha per scopo principale la risoluzione di questo problema (n. 11) e l'esame della corrispondenza che viene a stabilirsi punto, a punto, sopra ogni superficie trovata, in virtù della sua qualità di hessiana (n. 14).

2. Siccome le superficie che risolvono il problema posseggono, come vedremo, due punti biplanari, così ci è necessario premettere qualche loro proprietà di cui, in seguito, ci serviremo.

Sia dunque S_3 una superficie cubica dotata di *due soli* punti biplanari. Allora si riconosce facilmente che:

(*a*) La intersezione dei piani osculatori di uno stesso punto biplanare non può coincidere con la retta che passa per entrambi i punti biplanari finchè questi rimangono a distanza finita fra loro.

(*b*) I punti biplanari hanno necessariamente un piano osculatore a comune.

3. Chiamando *piano osculatore principale* quello comune ai due punti biplanari, e *piani osculatori secondari* gli altri due, la proprietà (*a*) si esprime anche dicendo che il piano osculatore principale e i due secondari costituiscono un triedro il quale non può degenerare in un fascio di piani. Assumendone le faccie come tre piani di riferimento, individueremo il te-

traedro fondamentale così: il piano osculatore principale per faccia $x_2 = 0$, i due secondari per faccie $x_1 = 0$, $x_4 = 0$; la faccia $x_3 = 0$ sia un qualunque piano passante per i due punti biplanari (diverso s'intende da quello già assunto per $x_2 = 0$). Allora, le coordinate dei punti biplanari stessi sono (0001), (1000); $x_1 x_2$ è la quadrica polare del 1^0, $x_2 x_4$ è la quadrica polare del 2^0 e l'equazione della nostra superficie è:

$$\left.\begin{aligned} S_3 = 6\, a_{124}\, x_1 x_2 x_4 + a_{222}\, x_2^3 + 3\, a_{223}\, x_2^2 x_3 + \\ + 3\, a_{233}\, x_2 x_3^2 + a_{333}\, x_3^3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

alla quale possono darsi anche le altre due forme, a noi ugualmente utili:

$$6\, a_{124}\, x_1 x_2 x_4 + 6\, a_{134}\, x_1 x_3 x_4 + 3\, a_{223}\, x_2^2 x_3 + 3 a_{233}\, x_2 x_3^3 = 0 \quad (2)$$

$$6\, a_{124}\, x_1 x_2 x_4 + 6\, a_{134}\, x_1 x_3 x_4 + a_{222}\, x_2^3 + a_{333}\, x_3^3 = 0. \quad (3)$$

Basta per questo riferire la binaria

$$a_{222}\, x_2^3 + 3\, a_{223}\, x_2^2 x_3 + 3\, a_{233}\, x_2 x_3^2 + a_{333}\, x_3^3$$

contenuta nella (1), a due dei suoi elementi, o al suo gruppo hessiano.

4. Da queste equazioni risulta: il piano osculatore principale ha a comune con la superficie tre rette infinitamente vicine; ciascun piano osculatore secondario la taglia secondo tre rette, in generale, distinte concorrenti nel punto biplanare contenuto in quel piano. La superficie possiede in tutto 7 rette. Inoltre: ogni punto della retta che passa per i punti biplanari, gode della proprietà che la sua quadrica polare è composta di due piani, di cui uno fisso e passante per quella retta (il piano osculatore principale), l'altro variabile. Viceversa, se una retta giacente sopra una superficie cubica, è tale che la quadrica polare di ogni suo punto sia costituita da una coppia di piani, di cui uno è fisso e passante per la retta e l'altro variabile; la superficie possiede sopra quella retta due punti biplanari distinti (o anche infinitamente vicini N^i 5 e 6). Infatti, sia $a^3_x = 0$ l'equazione di una superficie cubica generale, prendiamo la retta suddetta per lato $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, del tetraedro di riferimento; scriviamo la quadrica polare di un suo punto $(0, 0, y_3, y_4)$ e supponiamo che se ne stacchi il piano $x_1 = 0$, qualunque siano y_3, y_4. Si trova che deve essere:

$$a_{322} = a_{422} = a_{233} = a_{433} = a_{344} = a_{444} = a_{323} = a_{423} = a_{424} = 0$$

e la quadrica polare diviene:

$$x_1 \{ x_1 (a_{311}\, y_3 + a_{411}\, y_4) + 2\, x_2 (a_{312}\, y_3 + a_{412}\, y_4) +$$
$$+ 2\, x_3 (a_{313}\, y_3 + a_{413}\, y_4) + 2\, x_4 (a_{314}\, y_3 + a_{414}\, y_4) \} = 0.$$

Esprimiamo ora la condizione perchè il piano diverso da x_1, che compone questa quadrica, passi per il polo $(0\ 0\ y_3\ y_4)$. Otterremo così:

$$a_{313}\, y_3^2 + 2\, a_{314}\, y_3\, y_4 + a_{414}\, y_4^2 = 0. \tag{4}$$

I due punti, sopra $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, individuati dai valori del rapporto $\frac{y_3}{y_4}$ che sono radici di questa equazione, sono evidentemente due punti biplanari per la nostra superficie S_3.

5. Supponiamo che questi due punti si avvicinino indefinitamente (muovendosi sulla retta comune che terremo fissa) a una posizione limite comune che assumeremo per vertice (0001) del tetraedro di riferimento. Basta perciò aggiungere, alle condizioni già imposte nel precedente N°, le altre due: $a_{314} = a_{414} = 0$, per le quali la precedente equazione di 2° grado viene ad avere due radici uguali, appunto in (0001): prendiamo inoltre il piano

$$a_{411}\, x_1 + a_{412}\, x_2 = 0$$

per piano $x_2 = 0$. Allora, la quadrica polare di (0001) è $x_1\, x_2$ e l'equazione di S_3 diviene:

$$\left.\begin{aligned} &6\, a_{124}\, x_1\, x_2\, x_4 + a_{111}\, x_1^3 + a_{222}\, x_2^3 + 3\, a_{112}\, x_1^2\, x_2 \\ &+ 3\, a_{122}\, x_1\, x_2^2 + 3\, a_{113}\, x_1^2\, x_3 + 3\, a_{133}\, x_1\, x_3^2 + 6\, a_{123}\, x_1\, x_2\, x_3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

dalla quale si vede che il punto biplanare (0001), in cui si sono riuniti i due punti biplanari del caso procedente, gode della proprietà che la intersezione dei suoi piani osculatori rappresenta 4 delle 6 rette che passano per un punto doppio di una superficie cubica e sono in generale distinte. Ma è noto che l'intersezione dei piani osculatori di un qualunque punto biplanare di una superficie del terzo ordine, non può rappresentare più di quattro delle sei rette in discorso. Dunque il punto biplanare della (5) è della specie la più elevata possibile. D'altra parte, se una superficie del terzo ordine possiede un punto biplanare di questa specie, si vede subito che la sua equazione può porsi sotto la forma (5). Dunque:

Ogni superficie del terzo ordine dotata di un punto biplanare della specie più elevata possibile, può sempre riguardarsi come il caso limite di un'altra superficie cubica con due punti biplanari infinitamente vicini.

6. Per esaminare meglio questo passaggio al limite, riprendiamo la (4) del N° 5 e supponendo sempre i due punti biplanari a distanza finita fra loro, collochiamo in uno di essi P_1 il vertice (0001) del tetraedro fondamentale: perciò basta fare $a_{414} = 0$. Le coordinate dell'altro punto biplanare P_2 sono $(0,\ 0,\ 2\, a_{314},\ -a_{313})$ e quelle dal punto Q comune ai tre piani osculatori sono date da:

$$Q \equiv (0,\ -a^2_{314},\ a_{412}\, a_{314},\ a_{312}\, a_{314} - a_{412}\, a_{313}).$$

Ma quando P_2 tende a P_1, lungo la $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, a_{314} tende a zero. Le coordinate di Q mostrano che anche Q tende a P_1 nella direzione $P_1 P_2$. Dunque, mentre il punto biplanare P_2 tende indefinitamente a P_1, anche il punto Q comune ai piani osculatori tende a P_1 lungo la retta $P_1 P_2$ e quindi le intersezioni dei piani osculatori nei punti P_1, P_2 (cioè le rette $P_1 Q$, $P_2 Q$) tendono a cadere sulla congiungente $P_1 P_2$.

È così completata la proposizione [2 (*a*)] e giustificata la restrizione ivi fatta.

Dunque, d'ora innanzi potremo sostituire alla denominazione e al concetto di *un punto biplanare della specie più elevata possibile,* la denominazione e il concetto di *due punti biplanari infinitamente vicini, o coincidenti.*

7. La (5) del N° 5 può semplificarsi così. Tralasciamo i coefficienti binominali e applichiamole la omografia:

$$x_1 \equiv y_1, \quad x_2 \equiv y_2, \quad x_3 \equiv y_3, \quad x_4 + a_{112}\, x_1 + a_{122}\, x_2 + a_{133}\, x_4 \equiv y_4.$$

Si trova:

$$S_3 = y_1\, y_2\, y_4 + a_{111}\, y_1^3 + a_{222}\, y_2^3 + a_{113}\, y_1^2\, y_3 + a_{133}\, y_1\, y_3^2 = 0\,,$$

la quale è identica con

$$a_{133}\, y_1\, y_2\, y_4 + y_1 \left\{ a_{133}\, y_3 + \frac{a_{113}}{2}\, y_1 \right\}^2 + \left(a_{111}\, a_{133} - \frac{a^2_{113}}{4} \right) y_1^3 +$$
$$+ a_{222}\, a_{133}\, y_2^3 = 0.$$

Si noti qui che $a_{133} \neq 0$, altrimenti la retta $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ è doppia e S_3 rigata. Ora applichiamo l'altra omografia:

$$y_1 \equiv x_1, \quad y_2 \equiv x_2, \quad a_{133}\, y_3 + \frac{a_{113}}{2}\, y_1 \equiv x_3, \quad y_4 \equiv x_4$$

e troveremo la nostra equazione sotto la forma voluta:

$$6\, a_{124}\, x_1\, x_2\, x_4 + 3\, a_{133}\, x_1\, x_3^2 + a_{111}\, x_1^3 + a_{222}\, x_2^3 = 0. \qquad (6)$$

8. Premesse queste proprietà fondamentali, dalle conclusioni della mia ultima nota *Sopra le hessiane delle superficie cubiche* (1), risulta che se una superficie cubica non degenere H_3 deve far parte dell'hessiana di un'altra superficie cubica S_3, la H_3 possiede *necessariamente* due punti biplanari distinti, o coincidenti. — Viceversa: una qualunque superficie cubica do-

(1) R. Istituto Lombardo. — *Rendiconti,* Serie II, Vol. XXVI, p. 557.

tata di due punti biplanari (distinti, o non) potrà sempre riguardarsi come parte della hessiana di un'altra superficie cubica? La risposta è affermativa e dipende, in modo semplicissimo, dal calcolo delle hessiane delle superficie in discorso.

9. Sia dapprima una S_3 con due punti biplanari distinti. Assumiamo per la sua equazione la (3) del N° 3:

$$S_3 = 6\, a_{124}\, x_1\, x_2\, x_4 + 6\, a_{134}\, x_1\, x_3\, x_4 + a_{222}\, x_2^3 + a_{333}\, x_3^3 = 0\,.$$

La sua hessiana si compone del piano osculatore principale e della superficie:

$$H_3 = -\,2\, a^2_{124}\, a_{333}\, x_1\, x_3\, x_4 - 2\, a^2_{134}\, a_{222}\, x_1\, x_2\, x_4 +$$
$$+\, a_{124}\, a_{222}\, a_{333}\, x_2^2\, x_3 + a_{134}\, a_{222}\, a_{333}\, x_2\, x_3^2 = 0\,.$$

Noi supporremo che H_3 non si spezzi e quindi necessariamente ammettiamo che nessuno dei coefficienti di S_3 sia zero.

Indicando con A_{ikk} i coefficienti di H_3 abbiamo:

$$H_3 = 6\, A_{134}\, x_1\, x_3\, x_4 + 6\, A_{124}\, x_1\, x_2\, x_4 + 3\, A_{223}\, x_2^2\, x_3 + 3\, A_{223}\, x_2\, x_3^2 = 0\,.$$

Ora la forma di questa equazione è generale per una superficie dotata di due punti biplanari distinti (vedi la (2) del N° 3); dunque, per il nostro scopo, basta far vedere che, dalle relazione seguenti, le quali legano le a alle A, si possono ricavare in modo unico, i rapporti delle a espressi per le A. Queste relazioni sono:

$$3\, A_{134} = -\, a^2_{124}\, a_{333}\ ,\ 3\, A_{124} = -\, a^2_{134}\, a_{222}\,,$$
$$3\, A_{223} = a_{124}\, a_{222}\, a_{333}\ ,\ 3\, A_{233} = a_{134}\, a_{222}\, a_{333}\,,$$

da cui:

$$\frac{a_{134}}{a_{124}} = \frac{A_{233}}{A_{222}}\,,\ \frac{a_{222}}{a_{124}} = -\,\frac{A_{223}}{A_{134}}\,,\ \frac{a_{333}}{a_{124}} = -\,\frac{A^2_{233}}{A_{223}\, A_{324}}\,.$$

Se dunque si prendono i coefficienti di S_3 come sono dati da queste equazioni, l'H_3 di S_3 sarà:

$$H_3 = 6\, A_{124}\, x_1\, x_2\, x_4 + 6\, A_{134}\, x_1\, x_3\, x_4 + 3\, A_{223}\, x_2^2\, x_3 + 3\, A_{233}\, x_2\, x_3^2 = 0$$

dove le A sono arbitrarie.

10. Se i punti biplanari di S_3 sono coincidenti, la sua equazione può assumersi come la (6) del N° 7:

$$S_3 = 6\, a_{124}\, x_1\, x_2\, x_4 + 3\, a_{133}\, x_1\, x_3^2 + a_{111}\, x_1^3 + a_{222}\, x_2^3 = 0\,.$$

L'hessiana è composta del piano osculatore principale $x_1 = 0$ e della superficie:

$$H_3 = 2\, a_{124}\, x_1\, x_2\, x_4 + a_{133}\, x_1\, x_3^2 - a_{111}\, x_1^3 - a_{222}\, x_2^3 = 0\,.$$

Dei coefficienti di S_3, solamente a_{111} può esser zero senza che S_3 si spezzi, o sia un cono. Indicando con A_{ikk} i coefficienti di H_3 abbiamo:

$$H_3 = 6\, A_{124}\, x_1\, x_2\, x_4 + 3\, A_{133}\, x_1\, x_3^2 + A_{111}\, x_1^3 + A_{222}\, x_2^3 = 0\,.$$

e quindi le relazioni:

$$3\, A_{124} = a_{124}\ ,\ 3\, A_{133} = a_{133}\ ,\ A_{111} = -\, a_{111}\ ,\ A_{222} = -\, a_{222}$$

le quali, analogamente al caso precedente, servono a risolvere il problema:

11. Possiamo dunque enunciare il seguente teorema:

Mentre una cubica piana generale può sempre riguardarsi come hessiana di altre tre cubiche, e una binaria quadratica può riguardarsi come hessiana di infinite binarie cubiche; una superficie del 3⁰ ordine (non degenere) perchè si possa considerare come parte dell'hessiana di un'altra superficie del 3⁰ ordine, è necessario e sufficiente che essa possegga due punti biplanari distinti, o coincidenti.

12. Vogliamo ora occuparci della corrispondenza stabilita fra i punti di H_3 per mezzo dei coni polari rispetto a S_3, in virtù della quale si corrispondono quei punti che sono l'uno il vertice del cono polare dell'altro. Per brevità di linguaggio la chiameremo: *corrispondenza dei coni polari di H_3 rispetto a S_3.*

Vediamo di renderla indipendente dal concetto di hessiana.

Cominciamo dal caso in cui i punti biplanari sono distinti. La forma dell'equazione che conviene più per i calcoli che seguono è la (1) del N° 3. Cioè:

$$S_3 = 6\, a_{124}\, x_1\, x_2\, x_4 + a_{222}\, x_2^3 + 3\, a_{223}\, x_2^2\, x_3 + 3\, a_{233}\, x_2\, x_3^2 + a_{333}\, x_3^3 = 0\,.$$

Sia y un punto di H_3, le coordinate del punto corrispondente z si troveranno scrivendo la equazione del cono polare di y e annullando le derivate parziali del primo membro di questa equazione. Si ha così:

$$\left.\begin{aligned} a_{124}\,(z_4\, y_1 + z_1\, y_4) + a_{223}\,(z_3\, y_2 + y_3\, z_2) + a_{222}\, y_2\, z_2 + a_{233}\, z_3\, y_3 = 0, \\ a_{233}\,(z_3\, y_2 + y_3\, z_2) + a_{223}\, y_2\, z_2 + a_{333}\, y_3\, z_3 = 0\,, \\ y_1\, z_2 + y_2\, z_1 = 0, \\ y_2\, z_4 + y_4\, z_2 = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Queste formole stabiliscono la corrispondenza in discorso. Esprimendo la condizione di coesistenza delle 4 equazioni nelle 4 variabili y, o z, si trova, come è naturale, l'equazione di H_3 in z o y. Risolvendone tre qualunque rispetto alle y, chiamando con m, n i rapporti $\frac{a_{223}}{a_{333}}$, $\frac{a_{233}}{a_{333}}$, si ha:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = z_1 (n z_2 + z_3); \; y_2 = - z_2 (n z_2 + z_3), \\ y_3 = z_2 (m z_2 + n z_3), \; y_4 = z_4 (n z_2 + z_3). \end{array}\right\} \quad (8)$$

Dunque la corrispondenza dei coni polari non è altro che una trasformazione quadratica involutoria (è involutoria perchè le (7) sono simmetriche in y e z).

Ai piani $u_x = 0$ di uno spazio corrispondono, nell'altro spazio, i coni:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 z_1 (n z_2 + z_3) - u_2 z_2 (n z_2 + z_3) + u_3 z_2 (m z_2 + n z_3) + \\ \qquad + u_4 z_4 (n z_2 + z_3) = 0 \end{array}\right\} \quad (9)$$

i quali debbono formare un sistema omaloidico perchè, come abbiamo già osservato, fra y e z passa una corrispondenza biunivoca. Si può dunque concludere senz'altro che i coni del sistema (9) si toccano lungo una retta ed hanno un punto comune fuori di essa (1). Del resto, ciò si verifica immediatamente sulla (9).

La generatrice comune è quella che congiunge i punti biplanari di H_3; il piano tangente comune è il piano osculatore principale di H_3; il punto base del sistema, esterno alla generatrice comune, è il vertice del triedro formato con i piani osculatori di S_3. Se per brevità di linguaggio chiamiamo *trasformazione quadratica singolare*, quella trasformazione quadratica nella quale le quadriche che corrispondono ai piani sono coni, possiamo dire che:

La corrispondenza stabilita fra i punti di H_3, per mezzo dei coni polari rispetto a S_3, esiste in una corrispondenza quadratica singolare.

13. Si presenta ora la questione inversa. Data una trasformazione quadratica singolare, esisterà una superficie cubica H_3 dotata di due punti biplanari (e quindi una S_3 relativa N° 11) tale che la corrispondenza data si possa interpretare, sopra H_3, come corrispondenza di coni polari di H_3 rispetto a S_3?

Per risolvere la questione, costruiamo l'equazione di un sistema omaloidico di coni quadrici che sia il più generale possibile. Esso sarà contenuto nel sistema ∞^9 di tutte le quadriche dello spazio: $a_x^2 = 0$. Prendendo la generatrice comune ai coni per spigolo $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, del tetraedro fondamentale e ponendo il punto base esterno, nel vertice (0001) avremo intanto le condizioni:

$$a_{11} = a_{44} = a_{14} = a_{33} = 0 .$$

Il piano tangente in un punto qualunque $(y_1\, 0\, 0\, y_1)$ di $x_2 = 0$, $x_3 = 0$

(1) PIERI, *Rivista matematica*. Anno 1893, pag. 44-47.

è: $$x_2 (a_{12} y_1 + a_{42} y_4) + x_3 (a_{13} y_1 + a_{43} y_4) = 0 .$$

Otterremo che ogni quadrica del sistema sia un cono, rendendo indipendente dal rapporto $\frac{y_1}{y_4}$ la precedente equazione. Dunque dovremo avere:

$$\frac{a_{12}}{a_{13}} = \frac{a_{42}}{a_{43}} = k$$

e allora il suddetto piano tangente diviene:

$$(k x_2 + x_3) (a_{13} y_1 + a_{43} y_4) = 0$$

dove k è fisso, indipendente dalle a_{ik}. Il vertice del cono è il punto $(-a_{43}, 0, 0, a_{13})$. L'equazione cercata è quindi:

$$\alpha x_2^2 + \beta x_2 x_3 + \gamma (k x_1 x_2 + x_1 x_3) + \delta (k x_2 x_4 + x_3 x_4) = 0 \qquad (10)$$

dove α, β, γ, δ sono parametri variabili e k è fisso. Essa rappresenta, nel modo più generale, un sistema omaloidico di coni quadrici, purchè il punto base esterno alla generatrice comune non sia a distanza infinitesima da questa. Confrontando la (10) con la (9) del N° precedente, si trova che esse coincidono quando sia:

$$k = n, \quad u_1 = \gamma, \quad u_4 = \delta, \quad m u_3 - n u_2 = \alpha, \quad n u_3 - u_2 = \beta.$$

In altre parole, si passa dalla (10) alla (9), mediante una sostituzione lineare che lega i parametri del sistema (10) a quelli del sistema (9). Fra i coefficienti di questa sostituzione figura n che deve essere uguale a k e il numero m che è arbitrario. Segue che anche il sistema omaloidico (9) è generale (finchè il punto base esterno alla generatrice comune è a distanza non infinitesima da essa). Inoltre, rammentando il significato di m ed n (N° 12) e l'equazione (1) di S_3, si vede che dato un sistema omaloidico generale di coni quadrici (10), è individuato un solo coefficiente di S_3 e cioè n. Ma la stessa (1) ci dice che esistono ∞^3 S_3 che hanno lo stesso coefficiente n e poichè ogni S_3 individua una H_3 e viceversa (N° 12) così possiamo anche affermare che:

Per ogni sistema omaloidico di coni quadrici (aventi il punto esterno alla generatrice comune a distanza non infinitesima da essa), esistono ∞^3 superficie cubiche H_3 dotate ciascuna di due punti biplanari distinti, le quali sono trasformate in sè stesse da trasformazioni quadratiche singolari cui quel sistema è relativo.

14. Siamo ora in grado di risolvere la questione posta al principio del N° 13. Infatti, riprendiamo il sistema (10). Le trasformazioni relative si ottengono facendo corrispondere ai coni:

$$\alpha z_2^2 + \beta z_2 z_3 + \gamma (k z_1 z_2 + z_1 z_3) + \delta (k z_2 z_4 + z_3 z_4) = 0$$

i piani:

$$\alpha x_i + \beta x_h + \gamma x_j + \delta x_l = 0$$

dove i, h, j, l sono i numeri 1, 2,3,4 in un ordine qualunque. Dunque le formole della trasformazione sono:

$$x_i \equiv z_2^2, \quad x_h \equiv z_2 z_3, \quad x_j = k z_1 z_2 + z_1 z_3, \quad x_l = k z_2 z_4 + z_3 z_4$$

da cui, mediante la omografia:

$$y_1 \equiv x_j, \quad y_2 \equiv -k x_i - x_h, \quad y_3 \equiv \mu x_i + k x_h, \quad y_4 \equiv x_l$$

si ottengono le (8) del N° 12.

Dunque è vera la reciproca del teorema N° 12.

Ogni trasformazione quadratica singolare può sempre interpretarsi, a meno di omografie, come corrispondenza di coni polari sopra una delle ∞^3 *superficie cubiche* H_3, *dotate di due punti biplanari, che sono mutate in sè stesse dalla trasformazione.*

In altre parole: *quando si applica la trasformazione suddetta ai punti delle superficie* H_3, *si ottiene la corrispondenza dei coni polari* (N° 12) *dei punti di* H_3 *rispetto alle* S_3 *di cui le* H_3 *possono riguardarsi hessiane.*

15. Tanto la dimostrazione di questo teorema, quanto quella dei N° 13, 12 presentano delle eccezioni che ora mi propongo di togliere. Queste eccezioni consistono in quanto nei suddetti N^i è escluso il caso che i punti biplanari di H_3 siano coincidenti, come è escluso il caso che il punto base esterno alla generatrice comune nel sistema omaloidico di coni, si trovi a distanza infinitesima da questa. Però le conclusioni di quei N^i sono ancora vere e noi le riuniremo affermando che:

Se i punti biplanari di una H_3 *sono infinitamente vicini, nel sistema omaloidico di coni relativo alla trasformazione quadrica singolare che muta* H_3 *in sè stessa, accade che il punto base esterno alla generatrice comune dei coni le è infinitamente vicino e tende alla posizione limite comune ai punti biplanari medesimi.*

16. Per giustificare quest'affermazione ci serviremo del seguente lemma:

« L'equazione di un sistema omaloidico di coni quadrici, nel caso che il punto base esterno alla generatrice comune si trovi a distanza infinitesima da essa, può sempre porsi sotto la forma:

$$\lambda_{11} x_1^2 + \lambda_{12} x_1 x_2 + \lambda_{13} x_1 x_3 + \lambda_{22} (x_2^2 + k x_1 x_4) = 0 \qquad (11)$$

dove λ_{11}, λ_{12}, λ_{13}, λ_{22} sono i parametri i cui rapporti individuano gli ∞^3 coni del sistema e dove k è un numero fisso indipendente dalle λ ».

Infatti, sia g la generatrice comune, P il punto base esterno a g: per ipotesi P è a distanza infinitesima da g. Prendiamo g per retta $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, e il piano $x_1 = 0$ per piano tangente comune. Il sistema ∞^4 dei coni che si toccano lungo g sarà allora

$$\lambda_{11} x_1^2 + \lambda_{22} x_2^2 + \lambda_{12} x_1 x_2 + \lambda_{13} x_1 x_3 + \lambda_{14} x_1 x_4 = 0.$$

dove le λ sono tutte variabili. Questo sistema conterrà quello che noi cerchiamo. Ammettiamo ora, di più, che il vertice (0001) del tetraedro di riferimento sia infinitamente vicino a P onde si abbia

$$P \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3, 1)$$

dove ξ_i sono infinitesimi. Il piano Pg è tangente a tutti i coni del sistema, dunque il piano Pg è infinitamente vicino a $x_1 = 0$ e quindi ξ_1 è infinitesimo di ordine superiore a ξ_2. Ora il piano tdngente in P è

$$x_1 + \frac{\lambda_{21}\xi_1 + \lambda_{22}\xi_2}{\lambda_{11}\xi_1 + \lambda_{12}\xi_2 + \lambda_{13}\xi_3 + \lambda_{14}} x_2 + \frac{\lambda_{31}\xi_1}{\lambda_{11}\xi_1 + \lambda_{12}\xi_2 + \lambda_{13}\xi_3 + \lambda_{14}} x_3 +$$
$$+ \frac{\lambda_{14}\xi_1}{\lambda_{11}\xi_1 + \lambda_{12}\xi_2 + \lambda_{13}\xi_3 + \lambda_{14}} x_4 = 0$$

ovvero, a meno di infinitesimi di ordine superiore:

$$x_1 + \frac{\lambda_{22}\xi_2}{\lambda_{12}\xi_2 + \lambda_{13}\xi_3 + \lambda_{14}} = 0.$$

Per un altro sistema di valori di λ avremo:

$$x_1 + \frac{\lambda'_{22}\xi_2}{\lambda'_{12}\xi_2 + \lambda'_{13}\xi_3 + \lambda'_{14}} = 0.$$

Ma il piano Pg deve essere il medesimo per tutti i coni del sistema, dunque:

$$\frac{\lambda_{22}}{\lambda_{12}\xi_2 + \lambda_{12}\xi_3 + \lambda_{14}} = \frac{\lambda'_{22}}{\lambda'_{12}\xi_2 + \lambda'_{13}\xi_3 + \lambda'_{14}}$$

a meno di infinitesimi:

$$\lambda_{22}\,\lambda'_{14} = \lambda'_{22}\,\lambda_{14}$$

cioè:

$$\frac{\lambda_{22}}{\lambda_{14}} = \frac{\lambda'_{22}}{\lambda'_{14}} = \text{costante} \qquad \text{c. d. d.}$$

17. Riprendiamo adesso la (6) del N° 7 che è l'equazione di una superficie cubica con due punti biplanari coincidenti. — Annullando le derivate parziali del 1° membro dell'equazione del cono polare di un punto y, troveremo le analoghe delle (7)

$$\left.\begin{aligned} a_{111}\,x_1\,y_1 + a_{124}\,(x_4\,y_2 + x_2\,y_4) + a_{133}\,x_3\,y_3 = 0\,, \\ a_{124}\,(x_4\,y_1 + x_1\,y_4) + a_{222}\,x_2\,y_2 = 0\,, \\ x_3\,y_1 + x_1\,x_3 = 0, \\ x_{1\;2} + x_2\,y_1 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Anche in queste, come nelle (7), osserveremo che, esprimendo la condizione di coesistenza per le x, o per le y, si trova l'equazione di H_3 nelle y, o nelle x, rispettivamente. Risolvendo, troveremo le analoghe delle (8):

$$y_1 \equiv -x_1^2, \quad y_2 \equiv x_1\,x_2, \quad y_2 \equiv x_1\,x_3, \quad y_4 \equiv x_1\,x_4 - n\,x_2^2 \qquad (13)$$

dove $n = \dfrac{a_{222}}{a_{124}}$.

Le (12), (13), ci dicono che la trasformazione è quadratica involutoria. Ai piani $u_x = 0$ corrispondono i coni del sistema omaloidico:

$$-u_1\,y_1^2 + u_2\,y_1\,y_2 + u_3\,y_1\,y_3 + u_4\,(y_1\,y_4 - n\,y_2^2) = 0. \qquad (14)$$

E ora il semplice confronto della (14) con la (11) prova che la proposizione del N° 15 è vera.

Viceversa: *Ogni trasformazione quadratica singolare il cui sistema omaloidico di coni abbia il punto base a distanza infinitesima dalla generatrice di contatto, può sempre interpretarsi, a meno di omografie, come corrispondenza di coni polari sopra una delle* ∞^2 H_3 *dotate di due punti biplanari* COINCIDENTI *che sono mutate in sè stesse dalla trasformazione.*

Infatti, riprendiamo la (11)

$$\lambda_{11}\,x_1^2 + \lambda_{12}\,x_1\,x_2 + \lambda_{13}\,x_1\,x_3 + \lambda_{22}\,(x_2^2 + k\,x_1\,x_4) = 0.$$

Si ottengono le trasformazioni quadratiche singolari relative a questo sistema omaloidico, riferendo i coni precedenti ai piani $u_z = 0$. Le formole

della corrispondenza sono:

$$z_i \equiv x_1^2, \quad z_h \equiv x_1 x_2, \quad z_j \equiv x_1 x_3, \quad z_l \equiv x_2^2 + k x_1 x_4$$

dove i, h, j, l sono i numeri 1, 2, 3, 4 in un ordine qualunque. Adesso, dividendo prima per k e poi applicando la omografia:

$$y_1 \equiv - z_i \cdot k, \quad y_2 \equiv z_h \cdot k, \quad y_3 \equiv z_j k, \quad y_4 \equiv z_l$$

si ottengono le (13). La costante k individua uno dei coefficienti di H_3, cioè ∞^2 H_3.

SOPRA LE SERIE QUADRATICHE DI CONICHE INVILUPPANTI LA QUARTICA PIANA.

[*Rendic. Istit. Lomb. 1895*]

I.

Osservazioni sopra le serie quadratiche ∞^1 di coniche.

1. — Una serie quadratica ∞^1 di coniche si può rappresentare mediante l'equazione

$$\lambda^2 a^2_x + 2\lambda b^2_x + c^2_x = 0$$

dove λ è il parametro della serie e $a^2_x = 0$, $b^2_x = 0$, $c^2_x = 0$ sono coniche le quali non appartengono al medesimo fascio. Il sistema lineare di dimensione minima che contiene la serie è la rete

$$\alpha a^2_x + \beta b^2_x + \gamma c^2_x = 0 .$$

Alla serie è coordinata la quartica

$$f = (b^2_x)^2 - a^2_x \cdot c^2_x = 0$$

che è l'inviluppo delle coniche della serie. Le due coniche $a^2_x = 0$, $c^2_x = 0$ appartengono alla serie; la $b^2_x = 0$ non vi appartiene ma è legata alle prime due dalla proprietà di contenerne gli otto punti di contatto con la quartica f.

In tutto quel che segue, parlando di serie ∞^1 quadratiche di coniche, sottintenderemo sempre le qualifiche di *quadratiche* e di *semplicemente infinite* dicendo *serie* senz'altro.

2. — Date due coniche qualunque delle serie

$$\lambda_1^2 a^2_x + 2\lambda_1 b^2_x + c^2_x = 0 , \qquad \lambda_2^2 a^2_x + 2\lambda_2 b^2_x + c^2_x = 0$$

individuate dai valori λ_1, λ_2, del parametro λ, l'equazione della conica che passa per gli otto punti di contatto delle prime due con la quartica f è:

$$\lambda_1 \lambda_2 a^2_x + (\lambda_1 + \lambda_2) b^2_x + c^2_x = 0$$

per cui l'equazione della serie può scriversi

$$\{ \lambda_1^2 a^2_x + 2 \lambda_1 b^2_x + c^2_x \} \lambda^2 + 2 \lambda \{ \lambda_1 \lambda_2 a^2_x + (\lambda_1 + \lambda_2) b^2_x + c^2_x \} +$$
$$+ \lambda_2^2 a^2_x + 2 \lambda_2 b^2_x + c^2_x = 0$$

e l'equazione della quartica f così:

$$(\lambda_1^2 a^2_x + 2 \lambda_1 b^2_x + c^2_x) (\lambda_2^2 a^2_x + 2 \lambda_2 b^2_x + c^2_x) -$$
$$- \{ \lambda_1 \lambda_2 a^2_x + (\lambda_1 + \lambda_2) b^2_x + c^2_x \}^2 = 0$$

3. — Segue che data una conica

$$\alpha a^2_x + \beta b^2_x + \gamma c^2_x = 0$$

appartenente alla rete, ma non alla serie, essa può sempre pensarsi come quella che contiene gli otto punti di contatto con la quartica, di due coniche della serie. Infatti, per trovarne i parametri corrispondenti, basta risolvere l'equazione di 2° grado

$$\gamma z^2 - \beta z + \alpha = 0 .$$

Fa eccezione il caso in cui si hanno due radici uguali: ma allora si vede subito che il parametro corrispondente individua una conica della serie. Cioè:

Una qualsiasi conica della rete individuata dalla serie, o appartiene alla serie, o altrimenti è collegata a due coniche della serie così da contenerne gli 8 punti di contatto con la quartica.

4. — Esiste una conica-luogo che è armonica rispetto a tutte le coniche delle serie riguardate come inviluppo (1).

Ma nella serie vi sono 6 coppie di rette. Dunque:

I sei punti doppi delle sei coppie di rette esistenti, in una serie quadratica di coniche, appartengono a una stessa conica: alla conica armonica a tutte le coniche della serie.

---

(1) CAPORALI, *Sulla teoria delle curve piane del 4° ordine.* (Volume delle Memorie, pag. 364)

5. — Al teorema precedente si può dare anche un'altra forma. Per questo consideriamo la rete:

$$\alpha\, a^2_x + \beta\, b^2_x + \gamma\, c^2_x = 0$$

come rete di coniche polari rispetto a una cubica. Se un punto si muove lungo una conica c, la conica polare descrive una serie quadratica, la quale, a sua volta, individua la propria conica armonica c' e si vede subito che la jacobiana della retta taglia le due coniche c e c' in coppie di punti corrispondenti. Il che può esprimersi così:

I sei punti corrispondenti a quelli nei quali una conica, non degenere, taglia l'hessiana di una cubica, appartengono, a lor volta, a un'altra conica.

Oppure:

Data una conica e una cubica, se si prendono i sei tangenziali dei punti comuni alle due curve e da essi si conducono le altre 18 tangenti alla cubica, i diciotto punti di contatto vengono a esser distribuiti sopra tre coniche.

6. — Ritornando alle sei coppie di rette esistenti in una serie, osserveremo che, in generale, due di tali coppie non possono avere una retta comune. Infatti, se questo accadesse, la rete, cui appartiene la serie, potrebbe porsi sotto la forma

$$\alpha\, x_1\, x_2 + \beta\, x_2\, x_3 + \gamma\, \theta = 0$$

dove θ è una conica non degenere. Ma allora si vede subito che, dalla jacobiana della rete, si stacca il fattore $x_2 = 0$: la rete non è più generale.

7. Riassumendo le poche osservazioni precedenti, enumeriamo qui le curve principali coordinate a una serie quadratica di coniche e di cui ci varremo essenzialmente per lo studio della quartica:

1°. La conica sostegno della serie,

2°. La conica armonica alla serie,

3°. La cubica di cui la rete che contiene la serie è rete di coniche polari,

4°. La hessiana di questa cubica, jacobiana della rete,

5°. La quartica inviluppo delle coniche della serie.

II.

Le 63 serie di coniche quadritangenti a una quartica piana.

8. — È noto che « data una conica quadritangente a una quartica, qualsiasi conica che passa per i 4 punti di contatto, taglia ulteriormente la quartica in altri 4 punti che sono punti di contatto di un'altra conica

con la quartica medesima (1). Da cui segue che:

« La condizione necessaria e sufficiente perchè due coniche appartengano alla medesima serie è che gli 8 punti di contatto si trovino sopra una medesima conica ».

Onde si ricava anche:

« Una conica quadritangente appartiene a una serie e a una sola ».

In particolare:

« Una qualunqne coppia di bitangenti individua una e una sola serie a cui appartiene ».

Viceversa una serie contiene 6 coppie di bitangenti.

Dunque:

Esistono $\frac{1}{6}\frac{28.27}{2} = 63$ *serie di coniche quadritangenti* (1).

E per il teorema del N⁰ 4:

I punti d'incontro delle bitangenti giacciono, a sei, a sei, sopra 63 coniche armoniche alle serie precedenti (2).

9. — Vogliamo ora vedere se si possano considerare le coniche d'una serie come coniche polari dei punti di una curva φ rispetto a una curva ψ nei due seguenti casi, che forse sono i soli possibili, almeno finchè la ψ è generale del suo ordine:

1°. La φ sia una conica e la ψ una cubica.

2°. La φ sia una retta e la ψ una quartica.

Vedremo facilmente come il problema possa essere risoluto, in entrambi i casi, e quindi ne nasceranno due definizioni della quartica stessa collegati alle curve φ e ψ.

10. Nel 1⁰ caso la soluzione è semplicissima e nota. Sia:

$$\lambda^2 a^2_x + 2\lambda b^2_x + c^2_x = 0$$

una delle serie di coniche inviluppanti la quartica. Essa appartiene alla rete:

$$\alpha a^2_x + \beta b^2_x + \gamma c^2_x = 0$$

la quale è rete di coniche polari rispetto a una cubica ψ. Per scriverne l'equazione sotto forma opportuna, prendiamo, per triangolo di riferimento, quello costituito dai tre poli di $a^2_x = 0$, $b^2_x = 0$, $c^2_x = 0$. Allora sarà:

(1) HESSE, *Ueber Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie, insbesondere auf Curven vierter Ordnuny*. Crelle, Bd. 49.

(2) Questi due teoremi si trovano per la prima volta e senza dimostrazione in STEINER, *Uuber die Doppeltangenten der Curven vierten Grades*. Crelle, Bd. 55.

$$\psi = x_1 a^2_x + x_2 b^2_x + x_3 c^2_x = 0$$

e la conica φ, sostegno della serie, sarà rappresentata da

$$\varphi = 4 x_1 x_3 - x_2^2 = 0$$

e quindi è manifesto che la serie data è costituita da tutte e sole le coniche polari dei punti φ rispetto a ψ. Dunque:

Una quartica generale può sempre considerarsi come l'inviluppo delle coniche polari dei punti di una conica rispetto a una cubica, o come il luogo di un punto la cui retta polare, rispetto a una cubica, tocca una conica (1). Per brevità chiameremo le curve φ e ψ le *curve direttrici* della quartica, e *coniche generatrici* quelle della serie. Le curve φ e ψ sono legate da questa proprietà che è evidente e che ci occorrerà nel seguito:

Se c_1, c_2, sono due coniche della serie e quindi polari dei punti M_1, M_2, di φ; la conica che passa per gli otto punti di contatto di c_1 e c_2 con la quartica, è polare del punto d'incontro delle tangenti a φ in M_1, M_2.

11. — Ogni serie di coniche quadritangenti individua una cubica e una conica direttrice. Viceversa: *dico che due curve φ e ψ appartengono a una sola serie.*

Infatti, è intanto evidente che le medesime ψ e ψ non possono essere relative a due serie diverse; ma neppure può darsi che due serie posseggano la medesima curva ψ e due diverse φ_1 e φ_2 quando si pensi che la conica direttrice è l'inviluppo delle rette polari, rispetto a ψ, dei punti della quartica.

Rimane a dimostrare che due serie diverse non possono avere a comune la curva φ, a meno che, s'intende, la quartica generata, non si particolarizzi. Per dimostrarlo ci varremo qui di una osservazione che sarà esposta in seguito (N° 20) e consiste in questo.

Indichiamo, secondo la notazione del Salmon, con a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, φ, ψ, le 28 bitangenti: ogni serie di coniche inviluppanti la quartica contiene 6 coppie di bitangenti distinte così che due coppie non possono avere neppure una bitangente comune (N° 6): ebbene, prese due qualunque serie esse hanno o 4, o 6 bitangenti comuni: nel 1° caso sono del tipo:

$$(a\,b,\ c\,d,\ e\,f,\ g\,h,\ i\,j,\ k\,l),\quad (a\,c,\ \underline{b\,d},\ m\,n,\ o\,p,\ q\,r,\ s\,t),$$

nel 2° caso sono:

$$(a\,b,\ c\,d,\ e\,f,\ g\,h,\ i\,j,\ k\,l);\quad (a\,m,\ c\,n,\ e\,u,\ g\,x,\ i\,z,\ k\,\psi).$$

(1) SALMON, *Curve piane*, N° 254. — GERBALDI, *L'equazione di 24° grado da cui dipende la ricerca dei flessi nella curva generale del 4° ordine.* Rend. Circ. Mat. Palermo, 1893.

Cominciamo dal dimostrare che due serie del 1° tipo non possono avere a comune la conica φ. Per questo, intenderemo definita la 1ª serie dalle due coniche di essa $a\,b$, $c\,d$ e la seconda da $a\,c$, $b\,d$; la conica che ne contiene i punti di contatto sia la V. Per trovare le equazioni delle cubiche direttrici ψ e ψ_1 delle due serie basta prendere (N° 10) per triangolo fond. nel 1° caso i poli M, N, P di $a\,b$, V, $c\,d$ rispetto a ψ, e nel 2° i poli M', N', P' di $a\,c$, V, $b\,d$ rispetto a ψ_1. Sieno x, y, le coordinate dei due sistemi. Avremo:

$$\psi(x) = x_1\, a\, b + x_2\, V + x_3\, c\, d = 0\,,$$

$$\psi_1(y) = y_1\,(a\,c) + y_2\,(V) + y_3\,(b\,d) = 0\,,$$

dove $(a\,c)$, (V), $(b\,d)$ indicano le equazioni di $a\,c$, V, $b\,d$ nelle coordinate y.

Introduciamo ora l'ipotesi che la curva φ sia la medesima per le due serie. Ciò significa che sulla φ oltre trovarcisi i punti M, P, ci sono anche i punti M', P' essendo rispettivamente N e N' i punti d'incontro delle tangenti in M e P, in M' e P' (N° 10). Dico intanto che M' P' N' coincidono con M, N, P. Infatti, l'equazioni di φ riferite all'uno e all'altro triangolo sono:

$$4\,x_1\,x_3 - x_2^2 = 0, \quad 4\,y_1\,y_3 - y_2^2 = 0$$

dunque le formole di trasformazione delle coordinate sono $x_i = y_i$. Operando questa trasformazione sulla $\psi_1\,(y)$ essa diviene

$$\psi_1(x) = x_1\, a\, c + x_2\, V + x_3\, b\, d = 0$$

e poichè prima della trasformazione era:

$$\frac{\partial\,\psi_1}{\partial\,y_1} = (a\,c)\,, \quad \frac{\partial\,\psi_1}{\partial\,y_2} = (V)\,, \quad \frac{\partial\,\psi_1}{\partial\,y_3} = (b\,d)\,,$$

sarà adesso:

$$\frac{\partial\,\psi_1}{\partial\,x_1} = a\,c\,, \quad \frac{\partial\,\psi_1}{\partial\,x_2} = V\,, \quad \frac{\partial\,\psi_1}{\partial\,x_3} = b\,d\,,$$

cioè saranno $a\,c$, V, $b\,d$ le polari di M, N, P rispetto a ψ_1 ossia

$$M \equiv M', \quad N \equiv N' \quad P \equiv P'.$$

Dunque le equazioni delle ψ e ψ_1 riferite al medesimo triangolo M, N, P sono:

$$\psi = x_1\, a\, b + x_2\, V + x_3\, c\, d = 0,$$
$$\psi_1 = x_1\, a\, c + x_2\, V + x_3\, b\, d = 0,$$

cioè, le equazioni di $a\,b$, V, $c\,d$, di $a\,c$, V, $b\,d$ riferite a tal triangolo debbono esser tali da potersi riguardare le prime come 1ᵉ derivate parziali di una stessa ψ, le seconde come 1ᵉ derivate parziali di una stessa ψ_1. Si hanno dunque le seguenti condizioni rispettive:

$$a_2\, b_2 = v_{12}\,, \quad 2\, a_3\, b_3 = c_1\, d_3 + c_3\, d_1\,, \quad 2\, v_{11} = a_1\, b_2 + a_2\, b_1\,,$$
$$a_1\, b_3 + a_3\, b_1 = 2\, c_1\, d_1\,, \quad a_2\, b_3 + a_3\, b_2 = 2\, v_{13} = c_1\, d_2 + c_2\, d_1\,,$$
$$2\, v_{33} = c_2\, d_3 + c_3\, d_2\,, \quad 2\, v_{23} = c_2\, d_2\,.$$

$$a_2\, c_2 = v_{12}\,, \quad 2\, a_3\, c_3 = b_1\, d_3 + b_3\, d_1\,, \quad 2\, v_{11} = a_1\, c_2 + a_2\, c_1,$$
$$a_1\, c_3 + a_3\, c_1 = 2\, b_1\, d_1\,, \quad a_2\, c_3 + a_3\, c_2 = 2\, v_{13} = b_1\, d_2 + b_2\, d_1,$$
$$2\, v_{33} = b_2\, d_3 + b_3\, d_2\,, \quad 2\, v_{23} = b_2\, d_2\,,$$

da cui segue

$$b_1 = c_1\,, \quad b_2 = c_2\,, \quad b_3 = c_3\,.$$

Ossia le due bitangenti b e c debbono coincidere: la quartica non è più generale.

Facciamo ora il caso di avere due serie del 2⁰ tipo. Dico che neppur queste possono avere la medesima conica φ. Siano esse:

$$(a\,b,\ c\,d,\ e\,f,\ g\,h,\ i\,j,\ k\,l), \tag{1}$$
$$(a\,m,\ c\,n,\ e\,u,\ g\,x,\ i\,z,\ k\,\psi). \tag{2}$$

Insieme a queste si dimostra l'esistenza anche di quest'altra (N⁰ 11)

$$(a\,f,\ n\,v,\ b\,e,\ p\,x,\ r\,z,\ t\,\psi) \tag{3}$$

la quale, con la (2), forma una coppia di serie di 2° tipo, ma con la (1) ne forma una di 1° tipo: se dunque due serie qualunque di 2° tipo avessero la stessa conica φ, questa sarebbe comune alle serie (1) e (2) e (2) e (3) e quindi alle (1) e (3) che sono di 1° tipo, il che si è visto che non può accadere senza che la quartica si specializzi. Dunque:

Esistono in generale 63 coppie di curve direttrici φ e ψ una per ogni serie e quindi 63 modi diversi di riguardare una cubica come inviluppo delle coniche polari dei punti di φ rispetto a ψ.

12. — Mediante questa definizione di una quartica, si viene a stabilire fra essa e la φ una corrispondenza (4, 1) di cui ora vogliamo cercare le formole. Per maggiore semplicità scriviamo la ψ sotto la forma canonica

$$\psi = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\,m\,x_1\,x_2\,x_3 = 0$$

e invece di riguardare la quartica come inviluppo delle coniche polari dei punti di φ rispetto a ψ, pensiamola come luogo di un punto y la cui retta polare inviluppa la conica $\varphi = \alpha^2_u = 0$. La polare è:

$$x_1 \{ y_1^2 + 2\,m\,y_2\,y_3 \} + x_2 \{ y_2^2 + 2\,m\,y_3\,y_1 \} + x_3 \{ y_3^2 + 2\,m\,y_1\,y_2 \} = 0\,.$$

Per conseguenza l'equazione della quartica sarà:

$$\begin{gathered} a_{11} \{ y_1^2 + 2\,m\,y_2\,y_3 \}^2 + a_{22} \{ y_2^2 + 2\,m\,y_3\,y_1 \}^2 + a_{33} \{ y_3^2 + 2\,m\,y_1\,y_2 \}^2 + . \\ + 2\,a_{12} \{ y_1^2 + 2\,m\,y_2\,x_3 \} \{ y_2^2 + 2\,m\,y_3\,y_1 \} + 2\,a_{13} \{ y_1^2 + \\ + 2\,m\,y_2\,y_3 \} \{ y_3^2 + 2\,m\,y_1\,y_2 \} + 2\,a_{23} \{ y_2^2 + 2\,m\,y_3\,y_1 \} \{ y_3^2 + \\ + 2\,m\,y_1\,y_2 \} = 0, \end{gathered}$$

ovvero, mettendo in evidenza, l'invariante assoluto di ψ:

$$m^2 f_1 + m f_2 + f_3 = 0 \tag{1}$$

dove

$$\begin{gathered} f_1 = a_{11}\,y_2^2\,y_3^2 + a_{22}\,y_3^2\,y_1^2 + a_{13}\,y_1^2\,y_2^2 + \\ + a_{12}\,y_1\,y_2\,y_3^2 + a_{13}\,y_1\,y_2^2\,y_3 + a_{23}\,y_1^2\,y_2\,y_3\,, \\ f_2 = a_{11}\,y_1^2\,y_2\,y_3 + a_{22}\,y_2^2\,y_3\,y_1 + a_{33}\,y_3^2\,y_1\,y_2 + \\ + a_{12}\,y_3\,(y_1^3 + y_2^3) + a_{13}\,y_2\,(y_1^3 + y_3) + a_{13}\,y_1\,(y_2^3 + y_3^3), \\ f_3 = a_{11}\,y_1^4 + a_{22}\,y_2^4 + a_{33}\,y_3^4 + 2\,a_{12}\,y_1^2\,y_2^2 + 2\,a_{13}\,y_1^2\,y_3^2 + \\ + 2\,a_{23}\,y_2^2\,y_3^2\,. \end{gathered}$$

Così sono riferite le tangenti della conica φ alle quaterne dei punti della quartica mediante le relazioni

$$\begin{aligned} u_1 &= y_1^2 + 2\,m\,y_2\,y_3, \\ u_2 &= y_2^2 + 2\,m\,y_3\,y_1, \\ u_3 &= y_3^2 + 2\,m\,y_1\,y_2. \end{aligned}$$

Ma fra le coordinate della tangente e quelle del punto di contatto passano le relazioni

$$x_i = a_{i1} u_1 + a_{i2} u_2 + a_{i3} u_3 ,$$

quindi le formule richieste saranno le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_{11}\{y_1^2 + 2m\, y_2 y_3\} + a_{12}\{y_2^2 + 2m\, y_2 y_1\} + a_{13}\{y_3^2 + 2m\, y_1 y_2\}, \\ x_2 &= a_{21}\{y_1^2 + 2m\, y_2 y_3\} + a_{22}\{y_2^2 + 2m\, y_3 y_1\} + a_{23}\{y_3^2 + 2m\, y_1 y_2\}, \\ x_3 &= a_{31}\{y_1^2 + 2m\, y_2 y_3\} + a_{32}\{y_2^2 + 2m\, y_3 y_1\} + a_{33}\{y_3^2 + 2m\, y_1 y_2\}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Esse stabiliscono una trasformazione quadratica del piano in sè stesso che è la più generale possibile perchè le rette del piano vengono a essere riferite projettivamente alla rete delle coniche polari rispetto a una cubica ψ che è generica. Dunque:

La corrispondenza (1,4) fra una conica direttrice e la quartica è contenuta nella corrispondenza quadratica generale (2).

13. — Le formule precedenti si prestano con semplicità allo studio di casi particolari notevoli, fra i quali, per primi quelli per cui $m=0$, $m=\infty$.

Per $m = 0$ la cubica direttrice è equinarmonica, la trasformazione (2) si mantiene sempre quadrupla, solamente si specializza la rete delle coniche sul piano quadruplo acquistando esse per comune triangolo autopolare il triangolo hessiano della cubica direttrice. La quartica generata non ha punti singolari e poichè la sua equazione (1) è simmetrica in $\pm x_1$, in $\pm x_2$, in $\pm x_3$ ne viene che *esistono 3 omologie armoniche che la trasformano in sè stessa e di cui gli elementi fondamentali sono qnelli del triangolo hessiano suddetto.*

Viceversa ogni quartica la cui equazione sia simmetrica in $\pm x_1$, $\pm x_2$, $\pm x_3$ può esser generata mediante una cubica ψ equanarmonica. Si vede subito che una delle due omologie è il prodotto delle altre due. In altre parole se al punto A_1 corrispondono rispettivamente $A_2\, A_3\, A_4$ nelle tre omologie, ne viene di conseguenza che per effetto della 1ª omologia mentre A_1 va in A_2, A_3 va in A_4; per effetto della 2ª, mentre A_1 va in A_3, A_2 va in A_4 e per effetto della 3ª mentre A_1 va in A_4, A_2 va in A_3. Più brevemente, si può dire che una qualunque delle tre omologie permuta fra loro i 4 punti $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$. Diremo che essi costituiscono un *ciclo.*

Una qualunque conica polare, rispetto a ψ, ha il triangolo hessiano come triangolo autopolare, dunque (N⁰ 3) o tocca la quartica nei 4 punti di un ciclo se il polo si trova sopra φ, ovvero la taglia in due cicli se il suo polo si trova fuori di φ. Segue:

I cicli esistenti sulla quartica sono rappresentati sopra i punti della conica φ.

I 4 punti di un ciclo sono punti di contatto di una conica con la quartica.

Qualunque conica che contenga un ciclo, ne contiene necessariamente un altro (N° 8).

Due cicli si trovano sempre sopra una conica.

In una omologia armonica a un flesso deve corrispondere un flesso. Dunque:

I 24 flessi della quartica si distribuiscono in sei cicli, ma due cicli appartengono a una conica, quindi:

I 24 flessi si trovano a 8, a 8, sopra 15 coniche aventi per triangolo autopolare il triangolo hessiano (1).

La conica armonica alla serie di coniche che toccano la quartica nei cicli, deve tagliare l'hessiana di ψ nei sei punti corrispondenti a quelli nei quali l'hessiana stessa taglia la conica φ sostegno della serie. Dunque:

Per ogni vertice del triangolo hessiano passano quattro bitangenti della quartica, ecc.

Per $m = \infty$ la cubica direttrice è un triangolo, la (2) diviene l'ordinaria trasformazione quadratica biunivoca, la quartica generata ha tre punti doppi nel triangolo fondamentale. Se la conica $\varphi = a^2_u = 0$ si riduce a un punto contato due volte, la quartica ha tre cuspidi. La generazione di essa come inviluppo delle coniche polari dei punti φ rispetto a ψ perde significato; si mantiene però l'altro modo di esprimere la stessa generazione, per cui la quartica si riguarda come il luogo di un punto le cui rette polari rispetto a ψ toccano φ, cioè passano per il punto a cui è ridotto ψ. Se questo punto è il centro del cerchio circoscritto al triangolo ψ, la quartica generata è l'ipocicloide di Steiner. Si ha quindi la seguente definizione di tale curva (come caso particolare di quella data al N° 10):

L'ipocicloide di Steiner si può riguardare come il luogo del polo variabile, rispetto a un triangolo, di una retta che ruota attorno al centro del cerchio circoscritto al triangolo. Quando sia noto questo centro, la costruzione è lineare.

14. — Andiamo ora al secondo dei casi enunciati al N° 9. Riprendiamo quindi la solita equazione della serie

$$\lambda^2 a^2 + 2\lambda b^2_x + c^2_x = 0 . \qquad (1)$$

Si tratta di esaminare se le coniche di questa serie si possano riguar-

(1) GERBALDI, loc. cit..

dare come polari dei punti di una retta φ rispetto a una quartica ψ di cui le equazioni siano rispettivamente $x_2 = 0, m^4_x = 0$. Le coniche polari dei punti di φ rispetto a ψ individuano la serie:

$$y_1^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + 2 y_1 y_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_3} + y_3^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} = 0 \tag{2}$$

dove:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = m_{1111} x_1^2 + m_{1122} x_2^2 + m_{1133} x_3^2 + 2 m_{1112} x_1 x_2 +$$
$$+ 2 m_{1113} x_1 x_3 + 2 m_{1123} x_2 x_3 = 0 ,$$
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_3} = m_{1311} x_1^2 + m_{1322} x_2^2 + m_{1333} x_3^2 + 2 m_{1312} x_1 x_2 +$$
$$+ 2 m_{1313} x_1 x_3 + 2 m_{1323} x_2 x_3 = 0 ,$$
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} = m_{3311} x_1^2 + m_{3322} x_2^2 + m_{3333} x_3^2 + 2 m_{3312} x_1 x_2 +$$
$$+ 2 m_{3313} x_1 x_3 + 2 m_{3323} x_2 x_3 = 0 .$$

Vogliamo dimostrare che la (2) è una serie quadratica generale. Perciò confrontiamola con la (1), esaminiamo le condizioni che ne conseguono per i coefficienti della (1) e vediamo se queste condizioni specializzano effettivamente la serie, ovvero se dipendono da opportuna scelta degli elementi fondamentali.

Le condizioni suddette sono le seguenti:

$$a_{13} = b_{11} , \quad b_{23} = c_{12} , \quad b_{33} = c_{13} , \quad a_{23} = b_{12} ,$$
$$a_{33} = b_{13} = c_{11}$$

le quali esprimono che, sul lato $x_2 = 0$, i due punti $A \equiv (1, 0, 0)$, $C \equiv (0, 0, 1)$ godono della proprietà che la polare di A rispetto a $b^2_x = 0$ coincide con la polare di C rispetto a $a^2_x = 0$ e che la polare di A rispetto a $c^2_x = 0$ coincide con quella di C rispetto a $b^2_x = 0$, il che indicheremo brevemente con le notazioni

$$A_b = C_a , \quad A_c = C_b .$$

La questione è così ridotta a vedere se esistono due punti A e C i quali godano di queste proprietà.

Perciò consideriamo la collineazione composta delle 4 polarità se-

guenti: 1ª rispetto ad a, 2ª rispetto a b, 3ª rispetto a c, 4ª rispetto a b, e applichiamo questa collineazione a un punto C. Prendiamo la C_a polare di C rispetto ad a, di questa C_a cerchiamo il polo rispetto a b e sia A: intanto è realizzata la condizione

$$C_a = A_b .$$

Dopo, costruiamo la A_c polare di A rispetto a c e finalmente il polo di quest'ultima rispetto a b: otterremo così un punto C' che è il corrispondente di C nella collineazione in discorso. Se C' coincidesse con C sarebbe realizzata anche la seconda condizione:

$$A_c = C_b .$$

Dunque i tre punti uniti C_1 C_2 C_3 della projettività possono ognuno servire da punto C. Partendo da uno qualunque di essi C_i ed eseguendo le prime due polarità, si giunge a un punto A_i il quale insieme a C_i risolve la questione proposta. Si osservi che A_i è distinto da C_i perchè, se ciò non fosse ed entrambi coincidessero in un unico punto P, dalle condizioni precedenti si vedrebbe che P avrebbe la stessa retta polare rispetto alle tre coniche, la quale dunque si staccherebbe dalla jacobiana della loro rete; la serie sarebbe speciale. Dunque, in generale A_i è distinto da C_i. Si vede subito che A_i è unito nella projettività che si ottiene eseguendo le 4 polarità seguenti: 1ª rispetto a c, 2ª rispetto a b, 3ª rispetto ad a, 4ª rispetto a b. Riassumendo:

Date tre coniche in posizione generica, esistono 3 coppie di punti A_1 C_1, A_2 C_2, A_3 C_3 tali che presi come punti $A_i \equiv (1, 0, 0)$, $C_i \equiv (0, 0, 1)$ i primi membri delle equazioni delle coniche si possono riguardare rispettivamente come le tre derivate seconde

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_3}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2}$$

di una medesima forma ternaria biquadratica ψ. Quindi

Una quartica generale può sempre considerarsi come l'inviluppo delle coniche polari dei punti di una retta φ rispetto a un'altra quartica ψ, ovvero come il luogo di un punto la cui conica polare rispetto alla stessa quartica ψ, tocca la retta fissa φ.

Adottando nna definizione del Cremona (1) si può esprimere il teo rema più brevemente cosi:

(1) *Curve piane,* N° 104.

La seconda polare di una retta, rispetto a una quartica generale, è di nuovo una quartica generale.

15. — Riprendiamo la serie quadratica di coniche polari dei punti di φ rispetto a ψ. La retta φ taglia la hessiana di ψ in 6 punti le cui coniche polari costituiscono le 6 coniche della serie spezzate in coppie di rette: i 6 punti doppi di queste coniche stanno sulla steineriana di ψ e anche (N^0 4) sulla conica armonica della serie. Dunque si può dire che:

I sei punti della steineriana di una quartica che corrispondono ai sei punti nei quali l'hessiana è incontrata da una retta qualunque, appartengono a una medesima conica.

16. — Analogamente a quanto fu fatto nel N° 11, si tratta di vedere adesso da quali condizioni sono legate una retta e una quartica direttrici per generare una quartica secondo la definizione del N° 14. Cominceremo perciò dal tener fissa la retta direttrice φ. Dal N° 14 resulta che rimangono fissi i coefficienti: m_{1111}, m_{3333}, m_{1112}, m_{1113}, m_{1333}, m_{2333}, m_{1122}, m_{1133}, m_{2233}, m_{1123}, m_{1223}, m_{1233} e per conseguenza sono arbitrari: m_{2221}, m_{2222}, m_{2223} e quindi l'equazione di ψ potrà scriversi:

$$\psi = \theta + x_2^3 (\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3) = 0$$

dove θ è la parte fissa e α, β, γ i coefficienti variabili. Dunque;

Per ogni retta che si può assumere come direttrice, esiste un sistema lineare triplo di quartiche direttrici aventi tutte sulla retta medesima quattro contatti tripunto.

17. — Un punto comune alla quartica data e alla hessiana di una quartica direttrice ψ, gode della proprietà che la sua conica polare deve spezzarsi in due rette ed esser tangente alla retta direttrice φ (N° 14). Cioè, a un punto A comune all'hessiana di ψ e alla quartica data corrisponde un punto A' della steineriana di ψ situato sopra φ: ma i punti A sono 24, i punti A' sono 12 il che vuol dire che l'hessiana di ψ tocca i 12 punti la quartica data. Quindi:

Le hessiane delle quartiche direttrici inviluppano la quartica data.

18. — Per completare la questione del N° 16 occorre vedere quali posizioni può assumere la retta direttrice φ.

Sia φ una retta generica del piano. Cerchiamo se, sopra di essa, esistano due punti A e C così che siano soddistatte le due condizioni del N° 14:

$$A_b = C_a, \quad A_c = C_b$$

dove a e c sono due coniche della serie che si considera e b è la conica che ne contiene gli otto punti di contatto con la quartica. Indichiamo con

μ_1, μ_2, i parametri che individuano sulla φ i punti A e C, con λ_1, λ_2, i valori del parametro λ che nella serie data individuano a e c (la b dipende dalle prime due (N^0 3)). Le due condizioni precedenti dànno luogo a 4 equazioni che contengono non omogeneamente λ_1, λ_2, μ_1, μ_2. Esiste quindi almeno un numero finito di soluzioni. Per conseguenza:

Una quartica generale può sempre considerarsi come la seconda polare di una retta generica del piano rispetto a un'altra quartica che, fissata quella retta, varia in un sistema lineare ∞^3.

III

Aggruppamenti di bitangenti.

19. — Dal N° 8 e dal N° 6 resulta che « quattro bitangenti $a\,b\,c\,d$ i cui 8 punti di contatto si trovano sopra una conica, individuano tre serie di coniche quadritangenti e cioè quelle determinale da $a\,b$, $c\,d$; $a\,c$, $b\,d$; $a\,d$, $b\,c$. Due di queste tre serie non possono avere altre bitangenti comuni a meno che la quartica non abbia un punto doppio (1).

Due coppie di bitangenti come $a\,b$, $c\,d$, appartenenti alla stessa serie, le chiameremo *congrue* e scriveremo $a\,b \equiv c\,d$, in caso contrario le chiameremo *incongrue* e scriveremo $a\,b \not\equiv c\,d$. Con queste notazione il teorema precedente si esprime molto semplicemente così:

Se $a\,b \equiv c\,d$, *ne consegue* $a\,c \equiv b\,d$, $a\,d \equiv b\,c$.

20. — Con l'ajuto di questo teorema e con l'osservazione fatta sopra, che due serie individuate da $a\,b$, $c\,d$ e da $a\,c$, $b\,d$ non possono avere al tre bitangenti comuni, è facile scrivere il prospetto delle 63 serie di coche quadritangenti desumendolo dalle 6 coppie di bitangenti che ogni serie contiene. A noi occorrono le seguenti (2):

$$a\,b \equiv c\,d \equiv e\,f \equiv g\,h \equiv i\,j \equiv k\,l, \tag{1}$$

$$a\,c \equiv b\,d \equiv m\,n \equiv o\,p \equiv q\,r \equiv s\,t, \tag{2}$$

$$a\,d \equiv b\,c \equiv u\,v \equiv w\,x \equiv y\,z \equiv \varphi\,\psi, \tag{3}$$

$$a\,e \equiv b\,f \equiv m\,u \equiv o\,w \equiv q\,y \equiv t\,\psi, \tag{4}$$

$$a\,f \equiv b\,e \equiv n\,v \equiv p\,x \equiv r\,z \equiv t\,\psi, \tag{5}$$

$$a\,m \equiv c\,n \equiv e\,u \equiv g\,x \equiv i\,z \equiv k\,\psi, \tag{6}$$

$$a\,n \equiv c\,m \equiv f\,v \equiv h\,w \equiv j\,y \equiv l\,\psi, \tag{7}$$

$$b\,m \equiv d\,n \equiv u\,f \equiv h\,x \equiv j\,z \equiv l\,\psi. \tag{8}$$

(1) SALMON, loc. cit. N° 258.

(2) SALMON, loc. cit. N° 259.

Si rileva facilmente che due serie qualunque o hanno 4, ovvero 6 bitangenti comuni (1). Nel 1° caso sono del tipo

$$a\,b \equiv c\,d \equiv e\,f \equiv g\,h \equiv i\,j \equiv k\,l\,,$$
$$a\,c \equiv b\,d \equiv m\,n \equiv o\,p \equiv q\,r \equiv s\,t\,.$$

Nel 2° caso sono dell'altro tipo

$$a\,b \equiv c\,d \equiv e\,f \equiv g\,h \equiv i\,j \equiv k\,l\,,$$
$$a\,m \equiv c\,n \equiv e\,u \equiv g\,x \equiv i\,z \equiv k\,\psi\,.$$

Chiameremo le prime: *serie congiunte di 1ª specie* e le seconde: *serie congiunte di 2ª specie.* Occorrendo nominare nel primo caso le coppie $a\,b$, c, d, $a\,c$, $b\,d$, le diremo *coppie di congiunzione.*

Una serie è congiunta di 1ª specie ad altre 30 e di 2ª specie ad altre 32.

Le serie congiunte di 1ª specie si presentano a gruppi di 3, a 3, tali che due qualunque di un gruppo sono congiunte fra loro. Ecco un esempio:

$$a\,b \equiv c\,d \equiv e\,f \equiv g\,h \equiv i\,j \equiv k\,l\,,$$
$$a\,c \equiv b\,d \equiv m\,n \equiv o\,p \equiv q\,r \equiv s\,t\,,$$
$$a\,d \equiv b\,c \equiv u\,v \equiv w\,x \equiv y\,z \equiv \varphi\,\psi\,.$$

Chiameremo un tal gruppo *gruppo di 1ª specie.* Esso esaurisce le 28 bitangenti.

Anche le serie congiunte di 2ª specie si presentano in gruppi analoghi di tre, a tre, così che due serie qualunque del gruppo sono congiunte. Chiameremo questi gruppi *gruppi di 2ª specie.*

$$a\,b \equiv c\,d \equiv e\,f \equiv g\,h \equiv i\,j \equiv k\,l\,,$$
$$a\,m \equiv c\,n \equiv e\,u \equiv g\,x \equiv i\,z \equiv k\,\psi\,,$$
$$b\,m \equiv d\,n \equiv u\,f \equiv h\,x \equiv j\,z \equiv l\,\psi\,,$$

da cui si vede che:

In un gruppo di 2ª specie una qualunque delle serie è costituita dalle bitangenti non comuni delle altre due.

Un gruppo di 2ª specie contiene solamente 18 bitangenti. Vedremo in seguito (N° 22) a che cosa dà luogo l'insieme delle 10 rimanenti. Ogni

(1) HUMBERT, *Sur une classe de courbes planes et sur surface remarquable du quatriéme ordre.* Journal de Mathémetiques (RÉSAL), Tome VI.

gruppo di 1ª specie individua una conica che passa per i quattro punti di contatto delle bitangenti che formano la quaterna di congiunzione e viceversa. Dunque:

I gruppi di 1ª specie sono 315. Il che risulta anche dall'osservare che una serie appartiene a 15 gruppi di 1ª specie e che, contando in tal modo i gruppi, ognuno è contato 3 volte. (Quindi il numero cercato è $\frac{63.15}{3} = 315$).

Analogamente si vede che:

I gruppi di 2ª specie sono $\frac{16 \,.\, 63}{3} = 336.$

21. Prendiamo un gruppo di prima specie:

$$a\,b \equiv c\,d \equiv e\,f \equiv g\,h \equiv i\,j \equiv k\,l,$$

$$a\,c \equiv b\,d \equiv m\,n \equiv o\,p \equiv q\,r \equiv s\,t.$$

$$a\,d \equiv b\,c \equiv u\,v \equiv w\,x \equiv y\,z \equiv \varphi\,\psi.$$

Esistono serie congiunte di 2ª specie con ciascuna serie del gruppo?

La risposta è negativa. Infatti, ammettiamo che esista una serie congiunta di 2ª specie con le prime due: si vede subito che è congiunta di 1ª specie con la 3ª. Poichè la serie supposta avrebbe 6 bitangenti comuni con la 1ª serie, una in ogni coppia, altre 6 comuni con la 2ª serie; se fosse congiunta di 2ª specie anche con la 3ª serie, dovrebbe avere anche con questa a comune 6 bitangenti; cioè nella 3ª serie dovrebbero figurare 6 bitangenti appartenenti alle altre due; il che non è. Dunque le serie che sono congiunte di 2ª specie contemporaneamente con le prime due del gruppo, vanno cercate fra le serie congiunte di 1ª specie con la 3ª del gruppo medesimo, cioè con la

$$a\,d \equiv b\,c \equiv u\,v \equiv w\,x \equiv y\,z \equiv \varphi\,\psi.$$

E ora si vede subito che, se una delle coppie di congiunzione è ad, ovvero $b\,c$, si trovano effettivamente serie congiunte di 2ª specie con le prime due del gruppo, altrimenti no. Quindi:

Non esistono serie congiunte di 2ª specie con tutte e tre le serie di un gruppo di 1ª specie.

Date due serie congiunte di 1ª specie fra loro, ne esistono 16 che sono congiunte di 2ª specie con entrambe.

Un esempio è il seguente: date le due congiunte di 1ª specie

$$a\,b \equiv c\,d \equiv e\,f \equiv g\,h \equiv i\,j \equiv k\,l\,;\; a\,c \equiv b\,d \equiv m\,n \equiv p\,o \equiv r\,q \equiv t\,s$$

la:

$$a\,u \equiv d\,v \equiv e\,m \equiv h\,p \equiv i\,r \equiv k\,s$$

è congiunta di 2ª specie con entrambe.

22. Sia un gruppo di 2ª specie:

$$a\,b \equiv c\,d \equiv e\,f \equiv g\,h \equiv i\,j \equiv k\,l\,,$$

$$a\,m \equiv c\,n \equiv e\,u \equiv g\,x \equiv i\,z \equiv h\,\psi\,,$$

$$b\,m \equiv d\,n \equiv u\,f \equiv h\,x \equiv j\,z \equiv l\,\psi.$$

Per ottenere una serie congiunta di 1ª specie con le prime due, basta costruire una serie congiunta di 1ª specie con una qualunque di esse prendendo, per una sua coppia, due bitangenti comuni alle due serie. La serie che si ottiene è congiunta di 1ª specie, non soltanto alle prime due, ma anche alla terza. P. es. la:

$$a\,c \equiv b\,d \equiv m\,n \equiv o\,p \equiv q\,r \equiv s\,t,$$

da cui si vede che le serie congiunte di 1ª specie con tutt'e tre le serie del gruppo dato sono costituite da tre coppie di congiunzione e da altre 6 bitangenti che appartengono alle 10 bitangenti escluse dal gruppo dato di 2ª specie. Dunque:

Una serie congiunta di 1ª specie con due di un gruppo di 2ª specie è congiunta di 1ª specie anche con la terza serie del gruppo.

Esistono 15 serie congiunte di 1ª specie con tutt'e tre le serie di un gruppo di 2ª specie.

Le 10 bitangenti che rimangono escluse da un gruppo di 2ª specie costituiscono 45 coppie esistenti a tre a tre nelle 15 serie congiunte di 1ª specie al gruppo dato: le altre tre coppie, in ogni serie, sono coppie di congiunzione

23. — Per procedere oltre nello studio delle configurazioni nascenti da particolari aggruppamenti di tangenti doppie, è necessario citare il seguente teorema dovuto a Aronhold (1) e riprodotto dopo da vari autori (2). Siano due serie congiunte di prima specie $ab \equiv cd \equiv \ldots$; $a\,c \equiv b\,d \equiv \ldots$ siano $m\,n$, $e\,f$ due coppie qualunque rispettivamente della 1ª e della 2ª serie. Allora, il teorema sopracitato stabilisce che le due terne di punti

$$b\,c,\ f\,n,\ m\,e \quad ; \quad a\,d,\ n\,e,\ f\,m$$

appartengono a due rette; che esistono 5040 di queste rette le quali passano a 40, a 40, per ogni punto comune a due bitangenti. Vogliamo studiare un po' più da vicino queste rette che chiameremo rette ϱ.

---

(1) *Ueber den gegenseitigen Zasammenhang der 28 Doppeltangenten einer allgemeinen Curve 4ten Grades.* Monatsberichte, Berlin, 1864.

(2) SALMON, loc. cit., n. 258, 266. — DE PAOLIS, *La trasformazione piona doppia e la sua applicazione alle quartiche* (Acc. Lincei, Memorie 1877-78).

24. La prima questione che si presenta è la seguente:

Date due coppie di bitangenti a piacere $s\,t$, $p\,q$, esiste un criterio semplice per giudicare se i punti $s\,t$, $p\,q$ appartengono a una retta ϱ? Siano le rette ϱ del N. precedente

$$b\,c,\quad f\,n,\quad m\,e,$$
$$a\,d,\quad n\,e,\quad f\,m.$$

Per ottenerle si sono prese le due serie congiunte di 1ª specie

$$ab \equiv cd \equiv ef \equiv \ldots$$
$$ac \equiv bd \equiv mn \ldots$$

dove ef, $m\,n$ erano due coppie qualunque delle due serie con la sola condizione di esser diverse dalle coppie di congiunzione: poi si è costruito il quadrilatero $e\,f\,m\,n$: una diagonale è la $e\,f$. $m\,n$ congiungente le due coppie date ef, $m\,n$: le altre due diagonali sono appunto le due rette ϱ e ciascuna passa per uno degli altri due vertici del quadrilatero $a\,b\,c\,d$ che sono diversi da quelli che forniscono le due coppie di congiunzione. Questa proprietà che caratterizzerebbe le coppie segantesi sopra una retta ϱ, oltre non esser semplice, ha lo svantaggio di far comparire in modo non simmetrico le tre coppie perchè essa pone in condizioni diverse le due coppie $f\,n$, $m\,e$ della coppia bc nella 1ª retta ϱ, e in condizioni ugualmente diverse le due coppie $n\,e$, $f\,m$ della coppia $a\,d$ nella 2ª retta ϱ. Invece risulterà dalle considerazioni che seguono come le tre coppie di una ϱ vi compariscano simmetricamente.

25. Per questo ci varremo delle serie scritte al n. 20. La (5) di quel n. ci dice che $af \equiv nv$, dunque (n. 19) sarà $fn \equiv av$. Analogamente, la (3) del medesimo N dà $a\,v \equiv d\,u$, $a\,u \equiv d\,u$, e la (4) $a\,u \equiv m\,e$. Quindi si ha il gruppo di 1ª specie (N 20);

$$a\,u \equiv d\,u \equiv f\,n \equiv \ldots,$$
$$a\,u \equiv d\,v \equiv m\,e \equiv \ldots,$$
$$a\,d \equiv u\,v \equiv b\,c \equiv \ldots,$$

il che prova che due qualunque delle tre coppie $b\,c$, $f\,n$, $m\,e$ della retta ϱ si possono riguardare come appartenenti a due serie congiunte di 1ª specie, ma diverse dalle coppie di congiunzione. Così apparisce intanto come le tre coppie di una ϱ siano in condizioni simmetriche le une rispetto alle altre.

Viceversa, prese due coppie come ef, mn, appartenenti a due serie congiunte di 1ª specie e diverse dalle coppie di congiunzione, dico che esse giacciono sopra una retta ϱ. Per convincersene basta prendere le due serie congiunte di 1ª specie:

$$av \equiv du \equiv fn \equiv \ldots$$

$$au \equiv dv \equiv me \equiv \ldots$$

e osservare che ad esse è applicabile il medesimo processo che il Salmon ad esempio applica (N. 258) alle due serie congiunte di 1ª specie $ab \equiv cd \equiv ef \ldots$, $ac \equiv bd \equiv mn \equiv \ldots$ per ottenerne due rette ϱ. Nel nostro caso quello stesso processo conduce alle due rette ϱ seguenti:

$$uv,\ ef,\ mn; \qquad ad,\ ne,\ fm.$$

Dunque:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè due coppie di bitangenti ef, mn, abbiano i loro punti ef, mn, sopra una stessa retta ϱ è che le due coppie appartengano a due serie congiunte di 1ª specie e siano diverse dalle coppie di congiunzione.

Segue che le 63 coniche armoniche alle 63 serie non possono spezzarsi in coppie di rette ϱ perchè le coppie di bitangenti di una retta ϱ sono a due, a due, incongrue. Quindi:

Dato un quadrilatero di bitangenti, se una diagonale è una retta ϱ, anche le altre due diagonali sono rette ϱ.

26. Sopra i gruppi di 1ª e di 2ª specie abbiamo poi i seguenti teoremi di cui il 1ª discende subito dalle considerazioni precedenti:

In un gruppo di prima specie, le 18 coppie di bitangenti delle tre serie che lo compongono, sono così costituite che i 18 punti di incontro delle 2 bitangenti di ciascuna coppia, stanno sei, a sei, sopra le tre coniche armoniche alle serie: 6 sono dati dalle coppie di congiunzione e sono i vertici del quadrilatero formato con le 4 bitangenti comuni alle 3 serie; gli altri 12 giacciono a 3, a 3, sopra 16 rette ϱ. Questa configurazione esaurisce tutte le 28 bitangenti.

Il numero di tali configurazioni è 315 (N. 20).

Di qui si trova che il numero delle rette ϱ è $315 \cdot 16 = 5040$.

Le 18 bitangenti di un gruppo di 2ª specie dànno luogo a 6 triangoli aventi ciascuno un vertice sopra ciascuna delle 3 coniche armoniche alle 3 serie che compongono il gruppo.

27. La (5) N. 20 è:

$$af \equiv nv \equiv be \equiv \ldots$$

segue (N. 19):

$$b\,n \equiv e\,v\,,$$

ma dalla (2) (N. 20);

$$b\,n \equiv d\,m\,,$$

per cui:

$$b\,n \equiv e\,v \equiv d\,m \equiv \ldots \tag{9}$$

segue:

$$d\,e \equiv m\,v$$

e dalla (1) (N. 20)

$$d\,e \equiv c\,f$$

onde:

$$d\,e \equiv m\,v \equiv c\,f \ldots \tag{10}$$

Allora esistono le seguenti coppie di serie congiunte di 1ª specie

$$1^a \begin{cases} a\,b \equiv c\,d \equiv e\,f \equiv \ldots & (1)\ (\text{N. } 20) \\ a\,c \equiv b\,d \equiv m\,n \equiv \ldots & (2)\ (\text{id.}) \end{cases}$$

$$2^a \begin{cases} a\,f \equiv n\,v \equiv b\,e \equiv \ldots & (5)\ (\text{N. } 20) \\ a\,n \equiv f\,v \equiv c\,m \equiv \ldots & (7)\ (\text{id.}) \end{cases}$$

$$3^a \begin{cases} e\,v \equiv d\,m \equiv b\,n \equiv \ldots & (9)\ (\text{N. } 4) \\ d\,e \equiv m\,v \equiv f\,c \equiv \ldots & (10)\ (\text{id.}) \end{cases}$$

Applicando a tutt'e tre queste coppie di serie il teorema che al n. 23 è stato applicato solamente alla prima coppia, si hanno le seguenti rette ϱ:

$$(1) \begin{cases} \varrho = b\,c, f\,n, m\,e \\ \varrho_1 = a\,d, n\,e, f\,m \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \varrho = f\,n, b\,c, m\,e \\ \varrho_2 = a\,v, b\,m, e\,c \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \varrho = e\,m, f\,n, b\,c \\ \varrho_3 = d\,v, b\,f, n\,c \end{cases}$$

Così a una retta ϱ sono associate le altre tre:

$$\varrho_1 = a\,d, n\,e, f\,m\,,$$

$$\varrho_2 = a\,v, e\,c, b\,m\,,$$

$$\varrho_3 = d\,v, n\,c, b\,f\,,$$

sopra ognuna delle quali hanno un vertice ciascuno dei tre triangoli:

$$a\,d\,v,\quad e\,n\,c,\quad m\,f\,b\,.$$

Ma gli ultimi due sono prospettivi a causa della esistenza della retta $\varrho = b\,c,\ f\,n,\ m\,e$: dunque le rette $\varrho_1\,\varrho_2\,\varrho_3$ s'incontrano in uno stesso punto R.

Intanto si può dire che:

Esistono degli aggruppamenti di 9 bitangenti costituiti, ciascuno, da tre triangoli prospettivi con la ulteriore particolarità che il centro di prospettiva è il medesimo per tutt'e tre le coppie di triangoli e sono pure le medesime le congiungenti i vertici corrispondenti.

28. Riprendiamo i triangoli $a\,d\,v,\ e\,n\,c,\ m\,f\,b$ e le tre rette ϱ che ne contengono, ognuna, tre vertici corrispondenti:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1 &= a\,d,\ n\,e,\ f\,m\,,\\ \varrho_2 &= a\,v,\ e\,c,\ b\,m\,,\\ \varrho_3 &= d\,v,\ n\,c,\ b\,f\,. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

I triangoli precedenti dànno luogo alle tre coppie:

$$a\,d\,v,\ e\,n\,c;\quad a\,d\,v,\ m\,f\,b;\quad e\,n\,c,\ m\,f\,b$$

i cui assi di prospettiva sono le tre rette ϱ:

$$\left.\begin{aligned} \varrho'_1 &= a\,e,\ n\,d,\ c\,v\,,\\ \varrho'_2 &= a\,m,\ f\,d,\ b\,v\,,\\ \varrho'_3 &= e\,m,\ f\,n,\ b\,c\,. \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

Ora, sopra ciascuna di queste tre rette, ha un vertice ognuno dei tre triangoli:

$$a\,e\,m,\ d\,n\,f,\ v\,c\,b$$

che sono prospettivi a causa delle (1): anzi le (1) sono gli assi di prospettiva delle tre coppie. Dunque anche le rette $\varrho'_1\ \varrho'_2\ \varrho'_3$ concorrono in uno stesso punto R. Quindi:

Ai triangoli di bitangenti $a\,d\,v,\ e\,n\,c,\ m\,f\,b$, prospettivi da un medesimo centro, fanno riscontro i triangoli $a\,e\,m,\ d\,n\,f,\ v\,c\,b$ prospettivi da un altro centro, così che gli assi di prospettiva delle coppie di triangoli, contenuti nella prima terna, sono le congiungenti i vertici corrispondenti nella seconda terna e viceversa. Gli assi di prospettiva sono sei rette ϱ e a tre, a tre, passano per i due centri di prospettiva.

Indicheremo con Ω la configurazione formata con le 9 bitangenti in

discorso. A ogni configurazione Ω sono coordinate 6 rette ϱ e due punti R.

29. Il seguente lemma riesce evidente quando se ne costruisca la figura relativa:

Date 3 coppie di rette che si tagliano in 3 punti in linea retta, si possono formare con esse 4 coppie di triangoli prospettivi: i centri di prospettiva e le congiungenti i vertici corrispondenti sono vertici e lati di un quadrangolo completo.

Prendiamo, per le tre coppie di rette date, le tre coppie di bitangenti $b\,c$, $f\,n$, $m\,e$ che si tagliano in punti di una retta ϱ. Si vede subito che le congiungenti i vertici corrispondenti dei triangoli prospettivi non sono altro che le diagonali dei quadrilateri $b\,c\,f\,n$, $b\,c\,m\,e$, $f\,n\,m\,e$ i quali hanno per diagonale comunale la retta ϱ. Dunque (n. 25) anche le altre diagonali sono rette ϱ.

Il lemma precedente dà il seguente teorema:

Data una retta ϱ, *con le 6 bitangenti che a due, a due, si tagliano su di essa, si possono formare 4 coppie di triangoli prospettivi: i centri di prospettiva e le congiungenti i vertici corrispondenti compongono un quadrangolo di quattro punti* R *e di sei lati* ϱ.

30. Segue che una retta ϱ individua 4 punti R. Ma si vede facilmente che a uno stesso punto R si giunge mediante 3 rette ϱ. P. es., detto R_1 il centro di prospettiva dei triangoli $b\,f\,m$, $c\,n\,e$, si trova subito che si giunge a R_1 non solo considerando la retta $b\,c$, $f\,n$, $m\,e$, ma anche le altre due $a\,e$, $n\,d$, $c\,v$; $a\,m$, $f\,d$, $b\,v$ scritte al N 29 sotto l'indicazione $(1)'$ e le quali, alla lor volta, concorrono in un punto R. Dunque il numero dei punti R è

$$\frac{5040\,.\,4}{3} = 6720.$$

Segue che, sopra ogni retta ϱ, ci sarà un numero X di punti R tale che

$$\frac{5040\,.\,X}{3} = 6720,$$

perchè per ogni punto R passano 3 rette ϱ. Quindi $X = 4$. *Le 5040 rette* ϱ *s'incontrano a 3, a 3, in 6720 punti* R, *così che, sopra ogni retta* ϱ, *esistono 4 punti* R.

Gli aggruppamenti Ω *sono*

$$\frac{6720}{2} = 3360.$$

31. Riprendiamo un aggruppamento Ω: p. es. quello dei N^{i} 27 e 28 costituito dalle 9 bitangenti a, d, v, e, n, c, m, f, b organizzate nelle due terne di triangoli:

$$a\,d\,v,\ e\,n\,c,\ m\,f\,b;\qquad a\,e\,m,\ d\,n\,f,\ v\,c\,b.$$

Si riconosce subito che esiste una e una sola bitangente u tale che con ciascun triangolo dia luogo a due coppie di bitangenti congrue. Diremo che la bitangente u è *coordinata* all'aggruppamento Ω. Vogliamo dimostrare che se si sostituisce una qualunque delle bitangenti dell'aggruppamento: p. es. la v, con la u, si trova un nuovo aggruppamento Ω la cui bitangente coordinata è la v. Infatti: esistono le rette ϱ seguenti (N° 23):

$$\varrho_1 = a\,d,\ n\,e,\ f\,m,\qquad \varrho'_1 = f\,n,\ b\,c,\ m\,e.$$

Poi, si prenda la serie (4) e la (6) del N° 20 e si troverà (N° 23), insieme alla ϱ'_1, la $\varrho_2 = a\,u,\ b\,n,\ f\,c$: secondariamente si osservi che dalle (6) e (8) del N° 20 medesimo si ha:

$$e\,c \equiv u\,n \equiv d\,f,$$

e quindi da questa e dalla (8) suddetta si ottiene, insieme alla ϱ'_1, la $\varrho'_3 = u\,d,\ e\,b,\ m\,c$: ugualmente dalla (6) e dalla $e\,c \equiv u\,n \equiv d\,f$ risulta la esistenza della ϱ_1 e della $\varrho'_3 = a\,f,\ u\,c,\ d\,m$, e così pure dalle (4) e (8) si trovano la ϱ_1 è la $\varrho'_2 = a\,n,\ u\,b,\ d\,e$. Quindi, riassumendo, si hanno le seguenti 6 rette ϱ:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1 &= a\,d,\ n\,e,\ f\,m \\ \varrho_2 &= a\,u,\ b\,n,\ f\,c \\ \varrho_3 &= u\,d,\ b\,e,\ m\,c \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \varrho'_1 &= f\,n,\ b\,c,\ m\,e \\ \varrho'_2 &= a\,n,\ u\,b,\ d\,e \\ \varrho'_3 &= a\,f,\ u\,c,\ d\,m \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

il che significa che i triangoli di bitangenti

$$a\,d\,u,\ e\,n\,b,\ m\,f\,c;\qquad a\,n\,f,\ u\,c\,b,\ d\,e\,m,$$

formano un aggruppamento Ω c. d. d.

Dunque:

Le 9 bitangenti di un gruppo Ω e la bitangente x coordinata al gruppo sono in tal relazione che aggiungendo x al gruppo e togliendone una qua-

lunque delle altre, il pruppo che risulta è ancora un gruppo Ω.

Si vede subito che le 18 bitangenti che si escludono assumendo un gruppo Ω e la bitangente coordinata, costituiscono un gruppo di 2ª specie, e viceversa. Dunque:

Le 10 bitangenti che rimangono escluse da un gruppo di 2ª specie costituiscono, in 10 modi diversi, un aggruppamento Ω *con la relativa bitangente coordinata.*

Ecco quindi una regola semplice per costruire un aggruppamento Ω: *si prenda un gruppo di 2ª specie e delle 10 bitangenti che non entrano nel gruppo se ne escluda una qualunque. Le 9 rimanenti costituiscono il gruppo cercato.* Si ritrova così anche il numero dei gruppi Ω. Esso deve essere il decuplo del numero dei gruppi di 2ª specie, cioè (N° 20): 336. 10 = 3360.

32. Le rette ϱ e i punti R si sono presentati anche a Geiser nella nota configurazione che egli ha immaginato per lo studio della quartica piana (1). Ma nel valutare il numero tanto delle rette ϱ quanto dei punti R bisogna tener conto che tutta la configurazione è per così dire attaccata a una bitangente (che potrebbe dirsi fondamentale) della quartica e quindi quel che si dice per una tale bitangente si può ripetere per tutte prendendo successivamente tutte le bitangenti per bitangente fondamentale e costruendo, volta per volta, una nuova superficie cubica ausiliaria. Altrimenti la enumerazione suddetta non è esatta. Così p. es. il Geiser trova soltanto 720 rette ϱ e 240 punti R. Riprendiamo qui tutta la figura di Geiser e con l'aiuto della notazione adottata, e di qualcuno dei teoremi già stabiliti, ritroveremo il numero dei punti R e delle rette ϱ. Da quella figura risulta, prima di tutto, che la condizione necessaria e sufficiente affinchè un triangolo di bitangenti sia immagine di un triangolo esistente sulla superficie cubica F_3, è che i 6 punti di contatto stieno sopra una conica la quale contenga anche i punti di contatto della bitangente fondamentale a.

Ora una bitangente fa parte di 27 coppie e ciascuna di esse è congrua ad altre 5, quindi il numero dei triangoli di bitangenti che sono immagini di triangoli esistenti in F_3 è $\frac{5 \,.\, 27}{3} = 45$. I 720 spigoli e i 240 vertici dei triedri di Steiner si projettano in 720 rette ϱ e in 240 punti R. Una coppia di triedri conjugati si projetta in un aggruppamento Ω. Ma per bitangente fondamentale può esser presa una bitangente qualunque, quindi le rette ϱ sono al massimo 28 . 720. Dico al massimo perchè si vede che una retta ϱ è così contata 4 volte. Infatti sia la retta $\varrho = b\,c$,

(1) *Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades.* Math. Ann. Band I.

$f\,n$, $m\,e$ (N° 23). Le 3 coppie $b\,c$, $f\,n$, $m\,e$ appartengono alle tre serie congiunte di 1ª specie (N. 25):

$$a\,v \equiv d\,u \equiv f\,n \equiv \ldots,$$
$$a\,u \equiv d\,v \equiv m\,e \equiv \ldots,$$
$$a\,d \equiv u\,v \equiv b\,c \equiv \ldots.$$

Allora, secondo l'osservazione precedente, sono projezioni di triangoli esistenti sulla F_3:

quando si prenda per bitangente fondamentale la a, i seguenti . . . . . $\left\{\begin{array}{l} e\,m\,u \\ b\,c\,d \\ f\,n\,v \end{array}\right.$

quando si prenda per bitangente fondamentale la u, i seguenti . . . . . $\left\{\begin{array}{l} e\,m\,a \\ b\,c\,v \\ f\,n\,d \end{array}\right.$

quando si prenda la v. . . . . $\left\{\begin{array}{l} e\,m\,d \\ b\,c\,u \\ f\,n\,a \end{array}\right.$

quando si prenda la d. . . . . $\left\{\begin{array}{l} e\,m\,v \\ b\,c\,a \\ f\,n\,u \end{array}\right.$

e ogni terna di triangoli dà la medesima retta $\varrho \equiv b\,c$, $f\,n$, $m\,e$. Dunque il numero delle rette ϱ è $\dfrac{720\,.\,28}{4} = 5040$.

Ogni bitangente, assunta come fondamentale, dà origine a 120 aggruppamenti Ω. Viceversa, si vede subito che una stessa fig. Ω non può provenire da due diverse bitangenti fondamentali, perchè se esse fossero a e b e se $m\,n\,p$ fosse un triangolo di Ω, dovrebbero trovarsi sopra una stessa conica i punti di contatto di a, b, m, n, p, cioè la quartica dovrebbe spezzarsi. Dunque le figure Ω sono $120\,.\,28 = 3360$ e i punti R: $3360\,.\,2 = 6720$. Segue anche: *Mentre un aggruppamento* Ω *è coordinato a una sola bitangente, una bitangente è coordinata a 120 aggruppamenti* Ω. *Ogni aggruppamento* Ω *può sempre pensarsi come la projezione di due triedri conjugati di Steiner.*

Dei 4 punti R, esistenti sopra una retta ϱ, *uno qualunque, ma non più d'uno alla volta, può pensarsi come la projezione del vertice di un triedro di Steiner.*

33. Una bitangente a quanti aggruppamenti Ω appartiene? Sia a la bitangente data; b la bitangente coordinata al gruppo Ω. Supponiamo che a appartenga a Ω. Permutiamo a con b, troveremo (N. 31) un gruppo Ω_1 coordinato ad a e contenente b. Allora, se scambiamo a con ogni bitangente di Ω_1 otteniamo 9 gruppi Ω che contengono a. Dunque ogni gruppo coordinato ad a dà 9 gruppi Ω cui a appartiene. Si vede facilmente, che in questo modo di enumerazione, ogni gruppo non è ripetuto. Dunque il numero cercato è $120 \,.\, 9 = 1080$. Da cui si ritrova ancora il numero dei gruppi Ω uguale a

$$\frac{1080 \,.\, 28}{9} = 3360.$$

Una bitangente fa parte di 1080 gruppi Ω.

Supponiamo fissata una bitangente fondamentale nella figura di Geiser. Togliamo i 120 gruppi Ω che esauriscono tutte le projezioni dei triedi di Steiner, togliamo i 1080 gruppi Ω a cui appartiene la bitangente fondamentale. Rimangono 2160 gruppi Ω, ognuno costituito di 9 bitangenti, le cui obbiettive sono rette esistenti sulla F_3, ma non costituenti coppie di triedri di Steiner conjugati, benchè la projezione del gruppo fatta da un punto della superficie non si distingua da quella di una coppia di triedri conjugati.

SOPRA LA CORRISPONDENZA POLARE FRA CONICHE INVILUPPO E CONICHE LUOGO STABILITA DA UNA QUARTICA PIANA.

[*Rendic. R. Acc.: Lincei 1895*]

La Nota presente ha per iscopo di mostrare come molte delle più conosciute curve invariantive di una quartica piana, provengono dalla nota corrispondenza polare fra coniche inviluppo e coniche luogo che la quartica medesima stabilisce e come, per mezzo della stessa corrispondenza, tali curve si possano organizzare in modo semplice e naturale. Fra di esse sono il covariante S e il contravariante ψ di Clebsch (1) di cui ritrovo qui le caratteristiche plückeriane con procedimenti molto più rapidi di quelli impiegati per lo stesso scopo nella mia Memoria antecedente su tale argomento (2). Le considerazioni di cui mi valgo sono in gran parte prese dalla geometria degli iperspazi e in particolare si riferiscono alla superficie di Veronese, alla varietà costituita dai suoi pianî tangenti e alle varietà duali d'entrambi, che indico rispettivamente coi simboli F_2^4, M_4^3, Φ_2^4, $\boldsymbol{M}_4^3$ già impiegati da Veronese (3) e da Segre (4).

1. — Sia la quartica $a_x^4 = b_x^4 = c_x^4 =$ del piano π. Presa una qualunque conica inviluppo $\mu_u^2 = 0$ di π, la conica luogo $a_\mu^2\, a_x^2 = 0$ è la polare della prima e la prima lo è della seconda. Se la conica $\mu_u^2 = 0$ consiste di una coppia di punti, ovvero di un punto doppio, la conica polare diviene la conica polare mista, o la conica polare pura della coppia di

(1) CLEBSCH, *Ueber Curven vierter ordnung.* Crelle, Bd. 59.

(2) *Sopra due curve invariantive di una quartica piana.* Ann. di Mat. pura e applicata, serie II, tomo XX, 1892.

(3) VERONESE, *La superficie omaloide normale a due dimensioni e del 4º ordine dello spazio a cinque dimensioni.* Mem. Acc. Lincei, serie III, vol. XIX.

(4) SEGRE, *Sulla geometria delle coniche di un piano.* Atti Accad. delle Scienze di Torino, 1885.

punti, o del punto. Questa corrispondenza fra coniche inviluppo e coniche luogo e la sua inversa si rappresentano molto opportunamente nell'S_5, di cui i punti e gli iperpiani sieno rispettivamente le coniche inviluppo e le coniche luogo di π, mediante la polarità rispetto a una certa quadrica Q_4^2, che chiameremo fondamentale, di cui l'equazione è:

$$\begin{aligned} Q_4^2 = {} & a_{1111}\, y_1^2 + a_{2222}\, y_2^2 + a_{3333}\, y_3^2 + a_{1212}\, y_4^2 + a_{1313}\, y_5^2 + a_{2323}\, y_6^2 + \\ & + 2a_{1122}\, y_1 y_2 + 2a_{1133}\, y_1 y_3 + 2a_{1112}\, y_1 y_4 + 2a_{1113}\, y_1 y_5 + 2a_{1123}\, y_1 y_6 + \\ & + 2a_{2233}\, y_2 y_3 + 2a_{2212}\, y_2 y_4 + 2a_{2213}\, y_2 y_5 + 2a_{2223}\, y_2 y_6 + 2a_{3312}\, y_3 y_4 + \\ & + 2a_{3313}\, y_3 y_5 + 2a_{3323}\, y_3 y_6 + 2a_{1213}\, y_4 y_5 + 2a_{1223}\, y_4 y_6 + 2a_{1323}\, y_5 y_6 = 0 \end{aligned}$$

e la quale gode la proprietà di essere apolare alla Φ_2^4 (1). Il discriminante D della quadrica fondamentale è il noto invariante di sesto grado della quartica: così possiamo intanto affermare che:

La corrispondenza polare fra coniche inviluppo e coniche luogo e la sua inversa sono biunivoche senza eccezione finchè $D \neq 0$.

Le corrispondenze polari stabilite da tutte le quartiche di π, *per cui* D *ha la stessa caratteristica, sono proiettivamente identiche.*

2. — Nella corrispondenza inversa, data la conica luogo $m_x^2 = 0$, si scrive immediatamente l'equazione della conica inviluppo polare sotto la forma:

$$A_m^2\, A_u^2 = 0$$

ove i simboli A e A (equivalenti) sono legati ai coefficienti effettivi dalle relazioni:

$$A_i\, A_r\, A_j\, A_s = \frac{1}{a_{ir}} \cdot \frac{1}{a_{js}}\, A_{ir,js}$$

essendo (2)

$$A_{ir,js} = A_{ri,js} = A_{ir,sj} = A_{ri,sj} = A_{js,ir} = A_{sj,ir} = A_{sj,ri} = A_{js,ri}$$

il complemento algebrico di a_{irjs} in D e avvertendo che tanto a_{ir}, quanto a_{js} rappresentano 1, o 2 a seconda che gl'indici che affettano il simbolo a sono uguali, o disuguali.

Quando la conica data si scinde in un paio di rette v, w, l'equazione della conica polare diviene:

$$A_v\, A_w\, A_u^2 = 0$$

---

(1) SEGRE, *Alcune idee di Ettore Caporali intorno alle quartiche piane.* Annali di Mat. serie II, tomo XX. — I simboli della equazione sopra scritta di Q^2_4 divengono quelli di Segre, ponendo:

$$y_1 = x_{11}\,,\ y_2 = x_{22}\,,\ y_3 = x_{33}\,,\ y_4 = 2x_{12}\,,\ y_5 = 2x_{13}\,,\ y_6 = 2x_{23}\,.$$

(2) CLEBSCH, loc. cit.

Se le rette v, w coincidono, essa è infine

$$A_v^2 A_u^2 = 0$$

valendo tutte le circostanze precedenti nel passaggio dai coefficienti simbolici agli effettivi con la sola differenza che adesso a_{ir} è sempreuguale a uno.

3. — La polarità così stabilita mette in rilievo una certa corrispondenza fra le più note curve invariantive della quartica, mediante la quale esse si organizzano a due, a due, così che le caratteristiche plückeriane duali di curve corrispondenti vengono a essere uguali. Cominciamo dalla polohessiana di un punto P (1) (hessiana della cubica polare di P). La polohessiana di P può considerarsi come il luogo di un punto variabile R tale che la coppia di punti PR abbia per conica polare una coppia di rette. Nel nostro S_5, l'obbiettiva della polohessiana di P si ottiene evidentemente prendendo l'S_2 di seconda specie tangente alla F_4^2 nel punto che è l'obbiettivo di P e tagliando, con questo piano, la polare reciproca di M_4^3 rispetto alla Q_2^4: la sezione corrisponde omograficamente (2) alla polohessiana di P. Eseguiamo la costruzione duale in S_5. Dovremo prendere la Φ_2^4, uno dei suoi iperpiani I, l'S_2 che contiene la conica di contatto dell'iperpiano I e costruire la sviluppabile inviluppo degli iperpiani che passano per l'S_2 nominato e appartengono alla polare reciproca di M_4^3 rispetto a Q_4^2. Questa sviluppabile sarà rappresentata dall'inviluppo di quella retta variabile la quale associata con una retta fissa (la immagine di I), individua una conica che ha per polare una coppia di punti. Ebbene quest'inviluppo non è altro che la K_r di Caporali (1). Mediante quindi la dualità che esiste in S_5, fra le obbiettive della polohessiana e la K_r di una retta, è facile passare da proprietà della prima a proprietà della seconda. Così p. es. ai teoremi: la polohessiana è una curva del 3° ordine; se la polohessiana di P passa per P′ viceversa la polohessiana di P′ passa per P, fànno riscontro quest'altri: la K_r è una curva di 3ª classe; se la K_r di r tocca r tocca r', viceversa la $K_{r'}$ di r' tocca r (1).

4. — L'hessiana della quartica può pensarsi come il luogo di un punto, il quale contato due volte, costituisce una conica la cui polare è una coppia di rette. La sua obbiettiva in S_5 è la sezione di F_2^4 con la polare reciproca di M_4^3 rispetto a Q_4^2 (3). La sviluppabile duale è l'inviluppo degli

(1) Caporali, *Sopra le quartiche piane.* Volume delle sue Memorie.

(2) Segre, *Sulla geometria delle coniche di un piano,* loc. cit.

(3) Di qui si ritroverebbe l'ordine dell'hessiana. Perchè tale sezione in S_5 è di 12° ordine, per cui ha 12 punti comuni con la C_1^4 sezione di un iperpiano con la F_2^4, ma la C_1^4 si rappresenta in una conica: dunque l'ordine cercato è 6.

iperpiani comuni a Φ_2^4 e alla polare reciproca di M_4^3, e la sua immagine è evidentemente l'inviluppo di una retta la quale, contata due volte, ha per conica polare una coppia di punti, cioè la ψ di Clebsch. Segue che l'ordine dell'hessiana è uguale alla classe di ψ, che il genere della prima è uguale a quello della seconda, che ψ è privo di bitangenti, perchè, l'hessiana non ha punti doppi, che insomma può enunciarsi il teorema:

L'hessiana e il contravariante ψ di Clebsch hanno le caratteristiche plückeriane duali uguali (1).

5. — Il medesimo processo mediante il quale si trova l'equazione della polohossiana di un punto e da essa quella della hessiana, serve per trovare l'equazione della K_r e da essa quella di ψ. Per la polohessiana di un punto y, basta esprimere che la conica polare della coppia costituita da y e da un punto variabile x è una coppia di rette. Si trova come è noto:

$$a_y\ b_y\ c_y\ a_x\ b_x\ c_x\ (abc)^2 = 0$$

L'hessiana può pensarsi come il luogo di un punto che giace sulla propria polohessiana. Quindi la precedente per $y = x$ dà l'equazione della hessiana. Analogamente, esprimendo che la conica polare della coppia di rette uv, delle quali v è fissa e u variabile, si spezza in due punti, troveremo la equazione della K_r

$$K_r = A_v\, B_v\, C_v\, A_u\, B_u\, C_u\, (ABC)^2 = 0$$

e così pure, riguardando la ψ come l'inviluppo di una retta tangente alla propria K_r, ne troveremo l'equazione ponendo nella precedente $u = v$, onde

$$\psi = A_n^2 B_u^2\, C_u^2\, (ABC)^2 = 0$$

nelle quali valgono per i simboli A, A; B, B; C, C le avvertenze fatte alla fine del n. 2 per i simboli A, A (2).

---

(1) CIANI, loc. cit.

(2) L'equazione di ψ si trova anche in Clebsch, loc. cit., ma non sotto forma simbolica. Essa e ottenuta nel N. 4 della sua citata Memoria. — La riduzione fatta al N. 5 non è giusta, come già ebbi a osservare nel n. 2 del mio lavoro. Al qual proposito anzi è da notarsi come i determinati della forma:

$$\begin{vmatrix} A_{ik,11} & A_{i'k',12} & A_{i''k'',13} \\ A_{ik,21} & A_{i'k',22} & A_{i''k'',23} \\ A_{ik,21} & A_{i'k',23} & A_{i''k'',33} \end{vmatrix}$$

che compariscono nella equazione suddetta, non solamente per *qualche* valore di i, k, i', k', i'', k'' non possono essere minori del reciproco di D, ma per *nessun* valore dei sunnominati indici ciò può accadere: dunque il *distacco* del fattore D, invocato da Clebsch, non avviene per *nessun* termine della equazione medesima.

6. — Riprendiamo la curva e la sviluppabile, in S_5, le quali sono le obbiettive di una polohessiana e di una K_r. Le loro polari reciproche rispetto a Q_4^2, saranno rispettivamente rappresentante, in π, dall'inviluppo costituito da tutte quelle coppie di rette, le cui coniche polari sono coppie di punti aventi tutte un punto fisso comune e dal luogo di quelle coppie di punti le cui coniche polari sono coppie di rette dotate di una retta fissa comune. L'inviluppo è la polocayleyana del punto (cayleyana della cubica polare); il luogo è la G_r della retta (cfr. Caporali). Queste due curve sono rappresentate contemporaneamente dalla forma mista

$$(abu)\ (acu)\ (bcu)\ (abc)\ a_x\, b_x\, c_x = 0$$

a seconda che vi si faccia $x = \text{cost}$, ovvero $u = \text{cost}$ (1).

7. — Analogamente, costruendo, in S_5, le polari reciproche, rispetto a Q_4^2, di quella curva e di quella sviluppabile rappresentate in π dall'hessiana e dall'inviluppo ψ, troveremo un'altra sviluppabile (σ) e un'altra curva (S) le quali saranno rappresentate, in π, rispettivamente dall'inviluppo σ delle coppie di rette che sono coniche polari dei punti dell'hessiana e dal luogo S di quelle coppie di punti le cui coniche polari sono le tangenti di ψ (ognuna contata due volte): quest'ultima è il covariante S di Clebsch. La corrispondenza fra (σ) e (S) è biunivoca, ma non fra (σ) e σ nè fra (S) e S perchè gl'iperpiani di (σ) si specchiano in coppie di tangenti di σ e i punti di (S) in coppie di punti di S non dotate di elementi fissi. Non si può quindi inferirne che S e σ abbiano le caratteristiche plückeriane duali uguali. Infatti è noto che S è di 4° ordine: σ è di 12ª classe (2) e non riducibile certamente a una curva tripla di 4ª classe, altrimenti essa, avendo a comune con l'inviluppo equianarmonico le 24 tangenti di flesso della quartica, dovrebbe coincidere con l'inviluppo equianarmonico medesimo il che, si vede facilmente, non può avvenire per una quartica generica (3).

8. — Cade qui opportuno il dimostrare con molta semplicità che il covariante S è privo di nodi e di cuspidi (cfr. la mia prima Memoria). Per questo osserveremo prima, come la sola considerazione della nostra polarità, in S_5, ci dice che presa, una conica luogo L, di essa una conica armonica, di questa la polare; la conica polare di L è armonica a que-

(1) MAISANO *Sistemi completi dei primi cinque gradi della forma ternaria biquadratica* ecc. Giornale di Napoli, vol. XIX.

(2) CREMONÀ, *Curve piane*, n. 128.

(3) Per accertarsene si prenda per un vertice del triangolo fondamentale un punto dell'hessiana e per lato opposto una delle due rette in cui si spezza la conica polare del punto preso. — Dopo, si tagli con questa retta la quartica, e si vedrà che la condizione equianarmonica non è genericamente adempiuta.

st'ultima. Nel caso particolare che la conica data sia una retta doppia, ne segue il teorema:

« *I quattro triangoli polohessiani dei 4 punti nei quali una retta taglia il covariante* S, *sono circoscritti alla conica polare della retta* ».

I loro lati costituiscono le 12 tangenti comuni a ψ e a tale conica. Ammettiamo ora che esista un puto doppio per S. Ciò significa che qualunque retta, per quel punto, taglia S in tre punti distinti e quindi i 4 triangoli precedenti sono ridotti a tre, onde tutte quelle rette, ciascuna pensata come doppia, avrebbero una medesima conica polare: cioè quella che tocca ψ nei tre punti in cui ψ è toccato dal triangolo polohessiano del punto doppio supposto (e qui si noti come ψ, non avendo tangenti multiple, il suddetto triangolo deve toccare ψ in tre soli punti, uno sopra ciascun lato). Ora tutto questo è impossibile perchè la polarità in discorso è corrispondenza biunivoca finchè $D \neq 0$, ossia finchè la quartica è generale

Il ragionamento precedente potrebbe far difetto per quei punti di S che sono cuspidi della Steineriana, giacchè i loro triangoli polohessiani hanno ciascuno due lati coincidenti, ma se si pensa che le 24 cuspidi della Steineriana, riguardate come punti semplici di S, esauriscono tutte le intersezioni di S con la Steineriana medesima, si vede che il dubbio anche in questo caso si toglie. Dunque S non ha nè nodi, ne cuspidi. E a proposito del covariante S e del contravariante ψ noto qui una inesattezza sfuggitami ai due N^i. ultimi della mia già citata Memoria. E consiste in questa: « ogni punto di ψ gode la proprietà che la sua polohessiana tocca S » ciò è indubbio. Ma viceversa non può dirsi che ψ esaurisca tutto il luogo dei punti che godono tale proprietà (come nei due N^i suddetti è inesattamente affermato). Tal luogo è evidentemente costituito da ψ e da S medesimo. Dunque quando si esprime la condizione di contatto di una polohessiana in S annullando il relativo tact- invariante si troverà l'equazione di ψ e quella di S contata un certo numero di volte (sei volte).

9. — È noto che il covariante S può anche pensarsi come il luogo di un punto la cui polohessiana è un triangolo (1). Una tal definizione riguarda

(1) Un punto P di S associato con uno variabile, sopra un lato del triangolo polohessiano di P, dà luogo a una schiera di coppie di punti tali che le loro coniche polari sono coppie di rette involutorie di un fascio di cui il centro è il vertice opposto del triangolo polohessiano. In S_5 gli obbiettivi di quella schiera e di quel fascio sono una retta e un S_3 polari reciproci rispetto a Q_4^2 e contenuti rispettivamente nell'M_4^3. — Variando il punto P sopra S si hanno due superficie (o meglio un luogo di S_1 e un luogo di S_3) polari reciproche l'una dell'altra, le quali non sono forse prive di qualche interesse. Così, ad esempio, quella (rigata) che giace in M_4^3 è costituita da infiniti triangoli di cui i vertici costituiscono la obbiettiva del covariante S. — L'ordine della superficie è 36 e lo si determina facilmente tagliandola con un S_3 rappresentato in π da tutte le coniche tangenti

non più coppie di punti di S, ma i suoi singoli punti. Quando voglia farsi altrettanto per σ, si può dire evidentemente che « *essa è l'inviluppo di una retta la cui* G_r *ha un punto doppio* ». Approfittando di questa definizione l'equazione si scrive facilmente perchè l'equazione di G_r è nota (N° 6).

10. — Riprendiamo il covariante S, il contravariante σ e le loro obbiettive iperspaziali (S) e (σ). Se (P) è un punto di (S), poichè (P) è sopra M_1^3 ne viene che per (P) si possono tirare due piani di 2ª specie di cui i punti di contatto (U) e (V) con F_2^4 sono rappresentati dai due punti U e V di S che sono obbiettivamente dati da (P). Quindi l'iperpiano di Φ_2^4 che tocca F_2^4 lungo la conica passante per (U) (V) è rappresentato in π dalla retta UV. La costruzione duale in S_5 conduce a questo. Sia (p) un iperpiano generico di (σ): esso taglia F_2^4 in due coniche (u) (v) che sono rappresentate in π da quelle rette u, v di σ che costituiscono la coppia di cui l'obbiettiva è (p). Quindi il punto (u) (v) di F_2^4 è rappresentato dal punto uv di π e imitando il ragionamento del N° 4 potremo concluderne che:

« *Hanno caratteristiche plückeriane duali uguali la Steinariana e l'inviluppo delle rette che congiungono punti corrispondenti del covariante* S ». Cioè quest'inviluppo è di 12ª classe, ha 21 bitangenti, 24 flessi, è di ordine 18, ha 84 punti doppî, 42 cuspidi.

Si vedrebbe anche che le 21 bitangenti sono costituite da quelle 21 rette che si staccano dalle cubiche polari dei 21 punti doppî della Steineriana.

---

a due rette: l'obbiettiva del covariante S è quadrupla per la superficie medesima, cioè in un punto di quella obbiettiva hanno un vertice comune due triangoli: il piano di ciascuno di quei triangoli è un S_2 di seconda specie, ogni altro S_2 di seconda specie è spazio 12-secante. La sezione iperplanare è di 36° ordine e possiede 12 punti quadrupli (perchè l'obbietiiva di S è di 12° ordine). — Se però l'iperpiano secante è di S_2^4, la sezione si compone di 4 triangoli e di una curva residua di 24° ordine ecc.

SOPRA I SISTEMI LINEARI DI CURVE ALGEBRICHE PIANE

[*Giorn. di mat. 1895*]

Le considerazioni seguenti si svolgono nel medesimo ordine d'idee delle « *Ricerche sopra i sistemi lineari di curve piane* » del prof. G. Castelnuovo (1). Noi ci poniamo nelle stesse ipotesi prestabilite in quella Memoria, ne adopreremo continuamente i resulati e anche le notazioni: dovendola citare ci serviremo del simbolo C con l'indicazione del N utile caso per caso.

È quindi opportuno, anzitutto, riportare qui il significato di tali simboli e notazioni insieme a qualcuno dei resultati principali.

I sistemi di curve algebriche piane i quali formano oggetto di questi studii sono quelli definiti completamente dai loro punti base.

Siffatti sistemi si ottengono scegliendo, fra tutte le curve di uno stesso ordine n, quelle che soddisfano a condizioni lineari esprimenti soltanto il passaggio multiplo, o semplice, per determinati punti del piano il cui gruppo indichiamo con A.

Ora, può darsi che assegnando la moltiplicità ν_i nel punto base i alla curva generica del sistema, essa venga a passare per quel punto con una moltiplicità superiore a ν_i in conseguenza di tutte le codizioni a cui il sistema è sottoposto.

Quest'ultima che è superiore o uguale a ν_i si chiama « *moltiplicità effettiva* » del sistema nel punto i, mentre il numero ν_i vien detto « *moltiplicità virtuale* «. Analogamente, il numero K definito dalla

$$K = \frac{1}{2} \left\{ n(n+3) - \Sigma \nu (\nu+1) \right\}$$

si chiama « *dimensione virtuale* » del sistema, mentre vien chiamata « *dimensione effettiva* » il numero k dei punti arbitrari del piano per i quali

(1) Memorie della R. Accademia di Seienze di Torino. — Serie II, T. XLII anno 1891.

passa una sola curva del sistema. Se $k = K$ il sistema si chiama « *regolare* », se $k > K$ il sistema è detto « *sovrabbondante* » e la differenza $k - K$ esprime la « *sovrabbondanza* » del sistema. Quando il sistema è costituito da una sola curva è $k = 0$. Se un sistema è sovrabbondante, esistono quindi dei vincoli che legano i punti base, ma non viceversa. Infatti si costruiscono facilmente sistemi regolari i cui punti base sono vincolati [ad esempio quello formato da tutte le cubiche aventi tre punti base semplici in linea retta è regolare perchè il numero dei punti base è inferiore a nove (C N° 26)].

« *La serie caratteristica* » del sistema è quella segnata, sopra la curva generica, da tutte le altre. La condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema sia regolare si esprime molto semplicemente esigendo che la serie caratteristica sia *non speciale* (C N° 18).

Il numero D definito dalla relazione

$$D = n^2 - \Sigma \nu^2$$

esprime generalmente il numero delle intersezioni di due curve del sistema fuori dei punti base (o secondo la denominazione di Castelnuovo) il numero delle intersezioni rispetto ad A', ma molte volte un tal significato geometrico può mancare riuscendo D nullo, o negativo. In ogni caso però noi seguiteremo a chiamare D il « *grado* » del sistema.

Il sistema aggiunto d'ordine $n - 3$ è in generale costituito da una parte fissa e da un si stema irriducibile. Quest'ultimo è il cosidetto « *sistema aggiunto puro* » di Castelnuovo ed ha carattere invariantivo per trasformazioni Cremoniane (C N° 27). Noi manterremo insieme alle altre anche questa denominazione e chiameremo « *sistema aggiunto totale* » l'intero sistema aggiunto d'ordine $n - 3$. Se k', K' ne sono le dimensioni effettiva e virtuale, i numeri

$$p = k' + 1 \quad , \quad P = K' + 1$$

si dicono i *generi effettivi e virtuale* del sistema.

Segue $p \geq P$. Se il sistema è irriducibile si ha $p = P$.

I numeri k, K, s, D, p, P hanno carattere invariantivo per trasformazioni cremoniane (C N° 8) e fra di essi passa la nota relazione

$$D = K + P - 1$$

ovvero l'altra ugualmente utile:

$$3n - \Sigma \nu = K - P + 1 .$$

Nel seguito, parlando di sistemi lineari e delle loro curve fondamentali sottintenderemo sempre il carattere di irriduttibilità tanto per gli uni quanto per le altre a meno che non si dica espressamente il contrario.

Quello che dovremo esporre riguarda diversi capitoli che tratteremo separatamente.

I. — Le curve fondamentali proprie ed improprie.

1. Cominceremo dal distinguere due specie di curve fondamentali. Vedremo in seguito la opportunità di questa distinzione.

Una curva fondamentale la diremo « *impropria* » quando, mediante una conveniente trasformazione cremoniana si può ridurla a un punto che non sia un punto base del sistema trasformato. In ogni altro caso la chiameremo « *propria* ».

La ragione della prima denominazione muove dall'osservare che la presenza di una curva fondamentale impropria, nel sistema, è puramente accidentale tant'è vero che essa può eliminarsi senza lasciar traccia di sè nel sistema, eseguendo quella trasformazione cremoniana per cui essa riducesi a un punto. Per esempio, nel sistema di curve del 4° ordine $[a_1^2 a_2^2 b_1]$ la retta $a_1 a_2$ è una curva fondamentale impropria, perchè eseguendo la trasformazioue quadratica che ha i vertici nei punti base, si trova un sistema di curve del 3° ordine con due punti semplici a comune e nel quale non è più traccia della retta $a_1 a_2$. Precisamente perchè la retta suddetta si è trasformata in un punto (l'omologo di b_1) il quale non è fra i punti base del sistema trasformato.

2. Sorge quì spontanea l'idea di esaminare il caso in cui una curva fondamentale possa ridursi a un punto base del sistema trasformato, ma prima di venire a parlare di questo è utile stabilire il teorema seguente il quale serve a caratterizzare le curve fondamentali improprie.

« *La condizione necessaria e sufficiente perchè una curva fondamentale sia impropria è che sia razionale e regolare* ».

La condizione è necessaria. Sia infatti f la curva considerata. Indichiamo con l'indice f i suoi elementi (genere, dimensione virtuale ecc.): sia T la trasformazione cremoniana per la quale f è ridotta a un punto P. Aggiungiamo a T una trasformazione quadratica la quale abbia un punto fondamentale in P e gli altri due comunque. Otterremo così una trasformazione T′ per la quale f corrisponde, cremonianamente a una retta. Il genere di questa retta è zero e anche la dimensione virtuale è zero, perchè se la retta contenesse più di due punti base del sistema trasformato, effettuando la inversa della trasformazione quadratica suddetta troveremmo, nel punto fondamentale P, non un punto qualunque del piano, ma un punto base del sistema trasformato. Ora, il genere e la dimensione virtuale si mantengono attraverso qualunque trasformazione cremoniana (C N° 8), dunque

$$K_f = 0 \quad , \quad p_f = 0.$$

La condizione è sufficiente. Ciò risulta dal 1° N °di una nota del prof. Bertini (1) finchè la singolarità della curva che si considera e quelle che vanno introducendosi, per effetto delle trasformazioni che occorrono, sieno ordinarie: se fra esse ve ne sono delle straordinarie, basta ripetere un ragionamento applicato dal Noether in un caso più generale e migliorato poi dal Guccia (2) per assicurarsi che il teorema è vero.

3. Si può aggiungere di più, che quando il sistema dato non sia un fascio (il che molte volte escluderemo) le due condizioni stabilite dal teorema precedente (e cioè $K_f = 0$, $p_f = 0$) non sono indipendenti: la 2ª è conseguenza della 1ª. Infatti, in tale ipotesi, il grado appartenente a una curva fondamentale è negativo (C N° 25 (6)), cioè

$$D_f = p_f + K_f - 1 < 0,$$

ma

$$K_f = 0 \quad , \quad p_f \geq 0$$

dunque $p_f = 0$.

« *Se il sistema dato non è un fascio, ogni curva fondamentale regolare è necessariamente razionale e quindi impropria* ».

4. Dai Nⁱ precedenti segue quindi che una curva fondamentale propria, deve anzitutto essere sovrabbondante, quanto al genere essa può essere razionale, o no.

Se non è razionale è certo che non esiste trasformazione cremoniana capace di ridurla a un punto, essa è per così dire permanentemente attaccata al sistema e la sua presenza non dipende da qualche particolare trasformazione cremoniana che l'abbia introdotta, per cui può dirsi che i suoi numeri K_f, p_f forniscano altrettanti caratteri invariantivi del sistema medesimo. D'onde l'appellativo di propria. Per esempio, il sistema di tutte le curve di 6° ordine aventi 24 punti base semplici sopra una quartica generale, possiede questa quartica come curva fondamentale propria. Però nella definizione che noi abbiamo dato di curva fondamentale propria rientrano anche quelle sovrabbondanti razionali. Or bene, come fra poco vedremo, una gran parte di esse sono ancora riducibili a punti mediante

(1) Bertini. — *Sulle curve razionali per le quali si possono assegnare arbitrariamente i punti multipli.* — Giornale di matematica (1877).

(2) Guccia. — *Generalizzazione di un teorema di Noether.* — Rendic. circ. mat. di Palermo, 1866.

convenienti trasformazioni cremoniane. Sembrerebbe dunque a prima vista, inopportuno l'aggettivo *proprio* applicato a tali curve. Ma vedremo anche, che quei punti non sono già punti qualsiasi del piano, ma precimente punti base del sistema trasformato e godono inoltre di una particolare proprietà la quale serve ancora a giustificare il nome di « *proprie* » dato alle curve fondamentali che li hanno generati.

5. Intanto, l'esistenza di curve fondamentali sovrabbondanti che si possono ridurre a punti, non è dubbia.

Un esempio semplicissimo è fornito dalle curve di terzo ordine aventi tre punti base semplici sopra una retta r. La r è evidentemente una curva fondamentale con la sovrabbondanza uguale a uno. Se si trasforma quadraticamente ponendo due punti fondamentali in due dei punti base, si trova un sistema di curve di 4° ordine con due punti doppi comuni e tangenti in uno stesso punto R a una medesima retta. Per effetto della trasformazione, la retta r si è ridotta a un punto base R del sistema trasformato, punto base che devesi riguardare come straordinario perchè costituito da due punti base infinitamente vicini. La retta r che li unisce, cioè la tangente comune in R, a tutte le curve del sistema, corrisponde a quel punto base del sistema primitivo che apparteneva alla r e che non fu preso come punto fondamentale della trasformazione. In questo caso possiamo dunque dire che, per effetto della trasformazione suddetta, la r si è eliminata, ma le si è sostituito un punto base semplice con la ulteriore particolarità che tutte le curve del sistema trasformato hanno ivi una direzione fissa. Se la trasformazione precedente avesse avuto due punti fondamentali, sempre sulla r, ma fuori dei punti base, ovvero uno in un punto base e l'altro no, la r si sarebbe ancora ridotta a un punto e ivi si avrebbero avuti 3, o 2, rispettivamente rami fissi del sistema trasformato. Insomma è impossibile ridurre la r a un punto che non sia punto base straodinario per il sistema trasformato. Tutti i rami per il punto sono fissi. Quanto al loro numero, esso può superare di una, o due, unità la sovrabbondanza di r, *ma non può esserle inferiore.* Onde può dirsi che la sovrabbondanza stessa, si muti per effetto della trasformazione, nel *minor nnmero possibile* di rami fissi che il sistema trasformato possiede nel punto al quale la curva è ridotta e quindi, in questo senso, tal numero (o sovrabbondanza) ha carattere invariantivo. È dunque naturale di riguardare la r come curva fondamentale propria sebbene riducibile a un punto.

6. Questi concetti si generalizzano immediatamente così:

« *Se una curva fondamentale propria è riducibile a un punto, esso è un punto base straordinario per il sistema trasformato, tutti i rami per quel punto sono fissi ed in numero uguale alla sovrabbondanza della curva fondamentale, ovvero superiore di una, o due unità.*

Infatti riduciamo a una retta la nostra curva fondamentale mediante opportuna trasformazione cremoniana. Siccome la dimensione virtuale K_f si mantiene attraverso qualunque trasformazione cremoniana (C N° 8) così la retta avrà la dimensione virtuale K_f e quindi la sovrabbondanza $-K_f$ per cui essa conterrà $2 - K_f$ punti base del sistema trasformato. Se ora eseguiamo una ulteriore trasformazione quadratica, prendendo due punti fondamentali sopra la retta (in punti base, o no del sistema), la verità dell'affermazione fatta risulta evidente.

7. Una gran parte delle curve fondamentali proprie razionali sono riducibili a punti. Non conosciamo un criterio decisivo per giudicare facilmente quando ciò avvenga: però ripetendo il seguente processo (che il Guccia applica a una questione più generale (1)) ci si persuade facilmente come l'affermazione precedente possa sussistere. Sia m l'ordine della curva fondamentale, μ_h la sua moltiplicità nel punto base h ed abbiasi

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geqq \mu_3 \geq \ldots$$

Per ipotesi è

$$(m-1)(m-2) - \Sigma\, \mu_h (\mu_h - 1) = 0$$

e per definizione

$$K_f = \frac{1}{2} \left\{ m(m+3) - \Sigma\, \mu_h (\mu_h + 1) \right\}, \qquad (K_f < 0)$$

da cui segue

$$\sum_1 \mu_h^2 = m^2 + 1 - K_f,$$

$$\sum_1 \mu_h = 3m - 1 - K_f.$$

Esse possono anche scriversi

$$\sum_4 \mu_h^2 = m^2 + 1 - K_f - \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2,$$

$$\sum_4 \mu_h = 3m - 1 - K_f - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3.$$

Moltiplichiamo l'ultima per μ_3 e sottragghiamo:

$$\mu_3 \sum_4 \mu_h - \sum_4 \mu_h^2 = m(3\mu_3 - m) + \mu_1^2 + \mu_2^2 -$$

$$- \mu_3 (\mu_1 + \mu_2 + 1) - 1 - K_f (\mu_3 - 1)$$

(1) GUCCIA. — *Generalizzazione di un teorema di Noether* (Tomo I fasc. 3, 1886 Circolo mat. di Palermo. Rendiconti).

e poichè il 1° membro è positivo, o nullo, sarà anche

$$m(3\mu_3 - m) + \mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3(\mu_1 + \mu_2 + 1) - 1 - K_f(\mu_3 - 1) \geq 0.$$

Supponiamo adesso che si abbia:

$$m \geq \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$$

segue $m \geq 3\mu_3$. — Allora si vede subito che, a più forte ragione, sarà:

$$(\mu_1+\mu_2+\mu_3)(2\mu_3-\mu_1-\mu_2)+\mu_1^2+\mu_2^2-\mu_3(\mu_1+\mu_2+1)-1-K_f(\mu_3-1)\geq 0$$

cioè:

$$2(\mu_3^2 - \mu_1\mu_2) - 1 - \mu_3 - K_f(\mu_3 - 1) \geq 0.$$

Se dunque $-K_f$, cioè la sovrabbondanza della curva, è tale che sia

$$2(\mu_3^2 - \mu_1\mu_2) - 1 - \mu_3 - K_f(\mu_3 - 1) < 0$$

è impossibile realizzare l'ipotesi $m \geq \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$. Per questo basta che

$$-K_f < \frac{2(\mu_1\mu_2 - \mu_3^2) + 1 + \mu_3}{\mu_3 - 1}.$$

Dunque se $-K_f$ soddisfa a questa condizione, l'ordine della f può essere abbassabile mediante opportuna trasformazione cremoniana e può darsi che la f sia riducibile a un punto. In particolare, la condizione è certo soddisfatta se $\mu_3 = 1$. Si vede facilmente allora che la f è una curva d'ordine m con un punto $(m-1)^{-plo}$. Trasformando quadraticamente con un punto fondamentale nel punto multiplo e gli altri due punti fondamentali in due punti semplici, si trova una curva d'ordine $m - 1$ con un punto $(m-2)^{-plo}$ e così via.

Dunque:

« *Ogni curva fondamentale d'ordine* m *con un punto* $(m-1)^{-plo}$ *in un punto base del sistema e passante almeno per altri* $2m+1$ *punti base, è una curva fondamentale propria riducibile a un punto* ».

Come esempio si può citare il sistema di tutte le curve di 8° ordine aventi un punto quadruplo in un punto triplo di una curva del 4° e passanti semplicemente per altri 20 punti di quest'ultima.

Essa è una curva fondamentale propria razionale con la sovrabbondanza uguale a 6 e riducibile a un punto.

8. Prima di chiudere questo capitolo osserveremo due proprietà delle curve fondamentali improprie le quali ci saranno utili in seguito. La 1ª risulta immediatamente dal N° 27 C e dal N° 2 di questa Memoria:

« *Ogni curva fondamentale impropria si stacca dal sistema aggiunto totale* ».

9. La 2ª si dimostra mediante la formola (C N° 13)

$$K_{12} = K_1 + K_2 + 1$$

nella quale K_1, K_2, sono le dimensioni virtuali di due curve fondamentali, K_{12} è quella della curva fondamentale composta di entrambe e 1 è il numero delle intersezioni, rispetto ad A delle prime due.

Poichè $K_{12} \geq 0$ segue

$$I \leq -(K_1 + K_2).$$

Se $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ è $I = 0$. Onde (N° 3):

« *Due curve fondamentali improprie non si segano fuori dei punti base del sistema* » (1).

II. — La parte fissa del sistema aggiunto tolale.

10. Ogni curva che si stacca dal sistema aggiunto totale è fondamentale per il sistema dato (C N° 27), quindi la parte fissa suddetta è ancora una curva fondamentale (in generalè composta) per il sistema primitivo [C]. Abbiamo già veduto, come, a questa parte fissa, appartenga una curva fondamentale impropria qualunque (N° 8). Vogliamo ora esaminare, il modo di presentarsi di una curva fondamentale impropria f nel sistema aggiunto totale. Per questo, supponiamo che il punto M, a cui una tal curva può esser ridotta, pure non essendo punto base per il sistema dato [C], possa esserlo per il sistema aggiunto e precisamente con la molteplicità μ (≥ 0). Consideriamo la trasformazione per la quale M diviene f e, per vederne le particolarità, eseguiamo la prima trasformazione quadratica che compone (insieme ad altre) tale trasformazione. Prendiamo in M uno dei punti fondamentali, e prima consideriamo il caso in cui gli altri due N e P siano punti base per il sistema dato, con le molteplicità rispettive ν_2, ν_3 ($\nu_2 > 0$, $\nu_3 > 0$). Sia $[C_0]$ il sistema trasformato di [C] e M′ N′ P′ il triangolo fondamentale del piano trasformato. Il sistema $[C_0]$ è d'ordine

$$2n - \nu_2 - \nu_3$$

(1) BERTINI. — *Sulle cuvve fondamentali dei sistemi lineari di curve algebriche piane.* Rendiconti del circ. mat. di Palermo 1888.

con le moltiplicità seguenti in

$$M' \equiv n - \nu_2 - \nu_3 \quad , \quad N' \equiv n - \nu_3 \quad , \quad P' \equiv n - \nu_2 .$$

Trasformiamo l'aggiunto totale di [C]. Troveremo un sistema d'ordine

$$2n - \mu - \nu_2 - \nu_3 - 4$$

con le molteplicità seguenti in

$$M' \equiv n - 1 - \nu_2 - \nu_3 \quad , \quad N' \equiv n - \mu - \nu_3 - 2 \quad , \quad P' \equiv n - \mu - \nu_2 - 2$$

il quale evidentemente deve far parte dell'aggiunto totale di $[C_0]$. Ma l'aggiunto totale di $[C_0]$ è dell'ordine

$$2n - \nu_2 - \nu_3 - 3$$

con le molteplicità

$$M' \equiv n - \nu_2 - \nu_3 - 1 \quad , \quad N' \equiv n - \nu_3 - 1 \quad , \quad P' \equiv n - \nu_2 - 1$$

dunque esso si compone del trasformato dell'aggiunto totale di [C] e della retta N' P' contata $\mu + 1$ volte.

Alla medesima conclusione si giunge se i punti N e P non sono punti base per il sistema dato.

Anzi, per maggior generalità, supponiamo che N e P abbiano le molteplicità ν e π per il sistema aggiunto totale, senza escludere per ν e π i valori zero. Allora il sistema $[C_0]$ è d'ordine $2n$ con le molteplicità

$$M' \equiv n \quad , \quad N' \equiv n \quad , \quad P' \equiv n.$$

Il trasformato dell'aggiunto totale di [C] è d'ordine

$$2n - 6 - \mu - \nu - \pi$$

con le molteplicità

$$M' \equiv n - 3 - \nu - \pi \quad , \quad N' \equiv n - 3 \mu - \pi \quad , \quad P' \equiv n - 3 - \mu - \nu$$

e deve far parte dell'aggiunto totale di $[C_0]$.

Ma quest'aggiunto totale è dell'ordine

$$2n - 3$$

ed ha le molteplicità:

$$M' \equiv N' \equiv P' \equiv n - 1 ,$$

dunque esso si compone del trasformato dell'aggiunto totale di [C] e delle rette M'N', N'P', P'M' contate rispettivamente $\pi + 1$, $\mu + 1$, $\nu + 1$ volte. Analogamente si vedrebbe che questa conclusione non muta se, dei due punti N e P, uno è base per il sitema dato e l'altro non lo è. Quindi:

(a) *Se il punto a cui può ridursi una curva fondamentale impropria è un punto base* μ — plo *per il sistema aggiunto puro, ma non per il dato, la curva si stacca* $\mu + 1$ *volte dal sistema aggiunto totale e ne incontra la curva generica rimanente in* μ *punti.*

Per $\mu = 0$ si ha:

b) *Ogni curva fondamentale impropria che si stacca una sola volta dal sistema aggiunto totale, è fondamentale anche per il sistema aggiunto puro.*

11. Le considerazioni di questo N° e di tutti i seguenti riguardano sistemi lineari, comunque vincolati, ma dotati di punti base ordinari. Dunque, prima di applicare le formule seguenti, noi intendiamo fatta, se ve ne è bisogno, la trasformazione cremoniana per la quale tutti i punti base sono fra loro a distanza finita.

Sia φ la parte fissa del sistema aggiunto totale. Indichiamo con l'indice φ gli elementi relativi a φ e con l'accento gli elementi del sistema aggiunto puro. Allora si ha (C 21)

$$\frac{1}{2}\left\{(n-n')(n-n'+3)-\Sigma(\nu-\nu')(\nu-\nu'+1)\right\}=\mathrm{K}-2p+\mathrm{P}'+1, \quad (1).$$

Il 1° membro di questa formula ha una interpretazione geometrica semplice, se esiste il sistema residuo dell'aggiunto puro, giacchè in questo caso ne esprime la dimensione virtuale (C N° 29), ma se questo sistema residuo non esiste (N° 22) l'interpretazione suddetta manca. Però se ne trova subito una che vale in ogni caso.

Infatti si ha:

$$n-3=n_\varphi+n' \quad , \quad \nu_r-1\,\nu_{r\varphi}+\nu_r'.$$

Quindi il 1° membro della (1) si può scrivere:

$$\frac{1}{2}\left\{(n_\varphi+3)\,(n_\varphi+6)\,\Sigma(\nu_\varphi+1)\,(\nu_\varphi+2)\right\}$$

la quale espressione è identica con

$$\mathrm{K}_\varphi+3n_\varphi-\Sigma\nu_\varphi+9-i$$

dove i è il numero dei punti base del sistema. Ma si ha (C 4)

$$3n_\varphi - \Sigma\nu_\varphi = K_\varphi - P_\varphi + 1$$

dunque:

$$\frac{1}{2}\left\{(n-n')(n-n'+3) - \Sigma(\nu-\nu')(\nu-\nu'+1\right\} = 2K_\varphi - P_\varphi - i + 10$$

e quindi dalla (1)

$$P' = 2p - K + 2K_\varphi - P_\varphi - i + 9 \tag{2}$$

dove ora K_φ e P_φ hanno significati geometrici che valgono in ogni caso. La (2) ci servirà per collegare il genere del sistema aggiunto puro con «*l'eccesso di Jung*» (cf. cap. III).

12. La (2), confrontata con una formula di Castelnuovo (C N° 30), ci fornisce la seguente limitazione per la parte fissa φ

$$2\,K_\varphi - P_\psi \leq i - 1$$

la quale può tornare utile nei casi in cui $P_\varphi < 0$.

13. Se s'indica con P_t il genere virtuale del sistema aggiunto totale si ha (dal calcolo diretto)

$$P_t = 2p - K + 8 - i\,, \tag{3}$$

Da questa e dalla (2) segue:

$$P_t = P' + P_\varphi - 2K_\varphi - 1\,.$$

Ma d'altra parte deve essere (C 13)

$$P_t = P' + P_\varphi + I - 1$$

dove I rappresenta il numero delle intersezioni, rispetto ad A, della curva generica del sistema aggiunto puro con la parte fissa φ. Segue;

$$I = -2\,K_\varphi. \tag{4}$$

Osservando ora che il sistema aggiunto totale è regolare rispetto ad A, avremo (C N° 13)

$$p - 1 = K_\varphi + K' + I$$

e per la (4)

$$(5) \qquad -K_\varphi = p - 1 K'$$

quindi $-K_\varphi$, che è la sovrabbondanza di φ, è anche la sovrabbondanza del sistema aggiunto puro (rispetto ad (A)).

Dunque possiamo enunciare il teorema:

La sovrabbondanza del sistema aggiunto puro è uguale a quella della parte fissa del sistema aggiunto totale. Entrambe equivalgono alla metà delle intersezioni della curva generica del sistema aggiunto puro con la parte fissa suddetta. Onde il numero di queste intersezioni è sempre pari.

Ne segue:

La condizione necessaria è sufficiente perchè la parte fissa e il sistema aggiunto puro siano regolari è che la prima sia una curva fondamentale semplice, o composta, per il secondo.

III. Sopra l'eccesso di Jung.

14. Secondo una denominazione introdotta da Jung chiamasi «*eccesso*» la differenza fra il numero dei punti base e quello delle linee fondamentali.

Al medesimo autore è dovuto il teorema che stabilisce il carattere invariantivo dell'eccesso per sistemi regolari (1). Lo scopo di questo capitolo è di mostrare come si possa estendere questo teorema a sistemi vincolati regolari, o no, e contemporaneamente di esaminare qual legame passi fra l'eccesso e il genere del sistema aggiunto puro. Per ciò è necessario riguardare più da vicino le componenti della curva fissa φ (N° 12) e distinguerle in tre gruppi. Porremo nel 1° gruppo tutte quelle curve fondamentali improprie che si staccano da φ una sol volta, nel secondo le curve fondamentali improprie che si staccano più di una volta, nel terzo quelle curve fondamentali proprie alle quali non possiamo ancora negare l'esistenza nella curva φ. Indicando con f_1, f_2, f_3 i tre gruppi, avremo: (C N° 13)

$$K_\varphi = K_{f_1} + K_{f_2} + K_{f_3} + J_{12} + J_{13} + J_{23},$$

$$P_\varphi = P_{f_1} + P_{f_2} + P_{f_3} + J_{12} + J_{13} + J_{23} - 2,$$

(1) JUNG. — *Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche di genere qualunque* — (Annali di Mat. serie II tomo XV.

dove J_{hl} rappresenta il numero delle intersezioni, rispetto ad A, di f_h, f_l. Ma dal N° 9 resulta $J_{12} = 0$, dal N° 10 (a), per $\mu = 0$, si ha $J_{13} = 0$. Inoltre se r indica il numero delle componenti di f_1 è (N^i 2 e 9 e C N° 13):

$$K_{f_1} = 0 \quad , \quad P_{f_1} = -r + 1.$$

Onde:

$$K_\varphi = K_{f_2} + K_{f_3} + J$$
$$P_\varphi = P_{f_2} + P_{f_3} + J - r - 1$$

dove si sono tralasciati gl'indici di J_{23} non essendo più opportuni ora che si è veduto essere $J_{12} = J_{13} = 0$.

Prendiamo a esaminare più particolarmente K_{f_2}, P_{f_2}.

Perciò supponiamo f_2 costituita dalle ϱ curve $c_1, c_2, \ldots, c_\varrho$ degli ordini $m_1, m_2, \ldots, m_\varrho$ contate ciascuna $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\varrho$ volte.

Applicando a f_2 le solite formule avremo:

$$K_{f_2} = \mu_1 K_1 + \mu_2 K_2 + \ldots + \mu_\varrho K_\varrho + j,$$
$$P_{f_2} = \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \ldots + \mu_\varrho K_\varrho + j - \Sigma \mu_h + 1;$$

ma

$$K_1 = K_2 = \ldots = K_\varrho = 0 \quad , \quad p_1 = p_2 = \ldots = p_\varrho = 0$$

perchè le $c_1, c_2, \ldots, c_\varrho$ sono curve fondamentali improprie, j rappresenta il numero delle intersezioni a due, a due, rispetto ad A, delle componenti di f_2, dunque per il teorema del N° 9 rimarrà per j il numero:

$$j = \sum_1^\varrho{}_h \frac{\mu_h(\mu_h - 1)}{2} D_h.$$

Ma

$$D_h = p_h + K_h - 1 = -1.$$

onde

$$j = -\Sigma \frac{\mu(\mu - 1)}{2}$$

e per conseguenza

$$K_{f_2} = -\Sigma \frac{\mu(\mu-1)}{2}, \qquad P_{f_2} = -\Sigma \frac{(\mu-1)(\mu+2)}{2} - \varrho + 1$$

quindi:

$$(6) \quad \begin{cases} K_\varphi = -\Sigma \dfrac{\mu(\mu-1)}{2} + K_{f_3} + J, \\ P_\varphi = -\Sigma \dfrac{(\mu-1)(\mu+2)}{2} + P_{f_3} + J - (r+\varrho). \end{cases}$$

Sostituendo nella (2) del N° 11 si ottiene:

$$(7) \quad P' = 2p - K + 2K_f - P_f + J + \sum_1^\varrho \frac{(\mu-1)(2-\mu)}{2} + E + 9$$

nella quale è stato soppresso l'indice di f_3 divenuto ora inutile (per cui f rappresenta adesso l'insieme delle curve fondamentali proprie che si trovano nella φ) e dove E rappresenta l'eccesso fra il numero delle curve fondamentali improprie e il numero dei punti base del sistema. La (7) esprime dunque il legame che passa fra quest'eccesso e il genere del sistema aggiunto puro.

15. Ci proponiamo ora di vedere in quali termini si possa stabilire la invariantività dell'eccesso per trasformazioni cremoniane.

Per questo, osserviamo che la formula precedente può scriversi

$$(8) \quad P' = 2p - K + 2K_f - P_f + J - \sum_1^\varrho \frac{\mu(-1)}{2} + E + \sum_1^\varrho (\mu-1) + 9.$$

I numeri P', p, K, hanno carattere invariantivo (N^i 8, 27 N° C). Inoltre, secondo l'ipotesi introdotta al principio del N° 11, noi intendiamo di escludere quelle trasformazioni cremoniane le quali portano singolarità straordinarie. Dunque, se nella parte fissa φ entrano delle curve fondamentali proprie riducibili a punti (N^i 4, 5, 6), noi intendiamo di escludere, dalle considerazioni che seguono, quelle trasformazioni cremoniane che possono ridurre a punti tali curve. Segue, che l'insieme f delle curve fondamentali proprie che entrano a costituire la φ, si muta per effetto di una qualunque delle trasformazioni che noi consideriamo, nell'insieme f_0 delle curve fondamentali che entrano a costituire la φ_0 del sistema trasformato

e quindi i numeri K_f, P_f non mutano. Allora, dalla 1ª delle (6) ne viene che ha carattere invariantivo la differenza

$$J - \sum_1^{\varrho} \frac{\mu(\mu-1)}{2}$$

anche perchè K_φ è la sovrabbondanza del sistema aggiunto puro cambiata di segno (N° 13).

Quindi, tornando alla (8), resulta che ha carattere invariantivo anche $E + \sum_1^{\varrho} (\mu - 1)$, cioè l'eccesso tra il numero delle curve fondamentali improprie e il numero dei punti base, purchè ogni curva fondamentale impropria sia contata tante volte quante essa si stacca dal sistema aggiunto totale.

Questo, nell'ipotesi più generale, che cioè nella parte fissa φ del sistema aggiunto totale possano entrare, a costituirla, curve di tutt'e e tre le specie f_1, f_2, f_3, senza discutere se ciò possa aver luogo effettivamente. Certo però che, se questo accade, vale la (7). Sono, almeno per ora, ugualmente probabili le tre ipotesi che nella φ manchi il gruppo f_3, ovvero f_2, o f_1, e allora la (7) diviene rispettivamente:

$$P' = 2p - K + \Sigma \frac{(\mu-1)(2-\mu)}{2} + 8 + E,$$

$$P' = 2p - K + 2K_f - P_f + 9 + E,$$

$$P' = 2p - K + 2K_f - P_f + J + \Sigma \frac{(\mu-1)(2-\mu)}{2} + 9 + E.$$

Se finalmente nella φ mancano i gruppi f_2 e f_3, ovvero f_3 e f_1, o $f_1 f_2$, si ha successivamente:

$$P' = 2p - K + 8 + E,$$

$$P' = 2p - K + \Sigma \frac{(\mu-1)(2-\mu)}{2} + 8 + E,$$

$$P' = 2p - K + 2K_f - P_f + 9 - i.$$

Così si vede che tutte queste formule possono dedursi dalla (7) ponendo per convenzione $2K_f - P_f = -1$ quando manca il gruppo f_3, facendo tutte le μ uguali all'unità quando manca il gruppo f_2, lasciandola inalterata quando manca il gruppo f_1.

Resulta inoltre che, quando fra le componenti di f_2 non ve n'è alcuna la cui moltiplicità superi 2, la considerazione del gruppo f_2 diviene perfettamente inutile, tutte le sue componenti potendosi includere in f_1.

Allora il teorema dell'eccesso può stabilirsi così:

« *In un sistema lineare, regolare, o comunque vincolato, ma dotato di punti base ordinari, ha carattere invariantivo l'eccesso fra il numero totale delle curve fondamentali irriducibili e il numero dei punti base, nelle seguenti circostanze*:

1⁰. *La trasformazione cremoniana che si considera non deve introdurre punti base straordinari.*

2⁰. *Se, fra le curve fondamentali improprie, ve n'è anche una sola la quale si stacchi dal sistema aggiunto totale più di due volte, allora, nella valutazione dell'eccesso, ogni curva fondamentale impropria va contata tante volte quante essa si stacca dal sistema aggiunto totale suddetto.*

3⁰. *Se invece ogni curva fondamentale impropria non si stacca più di due volte dal sistema aggiunto totale, essa, nella valutazione dell'eccesso, deve esser contata una sola volta.*

4⁰. Finalmente è a prevedersi anche quest'ultimo caso: quando nella φ esiste il gruppo f_3 è certo impossibile eliminarlo con trasformazioni cremoniane, ma altrettanto non si può dire dei gruppi f_2, o f_1: nulla vieta ritenere che per opportuna trasformazione cremoniana si possa passare da una φ, che contiene tali gruppi, a una che non li contiene. In tal caso si riconosce subito dalle formule precedenti che il teorema dell'eccesso si può enunciare così:

« *Per ogni trasformazione cremoniana la quale faccia svanire il gruppo f_2 della curva φ, ovvero ve lo porti, se non vi esiste, si ha*:

$$E + J + \Sigma \frac{(\mu - 1)(2 - \mu)}{2} = E'$$

dove E′ *si riferisce al sistema la cui φ non contiene il gruppo* f_2 *e dove* J *ha il significato geometrico già attribuitogli* (N° 14) *se esiste il gruppo* f_3, *ed è nullo se* f_3 *non esiste* (1).

---

(1) Il teorema sulla invariantività dell'eccesso è stato dimostrato per la prima volta dal prof. Jung nel caso di sistemi non vincolati (*Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche:* Mem. I: Ann. di Mat. serie IIª Vol. XV). Nel N° 9 della stessa memoria, il teorema viene esteso a sistemi comunque vincolati con punti base ordinari e finalmente in una Nota successiva (*sull'eccesso degli elementi fondamentali di un sistema lineare di genere qualunque.* Rend. Istituto Lombardo serie IIª Volume XXI, fasc. XVIII) il medesimo autore si è proposto di estenderlo anche a sistemi con punti base straordinarii. Ma en-

16. Nelle considerazioni dei N^{i} precedenti, oltre essere esclusi i sistemi a punti base straordinari, sono anche esclusi i sistemi razionali ed ellittici perchè, per essi, non si può parlare di sistema aggiunto puro e quindi la (2) del N° 11 non ha più significato. Ora, i sistemi razionali sono certamente regolari e, fra gli ellittici, i soli sovrabbondanti sono i fasci perchè $s = p - k + 1$ (C N° 19). Tanto per gli uni quanto per gli altri il teorema dell'eccesso è quindi stabilito nella prima Memoria del prof. Jung (loc. cit.) ai N^{i} 25 e 65.

La più semplice di tutte le formule precedenti è

$$P' = 2p - k + 8 + E$$

essa (ma non il processo per ottenerla) mi fu comunicata dal prof. Castelnuovo e vale nei casi in cui manchino nella φ i gruppi f_2 e f_3, ovvero (N° 19) quando il sistema aggiunto puro sia regolare e manchi il gruppo f_2.

Per tali sistemi, applicando a P' una disuguaglianza di Castelnuovo, (C N° 35) si trova

$$-E < 1$$

cioè il numero dei punti base superiore a quello delle linee fondamentali improprie.

Quindi:

« *Se la parte fissa del sistema aggiunto totale è costituita dalle sole curve fondamentali improprie, contate ciascuna una volta, il numero dei punti base supera il numero di queste linee fondamentali improprie* ».

---

trambe queste estensioni presentano delle lacune: lacune rilevate, in parte, dall'autore stesso per primo e manifestate, per iscritto, ad alcuni colleghi insieme al proposito di consacrarvi una successiva pubblicazione; proposito, per circostanze speciali, non effettuato. Debbo alla cortesia di uno dei colleghi del prof. Jung, di aver potuto leggere le lettere originali in cui l'autore trattava di questo argomento. Nell'intento di colmare tali lacune ho scritto il N° precedente, ma riuscendo solo a metà nello scopo prefissomi. Infatti, mentre mi sembra che colle considerazioni precedenti il teorema dell'eccesso risulti dimostrato, in modo chiaro e rigoroso, per sistemi comunque vincolati a punti base ordinari, non vedo come le considerazioni stesse possano estendersi a sistemi a punti base straordinarii. Tutto il N° precedente infatti, poggia sulla (2) del N° 12 la quale è vera se i punti base sono tutti ordinari; se ve ne sono di straordinari, essa non è più valida e il teorema dell'eccesso cade, o almeno, per enunciarlo anche in questo caso, occorre presentarlo in forma alquanto diversa da quella sopra stabilita.

IV. Sopra i sistemi residui.

17. Prendiamo a considerare, dapprima, il sistema residuo dell'aggiunto puro. Se ne indichiamo con k'' la dimensione effettiva, poichè $p-1$ è la dimensione effettiva dell'aggiunto puro, dovremo avere: (N° 21 C)

$$k > p - 1 + k''$$

dunque, condizione necessaria per l'esistenza di questo sistema è $k > p - 1$. Allora dico che:

« *Un sistema lineare regolare, o no, ma con* $k < p + 1$ *ha necessariamente almeno* 9 *punti base* ».

Infatti, se $k < p$ il sistema residuo suddetto non esiste, quindi i punti base non possono essere in numero minore, o uguale a 9, giacchè le cubiche, o la cubica per essi, insieme alla parte fissa φ del sistema aggiunto totale costituirebbero il residuo dell'aggiunto puro. Dunque il numero dei punti base deve essere maggiore di 9 e inoltre essi non debbono appartenere a una stessa cubica. Se $k = p$ è $k'' = 0$, quindi, neppure in questo caso, può essere $i < 9$ e se $i = 9$ non possono i punti base appartenere a ∞^1 cubiche altrimenti sarebbe $k'' = 1$. Si può dunque aggiungere:

« *Se* $k < p$, *i punti base debbono essere in numero superiore a* 9 *e non possono giacere sopra una medesima cubica, se* $k = p$ *i punti base possono esser* 9 *ma non debbono appartenere a* ∞^1 *cubiche* » (fa eccezione il fascio di cubiche perchè allora non si può più parlare di sistema aggiunto).

Un sistema sovrabbondante ha necessariamente $k < p + 1$ (C N° 19), quindi segue, come caso particolare il teorema di Castelnuovo: « *Un sistema sovrabbondante ha almeno* 9 *punti base* » (C N° 26).

Più generalmente si vede che « *per* $k = p + l$, $(l < 9)$ *il numero dei punti base non può essere inferiore a* $9 - l$ ».

18. Passiamo a considerare il sistema residuo $[C_1]$ di una curva fondamentale f_1. Sia $[C_1]$ costituita di una parte fissa f_2 e di un sistema variabile $[C_{12}]$. La dimensione effettiva di $[C_{12}]$, o di $[C_1]$ che è lo stesso, è $k - 1$ (C N° 22): anche quella dell'insieme f_1 $[C_{12}]$ è $k - 1$, quindi f_2 costituisce l'intiero sistema residuo di f_1 $[C_{12}]$ e per conseguenza è fondamentale per $[C]$ [N° 21, C]. Quindi:

« *La parte fissa del sistema residuo di una curva fondamentale è a sua volta fondamentale per il sistema dato* ».

Se si chiama sistema residuo puro di una curva fondamentale, il sistema residuo totale, spogliato della parte fissa, si può dire evidentemente che:

« *Il sistema residuo puro di qualsiasi curva fondamentale segna, sopra la curva generica del sistema dato, la serie caratteristica* ».

19. Vogliamo ora considerare il caso in cui il sistema aggiunto puro sia regolare e, valendosi dei sistemi residui, dimostrare, come in tal caso, l'esistenza del gruppo f_2, nella parte fissa φ, dipenda da quella di f_2: (cf. N° 14 e seg.). Per questo è necessario premettere due osservazioni. La 1ª è la seguente:

« *Se più curve fondamentali, distinte, o no, ma non razionali, compongono un insieme che è regolare, tale insieme non ha sistema residuo* ».

Siano infatti $K_1, K_2, \ldots, K_f, p_1, p_2, \ldots, p_l$ le dimensioni virtuali e i generi delle curve fondamentali date, sia f l'insieme di esse: avremo, per le solite formole,

$$K_f = K_1 + K_2 + \ldots + K_l + 1$$

$$P_f = p_1 + p_2 + \ldots + p_l + I - l + 1$$

dove I rappresenta il numero delle intersezioni, rispetto ad A, delle componenti di f, ed è composto di termini positivi e negativi, quelli negativi essendo dovuti alla presenza di componenti multipli (come p. es. nel N° 14). Ma per ipotesi è $K_f = 0$, dunque $1 = 0$, perchè tutte le K sono negative (N° 13). Segue $P_f > 0$ e per conseguenza

$$D_f = K_f + P_f - 1 > 0.$$

Da cui ne viene che la curva fondamentale f non può avere sistema residuo, perchè, se lo avesse, sarebbe $D_f < 0$ (sono esclusi i fasci C N° 25).

20. La 2ª osservazione, di cui è parola nel N° precedente, è questa:

« *Il gruppo* f_3 *della curva fissa* φ *ammette sistema residuo* ».

Infatti sia f' la componente irriduttibile di ordine minore, fra quelle che formano il gruppo f_3, e sia F' il sistema residuo di f', sia inoltre f'' l'insieme delle altre componenti di f_3 così che si abbia

$$f' \cdot f'' = f_3,$$

Una curva aggiunta di f', insieme ad [F'], compone un sistema contenuto nell'aggiunto totale: da un tal sistema deve staccarsi f'', ma niuna delle componenti di f'' può staccarsi dall'aggiunta di f', perchè, per ipotesi, f' è la componente di ordine minore, fra tutte quelle che compongono f_3, dunque f'' si stacca da [F'], cioè [F'] è composto di f'' e di un sistema residuo [F''] il quale è evidentemente il residuo di $f' \cdot f'' = f_3$.

21. Ciò premesso risulta subito il seguente teorema:

« *Se il sistema aggiunto puro è regolare e ogni curva fondamentale impropria si stacca una sola volta dall'aggiunto totale, la parte fissa φ di tale sistema non contiene curve fondamentali proprie* ».

Infatti, ammettiamo pure che la φ contenga il gruppo f_3. Siccome, per ipotesi, manca il gruppo f_2, così avremo (N° 14)

$$K_\varphi = K_{f_3} .$$

Ma il sistema aggiunto puro è regolare, dunque (N° 13), $K_\varphi = 0$ e quindi $K_{f_3} = 0$.

Allora la f_3 è precisamente nelle condizioni volute dal teorema del N° 19 e come tale non possiede sistema residuo il che è in contraddizione con il N° 20. La contraddizione è nata dall'aver ammesso l'esistenza della curva f_3.

22. Osserveremo anche che:

« *Se una curva fondamentale propria deve staccarsi, dal sistema aggiunto totale, essa si stacca conseguentemente dal suo sistema residuo* ».

Infatti, sia f la curva fondamentale, F il suo sistema residuo. Una curva aggiunta di f, insieme ad F, costituisce un sistema contenuto nell'aggiunto totale; da tale sistema deve quindi staccarsi f, dunque f è parte di F.

23. *La somma dei generi di* k *curve fondamentali distinte non può superare la sovrabbondanza del sistema* ».

Infatti, presi k punti, uno su ciascuna, la curva del sistema, per questi k punti, si spezza in quelle k curve e in una parte residua. Segue che la curva fondamentale composta dall'insieme delle curve fondamentali considerate possiede sistema residuo e quindi il suo genere non può superare la sovrabbondanza del sistema e per conseguenza non può superarla nemmeno la somma dei generi di tutte le sue componenti (N° 15 (*b*) C). Onde:

« *Se un sistema possiede una curva fondamentale di genere uguale alla sovrabbondanza, tutte le altre curve fondamentali sono necessariamente razionali* ».

V. Sistemi sovrabbondanti iperellittici.

24. Termineremo esponendo, sopra i sistemi iperellittici, un teorema la cui opportunità sarà manifesta nel caso $s = 1$. Per questo cominciamo dal metterci nell'ipotesi che il sistema dato sia sovrabbondante, che la dimensione effettiva sia uguale al genere e conseguentemente la sovrabbondanza uguale all'unilà (C N° 19). Poichè $p = k$, ne viene che presi $p - 1$ punti, per essi, si hanno ∞^1 C le quali s'incontrano in altri $p - 1$. Questi e i primi formano un gruppo di $2p - 2$ punti della serie caratte-

ristica e giacciono quindi sopra una C′ del sistema aggiunto puro. Quindi la C passante per i $p-1$ punti scelti prima e per un punto generico di C′, si spezza nella C′ stessa e in una parte rimanente. Cioè, in questo caso, il sistema aggiunto puro ammette un sistema residuo [C″] e poichè la dimensione dell'aggiunto puro è $p-1$, quella di [C″] sarà zero e quindi [C″] sarà una curva fondamentale (C N° 21).

Indicandola con f avremo (C N° 30) $P_f = p_f = 1 = s$.

Dunque (C N° 23 (*b*)): « *Ogni sistema con la sovrabbondanza uguale a uno e con* $p = k$, *possiede una curva fondamentale semplice, o composta, di genere uno, la quale passa per tutti i punti base del sistema* » (C pref. pag. 7).

25. Se con s_1 s'indica la sovrabbondanza del sistema residuo di una curva fondamentale f monovalente, deve essere (C N° 24)

$$p_f = s - s_1.$$

Nel nostro caso si ha $p_f = 1$, onde $s_1 = 0$.

Cioè: « *Il sistema aggiunto puro è regolare* ».

Per il suo genere si può osservare che deve essere (C N° 24)

$$P' = p + K_f$$

dove K_f non può esser nullo altrimenti sarebbe $D_f = 0$ e quindi il sistema sarebbe un fascio (C N° 25) il che si esclude. Dunque

$$P' < p.$$

26. Andiamo al caso iperellittico. Il prof. Castelnuovo applicando alla serie caratteristica il teorema di Clifford (C N° 19) trova il seguente limite superiore per la sovrabbondanza:

$$s \leq p - k + 1.$$

Il segno d'uguaglianza va preso quando $p = k$, $s = 1$, oppure quando il sistema è iperellittico, onde il citato autore ne conclude che per i sistemi iperellittici sovrabbondanti è verificata la relazione $s = p - k + 1$: però il ragionamento è invertibile onde può dirsi che:

« *La condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema che ha la sovrabbondanza maggior d'uno sia iperellittico è semplicemente espressa dalla relazione* $s = p - k + 1$ ».

27. Rimane il caso $s = 1$ in cui la relazione suddetta è ancora verificata senza che si possa affermare essere il sistema iperellittico. Ci pro-

poniamo ora di determinare, in tal caso, quali altri criterii siano da considerarsi per potersi assicurare della iperellitticità, o no, del sistema dato.

Sempre nell'ipotesi $s = 1$, $p = k$, ammettiamo che [C] sia iperellittico. Allora la serie caratteristica è speciale completa (C N° 18), dunque (1) è una $g_{2r}{}^r$ composta con la g_2', d'altra parte, essa deve potersi ottenere col sistema aggiunto puro, quindi la curva generica C′ del sistema aggiunto puro, taglia la C in $p - 1$ coppie della g_2'. Cioè: « *Se* C′ *passa per un punto* M *di* C, *essa passa anche per quel punto* M′ *di* C *che corrisponde a* M *nella* g_2' »: ma tutte le C per M passano per M′ e non hanno altri punti comuni fuori di A (2): si ha dunque sulla C′ una involuzione di gruppi (di due punti ognuno) che si tratta di dimostrare essere razionale. Il che risulta subito quando si consideri che il sistema dato [C] segna sulla curva generica dell'aggiunto puro una serie che è una $g^{p-1}{}_{2p-2}$ e la quale è evidentemente composta con la involuzione precedente. Dunque questa involuzione è razionale (3). Si ha quindi sulla C′ una g_2'.

Segue:

« *Il sistema aggiunto puro è iperellittico* » e di più, tenendo conto della osservazione fatta precedentemente, « *tutte le curve del sistema aggiunto puro, passanti per un punto del piano, passano, in conseguenza, per un solo altro punto* ».

Inoltre:

« *La serie caratteristica dell'aggiunto puro è composta con la* g_2' » (3).

Segue che « *il genere dell'aggiunto puro non può essere inferiore a* p — 2 ». Infatti, per $p - 2$ punti generici passa un fascio di C′ (perchè la dimensione di [C′] è $p - 1$) le quali passano in conseguenza per i $p - 2$ punti corrispondenti. Dunque questo fascio ha la sovrabbondanza uguale almeno a $p - 2$. Ma in un fascio la sovrabbondanza uguaglia il genere (C N° 19): dunque il genere di [C′] non può essere inferiore a $p - 2$ (quindi (N° 26) le sole due ipotesi $p' = p - 1$, $= p - 2$).

28. Viceversa ammettiamo che il sistema aggiunto puro sia iperellittico e di più che tutte le sue curve, passanti per un punto del piano, passino, in conseguenza, per un altro punto determinato dal primo. Intanto, per il solo fatto $p = k$, $s = 1$ segue (come abbiamo già osservato al N⁰ 24) che presi $p - 1$ punti generici, per essi passa un fascio di C aventi altri

(1) BERTINI — *La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico* (N° 32) Ann. di mat. Serie II, Tomo XXII, 1894.

(2) BERTINI — loc. cit. N° 52.

(3) BERTINI — loc. cit. N° 31.

(4) BERTINI — loc. cit. N° 32.

$p-1$ punti base così che i $2p-2$ punti del gruppo appartengono a una sola C, a quella individuata dai $p-1$ punti generici scelti avanti. Allora, assumiamo $p-2$ punti A_1, A_2, . . . A_{p-2} in posizione generica. Tutte le C′, per essi, formano un fascio avente gli altri punti base in altri $p-2$ punti A_1' A_2' . . .A'_{p-2} corrispondenti dei primi nelle g_2' supposte giacenti sulle C′. Invece tutte le C per A_1, A_2, . . . A_{p-2} formano una rete (perchè $k=p$). Preso un altro punto M generico del piano, per A_1, A_2, . . . A_{p-2} e M passa una sola C′ e ∞^1 C i cui rimanenti punti base stanno sulla C′. Ma se M coincide con A_i' ($i=1$, 2, . . . $p-2$), allora per i punti A_1, A_2, . . . A_{p-2}, A_i' passa ancora un fascio di C′ perchè il passaggio delle C′ per A_i' non impone alla C′ niuna nuova condizione, e così vi passa una rete di C perchè, se ve ne passasse un fascio, quei punti servirebbero a individuare un gruppo della serie caratteristica e quindi una C′. Dunque la rete delle C individuata da A_1 A_2 . . . A_{p-2} passa anche per A_1' A_2' . . . A'_{p-2} e quindi il fascio delle C′ per A_1 A_2, . . . A_{p-2}, A_1' A_2', . . . , A'_{p-2} segna, sopra ogni C della rete, una g_2'. Il sistema [C] è iperellittico.

Quindi:

« *La condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema* [C] *sia iperellittico è che lo sia l'aggiunto puro e di più che le curve di quest'ultimo, passanti per un punto del piano, passino in conseguenza per un altro punto* ».

LA QUARTICA DI CAPORALI

[*Estratto dai Rend. della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli*]

Fascicolo 4° — Aprile 1896.

Nei rendiconti di questa Illustre Accademia è pubblicata (fasc. 12°, Dicembre 1882) una breve Nota, di Ettore Caporali, nella quale sono enunciate, in modo molto sommario, le proprietà fondamentali di una notevolissima curva piana del 4° ordine che viene definita come la jacobiana di un fascio di cubiche sizigetiche e di una retta. Una delle proprietà principali, attorno alle quali molte altre si aggruppano, si è che la medesima curva ammette una seconda generazione come jacobiana di un altro fascio di cubiche sizigetiche e di un'altra retta.

Di questa curva sono accenni più, o meno espliciti, in altri scritti del Caporali, pubblicati dopo la sua morte. Così un altro eleneo degli enunciati dei teoremi fondamentali si trova in « *Alcuni teoremi sui fasci sizigetici di cubiche* » (pag. 333 del volume delle memorie), nei « *frammenti sulla teoria generale delle quartiche piane* » (pag. 340 349 loc. cit.) e in due lettere indirizzate al prof. Segre e da questi molto opportunamente pubblicate (cf. Segre: « *Alcune idee di Ettore Caporali intorno alle quartiche piane* » (Annali di matematica, Serie II, tomo XX, 1892). L'accenno è più esplicito nell'altro lavoro: « *Sulla figura costituita dai punti di contatto dalle tangenti condotte a una cubica da tre suoi punti in linea retta* » (p. 338 delle « memorie »). Ivi l'autore, partendo appunto da una tale configurazione, dimostra geometricamente la doppia generazione della curva. Ma la configurazione è tutt'altro che semplice e il modo col quale l'autore viene a stabilire il secondo fascio e la seconda retta di cui la curva è ancora jacobiana, non lascia vedere come si possa analiticamente trovare la equazione dell'uno e dell'altra.

L'argomento è più interessante di quel che non sembri a priori. Non si tratta soltanto dello studio puro e semplice di una curva che, a dir vero, è caso molto particolare, delle curve di 4° ordine; ma bisogna considerare

che la quartica medesima è così intimamente legata ai fasci sizigetici, i quali servono a generarla, che quasi tutte le proprietà della prima si possono interpretare come proprietà relative a fasci sizigetici. Inoltre, quando, nella quartica stessa, si tenga fisso uno dei fasci che la generano e si faccia variare la relativa retta si è condotti a una rete notevole, di quartiche di Caporali, la quale è l'unica (come ho dimostrato ai N^i 18, 19) che si possa costruire, fra quelle dotate di 12 punti base, così che ogni quartica della rete abbia, in ciascun punto base, un flesso.

Nel presente lavoro mi son proposto di dimostrare, con metodo analitico semplice e uniforme, i teoremi di Caporali connettendoli fra di loro e aggiungendo lo studio della rete suddetta. Per questo ho diviso il lavoro in due parti: la 1^a riguarda le proprietà fondamentali della quartica in discorso; la 2ª considera la rete suddetta. Fra le curve di questa è degno di osservare un caso particolare (N° 23) nel quale, le due rette, che, insieme ai due fasci, servono a generare la curva, nei due modi che si è detto, possono coincidere, così che la quartica può pensarsi contemporaneamente come jacobiana di una retta e di uno qualunque di due fasci sizigetici. In questo caso singolare la curva, è caratteristica dal possedere 4 ondulazioni in linea retta formanti gruppo equianarmonico e dall'avere concorrenti in un punto le 4 tangenti di ondulazione.

Gli enunciati dei teoremi di Caporali sono contrassegnati con l'indicazione [C pag.... N^o ... del volume delle memorie].

Le principali proprietà della quartica di Caporali.

1. Chiameremo « *quartica di Caporali* » la jacobiana di una retta r e di un fascio φ di cubiche sizigetiche. Assumendo per triangolo fondamentale uno dei trilateri sizigetici di φ, la equazione di una tal quartica è la seguente:

$$f = v_1 x_1 (x_2^3 - x_3^3) + v_2 x_2 (x_3^3 - x_1^3) + v_3 x_3 (x_1^3 - x_2^3) = 0 , \qquad (1)$$

dove le v, sono le coordinate di r. Da questa equazione resultano subito le proprietà seguenti: i tre punti fondamentali sono tre flessi di f; le tre tangenti di flesso le quali sono rappresentate dalle equazioni

$$v_1 x_1 - v_2 x_2 = 0 \quad , \quad v_1 x_1 - v_3 x_3 = 0 \quad , \quad v_2 x_2 - v_3 x_3 = 0$$

concorrono in un medesimo punto $P_1 \equiv (v_2 v_3 , v_3 v_1 , v_1 v_2)$ che appartiene a f, la polare armonica di ciascuno dei tre flessi precedenti è la retta che

passa per gli altri due. Ciò posto, siccome il triangolo fondamentale è uno qualunque dei 4 trilateri sizigetici di φ, così ne seguono questi teoremi:

(a) « *La quartica* f *di Caporali ha 12 flessi nei 12 vertici dei trilateri sizigetici di* φ » [C pag. 336, N° 24].

(b) « *In un medesimo trilatero sizigetico, le tre tangenti a* f *concorrono in uno stesso punto che appartiene di nuovo a* f [C pag. 336, N° 20]; *ogni lato è la polare armonica del vertice opposto* » [C pag. 336, N° 21].

Noi porremo il teorema (a) sotto quest'altra forma che ci sarà utile nel seguito:

(c) « *La quartica di Caporali ha 12 flessi distribuiti, a 4, a 4, sopra le 9 rette polari armoniche di un fascio di cubiche sizigetiche* ».

Indicheremo con F, il gruppo di questi 12 flessi di f. Più tardi riconosceremo che anche gli altri 12 costituiscono un gruppo perfettamente angolo a F.

2. Premetteremo adesso una osservazione relativa a una quartica qualunque e che è perfettamente analoga per enunciato e per dimostrazione a una ben nota che riguarda le cubiche. E' la seguente: « Se una quartica ha 4 flessi in linea retta, i loro 4 tangenziali giacciono pure sopra un'altra retta ». Quest'osservazione applicata ai teoremi (b) e (c) del N° precedente ci dice che:

(a) « *I quattro punti della quartica di Caporali nel quali si tagliano, a tre, a tre, le 12 tangenti di flesso del gruppo* F, *sono le 4 intersezioni di una medesima retta con la quartica* » [C pag. 336, N° 26].

Il seguente calcolo semplicissimo, mentre ci fornisce una conferma analitica del teorema precedente, ci dà anche l'equazione di tale retta. I vertici dei trilateri sizigetici di φ hanno le coordinate

$$1^0 \equiv \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad 2^0 \equiv \begin{Bmatrix} \varepsilon, & \varepsilon^2, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \\ \varepsilon, & 1, & \varepsilon^2 \end{Bmatrix}, \quad 3^0 \equiv \begin{Bmatrix} \varepsilon, & 1, & 1 \\ 1, & \varepsilon, & 1 \\ 1, & 1, & \varepsilon \end{Bmatrix}, \quad 4^0 \equiv \begin{Bmatrix} \varepsilon^2, & 1, & 1 \\ 1, & \varepsilon^2, & 1 \\ 1, & 1, & \varepsilon_2 \end{Bmatrix}$$

dove ε, ε^2 sono le due radici cubiche immaginarie dell'unità positiva. Se indichiamo con P_i il punto di concorso delle tangenti di flesso nei vertici di uno stesso trilatero, si vede subito che è:

$$P_1 \equiv (v_2 v_3 \ , \ v_3 v_1 \ , \ v_1 v_2),$$
$$P_2 \equiv (v_1^2 - v_2 v_3 \ , \ v_2^2 - v_3 v_1 \ , \ v_3^2 - v_1 v^2),$$
$$P_3 \equiv (v_1^2 - \varepsilon^2 v_2 v_3 \ , \ v_2^2 - \varepsilon^2 v_3 v_1 \ , \ v_3^2 - \varepsilon^2 v_1 v_2),$$
$$P_4 \equiv (v_1^2 - \varepsilon v_2 v_3 \ , \ v_2^2 - \varepsilon v_3 v_1 \ , \ v_3^2 - \varepsilon v_1 v_2).$$

La retta che passa per due qualunque di essi, contiene anche gli altri due ed è rappresentata dall'equazione:

$$r' \equiv (v_2^3 - v_3^3)\, v_1\, x_1 + (v_3^3 - v_1^3)\, v_2\, x_2 + (v_1^3 - v_2^3)\, v_3\, x_3 = 0 \ , \qquad (2)$$

che è quella cercata (1). Essa ci mostra anche che la retta $r \equiv v_x$ è la retta armonica di P_i rispetto al trilatero sizigetico i^{mo}. Così la retta r' viene a dipendere dalla retta r per mezzo del fascio φ in modo estraneo alla quartica f. E si ha quindi il teorema:

(b) «*I quattro poli di una retta qualunque* r *rispetto ai 4 trilateri di un fascio di cubiche sizigetiche appartengono a un'altra retta* r » [C pag. 336, N° 25]

Per brevità di linguaggio introdurremo le seguenti notazioni: il fascio sizigetico φ lo chiameremo *fascio generatore* della quartica, la retta r la diremo la *direttrice del fascio;* quanto alla r' adotteremo la denominazione analoga impiegata per le cubiche; la chiameremo *la satellite* delle nove polari armoniche di φ, o più brevemente, la *satellite* di φ rispetto a f. Servendosi di questa denominazione il teorema (a) può enunciarsi così:

(c) « *Le nove polari armoniche del fascio* φ, *ognuna delle quali contiene quattro flessi della quartica di Caporali, hanno rispetto alla quartica una medesima retta satellite* ».

3. Vogliamo adesso caratterizzare proiettivamente la quartica di Caporali. Dalla nota formula simbolica $a_x^2\, a_x^2 = 0$ che rappresenta la conica polare di una data conica inviluppo $a_u^2 = 0$; si trova subito che sono apolari le due coniche:

$$v_1\, u_1^2 + v_2\, u_2^2 + v_3\, u_3^2 = 0,$$
$$v_3\, u_1\, u_2 + v_1\, u_2\, u_3 + v_2\, u_3\, u_1 = 0,$$

e quindi è apolare ogni conica della schiera:

$$v_1\, u_1^2 + v_2\, u_2^2 + v_3\, u_3^2 + \lambda\,(v_3\, u_1\, u_2 + v_1\, u_2\, u_3 + v_2\, u_3\, u_1) = 0 \ , \qquad (3)$$

Esisteranno altre coniche apolari? La risposta è negativa giacchè se ne esistesse anche un'altra, non contenuta nella schiera precedente, ne esisterebbe un tessuto e quindi l'equazione della nostra f sarebbe rappresentabile con la somma di 3 biquadrati. Ma allora ogni cubica polare sarebbe equiamarmonica, il che nel nostro caso non succede.

Dunque esiste una sola schiera di coniche apolari.

---

(1) E' notevole che l'equazione di r' divenga quella di f scambiando le v con le x.

La chiameremo brevemente: « *la schiera apolare* ». Ne segue che « *Il covariante* S *di Clebsch si compone di 4 rette: le 4 tangenti base della schiera apolare* ». Queste 4 rette sono in generale distinte perchè il discriminante della (3) che è

$$2\lambda^3 v_1 v_2 v_3 - \lambda^2 (v_1^3 + v_2^3 + v_3^3) + v_1 v_2 v_3 = 0 \ , \qquad (4)$$

non ha radici multiple per posizioni generiche della $r \equiv v_x = 0$. Dall'esistenza di una schiera apolare segue, com'è ben noto, la riduzione della equazione della quartica alla somma di quattro biquadrati. Ma una tale curva dipende evidentemente da 11 costanti, mentre, dalla definizione medesima della quartica di Caporali, si rileva che essa deve dipendere soltanto da 10 [C p. 204]. Ciò indica che la quartica suddetta non è la più generale possibile fra quelle che posseggono una schiera apolare: e infatti si trova, dalla equazione (1), che è nullo il suo invariante cubico [C p. 349]. Esso può considerarsi come l'armonizzante simultaneo della quartica e del suo inviluppo equianarmonico (cf. ad es. Salmon, *Curve piane*, pag. 370). Ne concludiamo che:

La quartica di Caporali può essere caratterizzata analiticamente così:

1ª *L'invariante di 6° grado si annulla insieme a tutti i suoi minori di 5° ordine (tre condizioni).*

2ª *È nullo l'invariante cubico (un'altra condizione).*

O, geometricamente, dalle condizioni che equivalgono alle precedenti e che consistono:

1ª *Nel possedere una schiera apolare.*

2ª *Nell'essere armonica col proprio inviluppo equianarmonico.*

4. In questo caso dunque la corrispondenza polare fra coniche inviluppo e comiche luogo non è più biunivoca. Presa una qualunque conica inviluppo I, la sua polare L è tale rispetto a tutte quelle del tessuto individuale da I e dalla schiera apolare e inoltre L è armonica con qualunque conica della schiera suddetta [C pag. 352, N° 60]. Ne segue che: « *Le due rette che costituiscono la conica polare di un punto dell'hessiana di* f *sono i raggi doppi della involuzione che si ottiene proiettando dal punto corrispondente della Steineriana i vertici del quadrilatero costituente il covariante* S ».

5. Ci proponiamo ora lo studio degli altri flessi della f dimostrando che:

« *La quartica di Caporali possiede, oltre i 12 già considerati costituenti il gruppo* F_1, *12 nuovi flessi i quali formano un gruppo* F_2 *perfattamente analogo a* F_1 *e cioè il gruppo dei 12 punti doppi di un nuovo fascio* φ' *di cubiche sizigetiche* » [C pag. 204; pag 337, N° 37].

E così sarà anche implicitamente dimostrato che la nostra f non possiede punti doppi.

Per questo è necessario ricordare qui qualche nota proprietà delle quartiche dotate di schiera apolare, o, quel che è lo stesso, rappresentabili con la somma di 4 biquadrati (1).

Sia perciò la quartica

$$f = \sum_1^4 a_i x_i^4 = 0 \quad , \text{ dove } \quad \sum x_i = 0.$$

Rammenteremo dunque che ogni vertice del quadrilatero S è doppio per l'hessiana, è quadruplo per la Steineriana; i due rami della prima sono distinti, i 4 rami della seconda hanno una stessa tangente. Ma quel che più interessa, per noi, di rilevare si è che mentre l'hessiana non ha altri punti singolari, la Steineriana ha invece altri tre punti doppi la cui esistenza si può accertare così. Si consideri la conica $C = \Sigma a_i x_i^2 = 0$: le rette polari dei vertici del quadrilatero S rispetto a f, sono tali anche rispetto a C; dunque esse costituiscono un quadrangolo completo. Ebbene, si riconosce facilmente che la cubica polare di uno qualsiasi dei tre punti diagonali di tale quadrangolo si spezza in una diagonale del quadrilatero S e in una conica: dunque i tre punti diagonali suddetti sono i tre punti doppi cercati. La Steineriana di f non ha altre singolarità oltre quelle citate. Con ugual facilità si vede anche che la C è conica polare dei tre vertici del trilatero diagonale del quadrilatero S. Ora il discriminante C è proporzionale all'invariante cubico di f. Se quest'invariante è zero, C è una coppia di rette, f è la quartica di Caporali (N° 3) i tre punti diagonali suddetti dànno luogo a un punto triplo la cui cubica polare si compone del trilatero diagonale di S [C pag. 353, N° 67, 68].

Dunque ne concludiamo che la Steineriana della quartica di Caporali possiede, fuori dei vertici del quadrilatero S, un punto triplo di cui la cubica polare è costituita dal trilatero diagonale di S: per il punto triplo suddetto passano due rette le quali, insieme, formano la conica polare di uno qualunque dei tre vertici del trilatero in discorso.

6. Ebbene dimostreremo adesso che le due rette precedenti sono le rette r, r' dei N^i 1^0 e 2^0, che il loro punto comune $R \equiv r.\ r'$ è il punto della Steineriana di f. Cominciamo da quest'ultima asserzione.

Perciò riprendendo il triangolo fondamentale e le notazioni dei primi 3 N^i osserveremo che le coordinate y di R sono:

(1) Del Pezzo, *Sulla curva Hessiana* — (Questi rendic., fasc. 6°, 1883).

$$y_1 \equiv v_2 v_3 (v_2^3 + v_3^3 - 2v_1^2) \quad , \quad y_2 \equiv v_3 v_1 (v_3^3 + v_1^3 - 2v_2^3), \tag{5}$$
$$y_3 \equiv v_1 v_2 (v_1^3 + v_2^3 - 2v_3^3$$

e la sua cubica polare è

$$\begin{aligned} U = v_1 v_2 v_3 \{ & (v_2^3 - v_3^3) x_1^3 + (v_3^3 - v_1^3) x_2^3 + (v_1^3 - v_3^3) x_3^3 \} + \\ & + v_2 v_3 (v_2^3 + v_3^3 - 2v_1^3) x_1^2 (v_3 x_3 - v_2 x_2) + \\ & + v_3 v_1 (v_3^3 + v_1^3 - 2v_2^3) x_2^2 (v_1 x_1 - v_3 x_3) + \\ & + v_1 v_2 (v_1^3 + v_2^3 - 2v_3^3) x_3^2 (v_2 x_2 - v_1 x_1) + 0. \end{aligned}$$

Per dimostrare che U è il prodotto di tre fattori lineari basta calcolarne l'hessiana. Si trova che essa è

$$[v_1 v_2 v_3 \{ (v_1^3 + v_2^3 + v_3^3)^3 - 27 v_1^3 v_2^3 v_3^2 \}] U = 0$$

ossia è composta di due fattori di cui uno è U. Se dunque le v non annullano il fattore diverso da U è certo che la cubica polare di R è l'insieme di tre rette non passanti per un punto, cioè R è effettivamente il punto triplo della Steineriana. Il fattore che moltiplica U, nella hessiana precedente, ha un significato geometrico molto semplice. Supponendo le v variabili esso rappresenta, in coordinate di rette, l'equazione complessiva dei 12 vertici dei trilateri sizigetici appartenenti al fascio generatore φ. E infatti basta, per questo, osservare che detto fattore può scomporsi negli altri 4

$$\begin{aligned} v_1 v_2 v_3 &= 0 , \\ v_1^3 + v_2^3 + v_3^3 - 3 v_1 v_2 v_3 &= 0 , \\ v_1^3 + v_2^3 + v_3^3 - 3 \varepsilon v_1 v_2 v_3 &= 0 , \\ v_1^3 + v_2^3 + v_3^3 - 3 \varepsilon^2 v_1 v_2 v_3 &= 0 , \end{aligned}$$

i quali rappresentano i 4 triangoli sizigetici della schiera di curve di 3ª classe

$$v_1^3 + v_2^3 + v_3^3 + 6\lambda v_1 v_2 v_3 = 0 .$$

Quindi escludendo, per ora, il caso (che sarà trattato a parte N° 22) in cui la r passi per uno dei flessi del gruppo F, possiamo ritenere dimostrato che R è il punto triplo della Steineriana di cui è parola nel N° precedente.

Quanto alle rette r, r', basta verificare che il loro prodotto:

$$\begin{aligned} (v_1^3 - v_2^3)(v_1 v_2 x_1 x_2 - v_3^2 x_3^2) + (v_2^3 - v_3^3)(v_2 v_3 x_2 x_3 - v_1^2 x_1^2) + \\ + (v_3^3 - v_1^3)(v_3 v_1 x_3 x_1 - v_2^2 x_2^2) = 0 \end{aligned}$$

rappresenta una conica armonica della schiera apolare, giacchè una tal conica è unica per il teorema del N° 4. Così resultano dimostrate entrambe le asserzioni fatte al principio di questo N°.

7. Questo prova intanto che le rette r ed r' si trovano in condizioni perfettamente uguali rispetto alla nostra quartica, e quindi, come esiste un fascio generatore φ tale che f si possa riguardare jacobiana di φ e di r, così è facile prevedere che esisterà un secondo fascio generatore φ' tale che f si possa ancora riguardare come jacobiana di φ' ed r'. Questo secondo fascio φ' è quello cui appartiene la cubica

$$\varphi'_1 = v_2 v_3 x_1 (v_3 x_2^2 - v_3 x_3^2) + v_3 v_1 x_2 (v_1 x_3^3 - v_3 x_1^2) + v_1 v_2 x_3 (v_2 x_1^2 - v_1 x_2^2) = 0.$$

Infatti la jacobiana di un tal fascio e di r' è appunto

$$f(v_2^3 - v_3^3)(r_3^3 - v_1^3)(v_1^3 - v_2^3) = 0.$$

Il fattore che moltiplica la f rappresenta, in coordinate di rette, l'equazione complessiva dei flessi di φ. Escluderemo che la r vi soddisfi; che cioè la r passi per uno di tali flessi riserbandoci di trattare separatamente un tal caso (N° 20). Fatta questa esclusione, noi possiamo dire evidentemente, che « *la* r' *satellite del primo fascio generatore* φ, *è direttrice del secondo fascio generatore* φ' *e viceversa* ».

8. Secondo il N° 3, una quartica dotata di schiera apolare e armonica col proprio inviluppo equanarmonico è una quartica di Caporali. E così siamo giunti a una nuova definizione di tale curva. Le considerazioni dei N^i 5 e 6 mostrano, come, partendo da questa nuova definizione, si possano trovare le due direttrici (o satelliti) r, r' dei due fasci. Manca d'indicare una costruzione geometrica che serva a trovare i due fasci medesimi. Ciò si può conseguire mediante la osservazione seguente:

« *I nove punti base del fascio generatore* φ *sono quei nove punti della hessiana di* f *che corrispondono alle nove intersezioni della Steineriana con la direttrice* r *situate fuori del punto triplo* R [C pag. 337, N° 35].

Per accertarsene basta, servendosi della (1), calcolare la equazione della conica polare di un flesso di φ: si vedrà allora essere costituita tale conica da un paio di rette (una è la polare armonica del flesso) che si tagliano sopra r.

Altrettanto può dirsi di φ' ed r'.

Ecco dunque, come, partendo dalla nuova definizione, si possano ritrovare gli elementi dell'antica e cioè i fasci generatori e le rette direttrici: basta prendere il punto triplo della Steineriana e considerare la coppia di rette per quel punto le quali costituiscono una conica armonica alla

schiera apolare: queste sono le direttrici. Dopo, si considerino i 2 gruppi, di 9 punti ognuno, costituiti dalle intersezioni delle direttrici suddette, con la Steineriana fuori del suo punto triplo: ebbene, i 2 gruppi di punti dell'hessiana che corrispondono ai precedenti costituiscono precisamente i punti base dei fasci generatori φ e φ'.

9. L'hessiana H di f è rappresentata dalla equazione

$$H = (x_1^3 + x_2^2 + x_3^3)\,\varphi'_1 + x_1\,x_2\,a_3\,\varphi'_2 = 0$$

dove φ'_1 è quello del N° 7 e

$$\varphi'_2 = x_1^3\,(v_3^3 - v_2^3) + x_2^3\,(v_1^3 - v_3^3) + x_3^3\,(v_2^3 - v_1^3) +$$
$$+3v_2v_3x_2x_3(v_2x_2 - v_3x_3) + 3v_3v_1x_3x_1(v_3x_3 - v_1x_1) + 3v_1v_2x_1x_2(v_1x_1 - v_2x_2) = 0.$$

Segue che H si può generare mediante i due fasci proiettivi

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - \lambda x_1\,x_2\,x_3 = 0\,,$$
$$\varphi'_2 + \lambda\varphi'_1 = 0\,.$$

Il 1° è il fascio generatore φ: il 2° è il fascio generatore φ' perchè si vede facilmente che per

$$\lambda = \frac{v_1^3\,v_2^3 + v_2^3\,v_3^3 + v_3^3\,v_1^3}{v_1^2\,v_2^2\,v_3^2}$$

la seconda delle equazioni precedenti dà la hessiana di φ'_1. Nella proiettività suddetta sono curve corrispondenti

$$x_1\,x_2\,x_3 = 0 \quad , \quad \varphi'_1 = 0$$

la seconda delle quali tocca r' nel punto P_1 del N° 2.

Riassumendo dunque questi ultimi resultati, nei possiamo enunciare i seguenti teoremi:

a) « *La quartica di Caporali generata come jacobiana del fascio sizigetico:*

$$\varphi = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - \lambda\,x_1\,x_2\,x_3 = 0$$

e della retta

$$r = v_1\,x_1 + v_2\,x_2 + v_3\,x_3 = 0$$

ammette una seconda generazione come jacobiana dell'altro fascio sizigetico:

$$\varphi' = x_1^3(v_3^3 - v_2^3) + x_2^3(v_1^3 - v_3^3) + x_3^3(v_2^3 - v_1^3) +$$
$$+3v_2v_3x_2x_3(v_2x_2 - v_3x_3) + 3v_3v_1x_3x_1(v_3x_3 - v_1x_1) + 2v_1v_2x_1x_2(v_1x_1 - v_2x_2) +$$
$$+\lambda\{v_2v_3x_1(v_3x_2^2 - v_2x_3^2) + v_3v_1x_2(v_1x_3^2 - v_3x_1^2) + v_1v_2x_3(v_2x_1^2 - v_1x_2^2)\} = 0$$

e dell'altra retta:

$$r' = v_1(v_2^3 - v_3^3)x_1 + v_2(v_3^3 - v_1^3)x_2 + v_3(v_1^3 - v_2^3)x_3 = 0\,.$$

b) *La direttrice di un fascio è satellite dell'altro.*

c) *I due fasci sono proiettivi e generano la hessiana della quartica. Ai trilateri sizigetici del 1° fascio corrispondono le cubiche del secondo tangenti alla satellite del primo e viceversa* » [C pag. 341, 342, N^i 9 e 10].

Il teorema enunciato al principio del N^0 5 è così completamente dimostrato. Contemporaneamente resulta, specie dai N^i 5, 6, 7, 8, che non è possibile una terza generazione della curva come jacobiana di un terzo fascio sizigetico e di una terza retta. Così pure è evidente che i due fasci φ e φ' non hanno, in generale, punti doppi a comune. Se tali punti esistessero, essi sarebbero punti di ondulazione per f e farebbero parte dei gruppi F_1 e F_2 del N^0 5. E come facenti parte del 1^0, la loro presenza sarebbe manifestata immediatamente della equazione (1). Dunque la f ha *generalmente* 24 flessi distinti.

10. Dall'equazione della schiera apolare (N^0 3) si vede che sono coniche della schiera quelle che toccano un trilatero sizigetico nei punti d'incontro di ciascun lato con la tangente di flesso di f nel vertice opposto. Questa osservazione ci dà il mezzo di esprimere geometricamente il legame che passa fra i fasci generatori φ e φ':

« *Le 18 coniche ognuna delle quali tocca uno dei 18 trilateri sizigetici di φ e φ' nei punti dove ciascun lato è incontrato dalla tangente di flesso di* f *nel vertice opposto, appartengono a una medesima schiera (la schiera apolare): le 4 tangenti base della schiera mentre costituiscono il covariante S, rappresentano anche il legame geometrico che passa fra i fasci φ e φ'* ».

In casi particolari (N^0 22, 23) questo legame è più espressivo.

11. Il tangenziale di un punto A d'una cubica è l'intersezione della tangente alla cubica in A con la retta polare di A rispetto alla hessiana. Segue che, preso un punto P della retta r, e la cubica del fascio φ passante per P, i 4 punti di contatto A, B, C, C delle tangenti alla cubica tirate da P, appartengono alla jacobiana di φ e di r, cioè alla quartica f. Ci occorre dimostrare il seguente lemma: « la conica polare di A rispetto a f passa per B, C, D » [C pag. 336, N^0 31]. Infatti sia $\Theta = \theta_x^3 = 0$ la cubica del fascio che passa per F, $H = h_x^3 = 0$ la hessiana di Θ e $v_x = 0$ la r. Prendiamo (001) in P, (100) in A e (010) in B. Avremo allora:

$$f = v_1 (\Theta_2 \mathrm{H}_3 - \Theta_3 \mathrm{H}_2) + v_2 (\Theta_3 \mathrm{H}_1 - \Theta_1 \mathrm{H}_3) = 0 \qquad (6)$$

dove gl'indici indicano le derivate parziali; e

$$\Theta = 3\theta_{112} x_1^2 x_2 + 3\theta_{122} x_1 x_2^2 + 3\theta_{133} x_1 x_3^2 + 3\theta_{233} x_2 x_3^2 + 6\theta_{123} x_1 x_2 x_3 = 0.$$

I coefficienti di H che vengono adoperati nel calcolo sono solamente i seguenti: (Salmon, *Curve piane*, pag. 271)

$$h_{113} = h_{223} = 0$$

$$3\, h_{112} = \theta^2_{123}\, \theta_{112} - \theta_{122}\, \theta_{133}\, \theta_{112} - \theta_{233}\, \theta^2_{112}\,,$$

$$3\, h_{122} = \theta^2_{123}\, \theta_{122} - \theta_{233}\, \theta_{112}\, \theta_{122} - \theta_{133}\, \theta^2_{122}\,,$$

$$3\, h_{123} = \theta^3_{123} - \theta_{123}\, \theta_{122}\, \theta_{133} - 2\, \theta_{123}\, \theta_{233}\, \theta_{112}\,.$$

La conica polare di A, rispetto a f, è

$$v_1(\Theta_{112}\mathrm{H}_3 + 2\Theta_{12}\mathrm{H}_{13} - 3\Theta_{13}\mathrm{H}_{12} - \Theta_3\mathrm{H}_{112}) + v_2(2\Theta_{13}\mathrm{H}_{11} + \Theta_3\mathrm{H}_{111} - 2\Theta_{11}\mathrm{H}_{13}) = 0$$

dove ancora gl'indici rappresentano le derivate.

Per dimostrare il lemma, basta verificare che la equazione precedente è soddisfatta da (010). Il che si fa molto facilmente perchè, per tali valori delle coordinate, è

$$\mathrm{H}_3 = \Theta_3 = 0,$$

$$\Theta_{12}\, \mathrm{H}_{13} - \Theta_{13}\, \mathrm{H}_{12} = \theta_{122}\, h_{123} - \theta_{123}\, h_{122} = 0,$$

$$\Theta_{13}\, \mathrm{H}_{11} - \Theta_{11}\, \mathrm{H}_{13} = \theta_{132}\, h_{112} - \theta_{112}\, h_{123} = 0\,.$$

12. Ne segue che i lati del quadrangolo A B C D tagliano armonicamente la quartica f perchè si dimostra facilmente che « *le sei rette condotte da un punto* M *della quartica ai punti d'incontro della quartica stessa con la conica polare di* M *appartengono all'inviluppo armonico* » [C pag. 357, N° 20].

A tal uopo basta osservare che, se una binaria biquadratica è tale che il secondo gruppo polare di uno dei suoi elementi sia costituito oltre quell'elemento da un altro pure appartenente alla forma, la forma stessa è di conseguenza armonica e i due elementi in questione sono coniugati,

È così accertata la esistenza di infiniti quadrangoli, iscritti nella quartica f, di cui ogni lato la sega armonicamente. Diremo, con Caporali, che il gruppo dei 4 vertici di un tal quadrangolo è « *un gruppo, o quadrangolo di punti congiunti* » [C pag. 336, N° 30]. A questi gruppi spetta qualche proprietà interessante che ci proponiamo ora di stabilire.

13. Intanto, la doppia generazione della nostra curva dà luogo alla seguente costruzione. Si prenda un punto P di f, si considerino le due curve di φ e φ' che passano per un tal punto e si conducano le tangenti in P a tali curve: queste tangenti tagliano le rispettive r ed r' in due punti dai quali si possono condurre altre tre tangenti all'una e all'altra delle due cubiche in discorso; considerando i due gruppi dei 3 nuovi punti di contatto associati a P potremo dire, evidentemente, che:

« *Un punto* P *appartiene a due quadrangoli congiunti: uno relativo al 1° fascio, uno relativo al 2°: i 6 vertici di tali quadrangoli, diversi da* P, *sono le 6 intersezioni di* f *con la conica polare di* P *rispetto a* f » [C p. 336, N° 31].

14. I punti diagonali del quadrangolo A B C D del N° 11 appartengono nuovamente alla cubica Θ: uno di essi è il terzo punto d'incontro con Θ della retta A B. — E, secondo il triangolo fondamentale, allora adottato, esso ha le coordinate $(\theta_{122}, -\theta_{112}, 0)$. È facile verificare che un tal punto appartiene alla hessiana di f. Il calcolo non è così laobrioso come sembra a priori. S'indichino con a, b, i coefficienti di v_1, v_2, nella (6) del N° 11; e con a_{ik}, b_{ik}, le loro derivate parziali.

La hessiana di f è rappresentata da

$$\begin{vmatrix} v_1 a_{11} + v_2 b_{11} & v_1 a_{12} + v_2 b_{12} & v_1 a_{13} + v_2 b_{12} \\ v_1 a_{12} + v_2 b_{12} & v_1 a_{22} + v_2 b_{22} & v_1 a_{23} + v_2 b_{23} \\ v_1 a_{13} + v_2 b_{13} & v_1 a_{23} + v_2 b_{23} & v_1 a_{33} + v_2 b_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Ma indicando con $[a_{ik}], [b_{ik}]$, quel che divengono a_{ik}, b_{ik}, quando al posto delle coordinate correnti si sostituiscono le $\theta_{122}, -\theta_{112}, 0$ si vede subito che è:

$$[a_{11}] = [a_{33}] = [a_{13}] = [b_{22}] = [b_{33}] = [b_{23}] = 0$$

e non rimane a verificare altro che

$$\begin{vmatrix} v_2 [b_{11}] & v_1 [a_{12}] + v_2 [b_{12}] & v_2 [b_{13}] \\ v_1 [a_{12}] + v_2 [b_{12}] & v_1 [a_{22}] & v_1 [a_{23}] \\ v_2 [b_{13}] & v_1 [a_{23}] & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Dunque possiamo enunciare il teorema:

« *La quartica di Caporali è generata da due serie* ∞^1 *di qnadrangoli di cui i lati la segano armonicamente e di cui i punti diagonali descrivono la sua hessiana* » [C pag. 337, N° 36, pag. 340, N° 7, pag. 204, 205. Si

confronti inoltre: « Segre, *Alcune idee di Ettore Caporali intorno alle quartiche piane* » [loc. cit.].

15. Siano due quartiche di Caporali aventi a comune il fascio φ e diverse le relative direttrici. Per il punto comune a tali direttrici passa una sola cubica del fascio φ: i 4 punti di contatto delle tangenti, a tale cubica, condotte per il punto comune suddetto appartengono, secondo la costruzione del N° 13, a entrambe le due quartiche e insieme ai 12 punti doppi di φ costituiscono i 16 punti base del loro fascio. Dunque:

« *Uno qualunque dei gruppi di flessi* F_1 *o* F_2 (N° 5) *insieme con un gruppo qualsiasi di punti congiunti relativo al fascio* φ, *o al fascio* φ', *(rispettivamente) costituiscono i 16 punti base di un fascio di quartiche di Caporali* » [C pag. 336, N° 30].

16. Chiuderemo questa breve esposizone delle proprietà fondamentali della quartica di Caporali con qualche osservazione sopra il suo inviluppo equianarmonico.

L'equazione di tale inviluppo, calcolata dalla (1), è

$$(u_1^3+u_2^3+u_3^3)(u_1v_2v_3+u_2v_3v_1+u_3v_1v_2)-u_1u_2u_3(u_1v_1^2+u_2v_2^2+u_3v_3^2)=0\,.$$

Esso dunque resulta generato dalle due schiere proiettive:

$$u_1^3+u_2^3+u_3^3+3\lambda u_1\,u_2\,u_3=0,$$
$$u_1\,v_1^2+u_2\,v_2^2+u_3\,v_3^2+\lambda\,(u_1\,v_2\,v_3+u_2\,v_3\,v_1+u_3\,v_1\,v_2)=0\,.$$

Segue:

« *L'inviluppo equianarmonico può essere generato da due schiere proiettive costituite dalle Cayleyane di un fascio generatore e dai punti della retta direttrice dell'altro fascio* ».

« *Le due direttrici toccano entrambe l'inviluppo equianarmonico* » [C p. 336, N^i 26 e 27].

17. Se y è un punto variabile sopra r', avremo

$$y_1=v_1^2+\lambda\,v_2\,v_3\quad,\quad y_2=v_2^2+\lambda\,v_3\,v_1\quad,\quad y_3=v_3^2+\lambda\,v_1\,v_2\,.$$

La curva di 3ª classe che gli corrisponde, nella proiettività precedente, è

$$u_1^3+u_2^3+u_3^3+3\,\lambda u_1\,u_2\,u_3=0\,.$$

Dunque, se λ adempie alla condizione

$$v_1^3+v_2^3+v_3^3+3\,\lambda v_1\,v_2\,v_3=0$$

la curva suddetta è tangente alla $r=v_x=0$. Ora, per $\lambda=-\dfrac{v_1^3+v_2^3+v_3^3}{3\,v_1\,v_2\,v_3}$

il punto y diviene il punto rr'. Di qui si trae facilmente che le rette r ed r' assorbono tutte le tangenti che da $r \,.\, r' \equiv \mathrm{R}$ si possono tirare all'inviluppo equianarmonico. D'altra parte si verifica facilmente che non ne annullano le derivate parziali, che cioè non sono bitangenti.

Dunque: « *Il punto comune alle due direttrici dei fasci, che è triplo per la Steineriana, è doppio per l'inviluppo equianarmonico, essendo le direttrici suddette le tangenti nodali* » [C pag. 342, N⁰ 12].

La rete sizigetica di quartiche.

18. — Diremo che una rete di quartiche, dotata di 12 punti base, è *sizigetica*, quando ogni quartica della rete ha in ciascun punto base un flesso, e la quartica generica della rete medesima è irriduttibile.

Un esempio ci è fornito appunto dalla:

$$v_1 x_1 (x_2^3 - x_3^3) + v_2 x_2 (x_3^3 - x_1^3) + v_3 x_3 (x_1^3 - x_2^3) = 0 \qquad (7)$$

dove i parametri sono le v. Ci proponiamo di dimostrare che è l'unico.

Per questo, cominceremo dall'osservare che, non essendo in posizione generica i 12 punti base della rete (7), può venire il sospetto che essi non rappresentino tutte condizioni indipendenti alle quartiche che li contengono e che quindi *tutte* le quartiche per quei punti costituiscano un sistema lineare ∞^l $(l > 2)$ nel quale è però contenuta la rete sizigetica (7). Il sospetto si toglie (1) osservando che la serie caratteristica di un tal sistema ∞^1 non può essere speciale giacchè, se lo fosse, ogni suo gruppo sarebbe costituito da 4 punti in linea retta. Ora, gli ∞' gruppi di punti congiunti, sulla curva generica del sistema, appartengono alla serie caratteristica (N⁰ 15) e, pel modo col quale uno di tali gruppi può essere ottenuto (N⁰ 11), si vede subito che non può esser costituito, in generale, da 4 punti allineati. Dunque:

« *Tutte le quartiche passanti per i 12 punti doppi di un fascio sizigetico di cubiche, hanno in ciascuno di quei punti base un flesso, cioè formano una rete sizigetica* ».

19. Poniamo la questione inversa. Se una rete di quartiche è sizigetica, secondo la denominazione introdotta nel N⁰ precedente, i 12 punti base si potranno riguardare come i 12 punti doppi di un fascio sizigetico di cubiche? Per rispondere a questa domanda, cominceremo dall'os-

(1) CASTELNOVO, *Ricerche sopra i sistemi lineari di curve piane* — (Mem. Acc. Sc. di Torino, 1895).

servare che: « *Se una rete di quartiche ha un punto base che è flesso per ogni curva della rete, anche la polare armonica del flesso deve essere la stessa per tutte le curve della rete* ».

Infatti, tutte le coniche polari del punto base, rispetto alle quartiche della rete, debbono spezzarsi e costituire al più una rete. Dunque, o esse sono tutte le possibili coppie di rette per un punto; ovvero esse si compongono di una retta fissa e di una variabile nel piano della rete (1).

Il 1° caso si esclude subito perchè di ciascuna conica polare suddetta deve far parte la tangente di flesso che passa sempre per il punto base; e quindi, se un tal caso si verificasse, tutte le quartiche della rete avrebbero, nel punto base, non già un flesso, ma un punto doppio. Rimane il 2° caso il quale accordato appunto col fatto che ogni conica polare deve contenere la tangente di flesso, porta alla conseguenza che tutte le coniche polari in discorso non costituiscono già una rete, ma bensì un fascio di cui ogni elemento è composto dalla tangente di flesso (variabile attorno al punto base) e da una retta fissa non passante per quel punto e cioè la polare armonica del flesso.

Ciò premesso, abbiasi una rete sizigetica di quartiche e sia P un punto base della rete. Potremo sempre disporre dei due parametri della rete esigendo che una delle sue quartiche f_1 passi per due punti infinitamente vicini a F in direzioni diverse così che essa abbia in P un punto doppio.

Allora la conica polare di P, rispetto a una tal quartica f_1, in quanto P è un suo punto doppio, deve essere costituita da due rette per P, e in quanto una tal quartica f_1 appartiene alla rete, deve contenere la polare armonica di P rispetto a tutte le quartiche della rete medesima. Ma questa polare armonica non passa per P, dunque la conica polare suddetta è indeterminata, cioè P è triplo per f_1. Ne segue che f_1 si spezza (perchè non esiste una quartica dotata di un punto triplo e di 11 flessi). Esaminando le diverse ipotesi a cui può dar luogo lo spezzarsi di una quartica e assoggettando queste ipotesi alle condizioni che il caso nostro esige, si vede facilmente che la f_1 deve esser composta di 4 rette di cui tre passano per P. Queste ultime contengono, oltre P, altri tre punti base ciascuna: i due rimanenti giacciono sulla 4ª retta che, insieme alle precedenti, compone P. Ripetendo le medesime considerazioni per tutti i punti base si trova che essi giacciono, a 4, a 4, sopra $\frac{12.3}{4} = 9$ rette le quali si tagliano, a tre, a tre, precisamente in quei 12 punti.

E allora si riconosce facilmente che le 9 rette suddette non possono

(1) SEGRE, *Intorno alla geometria delle coniche di un piano* — (Rend. Acc. Sc. di Torino, 1885).

esser altro che le 9 rette base di una chiera sizigetica di curve di 3ª classe e i 12 punti base, non possono essere altro che i punti doppi del fascio di cubiche di cui le precedenti sono le Cayleyane.

Dunque:

« *La rete di quartiche di Caporali è l'unica rete sizigetica* ».

E riunendo questo teorema a quello del N° precedente possiamo dire, evidentemente, che:

« *La condizione necessaria e sufficiente affinchè una rete di quartiche sia sizigetica è che abbia 12 punti base nei 12 punti doppi di un fascio sizigetico di cubiche* ».

20. Vogliamo ora occuparci delle curve notevoli delle rete cominciando a cercare quelle degeneri. Per questo, osserveremo che la jacobiana della rete $\mathfrak{S}$:

$$(x_1^3 - x_2^3)(x_2^3 - x_3^3)(x_3^3 - x_1^3) = 0$$

ossia si compone delle 9 polari armoniche del fascio generatore φ. Esse dunque rappresentano il luogo dei punti doppi della rete. Se quindi si considerano tutte le quartiche della rete medesima che passano per un punto P_1, di una di tali rette p_1, esse avranno in P_1 un punto doppio e formeranno un fascio. Ma ciascuna delle 9 polari armoniche di φ incontra già in 4 punti base tutte le curve della rete (N° 2 (c)): ne segue che il fascio precedente si comporrà della polare armonica p_1 e di un fascio sizigetico di cubiche.

Ciò è confermato dal calcolo seguente:

Vogliamo ad es. staccare dalla nostra rete (7) il fascio costituito da tutte le curve delle rete che passano per il punto $(\lambda, 1, 1)$ della $x_2 - x_3 = 0$.

Sostituendo nella (6), al posto delle coordinate correnti, le $\lambda, 1, 1$ si trova la condizione $v_2 = v_3$ e il fascio richiesto si compone della parte fissa.

$$x_2 - x_3 = 0$$

e del fascio sizigetico di cubiche

$$v_1 x_1 (x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2) - v_2 (x_1^3 - x_2 x_3 (x_2 + x_3)) = 0$$

nel quale, evidentemente, il coefficiente di v_1 è l'hessiana del coefficiente di v_2. I nove punti base dell'ultimo fascio sono costituiti da quel flesso di φ la cui polare armonica è $x_2 - x_3 = 0$ e dagli 8 punti doppi di φ che non giacciono sulla $x_2 - x_3 = 0$ medesima. Duuque possiamo enunciare i seguenti teoremi:

(a) « *In una rete sizigetica non esistono quartiche proprie dotate di punti doppi. Se si obbliga una quartica della rete ad avere un punto doppio, essa si spezza in una delle 9 polari armoniche* p_i *di* φ *e in una cubica* ».

(b) « *Tali quartiche degeneri della rete sono organizzate in 9 fasci di ognuno dei quali è parte fissa una delle 9 polari armoniche* p_i, *di* φ *e parte variabile le cubiche di un fascio sizigetico di cui i punti base sono gli altri 8 punti base della rete, non appartenenti a* p_i, *e quel flesso di* φ *la cui polare armonica è* p_i ».

(c) « *Le quartiche degeneri della rete, oltre le precedenti, sono soltanto 12 e costituite, ognuna, di 4 rette le quali consistono delle 3 polari armoniche di* φ *che passano per un medesimo punto base della rete e del lato opposto del trilatero sizigetico di* φ *cui quel punto base appartiene come vertice* »

La proposizione (b) dà luogo a quest'altra che riguarda solo le cubiche sizigetiche:

(d) « *In un fascio sizigetico di cubiche, un flesso, insieme a quegli 8 vertici dei trilateri sizigetici che non giacciono sulla polare armonica del flesso medesimo, costituiscono i 9 punti base di un nuovo fascio sizigetico di cubiche* ».

Così dal primo fascio se ne deducono altri 9, uno per ciascun flesso.

21. Riprendiamo la schiera apolare (3) e consideriamo il suo discriminante

$$2\,\lambda^3 v_1 v_2 v_3 - \lambda^2 (v_1^3 + v_2^3 + v_3^3) + v_1 v_2 v_3 = 0\,.$$

La condizione necessaria e sufficiente affinchè esso possegga una radice doppia è che le v annullino

$$v_1 v_2 v_3 \{(v_1^3 + v_2^3 + v_3^3)^3 - 27\, v_1^3 v_2^3 v_3^3\}\,.$$

Se poi si obbliga ad avere una radice tripla si trova che deve essere contemporaneamente:

$$v_1 v_2 v_3 = 0 \qquad v_1^3 + v_2^3 + v_3^3 = 0$$

nel qual caso esso è identicamente nullo. Dunque:

La schiera apolare presenta questi due soli casi particolari:

1° le sue coniche sono tangenti a due rette in punti variabili e a una terza retta in un punto fisso;

2° ogni conica della schiera è una coppia di punti.

Ci proponiamo l'esame di ciascuno di questi due casi particolari.

22. Cominciamo dal 1°. Esso si manifesta quando le v annullano la (8) del N° precedente, cioè quando (N° 6) la direttrice r di φ passa per uno dei punti base della rete. Dunque possiamo studiare un tal caso, senza sottoporlo ad alcuna restrizione, nella nostra equazione (1) ove si supponga ad esempio $v_1 = 0$.

Allora, l'equazione della quartica è:

$$(x_1^3 - x_2^3)\, v_3\, x_3 + (x_3^3 - x_1^3)\, v_2\, x_2 = 0\,,$$

le due direttrici r, r' sono

$$r \equiv v_2\, x_2 + v_3\, x_3 = 0 \quad , \quad r' \equiv v_2\, x_2\, (v_3^3 - v_1^3) + v_3\, x_3\, (v_1^3 - v_2^3) = 0\,,$$

e i due fasci generatori:

$$\varphi = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - \lambda x_1\, x_2\, x_3 = 0$$

$$\varphi' = x_1^3\, (v_3^3 - v_2^3) - x_2^3\, v_3^3 + x_3^3\, v_2^3 + 3 v_2\, v_3\, x_2\, x_3\, (v_2\, x_2 - v_3\, x_3) + \\ + \lambda x_1\, v_2\, v_3\, (v_3\, x_3^2 - v_2\, x_3^2) = 0$$

sopra le quali equazioni si verificano subito i teoremi seguenti:

« *Quando si prende per direttrice di φ una retta passante per un punto base della rete, la quartica ha in quel punto una ondulazione* (1): *il secondo fascio generatore φ' è così legato a φ che un certo trilatero sizigetico dell'uno e un certo trilatero sizigetico dell'altro hanno a comune un vertice e il lato opposto: il vertice comune è il punto di ondulazione della quartica, il lato comune è la retta a cui sono tangenti, in un punto fisso, tutte le coniche della schiera apolare* ».

Il punto fisso suddetto è quello comune al lato in questione e alla tangente di ondulazione.

Il covariante S si compone, in questo caso, di x_1^2 e di due rette per il punto di ondulazione.

E' dunque impossibile, in questo caso, rappresentare l'equazione della quartica con la somma delle 4ᵉ potenze delle rette che compongono S, perchè ogni quartica rappresentabile con la somma di 3 biquadrati ha S indeterminato.

« *Ecco dunque un esempio notevole di quartica dotata di schiera apolare eppure non rappresentabile con la somma nè di 4, nè di 3 biquadrati di fattori lineari* ».

---

(1) Si vede facilmente che la curva non ha altre ondulazioni, giacchè occorrerebbe che φ e φ' avessero altri punti doppi comuni.

23. Andiamo al secondo dei casi trovati al N° 21.

La retta r, dovendo soddisfare alle due condizioni

$$v_1 v_2 v_3 = 0 \quad , \quad v_1^3 + v_2^3 + v_3^3 = 0 ,$$

è una polare armonica del fascio φ. Sia ad esempio quella di coord. 0 , 1 — 1. Allora la equazione della quartica sarà:

$$(x_1^3 - x_3^3)\, x_2 + (x_1^3 - x_2^3)\, x_3 = 0,$$

da cui si può vedere, assai semplicemente, che la curva non si spezza.

Il secondo fascio generatore è dato da:

$$\varphi' = 2x_1^3 - x_2^3 - x_3^3 + 3x_2 x_3 (x_2 + x_3) + \lambda x_1 (x_2^2 + x_3^2) = 0,$$

e, quel che è notevole, la seconda direttrice è ancora la r' medesima. Viceversa, ponendosi il problema, semplicissimo del resto, di determinare quando è che r ed r' coincidono, si vede subito che ciò avviene solamente quando r diviene una delle 9 polari armoniche di φ, ovvero quando r coincide con uno dei lati trilateri sizigetici di φ. (Ma in quest'ultimo caso la quartica si compone di 4 rette).

Dunque:

« *Se si prende come direttrice* r *una delle nove polari armoniche di* φ, *si trova che essa è anche direttrice* r′ *del 2° fascio* φ'. *I due fasci hanno a comune: la polare armonica* r, *il flesso* R *di cui essa è polare armonica, i 4 vertici di trilateri sizigetici situati sulla prima e i 4 lati degli stessi trilateri passanti per* R. *La quartica ha, nei 4 vertici suddetti, 4 ondulazioni in linea retta formanti gruppo equianarmonico; le 4 tangenti di ondulazione passano per* R; *i 16 flessi giacciono sopra 4 rette passanti per* R: *la curva è omologica armonica essendo centro e asse di omologia* R *e* r ».

Oppure:

« *La quartica:*

$$(x_1^3 - x_3^3)\, x_2 + (x_1^3 - x_2^3)\, x_3 = 0$$

può pensarsi contemporaneamente come jacobiana della retta

$$r \equiv r' \equiv x_2 - x_3 = 0$$

e di uno qualunque dei due fasci di cubiche sizigetiche:

$$\varphi \equiv x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - \lambda x_1 x_2 x_3 = 0$$

$$\varphi' \equiv 2x_1^3 - x_2^3 - x_3^3 + 3x_2 x_3 (x_2 + x_3) + \lambda x_1 (x_2^2 + x_3^2) = 0 \ .$$

Viceversa; una quartica dotata di 4 ondulazioni in linea retta formanti gruppo equianarmonico e tale che le 4 tangenti di ondulazione concorrano in un punto, ammetterà la doppia generazione espressa dal teorema precedente? La risposta è affermativa.

Per convincersene si osservi, prima di tutto, che la equazione di una quartica con 4 ondulazioni in linea retta e con le 4 tangenti di ondulazione passanti per un medesimo punto può scriversi:

$$U - x_3^4 = 0$$

dove U è una binaria biquadratica in $x_1 x_2$ (1). Questa equazione prova che la curva è omologica armonica essendo centro ed asse di omologia rispettivamente il punto (1 , 0 , 0) e la retta $x_3 = 0$. L'hessiana si compone di $x_3^2 = 0$ e di 4 rette per (1 0 0). Ciò dimostra che i 16 flessi si trovano, a 4, a 4, sopra 4 rette per (1 0 0) ed anche che quei quattro giacenti sopra una medesima retta formano due coppie di una involuzione di cui sono punti doppi (1 0 0) e il punto dove la retta taglia $x_3 = 0$. Aggiungiamo ora l'ipotesi che il gruppo delle 4 ondulazioni sia equianarmonico. In tal caso, approfittando delle proprietà esposte, è facile vedere come si possa scegliere un conveniente triangolo fondamentale così che l'equazione della curva sia:

$$(x_2 - x_3)^4 + (x_2 + x_3)(2x_1 - (x_2 + x_3))(2x_1 - \varepsilon(x_2 + x_3))(2x_1 - \varepsilon^2(x_2 + (x_3)) =$$
$$= 8\left((x_1^3 - x_2^3)\, x_3 + (x_1^3 - x_3^3)\, x_2\right) \qquad \text{c. d. d.}$$

Cioè:

« *La condizione necessaria e sufficiente perchè una quartica possa riguardarsi contemporaneamente come jacobiana di una retta e di uno qualunque di due fasci sizigetici di cubiche, è che essa sia dotata di 4 ondulazioni in linea retta formanti gruppo equianarmonico e che le 4 tangenti di ondulazione concorrano in un medesimo punto* ».

---

(1) MASONI, *Sopra alcune curve del 4° ordine dotate di punti di ondulazione* — (Questi rendic., fasc. 2°, 1882).

SOPRA LA CONFIGURAZIONE DESMICA.

1. Chiameremo con questo nome la figura costituita dall'insieme di una terna di tetraedri desmici, dalla terna associata, dai due fasci di superficie del 4° ordine che nascono ecc.

Le coordinate dei vertici di una terna desmica, riferita a uno dei suoi tetraedri, possono scriversi così (1):

$$
\begin{array}{llllll}
(A)\ldots & (1, 0, 0, 0), & (0, 1, 0, 0), & (0, 0, 1, 0), & (0, 0, 0, 1), \\
(B)\ldots & (1, 1, 1, 1), & (1, 1, -1, -1), & (1, -1, -1, 1), & (1, -1, 1, -1), \\
(C)\ldots & (-1, 1, 1, 1), & (1, -1, 1, 1), & (1, 1, -1, 1), & (1, 1, 1, -1),
\end{array}
$$

la terna desmica associata è la seguente (1)

$$
\begin{array}{llllll}
(M)\ldots & (1, 1, 0, 0), & (1, -1, 0, 0), & (0, 0, 1, 1), & (0, 0, 1, -1), \\
(N)\ldots & (1, 0, 1, 0), & (1, 0, -1, 0), & (0, 1, 0, 1), & (0, 1, 0, -1), \\
(P)\ldots & (1, 0, 0, 1), & (1, 0, 0; -1), & (0, 1, 1, 0), & (0, 1, -1, 0).
\end{array}
$$

I tetraedri della prima terna individuano il fascio: (1)

$$\Sigma x_i^4 - 2 \Sigma x_i^2 x_k^2 + \lambda x_1 x_2 x_3 x_4 = o \ (1).$$

per $\lambda = \infty, = 8, = -8$ si trova rispettivamente (A), (B), (C). Per ogni altro valore di λ si ha quel che si chiama una superficie desmica del 4° ordine (2). La curva base del fascio è costituita dalle 16 rette h (1). — Analogamente, o dualmente si trovano le 16 rette h'.

---

(1) VERONESE. — Sopra alcune notevoli costruzioni di punti, rette, piani ecc. — Atti R. lincei, vol. IX, 1881. Mem. II, pag. 307, 309, 338 e segg.

Si vegga anche: STEPHANOS: Sur les sistemes desmiques de trois tetraedres. Bulletin des sciences mathematiques et astronomiques 1879. — SCHRÖTER. Elementare Construction des Figur dreier in desmicher Lage benefindlicher Tetraeder. Crelle Bd 109.

(2) HUMBERT. Sur la surface desmique du quatrième ordre. Journal de Mathematiques, T. 7.me

2. Cominceremo dall'occuparci delle superficie desmiche rilevando, prima di tutto, come (analogamente a quel che può dirsi per le quartiche desmiche (1)) la loro equazione possa mettersi sotto la forma:

$$p^2 x_1^2 + q^2 x_2^2 + r^2 x_3^2 + s^2 x_4^2 - 2\,pq\,x_1 x_2 - 2\,pr\,x_1 x_3 - 2\,ps\,x_1 x_4 -$$
$$- 2\,qr\,x_2 x_3 - 2\,qs\,x_2 x_4 - 2\,rs\,x_3 x_4 = k\,x_1 x_2 x_3 x_4$$

dove le p, q, r, s sono le derivate parziali rispetto a x_1, x_2, x_3, x_4 della funzione quadratica (2):

$$f = a^2 x_1^2 + b^2 x_2 + c^2 x_3^2 + d^2 x_4^2 - 2\,ab\,x_1 x_2 - 2\,ac\,x_1 x_3 -$$
$$- 2\,ad\,x_1 x_4 - 2\,bc\,x_2 x_3 - 2\,bd\,x_2 x_4 - 2\,cd\,x_3 x_4 .$$

La f ha la seguente interpretazione geometrica: Uguagliata a zero, con opportuno cambiamento del punto unità, essa rappresenta una quadrica la quale è tangente agli spigoli dei tetraedri (A) e (C) negli stessi 6 punti vertici della terna desmica associata. (A) e (C) sono polari reciproci; (B) è autopolare.

Dunque: « *Data una terna desmica, esistono 3 quadriche ognuna delle quali gode la proprietà di toccare le 12 costole di due tetraedri della terna negli stessi 6 punti vertici della terna desmica associata e appartenenti, a due, a due, allo stesso tetraedro di quella terna* ».

« *Le due terne sono autopolari rispetto a ciascuna delle 3 quadriche e precisamente: sono polari reciproci i due tetraedri che hanno le costole tangenti alla quadrica, il terzo tetraedro della stessa terna è autopolare nel senso ordinario: ogni tetraedro della terna associata è autopolare, però non nel senso ordinario, ma solo in quanto due suoi vertici sono sulla quadrica e, gli altri due, sono punti coniugati sulla intersezione dei piani tangenti nei primi due* ».

3. — Ogni superficie del fascio (3), cui appartengono i tetraedri della 1ª terna, ha 12 punti doppi nei 12 vertici della terna desmica associata. Ciò risulta ad es. dalla equazione superficie riferita ad uno dei tre tetraedri (M), (N), (P). — La stessa equazione prova che la superficie è

(1) HUMBERT. — Sur une classe de courbes planes et sur une surface remarquable du quatrième ordre. — Journal de Mathematiques — 1890.

(2) La quadrica f é generale. Soltanto il tetraedro fondamentale ha posizione particolare rispetto ad essa essendo le sue costole tutte tangenti della quadrica. Di tali tetraedri ne esistono infiniti: basta prendere un piano e, in esso, tre tangenti alla conica sezione. — I vertici di Tale triangolo sono vertici del tetraedro, il 4º è uno dei quattro punti comuni ai coni circoscritti alla quadrica dai primi tre.

(3) Cf. la mia Nota: Sulla configurazione di Kummer. — Giornale di Napoli, 1896.

trasformata in se stessa da ciascuna delle 12 omologie armoniche di cui è centro e piano fondamentale un vertice della terna desmica associata e la faccia opposta del tetraedro cui appartiene quel vertice. — Occorrendoci spesso di nominare queste omologie, le chiameremo per brevità omologie principali, e chiameremo centri e piani centrali della superficie i centri e piani fondamentali della omologia medesima.

Osserveremo, prima di tutto, che, lungo ciascuna retta h, la superficie ha il medesimo piano tangente: è questa una proprietà generale per tutte le superficie del 4^0 ordine che posseggono 3 punti doppi in linea retta, senza che la retta sia doppia. La considerazione delle omologie principali ci mostra che il cono osculatore della superficie, in suo centro, è costituito da rette aventi tutte un contatto quadripunto con la superficie e inoltre che il cono di 4^0 ordine proiettante da un centro la sezione col piano centrale relativo, tocca la superficie in tutti i punti di tale sezione. Le generatrici comuni a questi coni sono evidentemente tutte e sole le rette della superficie che passano per quel centro. Ma i due coni si toccano lungo 4 rette: quindi le sole rette della superficie, per un centro, sono le 4 rette h che vi passano. — Di qui e per effetto delle solite omologie principali segue subito che la superficie non possiede altri punti doppi oltre i 12 centri. — E allora segue anche facilmente che la superficie non possiede altre rette (oltre le 16 h) all'infuori di quelle che possono provenire dallo spezzarsi delle coniche situate sui piani tangenti lungo le rette h: coniche che in generale non si spezzano.

« *La superficie in generale non possiede altre rette all'infuori delle 16 rette h* ».

4. I 16 piani tangenti lungo le 16 rette h costituiscono, secondo Veronese (loc. cit. pag. 340) una configurazione K, cioè, a 6, a 6, passano per 16 punti i quali a loro volta giacciono, a 6, a 6, nei piani suddetti. Dunque, per una proposizione nota (1) la configurazione K non è altro che una configurazione di Kummer. Basta poi osservare che ogni piano contenente una retta h contiene 3 vertici della terna desmica associata per concluderne che la configurazione suddetta è tre volte tetraedroidale rispetto a tale terna. — Dunque:

I 16 piani tangenti alla superficie lungo le 16 rette h costituiscono una configurazione di Kummer tre volte tetraedroidale rispetto alla terna desmica associata ».

Dualmente ecc.

A ogni piano per una retta h corrisponde biunivocamente una superficie desmica, una configurazione di Kummer tre volte tetraedroidale, una

(1) HUMBERT. — Sur la surface ecc. pag. 583.

superficie di Kummer tre volte tetraedroide. Onde si può dire che « *Le 16 rette h' e le 16 rette h costituiscono rispettivamente il luogo e l'inviluppo dei punti doppi e dei piani doppi di tutte le superficie di Kummer tre volte tetraedroidi rispetto alla terna desmica fondamentale e all'associata* ».

5. — Ci proponiamo adesso l'esame delle sezioni piane della superficie distinguendo le seguenti varie posizioni del piano di sezione:

(a) posizione generica rispetto a entrambe le terne,
(b) passaggio per un solo vertice della terna fondamentale,
(c) » » » » » » » associata,
(d) » » » loro spigolo,
(e) » » una retta h',
(f) » » » » h »,
(g) coincidenza con una faccia della terna fondamentale,
(i) » » » » » » associata.

Cominciamo del caso (a). Per questo, osserveremo che la sezione prodotta sarà una quartica desmica. Ricorderemo quindi (1) che i 12 lati dei tre quadrilateri desmici sono tangenti a una medesima curva C di 3ª classe e che i 12 punti di contatto si trovano, a 4, a 4, sopra a 3 sue tangenti uscenti da un punto M (per cui C è di 6° ordine cioè privo di bitangenti ecc). — Mentre M descrive una retta, i 16 punti base del fascio descrivono la quartica desmica: tutte le quartiche del fascio si ottengono facendo descrivere a M tutte le rette attorno alla sua posizione iniziale così che a ogni retta per M corrisponde biunivocamente una quartica del fascio. Alle tre tangenti da M a C corrispondono i tre quadrilateri desmici. Essi esauriscono 18 punti doppi del fascio. Le curve che posseggono gli altri 9 corrispondono alle 9 congiungenti di M, con le 9 cuspidi della curva C. Ora, di queste rette, 8 almeno sono distinte. Se ci fosse nel fascio una coppia di coniche, o una quartica razionale, tolta la retta cui corrispondono, rimarrebbero almeno 7 rette distinte cui dovrebbero corrispondere quartiche del fascio dotate di punto doppio: ma allora i punti doppi sarebbero più di 27 il che è assurdo. — In questo caso la sezione non può essere dunque una quartica razionale nè comporsi di due coniche.

Nel caso (b) il punto M si trova sopra una tangente cuspidale di C. — Il quadrilatero sezione del tetraedro per uno dei quali vertici passa il piano, è composto della tangente cuspidale e delle altre tre tangenti negli altri 3 punti comuni a C e alla tangente cuspidale suddetta: esso ha tre vertici riuniti nel polo armonico di questa tangente: gli altri due quadrilateri sono generici e può ripetersi il ragionamento del caso (a)

Nel caso (c) tutt'e tre i quadrilateri hanno vertici distinti: il ragionamento è quello ancora del caso (a).

Anche nel caso (d) si esclude subito che la sezione possa essere una coppia di coniche, o una quartica razionale (a meno s'intende che non si cada nel caso (i). Perchè tale sezione deve avere, in ciascuno dei centri, un punto doppio e due flessi riuniti (N° 3) (le tangenti nodali essendo anche tangenti di flesso) e due tali singolarità sono irrealizzabili per il sistema di due coniche non degeneri. — Ma nemmeno tale sezione può essere una quartica razionale, perchè il 3° punto doppio (a causa delle due solite omologie principali) dovrebbe trovarsi sullo spigolo opposto a quello contenente i due centri; ora quello spigolo non incontra la superficie altro che nei due punti doppi che contiene e quindi, per avere una quartica con un 3° punto doppio, occorre tagliare con una faccia della terna associata, non con piano qualsiasi per uno spigolo.

Nel caso (e), sempre riferendosi alle notazioni e considerazioni di (a), si vede subito che il punto M si trova nell'incontro di 3 tangenti cuspidali di C. Ognuno dei 3 quadrilateri è composto di una tangente cuspidale e delle 3 tangenti a C che si si possono tirare dal polo armonico della cuspide. Il ragionamento di (a) vale anche in questo caso.

Nel caso (f), osserveremo che la rimanente sezione (oltre la retta h) non può essere un'altra retta h e una conica non degenere, perchè il piano di due rette h ne contiene necessariamente altre due. Neppure può essere una cubica piana razionale perchè il punto doppio dovrebbe essere il punto comune ai 3 piani centrali relativi ai 3 centri che la retta h contiene; cioè dovrebbe essere un vertice della terna fondamentale mentre la superficie non passa per quei vertici.

Finalmente nel caso (g) la sezione si compone di 4 rette h, nel caso (i) è una quartica razionale.

Riunendo tutti questi resultati possiamo dire:

« *La superficie possiede solamente 16 coniche: quelle contenute nei 16 piani tangenti lungo le 16 rette h; possiede soltanto 12 quartiche piane razionali: le sezioni dei piani centrali; non possiede alcuna cubica piana razionale* ».

6. — Sopra le sezioni piane di due terne desmiche associate faremo ancora la seg.te osservazione che riguarda la quartica di Caporali (1). — Egli per stabilire la doppia generazione della sua curva parte da un sistema di quadrangoli desmici con relativa cubica C e retta r (N° 5) e ne deduce, con sole considerazioni di geometria piana, un nuovo sistema di quadrangoli desmici con relativa cubica C' e retta r', così che la sua quartica si può pensare contemporaneamente e come jacobiana di r e del fa-

(1) Volume delle memorie. « Sulla figura costituita dai punti di contatto delle tangenti condotte a una cubica da tre suoi punti in linea retta, pag. 338 ».

scio sizigetico individuato da C e come jacobiana di r' e del fascio sizigetico individuato da C'. — Ebbene, se si trasforma dualmente tutta la costruzione di Caporali si riconosce facilmente che i due sistemi di quadrilateri desmici non sono altro che la sezione di due terne associate di tetraedri desmici. E così il legame che passa fra le due generazioni della quartica di Caporali viene, molto semplicemente, a farsi dipendere dal legame che esiste fra due terne associate desmiche. E insieme si può dire che:

« *Nelle 24 facce di due terne desmiche associate, sono iscritte* ∞^3 *curve piane di* 4^a *classe duali di quelle di Caporali* (1) *cioè capaci ognuna di essere riguardata come jacobiana di un primo punto e di una prima schiera sizigetica di curve di* 3^a *classe e come jacobiana di un secondo punto e di una seconda schiera sizigetica. — Le due schiere sono quelle cui appartengono rispettivamente le due curve di* 3^a *classe inscritte l'una nei 3 quadrilateri sezioni dei tre tetraedri di una stessa terna, l'altra nei 3 quadrilateri sezioni della terna associata: i due punti si ottengono da ciascuna delle due curve precedenti costruendo, per ognuna, il punto d'incontro delle 3 rette sulle quali si trovano, a 4, a 4, i 12 punti di contatto dei quadrilateri in discorso* ».

7. — Si è anche condotti alla costruzione di una cfg desmica studiando le omografie che mutano in se una quadrica e un suo tetraedro autopolare (2). — Vedremo pure come si possa, con semplicità, passare da

(1) Per le proprietà fondamentali della quartica di Caporali veggasi anche la mia Nota « *La quartica di Caporali* ». R. Acc. delle scienze di Napoli, Aprile 1896.

(2) Il medesimo problema, studiato in S_2, può dar luogo ad applicazione notevoli. — Si supponga di aver caratterizzato pienamente il gruppo delle omografie in S_5 che mutano in se una quadrica non specializzata $\sum_1^6 x_i^2 = 0$ e una sua sestupla polare

$$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6 = 0.$$

Ciò equivale allo studio di tutte le sostituzioni del tipo

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \\ \pm x_i, & \pm x_k, & \pm x_l, & \pm x_m, & \pm x_n, & \pm x_p \end{pmatrix} \quad i, k \ldots p = 1, 2, \ldots 6.$$

S'interpreti dopo la quadrica come rappresentativa dello spazio rigato: allora la sestupla polare rappresenta, come è noto, l'insieme di sei complessi lineari, a due, a due, in involuzione. Ogni trasformazione omografica di S_5 che muta in se la quadrica e la sestupla, individua nello spazio rigato, una trasformazione proiettiva in se della nota cfg di Klein formata con le 30 direttrici delle 15 congruenze ecc. e viceversa. Cosicchè il gruppo di tutte le trasformazioni in se della cfg di Klein si specchia nel gruppo delle omografie suddette di S_5 molto più semplici e caretterizzarsi. — Sono naturalmente fra queste le 16 ben conosciute (formanti gruppo a loro volta) che provengono dalle 6 omologie armoniche della sestupla prese a una, a una; a due, a due; a tre, a tre. Queste, non solo mutano in se la cfg di Klein, ma anche, ciascuna, delle ∞^3 cfg di Kümmer che la prima

queste allo studio delle proiettività che mutano in se tutta la terna fondamentale. — Per quelle che riguardano una quadrica $\sum_1^6 x_i^2 = 0$ e un suo tetraedro autopolare $x_1\, x_2\, x_3\, x_4 = o$, basta caratterizzare il gruppo delle sostituzioni

$$\begin{pmatrix} x_1\,, & x_2\,, & x_3\,, & x_4 \\ \pm x_i\,, & \pm x_k\,, & \pm x_l\,, & \pm x_m \end{pmatrix} \quad i\,,\ k\,,\ l\,,\ m\,, = 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\,.$$

Si trovano così 192 omografie che rispondono alla questione.

Fra queste citeremo prima di tutto il tipo $\begin{pmatrix} x_1\,, x_2\,, x_3\,, x_4 \\ x_2\,, x_1\,, x_3\,, x_4 \end{pmatrix}$. — Essa è una omologia armonica che viene stabilita così: Si prenda uno spigolo del tetraedro fondamentale e su di esso la coppia armonica contemporaneamente ai due vertici e ai due punti d'incontro con la quadrica. Si prenda uno di questi punti come centro e il piano che passa per l'altro punto e lo spigolo opposto come piano fondamentale. Si hanno così 12 omologie armoniche di questo tipo. Ebbene si riconosce facilmente che i 12 centri e i 12 piani fondamentali sono i vertici e le facce di una terna desmica: la terna (M), (N), (P), secondo le notazioni adottate. Ecco costruita la terna desmica.

8. — Riassumiamo nel seguente quadro il gruppo delle omografie richieste.

1° *L'identità.*

2° *16 omologie armoniche divise in due specie:*

(a) le 4 omologie principali del tetraedro fondamentale,

(b) le 12 omologie principali della terna desmica associata (cf. N° 7).

3° *39 omografie biassiali divise in 4 specie:*

(a) 9 aventi per assi le coppie di spigoli opposti delle 2 terne desmiche,

(b) 18 i cui assi sono le coppie di generatrici e direttrici della quadrica fondamentale che si appoggiano a due spigoli opposti delle terne: 2 soluzioni per ogni coppia di tali spigoli).

(c) 12 i cui assi si costruiscono prendendo una coppia di spigoli opposti del tetraedro fondamentale e trovando le intersezioni di due

---

individua: le altre invece le permuteranno. Onde, probabilmente, tali ∞^3 cfz. di Kummer si divideranno in tanti gruppi di elementi proiettivi. E i legami che certamente sussistono fra le varie cfz. più volte tetraedroidali si esprimeranno molto opportunamente mediante tali proiettività (Bertini. Sulle cfz. di Kummer più volte tetraedroidali: ist. lomb. 1896). Naturalmente può dirsi altrettanto delle sup di Kummer di cui le precedenti sono le cfz. singolari, degli ∞^4 complessi quadratici relativi, di quelli, fra essi, che sono complessi di Battaglini ecc.

qualsiasi facce dell'una terna, passanti per uno degli spigoli, con due qualsiasi facce della 2ª terna passanti per l'altro spigolo. (Ogni coppia dà 4 soluzioni).

4° *44 omografie assiali divise in due specie*:

(a) 32 di cui l'asse di punti uniti è una retta h, l'asse di piani uniti è l'h' reciproca. Ogni coppia h, h', di rette reciproche dà due soluzioni,

(b) 12 di cui l'asse di punti uniti è uno spigolo del tetraedro fondamentale e l'asse di piani uniti è lo spigolo opposto. Ogni coppia di spigoli dà due soluzioni ed ogni soluzione è relativa a due omografie aventi gli stessi elementi uniti.

5° *omografie dotate di soli 4 punti uniti e divise in 4 specie:*

(a) 36 i cui punti uniti sono: due vertici di uno stesso tetraedro della terna fondamentale e i due punti d'incontro con la quadrica dello spigolo opposto. — Ogni coppia di spigoli opposti dà due soluzioni, per ogni soluzione ci sono due omografie con gli stessi punti uniti.

(b) 32 i cui punti uniti sono: un vertice del tetraedro fondamentale, il punto d'incontro con la faccia opposta di una retta h per esso vertice, e i due punti d'incontro con la quadrica della h' reciproca. — Ogni vertice dà 4 soluzioni. Ogni soluzione dà due omografie con gli stessi punti uniti.

(c) 12 i cui punti uniti sono tutti sulla quadrica. Ogni coppia di rette sghembe della quadrica, appoggiantesi a due spigoli opposti del tetraedro fondamentale, dà una soluzione e per ogni soluzione due omografie ecc.

(d) 12 i cui punti uniti sono: due vertici della terna associata situati su di uno stesso spigolo del tetraedro fondamentale e i due punti d'incontro con la quadrica dello spigolo opposto. — Ogni coppia di spigoli opposti del tetraedro fondamentale dà 2 soluzioni e per ciascuna si hanno 2 omografie ecc.

Queste omografie si possono poi distinguere in due categorie: 1° quelle che presentano carattere simmetrico rispetto a ogni tetraedro della terna (1, 2 (b), 3 (a) (b), 4 (a), 5 (a)) tali cioè che mutano in se ogni tetraedro della terna. Esse corrispondono alle sostituzioni

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, \\ \pm x_i, & \pm x_k, & \pm x_l, & \pm x_m \end{pmatrix}$$

quando il numero dei segni cambiati è zero, o due; 2° quelle rimanenti che mutano in se (A) e scambiano (B) con (C) (2 (a), 3 (c), 4 (b), 5 (b) (c) (d)) queste ultime corrispondono alla sostituzione

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4, \\ \pm x_i, & \pm x_k, & \pm x_l, & \pm x_m \end{pmatrix}$$

quando il numero dei segni cambiati è uno solo.

9. — Si passa ora, molto semplicemente, alle omografie che mutano la terna in se. Perchè ognuna di esse, o manterrà in se almeno un tetraedro della terna e rientrerà quindi in quelle studiate, ovvero permuterà i tetraedri della terna portando ad esempio (A) in (B), (B) in (C), (C) in (A). Non rimarrà che a studiare quest'ultime, (1) — Tutte insieme costituiranno manifestamente un sottogruppo delle omografie di cui è parola nella nota del N° 7 e potranno giovare nello studio delle cfz. tre volte tetraedroidali relative alla terna, dei tetraedroidi corrispondenti, dei complessi di Battaglini relativi ecc.

(1) Un esempio di queste è l'omografia biassiale equianarmonica di cui gli assi sono le due rette h_0 di Veronese (loc. cit. N° 18) che si appoggiano a 4 rette h sghembe a due, a due.

ALCUNE OSSERVAZIONI
SOPRA LA CONFIGURAZIONE DI KUMMER

[*Giorn. di Mat.ca Vol. XXXVI. 1897*]

Esse riguardano due punti essenziali.

Il 1° si riferisce alla questione seguente:

Dati sei complessi lineari, a due, a due, in involuzione, nel modo più generale possibile, fra le varie ∞^3 configurazioni di Kummer che essi individuano ve ne saranno alcune che abbiano più di due punti singolari in linea retta?

Consideriamo una qualunque di tali ∞^3 configurazioni e sia P_1 uno dei suoi punti singolari. — È noto che si passa da P_1 agli altri 15 punti singolari per mezzo delle 15 involuzioni gobbe stabilite dalle 15 coppie di direttrici fondamentali. — Se si esige che nella configurazione ci siano due punti P_2, P_3 in linea retta con P_1, bisogna evidentemente che da P_1 parta una retta che si appoggi a due coppie di direttrici. — Ora due coppie di direttrici, o appartengono a uno stesso tetraedro, o a una stessa serie rigata fondamentale. — Nel 1° caso una retta che si appoggi a entrambe è uno dei due spigoli rimanenti del tetraedro medesimo, cioè è una direttrice e quindi la cfz. nascente da P_1 è degenere: nel 2° caso se il punto P_1 è sulla quadrica e giace fuori di qualsiasi direttrice fondamentale la cfz. che nasce è particolare senza essere degenere.

La quadrica fondamentale Q suddetta, sulla quale giace P_1, contiene 6 coppie di direttrici appartenenti, a tre, a tre, alle due serie rigate, di cui Q è sostegno: ne viene che da P_1 partono due rette ciascuna delle quali contiene altri 3 punti della cfz. medesima. Siano P_2, P_3, P_4 quelli situati sopra una di esse e P_5, P_6, P_7 quelli sull'altra. Le rimanenti 9 coppie di direttrici sono rette reciproche rispetto a Q. — Ciò significa che anche i 9 punti rimanenti della cfz. giacciono sulla Q medesima. Il costruirli è ovvio: basta ad es.: giovandosi delle 3 involuzioni gobbe che da P_1 han-

no servito a determinare P_2, P_3, P_4, partire da P_5, o P_6, o P_7: i 9 punti che si trovano si vede subito che non solo si trovano sopra rette di Q uscenti da P_5, o P_6, o P_7, ma anche sulle rette di sistema contrario passanti per P_2, P_3, P_4, onde la cfz. si compone dei 16 punti e 16 piani individuati da 4 rette di un sistema e 4 dell'altro della stessa quadrica Q. Dunque:

« *Se si obbliga una configurazione di Kummer ad avere 3 punti singolari in linea retta, senza degenerare, essa generalmente viene a comporsi dei 16 punti e 16 piani individuati da 4 generatrici e 4 direttrici di una stessa quadrica. Ogni piano singolare contiene 7 punti singolari, per ogni punto singolare passano 7 piani singolari. — La superficie di Kummer si riduce alla quadrica contata due volte* ».

Dati 6 complessi lineari in involuzione, mentre le configurazioni di Kummer degeneri nascono, come è ben noto, dai punti situati sulle direttrici e le cfz. traedroidali nascono dai punti situati sulle faccie dei tetraedri fondamentali. le cfz.ⁱ della specie ora stabilite nascono dai punti delle quadriche fondamentali che giacciono fuori delle direttrici suddette, e quindi costituiscono una ∞^2 *(divisibile in 10 classi).*

Finalmente in forza di un teorema recentemente dimostrato sulle cfz. di Kummer (1) si può anche dire:

« *Se si assoggetta una* $(16_6, 16_6)$ *dello spazio ad avere più di due punti in linea retta, essa diviene generalmente una* $(16_7, 16_7)$ *e i 16 punti e i 16 piani appartengono, a 4, a 4, a 8 rette costituenti due quaderne di diverso sistema di una stessa quadrica* (2) ».

1. In questa seconda parte ci proponiamo, in sostanza, di costruire la figura dei 6 punti singolari in un piano singolare di una cfz. di Kummer più volte tetraedroidale (3) mediante semplicissime considerazioni di geometria piana, indipendentemente quindi da qualsiasi processo inerente alle configurazioni di Kummer medesime e all'insieme della figura costituita dalle 30 direttrici relative. Anzi per questo noi porremo la questione semplicemente nei termini seguenti. — Sia data una conica, e per brevità di locuzione, si dica che per 6 punti di essa si può far passare un sistema σ quando i punti medesimi si trovino, a due, a due, sopra tre rette passanti per un medesimo punto. Quanti e quali sistemi σ si possono far

(1) MARTINETTI. — *Sopra le cfz. di Kummer* (Vol. XXXV di questo giornale).

(2) MARTINETTI. — *Le cfz.* $(8_4, 8_4)$ *di punti e piani* (Vol. XXXIV id. N. 15).

(3) ROHN. — *Einige specielle Fälle der Kummer' schen Fläche* (Berichte der k. sächs. Gesellschaft der Wissench. Mai 1884.

SEGRE — *Sur un cas particulier de la surface de Kummer:* ibid.).

passare per 6 punti opportunamente scelti sopra una conica? – Come già si è detto risolveremo la questione senza uscire dal piano della conica e per questa via stabiliremo che i casi presentati dai piani singolari delle configurazioni di Kummer più volte tetraedroidali sono effettivamente i soli possibili. Questo risulterebbe anche dall'osservare i varii modi con cui 6 elementi possono formare una involuzione (veggasi Segre loc. cit. pag. 133).

Alla locuzione già introdotta relativa ai sistemi σ aggiungeremo quest'altra. A seconda che troveremo esistenti uno, due, tre,... sistemi σ per un medesimo esagono diremo che esso è rispettivamente mono-esagono, bi esagono, triesagono ecc.: indicheremo col nome di conica fondamentale e con la lettera c quella in cui è iscritto l'esagono medesimo. — Quando i sistemi σ sono più d'uno vedremo che le rette che ne congiungono i centri (punti di concorso delle tre rette di ogni sistema) si distinguono in due specie. Alcune di esse contengono tre di tali punti; le altre due soltanto. Le chiameremo rispettivamente le rette l e le rette h della cfz. (1).

2. La costruzione del mono-esagono è ovvia. Un sistema qualsiasi di tre rette, uscenti da un punto, taglia la c in un mono-esagono. Andiamo al bi-esagono. — Per questo, si ricordi che « se i lati di ordine pari di un esagono ordinato passano per un punto e i lati di ordine dispari per un altro, le diagonali principali si tagliano in un terzo che è il centro di collineazione della proiettività stabilita fra i fasci di lati pari e dispari. Ciò significa che due sistemi σ non aventi alcuna retta comune traggono seco di conseguenza la esistenza di un terzo sistema σ non avente comune alcuna retta coi primi due: e si ha così un gruppo di 3 sistemi σ tali che uno qualunque di essi consegue dagli altri due. — Se dunque un biesagono esiste, i due sistemi σ debbono avere una retta comune altrimenti il biesagono diviene triesagono.

Per costruire un biesagono si prendano due punti conjugati rispetto a c come centri di due sistemi σ. Sulla congiungente quei due punti stanno due vertici: gli altri 4 si trovano sopra due rette passanti per uno dei punti conjugati (e quindi sopra altri due passanti per l'altro). — I si-

(1) KLEIN. — *Zur Theorie der Linien complexe der ersten und zweiten Grades.* — (Math. Ann. B. 2 n. 8).

STEPHANOS. — *Sur les systèmes desmiques de trois tétraèdres* (Bullettin des sciences math. et astr. 1897).

VERONESE. — *Sopra alcune notevoli cfz. di punti, rette e piani.* — (Mem. Acc. Lincei 1881).

BERTINI. — *Le cfz. di Kummer più volte tetraedroidali.* (Rendic. Istit. Lombardo, Serie II vol. XXIX 1896).

stemi σ sono $\sigma_1 \equiv 12, 34, 56$, $\sigma_2 \equiv 12, 36, 45$. — Un bi-esagono contiene due mono-esagoni, non possiede rette l, possiede una retta h (1).

3. Andiamo ai triesagoni. — Ricordando il teorema citato al principio del numero precedente, si vede subito che, per realizzare un tri-esagono, basta costruire un esagono soddisfacente alle condizioni del teorema medesimo e contemporaneamente esigere che i 6 vertici siano sopra una conica. — Si prova facilmente che questa ultima condizione porta che i tre centri dei tre sistemi σ siano in linea retta e viceversa: ciò si ottiene se il fascio dei lati pari e quello dei lati dispari sono prospettivi.

Dunque, per costruire un triesagono, si prendano, in due fasci di raggi prospettivi, tre coppie di raggi corrispondenti aa', bb', cc', I punti ab', $a'b$, ac', $a'c$, bc', $b'c$ sono i vertici del triesagono. Designandoli colle notazioni solite 1, 2, 3, 4, 5, 6, i tre sistemi σ sono:

$$\sigma_1 \equiv 12, 34, 56 \; ; \; \sigma_2 \equiv 23, 45, 16 \; ; \; \sigma_3 \equiv 14, 25, 36.$$

I tre centri relativi U_1, U_2, U_3 sono sopra una retta l (2). Non ci sono rette h.

Un triesagono contiene 3 mono-esagoni, ma niun bi-esagono (N° 2).

Per i centri U_1, U_2, U_3 e per i vertici del triesagono passano le cubiche seguenti ognuna composta di 3 rette:

$$12, 45, 36 \; ; \; 34, 25, 16 \; ; \; 56, 23, 14$$

e passa anche la cubica composta della conica c e della retta h. — Dunque queste cubiche appartengono tutte a un medesimo fascio di cui i punti suddetti sono punti base. Inoltre, ciascuna delle omologie armoniche di cui è centro uno dei punti U_1, U_2, U_3 e asse la polare rispetto a c cambia in se la conica c e il triesagono e quindi taglia h nel coniugato armonico del centro considerato rispetto agli altri due. Dunque i punti U_1, U_2, U_3 sono flessi per tutte le cubiche del fascio; per tutte il triesagono è un esagono di Steiner (3) e finalmente la conica c taglia la retta h nel gruppo hessiano di $U_1 U_2 U_3$.

4. Possiamo dunque dire che:

« *I vertici di un triesagono sono gli ulteriori punti base di un fascio di cubiche aventi fuori di esse tre flessi comuni* ».

---

(1) È la retta h che si trova in ogni piano singolare di una cfz. di KUMMER due volte tetraedroidale.

(2) È la retta l che si trova in un piano singolare di una cfz. di KUMMER tre volte tetraedroidale.

(3) Cf. p. es. CLEBSCH-LINDEMANN. pg. 340.

La condizione che questi ultimi siano in linea retta viene di conseguenza (essendo il triesagono iscritto in una conica). — Nessuno degli altri 6 punti base (vertici del triesagono) è flesso in generale: se però lo è uno, lo sono tutti. — Ciò risulta facilmente giovandosi prima della osservazione seguente: se tutte le cubiche di un fascio hanno un flesso comune, hanno a comune anche la polare armonica del flesso e considerando dopo che da questa osservazione discende subito che se tutte le cubiche di un fascio hanno due flessi comuni, ne hanno un terzo pure comune a tutte sulla retta che unisce i primi due.

Ciò completa la risposta che, in parte, poteva già darsi alla questione seguente:

« *Dei 9 punti base di un fascio di cubiche, quanti di essi possono esser flessi per ogni curva del fascio?*

Può esserlo evidentemente uno solo senza che lo siano gli altri. — Possono esserlo tutti e si ha il fascio sizigetico. — Resulta adesso, dalle considerazioni precedenti, che, all'infuori dei due casi suddetti, non v'è altro caso che quello fornito dai fasci aventi 3 flessi comuni.

5. Noteremo infine, prima di passar oltre, che il triesagono precedentemente costruito non proviene dal biesagono per l'aggiunta di un sistema σ. — Se si aggiungesse un sistema σ al biesagono si vedrebbe facilmente che esso non potrebbe avere comune con l'uno e l'altro dei sistemi σ già esistenti, una retta e quindi l'aggiunta di un tale sistema porterebbe di conseguenza l'aggiunta di un 4° sistema σ e il biesagono diverrebbe tetraesagono.

6. Passiamo al tetraesagono. Vediamo di costruirlo partendo prima dal biesagono con l'aggiunta di un sistema σ. — Sia il biesagono del N° 2

$$\sigma_1 \equiv 12,\ 34,\ 56 \quad ; \quad \sigma_2 \equiv 12,\ 36,\ 45.$$

Il sistema σ da aggiungersi non può contenere evidentemente la retta 12 comune ai primi due, non può avere una retta comune con l'uno e una con l'altro, altrimenti il centro del nuovo σ sarebbe un vertice: per cui rimangono due casi: o il sistema suddetto ha una retta comune con uno dei due sistemi σ già esistenti e non l'ha con l'altro: ovvero non l'ha con entrambi. — Nel 1° caso aggiungendo ad es. il sistema

$$\sigma_3 \equiv 34,\ 15,\ 26.$$

si trova come conseguenza di σ_2 e σ_3 il 4° sistema $\sigma_4 \equiv 13,\ 24{,}56$ e nessun altro sistema σ. — Si perviene così al tetraesagono simbolico

$$\begin{array}{ll} & \sigma_2 \equiv 12,\ 36,\ 45 \\ \sigma_1 \equiv 12,\ 34,\ 56 \ , & \sigma_3 \equiv 34,\ 15,\ 26 \\ & \sigma_4 \equiv 13,\ 24,\ 56. \end{array}$$

I tre sistemi $\sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_4$ individuano un medesimo triesagono, cioè uno di essi è conseguenza degli altri due. — Invece $\sigma_1\,\sigma_2$, $\sigma_1\,\sigma_3$, $\sigma_1\,\sigma_4$ sono 3 biesagoni, ossia σ_1 ha una retta comune con ciascuno dei sistemi rimanenti σ_2, σ_3, σ_4 — Dimostreremo poi che questo tetraesagono non è realizzabile solo coi simboli, ma anche geometricamente.

Nel 2° caso aggiungendo ad es. il sistema $\sigma_3 \equiv 23,\ 15,\ 46$ si vede che, in conseguenza, si hanno altri tre sistemi σ.

Di guisa che si hanno i 6 sistemi σ:

$$\begin{array}{llll}
\sigma_1 \equiv 12,\ 34,\ 56 & \sigma_4 \equiv 12,\ 36,\ 45 & \sigma_1 \equiv 12,\ 34,\ 56 & \sigma_4 \equiv 12,\ 36,\ 45 \\
\sigma_2 \equiv 23,\ 15,\ 46\ ; & \sigma_2 \equiv 23,\ 15,\ 46\ ; & \sigma_5 \equiv 16,\ 24,\ 35\ ; & \sigma_3 \equiv 14,\ 26,\ 45 \\
\sigma_3 \equiv 14,\ 26,\ 35 & \sigma_5 \equiv 16,\ 24,\ 35 & \sigma_6 \equiv 13,\ 25,\ 46 & \sigma_4 \equiv 13,\ 25,\ 46
\end{array}$$

ma allora la fig., anche se realizzabile, non è un tetraesagono, ma un esa esagono e la discuteremo a suo tempo (N° 11).

7. Nel numero precedente abbiamo costruito in simboli un tetraesagono partendo dal bi-esagono. Dimostriamo adesso che partendo dal triesagono si trova il medesimo tipo simbolico già ottenuto. — Per questo si riprenda il triesagono del N° 3

$$\sigma_1 \equiv 12,\ 34,\ 56\ ;\quad \sigma_2 \equiv 23,\ 45,\ 16\ ;\quad \sigma_3 \equiv 14,\ 25,\ 36 \qquad (a)$$

e si aggiunga un sistema σ. — Per esaminare quali casi differenti può portare l'aggiunta di questo sistema, si osservi che delle 15 combinazioni, a a due, a due, dei 6 simboli 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 rimangono disponibili, oltre quelle contenute in σ_1, σ_2, σ_3, le seguenti:

$$13,\ 15,\ 24,\ 26,\ 35,\ 46. \qquad (b)$$

Il nuovo sistema σ da aggiungersi non può esser composto di tre rette, scelte fra quest'ultime, perchè è impossibile sceglierne tre, così che due qualunque di esse non abbiano un indice comune. E neppure può esser composto di due rette (a) e di una (b) perchè, di due rette appartenenti a diversi sistemi scelti fra σ_1, σ_2, σ_3 e prive di indici comuni, qualcuna di esse ha comune un indice con le (b).

Rimangono dunque due casi: o il nuovo sistema σ è composto di 3 rette (a), o di due rette (a) e una (b). — Ebbene si riconosce subito che questi due casi dànno luogo rispettivamente alle medesime cfz. simboliche prodotte dai due casi del numero precedente.

8. Dunque l'unico tipo di tetraesagono è il seguente:

$$\sigma_2 \equiv 12,\ 36,\ 45,$$

$$\sigma_1 \equiv 12,\ 34,\ 56\ ;\quad \sigma_3 \equiv 34,\ 15,\ 26,$$

$$\sigma_4 \equiv 13,\ 24,\ 56.$$

Per costruirlo si prenda un quadrangolo completo A1B2 e se ne costruisca il quadrilatero polare. I 4 vertici 3, 6, 5, 4 che si trovano rispettivamente sopra A1, A2, B1, B2 insieme ai punti 1, 2, costituiscono il tetraesagono richiesto. — I centri di prospettiva sono rispettivamente

$$\begin{array}{lll} & U_1 \equiv A1 \cdot B2 & \text{per} \quad 13\ ,\ 24\ ,\ 56, \\ & U_2 \equiv A2 \cdot B1 & \text{»} \quad 15\ ,\ 34\ ,\ 26, \\ \text{e} & U_3 \equiv 12 \cdot U_1 U_2 & \text{»} \quad 12\ ,\ 36\ ,\ 45, \\ & U_4 \equiv AB \cdot 12 & \text{»} \quad 12\ ,\ 34\ ,\ 56. \end{array}$$

Un tetraesagono contiene 3 bi-esagoni, e un triesagono; e determina tre rette h concorrenti in un punto, e una retta l (1).

9. *Il penta esagono non esiste* (2).

Infatti si è già veduto che aggiungendo un sistema σ al bi-esagono o al triesagono si è condotti necessariamente al tetra-esagono, o all'esa-esagono.

Dunque se il penta-esagono esiste si deve potere ottenere dal tetra-esagono con l'aggiunta di un sistema σ. Riprendiamo il tetra-esagono del N° precedente

$$\sigma_2 \equiv 12\ ,\ 36\ ,\ 45,$$

$$\sigma_3 \equiv 34\ ,\ 15\ ,\ 26, \qquad \sigma_1 \equiv 12\ ,\ 34\ ,\ 56.$$

$$\sigma_4 \equiv 13\ ,\ 24\ ,\ 56,$$

Le combinazioni che rimangono sono:

$$14\ ,\ 16\ ,\ 23\ ,\ 25\ ,\ 35\ ,\ 46.$$

Il nuovo sistema σ, da aggiungersi, presenterà, rispetto al triesagono σ_2, σ_3, σ_4, i due casi già considerati al N° 7. E quindi o quel triesagono diventa un esa-esagono del medesimo tipo simbolico di quello trovato alla fine del N° 6, ovvero il sistema σ da aggiungersi è del tipo $\sigma_5 \equiv 36\ ,\ 15\ ,$

(1) Un piano singolare di una cfz. di Kummer 4 volte tetraedroidale, contiene tre rette h concorrenti in un punto M, e una retta l.

(2) Non esistono configurazioni di Kummer cinque volte tetraedroidali (BERTINI, loc. cit. pag. 4)

24: ma in tal caso σ_1 e σ_5 individuano, per conseguenza, il sistema $\sigma_6 \equiv$ 13 , 26 , 45 e siamo condotti all'esa-esagono:

$$\begin{array}{lcl} \sigma_2 \equiv 36\ ,\ 12\ ,\ 45 & & \sigma_1 \equiv 12\ ,\ 34\ ,\ 56 \\ \sigma_3 \equiv 34\ ,\ 15\ ,\ 26 & ; & \sigma_5 \equiv 36\ ,\ 15\ ,\ 24 \\ \sigma_4 \equiv 13\ ,\ 24\ ,\ 56 & & \sigma_6 \equiv 13\ ,\ 26,\ ,\ 45. \end{array}$$

10. Abbiamo trovato due tipi simbolici diversi fra loro per l'esa-esagono. Uno è quello ottenuto alla fine del N° 6, un 2° è quello del N° precedente.

Ma quest'ultimo non è realizzabile geometricamente. Infatti, riprendendo le notazioni del N° 8 e ponendo

$$AB \cdot 36 \equiv C \quad , \quad AB \cdot U_1\, U_2\, U_3 \equiv D$$

si vede che si ha

$$(ABU_4\, D) = -1 \quad , \quad (AU_4\, CD) = -1.$$

Se potesse esistere l'esa-esagono del N° 20 dovrebbe esistere ad es. σ_5: ma 15 e 24 si tagliano in B. Dunque dovrebbe coincidere B con C e allora troveremmo

$$(A\, B\, U_4\, D) = -1 \qquad (A\, U_4\, B\, D) = -1$$

ciò che è manifestamente assurdo.

11. Rimane dunque l'esa esagono simbolico:

$$\begin{cases} \sigma_1 \equiv (12\ ,\ 34\ ,\ 56) \ldots U_1 \\ \sigma_2 \equiv (23\ ,\ 15\ ,\ 46) \ldots U_2 \\ \sigma_3 \equiv (14\ ,\ 26\ ,\ 35) \ldots U_3 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \sigma_4 \equiv 12\ ,\ 36\ ,\ 46 \ldots U_4 \\ \sigma_2 \equiv 23\ ,\ 15\ ,\ 46 \ldots U_2 \\ \sigma_5 \equiv 16\ ,\ 24\ ,\ 35 \ldots U_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 \equiv (12\ ,\ 34\ ,\ 56) \ldots U_1 \\ \sigma_6 \equiv (16\ ,\ 24\ ,\ 35) \ldots U_5 \\ \sigma_5 \equiv (13\ ,\ 25\ ,\ 46 \ldots U_6 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \sigma_4 \equiv 12\ ,\ 36\ ,\ 45 \ldots U_4 \\ \sigma_3 \equiv 14\ ,\ 26\ ,\ 35 \ldots U_3 \\ \sigma_6 \equiv 13\ ,\ 25\ ,\ 46 \ldots U_6 \end{cases}$$

dove i simboli U_i indicano i rispettivi centri di prospettiva. Per realizzare geometricamente una figura siffatta si prenda « *la conica dei 14 punti* » di un qualsiasi quadrilatero completo (1). Essa taglia il trilatero diagonale

(1) Cioè la conica che taglia ciascun lato del quadrilatero nel gruppo hessiano dei tre vertici.

nei vertici dell'esagono richiesto (1). I punti U_i sono i vertici del quadrilatero. E infatti basta osservare che la fig. così costituita è un mono-esagono, rispetto a ogni vertice del quadrilatero, il che risulta immediatamente considerando che l'intiera configurazione è mutata in sè stessa dalla omologia armonica di cui è centro e asse un vertice del quadrilatero e la sua polare rispetto alla conica in discorso. Dunque:

La conica dei 14 punti di un quadrilatero taglia le sue diagonali nei vertici di un esa-esagono.

« *Un esa-esagono contiene 4 triesagoni e 3 biesagoni e individua quindi 4 rette* l *e tre rette* h : *queste ultime sono le diagonali del quadrilatero formato con le prime* (2). *Un esa-esagono non contiene tetra-esagoni* (3).

Il trilatero diagonale del quadrilatero delle l è autoconiugato rispetto alla conica c. Segue che un esa-esagono non può essere completamente reale perchè tali sarebbero il trilatero suddetto e la conica c, ma un trilatero reale autoconiugato rispetto a una conica reale non la taglia certamente in 6 punti reali.

Quindi

« *Fino a tutto il tetra-esagono la cfz. può essere completamente reale. L'esa-esagono non può essere completamente reale* ».

12. In ultimo, osserveremo che la risoluzione del nostro problema non può spingersi al di là dell'esa-esagono. — Infatti si aggiunga all'esa-esagono un sistema σ. Il centro di questo sistema e la polare rispetto a c saranno centro e asse di una omologia armonica che trasforma in se tutta la fig. e quindi anche il quadrilatero delle l. Ma tale omologia non può essere una di quelle che ha per centro un vertice del quadrilatero e per asse la polare rispetto a c perchè esse sono relative ai 6 sistemi σ già esistenti nella fig. Dunque tale omologia avrà il centro in un vertice del trilatero diagonale e avrà per asse il lato opposto. Ma in un vertice di questo trilatero non può giacere certamente il centro di un sistema σ quando si pensi che i 6 vertici debbono appartenere, a due, a due, ai lati del trilatero medesimo.

Dunque:

« *Al di là dell'esa-esagono il problema non è risolubile* » (4).

---

(1) SEGRE: loc. cit. p. 134

(2) Un piano singolare di una cfz. di KUMMER 6 volte tetraedroide contiene 4 rette l e tre rette h così che le ultime sono le diagonali del quadrilatero formato con le prime.

(3) ..... Cette surface de Kummer, qui est tétraédroide six fois, n'est pas un cas particulier de celle qui est 4 fois tétraedroïde..... (Segre loc. cit.).

(4) Non esistono cfz. di Kummer che siano più di sei volte tetraedroidali (BERTINI loc. cit. p. 4).

SOPRA UNA CERTA CONFIGURAZIONE DI PUNTI E RETTE RELATIVA ALLA QUARTICA PIANA

[*Rendic. Istit. Lomb. 1898*]

Abbiasi una quartica piana generica e si consideri una sua bitangente qualunque. Essa è incontrata dalle altre bitangenti in 27 punti. — La *cfz.* formata con le rette polari di questi 27 punti è l'oggetto di questa breve noticina.

S'indichi con p_i una tal retta. E si osservi intanto che la retta polare di un punto qualunque, situato su di una bitangente, taglia quest'ultima nel coniugato armonico del punto suddetto rispetto ai punti di contatto della bitangente colla quartica e quindi la retta p_i del punto comune a due bitangenti è polare rispetto a qualsiasi conica che passi per i 4 punti di contatto delle bitangenti suddette. Ciò posto, sia a la bitangente fissa che consideriamo: se b, c, d sono tre bitangenti le quali con a formino una quaderna di cui i punti di contatto siano sopra una conica, ne viene, dall'osservazione ora fatta, che le tre rette p_i dei punti $a \,.\, b$, $a \,.\, c$, $a \,.\, d$ passano per uno stesso punto. Ma una bitangente fa parte di 45 quaderne come $a\,b\,c\,d$, dunque si ha intanto che le 27 rette della nostra *cfz.* passano, a tre, a tre, per 45 punti P_i e quindi ogni retta p_i contiene 5 punti P_i: per trovare i quali basta osservare che se p_1 è polare del punto $a \,.\, b$, i 5 punti suddetti, sopra p_1, sono i poli di a rispetto alle 5 coniche che passano per i punti di contatto di $a\,b$ e di una qualunque delle altre 5 coppie di bitg. che appartengono alla serie individuata da $a\,b$. — Dunque:

« *Le 27 rette* p^i, *polari dei punti d'incontro di una bitangente con le rimanenti, passano, a tre, a tre, per 45 punti* P_i *e ognuna contiene cinque punti* P_i ». — *In altre parole queste rette* p_i *e questi punti* P_i *compongono una cfz.* $(3,5)^{27}_{45}$.

« *Si può aggiungere che la cfz. stessa è circoscritta a una curva di* 3^a *classe e di* 4° *ordine (ipocicloide di Steiner, a meno di trasformazione omografiche) la cui bitangente è la* a *medesima* ».

Ciò risulta subito ricorrendo al ben noto teorema del Cremona che caratterizza l'inviluppo descritto dalla polare quando il polo si muove secondo una certa legge:

« *Si può anche dire che la cfz. medesima può ottenersi projettando sopra un piano le 27 rette doppie e i 45 punti tripli di una superficie di 3ª classe da un punto della superficie stessa* ».

« *Dunque la nostra cfz. e quella delle 28 bitangenti possono pensarsi come projezioni di cfz. duali dello spazio a tre dimensione* ».

Non entreremo nello studio della *cfz.* in discorso perchè può farsi, molto semplicemente, mediante la projezione suddetta, o può anche dedursi con uguale facilità da una memoria del prof. Martinetti (1), il quale ha studiato la duale della nostra *cfz.* nel caso più generale in cui essa sia inscritta in una curva del 3° ordine priva di punto doppio. — Solamente aggiungeremo che confrontando le due *cfz.* di rette p_i relative a due bitg. $a\,b$ riesce evidente che esse hanno a comune la p_i del punto $a\,.\,b$ la quale quindi viene a contenere 10 punti P_i cinque dell'una e cinque dell'altra *cfz.*. Onde si ha il seguente teorema:

Le rette polari dei 378 punti d'incontro, a due, a due, delle bitangenti, passano, a tre, a tre, per 1260 punti P_i così che ogni retta suddetta contiene 10 punti P_i.

(1) MARTINETTI. — *Sopra alcune cfz. piane.* (Annali di matematica, Serie II, Vol. XIV)

SOPRA LA CONFIGURAZIONE DI KUMMER

[*Giorn. di Mat.ca Vol. XXXVII 1898*]

Lo scopo del presente scritto è la dimostrazione della proprietà seguente.

« *Una configurazione dello spazio composta di* 16 *punti e di* 16 *piani tali che ogni punto sia contenuto in* 6 *piani, ogni piano contenga* 6 *punti e non esistano rétte cui appartengono più di due punti, o più di due piani della configurazione, è necessariamente una configurazione di Kummer cioè corrisponde a se stessa in sei complessi, a due, a due, in involuzione* ».

Ma prima debbo avvertire il Lettore che di questa proposizione ha già dato una dimostrazione esauriente il Prof. Martinetti nel Vol. XXXV di questa medesima raccolta, cosicchè la priorità in argomento spetta a Lui. — Se mi sono deciso a pubblicare la dimostrazione attuale è perchè essa dipende da un certo Lemma (N° 2) che mi sembra interessante anche per se stesso.

1. Indichiamo con P_i, π_i $(i = 1, 2, \ldots, 16)$ i punti e i piani della nostra cfz. finchè non avremo dimostrato di poterle applicare una notazione più opportuna. Intanto, cominceremo dall'osservare che il semplice fatto della non esistenza di rette appartenenti a più di due punti, o a più di due piani della configurazione, esige, come può vedersi facilmente (considerando i sei piani π_i che passano per uno stesso punto P_i), che la intersezione di due piani π_i sia anche la congiungente di due punti P_i e viceversa.

2. Ciò premesso, si consideri un determinato piano π_k e un determinato punto P_h fuori di π_k. I 6 piani π_i per P_h daranno sopra π_k, per tracce, 6 rette le quali possono presentare due casi distinti: o sono i lati di un esagono ordinato contenuto nell'esagono completo individuato dai 6 punti P_i in π_k, ovvero compongono due triangoli di cui i vertici sono ancora quei 6 punti P_i in π_k. Nel 1° caso diremo che i 6 piani π_i per P_h formano « *rispetto a* π_k » un esaedro ordinato, nel 2° caso diremo che formano due triedri sempre « *rispetto a* π_k medesimo ».

Ebbene, la dimostrazione del teorema dipende, abbastanza semplicemente, dal seguente Lemma che ci proponiamo ora di stabilire:

« *Se si ammette che i 6 piani* π_i *per un dato punto* P_i *possano formare un esaedro ordinato rispetto a un piano* π_1 *non passante per il punto* P_i *che si considera, ne viene di conseguenza che la cfz. supposta è irrealizzabile.*

3. Noi effettueremo la dimostrazione di questo lemma per mezzo di successive proposizioni che via, via, stabiliremo. La prima è la seguente

« *La ipotesi fatta conduce ad ammettere che i 6 punti* P_i *di* π_1 *esistano, a due, a due, sopra tre rette concorrenti in un medesimo punto.*

Infatti siano A B C D E F i punti P_i in π_1 e G il punto P_i fuori di π_1 i cui piani π_i, per esso, formano un esaedro ordinato rispetto a π_1. La traccia di tale esaedro sia l'esagono ordinato A B C D E F. Si considerino gli altri 3 piani π_i che passano per i lati del triangolo A B C e sono diversi da π_1. Essi non possono tagliarsi tutt'e tre in G altrimenti A C G sarebbe un piano π_i e nemmeno può il loro punto comune essere un nuovo punto P_i altrimenti esso sarebbe in linea retta con B e G. Tali tre piani costituiranno dunque un triedro T di cui ciascuna costola contiene un altro punto P_i (oltre un vertice del triangolo A B C). Uno di questi punti è G, gli altri siano H e K. Dico adesso che G H K non può essere un piano π_i. Infatti ammettiamo che lo sia e sia D E la sua traccia sopra π_1. Allora, nel piano $\pi_i \equiv$ G H K, avremo un altro punto P_i diverso da G, H, K, D, E e situato fuori delle facce del triedro T. I 6 piani π_i per un tal punto, o che formino esaedro ordinato, o due triedri rispetto a π_1 è certo che in ogni modo la loro traccia sopra π_1 sarà un esagono, o una coppia di triangoli soddisfacenti a queste condizioni:

a) I 6 vertici debbono essere A B C D E F,

b) Un lato deve essere D E,

c) Nessun lato deve coincidere con i lati del triangolo A B C, altrimenti, per quel lato, passano 3 piani π_i.

Ebbene si riconosce facilmente che queste condizioni sono irrealizzabili. Dunque, per ciascuna delle rette G H, H K, G K passa un altro piano π_i diverso dalle facce del triedro T e diverso dal piano G H K. Questi 3 piani costituiranno un triedro T′ analogo a T e dàranno 3 tracce sopra a π_1 che dico essere i lati del triangolo D E F. Infatti si osservi prima che i 6 piani π_i per H formano un esaedro ordinato perchè se formassero due triedri il piano H B C sarebbe un piano π_i e per B C passerebbero tre piani π_i. Altrettanto si può dire riguardo ai 6 piani π_i per K. Allora si consideri il piano π_i diverso dalle facce di T che passa per G H. La sua traccia, sopra π_1, non passa nè per A, nè per B, ma non passa nemmeno per C perchè, se ci passasse, sarebbe la C D e quindi l'esagono traccia dell'esaedro di H sarebbe necessariamente

B A C D E F , ovvero B A C D F E

e in entrambi i casi (poichè l'esagono di G è A B C D E F) per la retta G H passerebbero i tre piani π_i: A B G H.., , C D G H... , E F G H... : Altrettanto può dirsi relativamente al lato G K. Quanto al lato H K si noti che l'esagono di H è della forma C A B *mnp* dove *mnp* è una disposizione di D E F: l'esagono di K è della forma A C B... dove accanto al B non può esserci *m*, altrimenti per H K passano i 3 piani π_i: H K A C... , H K B *m*... , H K *np*... Questo basta per assicurare che l'altro piano π_i (diverso dalle facce di T) passante per H K taglia π_1 in un lato del triangolo D E F. Segue che il triangolo G H K è prospettivo a B A C e anche a D E F: dunque A B C e D E F sono prospettivi fra loro essendo asse di prospettiva la intersezione del piano π_1 con il piano G H K e centro di prospettiva il punto comune a π_1 e alla congiungente i vertici di T e T'. c. d. d.

Si può aggiungere di più che i lati dell'esagono ordinato A B C D E F *debbono corrispondersi, a due, a due, nella prospettiva suddetta.*

Infatti, riprendendo il ragionamento precedente, si vede che, nella prospettiva in discorso, debbono corrispondersi quei lati dei triangoli A B C, D E F che sono intersezioni con π_1 di 2 piani π_i per G. Dunque, o ad A B corrisponde E F e quindi a B C , D E; ovvero ad A B corrisponde D E e a B C , E F. Nel 1° caso le coppie di punti corrispondenti sono (B , E ; A , F ; D , C), nel 2° caso esse sono (B , E ; A , D ; C , F). Nel 1° caso due lati opposti dell'esagono A B C D E F concorrono nel centro di prospettiva e ciascuno di essi corrisponde a se stesso: nel 2° caso sono corrispondenti i lati opposti.

4. Sia O il centro di tale prospettiva e *a* , *b* , *c* le tre congiungenti i vertici corrispondenti. Segue che, per O, passano 4 piani π_i e cioè π_1 e altri 3, uno per ciascuna delle *a* , *b* , *c*. Questi ultimi individuano un triedro col vertice in O e sulle tre costole si hanno altri 6 punti P_i: due per costola. La retta *a* si trova in un piano π_i con due di queste costole, quindi il piano di *a* e della costola rimanente contiene 4 punti P_i senza essere un piano π_i. Sia *p* un tale piano. Si vede subito che esistono 4 piani π_i non passanti per alcuno dei 4 punti P_i contenuti in *p* (altrettanto può ripetersi per *b* , *c*).

Dunque, dalla 1ª *ipotesi fatta, segue che esistono* 4 *punti* P_i *in un piano* p *che non è piano* π_i *e che possiamo sempre considerare un piano* π_i *(ad es.* π_2*) non passante per alcuno dei punti suddetti.* Sopra questo si baseranno le considerazioni seguenti.

5. Bisogna ora esaminare il modo di aggruppamento dei 6 piani π_i per ciascuno dei 4 punti P_i di *p* rispetto a π_2. Per brevità sostituiremo

spesso all'esaedro ordinato, o alla coppia di triedri costituenti quell'aggruppamento, la traccia relativa sopra π_2. Osserveremo, prima di tutto, che se si ha un esagono, tre coppie di lati non consecutivi (fra cui una di lati opposti) dànno luogo a tre punti in linea retta (la $p.\ \pi_2$). Se si ha una coppia di triangoli, essi sono prospettivi e l'asse è la retta $p.\ \pi_2$. In ogni caso: o due esagoni, o due coppie di triangoli, o un esagono e una coppia di triangoli, debbono avere a comune due lati non consecutivi e niente altro.

6. Ciò premesso, escludiamo « *per ipotesi* » che qualcuno dei 4 punti P_i di p dia un esagono di Pascal sopra π_2. *Dimostreremo adesso che, in conseguenza, ognuno dei punti suddetti darà sopra* π_2 *una coppia di triangoli.* Perciò si cominci dall'esaminare il caso in cui si abbiano 4 esagoni. Per tutt'e 4 la retta $p.\ \pi_2$ deve esser retta congiungente 3 punti d'incontro di 3 coppie di lati non consecutivi (fra cui una di opposti). Sia 123456 uno di questi esagoni e la retta $p.\ \pi_2$ contenga i punti 12.34 , 23.56 , 16.45. L'unico esagono associabile col precedente quando si prenda come coppia comune 12.34 è 126435 $\equiv e_1$ e l'unico quando si prenda 16.45 è 453162 $\equiv e_2$. Ma allora la coppia comune a e_1 , e_2 (26 , 35) deve dare un punto di $p.\ \pi_2$, cioè sopra $p.\ \pi_2$ ci sono i punti 12.34 e 26.35 e quindi c'è anche il punto 15.64 cioè e_1 è esagono di Pascal contro la ipotesi. Se si hanno 3 esagoni e uno di essi è sempre 123456 un 2° è certamente e_1 o e_2. Nel 1° caso dovrebbe esistere almeno una coppia di triangoli aventi per lati 16 e 45, ovvero 23 e 56 e soddisfacenti alle condizioni del N° 5 riguardo ai due esagoni suddetti: ma si vede subito che una tal coppia non esiste. Analogamente nel 2° caso. Ora, ammettendosi la esistenza di tre esagoni e uno di essi essendo 123456, uno degli altri due è certamente e_1, e e_2. Se finalmente si hanno almeno 2 coppie di triangoli si vede subito che ogni coppia è costituita da triangoli prospettivi, che l'asse di prospettiva è per entrambe la retta $p.\ \pi_2$ e che quindi la prospettiva è armonica, che i punti 123456 sono sopra una conica rispetto alla quale sono polo e polare il centro e l'asse di prospettiva. Dunque ogni esagono formato con i punti suddetti è di Pascal c. d. d.

7. Quindi se si ammette che qualcuno dei 4 punti P_i di p dia sopra π_2 un esagono, ne viene che tale esagono è di Pascal, che cioè i 6 punti P_i di π_2 sono sopra una conica. Sieno 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 questi punti e 7 un punto P_i di p il quale dia sopra π_2 un esagono di Pascal. Si applichi al punto 7 e al suo esagono il ragionamento del N° 3. Si troverà che i punti suddetti sono i vertici di due triangoli prospettivi e poichè essi sono iscritti in una conica, il centro e l'asse di prospettiva saranno polo e polare rispetto a questa conica. « *Bisogna adesso dimostrare che il centro* O *di prospettiva è il punto comune alle congiungenti i tre vertici oppo-*

sti dell'esagono di 7 (*che supporremo essere* 123456) ». In altre parole, proveremo che 123456 oltre essere un esagono di Pascal è anche di Brianchon. Infatti ammettiamo pure che questo centro *non* sia il punto 14, 25, 36. Allora, secondo l'ultima osservazione del N⁰ 3 (1° caso) tale centro sarà comune a due lati opposti dell'esagono in parola mentre i lati rimanenti si corrisponderanno a due, a due nella prospettiva in discorso. Supponiamo dunque che le coppie di punti corrispondenti siano 1, 6 ; 3, 4 ; 2, 5. Ciò premesso, essendo 123456 l'esagono di 7 si vede che (tenendo sempre presente che due esagoni debbono avere comuni due lati non consecutivi e null'altro (N⁰ 5) gli esagoni di 8 e 9, cioè dei punti analoghi a H e K del N⁰ 3 possono avere i seguenti simboli

$$8.\ \left\{\begin{array}{l}312645\\312546\\312465\end{array}\right. \qquad 9.\ \left\{\begin{array}{l}132465\\132564\\132645\end{array}\right.$$

e quindi si hanno i seguenti 4 quadri possibili

7.	123456	123456	123456	123456
8.	312645	312645	312546	312465
9.	132465	132564	132465	132645.

Nei primi 3 casi si vede che sono corrispondenti 14, 25, 36 contro la ipotesi che tali siano 1, 6 ; 3, 4 ; 2, 5. Rimane il 4⁰ caso in cui la corrispondenza è effettivamente 1, 6 ; 3, 4 ; 2, 5 cioè quella voluta. Allora si trova, sempre in forza del solito principio su ricordato (N⁰ 5), che sopra π_2, i punti P_i, che ne giacciono, fuori dànno i seguenti esagoni e coppie di triangoli:

7.	123456	8.	312465	9.	132645
10.	342615	11.	126354	12.	563241
13.	125 — 346	14.	341 — 256	15.	452 — 361
				16.	235 — 164.

La retta di Pascal dell'esagono di 8 è l'asse di prospettiva: proiettandola da 8 troveremo un piano contenente 4 punti P_i e cioè 8 e uno su ciascuna delle tre congiungenti di 8 con i tre punti d'incontro delle 3 coppie di lati opposti dell'esagono di 8. Se uno di questi 3 punti P_i desse una coppia di triangoli sopra π_2 un lato dell'un triangolo e un lato dell'altro dovrebbero costituire una coppia di lati opposti per l'esagono di 8 senza che ci fossero altri lati comuni il che è impossibile. Se invece uno di quei tre punti desse un esagono, 3 coppie di lati non consecutivi dovrebbero

tagliarsi sull'asse di prospettiva. Ciò accade per l'esagono di 9, ma si vede facilmente che non può accadare per nessun altro fra quelli del quadro precedente. Dunque il quadro suddetto è in contraddizione con l'ipotesi che 1 , 6 ; 3 , 4 ; 2 , 5 siano punti corrispondenti nella prospettiva in discorso, il che prova l'affermazione fatta.

8. Dunque i punti corrispondenti sono 1 , 4 ; 2 , 5 ; 3 , 6 e quindi l'esagono 1 2 3 4 5 6 di 7 ha per retta di Pascal l'asse r di prospettiva. Ora, si proietti da 7 questa retta e si ripeta la considerazione già fatta in proposito sulla fine del N^0 precedente e si vedrà che niuno dei 3 punti P_i che si vengono a trovare oltre 7, nel piano proiettante, può dare coppie di triangoli sopra π_2. Ciascuno di essi darà dunque un esagono il quale dico che avrà per retta di Pascal l'asse r della prospettiva in discorso. Infatti le coppie di lati opposti di 1 2 3 4 5 6 sono 12.45 , 23.56 , 16,34 e si tagliano sulla r. Uno degli altri tre esagoni, di cui è sopra parola, avrà per lati 12, 45 e quindi sarà (N^0 5) uno dei seguenti

1 2 6 4 5 3 , 1 2 6 3 5 4 , 1 2 5 4 6 3.

Il 1^0 ha per retta di Pascal la r: negli altri due la r, se non è retta di Pascal, deve almeno contenere 3 punti d'incontro di 3 coppie di lati non consecutivi, come già si è osservato alla fine del N^0 7; una di queste coppie deve esser formata da 12, 45, un'altra è per il 2^0 esagono sopra scritto necessariamente la 36.14 e per il 3^0 è 25.36. Ma il punto 36.14 $\equiv$ 25.36 è il centro di prospettiva e quindi giace fuori della r.

Siamo così condotti ad ammettere che 4 punti P_i situati in un piano p diano i seguenti esagoni di Pascal

1 2 3 4 5 6	esagono di	7	con le coppie	12.45 , 23.56 , 16.34,
1 2 6 4 5 3	»	8	»	12.45 , 26.53 , 64.13,
2 3 1 5 6 4	»	9	»	15.42 , 23.56 , 31.64,
3 4 2 6 1 5	»	10	»	34.61 , 26.53 , 42.15.

Risulta dunque necessariamente la cfz. simbolica seguente:

I 7 , 1 , 2 , 8 , 11 , 12	VII 8 , 2 , 6 , 10 , 13 , 15	
II 7 , 2 , 3 , 9 , 13 , 14	VIII 8 , 6 , 4 , 9 , 11 , 14	
III 7 , 3 , 4 , 10 , 11 , 15	IX 8 , 5 , 3 , 10 , 12 , 14	XIII 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6
IV 7 , 4 , 5 , 8 , 13 , 16	X 8 , 3 , 1 , 9 , 15 , 16	XIV 11 , 16 , 12 , 13 , 3 , 6
V 7 , 5 , 6 , 9 , 12 , 15	XI 9 , 1 , 5 , 10 , 11 , 13	XV 12 , 13 , 14 . 15 , 1 , 4
VI 7 , 1 , 6 , 10 , 14 , 16	XII 9 , 4 , 2 , 10 , 12 , 16	XVI 11 , 16 , 14 , 15 , 2 , 5

Concorrono in un punto O′ le rette 1.4, 2.5, 3.6. Sono in un piano p. 7, 8, 9, 10. Ripetendo le considerazioni del N° 4 si vede che

$$\text{(questi 3 piani passano per O')}\left\{\begin{array}{lll} \text{sono pure in un piano } p & & 3,6,14,15 \\ \quad\text{»} \quad\text{»} & \text{»} & 1,4,11,16 \\ \quad\text{»} \quad\text{»} & \text{»} & 2,5,12,13 \end{array}\right.$$

Tutti i ragionamenti fatti per $\pi_2 \equiv$ XIII nei numeri precedenti e in questo, possono applicarsi a qualsiasi altro piano π_i: in particolare, preso un piano π_i qualsiasi, esiste un piano p, non passante per alcuno dei punti P_i contenuti nel primo: dei 10 punti P_i, situati fuori del piano π_i che si considera, i 4 che stanno sopra p dànno 4 esagoni aventi tutti per retta di Pascal la p. π_i e per punto di Brianchon il polo di quella retta rispetto alla conica: gli altri 6 punti P_i fuori di p dànno ognuno una coppia di triangoli ecc.

« *Ora dimostreremo che la cfz. precedente è irrealizzabile* ». Infatti ad es. il punto 3 dà sopra i piani I, IV, XI, XII gli esagoni rispettivi:

$$2\cdot7\cdot11\cdot12\cdot8\cdot1\ ;\ 7\cdot4\cdot5\cdot8\cdot16\cdot13\ ;\ 9\cdot13\cdot11\cdot10\cdot5\cdot1\ ;\ 9\cdot16\cdot12\cdot10\cdot4\cdot2$$

dunque concorrono in un punto (N° 7) a causa della esistenza dei 4 piani p le rette:

$$2\cdot12\ ,\ 7\cdot8\ ,\ 1\cdot11\ ,\ 4\cdot16\ ,\ 5\cdot13\ ,\ 9\cdot10.$$

Ugualmente, considerando il punto 2 si vede che esso dà sopra III, VI, VIII, X gli esagoni

$$7\cdot3\cdot4\cdot10\cdot15\cdot11\ ;\ 7\cdot14\cdot16\cdot10\cdot6\cdot1\ ,\ 8\cdot6\cdot4\cdot9\cdot14\cdot11\ ,\ 8\cdot15\cdot16\cdot9\cdot3\cdot1;$$

per cui concorrono in un pnnto le rette

$$7\cdot10\ ,\ 3\cdot15\ ,\ 4\cdot11\ ,\ 14\cdot6\ ,\ 1\cdot16\ ,\ 8\cdot9.$$

Così pure, servendosi dei punti 4, 7 e degli esagoni che essi dànno sopra i piani II, V, VII, IX e sopra i piani XIII, XIV, XV, XVI si trovano questi altri due allineamenti:

$$7\cdot9\ ,\ 13\cdot2\ ,\ 14\cdot3\ ,\ 5\cdot12\ ,\ 6\cdot15\ ,\ 8\cdot10$$

$$1\cdot4\ ,\ 2\cdot5\ ,\ 3\cdot6\ ,\ 11\cdot16\ ,\ 12\cdot13\ ,\ 14\cdot15.$$

Per cui può dirsi che i 16 punti esistono in 4 piani di un tetraedro, così che sopra ogni faccia ne giacciono 4 formanti un quadrangolo che ha per

triangolo diagonale il triangolo del tetraedro su quella faccia; dualmente i 16 piani passano a 4, a 4 per i vertici del tetraedro medesimo ecc. Quindi le coordinate dei 16 punti riferite a quel tetraedro (tenendo conto degli allineamenti suddetti) saranno della forma

$7 \equiv (1110)$	$1 \equiv (y_1 y_2 0 y_4)$	$2 \equiv (z_1 0 z_3 z_4)$	$3 \equiv (0 u_2 u_3 u_4)$
$8 \equiv (-1110)$	$11 \equiv (-y_1 y_2 0 y_4)$	$12 \equiv (-z_1 0 z_3 z_4)$	$15 \equiv (0 - u_2 u_3 u_4)$
$10 \equiv (1-110)$	$16 \equiv (y_1 - y_2 0 y_4)$	$13 \equiv (z_1 0 - z_3 z_4)$	$14 \equiv (0 u_2 - u_3 u_4)$
$9 \equiv (11-10)$	$4 \equiv (y_1 y_2 0 - y_4)$	$5 \equiv (z_1 0 z_3 - z_4)$	$6 \equiv (0 u_2 u_3 - u_4)$

Esigendo adesso la esistenza dei piani π_i, dianzi ultimamente descritti, si trovano le condizioni:

$$z_3 y_4 + z_4 y_2 = 0 \quad , \quad u_3 y_4 - u_4 y_1 = 0 \quad , \quad u_2 z_4 + z_1 u_4 = 0 ,$$
$$y_1 u_2 z_3 + z_1 u_2 y_3 = 0 ;$$

la 1ª, la 2ª, la 3ª dànno rispettivamente

$$z_3 = -\frac{z_4 y_2}{y_4} \quad , \quad u_3 = \frac{u_4 y_1}{y_4} \quad , \quad u_2 = -\frac{z_1 u_4}{z_4} .$$

Sostituendo nell'ultima si trova

$$y_1 y_2 z_1 u_4 = 0$$

e quindi zero uno dei fattori del primo membro. Ma allora i 16 punti P_i non sono tutti distinti, c. d. d.

9. Risulta quindi che i punti 7, 8, 9, 10 di p dànno, sopra π_2, ciascuno una coppia di triangoli essendo prospettivi i triangoli di una stessa coppia secondo la retta $p . \pi_2$. Tali coppie sono:

(123 , 456) ; (126 , 453) ; (156 , 423) ; (153 , 426).

Gli altri 6 punti P_i, fuori di π_2, sono 11.16 , 14.15 , 12.13 e stanno le coppie così scritte sopra rette concorrenti in O'. Se uno di essi potesse dare un esagono sopra π_2, due lati dell'esagono sarebbero due delle rette 1.4 , 2. 5 , 3.6 e inoltre tale esagono dovrebbe adempiere alle condizioni solite (N° 5) rispetto a ciascuna coppia dei triangoli sopra scritti (cioè l'esagono dovrebbe avere comuni due lati non consecutivi con ciascuna coppia di triangoli). Ma si riconosce subito che un tale esagono non esiste.

Dunque ogni punto P_i fuori di π_2 dà, sopra π_2, una coppia di triangoli. Scrivendole tutte e accanto a ciascuna un simbolo indicante il punto P_i che le ha prodotte abbiamo, allora, rispetto a π_2 la cfz. seguente:

(123 ... 456)	7	(124 ... 356)	8	(125 ... 346)	9
(126 ... 345)	10	(234 ... 156)	11	(235 ... 146)	12
(236 ... 145)	13	(136 ... 245)	14	(135 ... 246)	15
(134 ... 256)	16				

dalla quale si ricava che i punti P_i sono disposti nei piani π_i come indica il quadro che segue:

1, 2, 7, 8, 9, 10...I	2, 4, 11, 8, 14, 15...VII	4, 5, 7, 10, 13, 14...XIII
1, 3, 14, 15, 16, 7...II	2, 5, 9, 12, 14, 16...VIII	4, 6, 7, 9, 12, 15...XIV
1, 4, 12, 8, 16, 13...III	2, 6, 10, 13, 15, 16...IX	5, 6, 7, 8, 11, 16...XV
1, 5, 11, 9, 15, 13...IV	3, 4, 9, 10, 11, 16...X	1, 2, 3, 4, 5, 6...XVI
1, 6, 11, 10, 14, 12...V	3, 5, 8, 10, 12, 15...XI	
2, 3, 7, 11, 12, 13..,VI	3, 6, 8, 9, 13, 14...XII	

Ora, sopra questo quadro, si verifica sempre che i 6 piani π_i per un qualsiasi punto P_i formano una coppia di triedri rispetto a qualsiasi piano π_i non passante per il punto P_i che si considera. Ma ciò è in contraddizione con l'ipotesi fondamentale. Dunque il lemma è dimostrato.

Cioè si può dire che: «*preso un piano* π_i *e i* 6 *punti* P_i *che contiene, le* 10 *coppie di triangoli che si possono formare con quei* 6 *punti, così che ogni coppia contenga tutt'e* 6 *i punti* $P_1 \ldots P_6$, *costituiscono le* 10 *tracce dei* 10 *gruppi di* 6 *piani* π_i *ciascuno che passano per i* 10 *punti* P_i *situati fuori di* π_i.

10. La conclusione ultima permette di applicare alla nostra cfz. la notazione di Weber (1), la quale riposa unicamente appunto sulla proposizione suddetta. Ecco la tabella dei 16 punti e dei 16 piani.

Il piano	(11)	contiene i punti:		11, 12, 13, 14, 15, 16
»	(12)	»	»	11, 12, 25, 23, 24, 26
»	(13)	»	»	11, 13, 23, 34, 35, 36
»	(14)	»	»	11, 14, 24, 34, 45, 46
»	(15)	»	»	11, 15, 25, 35, 45, 56
»	(16)	»	»	11, 16, 26, 36, 46, 56
»	(23)	»	»	23, 12, 13, 45, 56, 64
»	(24)	»	»	24, 12, 41, 35, 36, 56
»	(25)	»	»	25, 12, 15, 46, 36, 34

(1) Cfr. ad es. STURM. *Liniengeometrie II Theil* pag. 120.

»	(26)	»	»	26, 12, 16, 34, 45, 53
»	(34)	»	»	34, 13, 14, 25, 26, 56
»	(35)	»	»	35, 13, 15, 26, 24, 64
»	(36)	»	»	36, 13, 16, 25, 24, 45
»	(45)	»	»	45, 14, 15, 23, 26, 36
»	(46)	»	»	46, 14, 16, 23, 25, 35
»	(56)	»	»	56, 16, 15, 23, 24, 34.

Scambiando piano in punto, togliendo la parentesi della 1ª colonna e mettendola nelle altre si trova la tabella duale.

Allora, per completare la dimostrazione del nostro teorema, si scelga fra i 16 punti precedenti un gruppo iniziale di 6: ad es.

21, 24, 36, 16, 11, 34

e si applichi ad essa la nota costruzione di Reye (1) che serve a ottenere una delle 12 cfz. di Kummer che provengono da 6 punti dati. Si scelgano a tale uopo i seguenti pentagoni:

21, 24, 36, 16, 11	21, 16, 34, 24, 11
24, 36, 21, 34, 16	24, 16, 36, 11, 34
21, 24, 11, 34, 36	21, 16, 11, 36. 34

e si attui la costruzione. Si troverà facilmente che si ricade in tutta la rimanente cfz di cui i simboli son quelli della tabella precedente. Ma essa rappresenta la nostra cfz. dunque il teorema è dimostrato.

(1) *Giornale* di CRELLE Vol. 86.

LE BITANGENTI DELLA QUARTICA PIANA STUDIATE MEDIANTE LA CONFIGURAZIONE DI KUMMER

[*Ann. di Mat.ca 1898*]

Scopo delle seguenti ricerche è lo studio sistematico delle bitangenti della quartica piana. Strumento principale ne è la configurazione di Kummer. Il metodo, in sostanza, non è nuovo. Hesse e Geiser (1) dimostrarono già quanto la geometria dello spazio possa efficacemente impiegarsi per dedurre le proprietà di tali bitangenti, il 1° servendosi di un ottagono gobbo di cui i vertici sono punti base di una rete di quadriche, e il 2° mediante il cono circoscritto a una superficie cubica da un suo punto.

Io qui mi valgo di una superficie di Kummer passante per la quartica piana fondandomi sopra un ben noto teorema di Kummer che stabilisce la esistenza di ∞^1 di tali superficie (2). Così, la maggior parte delle conosciute proprietà sulle cfz. di Kummer si mutano, per sezione, in altrettante proprietà delle bitangenti. Abbiamo una raccolta quasi completa delle prime nella Memoria di Caporali intitolata: *Sopra i piani ed i punti singolari della superficie di* Kummer, (3) la quale è quindi il fondamento di tutte le mie ricerche. Occorrendo spesso di citarla mi servirò del simbolo (C. N°. . .) con l'indicazione del numero utile volta per volta. Lo studio alquanto minuto di questa Memoria mi ha indotto a fare su di essa qualche osservazione e qualche aggiunta una delle quali veramente ha poca attinenza con la quartica (N^i 9, 10, 11) ma siccome mi è parsa di un certo interesse, anche giudicata in sè stessa, così ho pensato di non ometterla. Tali osservazioni mirano a considerare abbastanza intimamente

(1) HESSE, *Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung.* Crelle, Bd. 49. GEISER, *Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Grahs.* Math. Ann., Bd. I.

(2) KUMMER, *Monatsberichte der Berl. der Wissenschaften* (1864, pag. 246).

(3) CAPORALI, Volume delle Memorie, pag. 86.

il legame che passa fra la cfz. di Kummer e la notevole figura che proviene dai 6 complessi in involuzione che mutano in sè la cfz. suddetta. Tale notevole figura è costituita principalmente, come è ben noto, dalle 15 coppie di assi delle 15 involuzioni gobbe le quali nascono dai prodotti, a due, a due, dei 6 complessi in involuzione; e per brevità l'ho chiamata cfz. di Klein Anche molte delle sue proprietà (1) portano il loro contributo alle bitangenti della quartica, particolarmente in forza del teorema del N° 17.

Mi sono servito della ammirevole ed efficace notazione di Hesse per le bitangenti; per la cfz. di Kummer ho adottato la notazione di Caporali adoprando però lettere invece che numeri affine di non sovrapporla alla prima.

Ho diviso il lavoro nei seguenti capitoli:

I. Aggiunte e osservazioni alla Memoria di Caporali: *Sopra i piani e i punti singolari della superficie di* Kummer.
II. Le 16 bitangenti di un gruppo di Kummer.
III. La cfz. composta con i punti d'incontro delle bitangenti, a due, a due.
IV. Figure notevoli contenute in un gruppo di Kummer.
V. Le coniche dei 16 punti.
VI. La costruzione delle ∞^4 superficie di Kummer passanti per una quartica piana.

Delle proprietà dimostrate nei capitoli II, III, IV, V pubblicai gli enunciati riassumendoli in una breve Nota che uscì nei *Rendiconti* dell'Istituto Lombardo il marzo scorso. Avverto però il lettore che la presente pubblicazione è affatto indipendente da quella Nota.

CAPITOLO I.

Osservazioni e aggiunte alla Memoria di Caporali: « Sopra i piani e i punti singolari della superficie di Kummer ».

1. Abbiasi una cfz. di Kummer affatto generale. Indichiamo con O uno dei 16 piani fondamentali e con a, b, c, d, e, f i sei punti fondamentali su di esso. Allora le combinazioni, a due, a due, di a, b, c, d, e, f rappresentano i 15 piani fondamentali rimanenti e le coppie di simboli ternari $\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \end{pmatrix}\ldots$, ecc., rappresentano i 10 punti fondamentali fuori del piano O.

(1) Cf. specialmente: STEPHANOS, *Sur le tètraèdres desmiques* (Bulletin des sciences mathématiques, serie T III, 1893).

Ciò posto è molto facile il riconoscere, dai simboli, le relazioni, fra i punti e i piani fondamentali: risultano così alcune regole che possono riassumersi negli enunciati seguenti:

Sul piano O stanno i punti: a, b, c, d, e, f,

» » ab » » : $a, b, \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a\,b\,d \\ c\,f\,e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a\,b\,e \\ d\,f\,c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a\,b\,f \\ d\,e\,c \end{pmatrix}$;

per il punto a passano i piani: O, ab, ac, ad, ae, af,

» » $\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \end{pmatrix}$ » » : ab, ac, bc, de, df, ef.

Ogni retta comune a due punti fondamentali appartiene anche a due piani fondamentali e viceversa: una tal retta si indica con R. Esistono 120 rette R.

2. Rappresentiamo con A, B, C, D, E, F i sei sistemi nulli, a due, a due, involutori che trasformano in sè la cfz. data. Le combinazioni, a due, a due, dei suddetti simboli rappresenteranno le 15 involuzioni gobbe che nascono dai prodotti, a due, a due, dei sei sistemi nulli: così il simbolo $(A\,B)$ indicherà l'involuzione gobba che è il prodotto dei due sistemi nulli A, B e AB, BA ne indicheranno gli assi relativi. Le coppie di simboli ternari $\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ D\,E\,F \end{pmatrix}$ rappresenteranno le 10 polarità che nascono dai prodotti, a tre, a tre, dei sistemi nulli fondamentali: o addirittura le quadriche basi di tali polarità. Le quadrica $\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ D\,E\,F \end{pmatrix}$ contiene le coppie di assi: AB, BA; AC, CA; BC, CB; DE, ED; DF, FD; EF, FE. Le altre coppie sono coniugate. Infine i simboli come $(A\,B, C\,D, E\,F)$ rappresenteranno i 15 tetraedri fondamentali: gli spigoli del tetraedro precedente sono: AB, BA, CD, DC, EF, FE. Abbiamo così gli elementi principali della cfz. di Klein individuata dalla cfz. di Kummer data.

3. Per mettere opportunamente in relazione le notazioni adottate, per le due cfz. suddette, supponiamo che i punti a, b, c, d, e, f, nell'ordine, scritto, siano i poli del piano O riguardo, rispettivamente, ai 6 complessi A, B, C, D, E, F. Seguono allora facilmente queste norme: I poli di ab sono: b rispetto ad A, a rispetto a B, $\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \end{pmatrix}$ rispetto a C, $\begin{pmatrix} a\,b\,d \\ c\,e\,f \end{pmatrix}$ rispetto a D, $\begin{pmatrix} a\,b\,e \\ c\,d\,f \end{pmatrix}$ rispetto ad E, $\begin{pmatrix} a\,b\,f \\ e\,d\,e \end{pmatrix}$ rispetto a F.

I piani polari di a sono: O rispetto ad A, ab rispetto a B, ac rispetto a C, ad rispetto a D, ae rispetto ad E, af rispetto a F.

I piani polari di $\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \end{pmatrix}$ sono: bc rispetto ad A, ca rispetto a B, ba rispetto a C, ef rispetto a D, df rispetto a E, ef rispetto a F.

Nella involuzione gobba $(A\ B)$ sono coppie di punti corrispondenti le:

$$(a,\ b);\ \left(c\ .\ \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \end{pmatrix}\right);\ \left(d\ .\ \begin{pmatrix} a\,b\,d \\ c\,e\,f \end{pmatrix}\right);\ \left(e\ .\ \begin{pmatrix} a\,b\,e \\ c\,d\,f \end{pmatrix}\right);\ \left(f\ .\ \begin{pmatrix} a\,b\,f \\ c\,d\,e \end{pmatrix}\right);$$

$$\left(\begin{pmatrix} a\,d\,e \\ b\,f\,c \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a\,f\,c \\ b\,d\,e \end{pmatrix}\right);\ \left(\begin{pmatrix} a\,d\,c \\ b\,e\,f \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a\,e\,f \\ b\,d\,c \end{pmatrix}\right);\ \left(\begin{pmatrix} a\,e\,c \\ b\,d\,f \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a\,d\,f \\ b\,e\,c \end{pmatrix}\right);$$

e coppie di piani corrispondenti le: $(O\ .\ a\,b)$, $(a\,c\ .\ b\,c)$, $(a\,d\ .\ b\,d)$, $(a\,e\ .\ b\,e)$, $(a\,f\ .\ b\,f)$, $(c\,d\ .\ e\,f)$, $(c\,e\ .\ d\,f)$, $(c\,f\ .\ d\,e)$.

Infine nella polarità $\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ D\,E\,F \end{pmatrix}$ il piano O ha per polo $\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \end{pmatrix}$, il piano $a\,b$ ha per polo C, il piano $a\,d$ ha per polo $\begin{pmatrix} D\,B\,C \\ A\,E\,F \end{pmatrix}$, ecc.

4. Stabilite così le notazioni di cui ci serviremo, passiamo alle osservazioni seguenti sulla Memoria di Caporali. Un facile computo prova che esistono 240 piani passanti ciascuno per 3 soli punti fondamentali della cfz. di Kummer, e dualmente esistono 240 punti comuni, ciascuno, a tre soli piani della cfz. stessa (C. N° 3). Sono i piani II e i punti P di Caporali. Studieremo più tardi la interessante cfz. composta con questi piani e questi punti (N° 7). Intanto ricorderemo che esistono 60 tetraedri di cui le facce sono piani fondamentali e vertici punti P (C. N° 21): i 60 tetraedri duali hanno per vertici punti fondamentali e per facce piani II. I primi si dicono tetraedri di 1ª specie, i secondi di 2ª specie (C. N° 23). Finalmente esistono 80 tetraedri di cui i vertici e facce sono punti e piani fondamentali insieme (C. N° 20): essi sono duali di sè stessi e li chiameremo tetraedri di 3ª specie. Sulle facce di un tetraedro di 1ª specie esistono 12 punti fondamentali situati, a due, a due, sulle sue costole. Questi pnnti appartengono a una stessa quadrica (C. N° 56) la quale viene così a tagliare la superficie di Kummer lungo le 4 coniche singolari situate sulle facce del tetraedro in parola. Un tetraedro di 3ª specie contiene sulle sue facce tutt'e 16 i punti fondamentali e quindi le 4 coniche singolari, situate sulle sue facce, non possono appartenere a una stessa quadrica. Per il seguito ci occorre di stabilire i possibili tipi simbolici di tetraedri di 1ª e di 2ª specie.

I primi sono due cioè:

$$(O,\ a\,b,\ c\,d,\ e\,f);\ (a\,c,\ b\,c,\ a\,d,\ b\,d),$$

e i secondi sono pure due:

$$\left(a\ ,\ b\ ,\ \begin{pmatrix} a\,c\,e \\ b\,d\,f \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a\,d\,f \\ b\,c\,e \end{pmatrix}\right);\ \left(\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a\,b\,f \\ d\,e\,c \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a\,e\,c \\ d\,b\,f \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a\,e\,f \\ d\,b\,c \end{pmatrix}\right).$$

5. Una qualunque delle 15 involuzioni gobbe fondamentali possiede, fra le rette unite, 8 rette R (N° 1) ognuna delle quali contiene due punti fondamentali corrispondenti e appartiene a due piani fondamentali corrispondenti. Queste 8 rette R si dividono in due notevoli quaterne coniugate (C. N^i 9, 10, 56) di cui ricorderemo la proprietà principale che è la seguente. Le 4 rette di una quaterna sono tali che prendendo su tre di esse, tre punti fondamentali (uno su ciascuna) in qualunque modo, questi determinano un piano fondamentale che taglia la retta rimanente della quaterna in un punto fondamentale e passa per una retta della quaterna coniugata. Dualmente ecc. Per esempio l'involuzione $(A\,B)$ individua le due quaterne coniugate:

$$O\,.\,ab\,,\ cd\,.\,ef\,,\ cf\,.\,de\,,\ ce\,.\,df\,,$$
$$ac\,.\,bc\,,\ ad\,.\,bd\,,\ ae\,.\,bd\,,\ af\,.\,bf\,.$$

Si hanno così i simboli di due quaterne coniugate quando si consideri ogni retta R come intersezione di 2 piani fondamentali.

Le coppie di quaterne R coniugate sono tante quante le involuzioni fondamentali cioè 15.

Nella involuzione precedente $(A\,B)$ si corrispondono ad es. i piani O e ab. I punti fondamentali dei due piani diversi da a e b formano i due quadrangoli completi $c\,d\,e\,f$, $\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a\,b\,d \\ c\,e\,f \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a\,b\,e \\ c\,d\,f \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a\,b\,f \\ c\,d\,e \end{pmatrix}$. Ora è facile riconoscere che un lato dell'uno incontra un lato dell'altro senza che i due quadrangoli siano prospettivi (1). Questa osservazione ci sarà utile nel seguito.

6. È necessario adesso stabilire l'esistenza di certe quadriche ciascuna delle quali passa per 8 punti e tocca 8 piani della cfz. di Kummer. Per questo, si prenda a considerare la quadrica Q che passa per le coppie di assi $A\,B$, $B\,A$; $C\,D$, $D\,C$ e per il punto fondamentale a. Poichè ciascuna delle due involuzioni $(A\,B)$, $(C\,D)$ trasforma la Q in sè medesima, segue che il quadrilatero gobbo ordinato: $a\ .\ b\ .\ \begin{pmatrix} b\,c\,d \\ a\,e\,f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a\,c\,d \\ b\,e\,f \end{pmatrix}$ giace per intero sulla Q. Ma anche ciascuna delle 4 involuzioni $(A\,C)$, $(A\,D)$, $(B\,C)$, $(B\,D)$ trasforma la Q in sè medesima: applicandole dunque al quadrilatero suddetto si arriva, in 4 modi diversi, al quadrilatero ordinato: $c\,.\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\,e\,f \\ a\,b\,d \end{pmatrix} . d$ che giacerà per intero sopra Q. Essa quindi passa

(1) La loro cfz. è considerata da MARTINETTI nella Nota: *Le cfz.* $(8_4, 8_4)$ *di punti e piani* (Giorn. di Mat., Vol. XXXIV).

per 8 punti fondamentali: e, tenendo conto delle R che contiene, si vede subito che è anche tangente a 8 piani fondamentali. Se, fra le infinite quadriche che passano per gli assi $A\,B$, $B\,A$, $C\,D$, $D\,C$, si prendesse quella che passa per uno dei rimanenti punti fondamentali, si vedrebbe analogamente che essa conterrebbe anche i rimanenti 7 e sarebbe tangente agli 8 piani fondamentali restanti.

Dunque: per gli assi delle due involuzioni gobbe $(A\,B)$, $(C\,D)$ passano due quadriche ciascuna delle quali contiene 8 rette R, 4 appartenenti alla congruenza $(A\,B)$ e 4 alla $(C\,D)$. Tali rette sono per l'una quadrica:

$O\,.\,ab$, $ac\,.\,bc$, $ad\,.\,bd$, $cd\,.\,ef$ appartenenti alla congruenza $(A\,B)$,
$O\,.\,cd$, $ac\,.\,ad$, $bc\,.\,bd$, $ab\,.\,ef$ » » » $(C\,D)$,

e per l'altra:

$ae\,.\,be$, $af\,.\,bf$, $ce\,.\,df$, $cf\,.\,de$ appartenenti alla congruenza $(A\,B)$,
$ce\,.\,de$, $cf\,.\,df$, $ae\,.\,bf$, $af\,.\,be$ » » » $(C\,D)$,

e quindi ciascuna di tali quadriche passa per 8 punti ed è tangente a 8 piani della cfz. di Kummer. Manifestamente esistono due quadriche siffatte per ogni aggruppamento analogo ad $(A\,B)\,.\,(C\,D)$ dei 6 simboli A, B, C, D, E, F.

Dunque il loro numero è $15\,.\,3\,.\,2 = 90$.

« *Per due coppie di assi fondamentali che si tagliano, della cfz. di* Klein, *si possono condurre due quadriche ognuna delle quali passa per 8 punti e tocca 8 piani della cfz. di* Kummer ».

Oppure:

« *Le 120 rette R di* Caporali *stanno, a 8, a 8, sopra 90 quadriche ciascuna delle quali passa per due coppie di assi fondamentali, della cfz. di* Klein, *che si tagliano* ».

7. Ci proponiamo ora lo studio della interessante figura composta con i 240 punti P e 240 piani Π (N° 4). Si consideri perciò il gruppo delle 32 omografie che trasformano in sè la cfz. di Kummer e che provengono da tutti i possibili prodotti dei 6 sistemi nulli fondamentali. È evidente che ognuna di esse muterà in sè la figura dei punti P e piani Π. Applicando dunque le omografie di tal gruppo a un punto P, o a un piano Π, come elemento iniziale otterremo manifestamente una cfz. di Kummer costituita da 16 punti P e da 16 piani Π. Dopo, si prenda uno degli elementi P, o Π rimanenti e si ripeta l'operazione: si troverà una nuova cfz. di Kummer ancora composta di elementi P e Π: si prosegua così l'operazione sino a che i 240 punti P e 240 piani Π non siano esauriti. Il risultato si potrà esprimere mediante il seguente teorema:

« *I 240 punti P e i 240 piani* Π *compongono 15 nuove cfz. di* Kummer. (C. N° 56) Le chiameremo le cfz. Π P della cfz. fondamentale ».

8. Vediamo adesso come si caratterizza una di queste 15 cfz. Si consideri il piano fondamentale O e in esso i suoi punti fondamentali a, b, c, d, e, f. Secondo le notazioni già adottate, è manifesto che i piani fondamentali $a\,b$, $c\,d$, $e\,f$ sono i corrispondenti di O nelle tre involuzioni gobbe $(A\,B)$, $(C\,D)$, $(E\,F)$ e quindi il loro punto comune, che è un punto P, è il polo di O rispetto al tetraedro di Klein $(A\,B,\ C\,D,\ E\,F)$. Dunque:

« *I 15 poli di un piano della cfz. di* Kummer, *rispetto ai 15 tetraedri di* Klein, *appartengono a uno, a uno, alle 15 cfz.* II P (*e costituiscono evidentemente i 15 vertici opposti al piano suddetto nei 15 tetraedri di 1ª specie cui il piano appartiene* (N° 4)) ».

Cioè:

« *Per costruire una delle 15 cfz.* II P *basta trasformare polarmente la cfz. di* Kummer *data, rispetto a uno dei 15 tetraedri di* Klein ».

9. Quest'ultima conclusione può servire a mettere sotto un'altra forma il legame geometrico che passa fra la cfz. data e una delle sue 15 cfz. II P.

Perciò si assuma, come tetraedro di riferimento, uno dei 15 tetraedri di Klein e si osservi che le formole $y_1 \equiv x_2\,x_3\,x_4$, $y_2 \equiv x_1\,x_3\,x_4$, $y_3 \equiv x_1\,x_2\,x_4$, $y_4 \equiv x_1\,x_2\,x_3$ definiscono una involuzione cubica dello spazio nella quale gli 8 punti uniti sono: $(1\,1\,1\,1,\ 1\,1\,-1\,-1,\ 1\,-1\,-1\,1,\ 1\,-1\,1\,-1)$, $(-1\,1\,1\,1,\ 1\,-1\,1\,1,\ 1\,1\,-1\,1,\ 1\,1\,1\,-1)$; essi costituiscono altri due tetraedri di Klein formanti col 1° una terna desmica. Si osservi anche che una tale involuzione cubica è individuata dal tetraedro fondamentale e da uno dei punti uniti, e che può pensarsi come il prodotto della polarità, rispetto al tetraedro fondamentale medesimo, per la polarità stabilita dalla quadrica che possiede come tetraedri autoconiugati i tre tetraedri della terna desmica dianzi ricordata. (Tale quadrica è $\Sigma\, x_i^2 = 0$). E infine si ricordi che un tetraedro di Klein appartiene a 4 terne desmiche e che, per ognuna di esse, esiste una quadrica fondamentale rispetto alla quale i tre tetraedri della terna e quelli della terna associata sono autopolari. Allora è evidente che applicando ai punti della cfz. data la trasformazione polare rispetto a uno dei 15 tetraedri di Klein e, dopo, la polarità rispetto a una delle 4 quadriche fondamentali che hanno quel tetraedro autopolare, si otterrà una delle 15 cfz. II P la quale verrà così a corrispondere, punto, per punto, alla cfz. data nella involuzione cubica che è il prodotto delle due trasformazioni suddette. Dunque:

« *Una cfz.* II P *corrisponde, punto, a punto, con la cfz. data in 4 involuzioni cubiche dello spazio, ognuna delle quali risulta come il prodotto della palarità rispetto a un determinato tetraedro* T *di* Klein *e della polarità ri-*

spetto a una delle 4 quadriche fondamentali che hanno T come autoconiugato (1) ».

« *Tali involuzioni cubiche possono anche intendersi individuate mediante uno dei tetraedri di* Klein *come tetraedro fondamentale e mediante gli 8 vertici di altri due tali tetraedri formanti col primo una terna desmica, come gruppo di punti uniti* ».

10. Si può fare un'applicazione dei precedenti risultati alle cfz. tetraedroidali. Ciò si ottiene molto semplicemente mediante la osservazione seguente: Se un piano p passa per un vertice V di un tetraedro T di Klein, il polo di p rispetto a uno degli altri 6 tetraedri di Klein che hanno con T una coppia di spigoli a comune, si trova su quella faccia di T che è opposta a V: dualmente ecc.

Si hanno così i seguenti resultati:

Una cfz. una volta tetraedroidale (rispetto a un tetraedro T_1) ammette come cfz. II P: il tetraedro T_1, sei cfz. una volta tetraedroidali (rispetto ai 6 tetraedri che con T_1 hanno una coppia di spigoli comuni), e otto che non lo sono affatto.

Una cfz. due volte tetraedroidale (rispetto a due tetraedri T_1, T_2 aventi due spigoli comuni) ammette come cfz. II P: i due tetraedri T_1, T_2, una cfz. due volte tetraidroidale (rispetto al tetraedro che ha con T_1 e T_2 una coppia di spigoli comuni); otto cfz. una volta tetraedroidali (rispetto ai tetraedri che hanno due spigoli comuni con uno solo dei T_1, T_2) e quattro che non lo sono affatto.

Una cfz. tre volte tetraedroidale (rispetto ai tetraedri T_1 T_2 T_3 di una terna desmica) ammette, come cfz. II P, i tre tetraedri T_1, T_2, T_3; tre cfz. tre volte tetraedroidali (rispetto ai tetraedri della terna desmica associata) e nove cfz. una volta tetraedroidali rispetto ai tetraedri rimanenti i quali hanno tutti due spigoli comuni con uno dei T_1, T_2, T_3.

Una cfz. 4 volte tetraedroidale (rispetto ai tetraedri T_1 T_2 T_3 T_4 di cui i primi tre formano una terna desmica e il 4^0 appartiene alla terna desmica associata) ammette, come cfz. II P, i 4 tetraedri T_1, T_2, T_3, T_4, due cfz. tre volte tetraedroidali (rispetto ai due tetraedri che completano la terna desmica associata); tre cfz. due volte tetraedroidali (rispetto ai tre tetraedri che hanno due spigoli a comune con T_4 e con uno dei T_1, T_2, T_3) e sei cfz. una sol volta tetraedroidali (rispetto ai 6 tetraedri rimanenti, ciascuno dei quali ha una coppia di spigoli comuni con uno dei T_1, T_2, T_3).

---

(1) Ecco un esempio che sembra notevole di una corrispondenza birazionale dello spazio che trasforma, punto, a punto, una cfz. di KUMMER in un'altra cfz. di KUMMER.

Una cfz. sei volte tetraedroidale (rispetto ai tetraedri T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 componenti, a 3, a 3, quattro terne desmiche) ammette come cfz. II P i sei tetraedri precedenti; una cfz. 6 volte tetraedroidale rispetto a quel tetraedro T_7 che ha con ciascuno dei 6 precedenti due spigoli comuni, e 8 cfz. tre volte tetraedroidali (rispetto ai rimanenti tetraedri i quali si dividono in 4 coppie formanti con T_7 le 4 terne desmiche associate delle 4 su nominate).

11. Questi resultati dimostrano come sia possibile mediante le nostre involuzioni cubiche (applicate anche una sola volta) di trasformare una cfz. di Kummer in guisa di aumentare, o diminuire di una, due, tre unità il grado di tetraedroidalità. Al contrario tale grado può esser mantenuto, in queste trasformazioni, per tutte le cfz. tetraedroidali all'infuori di quelle che lo sono 4 volte. Le cfz. due volte tetraedroidali rispetto a una stessa cfz. di Klein si distribuiscono in coppie corrispondenti. Lo stesso può dirsi delle 30 cfz. 6 volte tetraedroidali come esprime, con maggiori dettagli il seguente teorema:

« *Se in un piano fondamentale di una cfz. sei volte tetraedroidale si considera il triangolo delle rette h e per i suoi vertici si conducono le altre 3 rette h, che non giacciono nel piano suddetto, esse s'incontrano in un punto che appartiene a una nuova cfz. sei volte tetraedroidale, la quale corrisponde alla prima nella involuzione cubica stabilita da un determinato tetraedro di* Klein *e da una delle 4 quadriche fondamentali che hanno quel tetraedro come autopolare* (1) ».

12. Vogliamo adesso costruire i simboli di una cfz. II P secondo le notazioni adottate. Per questo, cominciamo dall'osservare, che riguardando il simbolo di un piano II come il prodotto dei simboli dei 3 punti fondamentali che contiene si hanno i 3 seguenti tipi possibili:

$$a \,.\, b \,.\, \begin{pmatrix} a\,c\,d \\ b\,e\,f \end{pmatrix}; \quad a \,.\, \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a\,e\,f \\ d\,b\,c \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\,b\,e \\ d\,f\,c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\,d\,c \\ b\,f\,e \end{pmatrix}.$$

Per dedurne altri, più opportuni per il seguito, si consideri ogni piano II come individuato dalle 3 rette R che congiungono a due, a due i tre punti fondamentali contenuti in II e si rappresenti ciascuna di queste R mediante i 2 piani fondamentali che la contengono. I simboli precedenti si trasformano allora in quest'altri:

$$(a\,b\,.\,0\,,\ a\,c\,.\,a\,d\,,\ b\,e\,.\,b\,f)\,,\ (a\,b\,.\,a\,c\,,\ a\,e\,.\,a\,f\,,\ b\,c\,.\,e\,f)\,,$$
$$(a\,b\,.\,d\,f\,,\ a\,c\,.\,e\,f\,,\ b\,e\,.\,d\,c).$$

(1) SEGRE, *Sur un cas particulier de la Surface de* KUMMER. Berichte über die Verh. der königs der Wiss. zu Leipzig 1884.

Ciò premesso, per costruire i 16 piani di una cfz. II P basterà (N⁰ 8) cercare i piani polari dei 16 punti fondamentali rispetto a un medesimo tetraedro di Klein; il che può ottenersi costruendo i tre corrispondenti di ogni punto fondamentale rispetto alle 3 involuzioni gobbe individuate dalle 3 coppie di spigoli opposti del tetraedro suddetto e quindi prendendo il piano di tre tali punti. Ora si riconosce facilmente che ogni tetraedro di 2ª specie è autopolare rispetto a un determinato tetraedro di Klein.

« *Dunque i 16 piani di una cfz.* II P *sono le facce di 4 tetraedri di 2ª specie autopolari rispetto a un medesimo teraedro di* Klein ».

Se questo tetraedro di Klein è ad es. (AB, CD, EF), i 4 tetraedri suddetti sono:

$$\left\{a, b, \begin{pmatrix} a\,c\,d \\ b\,e\,f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a\,e\,f \\ b\,c\,d \end{pmatrix}\right\}, \left\{c, d, \begin{pmatrix} c\,a\,b \\ d\,e\,f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c\,e\,f \\ d\,a\,b \end{pmatrix}\right\},$$

$$\left\{e, f, \begin{pmatrix} e\,a\,b \\ f\,c\,d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e\,c\,d \\ f\,a\,b \end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix} a\,d\,f \\ b\,c\,e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a\,d\,e \\ b\,c\,f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a\,c\,f \\ b\,d\,e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a\,c\,e \\ b\,d\,f \end{pmatrix}\right\}.$$

Passando al 2° modo di rappresentarne simbolicamente le facce, secondo quanto si è detto al principio di questo numero, si trovano i simboli seguenti:

$$\left|\begin{matrix} ab.0, & ac.ad, & be.bf, \\ ab.0, & ae.af, & bc.bd, \\ ac.ad, & ae.af, & cd.ef, \\ be.bf, & bc.bd, & cd.ef, \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} cd.0, & ca.cb, & de.df \\ cd.0, & ce.cf, & da.db \\ ca.cb, & ce.cf, & ab.ef \\ de.df, & da.db, & ab.ef \end{matrix}\right|,$$

$$\left|\begin{matrix} ef.0, & ea.eb, & fc.fd, \\ ef.0, & ec.ed, & fa.fb, \\ ea.eb, & ec.ed, & ab.cd, \\ fc.fd, & fa.fb, & ab.cd, \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} ad.bc, & cf.de, & af.be \\ ad.bc, & ae.bf, & ce.df \\ af.be, & df.ce, & ac.bd \\ de.cf, & ae.bf, & ac.bd \end{matrix}\right|.$$

CAPITOLO II.

Le sedici bitangenti di un gruppo di Kummer.

13. Prima d'intraprendere le nostre ricerche sulle bitangenti, valendosi della cfz. di Kummer, è necessario richiamare alcune nozioni e denominazioni ben conosciute su tali bitangenti e soprattutto la notazione di Hesse che così mirabilmente si presta a esprimere le proprietà più importanti.

Esistono 63 serie quadratiche di coniche inviluppanti una quartica piana generica. Ogni serie contiene 6 coppie di bitangenti. I sei punti d'incontro delle bitangenti in ogni coppia (che per brevità chiameremo i sei punti doppi della serie) stanno su di una conica che dicesi la conica armonica alla serie. Ogni coppia di bitangenti appartiene a una sola serie. Assumendo gli otto simboli 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, le ventotto bitangenti possono rappresentarsi con le combinazioni binarie di tali simboli e una serie viene così a esser rappresentata dall'uno, o dall'altro dei due tipi simbolici seguenti:

$$\text{(I)} \ldots \; 13 \,.\, 23,\; 14 \,.\, 24,\; 15 \,.\, 25,\; 16 \,.\, 26,\; 17 \,.\, 27,\; 18 \,.\, 28,$$

$$\text{(II)} \ldots \; 12 \,.\, 34,\; 13 \,.\, 24,\; 14 \,.\, 23,\; 56 \,.\, 78,\; 57 \,.\, 68,\; 58 \,.\, 67.$$

Per costruire simbolicamente il primo si consideri un esagono contenuto nell'ottagono 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e si formi ogni coppia della serie scrivendo i simboli delle rette congiungenti uno stesso vertice dell'esagono con i due vertici dell'ottagono che non appartengono all'esagono. Dunque il simbolo più semplice di questo tipo è la indicazione dei due vertici suddetti: così la (I) si indicherà con (12) ponendo le parentesi per evitare equivoci con la bitangente 12. I tipi come (I) sono 28. Per costruire invece i tipi come (II) si considerino 2 quadrangoli, nell'ottagono, non aventi alcun vertice comune: le coppie della serie sono rappresentate dalle coppie di lati opposti dell'uno e dell'altro quadrangolo e i vertici dell'uno, o dell'altro possono servire a rappresentare simbolicamente la serie; così la (II) si può rappresentare con (1 2 3 4) oppure (5 6 7 8). I tipi (II) sono 35. Due serie hanno 4, o 6 bitangenti comuni. Per es., le due (1 2 3 4), (1 2 5 6) hanno 4 bitangenti comuni e si chiamano congiunte di 1ª specie: le coppie 12 . 34, 56 . 78, 12 . 56, 34 . 78 si chiamano le coppie di congiunzione. Invece le altre due serie come (1 2 3 4), (1 2 3 5) hanno 6 bitangenti comuni e si chiamano congiunte di 2ª specie. Le bitangenti non comuni a queste ultime appartengono a una terza serie che è congiunta di 2ª specie con ciascuna delle prime. Si riconosce facilmente che esistono 315 gruppi ciascuno dei quali è composto di 3 serie che, a due, a due, sono congiunte di 1ª specie. Si chiamano *gruppi di 1ª specie.*

I loro tipi simbolici sono i due seguenti:

$$\{(1\,2\,3\,4),\ (23),\ (14)\},\quad \{(1\,2\,3\,4),\ (1\,2\,5\,6),\ (1\,2\,7\,8)\}.$$

I primi sono 210. I secondi 105. Si vede analogamente che esistono 336 gruppi ognuno composto di 3 serie congiunte, a due, a due, di seconda specie, così che ciascuna di esse è costituita dalle coppie non comuni

alle altre due. Si chiamano gruppi di 2ª specie. I loro tipi simbolici sono:

$$\{(1\,2\,3\,4),\ (1\,2\,3\,5),\ (35)\},\quad \{(45),\ (46),\ (56)\}.$$

I primi sono 280 e i secondi 56. Un gruppo di 1ª specie contiene tutte le 28 bitangenti, un gruppo di 2ª specie ne contiene solamente 18: vedremo in seguito (N° 32) la figura notevole che compongono le 10 rimanenti (1).

14. Ciò premesso abbiasi una superficie di Kummer affatto generica e se ne consideri una sezione piana pure generica. In forza del teorema di Kummer già citato, essa può pensarsi come una quartica generale. Le sue 28 bitangenti si dividono in due specie: 16 che provengono dai 16 piani doppi e le 12 rimanenti. Ci proponiamo adesso di dimostrare che queste ultime si distribuiscono in 6 coppie appartenenti a una medesima serie di coniche quadritangenti. Per questo ricorderemo, avanti tutto, che la condizione necessaria e sufficiente affinchè due coppie di bitangenti appartengono alla stessa serie si esprime esigendo che gli 8 punti di contatto stiano su di una medesima conica. Rammenteremo pure (N° 4) che le 4 coniche singolari situate sulle facce di un tetraedro di 1° specie della della cfz. di Kummer appartengono a una stessa. Dunque: « *Le 4 bitangenti che provengono dalla sezione di un tetraedro di 1ª specie hanno i loro 8 punti di contatto su di una conica e quindi costituiscono in 3 modi diversi due coppie di una medesima serie* ».

Allora si osservi che esistono i seguenti tetraedri di 1ª specie (N° 4):

$$(0,\ ab,\ cd,\ ef);\ (0,\ ab,\ ce,\ df),\ (0,\ ab,\ cf,\ de),$$
$$(ac,\ bc,\ ad,\ bd);\ (ac,\ bc,\ ae,\ be),\ (ac,\ bc,\ af,\ bf).$$

Se quindi, indichiamo con ik la intersezione del piano ik col piano della quartica, si vede che apparterranno alla stessa serie le coppie:

$$0\,.\,ab,\ cd\,.\,ef,\ ce\,.\,df,\ cf\,.\,de\ldots \qquad \text{(I)}$$

e a un'altra serie le:

$$ac,\ bc,\ ad\,.\,bd,\ ae\,.\,be,\ af\,.\,bf\ldots \qquad \text{(II)}$$

Queste serie, secondo il num. precedente, sono congiunte di 1ª specie essendo coppie di congiunzione quelle che mancano nell'una e nell'altra.

---

(1) Queste denominazioni furono già adoperate nella mia Nota: *Sopra le serie quadratiche di coniche inviluppanti la quartica piana.* Rendic. Istit. Lomb., 1895.

Se indichiamo queste ultime con $m\,n$, $p\,q$; $m\,p$, $q\,n$, la serie individuata da $m\,q$, $p\,n$, sarà congiunta di 1ª specie con entrambe le (I), (II) precedenti e quindi non avrà con esse a comune alcun'altra bitangente all'infuori di m, n, p, q. Essa è quindi la serie cercata. Dunque il teorema fondamentale di Kummer può mettersi sotto questa forma più precisa:

« *Le 16 bitangenti di una quartica che avanzano togliendo dalle 28 le 12 che costituiscono 6 coppie di una medesima serie, si possono considerare come sezioni di 16 piani fondamentali di* ∞^4 *cfz. di* Kummer. Diremo che quelle 16 bitangenti compongono uno gruppo di Kummer, e chiameremo *complementari* un gruppo di Kummer e una serie quando, presi insieme esauriscono le 28 bitangenti. *Esistono 63 gruppi di* Kummer. Una bitangente entra in 27 serie e quindi in 27 gruppi di Kummer. Due bitangenti entrano in 20 tali gruppi ».

15. Le coppie di piani fondamentali che hanno dato origine alle (I), (II) del N° precedente si corrispondono nella involuzione gobba $(A\,B)$ (N° 3) e costituiscono le due quaterne R coniugate relative a quella involuzione (N° 5). Dunque le considerazioni fatte possono ripetersi per ciascuna delle altre 15 involuzioni gobbe fondamentali e quaterne R relative. Cioè:

« *Le 16 bitangenti di un gruppo di* Kummer *si possono, in 15 modi diversi, distribuire in 8 coppie non comuni a due serie congiunte di prima specie. Le 4 coppie dell'una serie e le 4 coppie dell'altra provengono dalle sezioni con le quaterne R coniugate di* Caporali. *Le 15 coppie di serie che così si trovano, sono quelle che formano tutti i possibili gruppi di 1ª specie con la serie complementare del gruppo dato* ».

16. Si tratta adesso di vedere come si possa passare dalla notazione $i\,k$, adottata provvisoriamente nel N° 14 per rappresentare la bitangente proveniente dal piano $i\,k$; alla notazione di Hesse, già ricordata al N° 13. Intanto, come abbiamo rilevato, esistono due tipi simbolici di serie, così osserviamo adesso l'esistenza dei due tipi simbolici seguenti di gruppi di Kummer:

(I). 12, 34, 35, 36, 37, 38, 45, 46, 47, 48, 56, 57, 58, 67, 68, 78,

(II). 15, 16, 17, 18, 25, 26, 27, 28, 35, 36, 37, 38, 45, 46, 47, 48.

Il (I) si trova simbolicamente associando un lato dell'ottagono completo 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 a tutti i lati dell'esagono completo che rimane quando dall'ottagono si tolgono i due vertici che stanno sul lato suddetto; il (II) si ottiene dividendo il suddetto ottagono in due quadrangoli non aventi alcun vertice comune e quindi scrivendo i simboli di tutte le rette che uniscono un vertice dell'un quadrangolo a un vertice dell'al-

tro. Queste osservazioni ci permetteranno spesso, nel seguito, di semplificare assai la scrittura, come già fu indicato in parte al N° 13: per esempio il simbolo (12) preceduto dalla parola *serie*, o *gruppo di* Kummer significherà l'uno, o l'altro dei due seguenti aggruppamenti:

$$13 \,.\, 23,\ 14 \,.\, 24,\ 15 \,.\, 25,\ 16 \,.\, 26,\ 17 \,.\, 27,\ 18 \,.\, 28,$$

$$12,\ 34,\ 35,\ 36,\ 37,\ 38,\ 45,\ 46,\ 47,\ 48,\ 56,\ 57,\ 58,\ 67,\ 68,\ 78,$$

e ugualmente il simbolo ($1\,2\,3\,4 \equiv 5\,6\,7\,8$) preceduto dalla parola *serie*, o *gruppo di* Kummer, esprimerà l'uno o l'altro dei due aggruppamenti:

$$12 \,.\, 34,\ 13 \,.\, 24,\ 14 \,.\, 23,\ 56 \,.\, 78,\ 57 \,.\, 68,\ 58 \,.\, 67,$$

$$15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 25,\ 26,\ 27,\ 28,\ 35,\ 36,\ 37,\ 38,\ 45,\ 46,\ 47,\ 48.$$

Ciò premesso, per poter desumere le proprietà dei gruppi di Kummer da quelle delle rette sezioni di 16 piani fondamentali, bisogna operare il passaggio dai simboli di queste ai simboli di quelli in guisa che la proprietà del N° 15 sia mantenuta nel passaggio medesimo. Se si tratta del tipo simbolico (I) basta evidentemente sostituire 12 a 0 e 3, 4, 5, 6, 7, 8 ai simboli a, b, c, d, e, f in un ordine qualunque. Se poi si tratta del tipo simbolico (II) allora si scrivano i due determinanti:

$$\begin{vmatrix} 0 & ab & ac & bc \\ ef & cd & bd & ad \\ df & ce & be & ae \\ de & cf & bf & af \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 15 & 16 & 17 & 18 \\ 25 & 26 & 27 & 28 \\ 35 & 36 & 37 & 38 \\ 45 & 46 & 47 & 48 \end{vmatrix},$$

il cui modo di formazione è manifesto e si riferiscano i termini che hanno il medesimo posto. Si riconosce allora facilmente che, nel passaggio, la proprietà su ricordata è mantenuta. Infatti le quindici coppie di quaterne R coniugate e le 15 coppie di serie di bitangenti del N° precedente nascono, o dall'accoppiamento delle linee come:

$$\left.\begin{matrix} O \,.\, ef,\ ab \,.\, cd,\ ac \,.\, bd,\ bc \,.\, ad \\ df \,.\, de,\ ce \,.\, cf,\ be \,.\, bf,\ ae \,.\, af \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{che} \\ \text{generano} \end{matrix} \left\{\begin{matrix} 15 \,.\, 25,\ 16 \,.\, 26,\ 17 \,.\, 27,\ 18 \,.\, 28 \ldots \\ 35 \,.\, 45,\ 36 \,.\, 46,\ 37 \,.\, 47,\ 38 \,.\, 48 \ldots \end{matrix}\right.$$

o dall'accoppiamento delle colonne come:

$$\left.\begin{matrix} O \,.\, ab,\ ef \,.\, cd,\ df \,.\, ce,\ de \,.\, cf \\ ac \,.\, bc,\ bd \,.\, ad,\ be \,.\, ae,\ bf \,.\, af \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{che} \\ \text{generano} \end{matrix} \left\{\begin{matrix} 15 \,.\, 16,\ 25 \,.\, 26,\ 35 \,.\, 36,\ 45 \,.\, 46 \ldots \\ 17 \,.\, 18,\ 27 \,.\, 28,\ 37 \,.\, 38,\ 47 \,.\, 48 \ldots \end{matrix}\right.$$

o infine da un manifesto accoppiamento dei minori complementari del 2° ordine come:

$$\left.\begin{matrix} O\,.\,cd,\ ab\,.\,ef,\ be\,.\,af,\ ae\,.\,bf, \\ ac\,.\,ad,\ bc\,.\,bd,\ cf\,.\,df,\ ce\,.\,de, \end{matrix}\right\} \begin{matrix}\text{che} \\ \text{generano}\end{matrix} \left\{\begin{matrix} 15\,.\,26,\ 16\,.\,25,\ 37\,.\,48,\ 38\,.\,47\ldots \\ 17\,.\,28,\ 18\,.\,27,\ 35\,.\,46,\ 36\,.\,45\ldots \end{matrix}\right.$$

17. Riprendiamo le due quaterne R coniugate:

$$(O\,.\,ab,\ cd\,.\,ef,\ ce\,.\,df,\ cf\,.\,de),\quad (ac\,.\,bc,\ ad\,.\,bd,\ ae\,.\,be,\ af\,.\,bf),$$

esse sono composte con rette R che si appoggiano ad $A\,B$, $B\,A$ (N^i 3 e 14). Le coppie di piani fondamentali, per quelle rette, sono tagliate dal piano della quartica in coppie di bitangenti che, secondo i N^i precedenti, possono rappresentarsi ad es. con:

(12 . 34, 56 . 78, 57 . 68, 58 . 67), (35 . 45, 36 . 46, 37 . 47, 38 . 48).

Tali serie sono congiunte di 1^a specie e le coppie di congiunzione sono: (13 . 24, 14 . 23), (31 . 41, 32 . 42). *Ebbene vogliamo dimostrare che i punti d'incontro degli assi $A\,B$, $B\,A$ della involuzione $(A\,B)$ col piano della quartica giacciono sulla retta (31 . 32) . (41 . 42) dove 31, 32; 41, 42 sono manifestamente le coppie congiunte contemporaneamente a 13 . 24, 14 . 23 e a 31 . 41, 32 . 42.* Infatti, si osservi che le coppie di piani fondamentali, passanti per le rette R precedenti, sono formate da piani corrispondenti nella involuzione $(A\,B)$. Dunque, se M, M' sono le tracce di $A\,B$, $B\,A$ col piano della quartica, la coppia $M\,M'$ è armonica rispetto alle coppie di bitangenti 12 . 34, 56 . 78, 57 . 68, 58 . 67, 35 . 45, 36 . 46, 37 . 47, 38 . 48: ma le prime quattro coppie appartengono a una stessa serie e quindi a una stessa rete, per cui M M' essendo armonica a più di due coniche della rete (non formanti fascio) lo sarà rispetto a tutte e quindi anche rispetto a 13 . 24, 14 . 23. Analogamente si vede che $M\ M'$ è armonica rispetto a 31 . 41, 32 . 42: dunque i punti $M\,M'$ giacciono sulla retta che unisce i due punti 31 . 32, 32 . 42 c. d. d.

Il ragionamento precedente riguarda il gruppo di Kummer (12) e una delle 15 coppie di serie (N° 15) aventi 8 bitangenti nel gruppo suddetto. Se si ripete il ragionamento per le altre 14 coppie di serie si arriva alla seguente conclusione: Ad ogni lato dell'esagono completo di cui i vertici sono i punti doppi della serie (12) si appoggiano gli assi di una delle 15 involuzioni gobbe fondamentali. *Dunque i vertici di quest'esagono sono i poli del piano della quartica rispetto ai 6 sistemi nulli fondamentali.* E quindi tali punti non variano al variare della cfz. di Kummer attorno alla quartica.

Sopra ogni lato dell'esagono precedente esistono i punti d'incontro, col piano della quartica, dei due assi di una delle 15 involuzioni fonda-

mentali: vogliamo adesso fissare la posizione di due tali punti dimostrando che *essi sono i punti doppi della involuzione segnata, su quella retta, dai lati del quadrangolo costituito dai 4 vertici dell'esagono esterni alla retta medesima.*

Siano M, M' i due punti in questione e p, q, r, s i 4 vertici suddetti. Consideriamo la involuzione gobba fondamentale di cui gli assi passano per M, M': al piano della quartica corrisponde un piano per M, M' e in esso si hanno i punti p', q', r', s' corrispondenti di p, q, r, s. La retta $M.\ M'$ è unita e M, M' sono i punti doppi della involuzione che essa sostiene. Punti corrispondenti di questa involuzione sono i punti d'incontro con $p\ q$, $p'\ q'$; $p\ r$, $p'\ r'$; $r\ s$, $r'\ s'$ ecc. Ma, per una osservazione già fatta alla fine del N° 5, si tagliano, a due, a due, sulla retta M, M' le rette $(p\ q,\ r'\ s')$, $(r\ s,\ p'\ q')$, $(p\ r,\ q'\ s')$, $(q\ s,\ p'\ r')$, $(p\ s,\ q'\ r')$, $(q\ r,\ p'\ s')$, quindi M, M' sono i punti doppi della involuzione segnata sulla retta $M.\ M'$ da $(p\ q,\ r\ s)$, $(p\ r,\ q\ s)$, $(p\ s,\ q\ r)$ c. d. d.

Riassumendo abbiamo dunque i seguenti risultati:

« *Variando la cfz.* Kummer *attorno alle 16 bitangenti di un gruppo di* Kummer *e assumendo tutte le* ∞^4 *posizioni possibili e quindi variando conseguentemente i 6 complessi in involuzione relativi, non variano i 6 poli del piano della quartica rispetto ai 6 complessi suddetti. Essi sono i 6 punti doppi della serie di bitangenti complementare del gruppo di* Kummer *considerato* ».

Ovvero, in altre parole:

« *Una cfz. di* Kummer *e la cfz. di* Klein *che la prima individua sono così legate che facendo variare in tutti i modi possibili la prima attorno a una sua sezione piana, la seconda varia ugualmente attorno alla propria sezione col medesimo piano. Una coppia degli assi fondamentali della cfz. di* Klein *taglia un lato dell'esagono completo, individuato dai 6 poli del piano, nei punti doppi della involuzione, segnata su di esso, per mezzo del quadrangolo completo formato con i 4 vertici esistenti fuori del lato suddetto.*

18. Si ha così una figura di 15 coppie di punti, che indicheremo col simbolo M, la quale è intimamente legata a un gruppo di Kummer e quindi alla quartica. Le conosciute proprietà della cfz. di Klein dànno, per sezione, altrettante proprietà dei punti M. Ad es.:

I 30 punti M relativi a un gruppo di Kummer *giacciono, a tre, a tre, sopra 60 rette m con le quali si possono formare 15 quadrilateri di vertici M. Le 60 rette m suddette passano, a tre, a tre, per 320 punti e così i quadrilateri suddetti si organizzano in 20 terne desmiche le quali sono, a due, a due, associate.*

Esistono 10 coniche (sezioni delle 10 quadriche fondamentali) ognuna delle quali contiene 6 coppie di punti M: le 9 coppie rimanenti son formate

da punti coniugati. Queste 10 coniche si caratterizzano così: Si considerino 2 triangoli di cui i vertici esauriscono i 6 poli del piano e si cerchino le coppie M sui lati di questi triangoli: esse appartengono a una delle coniche domandate. Ad es. se a', b', c', d', e', f' sono i poli del piano della quartica (punti doppi della serie complementare del gruppo di Kummer dato), i punti M giacenti sui lati dei triangoli $a'\ b'\ c'$, $d'\ e'\ f'$ stanno sopra una delle coniche suddette: si vede anche che le 3 coppie M che giacciono sui lati di uno stesso triangolo, come $a\ b\ c$, a due, a due, armoniche sulla conica, finalmente ogni triangolo come $a'\ b'$, $c'\ d'$, $e'\ f'$ è trilatero diagonale per uno dei 15 quadrilateri di vertici M e di lati m dianzi ricordati, ecc., ecc.

Riguardo a questi punti M vedremo al Cap. V altre proprietà più importanti e anche più intimamente connesse con la quartica.

19. Riprendiamo a considerare una delle 15 involuzioni gobbe fondamentali e la corrispondenza che esse stabiliscono fra i piani fondamentali della cfz. di Kummer. Segando col piano della quartica, è manifesto che le due bitangenti provenienti dalla sezione di piani corrispondenti taglieranno sulla retta che unisce le traccie degli assi una coppia di punti armonica alle tracce medesime. Ricordando allora come fu determinata la posizione di tali tracce al N^0 17, si ha il seguente teorema:

« *Se si prendono due coppie di bitangenti della stessa serie, come 12 , 34, 13 . 24; sulla retta ((12 . 34) . (13 . 24)) segnano coppie di punti di una stessa involuzione le altre 8 coppie di bitangenti che appartengono alle due serie congiunte di 1^a specie secondo 12 . 34, 13 . 24 e che sono diverse dalle coppie di congiunzione. I due punti doppi sono i punti M che quella retta contiene. Un gruppo di* Kummer *individua 15 di queste involuzioni* ».

20. La nota proprietà che i 6 piani fondamentali della cfz. di Kummer passanti per uno stesso punto fondamentale sono tangenti a uno stesso cono quadrico dà immediatamente il teorema:

« *Le 16 bitangenti di un gruppo di* Kummer *sono, a 6, a 6, tangenti a 16 coniche. Queste 16 coniche e le 16 bitangenti suddette sono così costruite che ciascuna delle prime è tangente a sei delle seconde e viceversa* ».

Indicheremo con la lettera t tali esalateri di bitangenti circoscritti a coniche. E' assai facile il caratterizzarli: ritroveremo così rapidamente i tipi simbolici già conosciuti. Basta ricordare (N^0 1) che i 6 piani fondamentali per un punto fondamentale possono esser rappresentati dai due tipi simbolici seguenti:

$$(O,\ a\,b,\ a\,c,\ a\,d,\ a\,e,\ a\,f),\quad (a\,b,\ a\,c,\ b\,c,\ d\,e,\ d\,f,\ e\,f).$$

Allora riferendosi al 1° tipo simbolico di gruppi di Kummer (N° 16) si hanno

i due tipi di esalateri t:

$$12 \,.\, 34 \,.\, 35 \,.\, 36 \,.\, 37 \,.\, 38; \quad 34 \,.\, 35 \,.\, 45 \,.\, 67 \,.\, 68 \,.\, 78,$$

riferendosi invece al secondo, si trova un solo nuovo tipo simbolico di esalatero t che è: 15 . 16 . 17 . 28 . 38 . 48. Essi sono i tre tipi già conosciuti (1). Da essi si ricava facilmente che: *Le 6 bitangenti comuni a due serie congiunte di 2ª specie compongono un esalatero t e viceversa.* Per cui il numero di tali esalateri è il triplo del numero dei gruppi di 2ª specie, cioè (N⁰ 13) è dato da 336 . 3 = 1008 come è ben noto.

21. Si consideri una delle 16 bitangenti di un gruppo di Kummer e il piano fondamentale della cfz. che la contiene. In quel piano esistono 6 punti fondamentali giacenti su di una conica i quali congiunti, a due, a due, dànno le rette d'intersezione con gli altri 15 piani fondamentali: queste rette tagliano dunque la bitangente considerata nei punti d'incontro con le altre 15 bitangenti del gruppo. Dunque:

« *In un gruppo di* Kummer, *le 15 intersezioni di una bitangente del gruppo con le 15 rimanenti si possono riguardare come le intersezioni prodotte sulla retta dai lati di un esagrammo di* Pascal ».

Escludendo un lato di tale esagono rimane un quadrangolo che, coi suoi lati, segna sulla retta una involuzione cui appartengono i punti d'incontro della retta con la conica, cioè i punti di contatto della bitangente con la quartica. Si hanno dunque, sulla bitangente, 15 involuzioni a ognuna delle quali appartengono 3 coppie di punti scelti fra i 15 d'intersezione con le altre bitangenti del gruppo. A queste involuzioni appartiene la coppia dei punti di contatto con la quartica.

Ora si osservi che se si considera una bitangente e una delle 27 serie cui la bitangente appartiene (N⁰ 13), le coniche della serie segnano su di essa coppie di una involuzione perchè la serie è contenuta in una rete: a questa involuzione apparterranno quindi le intersezioni della bitangente considerata con le altre coppie di bitangenti della serie. Ebbene le 15 involuzioni sopra descritte sono appunto di questa specie. Infatti sia O il piano fondamentale che contiene la bitangente considerata. In esso sta l'esagono $a\ b\ c\ d\ e\ f$: se si scarta il lato $a\ b$ rimane il quadrangolo $c\ d\ e\ f$ e allora i piani $c\ d$, $e\ f$; $c\ f$, $d\ e$; $c\ e$, $d\ f$ tagliano la bitangente in parola in punti (N° 16) che possono sempre rappresentarsi con (34 . 56, 34 . 78); (34 . 58, 34 . 67); (34 . 57, . 34 . 68): Ora appartengono manifestamente a una stessa serie (N° 13) le coppie: 56 . 78, 58 . 67, 57 . 68, 34 .

(1) Cf. ad es. SALMON, *Curve piane*, pag 320.

12 il che prova l'affermazione fatta. Si ha quindi il seguente teorema:

« *Le 27 serie cui appartiene una stessa bitangente segnano su di essa, mediante le coniche delle reti cui le serie appartengono (e quindi anche mediante le altre coppie di bitangenti delle serie medesime), 27 involuzioni aventi tutte una coppia comune: quella formata dai punti di contatto con la quartica*».

« *Dunque quando sono note le bitangenti di una quartica, la determinazione, su ciascuna, dei punti di contatto è un problema di 2° grado risolvibile costruendo la coppia comune a due involuzioni* ».

CAPITOLO III.

La cfz. composta con i punti d'incontro delle bitangenti a due, a due.

22. Ciascuna retta R di Caporali taglia il piano della quartica in un punto, che chiameremo r, comune a due bitangenti. Ma ogni piano Π della cfz. di Kummer contiene 3 rette R, dunque taglia il piano della quartica secondo una retta π che contiene 3 punti r. Cioè:

» *I punti r d'incontro delle bitangenti, a due, a due, in un gruppo di* Kummer *stanno, a 3, a 3, sopra 240 rette* π».

Per determinare i vari tipi simbolici di queste rette π basterà effettuare il solito passaggio di notazione (N° 16) dal simbolo di un piano Π (N° 12) a quello della sua retta d'intersezione col piano della quartica. Si trovano allora, per una retta π, i seguenti tipi simbolici possibili:

(12 . 78, 13 . 14, 25 . 26), (12 . 13, 15 . 16, 23 . 56), (12 . 46, 13 . 56, 25 . 34),

che sono quelli già noti. Di qui risulta subito:

« *La condizione necessaria e sufficiente affinchè due punti r stiano su di una retta* π, *è che le due coppie di bitangenti che li individuano appartengano a due serie congiunte di 1ª specie e siano diverse dalle coppie di congiunzione, o, ciò è lo stesso, che fra gli 8 punti di contatto non ve ne siano 6 su di una conica.* Il 1° criterio serve a trovare il numero delle rette π perchè essendo 315 il num. dei gruppi di serie di 1ª specie, quello delle rette π sarà $315 \,.\, 16 = 5040$ come è ben noto. Segue che una retta π proviene da 3 gruppi di Kummer e che per un punto r passano 40 rette π. Si vede anche facilmente che esistono 5040 quadrilateri di cui le diagonali sono rette π: ognuno d'essi fa parte di 3 esalateri completi t (N° 20) (1).

(1) Per tutte le proprietà richiamate e riassunte in questo numero veggasi ad. es. SALMON, *Curve piane*, pag. 324 e seg.

23. Le 240 rette π di un gruppo di Kummer passano, a tre, a tre, per un certo numero di punti che si dividono in due specie. Una di queste specie era già conosciuta (1). L'altra mi sembra nuova. Entrambe si deducono molto semplicemente dalla cfz. di Kummer. Basta per questo ricordare che i 240 piani II passano, a 3, a 3, per 1280 rette divise in due specie: le 320 rette S niuna delle quali contiene punti fondamentali e le 960 rette K le quali costituiscono le $60 . 16 = 960$ rette di Brianchon degli esaedri ordinati che si possono considerare formati attorno a ogni punto fondamentale dai 6 piani fondamentali che vi passano (C. N^i 12, 28). Tagliando col piano della quartica avremo che: « *Le 240 rette π di un gruppo di* Kummer *passano, a tre, a tre, per 1280 punti divisi in due specie: 320 sono quelli della specie già conosciuta: i rimanenti 960 costituiscono una nuova specie e sono precisamente i punti di* Brianchon *degli esalateri t* ». I primi li chiameremo i punti s, i secondi i punti k. In un gruppo di Kummer una retta π contiene 4 punti s e 12 punti k.

24. Per meglio studiare questi punti, ci gioveremo dei triangoli di bitangenti di cui i punti di contatto sono su di una conica; triangoli, che per brevità, indicheremo col simbolo τ. Per le considerazioni del N° 4, è evidente che ogni triedro di cui le facce sono piani fondamentali e il vertice è un punto P è tagliato dal piano della quartica secondo un triangolo τ. Si hanno dunque i due tipi simbolici possibili di triangoli τ: $12 . 34 . 56$, $23 . 31 . 14$. Servendoci di questitriangoli cominciamo dal caratterizzare simbolicamente i punti k. Sia perciò l'esalatero ordinato t (N° 20): $12 . 34 . 35 . 36 . 37 . 38$. Il suo punto di Brianchon è $(12 . 34 . 36 . 37)$, $(34 . 35 . 37 . 38)$, $(35 . 36 . 38 . 12)$: si hanno così 3 rette π di cui i simboli si completano molto facilmente, secondo il N° 22, rispettivamente con $45 . 48$, $45 . 78$, $48 . 78$. Per cui si hanno le 3 seguenti rette π concorrenti in un punto k: $(12 . 34,\ 36 . 37,\ 45 . 48)$, $(34 . 35,\ 37 . 38,\ 45 . 78)$, $(35 . 36,\ 38 . 12,\ 48 . 78)$. Ora $45 . 48 . 78$ è un triangolo τ, dunque abbiamo il teorema:

« *Sopra tre rette π concorrenti in un punto k si trovano, a uno, a uno, i tre vertici di un triangolo τ e, a due, a due, i 16 vertici di un esalatero ordinato t* ».

Ogni retta π è diagonale di tre quadrilateri di bitangenti, ognuno d'essi appartiene a 3 esalateri completi t (N° 22) e d'altra parte, in un medesimo esalatero completo t, esistono 4 esalateri ordinati aventi a comune una diagonale principale. Dunque: « *Ogni retta π contiene 36 punti*

(1) Veggasi p. es. la mia Nota: *Sopra le serie quadratiche di coniche inviluppanti la quartica piana.* Rendic. Istit. Lomb. 1895.

k e quindi il numero dei punti k è $\frac{5040 \,.\, 36}{3} = 60480$ ». Segue che due gruppi di Kummer non hanno a comune alcun punto k: altrettanto accade per due esalateri t: onde i punti k si possono rappresentare mediante i simboli stessi dei 60480 esalateri ordinati t.

25. Andiamo ai punti s. Consideriamo, per questo, il piano O della cfz. di Kummer contenente i punti fondamentali a, b, c, d, e, f. Tale piano appartiene a 15 tetraedri di 1ª specie (N° 4), e i 15 vertici opposti sono i 15 punti P ad esso coordinati (C. N° 8): essi giacciono, a tre, a tre, sopra 20 rette S per ciascuna delle quali passano tre piani II (C. N° 28, 51). Il simbolo di uno di questi 15 punti P è della specie: (ab, cd, ef) e tre di essi stanno su di una retta S quando (C. N° 28) i loro tre simboli hanno la forma:

$$\begin{vmatrix} ab, & cd, & ef, \\ cf, & eb, & ad, \\ ed, & af, & cb, \end{vmatrix},$$

dunque questo determinante simbolico può servire a rappresentare una delle 20 rette S suddette. Dai simboli già adottati al N° 12 per i piani II e da tutto il N° 28 C. segue, facilmente, che i tre piani II passanti per la retta S precedente sono: $(ab\,.\,cd,\ cf\,.\,eb,\ ed\,.\,af)$, $(ab\,.\,ef,\ cf\,.\,ad,\ ed\,.\,cb)$, $(cd\,.\,ef,\ eb\,.\,ad,\ af\,.\,cb)$ cioè si ottengono associando due colonne del precedente determinante simbolico. Esso dunque serve a rappresentare contemporaneamente i tre punti P e i tre piani II passanti per una medesima retta S. Allora prendendo (78) per tipo simbolico del nostro gruppo di Kummer (N° 16) il determinante in parola diviene il simbolo di un punto S. Questo è:

$$\begin{vmatrix} 12\,.\,34\,.\,56 \\ 36\,.\,25\,.\,14 \\ 45\,.\,16\,.\,28 \end{vmatrix}.$$

Ciascuna linea rappresenta un triangolo τ, associando le colonne, a due, a due si hanno le tre rette π per il punto s e cioè: 34 . 56, 25 . 14, 16 . 23), (12 . 34, 36 . 25, 45 . 16), (12 . 56, 36 . 14, 45 . 23). Dunque:

« *Sopra tre rette π concorrenti in un punto s si trovano, a tre, a tre, i nove vertici di tre triangoli τ così che essi sono prospettivi da quel punto e le rette π suddette contengono i vertici corrispondenti* ».

Se, nel determinante precedente, si scambiano le linee in colonne si ha il simbolo di un nuovo punto s che si dice coniugato del 1°. Cioè con le medesime 9 bitangenti è possibile costruire un'altra terna di triangoli τ prospettivi da un altro punto s. Nel capitolo IV studieremo, con maggiori dettagli, la figura composta con queste 9 bitangenti. Il punto s precedente non proviene soltanto dal gruppo di Kummer (78) ma, come si vede subito, anche dagli altri due (1357) e (1358). Dunque il numero dei punti s è $\frac{320 \,.\, 63}{3} = 6720$, onde sopra una retta π esistono 4 punti s.

26. I punti s giacciono, a 4, a 4, non solo sulle rette π, ma anche sopra certe altre rette σ che adesso è necessario esaminare. Ricordiamo perciò che (C. N° 32) le 16 rette S situate sulle facce di un tetraedro di 2ª specie giacciono, a 4, a 4, sopra 4 piani Σ: in ogni piano Σ le 4 rette S compongono un quadrilatero di cui i vertici sono 6 punti P. Sono questi piani Σ che generano, mediante le loro intersezioni col piano della quartica, le rette σ che cerchiamo. Nello spazio abbiamo già ricordato che 4 rette S giacenti in un piano Σ si tagliano a due, a due in un punto P: dunque nel piano della quartica potremo dire in forza dei N^{i} 24 e 25 che:

« *Quattro punti s stanno su di una retta σ quando i loro simboli hanno, a due, a due, a comune un triangolo τ* ».

Le rette σ di un gruppo di Kummer sono tante quanti i piani Σ di una cfz. di Kummer cioè 240. Si vede subito che una retta σ non proviene che da un gruppo di Kummer. Cioè le rette σ sono in tutto 15120.

27. Ogni esalatero t, essendo un esalatero di Brianchon, gli spettano tutte le numerose proprietà dell'esagrammo mistico. Ma qui non intendiamo certo di farne l'applicazione: mentre da un lato tale applicazione sarebbe ovvia, dall'altro lato sarebbe discutibile che ne conseguissero resultati importanti per la cfz. delle bitangenti. Ci serviremo soltanto di una delle proprietà suddette che ci sarà utile per mettere in relazione i punti k con i punti s. Tale proprietà è la seguente: « In un esalatero completo circoscritto a una conica i 60 punti di Brianchon sono allineati, a 3, a 3, sopra 20 rette. Per trovare tre di tali punti, basta scegliere un esalatero ordinato qualunque fra i 60 possibili e dedurne gli altri due che si ottengono permutando ciclicamente i lati di ordine pari e lasciando fermi quelli di ordine dispari ». Applichiamo tutto questo all'esalatero t: 15, 16, 17, 28, 38, 48 trovato già al N° 20. Esso contiene i tre esalateri ordinati: 15 . 28 . 16 . 38 . 17 . 48 , 15 . 48 . 16 . 28 . 17 . 38, 15 . 38 . 16 . 48 . 17 . 28 i quali si trovano nelle condizioni volute affinchè i loro punti di Brianchon si trovino in linea retta. D'altra parte ognuno di essi è un punto k (N° 23). Abbiamo dunque i tre punti k in linea retta:

$$k_1 \equiv \begin{cases} 15.28,\ 38.17,\ 35.27 \\ 28.16,\ 17.48,\ 27.46\,, \\ 16.38,\ 15.48,\ 35.46 \end{cases} \qquad k_2 \equiv \begin{cases} 15.48,\ 28.17,\ 25.74 \\ 48.16,\ 17.38,\ 74.36\,, \\ 16.28,\ 38.15,\ 25.36 \end{cases}$$

$$k_3 \equiv \begin{cases} 15.38,\ 48.17,\ 45.37 \\ 38.16,\ 17.28,\ 37.26\,. \\ 16.48,\ 28.15,\ 26.45 \end{cases}$$

Nella notazione di ognuno di questi punti k entra, oltre l'esalatero ordinato un triangolo τ (N° 24). Ora accade che i tre triangoli τ che così si trovano compongono, secondo il N° 25, il simbolo di un punto S e precisamente:

$$\begin{vmatrix} 35.27.46 \\ 74.36.25 \\ 26.45.37 \end{vmatrix}.$$

Ebbene dimostreremo adesso che la retta passante per k_1, k_2, k_3 contiene anche tale punto s. Si ricordi perciò che una retta K è retta di Brianchon per un esaedro ordinato di cui le facce sono piani fondamentali e vertice è un punto fondamentale: essa passa anche per un punto P (C. N° 12): si vede subito che l'esaedro suddetto e il triedro di vertice P sono tagliati nell'esalatero t e nel triangolo τ relativi (N° 24) punto k sezione della retta K suddetta. Applichiamo tutto questo alle rette K_1, K_2, K_3 che hanno prodotto i tre precedenti punti k_1, k_2, k_3 e ne risulterà immediatamente (N° 25) che i tre punti P su tali rette giacciono su di una retta S. Dunque questa e le K_1, K_2, K_3 giacciono in un medesimo piano (contrassegnato con C da Caporali (C. N° 39). La sezione di questo piano C col piano della quartica è la retta cercata. La chiameremo una retta c. Dunque:

« *I 960 punti k di un gruppo di* Kummer *stanno, a tre, a tre, sopra 320 rette e ognuna delle quali passa per un punto s. Un punto s e un punto k stanno su di una stessa retta c quando il triangolo τ, che entra nella notazione di k, entra pure nella notazione di s* ».

28. I 4 piani C per un punto P si tagliano secondo una stessa rètta I e, in ciascuno di questi piani, giace una delle 4 rette S che escono da P: si hanno così 240 rette I (C. N° 37).

Segue dunque: « *Le 320 rette c di un gruppo di* Kummer *passano, a*

4, a 4, per 240 punti i » (ciò discende anche dalla teoria dell'esagrammo mistico). Si può aggiungere:

« *Quattro rette c si tagliano in uno stesso punto i quando i 4 punti s che contengono hanno nei loro simboli un medesimo triangolo τ a comune* ». Una retta c proviene da un sol gruppo di Kummer, dunque le rette c sono $320 . 63 = 20160$: e i punti i: $240 . 63 = 15120$. Ogni retta c contiene 3 punti i ecc.

29. Riassumendo i risultati di questo capitolo abbiamo il seguente teorema:

I 378 punti d'incontro, a due, a due, delle 28 bitangenti stanno, a tre, a tre, sopra 5040 rette π passanti, a tre, a tre, per 6720 punti s e 60480 punti k. Ogni retta π contiene 4 punti s e 36 punti k. I 6720 punti s stanno a 4, a 4, sopra 15120 rette σ. I 60480 punti k stanno, a 3, a 3, sopra 20160 rette c che passano, a tre, a tre, per i 6720 punti s e, a 4, a 4, per 15120 punti i.

Con i punti e le rette introdotte mediante questo teorema comporremo le notevoli figure del capitolo seguente.

CAPITOLO IV.

Figure notevoli contenute in un gruppo di Kummer.

30. La prima figura di cui vogliamo occuparci è quella composta con le 9 bitangenti che costituiscono i tre triangoli τ prospettivi da un punto s e di cui parlammo già al N° 25. Chiameremo col simbolo Ω una tal figura. Di essa conosciamo già la proprietà seguente (cf. N° 25):

« *Con le 9 bitangenti che costituiscono i tre triangoli τ prospettivi da un punto s si possono formare altri tre triangoli τ prospettivi da un altro punto s.*

Tali due punti s si dicono *coniugati*. I simboli di due punti s coniugati, di cui già trovammo un tipo al N° 25 provano che:

« *Le tre rette π concorrenti in uno dei due punti s sono gli assi di prospettiva delle 3 coppie di triangoli τ il cui centro di prospettiva è il punto s coniugato* ».

31. Al N° 25 costruimmo già un tipo simbolico di punti s che è il seguente:

$$\left| \begin{matrix} 12 . 34 . 56 \\ 36 . 25 . 14 \\ 45 . 16 . 23 \end{matrix} \right| ,$$

cerchiamo adesso i rimanenti. Perciò basterà applicare, a uno qualunque dei piani $i\,k$, il processo applicato al piano O nel N° 25. Ad es. si prenda il piano $a\,b$ che contiene i punti

$$a,\ b,\ \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ d\,e\,f \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a\,b\,d \\ c\,f\,e \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a\,b\,e \\ d\,f\,c \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a\,b\,f \\ d\,c\,e \end{pmatrix}.$$

Esso ci fornisce i due tipi simbolici di rette S:

$$\begin{vmatrix} O & c\,d & e\,f \\ c\,f & b\,c & a\,f \\ d\,e & d\,a & b\,e \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a\,c & b\,d & c\,d \\ b\,e & d\,e & d\,a \\ c\,e & a\,e & b\,c \end{vmatrix}.$$

Come nel N° 25, così qui ogni linea rappresenta un punto P sulla S, associando le colonne si trovano i piani II per la S medesima. Approfittando dunque del solito riferimento del N° 16, si hanno i due nuovi tipi simbolici di punti s:

$$s_1 \equiv \begin{vmatrix} 78\,.\,34\,.\,56 \\ 36\,.\,32\,.\,61 \\ 45\,.\,41\,.\,25 \end{vmatrix},\quad s_2 \equiv \begin{vmatrix} 13\,.\,24\,.\,34 \\ 25\,.\,45\,.\,14 \\ 35\,.\,15\,.\,23 \end{vmatrix}.$$

A questi aggiungendo il tipo già conosciuto:

$$s_3 \equiv \begin{vmatrix} 12\,.\,34\,.\,56 \\ 36\,.\,25\,.\,14 \\ 45\,.\,16\,.\,23 \end{vmatrix},$$

si ottengono i tre tipi possibili domandati. Sui quali faremo le seguenti osservazioni:

Ogni linea del determimante-simbolo rappresenta uno dei triangoli τ prospettivi dal punto s: le rette π si oltengono associando le colonne. In ogni determinante, scambiando le linee con le colonne, si ottiene il simbolo del punto s coniugato.

I simboli precedenti possono anche descriversi così:

Il tipo s_3 si ottiene scegliendo un esagono ordinato in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Allora una linea del determinante è formata con i lati pari, una con i lati dispari la terza con le diagonali principali. Sono lati corrispondenti quelli che non hanno indici comuni. I lati corrispondenti si scrivono in colonna. Il num. di questi tipi è $\frac{8\,.\,7}{2}\,.\,\frac{60}{3} = 560$.

Il tipo s_1 può ottenersi da s_3 così: si pone 78 (il lato dell'ottagono escluso) al posto di un termine qualunque di s_3 (p. es. al posto di 12) e, nel minore complementare, si scambiano i termini in diagonale: i 4 termini rimanenti si lasciano fissi. Ogni tipo s_3 origina 9 tipi s_1: dunque il num. di questi ultimi è $560 \,.\, 9 = 5040$.

Finalmente per costruire il tipo s_2 si ricorre a un pentagono completo in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e di questo pentagono si esclude un lato. Con i 9 lati rimanenti si possono formare due terne di triangoli τ prospettivi da due punti s coniugati.

Il num. di questi ultimi è dunque $\frac{8 \,.\, 7 \,.\, 6}{2 \,.\, 3} \,.\, 10 \,.\, 2 = 1120$.

Per cui il num. totale dei punti s è $560 + 5040 + 1120 = 6720$ come già sapevamo (N⁰ 25).

«*Quindi il num. delle fig. Ω è* $\frac{6720}{2} = 3360$».

32. Sono facili conseguenze dei num. precedenti queste osservazioni: *In un gruppo di* Kummer, *prese le 9 bitangenti di una fig. Ω, esiste una sola bitangente capace di formare, con i 6 triangoli τ della figura, sei quaderne di bitangenti aventi i loro punti di contatto su di una conica. La chiameremo la bitangente coordinata alla fig. Ω. Le 9 bitangenti di una fig. Ω e la bitangente x coordinata alla figura sono in tal relazione che aggiungendo x alla figura e togliendone una qualunque delle altre, la figura che risulta è ancora una figura Ω.*

Le 10 bitangenti che rimangnno escluse da un gruppo di serie di 2ª specie, o quelle che avanzano da un gruppo di Kummer *quando si tolgono le 6 bitangenti di un esalatero t, costituiscono in 10 modi diversi una fig. Ω con la bitangente coordinata.*

E quindi anche:

«*Escludendo, dai 16 piani fondamentali di una cfz. di* Kummer, *6 che passino per uno stesso punto, si ottiene una figura che è tagliata da un piano generico secondo una fig. Ω con la propria bitangente coordinata*».

33. Ora la figura stereometrica che risulta con la esclusione suddetta si compone (C. N⁰ 53) di 45 rette R che giacciono, a tre, a tre, in 15 piani Π i quali a lor volta passano, a tre, a tre, per 20 rette S che concorrono a 4, a 4, in 15 punti Θ. Si formano, con questi elementi, 6 pentaedri ciascuno dei quali ha per facce piani Π, per spigoli rette S e per vertici punti Θ. E finalmente nasce da questi pentaedri un esaedro che è, per così dire, il nucleo di tutta la figura. Tagliando col piano della quartica troveremo la figura considerata nell'ultimo num. e che chiameremo col nome di «*figura relativa a un esalatero t*» appunto perchè può ottenersi escludendo da un gruppo di Kummer le 6 bitangenti di un esalatero t. Essa si

compone di 45 punti r che stanno, a tre, a tre, su 15 rette π le quali passano, a tre, a tre, per 20 punti s. In forza delle precedenti considerazioni stereometriche potremo dire che:

« *Le 15 rette π e i 20 punti s, individuati dalla figura relativa a un esalatero t, sono i lati e i vertici di 6 pentalateri completi* ».

34. Il num. 31 prova che le 10 bitangenti della figura che stiamo studiando saranno rappresentate simbolicamente, o dai lati di un pentagono completo in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, oppure dei lati e dalle diagonali principali di un esagono ordinato cui si aggiunga il lato escluso dall'ottagono. Onde il num. di tali figure è $\frac{8 \,.\, 7 \,.\, 6}{2 \,.\, 3} + \frac{1}{2}\left(\frac{8 \,.\, 7}{2} \,.\, \frac{60}{3}\right) = 336$ cioè tante quanti sono i gruppi di 2ª specie, come è ben naturale, in forza di un osservazione del N° 32. Per trovare le 10 fig. Ω basta escludere un lato del pentagono nel 1° caso; ovvero, nel 2°, basta costruire il tipo s_3 servendosi dell'esagono ordinato e poi dedurre i 9 tipi possibili s_1 secondo il N° 31 stesso.

Serviamoci ad es. del pentagono completo 12345 per dedurre tutti gli elementi dei pentalateri considerati nel N° precedente. Volendo adottare una scrittura abbastanza concisa adotteremo queste convenzioni. La lettera π posta di fianco a una linea, o sopra una colonna, di un determinante simbolico indicherà che essa proviene dall'associare le altre due linee, o le altre due colonne. Ponendo le due lettere s, s' di fronte a un determinante simbolico intenderemo che i triangoli τ di s siano rappresentati dalle linee e quelli di s' dalle colonne.

Ciò posto ecco il quadro delle 10 fig. Ω e relativi elementi:

$$\begin{array}{c|ccc|} & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \hline \pi_7 & 13 & 24 & 34 \\ \pi_6 & 25 & 45 & 14 \\ \pi_5 & 35 & 15 & 23 \end{array} \equiv (s_{12}, s'_{12}) \equiv \Omega_{12}; \quad \begin{array}{c|ccc|} & \pi_8 & \pi_1 & \pi_{10} \\ \hline \pi_7 & 34 & 21 & 24 \\ \pi_{12} & 15 & 25 & 23 \\ \pi_{11} & 45 & 35 & 14 \end{array} \equiv (s_{13}, s'_{13}) \equiv \Omega_{13};$$

$$\begin{array}{c|ccc|} & \pi_{14} & \pi_6 & \pi_{10} \\ \hline \pi_3 & 34 & 21 & 23 \\ \pi_{15} & 15 & 25 & 24 \\ \pi_{11} & 35 & 45 & 13 \end{array} \equiv (s_{14}, s'_{14}) \equiv \Omega_{14}; \quad \begin{array}{c|ccc|} & \pi_{15} & \pi_8 & \pi_5 \\ \hline \pi_{12} & 25 & 31 & 23 \\ \pi_{14} & 14 & 34 & 35 \\ \pi_2 & 24 & 45 & 12 \end{array} \equiv (s_{15}, s'_{15}) \equiv \Omega_{15};$$

$$\begin{array}{c|ccc|} & \pi_9 & \pi_5 & \pi_{10} \\ \hline \pi_3 & 34 & 12 & 14 \\ \pi_{12} & 25 & 15 & 13 \\ \pi_{13} & 45 & 35 & 24 \end{array} \equiv (s_{23}, s'_{23}) \equiv \Omega_{23}; \quad \begin{array}{c|ccc|} & \pi_4 & \pi_2 & \pi_{10} \\ \hline \pi_7 & 34 & 12 & 13 \\ \pi_{15} & 25 & 15 & 14 \\ \pi_{13} & 35 & 45 & 23 \end{array} \equiv (s_{24}, s'_{24}) \equiv \Omega_{24};$$

$$\begin{array}{c|ccc|} & \pi_9 & \pi_1 & \pi_5 \\ \hline \pi_6 & 45 & 12 & 14 \\ \pi_{12} & 23 & 13 & 15 \\ \pi_4 & 34 & 35 & 24 \end{array} \equiv (s_{25}, s'_{25}) \equiv \Omega_{25}; \quad \begin{array}{c|ccc|} & \pi_9 & \pi_7 & \pi_{14} \\ \hline \pi_8 & 45 & 13 & 15 \\ \pi_3 & 23 & 12 & 14 \\ \pi_4 & 25 & 24 & 35 \end{array} \equiv (s_{34}, s'_{34}) \equiv \Omega_{34};$$

$$\begin{array}{c|ccc|} & \pi_4 & \pi_{11} & \pi_5 \\ \hline \pi_1 & 25 & 13 & 12 \\ \pi_{14} & 34 & 14 & 15 \\ \pi_{13} & 24 & 45 & 23 \end{array} \equiv (s_{35}, s'_{35}) \equiv \Omega_{35}; \quad \begin{array}{c|ccc|} & \pi_9 & \pi_{12} & \pi_{11} \\ \hline \pi_8 & 34 & 15 & 13 \\ \pi_6 & 25 & 12 & 14 \\ \pi_{13} & 23 & 24 & 35 \end{array} \equiv (s_{45}, s'_{45}) \equiv \Omega_{45}.$$

I pentalateri richiesti sono i seguenti:

lati						vertici									
π_1	π_3	π_8	π_{15}	π_{13}	. . . . .	s_{12}	s_{25}	s_{13}	s'_{35}	s'_{14}	s'_{34}	s'_{23}	s_{15}	s'_{24}	s'_{45}
π_1	π_2	π_{10}	π_9	π_{14}	. . . . .	s_{12}	s_{13}	s_{25}	s'_{35}	s_{24}	s_{45}	s'_{15}	s_{23}	s_{14}	s_{34}
π_2	π_3	π_4	π_{11}	π_{12}	. . . . .	s_{12}	s_{24}	s_{45}	s'_{15}	s'_{14}	s'_{23}	s'_{34}	s'_{25}	s_{35}	s'_{13}
π_8	π_{10}	π_5	π_4	π_6	. . . . .	s_{13}	s_{15}	s'_{34}	s'_{45}	s_{24}	s_{23}	s_{14}	s'_{12}	s_{35}	s'_{25}
π_5	π_9	π_{15}	π_7	π_{11}	. . . . .	s_{15}	s_{23}	s'_{12}	s_{35}	s_{25}	s_{45}	s_{34}	s'_{24}	s'_{14}	s'_{13}
π_7	π_{14}	π_6	π_{12}	π_{13}	. . . . .	s'_{12}	s_{34}	s'_{13}	s'_{24}	s_{14}	s'_{35}	s'_{15}	s'_{45}	s'_{25}	s'_{23}.

35. La notevole figura stereometrica, già descritta al N° 33, ammette come ivi ricordammo, un esaedro che ne è il nucleo. È necessario ricordare qui come nasce un tale esaedro (C. N° 53).

Perciò si consideri in un piano Π i seguenti 3 quadrilateri desmici: quello delle rette S, quello delle rette di Pascal e finalmente quello formato dalle tre rette R e dalla retta J che contiene i 4 punti di STEINER giacenti in Π (C. N° 36).

Ogni piano Π contiene una tale retta J: le sei rette J, situate sulle facce di uno stesso pentaedro (N° 33), stanno in un piano: così ciascuno di tali pentaedri individua un piano e si hanno 6 piani componenti l'esaedro cercato. Esso ha per vertici punti di Steiner e per spigoli rette J.

La sezione di un tale esaedro col piano della quartica dà un esalatero che, per così dire, regge tutta la figura composta con le 10 bitangenti studiate nel num. precedente. Per determinare un tale esalatero basta costruire, senza uscire dal piano, il punto j (sezione della retta J) su ciascuna retta π. Per questo, si osservi che i tre quadrilateri desmici di dianzi tagliano sulla π tre gruppi di involuzione del 4.° ordine. Essa sarà nota quando siano conosciuti due gruppi. P. es. quello tagliato dalle rette S e quello segnato dalle 4 rette di Pascal. Allora il 4° punto del gruppo

cui appartengono i tre punti r su π, sarà il punto richiesto. Il quadrilatero delle rette S taglia π nei suoi 4 punti s. Rimangono da trovare le intersezioni di π con le 4 rette di Pascal. Ricordando che una tal retta proviene dalla intersezione di un piano Π con un piano fondamentale non passante per alcuno dei 3 punti fondamentali contenuti in Π (C. N^{i} 11, 14), si vede subito che, nel nostro caso, i 4 punti cercati, sono quelli nei quali la retta π è tagliata dalle 4 bitangenti che sono capaci di completare un triangolo τ con ciascuna delle 3 coppie di bitangenti individuanti π. Ecco costruito il punto j richiesto. Dunque

I 15 punti j, situati sulle 15 rette π della figura sono, i vertici di un esalatero completo che può riguardarsi come il nucleo della figura medesima.

36. Le considerazioni duali di quelle riassunte nel N° 33 conducono alla esistenza della figura composta con gli elementi coordinati a un piano fondamentale. Essa è descritta in C. N^{i} 51, 52. Noi ne studieremo qui la sezione piana chiamandola «*figura relativa a una bitangente in un determinato gruppo di* Kummer». Nello spazio un piano fondamentale appartiene a 15 tetraedri di 1.ª specie di cui i vertici opposti sono 15 punti P situati, a 3, a 3, su 20 rette S e, a 6, a 6, sopra 15 piani Σ. Nel piano della quartica dato il gruppo di Kummer (78) e fissata la bitangente 78, esisteranno 15 triangoli τ capaci di completare con 78 una quaderna di bitangenti i cui punti di contatto appartengono a una conica. Essi sono:

12 . 34 . 56	13 . 24 . 56	15 . 26 . 43
12 . 35 . 46	14 . 25 . 36	15 . 24 . 36
12 . 36 . 45	14 . 23 . 56	16 . 24 . 35
13 . 25 . 46	14 . 26 . 35	16 . 23 . 45
13 . 26 . 45	15 . 23 . 46	16 . 25 . 43 .

Questi triangoli τ dànno luogo ai seguenti punti s:

$$\left|\begin{array}{l} 12 \,.\, 34 \,.\, 56 \\ 46 \,.\, 25 \,.\, 13 \\ 35 \,.\, 16 \,.\, 24 \end{array}\right| \equiv (s_1 , s_2) , \qquad \left|\begin{array}{l} 12 \,.\, 35 \,.\, 46 \\ 36 \,.\, 24 \,.\, 15 \\ 45 \,.\, 16 \,.\, 23 \end{array}\right| \equiv (s_3 , s_4) ,$$

$$\left|\begin{array}{l} 14 \,.\, 25 \,.\, 36 \\ 26 \,.\, 34 \,.\, 15 \\ 35 \,.\, 16 \,.\, 24 \end{array}\right| \equiv (s_5 , s_6) , \qquad \left|\begin{array}{l} 12 \,,\, 34 \,,\, 56 \\ 36 \,,\, 25 \,,\, 14 \\ 45 \,,\, 16 \,,\, 23 \end{array}\right| \equiv (s_7 , s_8) ,$$

$$\left|\begin{array}{c} 12\,.\,34\,.\,56 \\ 36\,.\,15\,.\,24 \\ 45\,.\,26\,.\,31 \end{array}\right| \equiv (s_9\,,\,s_{10}), \qquad \left|\begin{array}{c} 12\,,\,34\,,\,56 \\ 35\,,\,26\,,\,14 \\ 46\,,\,15\,,\,23 \end{array}\right| \equiv (s_{11}\,,\,s_{12}),$$

$$\left|\begin{array}{c} 14\,.\,26\,.\,35 \\ 56\,.\,13\,.\,24 \\ 23\,.\,54\,.\,16 \end{array}\right| \equiv (s_{13}\,,\,s_{14}), \qquad \left|\begin{array}{c} 13\,.\,25\,.\,46 \\ 26\,.\,34\,.\,15 \\ 45\,.\,16\,.\,23 \end{array}\right| \equiv (s_{15}\,,\,s_{16}),$$

$$\left|\begin{array}{c} 13\,.\,25\,.\,46 \\ 24\,.\,36\,.\,15 \\ 56\,.\,14\,.\,23 \end{array}\right| \equiv (s_{17}\,,\,s_{18}), \qquad \left|\begin{array}{c} 13\,.\,25\,.\,46 \\ 45\,.\,36\,.\,12 \\ 26\,.\,14\,.\,35 \end{array}\right| \equiv (s_{19}\,,\,s_{20}).$$

Ricordando che 4 punti s stanno su di una retta σ, quando hanno a comune a due, a due un triangolo τ (N° 26) si vede subito che il quadro delle rette σ è questo:

$$\begin{array}{llll}
s_1\ s_7\ s_5\ s_{15}\ \ldots\ \sigma_1\,, & s_9\ s_{11}\ s_{16}\ s_6\ \ldots\ \sigma_6\,, & s_{12}\ s_{20}\ s_{14}\ s_5\ \ldots\ \sigma_{11}\,, \\
s_1\ s_9\ s_{17}\ s_{14}\ \ldots\ \sigma_2\,, & s_2\ s_3\ s_{13}\ s_6\ \ldots\ \sigma_7\,, & s_4\ s_8\ s_{14}\ s_6\ \ldots\ \sigma_{12}\,; \\
s_1\ s_{11}\ s_{19}\ s_4\ \ldots\ \sigma_3\,, & s_2\ s_{12}\ s_8\ s_{10}\ \ldots\ \sigma_8\,, & s_4\ s_{10}\ s_5\ s_{18}\ \ldots\ \sigma_{13}\,, \\
s_7\ s_9\ s_{20}\ s_3\ \ldots\ \sigma_4\,, & s_2\ s_{20}\ s_{16}\ s_{18}\ \ldots\ \sigma_9\,, & s_8\ s_{19}\ s_6\ s_{17}\ \ldots\ \sigma_{14}\,, \\
s_7\ s_{11}\ s_{13}\ s_{18}\ \ldots\ \sigma_5\,, & s_3\ s_{12}\ s_{15}\ s_{17}\ \ldots\ \sigma_{10}\,, & s_{10}\ s_{19}\ s_{13}\ s_{15}\ \ldots\ \sigma_{15}\,.
\end{array}$$

Nello spazio i 15 punti P, coordinati a un piano fondamentale, sono i vertici di 6 pentagoni gobbi che hanno per spigoli rette S e per facce piani Σ. I 20 piani C, coordinati allo stesso piano passano, a 4, a 4, per 15 rette I: le cinque rette I uscenti dai vertici di un medesimo pentagono gobbo (dei precedenti) concorrono in uno stesso punto. Si hanno così 6 punti che formano un esagono di cui le facce sono piani C e gli spigoli rette I: è l'esagono nucleo della figura (C. N^i 51, 52). Tagliando col piano della quartica troviamo che: *Con i 20 punti s e le 15 rette σ precedenti si possono formare 6 figure ciascuna delle quali è sezione di un pentagono gobbo.*

Ecco queste figure:

$$\begin{array}{l}
s_1\ s_7\ s_5\ s_9\ s_{11}\ s_4\ s_{14}\ s_{16}\ s_{18}\ s_{20}\ \ldots\ \sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3\ \sigma_4\ \sigma_{11}\ \sigma_6\ \sigma_{12}\ \sigma_5\ \sigma_{13}\ \sigma_9 \\
s_2\ s_3\ s_6\ s_{12}\ s_8\ s_{20}\ s_{16}\ s_{14}\ s_9\ s_{17}\ \ldots\ \sigma_7\ \sigma_8\ \sigma_9\ \sigma_{10}\ \sigma_{11}\ \sigma_{16}\ \sigma_{11}\ \sigma_{12}\ \sigma_4\ \sigma_2 \\
s_3\ s_2\ s_{13}\ s_{12}\ s_{15}\ s_{20}\ s_7\ s_{10}\ s_{18}\ s_5\ \ldots\ \sigma_7\ \sigma_{10}\ \sigma_4\ \sigma_8\ \sigma_{15}\ \sigma_9\ \sigma_5\ \sigma_{11}\ \sigma_1\ \sigma_{13} \\
s_4\ s_{19}\ s_{11}\ s_8\ s_{16}\ s_{10}\ s_{18}\ s_2\ s_{13}\ s_6\ \ldots\ \sigma_3\ \sigma_{12}\ \sigma_{13}\ \sigma_{14}\ \sigma_6\ \sigma_9\ \sigma_8\ \sigma_{15}\ \sigma_5\ \sigma_7 \\
s_{19}\ s_{13}\ s_{15}\ s_6\ s_{17}\ s_{11}\ s_1\ s_9\ s_7\ s_3\ \ldots\ \sigma_{15}\ \sigma_{14}\ \sigma_3\ \sigma_{10}\ \sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_7\ \sigma_6\ \sigma_5\ \sigma_4 \\
s_{19}\ s_{17}\ s_8\ s_{15}\ s_{10}\ s_1\ s_4\ s_5\ s_{14}\ s_{12}\ \ldots\ \sigma_{14}\ \sigma_{15}\ \sigma_3\ \sigma_{10}\ \sigma_2\ \sigma_8\ \sigma_{12}\ \sigma_1\ \sigma_{13}\ \sigma_{11}.
\end{array}$$

Finalmente, ricordando che 4 rette c concorrono in un punto i, quando i 4 punti s che contengono hanno nei loro simboli un medesimo triangolo τ (N° 28), si ha (indicando con c_{sk} le retta c che contiene s_k) il quadro seguente delle quaderne di rette c concorrenti in un punto i:

$$
\begin{array}{llll}
c_{s1}\ c_{s7}\ c_{s9}\ c_{s11} \ldots i_1, & c_{s6}\ c_{s11}\ c_{s13}\ c_{s19} \ldots i_8 \\
c_{s2}\ c_{s3}\ c_{s12}\ c_{s20} \ldots i_2, & c_{s8}\ c_{s12}\ c_{s14}\ c_{s17} \ldots i_9 \\
c_{s4}\ c_{s8}\ c_{s10}\ c_{s19} \ldots i_3, & c_{s4}\ c_{s11}\ c_{s16}\ c_{s18} \ldots i_{10} \\
c_{s1}\ c_{s5}\ c_{s17}\ c_{s19} \ldots i_4, & c_{s5}\ c_{s10}\ c_{s12}\ c_{s15} \ldots i_{11} \\
c_{s9}\ c_{s14}\ c_{s16}\ c_{s20} \ldots i_5, & c_{s3}\ c_{s6}\ c_{s9}\ c_{s17} \ldots i_{12} \\
c_{s2}\ c_{s10}\ c_{s13}\ c_{s18} \ldots i_6, & c_{s1}\ c_{s4}\ c_{s5}\ c_{s14} \ldots i_{13} \\
c_{s5}\ c_{s7}\ c_{s18}\ c_{s20} \ldots i_7, & c_{s3}\ c_{s}\ c_{s13}\ c_{s15} \ldots i_{14} \\
 & c_{s2}\ c_{s6}\ c_{s8}\ c_{s16} \ldots i_{15}.
\end{array}
$$

E si conclude che:

« *Le 20 rette c e i 15 punti i precedenti compongono una figura che è sezione di un esagono gobbo completo* ». In un gruppo di Kummer esistono 16 di queste figure.

37. Finalmente i risultati di N° 7 e 12 conducono a un'ultima figura che è descritta nel teorema seguente:

« *Le 240 rette π di un gruppo di* Kummer *si distribuiscono in 15 gruppi di 16 ognuno, ciascuno dei quali si può pensare, a sua volta, come l'insieme di 16 bitangenti di una nuova quartica costituenti un suo gruppo di* Kummer ».

Cioè per ogni gruppo di Kummer *esistono altre 15 quartiche aventi ciascuna per 16 bitangenti 16 delle rette π suddette. Queste quartiche e la primitiva hanno a comune la figura composta con i 6 poli del piano sezione e relativi punti M, rette m ecc.*

Per caratterizzare simbolicamente un tal gruppo di rette π basterà applicare al risultato del N° 12, uno dei riferimenti del N° 16.

Se si tratta del gruppo di Kummer (78) uno dei gruppi cercati di rette π è il seguente:

$$
\left|\begin{array}{l}
12\,.\,78,\ 13\,.\,14,\ 25\,.\,26 \\
12\,.\,78,\ 23\,.\,24,\ 15\,.\,16 \\
34\,.\,56,\ 25\,.\,26,\ 23\,.\,24 \\
34\,.\,56,\ 15\,.\,16,\ 13\,.\,14
\end{array}\right|,
\qquad
\left|\begin{array}{l}
34\,.\,78,\ 31\,.\,32,\ 45\,.\,46 \\
34\,.\,78,\ 35\,.\,36,\ 41\,.\,42 \\
12\,.\,56,\ 31\,.\,32,\ 35\,.\,36 \\
12\,.\,56,\ 45\,.\,46,\ 41\,.\,42
\end{array}\right|,
$$

$$\left|\begin{array}{l} 56 \,.\, 78,\ 51 \,.\, 52,\ 64 \,.\, 63 \\ 56 \,.\, 78,\ 53 \,.\, 54,\ 61 \,.\, 62 \\ 12 \,.\, 34,\ 53 \,.\, 54,\ 51 \,.\, 52 \\ 12 \,.\, 34,\ 61 \,.\, 62,\ 64 \,.\, 63 \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{l} 36 \,.\, 45,\ 15 \,.\, 26,\ 13 \,.\, 24 \\ 16 \,.\, 25,\ 46 \,.\, 35,\ 13 \,.\, 24 \\ 14 \,.\, 23,\ 35 \,.\, 46,\ 15 \,.\, 26 \\ 14 \,.\, 23,\ 16 \,.\, 25,\ 36 \,.\, 45 \end{array}\right| .$$

Esse sono scritte qui, a 4, a 4, come provengono dalla sezione di 4 tetraedri di 2ª specie. Però si può indicare un modo più semplice per ottenerle che è il seguente. Si dividano le 6 coppie della serie (78) in tre gruppi di due come p. es.: (17 . 18, 27 . 28), (37 . 38, 47 . 48), (57 . 58, 67 . 68) e si scrivano le tre coppie di serie congiunte di 2ª specie secondo tali gruppi.

Cioè:

$$\left\{\begin{array}{l} 17 \,.\, 28,\ 18 \,.\, 27,\ 12 \,.\, 78,\ 36 \,.\, 45,\ 35 \,.\, 46,\ 34 \,.\, 56 \\ 17 \,.\, 27,\ 18 \,.\, 28,\ 13 \,.\, 23,\ 14 \,.\, 24,\ 15 \,.\, 25,\ 16 \,.\, 26 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 37 \,.\, 47,\ 38 \,.\, 48,\ 31 \,.\, 41,\ 32 \,.\, 42,\ 35 \,.\, 45,\ 36 \,.\, 46 \\ 37 \,.\, 48,\ 38 \,.\, 47,\ 34 \,.\, 78,\ 12 \,.\, 56,\ 16 \,.\, 25,\ 15 \,.\, 26 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 75 \,.\, 86,\ 76 \,.\, 85,\ 78 \,.\, 56,\ 12 \,.\, 34,\ 13 \,.\, 24,\ 14 \,.\, 23 \\ 75 \,.\, 76,\ 85 \,.\, 86,\ 15 \,.\, 16,\ 25 \,.\, 26,\ 35 \,.\, 36,\ 45 \,.\, 46. \end{array}\right.$$

Si hanno così 3 gruppi di due serie ciascuno. *Allora, per trovare le 16 rette π richieste si esvludano le coppie di congiunzione con la serie data e si scelga un punto r in ciascun gruppo in guisa da formare 3 punti r di una stessa retta π (N° 22) in tutti i modi possibili.* Così ogni serie ci dà 15 di tali aggruppamenti e in tutto se ne ha; $63 \,.\, 15 = 945$.

CAPITOLO V.

Le coniche dei sedici punti.

38. In questo capitolo ci proponiamo di applicare i risultati del N° 6 relativi alle quartiche che passano per 8 rette R e per due coppie di assi fondamentali considerandone le sezioni col piano della quartica. Ricorderemo perciò che al N° 6 trovammo già, fra le quadriche suddette, una che conteneva le 8 rette R:

$$O \,.\, ab,\quad ac \,.\, bc,\quad ad \,.\, bd,\quad cd \,.\, ef,$$

$$O \,.\, cd,\quad ac \,.\, ad,\quad bc \,.\, bd,\quad ab \,.\, ef,$$

di cui le prime 4 si appoggiano agli assi AB, BA e le seconde 4 agli assi CD, DC. Tagliamo ora col piano della quartica e supponendo che si tratti del 1° riferimento del N° 16, adottiamo per gruppo di Kummer il tipo (78). Otterremo allora gli 8 punti r:

$$12 \,.\, 78,\ 13 \,.\, 23,\ 14 \,.\, 24,\ 34 \,.\, 56$$
$$34 \,.\, 78,\ 13 \,.\, 14,\ 23 \,.\, 24,\ 12 \,.\, 56$$

giacenti su di una conica la quale conterrà anche i punti d'intersezione, col piano della quartica, degli assi sopra ricordati. Per trovarli si ricordi che esistono le due quaterne coniugate di rette R (N° 5):

$$\left.\begin{matrix} O.ab, & cd.ef, & cf.de, & ce.df \\ ac.bc, & ad.bd, & ae.be, & af.bf \end{matrix}\right\} \text{appoggiate ad } AB, BA,$$

e le altre due:

$$\left.\begin{matrix} O.cd, & ab.ef, & af.be, & ae.bf \\ ca.da, & cb.db, & ce.de, & cf.df \end{matrix}\right\} \text{appoggiate a } CD,\ DC.$$

Le sezioni di queste quaterne producono le seguenti coppie di serie (N° 15):

$$\left\{\begin{matrix} 12 \,.\, 78,\ 34 \,.\, 56,\ 36 \,.\, 45,\ 35 \,.\, 46 \\ 13 \,.\, 23,\ 14 \,.\, 24,\ 15 \,.\, 25,\ 16 \,.\, 26 \end{matrix}\right.$$
$$\left\{\begin{matrix} 34 \,.\, 78,\ 12 \,.\, 56,\ 16 \,.\, 25,\ 15 \,.\, 26 \\ 13 \,.\, 14,\ 23 \,.\, 24,\ 35 \,.\, 45,\ 36 \,.\, 46. \end{matrix}\right.$$

Quindi i punti cercati saranno (N° 17) le due coppie di punti M situati sopra, rispettivamente: (17 . 18, 27 . 28), (37 . 38, 47 . 48).

Ciò posto la conica in parola può caratterizzarsi così: si prenda la serie:

$$12 \,.\, 34,\ 56 \,.\, 78,\ 13 \,.\, 24,\ 14 \,.\, 23,\ 57 \,.\, 68,\ 58 \,.\, 67, \qquad \text{(I)}$$

e si scelgano due coppie delle serie come 12 . 34, 56 , 78 e le altre due: 13 . 24, 14 . 23; poi si considerino i quadrilateri 12, 34, 56, 78; 13, 24, 14, 23 e dai loro 12 vertici si escludano i 4 punti r della serie: *i vertici rimanenti appartengono alla conica cercata* (la cui esistenza risulta anche osservando che essa deve appartenere ai due fasci di coniche (12 . 34, 56 . 78), (13 . 24, 14 . 23) perchè essi sono contenuti nella rete individuata dalla serie). Per caratterizzare poi i punti M che tale conica con-

tiene si considerino le due coppie avanzate nella (I) cioè le 57 . 68, 58 . 67 e si osservi che esiste la serie:

$$17 \,.\, 18,\ 27 \,.\, 28,\ 37 \,.\, 38,\ 47 \,.\, 48,\ 57 \,.\, 58,\ 67 \,.\, 68, \qquad \text{(II)}$$

congiunta di 1ª specie con la (I) secondo le coppie suddette. Togliendo le coppie di congiunzione, rimangono le prime quattro che aggruppate così:

$$(17 \,.\, 18,\ 27 \,.\, 28),\ (37 \,.\, 38,\ 47 \,.\, 48),$$

dànno i simboli delle due coppie M cercate.

Ma si può osservare che in uguali condizioni della (II) rispetto alla (I) si trova la serie:

$$15 \,.\, 16,\ 25 \,.\, 26,\ 35 \,.\, 36,\ 45 \,.\, 46,\ 75 \,.\, 76,\ 85 \,.\, 86, \qquad \text{(III)}$$

chè anch'essa è congiunta alla (I) mediante 57 . 68, 58 . 67. E' dunque il caso di domandarsi se la conica in questione passa anche per i punti M i cui simboli sono: (1)

$$(15 \,.\, 16,\ 25 \,.\, 26),\ (35 \,.\, 36,\ 45 \,.\, 46).$$

La risposta è affermativa. Infatti, si consideri il gruppo di Kummer (56) e lo si siferisca a una cfz. di Kummer, che sarà diversa da quella di prima, mediante il passaggio (N° 16) $\left\{ \begin{matrix} 56 & 1\ 2\ 3\ 4\ 7\ 8 \\ O', & a'\ b'\ c'\ d'\ e'\ f' \end{matrix} \right\}$. Ripetendo allora tutto il processo di dianzi, si vede che la quartica delle 8 rette R:

$$\begin{matrix} O' \,.\, a'b', & a'c' \,.\, b'c', & a'd' \,.\, b'd', & c'd' \,.\, e'f', \\ O' \,.\, c'd', & a'c' \,.\, a'd', & b'c' \,.\, b'd', & a'b' \,.\, e'f', \end{matrix}$$

è tagliata, dal piano della quartica, nella conica che contiene i punti r:

$$56 \,.\, 12,\ 13 \,.\, 23,\ 14 \,.\, 24,\ 34 \,.\, 78,$$

$$56 \,.\, 34,\ 13 \,.\, 14,\ 23 \,.\, 24,\ 12 \,.\, 78,$$

che sono ancora quelli di prima: dunque intanto la conica trovata è la medesima. Però quando si vànno a cercare i punti M su di essa non si trovano più quelli di dianzi.

---

(1) Rappresentando una coppia M col simbolo (15 . 16, 25 . 26) intendiano che sia quella giacente sulla retta che unisce i due punti r; 15 . 16, 25 . 26.

Infatti le quaterne R coniugate:

$$\left.\begin{array}{l} O\,.\,a'b',\ c'd'\,.\,e'f',\ c'f'\,.\,d'e',\ c'e'\,.\,d'f' \\ a'c'\,.\,b'c',\ a'd'\,.\,b'd',\ a'e'\,.\,b'e',\ a'f'\,.\,b'f' \end{array}\right\}\ \text{appoggiate ad } A'B',\ B'A',$$

e le altre due:

$$\left.\begin{array}{l} O'\,.\,c'd',\ a'b'\,.\,e'f',\ a'e'\,.\,b'f',\ a'f'\,.\,b'e' \\ c'a'\,.\,d'a',\ c'b'\,.\,d'b',\ c'e'\,.\,d'e',\ c'f'\,.\,d'f' \end{array}\right\}\ \text{appoggiate a } C'D',\ D'C',$$

tagliate, col piano della quartica, dànno adesso le due coppie di serie:

$$\left\{\begin{array}{l} 56\,.\,12,\ 34\,.\,78,\ 38\,.\,47,\ 37\,.\,48 \\ 13\,.\,23,\ 14\,.\,24,\ 17\,.\,27,\ 18\,.\,38 \end{array}\right.,\quad \left\{\begin{array}{l} 56\,.\,34,\ 12\,.\,78,\ 17\,.\,28,\ 18\,.\,27 \\ 31\,.\,41,\ 32\,.\,42,\ 37\,.\,47,\ 38\,.\,48 \end{array}\right.,$$

e quindi le sezioni di $A'B'$, $B'A'$, $C'D'$, $D'C'$ sono rispettivamente le coppie M:

(15 . 16, 25 . 26), (35 . 36, 45 . 46), c. d. d.

Dunque, data la serie:

12 . 34, 56 . 78, 13 . 24, 14 . 23, 57 . 68, 58 . 67 . . . (I)

e scelto il paio di coppie: (12 . 34, 56 . 78), (13 . 24, 14 . 23) abbiamo trovato una conica che contiene gli 8 punti r:

12 . 56, 12 . 78, 34 . 56, 34 . 78, 13 . 14, 13 . 23, 24 . 14, 24 . 23,

e gli 8 punti M divisi nelle 4 coppie:

(17 . 18, 27 . 28), (37 . 38, 47 . 48), (15 . 16, 25 . 26), (35 . 36, 45 . 46).

Perciò chiameremo una tal conica « *conica dei 16 punti* ».

Il modo di caratterizzare i punti r che essa contiene è quello dianzi esposto. Quanto alle coppie M conviene seguire le norme seguenti. La conica di dianzi dipende dai due aggruppamenti iniziali: (12 . 34, 56 . 78), (13 . 24, 14 . 23). Ebbene costruiamo le serie congiunte alla data (I) secondo tali coppie. Esse sono:

12 . 56, 34 . 78, 15 . 26, 16 . 25, 37 . 48, 38 . 47

12 . 78, 34 . 56, 17 . 28, 18 . 27, 35 . 46, 36 . 45

13 . 14, 23 . 24, 53 . 54, 63 . 64, 73 . 74, 83 . 84

13 . 23, 14 . 24, 15 . 25, 16 . 26, 17 . 27, 18 . 28.

Queste serie sono, a due, a due, congiunte di 1ª specie alle coppie (12 . 34, 56 . 78); (13 . 24, 14 . 23); (37 . 38, 47 . 48); (15 . 16, 25 . 26); (35 . 36, 45 . 46); 17 . 18, 27 . 28). Si escludano da queste le prime due che costituiscono gli aggruppamenti iniziali: « *le 4 che avanzano definiscono le 4 coppie M cercate* ». Dunque il num. delle coniche di questa specie (coniche dei 16 punti) è 15 . 3 . 63 = 2835, e si possono enunciare i seguenti teoremi:

« *I 378 punti d'incontro, a due, a due, delle 28 bitangenti oltre trovarsi (com'è noto), a 6, a 6, sulle 63 coniche armoniche alle 63 serie di coniche quadritangenti, si trovano anche, a 8, a 8, sopra altre 2835 coniche ognuna delle quali contiene inoltre 8 punti M divisi in 4 coppie: cioè fra gli uni e gli altri 16 punti così notevoli* ».

Ovvero, in relazione al N⁰ 18:

« *I punti M di tutti i gruppi di* Kummer *oltre trovarsi, a 12, a 12, sulle 630 coniche del N⁰ 18 giacciono pure, a 8, a 8, sopra le 2835 coniche dei 16 punti.*

39. Vogliamo determinare adesso i tipi simbolici di queste coniche servendosi per caratterizzarle del paio di coppie iniziali che ci hanno già servito nel numero precedente.

Le norme ivi espresse conducono abbastanza semplicemente a conoscere i punti r e i punti M giacenti sulla conica quando son conosciuti gli aggruppamenti iniziali. Ora i tipi simbolici di questi aggruppamenti si trovano subito. Basta ricordare che una serie può esser rappresentata dall'uno, o dall'altro dei due tipi:

$$12 \,.\, 34,\ 13 \,.\, 24,\ 14 \,.\, 23,\ 56 \,.\, 78,\ 57 \,.\, 68,\ 58 \,.\, 67, \qquad \text{(I)}$$

$$13 \,.\, 23,\ 14 \,.\, 24,\ 15 \,.\, 25,\ 16 \,.\, 26,\ 17 \,.\, 27,\ 18 \,.\, 28. \qquad \text{(II)}$$

Quindi la (I) genera i seguenti 3 tipi:

$$\{(12 \,.\, 34,\ 56 \,.\, 78),\ (13 \,.\, 24,\ 14 \,.\, 23)\}, \qquad (1)$$

che è quello già noto:

$$\{(12 \,.\, 34,\ 56 \,.\, 78),\ (13 \,.\, 24,\ 57 \,.\, 68)\} \qquad (2)$$

$$\{(12 \,.\, 34,\ 13 \,.\, 24),\ (56 \,.\, 78,\ 57 \,.\, 68)\} \qquad (3)$$

la (II) determina il solo tipo:

$$(13 \,.\, 23,\ 14 \,.\, 24),\ (15 \,.\, 25,\ 16 \,.\, 26). \qquad (4)$$

Il tipo (1) è facilmente descritto: si prendano due quadrangoli completi in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, non aventi alcun vertice a comune, e si combini una coppia di lati opposti del 1° con una coppia di lati opposti del 2° e dopo si combinino fra loro le due rimanenti coppie di lati opposti del 1°. Il numero di questi tipi è manifestamente: $\frac{1}{2}\left(\frac{8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5}{2 \,.\, 3 \,.\, 4}\right) . \, 9 \,.\, 2 = 630.$

Il tipo (2) si ottiene associando, tutt'e due le volte, una coppia di lati opposti del 1° quadrangolo a una coppia di lati opposti del 2°. Questi sono ancora 630.

Il tipo (3) proviene invece dall'associare una volta due coppie di lati opposti del medesimo qnadrangolo e la seconda volta due coppie di lati opposti dell'altro quadrangolo. Il numero di essi è $\frac{1}{2} . \frac{8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5}{2 \,.\, 3 \,.\, 4} . \, 9 = 315.$

Finalmente i tipi (4) provengono da un esagono completo nel quale si scelgono a piacere due vertici per proiettare gli altri 4: si hanno così 8 proiettanti che si distribuiscono in 4 coppie in guisa che in ciascuna entri un sol punto proiettato e entrambi i due punti proiettanti: queste 4 coppie aggruppate, a due, a due, in un modo qualunque dànno uno dei tipi richiesti. Il loro numero è $15 \,.\, 3 \,.\, 28 = 1260$.

Si ritrova così il num. totale $2835 = 630 + 630 + 315 + 1260$.

CAPITOLO IV.

La costruzione delle ∞^4 configurazioni di Kummer passanti per le bitangenti della quartica.

40. È ben noto che dati sei complessi in involuzione essi non impongono ai 6 poli di un piano *generico* altra condizione che quella di appartenere alla stessa conica. Quindi spettano a un esagono di Pascal tutte le proprietà relative ai punti M, rette m ecc. del N° 18 cioè tutte quelle che provengono dal considerare l'esagono come, per così dire, il nucleo della sezione piana di una cfz. di Klein. *Ebbene ci proponiamo di dimostrare adesso che per eostruire una tale cfz. si possono scegliere come assi di una delle 15 involuzioni gobbe fondamentali due rette qualunque sghembe passanti per due punti di una stessa coppia M ed entrambe giacenti fuori del piano dell'esagono.*

Indichiamo con a, b, c, d, e, f i vertici dell'esagono: con $a\,b \,.\, b\,a$ i punti M situati sulla retta $a\,b$ (punti doppi della involuzione segnata su quella retta dal quadrangolo $c\,d\,e\,f$ N° 17), con $(a\,b\,c,\ d\,e\,f)$ la conica che passa per le coppie M situate sui lati dei triangoli $a\,b\,c$, $d\,e\,f$ (N° 18),

e finalmente con AB, BA le rette sghembe scelte arbitrariamente fuori del piano dell'esagono e passanti per i punti M: $ab.ba$. Consideriamo la quadrica definita da queste due rette e dalla conica (abc, def) e costruiamo le rette che dai punti M, situati sopra i lati del triangolo def, si possono condurre appoggiati a AB, BA: esse oppartengono alla quadrica suddetta; poi per i punti M, situati sulle rette ac, bc, conduciamo le rette della quadrica stessa appartenenti al sistema delle AB, BA: chiamando queste ultime costruite con AC, CA, BC, CB e le prime costruite con DE, ED, DF, FD, EF, FE si hanno cinque coppie di rette esistenti insieme alle AB, BA sulla quadrica in discorso che indicheremo con (ABC, DEF). Ora, per i punti M situati sopra ab, passano anche le coniche (abd, cef), (abe, dcf), (abf, dce): ripetendo il ragionamento di dianzi si trova che esistono le quadriche (ABD, CEF), (ABE, DFC), (ABF, DEC) dove p. es. la (ABD, CEF) contiene, nel sistema delle generatrici, le AB, BA, AD, DA, BD, DB e nel sistema delle direttrici CE, EC, CF, FC, EE, FE ecc.

Abbiamo dunque costruito 15 coppie di rette che si tratta di identificare con le 15 coppie di assi fondamentali di una cfz. di Klein. Per questo, cerchiamo se esiste ad es. la quadrica (ACD, BEF) contenente AC, CA, AD, DA, CD, DC in una serie rigata e BE, EB, BF, FB, EF, FE nell'altra serie. Dico che essa è quella Q definita dalla conica $q \equiv (acd, bef)$ e dalle rette AC, CA. Infatti, poichè abbiamo già dimostrato che esiste la quadrica (ABC, DEF) segue che EF, FE si appoggiano ad AC, CA; ma EF, FE passano per i punti M situati sopra ef, dunque EF, FE incontrano Q in 3 punti e quindi le appartengono. Per ragioni analoghe le appartengono AD, DA. Andiamo a CD, DC. Perciò si ricordi che (N° 18) ad es. sulla conica (abc, def) sono coppie armoniche le coppie M che giacciono sui lati ab, ac, ovvero bc, ca (sui lati cioè di uno stesso triangolo come abc, o def) per cui segue che, sulla quadrica (ABC, DEF), saranno coppie armoniche le $AB.BA$; AC, CA ecc. Altrettanto accadrà sulle altre 4 quadriche già costruite. Ciò premesso, si prenda a considerare l'asse AB e si osservi che l'esistenza della quadrica (ABE, CDE) porta che, sulla AB, siano armoniche le coppie di punti:

$$AB.CD,\ AB.DC,\ AB.CF,\ AB.FC.$$

e le altre:

$$AB.CD,\ AB.DC,\ AB.DF,\ AB.FD.$$

Analogamente l'esistenza delle quadriche (ABD, CEF) (ABC, DEF) porta che sopra AB siano armoniche le altre coppie di punti:

$$AB.EF,\ AB.FE,\ AB.CF,\ AB.FC,$$
$$AB.EF,\ AB.FE,\ AB.DF,\ AB.FD,$$

dunque le due coppie di punti:

$$(AB.CD,\ AB.DC),\ (AB.EF,\ AB.FE),$$

coincidono. Ripetendo il ragionamento per l'asse BA si viene a concludere che ciascuna delle EF, FE taglia ciascuna delle CD, DE; ma siccome è già dimostrato che le prime appartengono a Q e le $CD.DE$ si sa che si appoggiano alla conica $q \equiv (acd,\ bef)$, così ne segue che anche CD, DE giacciono per intero sopra Q. Finalmente la esistenza delle quadriche $(ABE,\ DFC)$, $(ABF,\ DEC)$ prova che BE, EB, BF, FB si appoggiano a CD, DC e quindi anch'esse appartengono a Q. Dunque le $Q \equiv (ACD,\ BEF)$ esiste.

Analogamente si dimostra che esistono le rimanenti: $(ACE,\ BDF)$, $(ACF,\ BDE)$, $(ADE,\ CBF)$, $(ADF,\ BEC)$, $(AEF,\ BCD)$. Sono così trovate le 10 quadriche fondamentali. Ciascuna contiene 6 coppie di assi, 3 nell'una e 3 nell'altra serie. Si vede allora facilmente che i 6 complessi in involuzione nascono ciascuno dal prodotto della polarità rispetto a una delle quadriche suddette per una delle 6 involuzioni gobbe di cui le direttrici sono le coppie di assi che la quadrica stessa contiene c. d. d.

Dunque:

« *Per un esagrammo di* Pascal *si possono condurre* ∞^4 *cfz. di* Klein *divisibili in 10 classi, ogni classe essendo individuata dalle* ∞^2 *coppie di rette sghembe che possono condursi per una coppia di punti* M *dell'esagono* ».

41. Dai risultati precedenti segue:

« *Di una quartica si possono dare arbitrariamente i 6 punti doppi di una serie (purchè stiano su di una conica) e due bitangenti del gruppo di* Kummer *complementari, tali che, sopra un lato dell'esagono formato con i 6 punti precedenti, esse segnino una coppia di punti armonica rispetto alla coppia* E *esistente su quel lato. La quartica è univocamente determinata e quando siano conosciuti tutti i punti* M *dell'esagono, le bitangenti rimanenti si costruiscono linearmente* ».

Infatti siano $abcdef$ i punti doppi della serie e mn le bitangenti date, le quali, per ipotesi, segnano sulla retta ab due punti coniugati armonici rispetto alla coppia M che tale retta contiene. Ebbene per l'esagono $abcdef$ conduciamo una delle ∞^4 cfz. di Klein che vi passano (N^0 40): si considerino i due assi della cfz. che passano per i due punti della coppia M suddetta e dal punto $m.n$ si tiri la retta r appoggiata a quegli assi. Allora i piani rm, rn si corrispondono nella involuzione gobba indi-

viduata da quegli assi medesimi e uno qualsiasi dei piani $r\,m$, $r\,n$ genera (secondo la cfz. di Klein scelta) una cfz. di Kummer di cui la superficie relativa è tagliata dal piano dell'esagono in una quartica che risolve la questione proposta. Vediamo come si possano costruire linearmente le altre bitangenti della quartica stessa: ciò proverà che la soluzione è unica. Si osservi perciò che un piano a qualunque della cfz. di Kummer è trasformato nel piano $r\,m$, o nel piano $r\,n$, per opera di due involuzioni gobbe opportunamente scelte fra le 15 fondamentali. Se dunque t è la bitangente contenuta in a, le rette t, m e le t, n segneranno sopra due certi lati dell'esagono due coppie armoniche rispetto alle coppie M ivi esistenti: ma m ed n sono date, dunque t si costruisce mediante due quarti armonici. Il processo può ripetersi per tutte le 16 bitangenti del gruppo di Kummer: dopo, per le altre, si può applicare il metodo di Aronhold che è pure lineare, c. d. d.

42. Le considerazioni del num. precedente servono ad attuare la costruzione delle ∞^4 cfz. di Kummer che si possono condurre per le 16 bitangenti, di una quartica, formanti gruppo di Kummer. Basterà prendere, come elementi dati del problema, i 6 punti doppi della serie complementare e due bitangenti del gruppo suddetto. Le costruzioni del num. precedente applicate a questi elementi conducono allo scopo.

I VARII TIPI POSSIBILI DI QUARTICHE PIANE PIÙ VOLTE OMOLOGICO-ARMONICHE.

Adunanza del 9 aprile 1899.
Estratto dal t. XIII (1899) dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.*

In questo breve scritto mi propongo di ricercare quand'è che una quartica piana irriduttibile può essere trasformata in sè da più omologie armoniche.

I risultati che ho conseguito riguardo al numero e alle relazioni mutue di tali omologie sono riassunti al n. 13, nel quale ho riunito tutti i casi trovati e che sono anche i soli possibili. Figura fra di essi la nota quartica di Klein che è trasformata in sè da 21 omologie armoniche (1).

In quasi tutti i casi trovati è notevole la configurazione dei flessi per le mutue relazioni di posizione nelle quali essi vengono a essere vincolati per la esistenza delle omologie in parola. Altrettanto potrebbe dirsi per le bitangenti.

Mi sono limitato alle omologie armoniche perchè, come risulta dal n. 1, all'infuori di due casi ben ristretti, ogni omologia che muta in sè una quartica piana irriduttibile è necessariamente armonica.

1. Se esiste una omologia capace di trasformare in sè una quartica piana irriduttibile, è certo che ogni curva polare del centro è pure mutata in sè per opera di tale omologia.

Dunque essa è armonica (generalmente) perchè la conica polare non può essere mutata in sè (generalmente) che da una omologia armonica. Fanno eccezione i casi seguenti:

(*a*) La conica polare è indeterminata.

(*b*) Oppure essa si compone di due rette passanti per il centro (distinte, o coincidenti).

(*c*) Ovvero è formata dall'asse di omologia contato due volte e non passante per il centro.

(1) Klein: *Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen.* Mathematische Annalen, Bd. XIV.

(*d*) O finalmente è costituita dall'asse suddetto e da una retta passante per il centro.

Nel caso (*a*) il centro è un punto triplo e quindi non esistono omologie col centro in tal punto capaci di mutare la quartica in sè.

Nel caso (*b*) il centro è un punto doppio e l'unica omologia che abbia il centro in tal punto e che trasformi in sè la curva è necessariamente armonica.

Nel caso (*c*) si osservi che l'asse, contato due volte, costituisce la conica polare del centro, anche rispetto alla cubica polare del medesimo punto. Se quest'asse si prende come $x_1 = 0$ e il centro come (100), la cubica in parola sarà.

$$x_1^3 + \varphi(x_2, x_3) = 0 \tag{1}$$

(dove φ è del 3° grado) e la quartica sarà:

$$x_1 [x_1^3 + \varphi(x_2, x_3)] + \psi(x_2, x_3) = 0 \tag{2}$$

(dove ψ è del 4° grado). Le omologie col centro in (100) e che mutano la (1) in sè sono le sole

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \varepsilon x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \varepsilon^2 x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

con ε, ε^2 radici cubiche immaginarie dell'unità. Ma esse non trasformano in sè certamente la (2), dunque bisogna che φ sia nullo identicamente e che quindi la (2) divenga

$$x_1^4 + \psi(x_2, x_3) = 0,$$

nel qual caso le omologie $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \pm i x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ sono le sole omologie non armoniche col centro in (100) e trasformanti in sè la quartica.

Finalmente nel caso (*d*) si vede che la cubica polare ha necessariamente un flesso nel centro d'omologia e quindi, se è irriduttibile, la sola omologia che la trasformi in sè è manifestamente armonica. Se poi tale cubica si spezza, si vede subito che l'unica ipotesi che rimanga utilmente a discutersi è che la cubica in parola si componga di una retta per (100) e dell'asse contato due volte. Ma allora l'equazione della quartica è necessariamente:

$$x_1^3 x_2 + f(x_2, x_3) = 0,$$

dove f è del 4° grado. Nel qual caso le omologie

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \varepsilon x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & \varepsilon^2 x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

sono le sole omologie non armoniche col centro in (100) e trasformanti in sè la quartica. Abbiamo così trovato due soli casi di eccezione ed è ovvio il caratterizzarli geometricamente. Ciò è espresso dal teorema seguente nel quale essi sono considerati·

Ogni omologia che trasforma in sè stessa una quartica piana irriduttibile è armonica, meno che nei due casi caratterizzati dalle due equazioni seguenti:

$$x_1^4 + \varphi(x_2, x_3) = 0,$$

$$x_1^3 x_2 + f(x_2, x_3) = 0$$

(φ e f binarie biquadratiche).

Nel 1⁰ la quartica possiede 4 punti di ondulazione, sull'asse di omologia con le tangenti di ondulazione concorrenti nel centro di omologia e le omologie che fanno eccezione sono:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \pm i x_1 & x_2 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Nel 2⁰ caso la curva possiede 4 flessi sull'asse di omologia con le tangenti di flesso concorrenti nel centro di omologia che è per la quartica un punto di ondulazione. Le omologie che fanno eccezione sono.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \varepsilon x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \varepsilon^2 x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

dove ε, ε^2 sono le radici cubiche immaginarie dell'unità.

2. Sia adesso una omologia armonica che trasformi in sè stessa una quartica piana irriduttibile (in tutto quel che segue la irriduttibilità della quartica è ipotesi essenziale e sottintesa).

Sono proprietà evidenti, o facili a dimostrarsi, le seguenti: Se la quartica non ha punti singolari, il centro di omologia non può essere sulla curva: la cubica polare del centro si compone dell'asse di omologia e di una conica c rispetto alla quale il centro e l'asse sono polo e polare (cioè il centro è uno dei 21 punti doppi della Steineriana).

Segue che le 12 tangenti condotte dal centro alla quartica sono generalmente costituite dalle 4 tangenti nei 4 punti in cui l'asse taglia la curva e dalle 4 bitangenti passanti ognuna per due punti comuni a c e alla quartica.

Se poi il centro di omologia è sulla quartica, esso è un punto doppio per la curva: le tangenti nodali sono anche tangenti di flesso e compongono la conica c precedente.

3. A queste semplici osservazioni ne aggiungeremo altre due che sono meno evidenti e che ci occorrono nel seguito.

La 1ª è: « Non possono esistere due omologie armoniche trasformanti in sè la quartica e dotate del medesimo asse ». Infatti si prenda questo asse per $x_3 = 0$, poi la retta che unisce i centri per $x_1 = 0$ e su di essa i punti (0 0 1), (0 1 1) come centri. La omologia di cui è centro (0 0 1) esige che l'equazione sia pari in x_3, cioè:

$$a\,x_3^4 + (b\,x_1^2 + c\,x_1\,x_2 + d\,x_2^2)\,x_3^2 + e\,x_1^4 + f x_1^3\,x_2$$
$$+ g\,x_1^2\,x_2^2 + h\,x_1\,x_2^3 + e\,x_1^4 = 0.$$

La 2ª omologia è

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 - 2x_3 & -x_3 \end{pmatrix}$$

e quindi, per essa, l'equazione diviene:

$$a\,x_3^4 + [b\,x_1^2 + c\,x_1\,(x_2 - 2x_3) + d\,(x_2 - 2x_3)^2]\,x_3^2 + e\,x_1^4 +$$
$$+ f\,x_1^3\,(x_2 - 2x_3) + g\,x_1^2\,(x_2 - 2x_3)^2 +$$
$$+ h\,x_1\,(x_2 - 2x_3)^3 + l\,(x_2 - 2x_3)^4 = 0;$$

ma poichè la curva deve essere trasformata in sè, anche la equazione ultima deve essere pari in x_3, il che esige che sia prima $l = g = f = h = 0$ e in conseguenza $c = d = 0$. Ma allora la curva si spezza.

Non possono nemmeno esistere omologie armoniche trasformanti in sè la quartica e dotate dello stesso centro. Perchè la retta polare del centro deve essere unita per entrambe e quindi passa per il centro, o è indeterminata. Ma se passa per il centro questo è sulla curva e quindi è per essa un punto doppio (n. 2), dunque la retta polare è indeterminata. Ora, quando il centro è un punto doppio è ben evidente che le due omologie in parola non possono esistere.

4. Ciò posto, cominciamo dall'esaminare se una quartica piana irriduttibile può ammettere più di una omologia armonica che la trasformi in sè stessa. Supponiamo che esistano due tali omologie così che sulla retta che ne congiunge i centri non esista alcun altro centro di altra omologia trasformante in sè la quartica. Se A, A' sono i centri e a, a' gli assi rispettivi, è manifesto che A' giacerà sopra a e A sopra a', altrimenti trasformando una delle omologie supposte, mediante l'altra, troveremmo una 3ª omologia trasformante in sè la nostra quartica e col centri sopra $A\,A'$, il che è contrario alla ipotesi fatta. Allora la equazione della curva riferita al triangolo a, a', $A\,A'$ è manifestamente:

$$(1) \qquad a x_1^4 + b x_2^4 + c x_3^4 + a x_1^2 x_2^2 + e x_1^2 x_3^2 + f x_2^2 x_3^2 = 0,$$

ciò che prova la esistenza di una 3ª omologia di cui il centro e l'asse sono rispettivamente il punto $a\,a'$ e l'asse $A\,A'$. Esiste dunque un triangolo tale che ogni vertice, col lato opposto, individua una omologia armonica trasformante in sè la curva.

5. Ci proponiamo adesso di considerare, primieramente, tutti i casi possibili nei quali esistano omologie armoniche trasformanti in sè la curva con i centri in linea retta. Distinguiamo due casi a seconda che tale retta incontra, o no, la curva in 4 punti distinti e incominciamo a trattare il primo.

Sia r tale retta, A un centro su di essa, a l'asse relativo e A' il punto $a.\,r$. I 4 punti della quartica sopra r debbono distribuirsi in due coppie armoniche rispetto ad $A\,A'$. Dunque $A\,A'$ deve essere una coppia del covariante sestico della binaria biquadratica rappresentata dai 4 punti suddetti. Se esiste una sola coppia come $A\,A'$ si ha la (1) del N⁰ precedente.

Sia adesso B un nuovo centro su r, b l'asse relativo e B' il punto $b.r$. La coppia $B\,B'$ deve quindi coincidere con una delle altre due coppie del covariante suddetto.

Ora se noi effettuiamo la trasformazione omologica (A, a) sulla (B, b), è manifesto che i punti $B\,B'$ si scambiano fra loro (perchè il gruppo $A\,A'$ $B\,B'$ costituito da due coppie del covariante sestico in parola è un gruppo armonico). Dunque esiste una quarta omologia armonica che trasforma in sè la quartica e che ha per centro B' e l'asse passante per B. Cioè la coppia $B\,B'$ deve trovarsi in condizioni uguali della $A\,A'$. Allora, riferendosi alla equazione del N⁰ precedente, scegliamo il punto unità in guisa che, essendo $r \equiv x_3 = 0$, sia $(1\,1\,0)$, $(1\,-1\,0)$ la nuova coppia $B\,B'$. L'omologia armonica di cui è centro $(1\,4\,0)$ e asse $x_1 + x_2 + k\,x_3 = 0$ è data dalla sostituzione

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 + k x_3 & x_1 + k x_3 & -x_3 \end{pmatrix}.$$

Essa, applicata alla (1) del N⁰ precedente, la trasforma in

$$a\,(x_2 + k x_3)^4 + b\,(x_1 + k x_3)^4 + c\,x_3^4 + d\,(x_2 + k\,x_3)^2\,(x_1 + k\,x_3)^2 +$$
$$+ e\,(x_2 + k\,x_3)^2\,x_3^2 + f\,(x_1 + k x_3)^2\,x_3^2 = 0\,;$$

ma questa deve essere nuovamente pari in x_1, x_2, x_3, il che richiede prima di tutto $k = 0$; quindi la nuova omologia supposta è $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & -x_3 \end{pmatrix}$ e se la nostra equazione deve rimanere invariata per opera di questa omologia, deve essere necessariamente $a = b$, $e = f$ e l'equazione diviene:

$$(2) \qquad a(x_1^4 + x_2^4) + d\,x_1^2 x_2^2 + e\,x_3^2(x_1^2 + x_2^2) + c\,x_3^4 = 0\,;$$

in questo caso la curva possiede le 4 omologie, con i centri in linea retta e gli assi passanti per un punto, che sono individuate rispettivamente da

$$(1\,0\,0)\ ,\ (0\,1\,0)\ ,\ (1\,1\,0)\ ,\ (1\,-1\,0)\,,$$

$$x_1 = 0\ ,\ x_2 = 0\ ,\ x_1 + x_2 = 0\ ,\ x_1 - x_2 = 0\,,$$

e oltre queste possiede pure la omologia di cui è centro il punto comune agli assi precedenti e asse la retta che unisce i centri.

Finalmente si vede che se $e = f = 0$ tutt'e tre le coppie del covariante sestico in questione si comportano ugualmente: l'equazione è

$$(3) \qquad a(x_1^4 + x_2^4) + d\,x_1^2 x_2^2 + c\,x_3^4 = 0,$$

e la curva possiede, oltre le omologie precedenti, le altre due di cui i centri e gli assi sono

$$(1\ \ i\ \ 0)\ ,\ (1\ \ -i\ \ 0)\,,$$

$$x_1 - i\,x_2 = 0\ ,\ x_1 + i\,x_2 = 0.$$

In caso in cui la r tagli la curva in punti distinti è così esaurito e sarebbe facile vedere che le forme (2) e (3) trovate in generale non si spezzano. Risulta anche dal corso del ragionamento che, nel caso ora trattato, l'essere i centri in linea retta porta che gli assi relativi passino per uno stesso punto.

6. Supponiamo adesso che la r non incontri la quartica in punti tutti disiinti. Anzi cominciamo dall'ammettere che tali punti siano riuniti in uno solo che indicheremo con P e consideriamo due delle supposte omologie (sempre con i centri sulla r). Il punto P deve essere unito per entrambe, dunque, per le osservazioni già fatte al N⁰ 3, non v'è altra ipotesi possibile che P per l'una sia centro e appartenga all'asse dell'altra. Cioè, indicando con p l'asse di P e con A, a il centro e l'asse dell'altra, deve il punto P trovarsi sopra a, cioè essere il punto $a.\,r$. Segue che A si trova sopra p, altrimenti, effettuando la trasformazione omologica $(A,\ a)$ sulla $(P,\ p)$, troveremmo due omologie con lo stesso centro e con assi diversi trasformanti in sè la curva, ciò che è in contraddizione col N⁰ 3. Allora il triangolo a, p, r è tale che ogni vertice, col lato opposto, individua una omologia trasformante in sè la curva e quindi assumendo tale triangolo come fondamentale la equazione deve riuscire pari in x_1, x_2, x_3. D'altra parte la $x_3 = 0$ deve incontrare la curva in 4 punti riuniti in $P = (1\ 0\ 0)$, quindi tale equazione sarà necessariamente della forma:

$$b\,x_2^4 + c\,x_3^4 + e\,x_1^2 x_3^2 + f\,x_2^2 x_3^2 = 0.$$

Si vede subito che sulla r non vi può essere un altro centro perchè dovrebbe l'asse passare per P e quindi il centro suddetto coincidere con A. Ma allora segue che l'asse deve per intero coincidere con a, altrimenti esisterebbero due omologie armoniche trasformanti in sè la curva e dotate dello stesso centro e di assi diversi, il che al solito è in contraddizione col N° 3. Dunque, se la r incontra la quartica in 4 punti riuniti, si ricade nel caso del N° 4.

Il medesimo ragionamento e la stessa conclusiono possono ripetersi se la r incontra in 3 punti distinti la quartica, perchè quello fra questi tre punti che vale due deve essere unito in tutte le omologie supposte e tiene luogo del P del caso precedente.

7. Rimane a discutere il caso in cui la r incontri la curva in due soli punti. Essi possono essere entrambi punti di contatto, o entrambi punti doppi, ovvero: l'uno punto di contatto e l'altro punto doppio, o finalmente può l'uno contare come tre e l'altro come uno. Ma se tali punti si trovano in condizioni dissimmetriche, come ammettono le ultime due ipotesi, essi debbono essere uniti in tutte le omologie supposte e quindi si ricade nella conclusione del N° precedente.

Supponiamo adesso che questi punti siano doppi entrambi. Saranno contemporaneamente, o nodi, o cuspidi (se fossero nodo e cuspide si troverebbero in condizioni dissimmetriche e quindi ecc.). Se sono nodi, si osservi che ogni omologia supposta deve cambiare in sè le tangenti nodali. Dunque essa, o ha il centro in un vertice del trilatero diagonale del quadrilatero formato con le tangenti suddette e per asse il lato opposto, ovvero ha il centro iu un nodo e ha per asse la congiungente dell'altro nodo con quel vertice del trilatero in parola che si oppone a r. Quindi sulla r non si possono avere che uno, due, o 4 centri. Il caso di due è contenuto nel N° 4.

Per il caso dei 4 centri, si assuma il trilatero di prima come trilatero fondamentale e i punti (1 1 0), (1 — 1 0) come punti doppi e si troverà l'equazione:

$$a\,(x_1^2 - x_2^2)^2 + e\,x_3^2\,(x_1^2 + x_2^2) + c\,x_3^4 = 0\,;$$

essa non è che un caso particolare della (2) del N° 5 per $d = -2\,a$ (anzi può servire a dimostrarci che la x_3 di quel caso non può mai essere una bitangente).

Se finalmente si tratta di due cuspidi, prendendo la r per $x_3 = 0$ e per $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ le tangenti cuspidali, l'equazione è

$$a\,x_1^2\,x_2^2 + b\,x_3^3\,x_1 + c\,x_3^3\,x_2 + g\,x_1\,x_2\,x_3^2 + f\,x_3^4 = 0,$$

la quale ci dice che b e c non possono essere zero contemporaneamente se no la curva si spezza. Dunque una almeno delle tangenti cuspidali incontra la curva, fuori della cuspide, in un punto. In questo caso l'unica omologia possibile ha il centro in una cuspide e per asse la tangente nell'altra cuspide ($b = 0$, oppure $c = 0$ nella equazione precedente). Se poi entrambe le tangenti cuspidali incontrano ciascuna la curva in un punto fuori delle cuspidi, allora può sussistere una omologia di cui il centro è il punto comune a r e alla congiungente i punti d'incontro (fuori delle cuspidi) delle tangenti cuspidali con la curva. Ciò accade quando $b = c$ e l'omologia è $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}$ con centro in $(1 - 1\ 0)$ e asse $x_1 - x_2 = 0$. Ma in tal caso non può coesistere l'altra $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$, ovvero l'altra $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & -x_2 & x_3 \end{pmatrix}$, a meno che la curva non si spezzi.

Sarebbe facile vedere che ciò è vero anche quando l'ulteriore punto comune alle tangenti cuspidali e alla curva è il punto d'incontro delle tangenti suddette.

In conclusione, se la r contiene due punti doppi della quartica, non si è condotti a nessun caso nuovo.

8. Ammettiano adesso che la r sia bitangente e che esistano due omologie coi centri sopra tale retta. Intanto un centro non può essere un punto di contatto altrimenti quel punto sarebbe doppio (N° 2), ma nemmeno può trovarsi sopra un asse perchè il centro relativo, non potendo essere l'altro punto di contatto, i punti di contatto della r verrebbero a essere più di due. Dunque se A, a sono centro e asse di una delle omologie supposte ed è $A' \equiv a.r$, la coppia $A\,A'$ deve essere armonica alla coppia dei punti di contatto suddetti. Prendendo questi come $(0\ 1\ 0)$, $(1\ 0\ 0)$, la equazione della quartica sarà:

$$a\,x_3^4 + b\,x_3^3 + c\,x_3^2 + d\,x_3 + e\,x_1^2\,x_2^2 = 0,$$

dove le b, c, d sono binarie in x_1, x_2 di grado 1, 2, 3.

Se ora si prende A' come $(1 - 1\ 0)$ e $a \equiv x_1 - x_1 = 0$ la omologia supposta è $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}$ e quindi la equazione precedente, scrivendola per disteso, è:

$$a\,x_3^4 + b\,x_3^3\,(x_1 + x_2) + x_3^2\,[c\,(x_1^2 + x_2^2) + c'\,x_1\,x_2]$$
$$+ x_3\,[d\,(x_1^3 + x_2^3) + d'\,(x_1^2\,x_2 + x_1\,x_2^2)] + e\,x_1^2\,x_2^1 = 0.$$

Sia B, b centro e asse della 2ª omologia supposta e pongasi $B' \equiv b.r$:

allora la coppia $B\,B'$ è anche armonica rispetto alla coppia dei punti di contatto. Nè può $B\,B'$ coincidere con $A'\,A$ altrimenti saremmo nel caso del N° 4 e già osservammo che allora (N° 7) $x_3 = 0$ non può essere una bitangente (il che pel resto è facile riconoscere anche geometricamente).

Dunque, preso B come punto $(1, -\lambda, 0)$, si può prendere per b la $\lambda x_1 - x_2 = 0$ e la omologia (B, b) è $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & \lambda^2 x_1 & \lambda x_3 \end{pmatrix}$.

Se si esige che la equazione precedente ritorni in sè, per opera di questa omologia, si vede che deve essere necessariamente λ una delle radici cubiche immaginarie dell'unità e inoltre

$$b = c = d' = 0.$$

La equazione assume la forma:

$$\alpha x_3^4 + \beta x_3^2 x_1 x_2 + \gamma x_3 (x_1^3 + x_2^3) + \delta x_1^2 x_2^2 = 0,$$

e la quartica è mutata in sè dalle tre omologie armoniche

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \varepsilon^2 x_1 & \varepsilon x_1 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \varepsilon x_2 & \varepsilon^2 x_1 & x_3 \end{pmatrix},$$

di cui i centri sono:

$$(1, -1, 0), \qquad (1, -\varepsilon, 0), \qquad (1, -\varepsilon^2, 0)$$

e gli assi

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 - \varepsilon^2 x_2 = 0, \quad x_1 - \varepsilon x_2 = 0,$$

e il corso del ragionamento prova che se esiste una omologia col centro sopra r, essa è certamènte una delle tre precedenti. I tre centri e i tre punti d'incontro cogli assi della retta r rappresentano due binarie cubiche tali che l'una è la forma Q dell'altra, cioè una è ottenuta dall'altra cercando il 4° armonico di un elemento rispetto agli altri due. Il gruppo hessiano comune è quello dei punti di contatto.

9. I N^i 4, 5, 6, 7, 8 esauriscono tutti i casi possibili di omologie con i centri in linea retta. È notevole osservare che, di conseguenza, gli assi passano sempre per un medesimo punto. Possiamo anche concludere, in sostanza, che se una quartica ammette varie omologie armoniche che la trasformino in sè medesima, considerandone due qualunque di cui i centri siano A, B e ripetendo per la retta $A\,B$ tutti i ragionamenti fatti antecedentenente per la retta r, siamo necessariamente condotti all'una, o all'altra, delle due forme seguenti:

$$(1) \qquad a x_1^4 + b x_2^4 + c x_3^4 + 2 d x_1^2 x_2^2 + 2 e x_1^2 x_3^2 + 2 f x_2^2 x_3^2 = 0,$$

$$(2) \qquad \alpha x_3^4 + \beta x_3^2 x_1 x_2 + \gamma x_3 (x_1^3 + x_2^3) + \delta x_1^2 x_2^2 = 0$$

Vogliamo adesso esaminare a quali forme particolari di queste siamo condotti quando si consideri una delle altre omologie supposte col centro fuori della retta AB.

10. Cominciamo dalla (1). Sia ABC il triangolo fondamentale, O e o il centro e l'asse della nuova omologia supposta così che O giace fuori dei lati del triangolo suddetto. Osserviamo subito che O non può essere punto doppio della quartica altrimenti tali sarebbero anche i tre corrispondenti di O nelle tre omologie del triangolo fondamentale e la curva si spezzerebbe. Segue che O è esterno alla curva (N° 2).

Allora per la retta OA potremo ripetere tutti i ragionamenti dei N^i precedenti: cioè indicando con A' il punto $OA.BC$ e con O' il punto $o.OA$, avremo $(AA'OO') = -1$ se siamo nel caso del N° 5 ovvero, se siamo nel caso del N° 8, esisterà un'altra omologia (M, m) col centro M sulla OA in guisa che si avrà

$$(OMAA') = -1, \quad (AMOO') = -1.$$

Il caso del N° 4 lo escludiamo a priori perchè se O' coincidesse con A, A' coinciderebbe con O, cioè O si troverebbe sopra un lato del triangolo fondamentale, il che è contrario alla ipotesi. Ciò posto prendiamo A come $(0\,0\,1)$ e O come $(1\,1\,1)$: nel caso del N° 5, essendo $(AA'OO') = -1$, troveremo $O' \equiv (1, 1, -1)$ e nel caso del N° 8, essendo $(OMAA') = -1$, $(AMOO') = -1$, troveremo: $M \equiv (1, 1, -1)$ e dopo $O' \equiv (1, 1, -3)$. Indicando con O'', O''' i punti analoghi a O' situati sopra OB, OC è d'uopo osservare che O', O'', O''' debbono essere in linea retta (la o) e quindi è possibile solamente la ipotesi

$$O' \equiv (1, 1, -1), \quad O'' \equiv (1, -3, 1), \quad O''' \equiv (-3, 1, 1),$$

o le analoghe. Segue che la o è la retta:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0.$$

La cubica polare del centro rispetto alla quartica è

$$a x_1^3 + b x_2^3 + c x_3^3 + d(x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2) + e(x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2) +$$
$$+ f(x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2) = 0;$$

essa, secondo il N° 2, deve spezzarsi nella retta

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0,$$

e nella conica:

$$m x_1^2 + n x_2^2 + p x_3^2 + 2q x_1 x_2 + 2r x_1 x_3 + 2s x_2 x_3 = 0$$

in guisa che la 1ª sia polare di (1 1 1) rispetto alla 2ª. Il che richiede che sia:

$$m = n, \qquad r = s = -q, \qquad p = 2(q + n),$$

onde la conica precedente è

$$\lambda(x_1^2 + x_2^2) + 2(\lambda - \mu)x_3^2 + 2\mu(-x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = 0$$

e la quartica è

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\lambda(x_1^4 + x_2^4) + 4(\lambda - \mu)x_3^4 + 2(\lambda - 2\mu)x_1^2 x_2^2 + \\ &+ 4(\lambda + \mu)(x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2) = 0. \end{aligned}$$

Ora applicando la trasformazione lineare

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 + x_2 & x_1 - x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

la quartica precedente diviene

$$\Sigma x_i^4 + 2\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu}\right)\Sigma x_i^2 x_k^2 = 0,$$

la quale sarà discussa al N° 12.

11. Passiamo adesso alla (2) del N° 9 e facciamo considerazioni analoghe. Abbiamo dunque la quartica

$$\alpha x_3^4 + \beta x_3^2 x_1 x_2 + \gamma x_3(x_1^3 + x_2^3) + \delta x_1^2 x_2^2 = 0$$

e vogliamo esaminare se può ammettere una omologia (O, o) col centro fuori della $x_3 = 0$. Sieno A, B, C i centri sopra quest'ultima retta, a, b, c gli assi. Noi potremo ripetere per le rette OA, OB, OC i ragionamenti fatti nel N° precedente. Ad es. la OA presenta i tre casi:

1° l'asse o passa per A e quindi a per O,

2° si ha $(A\,A'\,O\,O') = -1$ (dove $A \equiv a.A\,O$),

3° esiste sulla OA un altro centro M così che

$$(O\,M\,A\,A') = -1, \qquad (A\,M\,O\,O') = -1.$$

Nel 1° caso la curva riferita alle tre rette a, o, OA è rappresentata

da una equazione pari in $x_1 x_2 x_3$ (N° 4) e quindi si ricade nel N° precedente. Altrettanto può dirsi nel 2° caso perchè allora sulla retta $O A$ esistono 4 centri e valgono le considerazioni del N° 5.

Rimane il 3° caso per il quale si avrà contemporaneamente:

$$(O M A A') = -1, \qquad (A M O O') = -1,$$
$$(O M_1 B B') = -1, \qquad (B M_1 O O'') = -1,$$
$$(O M_2 C C') = -1, \qquad (C M_2 O O''') = -1.$$

I punti A, B, C hanno per coordinate rispettivamente (N° 8)

$$(1, -1, 0), \qquad (1, -\varepsilon, 0), \qquad (1, -\varepsilon^2, 0),$$

e gli assi sono:

$$x_1 - x_2 = 0, \qquad x_1 - \varepsilon^2 x_2 = 0, \qquad x_1 - \varepsilon x_2 = 0.$$

Il punto O abbia le coordinate $y_1 y_2 y_3$. Si vede facilmente allora che si ha:

$$O' \equiv (2 y_2 - y_1, \quad 2 y_1 - y_2, \quad y_3),$$
$$O'' \equiv (2 \varepsilon^2 y_2 - y_1, \quad 2 \varepsilon y_1 - y_2, \quad y_3),$$
$$O''' \equiv (2 \varepsilon y_2 - y_1, \quad 2 \varepsilon^2 y_1 - y_2, \quad y_3).$$

Ora i punti O', O'', O''' debbono essere in linea retta (la o): esprimendo questa condizione si trova:

$$y_1 y_2 y_3 = 0$$

Ma $y_3 \neq 0$ perchè il centro O è supposto fuori di $x_3 = 0$. Quindi si ha: o $y_1 = 0$, oppure $y_2 = 0$, ovvero $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ insieme.

Ma in quest'ultimo caso, poichè gli assi a, b, c passano per O, ne viene che la $x_3 = 0$ è l'asse di O, ma allora $\gamma = 0$ e la curva si spezza. Se poi $y_1 = 0$, $y_2 \neq 0$ la retta o diviene

$$x_2 y_3 + x_3 y_2 = 0,$$

cioè o passa per uno dei punti di contatto di $x_3 = 0$ con la quartica: d'altra parte $x_3 = 0$ non è unita in questa nuova omologia, dunque in (1 0 0) si avrebbero 2 tangenti, il che è assurdo perchè (1 0 0) non è doppio. Dunque la conclusione di questo N° e del precedente si è che non rimane altro che da esaminare il fascio di quartiche

$$\Sigma x_i^4 + \lambda \Sigma x_i^2 x_k^2 = 0.$$

12. Cambiando il parametro del fascio ne scriveremo più opportunamente la equazione così

$$\Sigma x_i^4 + 6\lambda \Sigma x_i^2 x_k^2 = 0, \tag{1}$$

per $\lambda = -\frac{1}{3}$ la quartica del fascio si spezza nelle 4 rette:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \qquad x_1 - x_2 + x_3 = 0,$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 0, \qquad x_1 + x_2 - x_3 = 0,$$

formanti un quadrilatero che ha per trilatero diagonale il fondamentale. Invece per $\lambda = \frac{1}{3}$ si ha la conica doppia $(\Sigma x_i^2)^2 = 0$, la quale è manifestamente la cosidetta conica dei 14 punti di quadrilatero precedente (cioè la conica che passa per il gruppo hessiano dei 3 vertici su ciascun lato). Si può quindi considerare il fascio come individuato da un quadrilatero e dalla conica dei suoi 14 punti contata due volte; i lati del quadrilatero sono bitangenti a ciascuna curva del fascio. Si riconosce facilmente che esistono 9 omologie armoniche trasformanti in sè contemporaneamente la conica e il quadrilatero. Sei di esse hanno per centri i vertici del quadrilatero e per assi le polari dei vertici, rispetto alla conica in parola, tre hanno per centri e per assi i vertici e i lati del trilatero diagonale (che nel nostro caso è ii fondamentale). Si vede anche facilmente che queste 9 omologie trasformano in sè ogni curva del fascio (N⁰ 13, VI).

Si domanda adesso: Potranno esistere altre omologie trasformanti in sè qualche curva particolare del fascio? Per rispondere a questa domanda distingueremo due casi: o il centro della nuova omologia supposta giace sul triangolo fondamentale, ovvero non gli appartiene. Nel 1° caso se il lato che lo contiene è $x_3 = 0$, esso, in forza delle considerazioni dei N^i 4, 5 deve contenere sei centri e le omologie che si aggiungono sono le due: $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2 & x_1 & i x_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & -x_1 & i x_3 \end{pmatrix}$ e per conseguenza le altre 4 analoghe:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & i x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & i x_2 & -x_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ i x_1 & -x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ i x_1 & x_2 & -x_3 \end{pmatrix}.$$

Ma esse trasformano in sè la

$$\Sigma x_i^4 = 0$$

e non la $\Sigma x_i^2 x_k^2 = 0$, dunque l'unica curva del fascio (1) che le ammetta è $\Sigma x_i^4 = 0$. Questa curva possiede in tutto 15 omologie armoniche e cioè le 9 citate avanti e comuni a tutte le curve del fascio e altre 6 di ognuna delle quali è centro un punto comune alla conica dei 14 punti e a un lato del triangolo fondamentale, e asse la tangente alla stessa conica nell'altro punto in cui essa è incontrata dal lato suddetto.

Andiamo al 2° caso. Esista dunque un nuovo centro P fuori dei lati del triangolo fondamentale. Potremo applicare a questo nuovo centro P e al triangolo suddetto tutte le considerazioni del N° 10. Cioè, sopra la congiungente di tale centro P con uno dei vertici del triangolo fondamentale, devono esistere, in tutto, quattro centri e su ciascuna delle altre due congiungenti di P con i due vertici fondamentali rimanenti devono esistere, in tutto, tre centri. Sia (0 0 1) il 1° vertice suddetto e (1 0 0), (0 1 0) gli altri due. Sulla retta che unisce P a (0 0 1) debbono dunque trovarsi in tutto 4 centri, quindi (N° 5) uno di questi deve essere sulla $x_3 = 0$ e, se non vogliamo ricadere nel caso di dianzi, esso sarà uno dei punti (1,1,0), (1,— 1,0).

Quindi le coordinate di P saranno della forma

$$(1,\ 1,\ \mu)$$

e l'asse relativo sarà (N° 10)

$$\mu(x_1 + x_2) + 2x_3 = 0,$$

e finalmente l'omologia armonica che ha per centro e per asse il punto e la retta precedenti sarà:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \mu(x_2 - x_1) + 2x_3, & \mu(x_1 - x_2) + 2x_3, & \mu^2(x_1 + x_2) \end{pmatrix}.$$

Esigiamo adesso che una curva del fascio

$$\Sigma x_i^4 + 6\lambda \Sigma x_i^2 x_k^2 = 0$$

sia trasformata in sè dalla omologia precedente.

Eseguiti i calcoli, troveremo facilmente le soluzioni seguenti:

$$\mu = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}, \qquad \lambda = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{4},$$

$$\mu = \frac{1 - i\sqrt{7}}{2}, \qquad \lambda = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4},$$

$$\mu = \pm\sqrt{2}, \qquad \lambda = \frac{1}{3};$$

l'ultimo caso lo escludiamo perchè la curva del fascio corsispondente a $\lambda = \frac{1}{3}$ è la conica doppia $\Sigma x_i^2 = 0$.

Rimangono i primi due. Nell'uno e nell'altro la quartica possiede in tutto 21 omologie armoniche: cioè le 9 del fascio e le altre dodici di cui i centri e gli assi sono rispettivamente:

$$\begin{cases} (1 \quad 1 \quad \mu), & \mu(x_1 + x_2) + 2x_3 = 0; \\ (-1 \quad 1 \quad \mu), & \mu(-x_1 + x_2) + 2x_3 = 0; \\ (1 \quad -1 \quad \mu), & \mu(x_1 - x_2) + 2x_3 = 0; \\ (1 \quad 1 \quad -\mu), & \mu(x_1 + x_2) - 2x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 \quad \mu \quad 1), & \mu(x_1 + x_3) + 2x_2 = 0; \\ (-1 \quad \mu \quad 1), & \mu(-x_1 + x_3) + 2x_2 = 0; \\ (1 \quad -\mu \quad 1), & \mu(x_1 + x_3) - 2x_2 = 0; \\ (1 \quad \mu \quad -1), & \mu(x_1 - x_3) + 2x_2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\mu \quad 1 \quad 1), & \mu(x_2 + x_3) + 2x_1 = 0; \\ (-\mu \quad 1 \quad 1), & \mu(x_2 + x_3) - 2x_1 = 0; \\ (\mu \quad -1 \quad 1), & \mu(-x_2 + x_3) + 2x_1 = 0; \\ (\mu \quad 1 \quad -1), & \mu(x_2 - x_3) + 2x_1 = 0; \end{cases}$$

dove

$$\mu = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}.$$

Le due quartiche così trovate appartengono al tipo già menzionato di Klein (loc. cit.) e sarebbe facile, con opportune trasformazioni di coordinate, ridurne l'equazione a una delle forme già conosciute.

Del resto torneremo sull'argomento al N° 18.

Le considerazioni di questo N° provano che la nostra discussione è esaurita.

13. Riassumeremo tutti i casi trovati nel seguente enunciato:

I tipi possibili di quartiche piane, irriduttibili, più volte omologiche-armoniche possono classificarsi, in riguardo al numero delle omologie, nel modo seguente:

I. — *Una sola omologia:*

$$a x_3^4 + b x_3^2 + c = 0,$$

dove a, b, c sono binarie in $x_1 x_2$, dei gradi 0, 2, 4 rispettivamente. Il centro è (0 0 1), l'asse è $x_3 = 0$ e l'omologia è

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & -x_3 \end{pmatrix}.$$

II. — *Tre omologie di cui i centri e gli assi sono vertici e lati di un triangolo.*

Assumendolo come fondamentale, l'equazione è:

$$a\,x_1^4 + b\,x_2^4 + c\,x_3^4 + d\,x_1^2 x_2^2 + e\,x_2^2 x_3^2 + f\,x_1^2 x_3^2 = 0$$

e le omologie sono:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & -x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & -x_3 \end{pmatrix}.$$

III. — *Tre omologie con i centri in linea retta e gli assi passanti per un punto. La retta è bitangente alla quartica: sopra di essa i centri e i punti d'incontro degli assi costituiscono due terne di punti aventi per comune gruppo hessiano quello formato dai punti di contatto.*

Riferendo la curva alla retta suddetta ($x_3 = 0$) e alle rette che uniscono il punto comune agli assi, coi punti di contatto di $x_3 = 0$, l'equazione è:

$$a\,x_3^4 + b\,x_3^2 x_1 x_2 + c\,x_3 (x_1^3 + x_2^3) + d\,x_1^2 x_2^2 = 0$$

e le omologie sono:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \varepsilon x_2 & \varepsilon^2 x_1 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \varepsilon^2 x_2 & \varepsilon x_1 & x_3 \end{pmatrix},$$

dove ε, ε^2 sono le radici cubiche immaginarie dell'unità positiva.

IV. — *Cinque omologie e cioè quelle del* N° II *e più altre due di cui i centri sono su di un lato del triangolo fondamentale* ($x_3 = 0$): *l'asse di una passa per il centro dell'altra ed entrambi per quel vertice del triangolo fondamentale che si oppone alla retta dei centri. Sopra di essa, i* 4 *centri compongono due coppie del covariante sestico della binaria biquadratica rappresentata dai* 4 *punti di incontro di tal retta con la quartica, o altrimenti quella retta incontra la curva in due punti doppi e allora questa coppia di punti e due opportune coppie, formate con i centri, costituiscono* 3 *coppie armoniche, a due, a due.*

L'equazione è

$$a\,(x_1^4 + x_2^4) + b\,x_1^2 x_2^2 + c\,x_3^2 (x_1^2 + x_2^2) + d\,x_3^4 = 0$$

e i due punti doppi si hanno per $b = -2a$. Le omologie sono quelle del N° II e le altre due:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & -x_3 \end{pmatrix}.$$

V. — *Sette omologie e cioè quelle del* N° IV *e più altre due di cui i centri sono i punti della 3ª coppia del covariante sestico di cui è parola nel* N° *precedente, l'asse di una passa per il centro dell'altra ed entrambi per il punto* (0 0 1).

L'equazione è

$$a\,(x_1^4 + x_2^4) + b\,x_1^2 x_2^2 + d\,x_3^4 = 0$$

e le omologie sono quelle del N° IV e le altre due;

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2 & x_1 & i\,x_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & -x_1 & i\,x_3 \end{pmatrix}$$

(si esclude quì però il caso dei punti doppi considerato in IV).

VI. — *Nove omologie divise in due specie: sei hanno per centri i sei vertici di un quadrilatero completo e per assi i lati del quadrangolo polare rispetto alla conica dei* 14 *punti del primo: tre hanno per centri e assi i vertici e i lati del trilatero, o triangolo diagonale comune.*

Questo caso proviene da quello del N° IV supponendo che le condizioni, nelle quali ivi si trova la curva rispetto a $x_3 = 0$, siano anche adempiute rispetto a $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Si ha dunque il fascio di quartiche

$$\Sigma\, x_i^4 + \lambda\, \Sigma\, x_i^2 x_k^2 = 0,$$

ognuna delle quali possiede le 9 omologie suddette.

Esse sono:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & -x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & -x_2 & x_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & -x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & -x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Il fascio può essere individuato da un quadrilatero e dalla sua conica dei 14 punti.

VII. — *Quindici omologie: ossia le precedenti e altre sei di cui i centri sono i punti d'incontro dei lati del trilatero diagonale con la conica dei quattordici punti e assi le tangenti alla conica in questi punti, in guisa che due di questi nuovi centri, situati su di un medesimo lato del triangolo fondamentale, giacciono l'uno sull'asse dell'altro. In altre parole questi sei nuo-*

vi centri sono i vertici dell'esa-esagono che il quadrilatero suddetto individua (1).

Questo caso proviene da quello dèl N° V quando i lati $x_1 = 0, x_2 = 0$ si trovano nelle medesime condizioni ivi descritte per $x_3 = 0$. L'equazione è

$$\Sigma x_i^4 = 0,$$

cioè è il caso della quartica dotata di tessuto apolare.

Le omologie sono le 9 del N° VI e le altre sei:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2 & x_1 & i x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & -x_1 & i x_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_3 & i x_2 & i x_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & i x_2 & -x_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ i x_1 & -x_3 & x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ i x_1 & x_3 & -x_2 \end{pmatrix}.$$

VIII. — *Ventuno omologie e cioè quelle del* N° IV *e le altre dodici descritte alla fine del paragrafo precedente. I nuovi dodici centri si distribuiscono in tre quadrangoli aventi per triangolo diagonale il triangolo fondamentale.*

Questa notevole quartica costituisce la curva d'ordine minimo fra quelle che sono invarianti rispetto al noto G_{168} di collineazioni piane. Essa, come già dicemmo, fu incontrata la prima volta da Klein (loc. cit.) e dopo fu considerata e studiata sotto varii aspetti (N° 18). L'equazione nostra è

$$\Sigma x_i^4 + \frac{3}{2}\left(-1 \pm i\sqrt{7}\right) \Sigma x_i^2 x_k^2 = 0.$$

Al N° 18, ove il fascio

$$\Sigma x_i^4 + 6\lambda \Sigma x_i^2 x_k^2 = 0$$

è studiato con qualche dettaglio, mostreremo come si possa pervenire, anche per altra via, alla equazione precedentemente trovata della quartica di Klein.

Osservammo già (N° 1) che il centro di una omologia armonica, trasformante in sè la quartica, deve essere necessariamente un punto doppio della Steineriana.

---

(1) Cioè compongono la figura dei 6 punti singolari, in un piano singolare, di una superficie di KUMMER 6 volte tetraedroide (cfr. SEGRE: *Sur un cas particulier de la surface de* KUMMER, Berichte über die Verh. der Königl. Gesellsch. der Wiss zu Liepzig, 1884 e CIANI: *Alcune osservazioni sulle configurazioni di* KUMMER, Giornale di Napoli, 1898).

Ebbene l'ultimo esempio ora esposto ci prova che tutti i 21 punti doppi della Steineriana possono essere centri di omologie armoniche trasformanti in sè la curva (1).

Alcune proprietà relative ai flessi delle curve trovate.

14. Cominciamo dal caso II:

$$a x_1^4 + b x_2^4 + c x_3^4 + d x_1^2 x_2^2 + e x_2^2 x_3^2 + f x_1^2 x_3^2 = 0.$$

Una delle tre omologie è il prodotto delle altre due: cioè se al punto A corrispondono B, C, D, nelle tre omologie, il gruppo $A\,B\,C\,D$ si muta in sè per opera di ognuna delle tre omologie medesime. Allora si consideri la rete di coniche

$$\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 = 0$$

che ha il triangolo fondamentale come triangolo autopolare.

Ogni conica della rete è mutata in sè dalle tre omologie in parola, dunque quella di esse che passa per due flessi, non corrispondenti in alcuna delle tre omologie suddette, taglierà la quartica in 8 flessi distribuiti in due gruppi come $A\,B\,C\,D$. Dunque:

I 24 *flessi si trovano, a* 8, *a* 8, *sopra* 15 *coniche di una stessa rete* (2).

15. Andiamo al N° III

$$a x_3^4 + b x_3^2 x_1 x_2 + c x_3 (x_1^3 + x_2^3) + d x_1^2 x_2^2 = 0.$$

Ogni conica che passa per i punti di contatto di $x_3 = 0$ e in quei punti tocca le rette che vànno al punto di concorso degli assi è mutata in sè dalle 3 omologie della curva. Tali coniche formano un fascio. Ciascuna taglia la curva (oltre che nei due punti suddetti) in 6 punti che sono vertici di un triesagono. Cioè essi compongono la figura dei 6 punti singolari in un piano singolare di una superficie di Kummer tre volte tetraedroide. Dunque:

Nella quartica si possono iscrivere ∞' triesagoni.

---

(1) I casi dei N^i III e IV furono da me già segnalati nella mia tesi di abilitazione (cfr. *Se linee diametrali delle curve algebriche piane* stampata negli Annali della R. Scuola Normale superiore di Pisa nell'89): non però gli altri casi perchè, nella memoria suddetta, mi proposi soltanto di considerare le possibili simmetrie di una curva rispetto ad assi *reali* passanti per uno stesso punto.

(2) GERBALDI: *L'equazione di* 24° *ordine da cui dipende la ricerca dei flessi della quartica piana* (Questi Rendiconti 1893). CIANI: *Sopra le serie quadratiche di coniche inviluppanti la quartica piana* (Rendiconti Istituto Lombardo, 1895).

Se un vertice di un tale triesagono è un flesso, lo sono tutti. Ossia:

I 24 *flessi compongono* 4 *triesagoni.*

E anche:

I 24 *flessi giacciono, a* 6, *a* 6, *sopra* 4 *coniche appartenenti a uno stesso fascio.*

16. Per il caso del N° IV osserviamo che la quartica:

$$a(x_1^4 + x_2^4) + b\,x_1^2 x_2^2 + c\,x_3^2(x_1^2 + x_2^2) + d\,x_2^4 = 0$$

ammette, oltre il triangolo fondamentale $x_1 x_2 x_3 = 0$ (di cui ogni vertice e il lato opposto individuano una delle omologie armoniche che la curva possiede), anche il triangolo $(x_1 + x_2)(x_1 + x_2)x_3 = 0$ in uguali condizioni dei 1°: quindi quello che fu detto per il primo, al N° 14, può ripetersi quì. Cioè esistono due reti di coniche analoghe a quelle descritte in tal numero. Ma esse hanno un fascio comune e precisamente quello costituito dalle coniche passanti per quei due punti di $x_3 = 0$ che compongono la coppia del covariante sestico diversa dai centri e che toccano ivi le rette che vanno al punto comune agli assi. Ciascuna conica del fascio è trasformata in sè da tutte le omologie della quartica e quindi, nel fascio, vi saranno tre coniche passanti ognuna per 8 flessi: e per conseguenza il numero delle coniche contenenti 8 flessi e date dalle considerazioni del N° 14 applicate ai due triangoli suddetti, deve esser diminuito di tre unità.

I 24 *flessi si trovano a* 8, *a* 8 *sopra* 27 *coniche.*

17. Nel caso del N° V si hanno 3 reti di coniche analoghe alle due precedenti e si vede subito che tali reti hanno a comune a due, a due un fascio nel quale esistono 3 coniche contenenti 8 flessi. Sicchè in questo caso:

I 24 *flessi stanno, a* 8, *a* 8, *sopra* $3.15 - 3.3 = 36$ *coniche.*

18. Andiamo finalmente allo studio del fascio

$$\Sigma\, x_i^4 + 6\,\lambda\, \Sigma\, x_i^2 x_k^2 = 0.$$

Prima di tutto noteremo che le considerazioni dei N^i precedenti applicate a questo caso si dicono che:

I 24 *flessi di ogni curva del fascio giacciono, a* 6, *a* 6, *sopra* 16 *coniche e, a* 8, *a* 8, *sopra altre* 51 *coniche.*

Per determinare nel fascio le due quartiche di Klein che vi sono contenute si può anche procedere nel modo seguente. Si osservi prima di tutto che il covariante S di una curva del fascio appartiene nuovamente al fascio; e precisamente se con λ' s'indica il valore del parametro che individua il covariante S della quartica corrispondente al valore λ, si ha

$$\lambda' = \frac{\lambda^2 - 2\lambda^3 - \lambda^4}{6\lambda^4}.$$

Segue intanto che:

L'unica quartica del fascio che abbia S indeterminato è $\sum x_i^4 = 0$.

Escludendo il valore zero di λ rimane

$$\lambda' = \frac{1 - 2\lambda - \lambda^2}{6\lambda^2}.$$

Dato λ si trova un sol valore per λ': viceversa per un valore di λ' ci sono due valori per λ. Dunque:

Ogni curva del fascio può considerarsi come covariante S di altre due curve del fascio medesimo.

Per $\lambda' = \lambda$ si troveranno le curve del fascio che coincidono con i loro covarianti S. Ora appunto il Brioschi ha dimostrato (1) che la quartica di Klein coincide col proprio covariante S (2). Dunque le 2 quartiche di Klein del fascio saranno da scegliersi fra quelle per cui si ha:

$$\lambda = \frac{1 - 2\lambda - \lambda^2}{6\lambda^2},$$

cioè:

$$6\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0.$$

Questa è soddisfatta per i valori

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4}, \quad \frac{-1 - i\sqrt{7}}{4},$$

ma il primo lo escludiamo perchè dà la conica doppia $(\sum x_i^2)^2 = 0$: gli altri daranno le curve domandate: il che conferma i risultati del N° 12. Da essi si deducono facilmente le più salienti proprietà della configurazione dei centri, degli assi, delle bitangenti della quartica di Klein. Così ad es. si vede che i centri e gli assi compongono una configurazione $(21_4, 21_4)$, che i centri e le bitangenti compongono un'altra configurazione $(21_4, 28_3)$, ecc.

Altre curve notevoli del fascio in questione, oltre la conica doppia $\left(\lambda = \frac{1}{3}\right)$ e il quadrilatero fondamentale $\left(\lambda = -\frac{1}{3}\right)$, si hanno per $\lambda = \infty$, $\lambda = 0$.

---

(1) BRIOSCHI: *Sopra una classe di curve del 4° ordine* (Atti R. Accademia dei Lincei: s. III, v. VIII). Veggasi pure per altre particolarità della quartica di KLEIN: KLEIN-FRICKE. *Vorlesungen über die Theorie der Elliptischen Modulfunctionen*, v. I, pag. 692. WEBER: *Lehrbuch der Algebra*, B. II, § 115. (*Ternäre linerare substitutionsgruppe von* 168*sten Grade*).

(2) Viceversa si può dimostrare che se una quartica piana, irriducibile, coincide col proprio covariante S, essa è necessariamente la quartica di KLEIN.

Per $\lambda = \infty$ si ottiene la $\sum x_i^2 x_k^2 = 0$ che è l'unica quartica irriduttibile del fascio dotata di punti doppi. Per $\lambda = 0$ si ha la $\sum x_i^4 = 0$ di cui già parlammo al N° VII. Essa non possiede 24 flessi distinti, ma 12 punti di ondulazione sicchè *il dodecagono formato con i punti suddetti è mutato in sè dalle* 15 *omologie armoniche che la curva possiede.*

Le sei omologie che la quartica gode (oltre le 9 comuni a tutte le curve del fascio) hanno i centri sui vertici dell'esa-esagono segnato sui lati del triangolo fondamentate dalla conica dei 14 punti. Applicando una di queste omologie a tale esa-esagono risulta che *due vertici di esso, situati su di uno stesso lato del triangolo fondamentale, insieme ai* 4 *vertici del quadrilatero fondamentale, che giacciono fuori di quel lato, compongono un nuovo esa-esagono* (1).

---

(1) Per la configurazione degli assi e centri delle omologie del fascio

$$\sum x_i^4 + 6\lambda \sum x_i^2 x_2^k = 0$$

veggasi anche: GERBALDI: *Sul gruppo semplice di* 360 *collineazioni piane* (questi Rendiconti' 1898-69). Relativamente poi alla quartica $\sum x_i^4 = 0$ citeremo anche WALTHER DYCK che considera il gruppo delle 96 omografie che la trasformano in sè stessa, ma non quelle di esse che sono omologie armoniche: cfr. *Nötiz über eine reguläre* RIEMANN *Fläche vom Geschlechte drei und Zugehorige Normal Curve vieter Ordnung* (Mathematische Annalen, Bd. 17).

UN TEOREMA SOPRA IL COVARIANTE S DELLA QUARTICA PIANA.

[Estratto dal t. XIV (1900) dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*].

Adunanza del 23 luglio 1899.

È noto che Clebsch chiamò col nome di covariante S di una quartica piana il luogo dei punti le cui cubiche polari sono equianarmoniche (1).

Servendosi di una denominazione di Caporali, che indicò col nome di polohessiana di un punto la hessiana della cubica polare del punto (2), si può dire che il covariante S è il luogo dei punti le cui polohessiane si spezzano in tre rette. Se il punto è generico sopra S, tali tre rette hanno posizione generica e compongono il triangolo polohessiano del punto. I vertici di questo triangolo appartengono nuovamente ad S. Il covariante S è del quarto ordine e se la quartica fondamentale non è particolare, esso non ha punti doppi (3). Nasce dunque la questione di sapere se può mai accadere che una quartica coincida col proprio covariante S. Un esempio di questa coincidenza è citato dal Brioschi (4) ed è realizzato da una ben nota curva del 4^0 ordine la cui esistenza fu rilevata la prima volta da Klein (5). È la quartica invariante rispetto al noto gruppo G_{168} di collineazioni piane. Essa gode la proprietà che ogni tangente di flesso la incontra ulteriormente in un flesso di guisa che, con opportuna ed evidente scelta degli elementi di riferimento, la sua equazione può scriversi così:

---

(1) Clebsch, *Ueber Curven vierter Ordnung*. Crelle's Journal, Bd. 57.

(2) Caporali, *Memorie di Geometria* (Frammenti sulla teoria delle curve piane del quarto ordine).

(3) Ciani, *Sopra due curve invariantive della quartica piana*. Annali di Matematica, t. XX, 1892.

(4) Brioschi, *Sopra una classe di curve del 4o ordine*. Atti della R Acc. dei Lincei, s. III, vol. VIII.

(5) Klein, *Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen*. Mathematische Annalen, Bd. XIV.

$$x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 = 0.$$

Noi la chiameremo per brevità « *la quartica di Klein* ».

Non si conosce nessun altro esempio della coincidenza sopra indicata. Ebbene ci proponiamo di dimostrare adesso che, fra le quartiche irriduttibili, non ve ne possono essere altri e che, fra quelle riduttibili, il solo esempio possibile è quello della conica doppia, che, cioè, sussiste il seguente teorema:

Le sole quartiche piane capaci di coincidere col proprio covariante S sono: la quartica di Klein e la conica doppia.

(L'enunciato stesso del teorema esclude le quartiche che hanno S indeterminato).

1. Cominciamo dal considerare le quartiche irriduttibili. La ipotesi della irriduttibilità regge i N^i 1, 2, 3.

Supponiamo dapprima che la quartica abbia almeno un flesso distinto da un punto doppio. Sia (0 0 1) tale flesso, $x_1 = 0$ la sua tangente e $x_3 = 0$ la polare armonica.

Allora l'equazione della quartica C_4 sarà della forma:

$$C_4 \equiv 4 x_1 x_3^3 + x_3 (4 a x_1^3 + 12 b x_1^2 x_2 + 12 c x_1 x_2^2 + 4 d x_2^3) +$$
$$+ m x_1^4 + 4 p x_1^3 x_2 + 6 q x_1^2 x_2^2 + 4 r x_1 x_2^3 + n x_2^4 = 0.$$

Se $d = 0$, il flesso (0 0 1) è un punto di ondulazione. Escludiamo per ora che d sia nullo. La polohessiana P_h del flesso è:

$$P_h \equiv x_1^3 (ac - b^2) + x_1^2 x_2 (ad - bc) + x_1 x_2^2 (bd - c^2) - c x_1 x_3^2 - d x_2 x_3^2 = 0.$$

Essa passa per (0 0 1), come è ben naturale, perchè ogni punto della hessiana appartiene alla propria polohessiana. Se C_4 deve coincidere col proprio covariante S, bisogna intanto che P_h si componga di tre rette di cui una almeno passerà per (0 0 1). Questa non può essere la $x_1 = 0$ altrimenti è $d = 0$ contro la ipotesi. Dunque potremo prenderla come $x_2 = 0$. Allora esigendo che da P_h si stacchi $x_2 = 0$, si trova $c = 0$, $b = 0$. La C_4 diviene:

$$C_4 \equiv 4 x_1 x_3^3 + 4 x_3 (a x_1^3 + d x_2^3) + m x_1^4 + 4 p x_1^3 x_2 +$$
$$+ 6 q x_1^2 x_2^2 + 4 r x_1 x_2^3 + n x_2^4 = 0,$$

e la P_h si compone di un triangolo di cui i vertici sono

$$(1,\ 0,\ \sqrt{a}), \qquad (1,\ 0,\ -\sqrt{a}), \qquad (0,\ 1,\ 0).$$

Questi vertici appartengono nuovamente a S, quindi debbono appartenere anche a C_4. Si hanno così le ulteriori condizioni

$$a = 0, \qquad m = 0, \qquad n = 0,$$

e C_4 si riduce a:

$$C_4 = 4\, x_1\, x_3^3 + 4\, d\, x_3\, x_2^3 + 4\, p\, x_1^3\, x_2 + 6\, q\, x_1^2\, x_2^2 + 4\, r\, x_1\, x_2^3 = 0.$$

La polohessiana di (1 0 0) è il triangolo

$$x_3\, [p^2\, x_1^2 + p\, q\, x_1\, x_2 + x_2^2\, (q^2 - p\, r)] = 0,$$

uno dei suoi vertici, cioè (0 0 1), è già sopra C_4. Perchè ci siano gli altri due, debbono le due equazioni

$$2\, p\, x_1^2 + 3\, q\, x_1\, x_2 + 2\, r\, x_2^2 = 0,$$

$$p^2\, x_1^2 + p\, q\, x_1\, x_2 + (q^2 - p\, r)\, x_2^2 = 0$$

avere le stesse radici in $\frac{x_1}{x_2}$. Si hanno quindi le condizioni:

$$\frac{p^2}{2\, p} = \frac{p\, q}{3\, q} = \frac{q^2 - pr}{2\, r}\,.$$

Risulta subito che è impossibile soddisfarle con $p \neq 0$, $q \neq 0$.

Se $p = 0$, anche $q = 0$, ma allora calcolando il covariante S si vede che è costituito da due rette doppie e quindi la coincidenza voluta non avviene certo perchè C_4 è supposta irriduttibile. Sarà dunque $q = 0$ e $p \neq 0$. Ma in tal caso anche $r = 0$ e quindi

$$C_4 \equiv x_1\, x_3^3 + p\, x_2\, x_1^3 + d\, x_3\, x_2^3 = 0,$$

che è la quartica di Klein.

2. Supponiamo ora $d = 0$. L'invariante S della cubica polare di (0 0 1) è in questo caso: c^2. Dunque $c = 0$.

Si può anche ammettere, senza portare restrizioni di sorta, che (1 0 0) sia sulla C_4: onde $m = 0$ e rimane

$$C_4 \equiv 4\, x_1\, x_3^3 + x_3\, (4\, a\, x_1^3 + 12\, b\, x_1^2\, x_2) + 4\, p\, x_1^3\, x_2 +$$
$$+ 6\, q\, x_1^2\, x_2^2 + 4\, r\, x_1\, x_2^3 + n\, x_2^4 = 0.$$

Calcolando il covariante S si trova (1):

(1) Cfr. ad es. CLEBSCH-LINDEMANN, *Leçon sur la Géométrie*, traduites par A. BENOIST, vol. II, pag. 283. Si avverta ivi un errore di calcolo e cioè: il 1° a_{333} che si trova nella formula esprimente S deve essere invece a_{233}.

$$S \equiv [(q\,y_1 + r\,y_2)\,y_3 - b^2\,y_1^2]^2 +$$
$$+ y_1\,(r\,y_1 + n\,y_2)\,[(p\,y_1 + q\,y_2 + b\,y_3)\,(a\,y_1 + b\,y_2) - b\,y_1\,(p\,y_2 + a\,y_3)] +$$
$$+ y_1\,(q\,y_1 + r\,y_2)\,[(p\,y_1 + q\,y_2 + b\,y_3)\,b\,y_1 - (a\,y_1 + b\,y_2)\,(q\,y_1 + r\,y_2)] +$$
$$+ y_3\,(r\,y_1 + n\,y_2)\,[(a\,y_1 + b\,y_2)\,b\,y_1 - y_3\,(p\,y_1 + q\,y_2 + b\,y_3)] = 0.$$

Ora, se la coincidenza voluta avesse luogo, esaminando nella equazione di S i coefficienti di $y_1\,y_3^3$, $y_2\,y_3^3$, si vede che dovrebbe essere $r\,b \neq 0$, $n\,b = 0$: dunque $n = 0$, ma allora da C_4 si stacca $x_1 = 0$.

3. Sempre rimanendo nella ipotesi della irriduttibilità della quartica data, resta a esaminare il caso in cui essa non possegga flessi, o ondulazioni distinti da punti singolari. Supponiamo dunque che la quartica possegga un punto almeno doppio. La sua cubica polare ha ivi pure un punto doppio, cioè ha nullo il suo discriminante, ma poichè deve per ipotesi annullarsi anche il suo covariante S, segue che si annulla pure l'invariante T e quindi il punto doppio supposto è cuspide per la cubica polare e per conseguenza è anche tale per la quartica fondamentale.

Prendendo questo punto per (0 0 I) e la $x_1 = 0$ per tangente cuspidale, la C_4 sarà rappresentata da una equazione della forma:

$$(1)\qquad \begin{cases} C_4 \equiv 6\,m\,x_1^2\,x_3^2 + x_3\,(4\,a\,x_1^3 + 12\,b\,x_1^2\,x_2 + 12\,c\,x_1\,x_2^2 + d\,x_2^3) + \\ \quad + e\,x_1^4 + 4\,f\,x_1^3\,x_2 + 6\,g\,x_1^2\,x_2^2 + 4\,h\,x_1\,x_2^3 + k\,x_2^4 = 0, \end{cases}$$

e per il covariante S avremo la seguente espressione:

$$S \equiv [(g\,y_1 + h\,y_2 + c\,y_3)\,m\,y_1 - (b\,y_1 + c\,y_2)^2]^2 +$$
$$+ (c\,y_1 + d\,y_2)^2\,[(a\,y_1 + b\,y_2 + m\,y_3)^2 - m\,y_1\,(e\,y_1 + f\,y_2 + a\,y_3)] +$$
$$+ m\,y_1\,(c\,y_1 + d\,y_2)\,[(f\,y_1 + g\,y_2 + b\,y_3)\,(b\,y_1 + c\,y_2) +$$
$$- (g\,y_1 + h\,y_2 + c\,y_3)\,(a\,y_1 + b\,y_2 + m\,y_3)] +$$
$$+ [m\,y_1\,(h\,y_1 + k\,y_2 + d\,y_3) - 2\,(b\,y_1 + c\,y_2)\,(c\,y_1 + d\,y_2)] \times$$
$$\times [(a\,y_1 + b\,y_2 + m\,y_3)\,(b\,y_1 + c\,y_2) - m\,y_1\,(f\,y_1 + g\,y_2 + b\,y_3)] = 0.$$

Se S deve coincidere con C_4, bisogna che sia nullo il coefficiente di $y_2^2\,y_3^2$ che è $m\,d$. Ma per $m = 0$ si vede subito che S è un quadrato perfetto. Dunque sarà $d = 0$. Allora la cubica polare di (0 0 1) è:

$$x_1\,(3\,m\,x_1\,x_3 + a\,x_1^2 + 3\,b\,x_1\,x_2 + 3\,c\,x_3^2) = 0.$$

Si osservi adesso che la conica

$$3\,m\,x_1\,x_3 + a\,x_1^2 + 3\,b\,x_1\,x_2 + 3\,c\,x_2^2 = 0$$

non può spezzarsi in una coppia di rette, perchè ne seguirebbe $m = 0$, op-

pure $c = 0$ e nel 1° caso S (come già abbiamo osservato) sarebbe un quadrato perfetto, nel 2° da S si staccherebbe $y_1 = 0$. Dunque potremo prendere il punto (1 0 0) su tale conica e la tangente in quel punto per retta $x_3 = 0$. Ciò non conduce a nessuna restrizione e d'altra parte l'equazione di C_4 si semplifica dovendo essere

$$a = 0, \qquad b = 0$$

e rimane:

$$S \equiv [(g\,y_1 + h\,y_2 + c\,y_3)\,m\,y_1 - c^2\,y_2^2]^2 + c^2\,y_1^2\,[m^2\,y_3^2 - m\,y_1\,(e\,y_1 + f\,y_2)] +$$
$$+ m\,c\,y_1^2\,[(f\,y_1 + g\,y_2)\,c\,y_2 - m\,y_3\,(g\,y_1 + h\,y_2 + c\,y_3)] +$$
$$+ y_1\,[m\,(h\,y_1 + k\,y_2) - 2\,c^2\,y_2]\,[c\,m\,y_2\,y_3 - m\,y_1\,(f\,y_1 + g\,y_2)] = 0.$$

Seguitando il confronto, con l'equazione di C_4, si trova che debbono esser nulli i coefficienti di $y_1^2\,y_2\,y_3$ e di $y_1^3\,y_3$, il che porta che sia (poichè $m \neq 0$, $c \neq 0$)

$$h = 0, \qquad g = 0,$$

e quindi S diviene:

$$S \equiv m^2\,c^2\,y_1^2\,y_3^2 + y_1\,y_2^2\,y_3\,(m^2\,k\,c - 4\,m\,c^3) - e\,c^2\,m\,y_1^4 +$$
$$+ y_1^3\,y_2\,(2\,m\,f\,c^2 - m^2\,k\,f) + c^4\,y_2^4 = 0;$$

e proseguendo il confronto:

$$\frac{6}{k} = \frac{m}{c^2}, \qquad \frac{e}{k} = \frac{e\,m}{c^2},$$

dalle quali, se $e \neq 0$, segue $k = 0$: ma allora da C_4 si stacca x_1. Dunque $e = 0$, $k = \dfrac{6\,c^2}{m}$. Servendosi adesso dell'ultima condizione:

$$\frac{4\,f}{k} = \frac{f\,(2\,m\,c^2 - m^2\,k)}{c^4}$$

e introducendo in essa $k = \dfrac{6\,c^2}{m}$, si vede che siamo necessariamente condotti a $f = 0$ e per C_4 rimane:

$$C_4 \equiv 6\,m\,x_1^2\,x_3^2 + 12\,c\,x_1\,x_2^2\,x_3 + k\,x_2^4 = 0,$$

la quale si compone di due coniche bitangenti. Dunque per le quartiche irriduttibili il teorema è dimostrato.

4. Passiamo alle quartiche riduttibili e cominciano da una quartica composta di una retta e di una cubica irriduttibile. Il ragionamento fatto

al principio del N⁰ 3, prova che ogni punto d'incontro della retta con la cubica deve costituire, per la quartica totale, un punto doppio con le tangenti riunite: dunque la retta suddetta incontra la cubica in tre punti riuniti e quindi la equazione della C_4 attuale si dedurrà dalla (1) del N⁰ 3 supponendo:

$$d = k = c = 0;$$

ma allora da S si stacca $y_1^2 = 0$ e quindi la coincidenza cercata è impossibile.

5. Lo stesso ragionamento sopra citato dimostra che non rimangono a discutersi utilmente che i seguenti casi: due coniche bitangenti, una retta doppia e una conica, 4 rette passanti per un punto.

Negli ultimi due casi si riconosce facilmente che la coincidenza voluta è impossibile perchè S, o si riduce a una retta quadrupla, o è indeterminato.

Restano le coniche bitangenti. La loro equazione complessiva può scriversi

$$6\,m\,x_1^2\,x_2^2 + 12\,n\,x_1\,x_2\,x_3^2 + p\,x_3^4 = 0. \tag{2}$$

Se le equazioni separate delle due coniche sono

$$\alpha\,x_1\,x_2 + \beta\,x_3^2 = 0,$$

$$\alpha'\,x_1\,x_2 + \beta'\,x_3^2 = 0,$$

i due rapporti $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha'}{\beta'}$ che le individuano sono le radici della equazione di 2⁰ grado:

$$p\,z^2 - 12\,n\,z + 6\,m = 0.$$

Calcolando S si trova:

$$S \equiv m^2\,n^2\,y_1^2\,y_2^2 + y_1\,y_2\,y_3^2\,(m^2\,n\,p - 4\,m\,n^3) + n^4\,y_3^4 = 0.$$

Dunque le condizioni di coincidenza sono

$$\frac{6\,m}{p} = \frac{m^2\,n^2}{n^4}, \qquad \frac{12\,n}{p} = \frac{m^2\,n\,p - 4\,m\,n^3}{n^4},$$

Si esclude $p = 0$ perchè dovrebbe anche essere $n = 0$ e quindi S indeterminato: così pure si esclude $m = 0$.

Allora le due condizioni precedenti si riducono all'unica

$$6\,n^2 = m\,p,$$

la quale esprime che la (2) ha una radice doppia, che cioè le due coniche coincidono.

Il teorema è dunque dimostrato.

CONTRIBUTO ALLA TEORIA DEL GRUPPO DI 168 COLLINEAZIONI PIANE

[*Ann. di Matem.ca 1900*]

Il primo intendimento col quale fu scritto questo lavoro era di risolvere la seguente questione inerente alle curve piane del 4° ordine. È stato recentemente dimostrato che una quartica generica può riguardarsi come covariante S di altre 36 quartiche (1). Ora, la cosidetta quartica di Klein, invariante rispetto al noto gruppo di 168 collineazioni piane, gode la proprietà di essere covariante S di sè medesima. Si può dunque domandare quali sono le altre 35 di cui la precedente è covariante S secondo il teorema sopra citato. La questione è completamente risoluta ai n.i 16-22. Ma con essa se ne sono presentate e sono state trattate altre che a quella più, o meno, manifestamente si collegano e che sono poi tutte dipendenti dal gruppo suddetto di 168 collineazioni piane. L' isomorfismo oloedrico che passa fra questo gruppo e il gruppo modulare di ugual ordine dà agio di passare con semplicità dalle note proprietà di quest'ultimo a quelle del primo ricavandone così delle interpretazioni geometriche che mi sembrano interessanti. I primi nove numeri sono destinati a riassumere quelle proprietà già note, o facili a dedursi, del G_{168} modulare, che sono necessarie per il seguito.

I.

1. Cominciamo dal ricordare ciò che s' intenda per gruppo modulare (2): sia p un numero primo e si prendano $p+1$ elementi $x_\infty\ x_0\ x_1\ x^2 \ldots x_{p-1}$

(1) SCORZA, *Un nuovo teorema sopra le quartiche piane generali* (Math. Ann.: Bd. 52, 1899).

(2) Per la teoria dei gruppi modulari veggansi ad esempio le lezioni del prof. BIANCHI, recentemente pubblicate, sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche (Pisa, Spoerri, 1899).

caratterizzati dai $p+1$ indici: $\infty, 0, 1, 2, \ldots p-1$, allora la relazione

$$x' \equiv \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \pmod{p}$$

con la condizione $(\alpha\delta - \beta\gamma) \equiv 1 \pmod{p}$, per ogni valore di $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ serve a produrre una sostituzione sopra gl' indici suddetti e quindi sopra i $p+1$ elementi dati. Tali sostituzioni, per tutti i possibili valori di $\alpha\beta\gamma\delta$, compongono un gruppo che si chiama *modulare* in relazione alla teoria delle funzioni modulari ellittiche. Due sistemi di valori $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$; $\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''$ producono la stessa sostituzione quando $\alpha' + \alpha'' \equiv 0$, $\beta' + \beta'' \equiv 0$, $\gamma' + \gamma'' \equiv 0$, $\delta' + \delta'' \equiv 0$. L'ordine del gruppo è $\frac{p(p^2-1)}{2}$. Per $p = 3$, $p = 5$ il gruppo è in isomorfismo oloedrico rispettivamente con i gruppi alterni sopra 4 e sopra 5 elementi. Il 1° caso interessante si ha per $p = 7$. Il gruppo relativo, che noi indicheremo con G_{168}, è composto di 168 sostituzioni operanti sopra 8 elementi che chiameremo gli elementi fondamentali del gruppo medesimo. È di questo di cui ora vogliamo ricordare le proprietà principali (1).

2. Le sostituzioni del gruppo si possono classificare, in riguardo al valore del periodo, il quale è caratterizzato dalle condizioni di congruenza nelle quali si trova la somma $\alpha + \delta$ rispetto al modulo 7. Si trovano così:

21 sostituzioni di periodo 2, $(\alpha + \delta \equiv 0)$.

56 sostituzioni di periodo 3, $(\alpha + \delta \equiv \pm 1)$. Esse si distribuiscono in 28 paia in guisa che quelle di ogni paio sono l'una la 2ª potenza dell'altra.

42 sostituzioni di periodo 4, $(\alpha + \delta \equiv 3)$. Esse pure si dividono iu 21 paia: quelle di un paio sono ciascuna la 3ª potenza dell'altra. Il quadrato di una qualunque di queste ha il periodo 2.

48 sostituzioni di periodo 7, $(\alpha + \delta \equiv \pm 2)$. Esse si riuniscono, a 6, a 6 con l' identità per formare 8 gruppi di potenze di una medesima sostituzione.

Aggiungendo a queste 167 sostituzioni l'identità si ha il G_{168} suddetto. Esso, come ogni altro gruppo modulare per $p > 3$, è semplice. Quanto alla sua struttura può riassumersi brevemente così:

Esistono in G_{168} con i loro rispettivi sottogruppi:

---

(1) KLEIN, *Ueber die Transformation Siebenter Ordnung der elliptischen Functioneu* (Math. Ann.: Bd. 14). KLEIN-FRICKE, *Vorlesungen über die Theorie der Elliptischen Modulfünctionen.* Vol. I°, pag. 369. Lipsia. Teubner 1890.

a) 14 gruppi di 24° ordine ciascuno dei quali è in isomorfismo oloedrico col noto gruppo ottaedrico,

b) 8 gruppi di 21° ordine.

3. Per mettere in rilievo le relazioni che passano fra gli uni e gli altri è indispensabile anche ricordare, con opportune notazioni che ci serviranno pure in seguito, la composizione e la struttura di un gruppo ottaedrico. Se $a\ b\ c\ d$ sono i 4 elementi del gruppo, le 24 sostituzioni possono caratterizzarsi così:

$$S_1 = 1\,;\quad S_2 = (a\,b)(c\,d)\,;\quad S_3 = (a\,c)(b\,d)\,;\quad S_4 = (a\,d)(b\,c)\,;$$

$$S_5 = (b\,c\,d)\,;\quad S_6 = (a\,c\,d)\,;\quad S_7 = (a\,b\,d)\,;\quad S_8 = (a\,b\,c)\,;$$

$$S_9 = (b\,d\,c)\,;\quad S_{10}\,(a\,d\,c)\,;\quad S_{11} = (a\,d\,b)\,;\quad S_{12} = (a\,c\,b)\,;$$

$$S_{13} = (a\,b)\,;\quad S_{14} = (c\,d)\,;\quad S_{15} = (b\,d)\,;\quad S_{16} = (a\,c)\,;\quad S_{17} = (a\,d)\,;\quad S_{18} = (b\,c)\,;$$

$$S_{19} = (a\,b\,c\,d)\,;\quad S_{21} = (a\,b\,d\,c)\,;\quad S_{23} = (a\,c\,b\,d)\,;$$

$$S_{20} = (a\,d\,c\,b)\,;\quad S_{22} = (a\,c\,d\,b)\,;\quad S_{24} = (a\,d\,b\,c)\,.$$

Ecco la descrizione dei sottogruppi:

I° Nove sottogruppi di 2° ordine (perchè 9 sono le sostituzioni di periodo 2):

$$G_2^{\mathrm{I}} = (S_1\,S_2)\,;\quad G_2^{\mathrm{II}} = (S_1\,S_3)\,;\quad G_2^{\mathrm{III}} = (S_1\,S_4)\,;$$

$$G_2^{\mathrm{IV}} = (S_1\,S_{13})\,;\quad G_2^{\mathrm{V}} = (S_1\,S_{14})\,;\quad G_2^{\mathrm{VI}} = (S_1\,S_{15})\,;$$

$$G_2^{\mathrm{VII}} = (S_1\,S_{16})\,;\quad G_2^{\mathrm{VIII}} = (S_1\,S_{17})\,;\quad G_2^{\mathrm{IX}} = (S_1\,S_{18}).$$

II° Quattro sottogruppi di 3° ordine:

$$G_3^{\mathrm{I}} = (S_1\,S_5\,S_9)\,;\quad G_3^{\mathrm{II}} = (S_1\,S_6\,S_{10})\,;$$

$$G_3^{\mathrm{III}} = (S_1\,S_7\,S_{11})\,;\quad G_3^{\mathrm{IV}} = (S_1\,S_8\,S_{12})\,.$$

III° Sette sottogruppi di 4° ordine divisi in due specie e cioè quattro costituiti da sostituzioni di periodo due, e tre composti, ciascuno, con due sostituzioni di periodo due e due di periodo quattro.

I primi quattro sono:

$$G_4^{\mathrm{I}} = (S_1\,S_2\,S_3\,S_4)\,;\quad G_4^{\mathrm{II}} = (S_1\,S_2\,S_{13}\,S_{14})\,;$$

$$G_4^{\mathrm{III}} = (S_1\,S_3\,S_{15}\,S_{16})\,;\quad G_4^{\mathrm{IV}} = (S_1\,S_4\,S_{17}\,S_{18})\,,$$

il G_4^{I} è *invariante*; gli altri non lo sono.

I secondi tre sono invece:

$$G_4^{\mathrm{V}} = (S_1\,S_{19}\,S_3\,S_{20})\,;\quad G_4^{\mathrm{VI}} = (S_1\,S_{21}\,S_4\,S_{22})\,;\quad G_4^{\mathrm{VII}} = (S_1\,S_{23}\,S_2\,S_{24})\,.$$

VI° Quattro sottogruppi di 6° ordine:

$$G_6^{\mathrm{I}} = (S_{13}\, S_{15}\, S_{17}\, S_1\, S_7\, S_{11}); \quad G_6^{\mathrm{II}} = (S_{14}\, S_{16}\, S_{17}\, S_1\, S_6\, S_{10});$$

$$G_6^{\mathrm{III}} = (S_{13}\, S_{16}\, S_{18}\, S_1\, S_8\, S_{12}); \quad G_6^{\mathrm{IV}} = (S_{15}\, S_{14}\, S_{18}\, S_1\, S_5\, S_9).$$

V° Tre sottogruppi di 8° ordine:

$$G_8^{\mathrm{I}} = (S_1\, S_2\, S_3\, S_4\, S_{13}\, S_{14}\, S_{23}\, S_{24});$$

$$G_8^{\mathrm{II}} = (S_1\, S_2\, S_3\, S_4\, S_{15}\, S_{16}\, S_{19}\, S_{20});$$

$$G_8^{\mathrm{III}} = (S_1\, S_2\, S_3\, S_4\, S_{17}\, S_{18}\, S_{21}\, S_{22}).$$

VI° Un sottogruppo di 12° ordine (gruppo alterno):

$$G_{12}^{\mathrm{I}} = (S_1\, S_2\, S_3\, S_4\, S_5\, S_6\, S_7\, S_8\, S_9\, S_{10}\, S_{11}\, S_{12}).$$

4. Esistono in G_{168} quattordici G_{24} ciascuno isoformo oloedricamente al precedente. La determinazione di tali G_{24} si riduce a quella dei loro G_4 invarianti perchè vi è corrispondenza biunivoca fra i 14 G_{24} e i 14 G_4. Cominciamo dunque da questi ultimi. Per questo, si osservi che le sostituzioni di periodo 2 del G_{168} sono le seguenti:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0, & 2 \\ 3, & 0 \end{pmatrix}; \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0, & 3 \\ 2, & 0 \end{pmatrix}; \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 6, & 0 \end{pmatrix};$$

$$T_4 = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 5, & -1 \end{pmatrix}; \quad T_5 = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 6, & -1 \end{pmatrix}; \quad T_6 = \begin{pmatrix} 1, & 3 \\ 4, & -1 \end{pmatrix};$$

$$T_7 = \begin{pmatrix} 1, & 4 \\ 3, & -1 \end{pmatrix}; \quad T_8 = \begin{pmatrix} 1, & 5 \\ 1, & -1 \end{pmatrix}; \quad T_9 = \begin{pmatrix} 1, & 6 \\ 2, & -1 \end{pmatrix};$$

$$T_{10} = \begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 2, & -2 \end{pmatrix}; \quad T_{11} = \begin{pmatrix} 2, & 2 \\ 1, & -2 \end{pmatrix}; \quad T_{12} = \begin{pmatrix} 2, & 3 \\ 3, & -2 \end{pmatrix};$$

$$T_{13} = \begin{pmatrix} 2, & 4 \\ 4, & -2 \end{pmatrix}; \quad T_{14} = \begin{pmatrix} 2, & 5 \\ 6, & -2 \end{pmatrix}; \quad T_{15} = \begin{pmatrix} 2, & 6 \\ 5, & -2 \end{pmatrix};$$

$$T_{16} = \begin{pmatrix} 3, & 1 \\ 4, & -3 \end{pmatrix}; \quad T_{17} = \begin{pmatrix} 3, & 2 \\ 2, & -3 \end{pmatrix}; \quad T_{18} = \begin{pmatrix} 3, & 3 \\ 6, & -3 \end{pmatrix},$$

$$T_{19} = \begin{pmatrix} 3, & 4 \\ 1, & -3 \end{pmatrix}; \quad T_{20} = \begin{pmatrix} 3, & 5 \\ 5, & -3 \end{pmatrix}; \quad T_{21} = \begin{pmatrix} 3, & 6 \\ 3, & -3 \end{pmatrix},$$

e provengono da tutte le possibili e diverse soluzioni di:

$$\alpha\,\delta - \beta\,\gamma \equiv 1, \quad \alpha + \delta \equiv 0 \pmod 7.$$

Ebbene, esse si raggruppano in 14 gruppi Γ_4 che sono quelli domandati. Per trovarne uno basta scegliere tre T_i a due, permutabili e aggiun-

gervi la identità. Si ottengono così i seguenti Γ_4 descritti in questa tabella:

$$\Omega'_7 = \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_4^{\mathrm{I}} = (1\ T_1\ T_{10}\ T_{19}) \\ \Gamma_4^{\mathrm{III}} = (1\ T_2\ T_{11}\ T_{16}) \\ \Gamma_4^{\mathrm{V}} = (1\ T_3\ T_{13}\ T_{17}) \\ \Gamma_4^{\mathrm{VII}} = (1\ T_4\ T_6\ T_{14}) \\ \Gamma_4^{\mathrm{IX}} = (1\ T_5\ T_9\ T_{12}) \\ \Gamma_4^{\mathrm{XI}} = (1\ T_7\ T_8\ T_{15}) \\ \Gamma_4^{\mathrm{XIII}} = (1\ T_{18}\ T_{20}\ T_{21}) \end{array} \right. \qquad \Omega''_7 = \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_4^{\mathrm{II}} = (1\ T_1\ T_{15}\ T_{18}) \\ \Gamma_4^{\mathrm{IV}} = (1\ T_2\ T_{14}\ T_{21}) \\ \Gamma_4^{\mathrm{VI}} = (1\ T_3\ T_{12}\ T_{20}) \\ \Gamma_4^{\mathrm{VIII}} = (1\ T_4\ T_8\ T_{13}) \\ \Gamma_4^{\mathrm{X}} = (1\ T_5\ T_{10}\ T_6\ ) \\ \Gamma_4^{\mathrm{XII}} = (1\ T_7\ T_9\ T_{11}) \\ \Gamma_4^{\mathrm{XIV}} = (1\ T_{16}\ T_{17}\ T_{19}). \end{array} \right.$$

Vedremo in seguito le ragioni dei due precedenti raggruppamenti.

Due Γ_4 possono trovarsi nelle seguenti mutue condizioni:

1° Hanno una sostituzione T a comune (Γ_4^{I} e Γ_4^{II})

2° Oppure una sostituzione T dell'uno è permutabile con una T dell'altro (Γ_4^{I} e Γ_4).

3° Non hanno ne sostituzioni comuni, nè permutabili (Γ_4^{I}, Γ_4^{IV}).

Nel 1° caso i due gruppi si chiameranno *coniugati di 1ª specie*, nel 2° *coniugati di 2ª specie*, nel 3° *coniugati di 3ª specie*. — Un Γ_4 (ad es. Γ_4^{I}) è coniugato di 1ª specie con altri tre (Γ_4^{II}, Γ_4^{X}, Γ_4^{XIV}), di 2ª specie con altri sei (Γ_4^{III}, Γ_4^{V}, Γ_4^{VII}, Γ_4^{IX}, Γ_4^{XI}, Γ_4^{XIII}), di 3ª specie con altri quattro (Γ_4^{IV}, Γ_4^{IV}, Γ_4^{VIII}, Γ_4^{XII}). Due Γ_4 coniugati di 2ª specie (Γ_4^{I}, Γ_4^{III}) sono coniugati di 1ª specie ad un medesimo Γ_4 (che nel nostro caso è Γ_4^{XIV}). Due Γ_4 coniugati di 3ª specie sono invece tali che un coniugato di 1ª specie dell'uno è coniugato di 2ª specie dell'altro, ovvero un coniugato di 1ª specie dell'uno è coniugato di 1ª specie ad un coniugato di 1ª specie dell'altro. Ma su questo proposito l'osservazione più interessante è la seguente: i coniugati di 2ª specie di un medesimo Γ_4 sono coniugati di 2ª specie fra loro. *Cioè i quattordici Γ_4 si possono dividere in due gruppi Ω'_7, Ω''_7 di sette ognuno così che i Γ_4 di uno stesso gruppo siano fra loro coniugati di 2ª specie e viceversa.* Altra e più importante ragione degli aggruppamenti Ω'_7, Ω''_7 sarà esposta al N. 8.

5. Ciò premesso, la costruzione dei G_{24} è ben semplice. Abbiamo già detto che ogni G_{24} ha per sotttogruppo invariante di 4° ordine un Γ_4. Ebbene, dato un Γ_4 per trovare il G_{24} che lo contiene come invariante, basta aggiungere al Γ_4 dato, i suoi tre Γ_4 coniugati di 1ª specie: si ottengono così

le 9 sostituzioni di periodo 2 del G_{24} cercato, dalle combinazioni delle quali si può molto facilmente completare il G_{24} medesimo.

Si estendono ai G_{24} le denominazioni stabilite per i Γ_4. Due G_{24} si chiamano coniugati di 1ª, 2ª, 3ª specie quando i loro Γ_4 invarianti siano coniugati di 1ª, 2ª, 3ª specie.

6. *Due gruppi ottaedrici coniugati di 1ª specie hanno a comune un sottogruppo G_8 di ottavo ordine.*

Infatti si considerino i due G_{24} che hanno per Γ_4 invarianti:

$$L_4^{I} = (1\ T_1\ T_{10}\ T_{19}),\quad \Gamma_4^{II} = (1\ T_1\ T_{15}\ T_{18}),$$

coniugati di 1ª specie. Secondo la legge di formazione dei G_{24}, dianzi ricordata, tali Γ_4 appartengono entrambi ad entrambi i due G_{24} in questione. Ma due sottogruppi di 4° ordine costituiti con sostituzioni di periodo 2, appartenenti ad uno stesso G_{24} e uno essendone invariante, esistono in un medesimo G_8 (N 3). È il G_8 cercato. È evidente che i due gruppi considerati non hanno altre sostituzioni comuni.

7. *Due gruppi ottaedrici coniugati di 2ª specie hanno a comune un sottogruppo Γ_4 di 4° ordine (che naturalmente non è invariante per alcuno di essi).*

Siano i due G_{24} aventi per Γ_4 invarianti:

$$\Gamma_4^{I} = (1\ T_1\ T_{10}\ T_{19}),\quad \Gamma_4^{III} = (1\ T_2\ T_{11}\ T_{16}),$$

coniugati di 2ª specie. Le sostituzioni permutabili sono T_{16}, T_{19} ed esistono (N. 4) nel:

$$\Gamma_4^{XIV} = (1\ T_{16}\ T_{17}\ T_{19}),$$

il quale è coniugato di 1ª specie ai due Γ_4 dati. Dunque appartiene ai due G_{24} che posseggono tali Γ_4 come invarianti. È facile verificare che non ci sono altre sostituzioni comuni.

8. *Due gruppi ottaedrici coniugati di 3ª specie hanno a comune un sottogruppo G_6 del sesto ordine.*

Abbiansi i due gruppi ottaedrici di cui i Γ_4 invarianti sono:

$$\Gamma_4^{I} = (1\ T_1\ T_{10}\ T_{19}),\quad \Gamma_4^{IV} = (1\ T_2\ T_{14}\ T_{21}).$$

Ora, secondo il N° 5, il 1° gruppo ottaedrico contiene le ulteriori sostituzioni di periodo 2: $T_{15}\ T_{18}\ T_5\ T_6\ T_{16}\ T_{17}$ e il 2°: $T_{11}\ T_{16}\ T_4\ T_6\ T_{18}\ T_{20}$ per cui sono sostituzioni comuni le seguenti:

$$T_6\ T_{16}\ T_{18},$$

ed esse generano il sottogruppo G_6 cercato. Nen vi sono altre sostituzioni comuni.

9. Si ritrova così facilmente il numero dei sottogruppi G_3, G_6, G_8, G_{12} contenuti in G_{168}. Secondo i N^i 3, 4, 5, 6, 7 esisteranno in G_{168} (come Klein afferma) tanti G_3 e tanti G_6 quanti ne esprime il numero $\frac{14 \cdot 4}{2} = 28$, tanti G_8 quanti ne esprime il numero $\frac{14 \cdot 3}{2} = 21$ e finalmente 14 G_{12}. Segue anche che i sette G_{24} aventi per Γ_4 invarianti quelli di Ω'_7, o di Ω''_7 esauriscono tutte le sostituzioni di periodo 2, 3, 4 e quindi anche tutti i G_3, G_6, G_8, G_{12} di G_{168}. — Ciò posto vogliamo adesso dimostrare che niuna sostituzione del G_{168} può portare un Γ_4 (o nn G_{24}) di Ω'_7 in un Γ_4 (o G_{24}) di Ω''_7. — Infatti applichiamo a Ω'_7 una sostituzione di periodo 2, o 3, o 4. Poichè, come già abbiamo osservato, una tale sostituzione appartiene almeno a uno dei sette G_{24} di Ω'_7, tale G_{24} e il suo invariante Γ_4 saranno trasformati in sè stessi e quindi saranno permutati fra loro i coniugati di 2ª specie del Γ_4 suddetto, cioè precisamente saranno permutati fra loro gli altri sei Γ_4 che con quello in parola compongono Ω'_7 (N° 4). — È dunque impossibile che per effetto di una tale sostituzione un Γ_4 di Ω'_7 sia portato in un Γ_4 di Ω''_7 e quindi ciò è impossibile per qualsiasi altra sostituzione del G_{168} chè esso può certamente generarsi mediante prodotti di sostituzioni col periodo 2, 3, 4. — Viceversa prendiamo due qualunque Γ_4 di Ω'_7, ad es.:

$$\Gamma_4^{\mathrm{I}} = (1\ T_1\ U_{10}\ T_{19}), \quad \Gamma_4^{\mathrm{III}} = (1\ T_2\ T_{11}\ T_{16}),$$

essi sono coniugati di 2ª specie fra loro, ed entrambi coniugati di 1ª specie con:

$$\Gamma_4^{\mathrm{XIV}} = (1\ T_{16}\ T_{17}\ T_{19}).$$

Ogni sostituzione che porti T_{19} in T_{16} porterà Γ_4^{I} in un Γ_4 contenente T_{16} ma non certo in Γ_4^{XIV} perchè Γ_4^{I} e Γ_4^{XIV} appartengono rispettivamente a Ω'_7, Ω''_7; dunque necessariamente tale sostituzione porterà Γ_4^{I} in Γ_4^{III}. Le sostituzioni che portano T_{19} in T_{16} non è dubbio che possano mancare; per trovarle basterebbe sceglierle nel G_{24} che ha per invariante Γ_4^{XIV}. Quindi si può dire che due qualunque Γ_4 (o G_{24}) di Ω'_7, (o di Ω''_7) possono esser sempre trasformati l'uno nell'altro mediante sostituzioni del G_{168}. Cioè:

Il G_{168} opera transitivamente sopra i Γ_4 (o G_{24}) appartenenti a un medesimo sistema Ω_7 e intransitivamente sopra Γ_4 (o G_{24}) appartenenti a sistemi Ω_7 diversi. — In altre parole: i due aggruppamenti Ω_7 formati ciascuno da Γ_4 (o G_{24}), a due, a due, coniugati di 2ª specie, realizzano i due

noti sistemi, di 7 elementi ciascuno, sopra i quali può operare il G_{168} (1).

10. Chiuderemo queste poche osservazioni sul G_{168}, indispensabili per il seguito, notando e ricordando come per gli 8 elementi fondamentali sui quali esso opera (N° 1) si possano prendere gli 8 sottogruppi d'ordine 7 ovvero gli 8 sottogruppi d'ordine 21, onde ne viene che il G_{168} opera transitivamente tanto sui primi quanto sui secondi.

II.

11. Tutto ciò che è noto rispetto al gruppo di 168 collineazioni piane è esposto e riassunto con efficace semplicità nella bella opera del Weber già citata e precisamente nel capitolo: *Gruppen linearer ternärer Substitutionen* Vol. II, pag. 433 e di cui si suppone la conoscenza.

Poichè fra il G_{168} modulare e il presente gruppo di collineazioni piane esiste isomorfismo oloedrico, a ogni sostituzione, a ogni sottogruppo del 1° corrisponde una sostituzione e un sottogruppo del 2°.

Seguiteremo a indicare con la lettera G_i (dove i è l'ordine) il gruppo modulare e i suoi sottogruppi; mentre adopreremo la lettera G_i per il gruppo di 168 collineazioni e relativi sottogruppi. Così, ad esempio, ricordando la struttura del G_{168} (N° 2) diremo che il G_{168} contiene 14 G_{24} (gruppi ottaedrici) e 8 G_{21} con i relativi sottogruppi.

Consideriamo uno dei 14 sottogruppi ottaedrici G_{24} e il suo sottogruppo invariante di 4° ordine G_4. Quest'ultimo è composto dell'identità e di tre omologie armoniche tali che ciascuna è il prodotto delle altre due. Dunque esse saranno individuate da un triangolo in guisa che ogni vertice col lato opposto costituisce centro e asse di una delle omologie suddette. Poichè il G_4 è invariante di G_{24} anche tale triangolo sarà invariabile per tutte le collineazioni del G_{24} e perciò sarà chiamato il *triangolo invariante* del gruppo ottaedrico considerato. Assumendolo come fondamentale e servendosi delle stesse notazioni del N° 2, il G_4 sarà costituito dalle 4 sostituzioni:

$$S_1 = 1\,, \quad S_2 = (a\,b)\,(c\,d) = \begin{pmatrix} -x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$S_3 = (a\,c)\,(b\,d) = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad S_4 = (a\,d)\,(b\,c) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

(1) KLEIN-FRICKE, Cf. loc. cit. Vol. I pag. 383 e l'ultimo capitolo *Das Galois'sche Problem 168ten Grades und seine Resolventen 8ten und 7ten Grades* (pag. 732). — WEBER, *Lehrbuch der Algebra:* cf. il Vol. II. particolarmente il capitolo *Das Formenproblem der Gruppe* G_{168} *und die Theorie der Gleichungen Siebenten Grades*, pag. 466.

Per trovare ad es. S_{13}, S_{14} si osservi che, dall'esistenza del sottogruppo $(S_1\, S_2\, S_3\, S_{13}\, S_{14})$, ne segue che ciascuna delle tre S_2, S_{13}, S_{14} deve essere il prodotto delle altre due. Dunque rispondendo opportunamente del punto unità avremo:

$$S_{13} = (a\,b) = \begin{pmatrix} -x_1 & x_3 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad S_{14} = (c\,d) = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Analogamente si trova:

$$S_{15} = (b\,d) = \begin{pmatrix} x_3 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad S_{16} = (a\,c) = \begin{pmatrix} x_3 & -x_2 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$S_{17} = (a\,d) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & -x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad S_{18} = (b\,c) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

e adesso da queste si hanno le altre sostituzioni del G_{24}:

$$S_5 = (b\,c\,d) = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad S_9 = (b\;d\;c) = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$S_6\;(a\;c\;d) = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 & -x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad S_{10} = (a\,d\,c) = \begin{pmatrix} x_2 & -x_3 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$S_7 = (a\,b\,d) = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & -x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad S_{11} = (a\,d\,b) = \begin{pmatrix} -x_3 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$S_8 = (a\,b\,c) = \begin{pmatrix} x_3 & -x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad S_{12} = (a\,c\,b) = \begin{pmatrix} -x_2 & x_3 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$S_{19} = (a\,b\,c\,d) = \begin{pmatrix} x_3 & x_2 & -x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 \end{pmatrix}, \qquad S_{20} = (a\,d\,c\,b) = \begin{pmatrix} -x_3 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$S_{21} = (a\,b\,d\,c) = \begin{pmatrix} x_2 & -x_1 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad S_{22} = (a\,c\,d\,b) = \begin{pmatrix} -x_2 & x_1 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$S_{23} = (a\,c\,b\,d) = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & -x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad S_{24} = (a\,d\,b\,c) = \begin{pmatrix} x_1 & -x_3 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

Tutte le sostituzioni del gruppo ottaedrico di collineazioni piane possono rappresentarsi sotto l'unica forma:

$$\begin{pmatrix} \pm x_i & \pm x_k & \pm x_l \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \ldots\; i,\, k,\, l = 1,\, 2,\, 3.$$

12. Varie sono le conseguenze. Enumereremo qui le più importanti per il nostro scopo:

I°. Le quattro rette:

$$a \equiv x_1 + x_2 + x_3 = 0\,,$$
$$b \equiv -x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$c \equiv x_1 - x_2 + x_3 = 0\,,$$
$$d \equiv x_1 + x_2 - x_3 = 0\,,$$

compongono un quadrilatero invariante rispetto all'intero gruppo ottaedrico. Lo chiameremo *il quadrilatero invariante del gruppo.* I suoi lati servono a dare una interpretazione geometrica ai 4 elementi a, b, c, d. Il triangolo diagonale è invariante del gruppo.

II. *Tutte le curve invarianti del gruppo ottaedrico possono essere rappresentate da una equazione della forma:*

$$\varphi(x_1^2, x_2^2, x_3^2) = 0,$$

dove la φ *è simmetrica in* $x_1 x_2 x_3$.

III. Ogni covariante, o contravariante di un quadrilatero (considerato come curva del 4° ordine) deve rimanere invariato per tutte le collineazioni che trasformano il quadrilatero in sè stesso. Quindi:

L'equazione di dianzi:

$$\varphi(x_1^2, x_2^2, x_3^2) = 0,$$

e l'altra:

$$\psi(u_1^2, u_2^2, u_3^2) = 0,$$

dove la ψ *è pure simmetrica in* $u_1 u_2 u_3$ *possono rappresentare rispettivamente tutti i covarianti e contravarianti del quadrilatero.*

IV. *L'unica conica covariante del quadrilatero è:*

$$\Sigma x_i^2 = 0,$$

ossia la cosidetta conica dei 14 punti (1).

V. *Tutte le quartiche covarianti del quadrilatero sono quelle del fascio:*

$$\Sigma x_i^4 + 6\lambda \Sigma x_i^2 x_k^2 = 0,$$

Ora, la quartica di Klein è certo invariante rispetto al gruppo ottaedrico, dunque:

La quartica di Klein *appartiene al fascio precedente.*

Per $\lambda = -\frac{1}{3}$ si trova il quadrilatero invariante, per $\lambda = \frac{1}{3}$ si ha la sua conica covariante contata due volte. Indicandola con C l'equazione del fascio può scriversi:

$$a\,b\,c\,d + \lambda\, C^2 = 0.$$

Quindi:

(1) Ricorderemo che questi 14 punti sono i seguenti: 8 sono, a due, a due, sui lati del quadrilatero e compongono le 4 coppie hessiane delle 4 terne di vertici relativi; 6 sono, a due, a due, sui lati del triangolo diagonale e costituiscono su ciascuna la coppia armonica ai vertici del triangolo e del quadrilatero.

I quattro lati del quadrilatero invariante sono quattro bitangenti fisse di tutte le quartiche del fascio. I punti di contatto sono i punti base ed esistono sulla conica covariante del quadrilatero medesimo.

Nel G_{168} esistono 14 gruppi ottaedrici, dunque:

La quartica di Klein *appartiene a 14 fasci individuati ciascuno dal quadrilatero di 4 sue particolari bitangenti e dalla conica covariante del quadrilatero contata due volte* (1).

13. Ci proponiamo la determinazione dei 14 triangoli invarianti dei 14 gruppi ottaedrici. Essi intanto sono certamente tutti distinti perchè tali sono gruppi ottaedrici relativi. Il G_{24} fondamentale precedente contiene i 4 sottogruppi di 4° ordine (N° 3):

$$G_4^{I} = (S_1\, S_2\, S_3\, S_4)\,; \qquad G_4^{II} = (S_1\, S_2\, S_{13}\, S_{14})\,;$$

$$G_4^{III} = (S_1\, S_3\, S_{15}\, S_{16})\,; \qquad G_4^{IV} = (S_1\, S_4\, S_{17}\, S_{18})\,;$$

dei quali soltanto il 1° è invariante. Gli altri tre sono invarianti per i 3 rispettivi G_{24} coniugati di 1ª specie del 1° (N. 4 e 5); i triangoli invarianti rispettivi sono:

$$x_1\, x_2\, x_3 = 0\,, \qquad x_3\,(x_1 + x_2)\,(x_1 - x_2) = 0\,,$$

$$x_1\,(x_2 + x_3)\,(x_2 - x_3) = 0\,, \qquad x_2\,(x_3 + x_1)\,(x_3 - x_1) = 0\,,$$

Prendiamo a considerare i primi due, cioè i triangoli invarianti di due qualunque G_{24}, G'_{24} coniugati di 1ª specie. Essi hanno a comune il lato $x_3 = 0$; indichiamo con A, B i vertici, su questo lato, del 1° triangolo e con A', B' quelli del 2°. Ebbene si riconosce subito che i lati del quadrilatero invariante di G_{24} si tagliano, a due, a due, in A', B' e quindi anche i lati del quadrilatero invariante di G'_{24} si segheranno, a due, a due, in A, B. Per conseguenza l'equazioni dei lati di quest'ultimo quadrilatero avranno la forma:

$$x_3 + \mu\, x_2 = 0\,, \quad x_3 - \mu\, x_2 = 0\,, \quad x_3 + \mu\, x_1 = 0\,, \quad x_3 - \mu\, x_1 = 0\,.$$

Allora, come dal quadrilatero invariante di G_{24} si sono dedotti i triangoli invarianti dei tre G_{24} coniugati di 1ª specie, così adesso dal quadrilatero invariante di G_{24} potremo determinare i triangoli invarianti dei tre coniugati di 1ª specie di G'_{24}.

Uno è naturalmente $x_1\, x_2\, x_3 = 0$; gli altri due sono:

---

(1) KLEIN-FRICKE, loc. cit., pag. 692.

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ \mu(x_1 + x_2) + 2x_3 = 0; \\ \mu(x_1 + x_2) - 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ \mu(-x_1 + x_2) + 2x_3 = 0 \\ \mu(\ \ x_1 - x_2) + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

permutando circolarmente si trovano quest'altri:

$$(3)\quad \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ \mu(x_2 + x_3) + 2x_1 = 0; \\ \mu(x_2 + x_3) - 2x_1 = 0 \end{cases} \qquad (4)\quad \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ \mu(-x_2 + x_3) + 2x_1 = 0 \\ \mu(\ \ x_2 - x_3) + 2x_1 = 0 \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} x_3 - x_1 = 0 \\ \mu(x_3 + x_1) + 2x_2 = 0; \\ \mu(x_3 + x_1) - 2x_2 = 0 \end{cases} \qquad (6)\quad \begin{cases} x_2 + x_1 = 0 \\ \mu(-x_3 + x_1) + 2x_2 = 0 \\ \mu(\ \ x_3 - x_1) + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

se a questi si aggiunge il triangolo fondamentale

$$(7), \qquad x_1 x_2 x_3 = 0,$$

otterremo i 7 triangoli invarianti dei 7 gruppi ottaedrici di un Ω_7 (N° 4).

14. Rimane da determinare il valore della indeterminata μ. Per questo, siccome sappiamo già che la quartica di Klein appartiene al fascio:

$$\Sigma x_i^4 + 6\lambda \Sigma x_i^2 x_k^2 = 0,$$

così basterà prendere una delle omologie armoniche individuate da uno dei triangoli precedenti (all'infuori del fondamentale) ed osservare che essa non appartiene al G_{24} fondamentale. La quartica del fascio invariante rispetto a questa nuova omologia sarà invariante rispetto all'intero G_{168} e sarà quindi quella cercata. Si prenda ad es. la omologia armonica:

$$\left\{ \begin{matrix} \mu(x_2 - x_1) + 2x_3 & \mu(x_1 - x_2) + 2x_3 & \mu^2(x_1 + x_2) \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \right\}$$

e si esiga che essa trasformi in sè una quartica del fascio suddetto: si troverà necessariamente (escludendo la conica doppia):

$$\mu = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}, \quad \lambda = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2},$$

$$\mu = \frac{1 - i\sqrt{7}}{2}, \quad \lambda = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2},$$

ciò che determina μ e le due quartiche di Klein esistenti nel fascio (1).

---

(1) CIANI, *I vari tipi possibili di quartiche piane più volte omologico armoniche.* (Rendic. Circ. Mat. di Palermo, 1899).

Assumendo l'uno, o l'altro dei due valori di μ si hanno i due G_{168} relativi alle due quartiche suddette.

15. Determinato μ si trovano, con processi analoghi a quelli del N° 13 gli altri 7 triangoli invarianti dei 7 gruppi ottaedrici che Emancano. Essi sono i seguenti:

$$(8)\ \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0\,; \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad (9)\ \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 + x_1 = 0\,; \\ x_3 - x_1 = 0 \end{cases} \qquad (10)\ \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$(11)\ \begin{cases} \mu(x_1 + x_2) - 2\,x_3 = 0 \\ \mu(x_2 + x_3) - 2\,x_1 = 0\,; \\ \mu(x_3 + x_1) - 2\,x_2 = 0 \end{cases} \qquad (12)\ \begin{cases} \mu(-x_1 + x_2) - 2\,x_3 = 0 \\ \mu(\ \ x_2 + x_3) + 2\,x_1 = 0 \\ \mu(\ \ x_3 - x_1) - 2\,x_2 = 0 \end{cases}$$

$$13)\ \begin{cases} \mu(\ \ x_1 - x_2) - 2\,x_3 = 0 \\ \mu(-x_2 + x_3) - 2\,x_1 = 0\,; \\ \mu(\ \ x_3 + x_1) + 2\,x_2 = 0 \end{cases} \qquad (14)\ \begin{cases} \mu(\ \ x_1 + x_2) + 2\,x_3 = 0 \\ \mu(\ \ x_2 - x_3) - 2\,x_1 = 0 \\ \mu(-x_3 + x_1) - 2\,x_2 = 0 \end{cases}$$

(nelle quali è d'uopo ricordare il valore di μ, ovvero che μ soddisfa la $\mu^2 - \mu + 2 = 0$).

16. Passiamo alla ricerca dei flessi. Basterà trovare, per questo, una collineazione del G_{168} col periodo 7: il triangolo unito sarà costituito da tre flessi con le loro tangenti relative e lo chiameremo un triangolo inflessionale della curva. Per trovare una tale collineazione basta osservare che in G_{168} si ottiene una sostituzione di periodo 7 moltiplicandone una di periodo 3 per una di periodo 2 che sia esterna ai due G_2' ai quali la prima appartiene. Le operazioni analoghe compiute sul G_{168} condurranno allo scopo. Sia dunque la collineazione di periodo 3 rappresentata dal ciclo:

$$(x_1\, x_2\, x_3)\,.$$

Essa appartiene ai due G_{24} i cui triangoli invarianti sono (7) e (11) dei N^i 13 e 15. Quindi moltiplicandola per una omologia armonica del G_{168} esterna a tali G_{24} (ad es. quella del N° 14) troveremo la collineazione richiesta. Essa è:

$$\left\{ \begin{matrix} \mu(x_1 - x_2) + 2\,x_3 & \mu^2(x_1 + x_2) & \mu(x_2 - x_1) + 2\,x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \right\}.$$

L'equazioni per gli elementi uniti sono dunque:

$$\begin{aligned} &\varrho\, x_1 - \mu\,(x_1 - x_2) - 2\,x_3 = 0 \\ &\varrho\, x_2 - \mu^2(x_1 + x_2) = 0 \\ &\varrho\, x_3 - \mu\,(x_2 - x_1) - 2\,x_3 = 0, \end{aligned}$$

e così la ricerca dei flessi viene a dipendere dalla equazione di 3° grado:

$$\begin{vmatrix} \varrho - \mu & \mu & -2 \\ -\mu^2 & \varrho - \mu^2 & 0 \\ \mu & -\mu & \varrho - 2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Risoluta questa, sarà conosciuto un triangolo inflessionale e quindi anche gli altri 7, perchè il G_{168} opera transitivamente sopra gli 8 sottogruppi di collineazioni di periodo 7 (N° 10).

Ricordando le osservazioni dei N^i 9 e 10 e le considerazioni fatte nei numeri (14, 15 e 16) possiamo dire:

I due sistemi di 7 elementi ciascuno, sopra i quali opera il G_{168}, *possono essere rappresentati geometricamente, con molta semplicità, dai due sistemi di triangoli invarianti trovati nei N. 13 e 15. Cosè pure gli 8 triangoli inflessionali precedenti possono rappresentare geometricamente gli 8 elementi fondamentali del gruppo medesimo.*

17. Intraprendiamo le considerazioni relative al covariante S di Clebsch. Cominceremo dall'osservare che i covarianti del 4° ordine delle quartiche del fascio:

$$\Sigma x_i^4 + 6 \lambda \Sigma x_i^2 x_k^2 = 0 ,$$

debbono rimanere invariati per tutte le collineazioni che lasciano invariate le curve del fascio, cioè per tutte quelle del gruppo ottaedrico fondamentale onde (N° 12):

Tutti i covarianti di 4° ordine delle quartiche del fascio appartengono di nuovo al fascio. In particolare ciò accade per i covarianti S. Relativamente a quest'ultimi la conferma del teorema si può avere dal calcolo diretto che in questo caso è ben semplice. Indicando con λ' il valore del parametro individuante il covariante S della quartica corrispondente al valore λ, si ha (cf. ad es. Salmon, *Curve piane*):

$$\lambda' = \frac{1 - 2\lambda - \lambda^2}{6\lambda^2}$$

Per $\lambda' = \lambda$ si ottengono le curve del fascio che coincidono con i loro covarianti S. Si ha così l'equazione di condizione:

$$6\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0 ,$$

che ha per radici $\frac{1}{3}, \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$ e si trovano: la conica doppia e le due quartiche di Klein del fascio (1).

(1) CIANI, loc. cit.

18. Che la quartica di Klein coincidesse col proprio covoriante S fu dimostrato per la prima volta dal Brioschi (1). Ciò risulta anche dal calcolo precedente. Più generalmente si può osservare che la quartica in questione deve coincidere non soltanto col proprio covariante S, ma con ogni altro suo covariante di 4° ordine. Perchè un tale covariante deve essere invariante rispetto al G_{168}, e il G_{168} ammette uno solo invariante di 4° ordine che è giusto la quartica di Klein. Dunque:

La quartica di Klein *coincide con tutti i suoi covarianti di 4° ordine (in particolare col covariante* S*)* (2)

Nasce allora la seguente questione. Dal momento che una quartica generale può riguardarsi come covariante S di altre 36 quartiche (secondo il già citato teorema di Scorza) e che la quartica di Klein è già covariante S di sè stessa, quali saranno le altre 35 di cui la quartica in parola può riguardarsi come covariante S? A questa ricerca sono destinati i tre numeri seguenti:

19. Quattordici soluzioni del nostro problema si trovano subito. Infatti riprendiamo l'equazione del N° 16:

$$6\lambda^2\lambda' + \lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0,$$

che lega il valore λ del parametro λ di una curva generica del fascio:

$$\Sigma x_i^4 + 6\lambda \Sigma x_i^2 x_k^2 = 0,$$

al valore λ' del covariante S della curva medesima. La relazione suddetta, per ogni valore di λ', ci dà due valori per λ e quindi ci dice che ogni quartica del fascio precedente è covariante S di altre due quartiche del fascio medesimo. Dunque, in particolare, la quartica di Klein sarà covariante S di sè stessa e di un'altra quartica del fascio. Per trovare quest'ultima basta porre nella relazione precedente:

$$\lambda' = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4},$$

(1) *Sopra una classe di curve del 4. ordine.* (Atti R. Acc. dei Lincei, Ser. III, Vol. VIII.

(2) Ad esempio la quartica di Klein coinciderà col contravariante quadratico del contravariante quadratico, cioè col luogo equianarmonico dell'inviluppo equianarmonico, da cui si deduce la seguente proprietà: *Se per ogni punto della quartica suddetta si conducono le 4 trasversali che la tagliano equianarmonicamente, esse compongono di nuovo un gruppo equianarmonico.* — Quanto alla coincidenza della quartica di Klein col proprio covariante S è noto che essa è proprietà caratteristica della quartica in questione (cf. la mia Nota in proposito *Rendic. circ. mat. di Palermo,* 1899) e forse con poche eccezioni, è caratteristica anche la coincidenza con qualsiasi covariante di 4. ordine e di 4. grado quando si rifletta che un tale covariante è rappresentabile con $S + kAf = 0$ dove A è l'invariante cubico, f la quartica, S e k un coefficiente numerico. (MAISANO, *Sistemi completi dei primi cinque gradi della forma ternaria biquadratica.* Giorn. di Battaglini Vol. XIX).

e risolvere rispetto a λ. Si trovano così per λ i valori:

$$\lambda = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4} = \lambda' ; \quad \lambda = \frac{5 - i\sqrt{7}}{16},$$

quindi la quartica del fascio individuata dal valore $\frac{5 - i\sqrt{7}}{16}$ del parametro λ ha per covariante S la quartica di KLEIN. Possiamo dunque dire intanto:

Ciascuno dei 14 sottogruppi ottaedrici del G_{168} *individua una quartica, invariante rispetto a quel sottogruppo, la quale ha per covariante* S *la quartica di* KLEIN *del* G_{168}.

Si hanno così 14 soluzioni manifestamente distinte perchè se due coincidessero, o coinciderebbero due sottogruppi ottaedrici (il che è assurdo), oppure esisterebbe una quartica invariante rispetto ai due gruppi e non all'intero G_{168} il che è assurdo del pari.

20. Per cercare altre soluzioni, osserviamo che la quartica di KLEIN appartiene al sistema lineare:

$$m\, x_1^4 + n\, x_2^4 + p\, x_3^4 + 6 f\, x_2^2\, x_3^2 + 6\, x_3^2\, x_1^2 + 6\, h\, x_1^2\, x_2^2 = 0$$

costituito da tutte le quartiche invarianti rispetto alle omologie armoniche individuate dal triangolo fondamentale. Ebbene proponiamoci di ricercare quali curve del precedente sitema lineare hanno per covariante S la quartica di KLEIN in parola. Ora, il covariante S della curva generica del sistema è (cf ad es. SALMON, *Curve piane*).

$$S = m'\, x_1^4 + n'\, x_2^4 + p'\, x_3^4 + 6 f'\, x_2^2\, x_3^2 + 6\, g'\, x_3^2\, x_1^2 + 6\, h'\, x_1^2\, x_2^2 = 0\,,$$

dove:

$$\begin{aligned} m' &= 6\, g^2 h^2, \qquad n' = 6\, h^2 f^2, \qquad p' = 6 f^2 g^2 \\ f' &= n\, p\, g\, h - f\,(n\, g^2 + p\, h^2) - f^2 g\, h \\ g' &= p\, m\, h\, f - g\,(p\, h^2 + m\, f^2) - g^2 h\, f \\ h' &= m\, n\, f\, g - h\,(m\, f^2 + n\, g^2) - h^2 f\, g\,. \end{aligned}$$

Se S deve coincidere la quartica di KLEIN si hanno le condizioni:

$$m' = n' = p', \qquad f' = g' = h', \qquad \frac{f'}{m'} = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4}\,.$$

È dunque un semplice problema algebrico che si tratta di risolvere. Vedremo, che, insieme ad alcune soluzioni già trovate, esso ce ne darà certamente delle nuove. Prima di tutto dalle relazioni $m' = n' = p'$ segue:

$$f^2 = g^2 = h^2$$

chiamando k^2 questo comune valore di f^2, g^2, h^2 avremo quindi per f, g, h le sole seguenti soluzioni (distinte):

$$f = g = h = k$$

$$f = g = k\,, \qquad h = -k$$

$$g = h = k\,, \qquad f = -k$$

$$h = f = k\,, \qquad g = -k\,.$$

Ma per $f = g = h$ si vede facilmente che si è condotti ad $m = n = p$ e in tal caso la soluzione che si troverebbe non è certo nuova perchè essa ci darebbe una curva del fascio $\Sigma x_i^4 + 6\lambda \Sigma x_i^2 x_k^2 = 0$. Rimane dunque da considerarsi il solo caso $f = g = -h$ chè gli altri sono simili a questo.

Allora dalla $f' = g'$ segue:

$$(m - n)(p + k) = 0\,.$$

Ma con $p = -k$ non si può soddisfare alla:

$$\frac{f'}{m} = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4}\,,$$

dunque avremo $m = n$. Quindi la $\dfrac{h'}{m'} = \dfrac{-1 + i\sqrt{7}}{4}$ ci dà:

$$\frac{m^2 + 2mk - k^2}{3k^2} = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}\,,$$

dalla quale si toglie:

$$\frac{k}{m} = \frac{-2 \pm (3 + i\sqrt{7})}{1 - 3i\sqrt{7}}\,,$$

cioè si hanno le due soluzioni:

$$\frac{k}{m}, = \frac{-5 + i\sqrt{7}}{16}\,, \qquad \frac{k}{m} = \frac{1 - i\sqrt{7}}{4}\,.$$

Si ha poi dalla $g' = h'$:

$$\frac{p}{m} = \frac{2\left(\dfrac{k}{m}\right)^2 - 3\dfrac{k}{m} - 1}{1 + \dfrac{k}{m}}\,.$$

Quindi le due soluzioni sono le seguenti:

$$1^a: \quad \frac{k}{m} = \frac{f}{m} = \frac{f}{n} = \frac{g}{m} = \frac{g}{n} = \frac{-h}{m} = -\frac{h}{n} = \frac{5 + i\sqrt{7}}{16}$$

$$\frac{p}{m} = \frac{p}{n} = -\left(\frac{1 + 3\,i\sqrt{7}}{8}\right),$$

$$2^a: \quad \frac{k}{m} = \frac{f}{m} = \frac{f}{n} = \frac{g}{m} = \frac{g}{n} = -\frac{h}{m} = -\frac{h}{n} = \frac{1 - i\sqrt{7}}{4}$$

$$\frac{p}{m} = \frac{p}{n} = -2\,.$$

21. Discutiamole separatamente. La 1ª non è una nuova soluzione. Perchè si può dimostrare che la curva che essa individua è invariante rispetto a quel gruppo ottaedrico il quale ha per triangolo invariante (N. 15):

$$x_3\,(x_1 + x_2)\,(x_1 - x_2) = 0\,.$$

Basta perciò osservare che il quadrilatero invariante del gruppo in parola è dato da (N. 13):

$$(x_3^2 - \mu^2 x_2^2)\,(x_3^2 - \mu^2 x_1^2) = 0\,,$$

e la conica covariante è:

$$2\,x_3^2 + \mu^2\,(x_1^2 + x_2^2) = 0\,,$$

dunque il fascio delle quartiche invarianti, rispetto al gruppo ottaedrico in questione, sarà (N. 12):

$$(x_3^2 - \mu^2 x_3^2)\,(x_3^2 - \mu^2 x_1^2) + a\,\{2\,x_3^2 + \mu^2\,(x_1^2 + x_2^2)\}^2 = 0\,.$$

Ebbene per $a = \dfrac{-1 + 3\,i\sqrt{7}}{8}$ si trova la curva individuata dalla 1ª soluzione.

Passiamo alla 2ª soluzione cioè alla quartica:

$$x_1^4 + x_2^4 - x_3^4 + 6\,\frac{1 - i\sqrt{7}}{4}\,(x_2^2\,x_3^2 + x_1^2\,x_3^2 - x_1^2\,x_2^2) = 0\,.$$

Questa costituisce veramente un caso nuovo. Perchè tale curva è invariante rispetto al sottogruppo G_8 (N. 3 e 11):

$$G_8 = (S_1\,S_2\,S_3\,S_4\,S_{17}\,S_{18}\,S_{21}\,S_{22})\,,$$

ma non rispetto ad alcuno dei gruppi ottaedrici contenenti detto G_8 e quindi nemmeno rispetto a qualsiasi altro gruppo ottaedrico del G_{168}.

Dunque ognuno dei 21 sottogruppi di 8º ordine del G_{168} *individua pure una quartica che ha per covariante S quella di* Klein.

Tali 21 curve sono manifestamente tutte distinte perchè se due coincidessero in una sola, o coinciderebbero due G_8, il che è impossibile, oppure tale curva, essendo invariante rispetto a due G_8, sarebbe invariante rispetto almeno a un G_{24} il che abbiamo visto or ora essere pure impossibile. Abbiamo dunque trovato le 36 soluzioni del nostro problema, cioè tante quante ne comporta, per il teorema già citato di Scorza, una quartica qualunque.

22. I N. 17, 18, 19, 20 conducono dunque alla seguente conclusione:

La quartica di Klein *è covariante S di sè stessa e di altre 35 quartiche. Quattordici di queste sono, ciascuna, invarianti rispetto a uno dei 14 sottogruppi ottaedrici del* G_{168}*; le 21 rimanenti sono invece, ciascuna, invariati rispetto a uno dei 21 sottogruppi di 8° ordine.*

Il modo di caratterizzare tali curve e scriverne le equazioni relative è espresso ai N. 19 e 20.

Il teorema del N. 8 ci dice che le prime 14 si dividono in due gruppi, di 7 ognuno, così che quelle di un medsimo gruppo sono proiettive, mentre è impossibile trasformare una di un gruppo in una dell'altro mediante collineazioni del G_{168}. Ma è impossibile ottenere ciò anche mediante una collineazione esterna al G_{168} perchè essa dovrebbe trasformare in sè stessa la quartica di Klein, il che è assurdo. Sia infatti C una tale collineazione; essa trasporta un gruppo ottaedrico di Ω'_7 in un gruppo ottaedrico di Ω''_7 cioè ad es. il gruppo ottaedrico fondamentale in un suo coniugato di 1ª, o di 3ª specie. Deve dunque il triangolo fondamentale essere trasportato in:

$$x_3 (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0,$$

ovvero in:

$$\{\mu (x_1 + x_2) - 2 x_3\} \{\mu (x_2 + x_3) - 2 x_1\} \{\mu (x_3 + x_1) - 2 x_2\} = 0 .$$

Nel 1° caso è ben semplice verificare che le collineazioni capaci di attuare il trasporto non trasformano in sè la quartica di Klein. Il 2° caso si riduce al 1° perchè i due triangoli soprascritti sono invarianti di due gruppi ottaedrici coniugati di 2ª specie i quali sono sempre transitivi (N. 8). Moltiplicando quindi C per una delle collineazioni che effettuano il transito si ricadrebbe nel 1° caso.

Invece le altre 21 curve trovate sono proiettivamente identiche perchè due sottogruppi G_8, o appartengono allo stesso gruppo ottaedrico e sono per consenguenza trasformabili l'uno nell'altro (con sostituzioni del gruppo ottaedrico stesso) o altrimenti si possono riguardare come appartenenti a due gruppi ottaedrici coniugati di 2ª specie e sono trasformabili del pari.

Dunque rispetto alla proiettività delle curve trovate si può dire che:

Le prime 14 si dividono in due gruppi di 7 ciascuno, così che sono pro-

iettivamente identiche quelle di uno stesso gruppo e proiettivamente diverse quelle appartenenti a gruppi diversi.

Invece le 21 rimanenti sono tutte proiettivamente identiche.

23. Termineremo le nostre considerazioni volgendole allo studio di qualche proprietà relativa ai 24 flessi della quartica di Klein. Perciò cominceremo dall'osservare che, riferendosi al solito triangolo fondamentale, si vede facilmente che delle tre coordinate di un flesso nè due possono essere uguali, nè alcuna può essere zero (perchè un flesso non può esistere sopra nessuno dei 21 assi delle 22 omologie armoniche del G_{168})

Potremo dunque scrivere le sei quaderne seguenti con la sicurezza che esse sono composte da 24 punti tutti distinti. Se $y_1\, y_2\, y_3$ sono le coordinate di un flesso, i 24 flessi si potranno distribuire così:

$$(q_1)\left\{\begin{array}{l}(y_1 \quad y_2 \quad y_3)\\(-y_1 \quad y_2 \quad y_3)\\(y_1 \quad -y_2 \quad y_3)\\(y_1 \quad y_2 \quad -y_3)\end{array}\right.;\quad (q_2)\left\{\begin{array}{l}(y_1 \quad y_3 \quad y_2)\\(-y_1 \quad y_3 \quad y_2)\\(y_1 \quad -y_3 \quad y_2)\\(y_1 \quad y_3 \quad -y_2)\end{array}\right.;\quad (q_3)\left\{\begin{array}{l}(y_3 \quad y_2 \quad y_1)\\(-y_3 \quad y_2 \quad y_1)\\(y_3 \quad -y_2 \quad y_1)\\(y_3 \quad y_2 \quad y_1)\end{array}\right.$$

$$(q_4)\left\{\begin{array}{l}(y_2 \quad y_1 \quad y_3)\\(-y_2 \quad y_1 \quad y_2)\\(y_2 \quad -y_1 \quad y_3)\\(y_2 \quad y_1 \quad -y_3)\end{array}\right.;\quad (q_5)\left\{\begin{array}{l}(y_2 \quad y_3 \quad y_1)\\(-y_2 \quad y_3 \quad y_1)\\(y_2 \quad -y_3 \quad y_1)\\(y_2 \quad y_3 \quad -y_1)\end{array}\right.;\quad (q_6)\left\{\begin{array}{l}(y_3 \quad y_1 \quad y_2)\\(-y_3 \quad y_1 \quad y_2)\\(y_3 \quad -y_1 \quad y_2)\\(y_3 \quad y_2 \quad -y_1)\end{array}\right.$$

Ogni quaderna è invariante rispetto al G_4 invariante del gruppo ottaedrico fondamentale. Si riconosce facilmente che gli 8 punti di due quaderne esistono su di una conica (1). Si hanno così le 15 coniche seguenti:

$$\left.\begin{array}{l}(q_1\, q_2) \equiv x_1^2\,(y_2^2 + y_3^2) - (x_3^2 + x_3^2)\, y_1^2 = 0\\(q_4\, q_5) \equiv x_1^2\,(y_3^2 + y_1^2) - (x_2^2 + x_3^2)\, y_2^2 = 0\\(q_3\, q_6) \equiv x_1^2\,(y_1^2 + y_2^2) - (x_2^2 + x_3^2)\, y_3^2 = 0\end{array}\right\}\ \text{Invarianti rispetto a } G_8^{\mathrm{I}}$$

$$\left.\begin{array}{l}(q_1\, q_3) \equiv x_2^2\,(y_1^2 + y_3^2) - (x_1^2 + x_3^2)\, y_2^2 = 0\\(q_2\, q_5) \equiv x_2^2\,(y_2^2 + y_1^2) - (x_1^2 + x_3^2)\, y_3^2 = 0\\(q_4\, q_6) \equiv x_2^2\,(y_3^2 + y_2^2) - (x_1^2 + x_3^2)\, y_1^2 = 0\end{array}\right\}\ \text{Invarianti rispetto a } G_8^{\mathrm{II}}$$

(1) CIANI, *I vari tipi possibili di quartiche piane* più volte omologico-armoniche, loc. cit.

$$\left.\begin{aligned}(q_1\, q_4) &\equiv x_3^2\,(y_1^2+y_2^2)-(x_1^2+x_2^2)\,y_3^2=0\\(q_3\, q_5) &\equiv x_3^2\,(y_2^2+y_3^2)-(x_1^2+x_2^2)\,y_1^2=0\\(q_2\, q_6) &\equiv x_3^2\,(y_1^2+y_1^2)-(x_1^2+x_2^2)\,y_2^2=0\end{aligned}\right\}\ \text{Invarianti rispetto a } G_8^{III}$$

$$\left.\begin{aligned}(q_1\, q_5) &\equiv m\,x_1^2+n\,x_2^2+p\,x_3^2=0\\(q_2\, q_4) &\equiv m\,x_1^2+p\,x_2^2+n\,x_3^2=0\\(q_2\, q_3) &\equiv p\,x_1^2+n\,x_2^2+m\,x_3^2=0\\(q_3\, q_4) &\equiv n\,x_1^2+m\,x_2^2+p\,x_2^2=0\\(q_5\, q_6) &\equiv n\,x_1^2+p\,x_2^2+m\,x_3^2=0\\(q_1\, q_6) &\equiv p\,x_1^2+m\,x_2^2+n\,x_3^2=0\end{aligned}\right\}\ \begin{array}{l}\text{Invarianti rispetto al solo } G_4\\ \text{invariante.}\end{array}$$

dove:

$$m=y_3^4-y_1^2\,y_2^2,\quad n=y_1^4-y_2^2\,y_3^2,\quad p=y_2^4-y_3^2\,y_1^2\,.$$

È essenziale osservare che queste 15 coniche sono tutte distinte e che non sono degeneri. Che siano tutte distinte resulta dal considerare che se due coincidessero in una sola, questa avrebbe più che 8 punti comuni con la quartica; che poi non siano degeneri risulta dal considerare che es. se, se mai, dovrebbero spezzarsi in rette per i vertici del triangolo fondamentale ciò che è escluso dalle osservazioni già fatte sulle coordinate y_1 $y_2\, y_3$ di un flesso e dal relativo quadro delle coordinate di tutti i flessi.

24. Abbiamo così, per ogni sottogruppo ottaedrico, due specie di coniche contenenti ciascuna 8 flessi della quartica di Klein. Nove di esse sono, a tre, a tre, invarianti rispetto a uno stesso G_8 e sei solo rispetto al G_4 invariante. Quante sono in tutto le une e le altre? Circa alle prime, si osservi che ogni sottogruppo G_8 del G_{168} ne individua tre, e, come abbiamo osservato nel numero precedente, esse sono distinte: per le medesime ragioni sono distinte due di tali coniche individuate da G_8 diversi ma contenuti nel medesimo G_{24}: se finalmente potessero coincidere in una sola due coniche individuate da due G_8 non appartenenti allo stesso G_{24}, tale conica sarebbe invariante rispetto ai due G_8 in parola e quindi rispetto all'intiero G_{168} il che è impossibile.

Dunque i 21 G_8 individuano 63 delle coniche cercate.

Circa poi alle seconde il fatto che debbono essere distinte quelle invarianti rispetto a uno stesso G_4 (N. 22) porta che i coefficienti m, n, p sono

tutti diversi fra loro. Dunque non possono coincidere in una sola nemmeno due che siano invarianti rispetto a due G_4 coniugati di 1ª specie perchè dovrebbe una tal conica essere invariante rispetto al G_8 che contiene i due G_4 e si ricadrebbe in una delle 63 precedenti. È in ultimo se potessero coincidere in una sola due che fossero invarianti rispetto a due G_4 coniugati di 2ª, o di 3ª specie (e quindi non contenuti in uno stesso G_8) dovrebbe una tal conica essere invariante, o rispetto a un G_{24}, o all'intero G_{168}. Nel 1° caso sarebbe la conica covariante del G_{24}, nel 2° caso non esisterebbe.

Quindi i 14 G_4 individuano 84 delle coniche in parola. Abbiamo dunque il teorema:

I 24 flessi della quartica di Klein *giacciono, a otto, a otto, sopra 147 coniche divise in due specie e cioè: 63 di esse sono, a tre, a tre, invarianti rispetto ai 21 sottogruppi di 8° ordine e 84 sono, a sei, a sei, invarianti rispetto ai 14 sottogruppi* G_4 *invarianti, a loro volta, dei 14 sottogruppi ottaedrici.*

Con considerazioni analoghe alle precedenti e ricordando quelle fatte al N. 15 del lavoro più volte citato sulle quartiche più volte omologico armoniche, si trova anche:

I medesimi 22 flessi esistono, a 6, a 6, sopra 112 coniche le quali appartengono, a 4, a 4, a 28 fasci. Ogni fascio è collegato a una bitangente della quartica, e conseguentemente al relativo sottogruppo G_6 *di sest'ordine, nel seguente modo: le coniche del fascio sono bitangenti fra loro, secanti la bitangente suddetta nei suoi punti di contatto con la quartica, e invarianti ciascuna rispetto al sottogruppo* G_6.

SOPRA I GRUPPI FINITI DI COLLINEAZIONI QUATERNARIE, OLOEDRICAMENTE ISOMORFI CON QUELLI DEI POLIEDRI REGOLARI.

[*Ann. di Matematica: 1902*]

Il problema di determinare tutti i gruppi di collineazioni quaternarie che sono oloedricamente isomorfi con i gruppi di rotazione dei poliedri regolari, rientra in quello più generale di determinare i gruppi finiti, lineari, isomorfi, oloedrici con i gruppi totali, od alterni sopra n elementi. Il problema è stato risoluto dal Maschke, nel campo ternario e quaternario, in un notevole lavoro (1) mediante una trattazione esclusivamente analitica con la quale l'autore stabilisce, caso per caso, le sostituzioni generatrici dei gruppi cercati, senza però prendere in particolare considerazione alcuno di essi. Il desiderio di ritrovare le formole di Maschke, con semplici considerazioni geometriche, per ciò che riguarda quelli fra i suddetti gruppi che sono oloedricamente isomorfi con i gruppi di rotazioni dei poliedri regolari, fu il primo avviamento a questo lavoro e a ciò è dedicata la 1.ª parte. Si giunge così, per una via che mi sembra più facile e più spedita di quella di Maschke, alla determinazione dei tredici tipi possibili, enunciati al n.º 11. Tre di essi sono tetraedrici, cinque ottaedrici e cinque icosaedrici. Undici fra tutti sono reali e quindi rientrano nella classificazione che fa il Bagnera dei gruppi quaternari reali nel suo recente lavoro (2). I due gruppi rimanenti non si possono mettere sotto forma reale e quindi escono dalla classificazione del Bagnera.

Essi sono il G_{60}^{IV} e il G_{60}^{V}, di cui l'ultimo è in particolar modo interes-

(1) MASCHKE, *Bestimmung aller ternaren und quaternaren Collineationsgrnppen, velche mit symetrischen und alternirenden Buchstabenvertauschunsgruppen holoedrisch isomorph siud.* Math. Annal., Bd. LI.

(2) BAGNERA, *I gruppi finiti reali di sostituzioni quaternarie lineari.* (Circolo Matematico di Palermo, anno 1901).

sante. Allo studio sistematico del G_{60}^{V} è dedicata la seconda parte di questo lavoro più ampia e più sviluppata della prima. La lettura di entrambe è indipendente dalle Memorie suindicate di Maschke e Bagnera. Anche in questa indipendenza sta un altro dei motivi per i quali ho scritto la prima parte, la quale (a rigor di termini) io avrei potuto tralasciare rimandando il lettore alle citate Memorie. In ogni modo, chi di queste Memorie avrà conoscenza, anche superficiale, troverà ad ogni punto di contatto il richiamo esatto dell'una e dell'altra con la indicazione della pagina relativa.

Quanto alla seconda parte, debbo dire qui le ragioni chi mi hanno indotto ad approfondire lo studio del gruppo icosaedrico G_{60}^{V} a preferenza di tutti gli altri. Esse sono le seguenti. Anzitutto la distribuzione dei gruppi trovati nelle cinque categorie, descritte al n.° 11, mostra già che il gruppo icosaedrico G_{60}^{V} è quello che fra gli altri presenta qualche maggiore difficoltà di studio. In ogni modo, poi, è quello che offre anche l'interesse maggiore. Ho cominciato dalla considerazione della figura costituita dagli elementi uniti delle sue collineazioni. Essa ha, per così dire, come nucleo invariante, da cui si può partire per descriverla, un notevole sistema di cinque rette sghembe, a due, a due, e costituite in guisa che a quattro, a quattro, ammettono una sola trasversale comune. Se dunque si aggruppano, a quattro, a quattro, nei cinque modi possibili si trovano cinque di queste trasversali: ebbene esse compongono un secondo sistema affatto simile al primo; e nel medesimo modo con cui il secondo è dedotto dal primo, si deduce il primo dal secondo. Il legame geometrico fra i due sistemi è mutuo: entrambi sono invarianti e sopra entrambi il gruppo G_{60}^{V} funziona da gruppo alterno (n.° 17). Ora, se è ovvio immaginare un gruppo icosaedrico quaternario funzionante da gruppo alterno sopra cinque punti, o sopra cinque piani, non sembra altrettanto ovvio pensarne uno che funzioni come tale sopra cinque rette dello spazio.

Un altro motivo che rende interessante il gruppo G_{60}^{V} è che, fra i cinque gruppi icosaedrici trovati, esso è l'unico che sia dotato di cubiche gobbe invarianti. Ne possiede due (n.° 26) e per questo lato la sua teoria si riannoderebbe felicemente a quella così ampia e feconda della cubica gobba.

Relativamente alle superficie invarianti, è a notarsi come tutti i gruppi trovati, all'infuori di G_{60}^{V} e G_{60}^{V}, potendosi mettere sotto forma reale, posseggono almeno una quadrica invariante. Rimangono fuori il G_{60}^{V} e G_{60}^{V} i quali non ammettono nè superficie quadriche, nè superficie cubiche invarianti e soltanto il secondo ammette superficie quartiche invarianti. Cosicchè il G_{60}^{V} può anche caratterizzarsi, fra tutti i gruppi trovati, come quello

per il quale l'ordine minimo delle superficie invarianti è proprio il 4^0, onde l'interesse che il G_{60}^{V} assume rispetto a tali superficie (n. 19). Esse compongono un fascio notevole di superficie irriduttibili (n.° 22). Fra esse, quelle singolari sono soltanto quattro: Due sono fornite naturalmente dalle sviluppabili osculatrici delle due cubiche gobbe invarianti: le altre due posseggono dieci punti doppi ciascuna, vertici di due notevoli decagoni invarianti, costituiti dai 20 punti uniti dei sottogruppi di sesto ordine (n.° 23).

Fra le superficie non singolari del fascio citeremo quella di cui è oggetto l'ultimo capitolo. Essa possiede 60 rette e non altre. Tali 60 rette si dividono in tre gruppi di dieci, di venti, di trenta, ciascuno invariante e fra le configurazioni formate da tali gruppi è notevole quella del secondo composta da venti rette che passano, a tre, a tre, per venti punti della superficie ed esistono a tre, a tre in venti piani tangenti alla superficie medesima in guisa che quelle che passano per un punto esistono anche in un piano e viceversa.

PRIMA PARTE.

Le collineazioni generatrici dei gruppi cercati.

§ I. Gruppi del tetraedro.

1. Un gruppo tetraedrico G_{12} contiene come sottogruppo invariante un gruppo quadrinomio G_4. Quindi noi cominceremo dall'esaminare le possibili specie proiettive di un gruppo quadrimonio nello spazio a tre dimensioni. Ora, un tal gruppo deve comporsi dell'identità e di tre sostituzioni a periodo due, così che ciascuna equivalga al prodotto delle altre due. Ma nello spazio suddetto una collineazione a periodo due è necessariamente una omologia armonica, o una involuzione gobba e quindi si è condotti alle seguenti tre specie proiettive di G_4.

(*a*). Il gruppo è costituito dall'identilà e delle tre involuzioni gobbe di cui gli assi sono le coppie di spigoli opposti di un medesimo tetraedro. Assumendolo come tetraedro di riferimento, per sostituzioni generatrici, possono prendersi evidentemente le seguenti

$$\begin{pmatrix} -x_1 & -x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Indicheremo questo gruppo con G_4^{I}.

(*b*). Il gruppo è costituito dalla identità e da tre involuzioni gobbe di cui gli assi sono tre coppie armoniche, a due, a due, di una stessa serie rigata. Questa serie è invariante rispetto al gruppo, la coniugata è composta di rette invarianti ed è anche invariante, naturalmente, la quadrica sostegno. Assumendo per tetraedro di riferimento uno che sia autoconiugato rispetto alla quadrica e disponendo opportunamente del punto unità, le sostituzioni generatrici del gruppo possono essere le seguenti:

$$\begin{pmatrix} -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

La quadrica in parola è $\Sigma x_i^2 = 0$. Indicheremo questo gruppo con G_4^{II}.

(*c*) Il gruppo è costituito dall'identità, da due omologie armoniche così che il centro di una è sul piano fondamentale dell'altra e dalla involuzione gobba che ne è il prodotto. Il gruppo può essere generato dalle due:

$$\begin{pmatrix} -x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

dove la posizione del tetraedro di riferimento è manifesta.

Indicheremo quest'ultimo con G_4^{III}.

2. Tornando adesso al G_{12} da costruire, osserviamo anzitutto che le sostituzioni del suo sottogruppo quadrinomio debbono essere simili: si esclude dunque che tale sottogruppo sia il G_4^{III}. Cominciamo dal caso in cui il sottogruppo in parola sia G_4^{I}. Per costruire il G_{12} che si cerca devesi aggiungere una collineazione C_3 a periodo 3 la quale permuti circolarmente le involuzioni gobbe di G_4^{I}. Segue che tre facce del tetraedro fondamentale di G_4^{I} saranno pure permutate circolarmente da C_3 mentre la quarta faccia rimarrà immutata. Assumendo questa per $x_4 = 0$ e disponendo opportunamente del punto unità si trova

$$C_3 = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_1 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

La C_3 aggiunta a G_4^{I} genera il G_{12} cercato e che indichiamo con G_{12}^{I}. Esso è proiettivamente identico col gruppo delle rotazioni del tetraedro regolare e coincide col " tetraeder I „ di Maschke (pag. 274) e col G_{12} di Bagnera (pag. 59). Le collineazioni a periodo 3 del gruppo sono assiali. Esiste un punto invariante (0 0 0 1) e un piano invariante ($x_4 = 0$).

3. Assumiamo invece come sottogruppo quadrinomio il G_4^{II}. Poichè G_4^{II} è invariante rispetto al G_{12} da costruirsi, ne viene che, rispetto a quest'ultimo, saranno pure invarianti la quadrica Q e le due serie rigate che essa sostiene. Ad una di queste serie appartengono gli assi delle tre

involuzioni gobbe del G_4^{II}. Indichiamo con le coppie (m, m'), $(n, n'$ (p, p') tali assi. La serie coniugata a quella cui appartengono questi assi può essere composta di rette invarianti ciascuna rispetto al G_{12} incognito, o no. Consideriamo separatamente i due casi. Nel 1.°, le collineazioni a periodo 3 che si debbono aggiungere, sono necessariamente biassiali e possono caratterizzarsi nel seguente modo. Si osservi anzitutto che le terne $(m\ n\ p)$, $m'\ n'\ p')$ posseggono la stessa coppia di rette hessiane. Altrettanto accade per le terne simili $(m\ n\ p', m'\ n'\ p)$; $(m\ n'\ p, m'\ n\ p'$; $(m\ n'\ p, (m'\ n\ p')$. Ebbene si vede subito che le quattro coppie di rette, che così si hanno, costituiscono le 4 coppie di assi delle collineazioni cercate. Sopra ogni generatrice della serie coniugata a quella cui appartengono $m\ m'$, $n\ n'$, $p\ p'$ si viene quindi a stabilire un g_{12} di proiettività binarie subordinate. Il G_{12} ora trovato lo indicheremo con G_{12}^{II} e poichè è costituito da collineazioni tutte biassiali, lo chiameremo "*il* G_{12} *biassiale*". Nel 2.° dei casi sopra accennati si vede facilmente che le collineazioni a periodo 3 da aggiungere, non sono più biassiali, ma soltanto assiali. Basta determinarne una. Siano perciò h e k le rette hessiane del gruppo $m\ n\ p$, o di $m'\ n'\ p'$ (che è lo stesso), e su tali rette h e k assumiamo a piacere i punti $M\ M'$, $N\ N'$ in guisa però che le rette $M\ M'$, $N\ N'$ siano generatrici della quadrica Q. Allora la collineazione cercata avrà $M\ N'$ per asse di punti uniti, $M'\ N$ per assi di piani uniti (o viceversa) con la condizione ulteriore che i piani $M\ N'\ N$, $M\ N'\ M'$ sieno i due piani uniti per l'asse di punti uniti e che M' ed N sieno i due punti uniti sull'asse di piani uniti. Indicheremo con G_{12}^{III} il G_{12} che così si ottiene.

4. Per rappresentare analiticamente i due G_{12} trovati nel numero precedente, è utile per il momento, e indispensabile per il seguito, mettere sotto altra forma il G_4^{II} del N° 1. Con apposita ed evidente scelta del tetraedro di riferimento è facile vedere che le involuzioni gobbe di G_4^{II} possono scriversi (Maschke, pag. 275)

$$\left(\frac{x_1 + x_4\sqrt{2}}{x_1}, \frac{-x_2 + x_3\sqrt{2}}{x_2}, \frac{x_2\sqrt{2} + x_3}{x_3}, \frac{x_1\sqrt{2} - x_4}{x_4}\right) = C_2$$

$$\left(\frac{x_1 + x_4\varepsilon\sqrt{2}}{x_1}, \frac{-x_2 + x_3\varepsilon^2\sqrt{2}}{x_2}, \frac{x_2\varepsilon\sqrt{2} + x_3}{x_3}, \frac{x_1\varepsilon^2\sqrt{2} - x_4}{x_4}\right) = C'_2$$

$$\left(\frac{x_1 + x_4\varepsilon^2\sqrt{2}}{x_1}, \frac{-x_2 + x_3\varepsilon\sqrt{2}}{x_2}, \frac{x_2\varepsilon^2\sqrt{2} + x_3}{x_3}, \frac{x_1\varepsilon\sqrt{2} - x_4}{x_4}\right) = C''_2$$

dove ε, ε^2 sono le radici cubiche immaginarie dell'unità.

Ebbene, si ottiene il G_{12}^{II}, o il G_{12}^{III}, a seconda che si aggiunge al precedente G_4^{I} la prima, o la seconda delle seguenti collineazioni a periodo 3:

$$C'_3 \equiv \begin{pmatrix} x_1 & \varepsilon x_2 & x_3 & \varepsilon x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \qquad C_3 \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \varepsilon x_3 & \varepsilon^2 x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

La quadrica invariante è in entrambi i casi la:

$$Q \equiv x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0.$$

Nel 1° caso sono invarianti tutte le rette di una serie rigata di questa quadrica (quella cui appartiene la $x_1 = 0$, $x_4 = 0$). Nel 2° caso esistono due sole rette invarianti che sono le ($x_1 = 0$, $x_4 = 0$), ($x_2 = 0$, $x_3 = 0$). Il G_{12}^{II} e il G_{12}^{III} attuali sono rispettivamente i « tetraeder III e II » di Maschke (pagina 275-77) e l'R_{12} e il G_{12}^{*} di Bagnera (pag. 59).

§ II. Gruppi dell'ottaedro (o del cubo).

5. La discussione relativa ai possibili gruppi ottaedrici dipende in modo semplice dalla specie dei relativi sottogruppi tetraedrici.

Cominciamo dal caso in cui il sottogruppo G_{12} del G_{24} cercato sia il G_{12}^{I} (N° 2). Per raggiungere lo scopo basta aggiungere una collineazione a periodo 2 rispetto alla quale il G_{12}^{I} sia invariante e siano invarianti il punto (0 0 0 1) e il piano $x_4 = 0$. Se dunque questa collineazione è una involuzione gobba, una dei suoi assi passerà per (0 0 0 1) ed esisterà in una faccia del tetraedro fondamentale e l'altro esisterà in $x_4 = 0$ e passerà per un vertice del tetraedro medesimo in guisa che questo rimanga inalterato per effetto di tale collineazione. Essa è quindi $\begin{pmatrix} x_2 & x_1 & -x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. Questa col G_{12}^{I} genera il G_{24} cercato e che indicheremo con G_{24}^{1}. Esso è proiettivamente identico col gruppo delle rotazioni dell'ottaedro regolare e coincide con «l'Octaeder» I di Maschke (pag. 293) e con il G_{24} di Bagnera (pag. 125).

Se invece la collineazione che si aggiunge al G_{12}^{I} è omologia armonica, essa avrà per centro un punto di uno spigolo del tetraedro fondamentale in $x_4 = 0$, e per piano fondamentale un piano per lo spigolo opposto in guisa da trasformare in se il tetraedro medesimo. Per essa si può dunque prendere: $\begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. Questa col G_{12}^{I} genera un G_{24} che indicheremo con G_{24}^{II} e che è manifestamente diverso, proiettivamen-

te parlando, da G^{I}_{24}. Il G^{II}_{24} coincide col $\bar{G}_{24}$ di Bagnera (pag. 125) e con " l'octaeder II „ di Maschke (pagina 293). Per caratterizzare proiettivamente il G^{II}_{4} basta osservare che esso permuta in tutti i modi possibili i 4 piani:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\,, \qquad -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0\,, \qquad -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

e tiene fisso $x_4 = 0$. Dunque il G^{II}_{24} può considerarsi come sottogruppo di un G_{120}. Cioè del G_{120} costituito da tutte le collineazioni che scambiano in tutti i modi possibili le facce di un pentaedro, o i vertici di un pentagono gobbo. Precisamente è uno dei cinque sottogruppi che tengono fissa una faccia del pentaedro, o un vertice del pentagono.

6. Se assumiamo per gruppo alterno del G_{24} cercato il G^{II}_{12}, o il G^{III}_{12} è evidente che le collineazioni a periodo 2 da aggiungere, non possono essere omologie armoniche dovendo esse trasformare in se il sottogruppo alterno. Una tale collineazione sarà dunque una involuzione gobba. Supponiamo dapprima che il sottogruppo alterno sia G^{II}_{12} (n. 3). Ne viene che gli assi della collineazione suddetta saranno rette reciproche rispetto alla quadrica invariante Q, ovvero apparterranno alla serie rigata di $m\ m', \ldots$ Ecco quindi una suddistinzione che conduce a due gruppi diversi. Per caratterizzarli prendiamo una generatrice r di Q di sistema diverso da $m, m', \ldots$ Sopra questa esiste un g_{12} di proiettività binarie subordinate del G^{II}_{12} e tale g_{12} individua un g_{24} pure di proiettività binarie del quale g_{12} è gruppo alterno. Sieno M, N i punti doppi di una delle sei involuzioni sopra r che bisogna aggiungere al g_{12} per trovare il g_{12}. Prendiamo adesso un'altra generatrice r' di Q di ugual sistema di r, e sieno M' N' i punti di r' analoghi ad M, N in guisa che le rette $M\ M'$, $N\ N'$ appartengano a Q. Ebbene, tanto la involuzione gobba che ha per assi $M\ M'$, $N\ N'$, quanto quella che ha per assi $M\ N'$, $M'\ N$ trasformano G^{II}_{12} in se stesso e con questo generano i due G_{24} cercati rispondenti ai due punti della sottodistinzione dianzi fatta. Per ottenerne le formole relative si prendano per rette r ed r' rispettivamente $(x_2 = 0, x_3 = 0)$; $(x_1 = 0, x_4 = 0)$ e su queste:

$$M \equiv (1,\ 0,\ 0,\ i),\ N \equiv (1,\ 0,\ 0, -i),\ M' \equiv (0,\ 1,\ -i,\ 0),\ N' \equiv (0,\ 1,\ i,\ 0).$$

Allora le due involuzioni gobbe che hanno per assi $(M\,M', N\,N')$; $M\,N'$, $M'\,N$) sono rispettivamente

$$\begin{pmatrix} x_4 & -x_3 & x_2 & -x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_4 & x_3 & -x_2 & -x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

e aggiunte al G_{12}^{II} generano i due G_{24} cercati che noi indicheremo con G_{4}^{III} e con G_{24}^{IV}. Entrambi posseggono 18 omografie biassiali: le sei rimanenti sono pure biassiali per il 1°, ma non per il 2°. Ecco perchè chiameremo G_{24}^{III} gruppo biassiale. Sono rette invarianti per esso tutte le generatrici di Q del sistema $r\,r'$... Invece il G_{24}^{IV} possiede due sole rette invarianti che sono r ed r'. G_{24}^{III} e G_{4}^{IV} coincidono con gli « octaeder VI e V » di Maschke (pag. 294-95) e con R_{24}^{*}, R_{24} di Bagnera (pag. 125).

7. Ammettiamo finalmente che il G_{24} da costruirsi abbia per gruppo alterno il G_{12}^{III} (N^{i} 3 e 4). Le due rette invarianti del G_{12}^{III} compongono una coppia invariante per il G_{24} cercato. Ma è facile vedere che niuna di esse potrà essere separatamente invariante rispetto alle involuzioni gobbe da aggiungersi. Perchè, se ciò fosse, applicando a tali rette le considerazioni fatte nel numero precedente per $r\,r'$, si verrebbe alla conclusione che la involuzione gobba che ha per assi $M\,M'$, $N\,N'$, ovvero quella che ha per assi le $M\,N'$, $M'\,N$ dovrebbe cambiare una delle collineazioni a periodo 3 di G_{12}^{III} nel suo quadrato, il che è impossibile perchè tanto l'una quanto l'altra delle suindicate involuzioni scambia fra loro l'asse di punti uniti e l'asse di piani uniti della collineazione a periodo 3 in parola. Dunque la involuzione gobba cercata permuta fra loro le due rette $(x_1 = 0,\ x_4 = 0)$; $(x_2 = 0\,,\ x_3 = 0)$ e quindi sarà della forma:

$$T \equiv \begin{pmatrix} a\,x_2 + b\,x_3\,, & c\,x_1 + d\,x_4\,, & m\,x_1 + n\,x_4\,, & p\,x_2 + q\,x_3 \end{pmatrix}.$$

Ora si esiga che sia $T\,C_3\,T = C_3^2$, e dopo che si abbia $T\,C_2\,T = C_2$ (N° 4) e si è condotti alla

$$T \equiv \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

Questa, aggiunta al G_{24}^{III} ci fornisce l'ultimo G_{24} della nostra discussione che noi indicheremo con G_{24}^{V}. E' identico con « *l'octaeder III* » di Maschke (pag. 294) e col G_{24}^{*} di Bagnera (pag. 125).

§ III. Gruppi dell'icosaedro (o del dodecaedro).

8. Un gruppo icosaedrico contiene cinque sottogruppi tetraedrici simili fra loro. Segue che i 5 G_{12} di un G_{60} quaternario sono proiettivamente identici. Cerchiamo di costruire un G_{60} partendo da una delle tre specie proiettive di G_{12} trovati al § I. Ma anzitutto osserviamo che dato un G_{12}

quaternario, per trovare un G_{60} di cui G_{12} sia sottogruppo, basta determinare una collineazione T che soddisfi alle seguenti condizioni

$$T^2 = 1\,, \quad T\,C_3\,T = C_3^2\,, \quad (T\,C_2)^3 = 1$$

dove C_2, B_3 sono due collineazioni del G_{12} con i periodi 2 e 3.

Determinata la T, essa col G_{12} individua il G_{60} richiesto. Cio premesso cominciamo dal considerare il caso in cui i sottogruppi G_{12} del G_{60} cercato sieno della specie G_{12}^{I} (N° 2). Avremo dunque in G_{60} cinque G_{12}^{I}. Ciascuno possiede un punto e un piano invarianti. Può darsi che i cinque punti (e quindi anche i cinque piani) coincidano oppure che sieno distinti e quindi che esista un pentagono gobbo (e perciò anche un pentaedro) invariante. Ecco dunque una suddistinzione da farsi. Se i cinque punti coincidono, ciò significa che (0 0 0 1) è invariante rispetto al G_{60} cercato e che è anche invariante $x_4 = 0$. Le collineazioni a periodo due di un G_{60} sono proiettivamente identiche, dunque la T è una involuzione gobba, ha un asse passante per (0 0 0 1), l'altro in $x_4 = 0$ e quindi è della forma:

$$\left\{\begin{matrix} a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3\,, & d\,x_1 + e\,x_2 + f\,x_3\,, & g\,x_1 + h\,x_2 + kx_3\,, & m\,x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix}\right\} = T.$$

Assumiamo per C_2 e per C_3 (N^i 1, 2)

$$C_2 = \begin{pmatrix} -x_1\,, & -x_2\,, & x_3\,, & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \qquad C_3 = \begin{pmatrix} x_2\,, & x_3\,, & x_1\,, & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

ed esigiamo che la T soddisfi alle condizioni anzidette

$$T^2 = 1\,, \quad T\,C_3\,T = C_3^2\,, \quad (T\,C_2)^3 = 1\,.$$

Si è condotti allora alla

$$\left\{\begin{matrix} -a\,x_1 - b\,x_2 + c\,x_3, & -b\,x_1 - c\,x_2 + a\,x_3, & -c\,x_1 - a\,x_2 + b\,x_3, & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix}\right\} = T.$$

dove

$$b = -\frac{1}{2}\,, \quad a\,,\ c = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\,.$$

Il G_{60} così individuato è identico proiettivamente col G_{60} delle rotazioni dell'icosaedro e lo indicheremo con G_{60}^{I}. Esso coincide con « l'ikosaeder I » di Maschke (pag. 279) e col G_{60}^{*} di Bagnera (pag. 79).

Se invece i cinque punti invarianti dei cinque G_{12} sono distinti, esiste un pentagono gobbo invariante. Il G_{60} cercato non è altro che il sot-

togruppo alterno di un G_{120}. Cioè del G_{120} totale che permuta in tutti i modi possibili i vertici del pentagono (o le facce di un pentaedro). Indicheremo con G_{60}^{II} un tal gruppo. Le sue collineazioni possono rappresentarsi sotto la forma:

$$C = \begin{pmatrix} x_i & x_h & x_k & x_l & x_m \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}; \quad i, h, k, l, m = 1, 2, 3, 4, 5)$$

dove C rappresenta una sostituzione pari e si ha $\Sigma x_i = 0$. Il G_{60}^{II} coincide con « l'ikosaeder II » di Maschke (pag. 280) e col G_{60} di Bagnera (pag. 79).

9. Assumiamo ora per sottogruppi tetraedrici la specie G_{12}^{II}. Si presenta anche qui una suddistinzione a seconda che si esige che esista una sola quadrica invariante per tutti i 5 G_{12}, ovvero che le cinque quadriche sieno tutte distinte componendo un'insieme invariante rispetto al G_{60} cercato. Cominciamo dal primo caso: esiste una quadrica Q invariante per tutti i cinque G_{12}^{II}. Ne viene che gli assi delle collineazioni a periodi 2 e 3 dei cinque G_{12} appartengono a una stessa serie rigata sopra Q, onde la serie rigata coniugata è costituita da rette invarianti rispetto all'intero G_{60}. Fra queste saranno anche le $(x_1 = 0\,,\ x_4 = 0)$, $(x_2 = 0\ \ x_3 = 0)$ per cui T sarà della forma:

$$\left\{ \begin{matrix} h\,x_1 + k\,x_4\,, & m\,x_2 + n\,x_3\,, & p\,x_2 + q\,x_3\,, & r\,x_1 + s\,x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \right\} = T \ldots \quad (1)$$

Prendiamo per la C_2 e C'_3 quelle del n° 4. La condizione $T\,C'_3\,T = C_2^2$ reca anzitutto

$$h = m = q = s = 0$$

e dalla $T^2 = 1$ risulta $k\,r = n\,p$, per cui si può prendere intanto:

$$T = \begin{pmatrix} a\,x_4\,, & b\,x_3\,, & a\,a\,x_2\,, & b\,a\,x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \ldots \quad (2)$$

La invarianza della Q del n° 4 reca poi $a^2 = 1$. Dopo, esigendo l'ultima condizione $(T\,C_2)^3 = 1$ (secondo il n° 8 si trova) necessariamente $a=1$ e

$$2\,(a^2 + b^2) + a\,b = 0\,.$$

soddisfatta la quale, T è individuata e il gruppo costruito.

Esso è evidentemente composto di collineazioni tutte biassiali e perciò lo chiameremo il gruppo icosaedrico biassiale indicandolo con G_{60}^{III}. È « l'ikosaeder IV » di Maschke (pag. 284) e l'R_{60} di Bagnera (pag. 79).

Passiamo adesso al secondo punto della suddistinzione dianzi fatta. Le quadriche invarianti dei 5 sottogruppi G_{12}^{II} sono tutte distinte. Una colli-

neazione a periodo 3 appartiene, insieme al suo quadrato, a due sottogruppi G_{12}^{II}: dunque, nel caso attuale, i suoi due assi esisteranno contemporaneamente sulle due quadriche invarianti di due tali G_{12}^{II} per cui esse si taglieranno secondo altre due rette sghembe fra loro e appoggiate agli assi di tutte le collineazioni dei due G_{12}^{II} in questione. Quindi ciascuna di queste due ultime rette, essendo invariante rispetto a due G_{12}, sarà invariante rispetto all'intero G_{60} da costruirsi. Assumendo tali rette per $(x_1=0, x_4=0)$, $(x_2=0, x_3=0)$ la T incognita avrà la forma (1) precedente; dalla quale si passa in ugual modo alla (2). Soltanto non può dirsi che sia $a^2=1$ perchè Q non è invariante rispetto al G_{60} da costruirsi. Dopo, la condizione $(T\,C_2)^3=1$, reca $a=b$ e per a la equazione $2\,a^2+a+2=0$. Con ciò le condizioni richieste per la T sono soddisfatte e il nuovo G_{60} è individuato. Noi lo indicheremo con G_{60}^{IV}. Esso è « l'ikosaeder V » di Maschke (pag. 284). Non figura fra i gruppi di Bagnera perchè non può mettersi sotto forma completamente reale. Le sue collineazioni a periodi 2 e 3 sono biassiali, ma non le rimanenti.

10. Non rimane a discutere altro caso che quello in cui la specie dei G_{12} sia la G_{12}^{III} (n^{i} 3 e 4). Assumiamo per C_2 e C_3 quelle del n° 4. Gli assi di C_3 sono $x_3=0$, $x_4=0$ come luogo di punti uniti; e $x_1=0$, $x_2=0$ come inviluppo di piani uniti. A causa della condizione $T\,C\,T_3=C_3^2$ ne viene anzitutto che le rette suddette sono unite per T e quindi quest'ultima avrà la forma:

$$\left\{\begin{matrix} a\,x_1+b\,x_2 & c\,x_1+d\,x_3\,, & m\,x_3+n\,x_4\,, & p\,x_3+q\,x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix}\right\}=T\,.$$

Se, su questa, si completa la esigenza della condizione $T\,C_3\,T=C_3^2$ si trova $m=q=0$ e dopo, osservando che $T^2=1$ e che T non può essere omologia armonica, si ottiene necessariamente $a+d=0$, $a^2+b\,c=n\,p$. Poi, per esigere la condizione $(T\,C_2)^3=1$, non importa svolgere completamente il calcolo intero di $(T\,C_2)^3$. Si calcoli anzitutto $(T\,C_2)^2$ tenendo conto delle condizioni già trovate per i coefficienti. E per la $(T\,C_2)^3$ si calcoli solo la prima sostituzione in x_1 che è la seguente:

$$\begin{aligned} x_1 \equiv\ & (a^3-3\,a\,b\,c+6\,a\,b\,n+2\,a\,p\,c+2\,a\,p\,n)\,x_1+ \\ & +(-3\,a^2\,b+b^2\,c+4\,a^2\,p-2\,b^2\,n-p\,b\,c-2\,p\,b\,n)\,x_2+ \\ & +(3\,a^2\,b-b^2\,c+2\,b^2\,n-a^2\,p-p\,b\,c-p\,b\,n)\sqrt{2}\,x_3+ \\ & +(a^3-3\,a\,b\,c+2\,a\,p\,c-a\,p\,n)\sqrt{2}\,x_4 \end{aligned}$$

Perchè sia $(T\,C_2)^3=1$ è condizione necessaria anzitutto che nella precedente siano nulli i coefficienti di x_2, x_3, x_4. Cominciando dall'annullare

il coefficiente di x_4 e tenendo conto che si ha $a^2 + b\,c = n\,p$, si trova necessariamente $p = 2\,b$; poi annullando il coefficiente di x_3 si ottiene $a^2 = 3bc$ e finalmente con l'annullare il coefficiente di x_2 si ha $n = 2\,c$.

Per cui si ricavano, come necessarie, le relazioni:

$$a^2 = 3\,b\,c\,, \quad n = 2\,c\,, \quad p = 2\,b\,, \quad a + d = 0\,.$$

Ma si constata facilmente che esse sono anche sufficienti. Prendendo $b = c = 1$, la T diviene

$$\begin{pmatrix} x_1\sqrt{3} + x_2 & x_1 - x_2\sqrt{3} & 2\,x_4 & 2\,x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = T.$$

Questa, col G_{12}^{III}, individua il G_{60} cercato che rappresenteremo con G_{60}^{V}. Esso è identico con « l'ikosaeder » III di Maschke (pag. 281). Non figura fra i gruppi di Bagnara perchè, come il precedente, non può mettersi sotto forma reale.

11. Riassumendo i gruppi trovati, essi possono distribuirsi nelle seguenti divisioni:

I^a *I tre gruppi di rotazioni dei poliedri regolari:* $(G_{12}^{\mathrm{I}}, (G_{24}^{\mathrm{I}}, G_{60}^{\mathrm{I}})$.

II^a *I tre gruppi biassiali:* $(G_{12}^{\mathrm{II}}, G_{24}^{\mathrm{III}}, G_{60}^{\mathrm{III}})$.

III^a *Tre sottogruppi del G_5 totale sul pentagono gobbo (o sul pentaedro):* $(G_{12}^{\mathrm{I}}, G_{24}^{\mathrm{II}}, G_{60}^{\mathrm{III}})$.

IV^a *Quattro gruppi dotati ciascuno di una e una sola coppia invariante di rette:* $(G_{12}^{\mathrm{III}}, G_{24}^{\mathrm{IV}}, G_{24}^{\mathrm{V}}, G_{60}^{\mathrm{IV}})$.

V^a *Il G_{60}^{V} che non può farsi rientrare in alcuna delle divisioni precedenti.*

I gruppi trovati sono dunque in tutto 13 (perchè il G_{12}^{I} appartiene a due divisioni: I^a e III^a). Di essi, tre sono tetraedrici, cinque ottaedrici e cinque icosaedrici. I soli G_{60}^{IV}, G_{60}^{V} *non* si possono mettere sotto forma reale. (Bagnera, pag. 79 e 125).

PARTE SECONDA.

Studio del gruppo icosaedrico. G_{60}^{V}.

§ I. La configurazione composta dagli elementi uniti delle sue collineazioni.

12. Nelle poche linee che hanno servito di introduzione abbiamo già parlato delle ragioni di preferenza che lo studio del G_{60}^{V} presenta sugli al-

tri gruppi trovati (1). Ci proponiamo adesso di svolgere questo studio incominciando dal considerare gli elementi uniti delle collineazioni del gruppo e i loro legami geometrici. Anzitutto, caratterizziamo con le lettere a, b, c, d, e i cinque sottogruppi tetraedrici del G_{60}^{V} e con la lettera e, in particolare il $G_{12,e}^{III}$ generato dalle C_2, C_3 del N. 4 ossia dalle

$$C_2 = (a\,b)\,(c\,d) = \left\{ \begin{matrix} x_1 + x_4\sqrt{2}\,, & -x_2 + x_3\sqrt{2}\,, & x_2\sqrt{2} + x_3\,, & x_2\sqrt{2} - x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \right\}$$

$$C_3 = (a\,b\,c) = \left\{ \begin{matrix} x_1\,, & x_2\,, & \varepsilon\, x_3\,, & \varepsilon^2 x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \right\}.$$

Allora, N° 10, il G_{60}^{V} è generato da $G_{12,e}^{III}$ e dalla

$$T = (a\,b)\,d\,e) = \left\{ \begin{matrix} x_1\sqrt{3} + x_2\,, & x_1 - x_2\sqrt{3}\,, & 2\,x_3\,, & 2\,x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \right\}.$$

La sostituzione $T\,C_2\,C_3$ è rappresentabile con $(a\,b\,c\,d\,e)$ e quindi ha il periodo 5. Calcolandola si trova:

$$(a\,b\,c\,d\,e) = \left\{ \begin{matrix} x_1 \equiv x_1\sqrt{3} - x_2 + x_3\,\varepsilon\sqrt{2} + x_4\,\varepsilon^2\sqrt{6} \\ x_2 \equiv x_1 + x_2\sqrt{3} - x_3\,\varepsilon\sqrt{6} + x_4\,\varepsilon^2\sqrt{2} \\ x_3 \equiv x_1 \,.\, 2\sqrt{2} - x_4 \,.\, 2\,\varepsilon^2 \\ x_4 \equiv x_2 \,.\, 2\sqrt{2} + x_3 \,.\, 2\,\varepsilon. \end{matrix} \right.$$

La equazione in ϱ, che serve a trovare i punti uniti, possiede le 4 radici immaginarie di

$$\varrho^5 + (\sqrt{12})^5 = 0$$

e quindi esistono 4 soli punti uniti distinti.

(1) Forse non sarebbe privo d'interesse anche lo studio dei tre sottogruppi del G_{120} totale di collineazioni che operano sul pentagono gobbo, o sul pentaedro, trasformandolo in se stesso e, meglio ancora, lo studio sistematico di tutto un tale G_{120}. In esso troverebbero il loro posto naturale le molte proposizioni d'indole proiettiva già conosciute, e che riguardano il pentagono gobbo, o il pentaedro, e sarebbe facile trovarne altre in guisa da interpretare geometricamente tutto ciò che riguarda il G_{120} tolale su cinque oggetti. Si presenterebbe spontanea la estensione in un iperspazio qualunque. Cioè lo studio della geometria dell'$(n+2)$-gono, o dell'$(n+2)$-edro in un S_n lineare mediante il $G_{(+n+2)!}$ totale di collineazioni che permutano in tutti i modi possibili i vertici dell'$(n+2)$-gono, o gli iperpiani dell'$(n+2)$edro. In questo rientrerebbero, come casi particolari, la geometria proiettiva del quadrilatero in S_2 e del pentaedro in S_3 e quindi anche, come casi *ancora* più particolari, la metrica del triangolo (la cosidetta geometria del triangolo) e la metrica del tetraedro. Le molte proposizioni metriche riguardanti il triangolo, o il tetraedro (casi particolari di proprietà proiettive riguardanti il quadrilatero e il pentaedro) e la facilità con cui si ottengono tali proposizioni, dipendono forse in gran parte dalla esistenza del gruppo in questione.

13. Ciò premesso, osserveremo che i sottogruppi di un gruppo icosaedrico si possono distribuire, insieme ai loro relativi sottogruppi, nelle tre specie seguenti:

1.ª Dieci gruppi di 6.° ordine.

2.ª Sei gruppi di decimo ordine.

3.ª Cinque gruppi di dodicesimo ordine (gruppi tetraedrici).

In totale si hanno, in G_{60}^{V}, quindici involuzioni gobbe, venti collineazioni a periodo 3; ventiquattro collineazioni a periodo 5 con 4 punti uniti ciascuna e l'identità.

Cominciamo dai dieci sottogruppi di 6.° ordine. Essi sono del tipo

$$(a\,b\,c)r, \quad (a\,c)\,(d\,e), \quad (a\,b)\,(d\,e), \quad (b\,c)\,(d\,e), \quad \text{con } r = 1, 2, 3.$$

Ogni collineazione a periodo 3, insieme al suo quadrato, individua uno di questi G_6. Ora il G_{60}^{V} opera transitivamente sulle sue collineazioni a peperiodo 3, quindi altrettanto farà sopra i suoi 10 G_6. Cioè:

I dieci gruppi di 6.° ordine sono proiettivamente identici. Quindi basta considerare la configurazione di uno di essi, ad es. del precedente. Esso contiene un gruppo del 3.° ordine G_3 che è invariante e generato dalle potenze di $(a\,b\,c)$. Segue che i 6 assi delle involuzioni gobbe di G_6 si appoggiano agli assi del G_3. Ma, per esempio, con $(a\,b\,c)$ e con $(a\,c)\,(d\,e)$ si si può generare l'intero G_6 dunque il punto dove un asse di $(a\,c)\,(d\,e)$ incontra l'asse di punti uniti di $(a\,b\,c)$ è invariante rispetto all'intero G_6 e quindi esso appartiene anche a un asse di $(a\,b)\,(d\,e)$ e a uno di $(b\,c)\,(d\,e)$. Valgono le considerazioni duali. Dunque i sei assi delle involuzioni gobbe del G_6 s'incontrano, a tre, a tre, in due punti sull'asse di punti uniti del G_3 ed esistono, a tre, a tre, in due piani passanti per l'asse di piani uniti del G_3 medesimo. I punti in cui tali 6 assi si appoggiano all'asse di piani uniti suddetto, compongono due terne binarie di cui una è la forma Q dell'altra: i due punti del comune hessiano sono i due punti uniti di G_3 che si trovano sull'asse di piani uniti. Dualmente ecc. Dunque un G_6 possiede due punti invarianti e due piani invarianti. Vogliamo adesso dimostrare che non esiste alcuna collineazione di G_{60}^{V} che trasformi uno dei due punti nell'altro, ovvero uno dei due piani nell'altro. Infatti, notiamo anzitutto che due G_6 diversi non possono avere un punto invariante comune, perchè un tal punto sarebbe invariante rispetto a G_{60}^{V}. Ne viene che se esiste in G_{60}^{V} una collineazione capace di effettuare il transito suindicato, essa deve trasformare il G_6 in se stesso e quindi gli assi di punti uniti e di piani uniti del sottogruppo G_3. Questi assi sarebbero dunque invarianti rispetto al G_6 e rispetto a una collineazione esterna al G_6, e quindi anche rispetto all'intero G_{60}^{V} ciò che è impossibile, perchè il G_{60}^{V} non possiede coppie di rette invarianti. Possiamo dunque enunciare i seguenti risultati:

I 30 assi delle 15 involuzioni gobbe s'incontrano, a 3, a 3, in 20 punti ed esistono, a 3, a 3, in 20 piani in guisa che quelli che passano per un punto esistono anche in un piano. Questi 20 punti si dividono in due decagoni invarianti ciascuno rispetto all'intero G_{60}^{V} *e dualmeute i 20 piani si dividono in due decaedri invarianti, pure ciascuno, rispetto al medesimo* G_{60}^{V}.

Ciascun decagono è iscritto in uno dei due decaedri. Vedremo nel numero seguente che i vertici dei due decagoni esauriscono tutti i possibili incontri degli assi delle involuzioui gobbe. E vedremo anche che:

I due decagoni precedenti costituiscono i poligoni invarianti che hanno il minor numero possibile di vertici.

Ogni asse di una involuzione gobba contiene un vertice dell'uno e un vertice dell'altro decagono. Indicheremo con le lettere D, D' questi decagoni. Tenendo presenti le collineazioni a periodo 3 si può anche dire che:

I dieci vertici del decagono D, o D', esistono, a tre, a tre, in dieci piani passanti, a tre, a tre, per dieci rette che sono gli assi dei piani uniti delle collineazioni a periodo 3 ecc. Dualmente ecc...

14. Passiamo ai sei sottogruppi di decimo ordine. Uno di essi G_{10} è del tipo:

$$(a\,b\,c\,d\,e)r, \quad (a\,b)\,(c\,e), \quad (b\,c)\,(d\,a), \quad (c\,d)\,(e\,b), \quad (d\,e)\,(a\,c), \quad (e\,a)\,(b\,d)$$

dove $r = 1, 2, 3, 4, 5$. Un tal G_{10} possiede dunque un G_5 invariante che è quello generato da $(a\,b\,c\,d\,e)^r$. E siccome un gruppo icosaedrico opera transitivamente sui propri G_5 ne viene che altrettanto fa sopra i G_{10}. Quindi: *I sei gruppi di 10.° ordine sono proiettivamente identici.* Si vede subito che i 24 punti uniti dei G_5 (n.° 12) sono tutti distinti. Perchè, non possono coincidere due appartenenti a un medesimo G_5, altrimenti le sue collineazioni non avrebbero il periodo *finito* 5; non possono coincidere due appartenenti a G_5 diversi, perchè, se coincidessero, un tal punto sarebbe invariante rispetto a due G_5 e quindi rispetto all'intero G_{60}^{V}.

Consideriamo un G_{10}: ad es. quello che contiene le sostituzioni sopra descritte. Ogni involuzione gobba del gruppo cambia G_5 in se stesso e quindi trasforma in se stesso il tetraedro degli elementi uniti. Vogliamo escludere che ciò avvenga per il fatto che gli assi di tali involuzioni passino per i vertici. Intanto, siccome il G_5 opera transitivamente sulle involuzioni gobbe del G_{10}, ne viene che niuna di esse potrà avere per assi due spigoli opposti del tetraedro in questione. Diciamo di più che nemmeno può essere che l'asse di una passi per un vertice. Infatti un tal vertice, essendo unito per il G_5 e per una sostituzione di G_{10} esterna al G_5, è unito per tutto il G_{10} e quindi, per quel punto, passa un asse di ciascuna delle rimanenti involuzioni gobbe del G_{10} medesimo. Inoltre, siccome tutti i G_{10}

sono identici, dal punto di vista proiettivo, ne viene che altrettanto accade per i rimanenti G_{10}. Ciò premesso, si osservi che una involuzione gobba: ad es.; $(a\,b)(c\,e)$, appartiene a due G_{10} e precisamente ai due G_{10} individuati da $(a\,b\,c\,d\,e)^r$, $(a\,b\,e\,d\,c)^r$. Dunque un asse s di $(a\,b)(c\,e)$ incontra un asse di ciascuna delle involuzioni gobbe seguenti:

$$(b\,c)(d\,a),\quad (c\,d)(e\,b),\quad (d\,e)(a\,c),\quad (e\,a)(b\,d)$$

$$(b\,e)(a\,d),\quad (c\,d)(a\,e),\quad (d\,e)(b\,c),\quad (c\,a)(b\,d).$$

Inoltre, a causa dei due G_6 cui appartiene $(a\,b)(c\,e)$, segue che s si appoggia anche a un asse di ciascuna delle

$$(a\,b)(d\,e),\quad (a\,b)(c\,d),\quad (c\,e)(b\,d),\quad (c\,e)(a\,d).$$

Dunque s, incontrando un asse di ciascuna delle

$$(b\,c)(d\,a),\quad (c\,a)(b\,d),\quad (a\,b)(c\,d)$$

appartiene alla quadrica invariante di $G^{\mathrm{III}}_{12,e}$ (n^0 4). Analogamente si vede che s appartiene alla quadrica invariante di $G^{\mathrm{III}}_{12,a}$; a quella di $G^{\mathrm{III}}_{12,b}$; di $G^{\mathrm{III}}_{12,c}$; e finalmente, come asse di $(a\,b)(c\,e)$, s appartiene anche alla quadrica invariante di $G^{\mathrm{III}}_{1\,,d}$. Ma ciò è impossibile perchè le cinque quadriche suddette non hanno certo rette comuni. Quindi: I dieci assi delle cinque involuzioni gobbe di un G_{10} si appoggiano tutti ai medesimi due spigoli opposti del tetraedro unito del gruppo senza però contenerne alcun vertice. Siamo adesso in grado di giustificare due affermazioni contenute nel numero precedente. La prima si è che i decagoni D e D' assorbono tutti possibili punti d'incontro degli assi delle involuzioni gobbe. Infatti se due tali assi s'incontrano, il punto d'incontro è unito per il sottogruppo generato da quelle due involuzioni il quale è necessariamente, o un G_4, o un G_6, o un G_{10}. Un G_4 non possiede punti uniti perchè è della specie G^{II}_4 (n^0 1), e ora abbiamo dimostrato che nemmeno un G_{10} possiede punti uniti; dunque il punto d'incontro in questione è unito per un G_6 e quindi è un vertice di D, o D'.

La seconda affermazione era che D, o D' rappresentavano i poligoni invarianti di minor numero possibile di vertici. Anche questo risulta immediatamente. Infatti se esistesse un poligono invariante con meno di 10 vertici, esso ne avrebbe necessariamente uno, o due, o tre, o quattro, o cinque, o sei. Ma non può averne nè uno, nè due, nè tre, perchè G^{V}_{60} non possiede nè punti, nè rette, nè piani invarianti. Non può averne quattro perchè, a causa dei G_5, quei quattro sarebbero, ciascuno, uniti per tutti i G_5, il che abbiamo già notato al principio di questo numero essere impossibile. Non può averne nè cinque, nè sei, perchè ciascuno sarebbe unito per un G_{12}, o per un G_{10}, mentre tanto i G_{12}, quanto i G_{10} non hanno punti uniti.

15. Indichiamo con $G_5^{(i)}$ i gruppi di 5° ordine ponendo:

$$G_5^{(1)} = (a\,b\,c\,d\,e)^r\,,\quad G_5^{(2)} = (a\,b\,c\,e\,d)^r\,,\quad G_5^{(3)} = (a\,b\,d\,c\,e)^r\,,\quad G_5^{(4)} = (a\,b\,e\,d\,c)^r$$

$$G_5^{(5)} = (a\,b\,d\,e\,c)^r\,,\quad G_5^{(6)} = (a\,b\,e\,c\,d)^r$$

con

$$r = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Consideriamo un punto P_1 unito per $G_5^{(1)}$. Tal punto non può essere unito per alcun altro G_5, come abbiamo già osservato; non può essere unito per una collineazione a periodo 3 perchè sarebbe unito per l'intero gruppo generato da quella collineazione e da $G_5^{(1)}$ e quindi per il G_{60}^{V}; e finalmente non può P_1 essere unito per alcuna involuzione gobba perchè essa con $G_5^{(1)}$ dà origine o a un G_{10} che è privo di punti uniti (numero precedente), o al G_{60}^{V} che ne è privo ugualmente. Dunque se a P_1 applichiamo le 12 sostituzioni di un gruppo tetraedrico troviamo 12 punti tutti distinti. Indichiamoli nel seguente modo:

La	$(a\,b)(c\,d)$	effettua i cicli	$(P_1\,P_2)$	e $(G_5^{(1)}\ G_5^{(6)})$
»	$(a\,c)(b\,d)$	» »	$(P_1\,P_3)$	» $(G_5^{(1)}\ G_5^{(6)})$
»	$(a\,d)(b\,c)$	» »	$(P_1\,P_4)$	» $(G_5^{(1)})$
»	$(a\,b\,c)$	» »	$(P_1\,P_5\,P_6)$	» $(G_5^{(1)}\ G_5^{(3)}\,G_5^{(5)})$
»	$(a\,b\,d)$	» »	$(P_1\,P_7\,P_8)$	» $(G_5^{(1)}G_5^{(1)}\,G_5^{(3)})$
»	$(a\,c\,d)$	» »	$(P_1\,P_9\,P_{10})$	» $(G_5^{(1)}\,G_5^{(4)}\,G_5^{(5)})$
»	$(b\,c\,d)$	» »	$(P_1\,P_{11}\,P_{12})$	» $(G_5^{(1)}\,G_5^{(2)}\,G_5^{(4)})$.

Cioè $P_1\ P_4$ sono uniti per $G^{(5)}$; $P_2\ P_3$ per $G_5^{(6)}$; $P_5\ P_8$ per $G_5^{\,3}$; $P_6\ P_{10}$ per $G_5^{\,5}$; $P_7\ P_{11}$ per $G_5^{(2)}$; $P_9\ P_{12}$ per $G_5^{(4)}$. Sieno $P'_1\ P_4$; $P'_2\ P'_3$; $P'_5\ P'_8$; $P'_6\ P'_{10}$; $P'_7\ P'_{11}$; $P'_9\ P'^1_2$ le coppie di punti uniti rimanti dei G_5 suddetti nell'ordine suddetto. Le involuzioni gobbe del $G_5^{(1)}$ ad es.: trasportano tutte P_1 in P_4 e P'_4 ecc. (n.° 14). Dico che non esiste alcuna collineazione in G_{60}^{V} che trasporti P_1 in P'_1, ovvero in P'_4. Infatti, se una tale collineazione esiste deve necessariamente trasformare in se stesso il $G_5^{(1)}$ perchè due G_5 non possono avere alcun punto unito comune (n.° 14), quindi essa deve appartenere al G_{10} di cui $G_5^{(1)}$ è invariante e per conseguenza tale collineazione non può essere altro che una delle involuzioni gobbe del G_{10}: ma niuna di esse trasporta P in P'_1, ovvero in P'_4.

Dunque i 24 punti uniti delle collineazioni, a periodo cinque, si dividono in due dodecagoni invarianti ciascuno (e quindi intransitivi) rispetto al G_{60}^{V}. Manifestamente essi sono i soli dodecagoni iuvarianti possibili.

16. Andiamo finalmente ai cinque sottogruppi di dodicesimo ordine (sottogruppi tetraedrici). Ciascuno contiene un G_4^{II} invariante e quattro G_3 costituiti ognuno dalle potenze di una stessa collineazione a periodo 3. Un G_3 appartiene a due sottogruppi tetraedrici: così ad es. $(a\,b\,c)r$ appartiene a $G_{12,d}^{III}$, $P_{12,e}^{III}$. Gli assi di due G_3 non hanno alcun punto comune: se essi infatti appartengono a uno stesso G_{12}^{III}, ciò risulta immediatamente dalla costruzione del G_{12}^{III} medesimo (n° 3); se essi non appartengono a uno stesso G_{12}^{III}, non esistono in alcun sottogruppo di G_{60}^{V} e quindi non possono avere un punto, o un piano unito comune, altrimenti quel punto, o quel piano, sarebbe invariante rispetto a G_{60}^{V}.

Ogni G_{12}^{III} ammette due rette invarianti (n° 4). Si hanno così dieci rette le quali compongono una figura assai interessante che ci proponiamo ora di considerare. Intanto rappresenteremo con $(a'\ a'')$ le rette invarianti di $G_{12,a}^{III}$; con $(b'\ b'')$ le rette invarianti di $G_{12,b}^{III}$; con $(c'\ c'')$ quelle di $G_{12,c}^{III}$; con $(d'\ d'')$ quelle di $G_{12,d}^{III}$ e con $(e'\ e'')$ quelle di $G_{12,e}^{III}$. Ogni tale coppia è costituita da rette sghembe. Osserviamo poi, che il G_{60}^{V} opera transitivamente sui G_3. Quindi, ricorrendo alla rappresentazione analitica del $G_{12,e}^{III}$ si vede (n.i 12, 4) che l'asse di piani uniti della collineazione $(a\ b\ c)$ incontra le rette e', e'' nei due punti uniti che quell'asse contiene. Ma $(a\ b\ c)$ appartiene anche a $G_{12,d}^{III}$, dunque quei punti apparterranno anche a d', d''. In conclusione; prese due qualunque coppie come $(d'\ d'')$, $(e'\ e'')$; una qualsiasi retta dell'una incontra una retta dell'altra. Esistano dunque i punti $e'.\ d''$, $e''.\ d'$; dico che allora non possono esistere invece i punti $e'.\ d'$; $e''\ d''$. Infatti si noti che la $(a\ b)\ (d\ e)$ porta d'' in e', ovvero in e''. Se esistesse il punto $e'.\ d'$ esso, come $e'\ d''$, sarebbe unito per la collineazione $(a\,b\,c)$: in ogni modo uno dei due punti $e'\ d'$, $e'\ d''$ sarebbe anche unito per la $(a\ b)\ (d\ e)$ e quindi invariante per il G_6 cui appartiene $(a\,b\,c)$. Ma nessuno dei due punti invarianti del G_6 in questione può esistere sopra e' ovvero sopra e'' (n° 23). Si conclude quindi che ciascuna delle dieci rette in discorso si appoggia ad altre quattro e non più.

17. Sieno a'', b'', c'', d'' appoggiate alla e' e le $a'\ b'\ c'\ d'$ quelle appoggiate ad e''. Ci proponiamo di dimostrare che i due gruppi $a'\ b'\ c'\ d'\ e'$, $a''\ b''\ c''\ d''\ e''$ sono, ciascuno, invarianti rispetto a G_{90}^{V}. Infatti la $(a\,b\,c)$ tiene fisse le e', e'', d', d'' e quindi produce i cicli $(a'\ b'\ c')$, $(a''\ b''\ c'')$. Dopo, si consideri la $(a\ e)\ (b\ d)$. Essa deve portare e' in a'', ovvero in a'. Ma è impossibile che e' sia, da essa, portato in a'' perchè il punto $e'\ .\ a''$ sa-

rebbe unito per $(a\ e)\ (b\ d)$ e per $(b\ c\ d)$ e quindi invariante rispetto al G_6 generato da $(a\ e)\ (b\ d)$ e da $(b\ c\ d)$ il che è assurdo, poichè un tal punto esiste sull'asse di punti uniti di $(b\ c\ d)$ (n° 13), mentre invece il punto $e' . a''$ esiste sull'asse di piani uniti di $(b\ c\ d)$ (n° 16). Dunque la $(a\ e)$ $(b\ d)$ trasforma e' in a' e quindi e'' in a''. La stessa collineazione deve trasportare b' in d', ovvero in d''. Ma se b' fosse trasformato in d'', il punto $e'' . b'$ che esiste per ipotesi, sarebbe trasformato nel punto $a'' . d''$ il quale invece non può esistere, altrimenti applicando la $(b\ c\ d)$ si vedrebbe che $a''\ b''\ c''\ d''$ esisterebbero in un medesimo piano manifestamente invariante rispetto a $G^{\mathrm{III}}_{12,e}$. Quindi $(a\ e)\ (b\ d)$ trasforma b' in d' e per conseguenza b'' in d''. Siccome poi la $(a\ e)\ (b\ d)$ medesima appartiene al $G^{\mathrm{III}}_{12,c}$ i suoi assi si appoggiano a c', c'' e quindi tanto c', quanto c'' sono sue rette unite. In conclusione i sistemi $a'\ b'\ c'\ d'\ e'$; $a''\ b''\ c''\ d''\ e''$ sono invarianti, ognuno, rispetto ad $(a\ b\ c)$ e $(a\ e)\ (b\ d)$. Ma con queste due collineazioni si può generare l'intero G^{V}_{60} (poichè esse non appartengono insieme ne a un G_6, nè a un G_{12}) e quindi l'affermazione è dimostrata.

Viceversa se $m\ n\ p\ q\ r$ è un sistema invariante di cinque rette, il G^{V}_{60} funzionerà sopra di esso come gruppo alterno e quindi ad es. la m deve essere invariante rispetto al G_{12} che permuta $n\ p\ q\ r$; per cui m è una delle dieci rette in questione, ecc.

Possiamo dunque enunciare i seguenti resultati:

Il G^{V}_{60} possiede due e due soli sistemi invarianti che siano costituiti ciascuno da cinque rette e sopra ognuno di questi esso funziona da gruppo alterno.

Queste 10 rette si distribuiscono anche in 5 coppie invarianti ciascuna rispetto a uno dei 5 sottogruppi tetraedrici.

Le rette di ogni sistema sono sghembe, a due, a due, ma ognuna di esse si appoggia a 4 dell'altro sistema.

La e'' si appoggia ad $a'\ b'\ c'\ d'$. Se oltre e'' esistesse un'altra retta r appoggiata ad $a'\ b'\ c'\ d'$, la quadrica individuata da e'', e', r sarebbe invariante rispetto a $G^{\mathrm{III}}_{12,e}$ il che è impossibile (N^{i} 3, 4). Segue: *I due sistemi invarianti suddetti sono costituiti in guisa che le cinque rette di uno di essi si appoggiano, a quattro, a quattro, a una delle cinque rette dell'altro e viceversa. In altre parole si può anche dire che le rette dell'un sistema prese, a quattro, a quattro, in tutti i modi possibili ammettono sempre una sola trasversale comune (invece che due). Queste cinque trasversali che così si ottengono compongono l'altro sistema. Complessivamente, le 10 rette in parola si incontrano, a due, a due, in 20 punti, vertici di un icosagono invariante rispetto al G^{V}_{60}.*

18. Viceversa: fra i cinque gruppi icosaedrici trovati quali di essi

ammettono sistemi invarianti di cinque rette? ovvero: quali di essi possono funzionare da gruppi alterni sopra cinque rette? Sieno m, n, p, q, r le rette in questione. Il G_{12}, che tiene fissa una di esse, non può essere il G_{12}^{I} (N° 2) perchè esso non possiede rette invarianti. Ciò esclude che il G_{60} cercato sia il G_{60}^{I}, o il G_{60}^{II} (N° 8). Anche il G_{60}^{III} lo si esclude subito. Infatti: sia il $G_{12,r}$ quello che tiene fissa ad esempio, la r. Ne viene che la r appartiene alla serie rigata costituita da rette invarianti rispetto a $G_{12,r}$. Ma tale serie rigata è la stessa per tutti i cinque: $G_{12,m}$; $G_{12,n}$; $G_{12,p}$; $G_{12,q}$; $G_{12,r}$. Quindi $m\,n\,p\,q\,r$ sono generatrici di questa serie e quindi *ognuna* è invariante rispetto a G_{12}^{III}. Rimangono G_{60}^{IV} e G_{60}^{V}. Di quest'ultimo abbiamo già trattato nel numero precedente. Quanto a G_{60}^{IV} ricorderemo che esso possiede cinque serie rigate costituite da rette invarianti rispetto ai cinque G_{12}. Se dunque si parte da una generatrice di una di queste e le si applica un G_5, si troverà un sistema di 5 rette sulle quali il G_{60}^{IV} funzionerà da gruppo alterno e dunque, in questo caso, i sistemi invarianti cercati sono ∞^1. Ma niuno di questi gode la proprietà caratteristica di cui godono i due sistemi trovati nel numero precedente. Infatti sia $a'\,b'\,c'\,d'\,e'$ uno dei sistemi sopra i quali il G_{60}^{IV} funziona da gruppo alterno. Intanto è manifesto che due di tali rette non s'incontrano. Perchè se ciò accadesse, tutte s'incontrerebbero, a due, a due, e quindi o esisterebbero in un piano, o passerebbero per un punto invarianti rispetto al G_{60}^{IV}, mentre tale G_{60}^{IV} non ammette nè punti, nè piani invarianti. Ciò premesso, vogliamo adesso dimostrare che non esiste *una sola* retta appoggiata a 4 delle rette $a'\,b'\,c'\,d'\,e'$. Sia infatti a'' *la sola* retta appoggiata a $a'\,b'\,c'\,d'\,e'$. Essa appartiene alla quadrica invariante di $G_{12.a}^{\mathrm{IV}}$. La retta b' appartiene invece alla quadrica invariante di $G_{1,b}^{\mathrm{IV}}$. D'altra parte, siccome a'' è la sola retta appoggiata a $b'\,c'\,d'\,e'$, ne segue che queste 4 rette sono, ciascuna, tangenti alla quadrica invariante di $G_{12,a}^{\mathrm{IV}}$. Allora, ricordiamo che, nel caso attuale, le collineazioni a periodo 3 sono biassiali e che due qualsiasi delle cinque quadriche in questione si tagliano secondo gli assi di una tale collineazione e secondo le due rette invarianti rispetto al G_{60}^{IV} (N° 9). Per il punto $a''\,.\,b'$ passa un asse s della collineazione $(c\,d\,e)$, il quale esiste anche nel piano $a''\,b'$. Esso è diverso da a'' (per il N° 9) e anche da b' perchè altrimenti anche le rimanenti $c'\,d'\,e'\,a'$ sarebbero assi di collineazioni a periodo 3 (mentre il G_{60}^{IV} è transitivo su queste collineazioni che sono dieci e non hanno assi comuni). Si trovano così delle condizioni irrealizzabili. Perchè se s' è l'altro asse di $(c\,d\,e)$, s' si appoggia a b' ed appartiene alla quadrica invariante di $G_{12,a}^{\mathrm{IV}}$: per cui b' è tangente a tale quadrica nel punto $b'\,.\,a''$ e la incontra altrove, cioè b' le appar-

tiene per intero insieme a s e a''. La quadrica invariante suddetta si spezza il che è impossibile (N° 4).

§ II. Il fascio di superficie di 4° ordine invarianti rispetto al gruppo G^{V}_{60}.

19. Fra tutti i gruppi trovati (N° 11), i soli G^{IV}_{60} e G^{V}_{60} non si possono mettere sotto forma analitica completamente reale (Bagnera: pag. 79 e 125. Ne segue che tutti gli altri posseggono almeno una quadrica invariante (Bagnera: pag. 3). Il G^{IV}_{60} e il G^{V}_{60} non la posseggono. Le cinque quadriche invarianti dei loro cinque G_{12} sono tutte distinte e soltanto, prese insieme, compongono una superficie invariante. Essi non posseggono nemmeno superficie cubiche invarianti. Basta perciò osservare che una superficie cubica *non* può essere invariante rispetto a un G^{II}_{4} (N° 1). Infatti gli assi di una delle involuzioni gobbe del G^{II}_{4} vengono scambiati fra di loro per opera di una qualunque delle altre due involuzioni del gruppo, quindi una retta appoggiata agli assi suddetti deve assorbire, nei punti di appoggio, un numero pari delle sue intersezioni con la superficie: esternamente ne rimane quindi un numero dispari il che è impossibile. Dunque una tal retta appartiene alla superficie per intero. Cioè le appartengono le ∞^2 rette unite per le involuzioni gobbe del G^{II}_{4}, il che è ugualmente impossibile.

Passando alle superficie di 4° ordine, si vede facilmente che niuna di esse può essere invariante rispetto al G^{IV}_{60}. Infatti le collineazioni a periodo 3 del G^{IV}_{60} sono biassiali. Se una superficie quartica è invariante rispetto a una tale collineazione, almeno un asse di questa esiste sulla superficie. D'altra parte esistono, in G^{IV}_{60}, involuzioni gobbe che trasformano, uno nell'altro, gli assi di una data collineazione a periodo 3 (ad esempio la T del N° 9 opera in tal modo sulla C'_3 del N°). Dunque tutti gli assi delle 10 collineazioni di periodo 3 esistono sulla superficie supposta. Nessuno di questi assi può esser retta doppia per la superficie perchè se lo è uno, lo sono tutti e si cadrebbe in una quadrica doppia. Ne segue che ogni retta generica appoggiata agli assi di una medesima delle collineazioni in discorso incontra, fuori degli assi, la superficie in due punti (il che è impossibile a causa del valore 3 del periodo), ovvero le appartiene per intiero il che è anche assurdo perchè apparterrebbero alla superficie le ∞^2 rette di 10 congruenze lineari.

Dimostreremo invece nel numero seguente che il G^{V}_{60} possiede un fascio di superficie quartiche invarianti. E sarà quindi giustificata la seguente affermazione:

Il G_{60}^{V} è l'unico, fra tutti i gruppi trovati, che goda la proprietà che l'ordine minimo delle sue superficie invarianti sia il quarto.

20. Ci proponiamo di trovare il fascio cui sopra abbiamo accennato. Basta perciò esigere la invarianza rispetto alle tre collineazioni C_2, C_3, T del N° 12. Accenneremo qui rapidamente al modo più sollecito di condurre i calcoli relativi. Indichiamo con Σ la superficie generica cercata. Semplici osservazioni sullo scambio prodotto fra x_3 e x_4 dalla T e le esigenze cui conducono il possesso della C_3 ci dànno per Σ la forma seguente:

$$\Sigma \equiv \alpha + \beta x_3^3 + \gamma x_4^3 + \delta x_3 x_4 + p x_3^2 x_4^2 = 0$$

dove α, β, γ, δ sono binarie in x_1, x_2 delle forme seguenti:

$$\alpha = a x_1^4 + b x_2^4 + c x_1^3 x_2 + d x_1 x_2^3 + n x_1^2 x_2^2$$

$$\beta = e x_1 + g x_2; \quad \gamma = f x_1 + h x_2$$

$$\delta = l x_1^2 + m x_2^2 + q x_1 x_2 .$$

Si noti che la Σ non può essere riduttibile perchè non esistono sistemi di uno, o due, o tre, o 4 piani che siano invarianti rispetto al G_{60}^{V}. Ciò esclude che α sia nullo identicamente: perchè con $\alpha = 0$ identicamente esistono 2 e quindi venti punti doppi di Σ situati a 4, a 4 sulle a' b' c' d' e', a'' b'' c'' d'' e'' onde queste rette sarebbero doppie, ecc., ecc. Ciò premesso, esigiamo la invarianza rispetto a T. Per effetto della T la Σ si cambia nella Σ' seguente:

$$\Sigma' \equiv \alpha' + 8 \beta' x_4^4 + 8 \gamma' x_3^4 + 4 \delta' x_3 x_4 + 16 p x_3^2 x_4^2 = 0$$

dove α', β', γ', δ' indicano ciò che divengono le binarie α, β, γ, δ per effetto della sostituzione binaria

$$\left\{ \frac{x_1 \sqrt{3} + x_2}{x_1}, \quad \frac{x_1 - x_2 \sqrt{3}}{x_2} \right\}.$$

Se Σ deve coincidere con Σ' si deve avere anzitutto

$$\alpha' = \varrho \alpha$$

dove ϱ è un fattore di proporzionalità. Ciò dà luogo alle condizioni seguenti.

$$\left.\begin{aligned} 9a + b + 3\sqrt{3}\, c + \sqrt{3}\, d + 3n &= \varrho a \\ a + 9b - \sqrt{3}\, c - 3\sqrt{3}\, d + 3n &= \varrho b \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} 12\sqrt{3}\, a - 4\sqrt{3}\, b - 8d - 4\sqrt{3}\, n &= \varrho c \\ 4\sqrt{3}\, a - 12\sqrt{3}\, b - 8c + 4\sqrt{3}\, n &= \varrho d \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\ldots\ 18(a+b) - 6\sqrt{3}(c-d) - 2n = \varrho n \ldots \tag{3}$$

Da cui

$$\left.\begin{aligned} (a-b)\,8-\varrho) + (c+d)\ 4\sqrt{3} &= 0 \\ (a-b)\ 16\sqrt{3} - (c+d)(8+\varrho) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} (a+b)(10-\varrho) + (c-d)\ \ 2\sqrt{3} \ + \ 6n &= 0 \\ (a+b)\ \ 8\sqrt{3} \ + (c-d)\ (8-\varrho) - 8\sqrt{3}\,n &= 0 \\ (a+b)\ \ 18 \ - (c-d)\ .\ 6\sqrt{3} \ - (2+\varrho)n &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Annullando i determinanti dei coefficienti si trovano le due equazioni in ϱ seguenti:

$$(\varrho + 16)(\varrho - 16) = 0$$
$$(\varrho + 16)(\varrho - 16)^2 = 0\,.$$

Dunque, necessariamente, deve essere $\varrho = \pm 16$ altrimenti la a si annulla identicamente.

21. Prima di proseguire nella ricerca delle condizioni che provengono dall'esigere che Σ possegga la T, distinguiamo i due casi: $\varrho = 16$, $\varrho = -16$.

Sia dapprima $\varrho = 16$. Le (4) si riducono a una sola; così pure le (5) e si è condotti necessariamente alle due:

$$a = \frac{5c + d + 2n\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}, \quad b = \frac{-c - 5d + 2n\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \tag{6}$$

e si vede allora che anche le (1), (2), (3), sono soddisfatte.

Poi dovremo avere:

$$\beta' = 2\gamma, \quad \gamma' = 2\beta, \quad \delta' = 4\delta$$

da cui:

$$\left.\begin{aligned} f = \frac{e\sqrt{3} + g}{2}, \quad h = \frac{e - g\sqrt{3}}{2} \\ l = m + q\sqrt{3}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Invece con $\varrho = -16$ si trova:

$$\left.\begin{aligned} a = -\frac{5n + 3\sqrt{3}\,d}{18}, \quad b = \frac{-n + 3\sqrt{3}\,d}{18}, \quad c = \frac{4n + 3\sqrt{3}\,d}{3\sqrt{3}} \\ f = -\frac{e\sqrt{3} + g}{2}, \quad h = \frac{g\sqrt{3} - e}{2} \\ l = -\frac{q}{2\sqrt{3}}, \quad m = \frac{q}{2\sqrt{3}}, \quad p = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

22. Esigendo finalmente la invarianza della superficie Σ rispetto alla C_2 del N° 12 si trovano le seguenti nuove condizioni che si riscontrano necessarie e sufficienti:

$$f = 2\sqrt{2}\,a; \quad g = -2\sqrt{2}\,b; \quad h = -c\sqrt{2}; \quad l = 3c$$

$$e = d\sqrt{2}; \quad m = 3d; \quad p = n; \quad q = -2n.$$

Queste non sono conciliabili con le (8) a meno che tutti i coefficienti non siano nulli. Si associno allora con le (6), (7), si riduca a forma intera e si vedrà che i coefficienti possono esprimersi tutti in funzione di un sol parametro λ indipendente. Si è quindi condotti alla equazione seguente la quale rappresenta il fascio cercato.

$$(2\lambda+1)\,x_1\,(x_1^3 + 2\sqrt{2}\,x_4^3) + (\lambda+2)\,x_2\,(-x_2^3 + 2\sqrt{2}\,x_3^3) +$$
$$+ 2\sqrt{3}\,(x_1^2 + \lambda\,x_2^2)\,(x_1\,x_2 + 3\,x_3\,x_4) +$$
$$+ 2\sqrt{6}\,(\lambda\,x_1\,x_3^3 - x_2\,x_4^3) + 3\,(\lambda-1)\,(x_1\,x_2 - x_3\,x_4)^2 = 0.$$

§ III. Le superficie singolari del fascio.

23. Per cercare le superficie del fascio dotate di punti singolari, è assai utile effettuare una trasformazione di coordinate la quale lasci fissi i punti (0 0 0 1), (0 0 1 0) e trasporti gli altri due punti fondamentali nei due punti invarianti di quel G_6 cui appartiene $(a\,b\,c)$. Questi punti sono:

$$A \equiv (2+\sqrt{3}, 1, 0, 0); \quad A' \equiv (-2+\sqrt{3}, 1, 0, 0)$$

e la trasformazione suddetta è la seguente:

$$\left\{\begin{matrix} x_1\,(2+\sqrt{3}) + x_2\,(-2+\sqrt{3}), & x_1 + x_2, & x_3, & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix}\right\}$$

Mediante questa, la equazione del nostro fascio diviene:

$$F \equiv x_1^4\{(55+32\sqrt{3})\lambda + 41 + 24\sqrt{3}\} + x_2^4\{(55 \quad 32\sqrt{3})\lambda + (41-24\sqrt{3})\} +$$
$$+ x_1(x_3^3 + x_4^3)\{\lambda(\sqrt{6}+2\sqrt{2}) + \sqrt{2}\} + x_2(x_3^3 - x_4^3)\{\lambda(-\sqrt{6}+2\sqrt{2}) + \sqrt{2}\} +$$
$$+ x_1^2\,x_3\,x_4\{-3\lambda + 21 + 12\sqrt{3}\} + x_2^2\,x_3\,x_4\{3\lambda - 21 + 12\sqrt{3}\} +$$
$$+ 18\,(\lambda-1)\,x_1^2\,x_2^2 + \frac{3}{4}(\lambda-1)\,x_3^2\,x_4^2 = 0.$$

Il valore di λ che annulla il coefficiente di x_1^4 individua una superficie

del fascio che ha un punto doppio conico in (1 0 0 0) cioè in un vertice del decagono D. Ma il G_{60}^{V} opera transitivamente sui vertici di D (N° 13); dunque tale superficie ha 10 punti doppi conici nei vertici suddetti. Analogamente, il valore di λ che annulla il coefficiente di x_2^4 individua una superficie del fascio che ha 10 punti doppi nei vertici del decagono D'. Niuna di queste due superficie ha altri punti doppi oltre i 10 suddetti. Infatti niuna di esse potrebbe possederne un altro P senza possederne in conseguenza più di altri 6 (a causa dei trasformati di P per mezzo del G_{60}^{V}). Avremmo quindi una superficie di 4° ordine con più di 16 punti doppi e quindi con infiniti punti doppi costituenti una curva che non può comporsi di rette, o di coniche a causa della sua invarianza rispetto al G_{60}^{V}. Sarà quindi una cubica gobba. Ma le cubiche gobbe invarianti del G_{60}^{V} sono solamente due e le superficie del fascio che le contengono sono certamente diverse dalle attuali (N° 25).

La esistenza di queste due superficie ci fornisce dunque una nuova proprietà dei decagoni D e D' (n° 13). Essa può esprimersi così:

I vertici dei due decagoni D, D' (formati dai punti uniti dei sottogruppi di 6° ordine) si possono riguardare come punti doppi di due superficie di 4° ordine invarianti ciascuna rispetto al G_{60}^{V}, l'una circoscritta a D e l'altra a D'.

Esse appartengono al fascio precedente e sono individuati dai valori di λ dati da

$$(55 \pm 32\sqrt{3})\lambda + 41 \pm 24\sqrt{3}) = 0.$$

I punti doppi di ciascuna sono conici.

24. Nessuna delle due superficie, ora trovate, è un simmetroide.

Sia φ una di esse. Per escludere la possibilità che essa sia un simmetroide, osserviamo anzitutto che per un punto doppio P di φ non passano rette esitenti sopra φ. Infatti, anzitutto l'equazione di φ ci dice che la retta $x_3 = 0$, $x_4 = 0$; asse di punti uniti per $(a\,b\,c)$; non appartiene a φ. Sia s questo asse ed r una retta supposta esistente sopra φ e passante per P. Allora il piano $r\,.\,s$ taglia la $(a\ b\ c)$ secondo una omologia piana a periodo 3 che ha s per asse e per centro il punto Q dove il piano $r\,.\,s$ taglia $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Se Q non esiste sopra r, poichè r è diverso da s, ne viene che, applicando a r la omologia piana suddetta, troveremo altre due rette r', r'' appartenenti a φ e passanti per P. Esse dunque appartengono al cono osculatore in P e poichè sono tre rette in un piano, segue che il cono in questione si spezza e P è biplanare mentre osservammo già che deve essere conico (n° 23). Se poi Q esiste sopra r, cioè appartiene a φ, esso coinciderà necessariamente con (0 0 1 0), o con (0 0 0 1) e in tal caso si verifica direttamente sulla equazione di φ che r non esiste. Segue ades-

so che φ non può essere un simmetroide, perchè se lo fosse il cono circoscritto a φ da un suo punto doppio si spezzerebbe in due coni cubici di cui le 9 generatrici comuni sarebbero le rette che uniscono quel punto doppio agli altri 9 (1). Ora, nel caso attuale, queste rette non possono appartenere a φ, quindi le due cubiche di contatto dei due coni suddetti hanno comuni i nove punti doppi rimanenti e quindi coincidono in una sola invariante rispetto al G_6 cui appartiene $(a\,b\,c)$. Ma in tal caso essa deve appoggiarsi in due punti diversi all'asse di punti uniti di $(a\,b\,c)$ che è $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ (n° 25) e non può essere più curva di contatto con φ di un cono cubico col vertice in P.

25. Per completare la ricerca delle superficie singolari del nostro fascio, cerchiamo le intersezioni di $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ con le equazioni che si ottengono annullando le derivate prime della F del n° 23, il che equivale a cercare i punti doppi del fascio che esistono eventualmente sopra l'asse di punti uniti di $(a\,b\,c)$. Otterremo così le due equazioni semplicissime seguenti:

$$x_1 \left\{ x_1^2 \left((55 + 32\sqrt{3})\,\lambda + 41 + 24\sqrt{3} \right) + 9\,(\lambda - 1)\,x_2^2 \right\} = 0\,,$$

$$x_2 \left\{ x_2^2 \left((55 - 32\sqrt{3})\,\lambda + 41 - 24\sqrt{3} \right) + 9\,(\lambda - 1)\,x_1^2 \right\} = 0.$$

Le soluzioni (1 0 0 0), (0 1 0 0) con $55 \pm 32\sqrt{3})\,\lambda + 41 \pm 24\sqrt{3} = 0$ sono già state considerate al n° 23 Escludendole, rimangono le due condizioni

$$x_1^2 \left\{ (55 + 32\sqrt{3})\,\lambda + 41 + 24\sqrt{3} \right\} + 9\,(\lambda - 1)\,x_2^2 = 0\,,$$

$$x_2^2 \left\{ (55 - 32\sqrt{3})\,\lambda + 41 - 24\sqrt{3} \right\} + 9\,(\lambda - 1)\,x_1^2 = 0\,,$$

che debbono esser soddisfatte insieme. Annullandone la resultante si trova:

$$2\,\lambda^2 - \lambda + 2 = 0\,.$$

I due valori di λ, che questa equazione individua, determinano due superficie del fascio dotate ciascuna di due punti doppi distinti sopra l'asse di punti uniti di $(a\,b\,c)$, Per esaminare la specie si osservi che la quadrica polare di un punto $(y_1\,y_2\,0\,0)$ generico sopra $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ rispetto a una superfiicie generica del fascio è:

(1) Cf. p. es. ROHN, *Die Flachen vieter Ordnung hinsichtlich iherer Knotenpunkte und iherer Gestaltung*. Math. Annal. 29.

$$x_1^2 \{m\, y_1^2 + 3(\lambda - 1)\, y_2^2\} + 12(\lambda - 1) x_1 x_2 y_1 y_2 + x_2^2 \{n\, y_2^2 + 3(\lambda - 1)\, y_1^2\} = 0$$

dove per brevità si è posto:

$$m = (55 + 32\sqrt{3})\,\lambda + 41 + 24\sqrt{3}, \quad n = (55 - 32\sqrt{3})\,\lambda + 41 - 24\sqrt{3}.$$

La quadrica precedente si compone di due piani. Essi coincideranno quando sia:

$$3(\lambda - 1)\, m\, y_1^4 + 3(\lambda - 1)\, n\, y_2^4 + \Big(m\, n - 27(\lambda - 1)^2\Big) y_1 y_2 = 0.$$

D'altra parte i punti d'incontro di $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ con una superficie generica del fascio sono dati da

$$m\, y_1^4 + n\, y_2^4 + 18(\lambda - 1)\, y_1^2 y_2^2 = 0.$$

Ebbene la condizione, in λ, perchè le ultime due equazioni coincidano è ancora

$$2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0.$$

Ciò dimostra che i due punti doppi in questione sono uniplanari. Ma il G_{60}^{V} opera transitivamente sopra tutti i sottogruppi di 6° ordine, quindi ciascuna delle due superficie, ora trovate, possiede 20 punti uniplanari e quindi ne ha infiniti. D'altra parte nè la superficie, nè il luogo dei suoi punti doppi uniplanari possono spezzarsi (n^i 20, 23), quindi non rimane altra ipotesi ammissibile che la superficie sia la sviluppabile osculatrice di una curva gobba. È così stabilita la esistenza delle due cubiche gobbe invarianti del G_{60}^{V} (1). Le due soluzioni ora trovate costituiscono le sviluppabili osculatrici delle due cubiche suddette.

26. Dimostriamo adesso che le due sviluppabili precedenti e le due superficie con 10 punti doppi ciascuna, trovate al n° 23, costituiscono tutte le possibili superficie singolari del nostro fascio. Perciò osserveremo, avanti, che le due cubiche gobbe, ora trovate, sono le sole invarianti rispetto al G_{60}^{V}. Infatti sia C una cubica gobba invariante rispetto a G_{60}^{V}. Essa sarà invariante anche rispetto a uno qualunque dei sottogruppi G_5, e quindi le facce del tetraedro degli elementi uniti di tali G_5 debbono tagliare, ciascuna, la C in un gruppo di 3 punti invariante rispetto a G_5. Dunque la C passerà per due vertici $M\,M'$ del tetraedro suddetto: se t e t' sono le tangenti a C in M, M' e π, π' i piani osculatori; saranno facce del tetraedro i piani π, π' e i piani $M\,.\,t'$, $M'\,.\,t$. I punti $M\,M'$ si corrisponde-

(1) KOHN *Ueber die Oktaederlage und die Ikosaederlage von zwei cubischen Raumcurven.* Vien, Ber. 108, 58-68.

ranno nelle cinque involuzioni gobbe che, col G_5, formano un G_{10} (n^0 14) e quindi la curva C sarà necessariamenie circoscritta a uno dei dodecagoni invarianti formati con i 24 punti uniti dei sei G_5 (n^0 15). Ma tali dodecagoni sono due. Dunque le cubiche C non possono essere altro che due, cioè quelle già trovate nel numero precedente. Ciò premesso, ammettiamo che la superficie Φ sia una delle superficie singolari del fascio. Essa non può esser degenere (n^0 20). I suoi punti doppi saranno in numèro finito, o infinito. Nel 1^0 caso non possono essere più di 16 e debbono costituire un poligono invariante. Esso dunque sarà necessariamente, o uno dei due decagoni, del n° 13, o uno dei due dodecagoni del n° 15. Se è uno dei decagoni, si hanno le soluzioni del n° 23. Se è uno dei dodecagoni, si osservi che essi appartengono effettivamente a tutte le superfici del fascio, ma soltanto le due sviluppabili osculatrici del n° 25 li ammettono come punti doppi perchè se fossero doppi, per tutte le superfice del fascio, tutte dovrebbero contenere le due cubiche gobbe invarianti (incontrandole in 24 punti). Ciò non è evidentemente. È dunque impossibile che la Φ abbia un numero finito di punti doppi nei vertici dell'uno, o dell'altro, dei dodecagoni in parola. Nel 2° caso poi in cui la Φ possegga infiniti punti doppi, essi debbono costituire una curva non degenere (n° 23) che non può essere nè una retta, nè una conica perchè il G^{V}_{60} non ammette nè una retta nè una conica invariante. Tale curva sarà dunque una cubica e poichè abbiamo già osservato che tali cubiche invarianti sono soltanto due, si ricade nelle due sviluppabili già considerate. Possiamo dunque enunciare i seguenti teoremi:

Il G^{V}_{60} possiede due e due sole cubiche gobbe invarianti. Ciascuna è circoscritta a uno dei due dodecagoni invarianti costituiti dai 24 punti uniti dei sottogruppi di 5° ordine. Sono secanti comuni delle due cubiche i 10 assi di punti uniti dei sottogruppi di 3° ordine (1).

Il medesimo G^{V}_{60} possiede quattro sole superficie singolari invarianti di 4° ordine. Due sono, naturalmente, le sviluppabili osculatrici delle due cubiche gobbe precedenti; le altre due hanno 10 punti doppi conici ciascuna nei vertici dei decagoni D e D' e sono quelle già descritte al n° 23.

27. Fra i cinque gruppi icosaedrici trovati (n^i 8, 10), il G^{V}_{60} sarà l'unico dotato di cubiche gobbe invarianti? La risposta è affermativa. Infatti, osserviamo che una collineazione a periodo 3 che ammette una cubica gobba invariante non può essere biassiale perchè una tal curva non possiede trisecanti. Ciò esclude il G^{III}_{60} e il G^{IV}_{60} (n° 9).

---

(1) STURM, *Combien y a-t il de secantes communes à deux cubiches gauches?* Annali di Matematica, serie II, Tomo III.

Poi, osserveremo che se un G_4 ammette una cubica gobba invariante essonon può essere un G_4^{I} (n° 1) costituito cioè dalle tre involuzioni gobbe che hanno per assi le tre coppie di spigoli opposti di uno stesso tetraedro. Ciò esclude il G_{60}^{I} e G_{60}^{II} (n° 8). Dunque:

Il G_{60}^{V} è l'unico, fra i cinque gruppi icosaedrici trovati, il quale sia dotato di cubiche gobbe invarianti (non degeneri) (1).

28. Viceversa data una cubica gobba come si può costruire un G_{60}^{V} rispetto al quale essa sia invariante? La costruzione può condursi nel modo seguente.

Anzitutto se una cubica gobba è trasformata in se da una involuzione gobba si vede subito che gli assi devono appoggiarsi alla cubica. V'ha di più: sieno A, A' i punti di appoggio; t, t' le relative tangenti; π, π' i piani osculatori. Allora i piani π e $A \,.\, t'$ sono uniti; così i piani π' e $A \,.\, t$. Segue che gli assi della involuzione in parola sono precisamente le rette $\pi.\ (A \,.\, t')$; $\pi' \,.\, (A' \,.\, t)$: se cioè si immagina il tetraedro π, π', $A \,.\, t$ gli assi suddetti sono quei due spigoli del tetraedro che incontrano ciascuno la curva in un sol punto. E si può dire che fissati due punti della curva restano anche fissate due rette, per quei punti, che possono riguardarsi come assi di una involuzione gobba che trasforma la cubica in se stessa. Allora, per costruire un G_4^{II} rispetto al quale la curva sia invariante, basterà prendere su di essa tre coppie, di punti, armoniche, a due, a due, e ripetere per ciascuna la costruzione precedente. Otterremo così le tre involuzioni gobbe del G_4^{II} cercate. Passiamo adesso a costruire un G_{12}^{III} di cui il precedente G_4^{II} è gruppo quadrinomio. Se una collineazione a periodo 3 trasforma la cubica gobba se stessa, abbiamo già osservato che la collineazione deve essere soltanto assiale (non biassiale). Adesso si può aggiungere che l'asse di punti uniti della collineazione deve essere una corda della curva, che le tangenti nei punti di appoggio debbono incontrare l'asse di piani uniti nei due punti uniti che l'asse medesimo contiene, che finalmente quest'ultimo deve essere la intersezione dei piani osculatori alla curva dei due punti suddetti. Viceversa si vede subito che se una collineazione a periodo 3 soddisfa a tali condizioni, la curva è mutata in sè stessa. Ciò premesso sieno sulla cubica, $A\,A'$, $B\,B'$, $C\,C'$, le tre coppie di punti che hanno servito a individuare G_4^{II}. Esse individuano anche sulla curva un G_4 di proiettività binarie appartenente a un G_{12} pure di proiettività binarie perchè la curva è razionale. Sia Ω una delle proiettività binarie a periodo tre del G_{12} sud-

(1) Analogamente si vede che il solo G_{12}^{III}, fra i gruppi tetraedrici, e il G_{24}^{V}, fra gli ottaedrici, ammettono cubiche gobbe invarianti.

detto ed M, M' i punti uniti di Ω. Allora la collineazione spaziale, a periodo 3, che ha la retta $M\,M'$ per asse di punti uniti, che ha per asse di piani uniti la intersezione dei piani osclulatori alla curna in M, M' e su questa intersezione, per punti uniti, quelli situati sulle tangenti in M, M' è la collineazione che aggiunta al G_4^{II} genera il G_{12}^{III} cercato.

Finalmente per trovare il G_{60}^{V} indichiame con C_2, C_3, due proiettività del G_{12} binario a periodo 2 e 3 rispettivamente e osserviamo che sulla curva, a causa della sua razionalità, esiste un G_{60} binario di cui una proiettività I a periodo 2 soddisfa le condizioni $I\,C_3\,I = C_3^2$, $(I\,C_2)^7 = 1$. La proiettività binanria I insieme al G_{12} binario individua il G_{60} binario sulla curva. Ebbene i punti doppi di I individuano, al modo indicato sopra, una involuzione gobba ehe trasforma ld cubica in se stessa e che col G_{12}^{III} genera il gruppo cercato G_{60}^{V}.

§ IV. Studio di un'altra particolare superficie invariante.

29. Oltre le superficie singolari del fascio (trovato al N° 22) studiate nel paragrafo precedente, esiste, nel fascio medesimo, un'altra superficie notevole che possiede 60 rette senza essere rigata e di cui ora vogliamo esporre le proprietà principali.

Riprendiamo perciò l'equazione del fascio suddetto:

$$(2\lambda+1)\,x_1\,(x_1^3+2\sqrt{2}\,x_4^3)+(\lambda+2)\,x_2\,(-x_2^3+2\sqrt{2}\,x_3^3)+$$
$$+2\sqrt{3}\,(x_1^2+\lambda\,x_2^2)\,(x_1\,x_2+x_3\,x_4)+$$
$$+2\sqrt{6}\,(\lambda\,x_1\,x_3^3-x_2\,x_4^3)+3\,(\lambda-1)\,(x_1\,x_2-x_3\,x_4)^2=0\,.$$

Da questa risulta che la retta $x_1=0$, $x_2=0$, cioè l'asse di piani uniti di $(a\,c\,b)$ tocca tutte le superficie del fascio in $(0\,0\,1\,0)$, $(0\,0\,0\,1)$, cioè nei due punti uniti di $(a\,b\,c)$ che esistono su quell'asse. Siccome G_{60}^{V} opera transitivamente sopra le sue collineazioni a periodo 3, così ne viene che tutti gli assi di piani uniti delle collineazioni in parola toccano tutte le superficie del fascio nei due punti uniti che ciascuno contiene. Se dunque si considera quella superficie del fascio che passa per un punto di uno di tali assi esterno ai due punti di contatto in discorso, ne segue che tale superficie conterà per intero quell'asse e quindi anche i nove rimanenti.

La superficie cercata è dunque caratterizzata dal contenere, per intiero, i dieci assi di piani uniti dei sottogruppi di 3° ordine. Ecco dunque trovato un primo gruppo di 10 rette esistenti per intero sulla superficie e sghembe a due, a due. (Infatti se due s'incontrassero, il loro piano sarebbe unito

per il gruppo generato dai due G_3 relativi, cioè o per un G_{12}^{III}, o per l'intero G_{60}^{V}: ma nè G_{12}^{III}, nè G_{60}^{V} hanno piani invarianti).

L'equazione della superficie si ottiene da quella del fascio per $\lambda = 1$ ed è la seguente:

$$F = \sqrt{3}\,(x_1^4 - x_2^4) + 2\,x_1\,x_2\,(x_1^2 + x_2^2)\,2\sqrt{2}\,(x_1\,x_3^3 - x_2\,x_4^3) +$$
$$+ 2\sqrt{6}\,(x_1\,x_4^3 + x_2\,x_3^3) + 6\,x_3\,x_4\,(x_1^2 + x_2^2) = 0\,.$$

30. Cerchiamo le altre rette della superficie. Perciò osserviamo che, tagliando F col piano $x_1 = \mu\,x_2$, la sezione si spezza in $x_2 = 0$ e

$$\left.\begin{array}{l} x_2^3(\mu+\sqrt{3})(\mu\sqrt{3}-1)(\mu^2+1)+2\sqrt{2}\,x_3^3(\mu+\sqrt{3})+2\sqrt{2}\,x_4^3(\mu\sqrt{3}-1)+ \\ \qquad + 6\,x_2\,x_3\,x_4\,(\mu^2+1) = 0\,. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Le condizioni perchè la (1) abbia almeno un punto doppio sono una qualunque delle seguenti:

$$\mu + \sqrt{3} = 0\,, \quad \mu\sqrt{3} - 1 = 0\,, \quad \mu^2 + 1 = 0 \qquad (2)$$

$$(\mu + \sqrt{3})^2\,(\mu\sqrt{3} - 1)^2 + (\mu^2 + 1)^2 = 0 \qquad (3)$$

discutiamo separatamente le (2) dalla (3).

31. Una qualsiasi delle (2) ci fornisce una seconda specie di rette esistenti sulla F e che chiameremo rette di seconda specie. Per stabilirne l'esistenza si osservi che ciascuno dei piani $x_1 + \sqrt{3}\,x_2 = 0$, $\sqrt{3}\,x_1 + x_2 = 0$ taglia la F oltre che nella $(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$ in un'altra retta e in una conica *non* degenere. Ciò accade se ci serviamo dei valori di μ che annullano le prime due delle (2). Se ci serviamo della 3ª si hanno i due piani $x_1 \pm i\,x_2 = 0$ ognuno dei quali taglia la F oltre che nella $(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$ in tre rette che si incontrano in uno stesso punto di $(x_3 = 0,\ x_4 = 0)$, cioè dell'asse di punti uniti di $(a\,b\,c)$ e che sono rappresentate da:

$$x_3^3\,(\pm\, i + \sqrt{3}) + x_4^3\,(\pm\, i\sqrt{3} - 1) = 0\,.$$

Sembrerebbe dunque che le rette che provengono dal soddisfare la 3ª delle (2) fossero di specie diversa da quelle che provengono dal soddisfare le prime due delle (2) medesime. Ciò non è. Infatti, si consideri la $(x_1 + x_2\sqrt{3} = 0\,,\ x_4 = 0)$ proveniente dal valore di μ che soddisfa la prima (2). Essa è unita per la $(a\,b\,c)$. Invece per effetto della $(c\,e\,d)$ seguente:

$$C_2\,.\,T = (a\,b)\,.\,(c\,d)\,.\,(a\,b)\,(d\,e) = (c\,e\,d) = \left\{\begin{array}{l} x_1 \equiv x_1\sqrt{3} + x_2 + 2\sqrt{2}\,x_3 \\ x_2 \equiv -\,x_1 + x_2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\,x_4 \\ x_3 \equiv x_1\sqrt{2} - x_2\sqrt{6} + 2\,x_4 \\ x_4 \equiv x_1\sqrt{6} + x_2\sqrt{2} - 2\,x_3 \end{array}\right.$$

Si osservi che la stessa retta $(x_1 + x_2\sqrt{3} = 0)$ dà luogo al ciclo delle tre rette

$$\left.\begin{matrix} x_1 + x_2\sqrt{3} = 0 \\ x_4 = 0 \end{matrix}\right\}; \left.\begin{matrix} x_2\sqrt{2} + x_3 + \sqrt{3}\,x_4 = 0 \\ x_1\sqrt{3} + x_2 - x_3\sqrt{2} = 0 \end{matrix}\right\}; \left.\begin{matrix} x_1\sqrt{3} + x_2 - x_3\sqrt{2} + x_4\sqrt{6} = 0 \\ \sqrt{2}\,x_2 + x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \quad (4)$$

le quali si appoggiano tutte e tre alla retta:

$$\left.\begin{matrix} x_1 + x_2\sqrt{3} + x_4\sqrt{2} = 0 \\ x_1\sqrt{3} - x_2 + x_3\sqrt{2} = 0 \end{matrix}\right\}$$

che è l'asse di piani uniti per la $(c\ e\ d)$ e passano per il punto $(\sqrt{3}, -1, \sqrt{2}, 0)$ che è situato sull'asse di punti uniti della $(c\ e\ d)$ medesima. Si vede anche che la quadrica polare di $(\sqrt{3}, -1, \sqrt{2}, 0)$ si compone dei due piani:

$$x_1 + x_2\sqrt{3} + x_4\sqrt{2} = 0\,, \quad x_1\sqrt{3} - x_2 + x_3\sqrt{2} = 0$$

dei quali il primo è piano tangente a F in $(\sqrt{3}, -1, \sqrt{2}, 0)$ e contiene le tre rette (4). Ciò prova l'affermazione fatta.

Le rette che si trovano considerando le soluzioni (2) saranno chiamate le rette di 2ª specie della superficie F. Quante sono esse? Per rispondere a tale domanda osserviamo che le considerazioni precedenti fatte per la $(x_1 + x_2\sqrt{3} = 0,\ x_4 = 0)$, unita per $(a\ b\ c)$ possono ripetersi per la $(a\ c\ b)$. $(c\ e\ d)\ (a\ b\ c) = (a\ e\ d)$, e per la $(a\ c\ b)\ (a\ e\ d)\ (a\ b\ c) = (b\ e\ d)$, nelle quali trasformazioni la retta in questione rimane inalterata. Dunque le rette di 2ª specie sono: $\dfrac{10\,.\,6}{3} = 20$. Abbiamo quindi il seguente teorema:

La superficie F possiede altre 20 rette. Esse s'incontrano, a tre, a tre, in 20 punti di F ed esistono, a tre, a tre, in 20 piani tangenti a F in guisa che quelle che passano per un punto esistono anche in un piano e viceversa. Si ha così un nuovo icosagono invariante, rispetto al G^{V}_{60}, di cui i vertici sono analoghi ai noti punti di ECKARDT *sulle superficie cubiche particolari che portano un tal nome. Per ogni vertice passano tre rette di 2ª specie; sopra ogni retta di 2ª specie esistono tre vertici dell'icosagono suddetto. La sezione del piano tangente, in uno di tali vertici, si compone delle tre rette di 2ª specie che vi passano e dell'asse di piani uniti della collineazione a periodo 3 che permuta quelle tre rette.*

È questo il secondo gruppo di rette esistenti per intiero sulla F.

Tanto sulle 10 rette di 1ª specie, quanto su quelle di 2ª il G^{V}_{60} agisce transitivamente.

32. Finalmente, l'equazione (3) del nº 30 ci fornisce la 3ª specie di rette sopra F. Sia la (3) soddisfatta. Ognuna delle sue radici individua un

piano passante per $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ il quale taglia la superficie F ulteriormente in un trilatero. E poichè le radici suddette sono tutte distinte esistono 4 di questi piani per la retta in discorso e si hanno 12 nuove rette di F appoggiate a $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Ma anzitutto occorre dimostrare che le rette ora trovate sono *nuove soluzioni* effettive. Infatti: nessuna di esse può esser retta di prima specie poichè appoggiandosi già a una retta di 1ª specie (nel caso precedente alla $x_1 = 0$, $x_2 = 0$) avremmo due rette 1ª specie con un punto e un piano comune il che è impossibile (n⁰ 29). Prendiamo poi a considerare una retta di 2ª specie e dimostriamo che essa non può figurare fra le rette trovate dianzi. Siccome il G_{60}^{V} opera transitivamente sulle rette di 2ª specie basterà considerare una qualunque di esse: ad es. quella del numero precedente. Essa incontra gli assi di piani uniti di $(c\,e\,d)$, $(a\,e\,d)$, $(b\,e\,d)$ ed è unita per $(a\,b\,c)$. Con ciascuno degli assi suddetti di $(c\,e\,d)$, $(a\,e\,d)$, $(b\,e\,d)$ individua un piano che taglia F secondo 4 rette di cui 3 passano per un punto, con l'asse di piani uniti di $(a\,b\,c)$ individua un piano secante la F secondo due rette e una conica non degenere. Cioè con nessuno dei 4 suddetti assi dà luogo a un piano che tagli F ulteriormente secondo un vero e propio trilalero. Se dunque dimostreremo che la retta di 2° specie, sopra nominata, non incontra assi di piani uniti di altre collineazioni a periodo 3, sarà dimostrato che niuna retta di 2ª specie figura fra le nuove soluzioni trovate al principio di questo numero. Perciò osserviamo che se la retta r suddetta si appoggiasse all'asse di piani uniti di $(b\,c\,d)$ si appoggerebbe anche a quello di $(a\,d\,c)$ e di $(a\,b\,d)$ che sono le trasformate di $(b\,c\,d)$ mediante il $G_3 = (a\,b\,c)$, poichè giova ricordare che la r è unita per un tale G_3. Dunque la r appoggiandosi agli assi dei piani uniti di $(a\,b\,c)$, $(a\,c\,d)$, $(a\,d\,c)$ $(a\,b\,d)$ è necessariamente una delle rette invarianti di $G_{12,e}^{III}$ (nⁱ 3 e 4). Analoga considerazione esclude che la r possa incontrare l'asse di piani uniti di $(b\,c\,e)$, o di $(a\,e\,c)$, o di $(a\,b\,e)$. Dunque le rette di F forniteci dalla (3) del n⁰ 30 sono sicuramente nuove soluzioni.

33. Quante sono queste nuove soluzioni fra tutte? Per rispondere a tale domanda osserviamo anzitutto che qualunque sia il numero di queste rette di F, che chiameremo di 3ª specie, il G_{60}^{V} opererà transitivamente su di esse. Ne segue che il loro numero sarà un divisore di 60. Ma non può essere 60 altrimenti il numero totale delle rette di F sarebbe 94 cioè superiore a 64, limite massimo delle rette che una superficie del 4° ordine può contenere senza essere rigata (1). E d'altra parte è certo che F non è rigata perchè sarebbe anche singolare e le superficie singolari del fascio

(1) SCHUR, *Ueber eine besondere Classe von Flächen vierter Ordnung*. Math. Annal., p. 20.

furono già considerate, nè fra esse figura la F (§ III). Deve dunque essere questo numero un divisore di 60 inferiore a 60. Ma non può essere nè uno, nè due, nè tre, nè quattro, perchè non esistono sistemi invarianti costituiti da un tal numero di rette. Non può esser cinque, perchè niuna delle rette invarianti, rispetto a un G_{12} appartiene a F. Non può esser sei, perchè ciascuna dovrebbe essere invariante rispetto a un G_{10} e niun G_{10} possiede di tali rette. Non può esser 10, perchè le sole rette invarianti che un G_6 possiede sono gli assi del G_3 che il G_6 contiene. Non può esser 12, perchè un G_5 non possiede rette invarianti. Non può esser 15 perchè ciascuna sarebbe invariante rispetto a un G_4. Ora è facile verificare direttamente che nessuna delle rette invarianti rispetto a un G_4 (le quali costituiscono una serie rigata) appartiene a F. E in ultimo non può esser 20, perchè essendo ciascuna unita per un G_3 o sarebbe un asse di G_3, o una retta di 2ª specie. Non rimane dunque altra ipotesi che il numero cercato sia 30 e ciascuna sia quindi unita per una sola involuzione gobba. Ne segue che ciascuna di queste rette di 3ª specie si appoggia agli assi di una involuzione gobba e agli assi di piani uniti di 4 G_3. Dunque: *Esistono sulla superficie F, oltre quelle già trovate, altre 30 rette le quali, a tre, a tre, e insieme a una retta di 1ª specie compongono 40 quadrilateri piani giacenti per intiero sulla superficie e ciascuno con i vertici tutti distinti.*

La superficie non possiede altre rette. Perchè non potrebbe possederne più di 4 per il già citato teorema di Schur e queste 4 dovrebbero costituire un sistema invariante.

La superficie F possiede in tutto 60 rette divise in tre sistemi, invarianti ciascuno, costituiti di 10, di 20, di 30 rette sopra ognuno dei quali il G_{60}^{V} opera transitivamente.

SOPRA LA CONFIGURAZIONE DI DUE CUBICHE GOBBE INVARIANTI RISPETTO A GRUPPI DI COLLINEAZIONI QUATERNARIE.

Estratto dal t.XVI (1902) dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.*

Adunanza del 27 luglio 1902.

La Nota presente trae la sua origine da un'altra del KOHN riguardante le relazioni mutue di posizione di due cubiche gobbe invarianti simultanee, prima rispetto a un gruppo ottaedrico di collineazioni quaternarie, poi rispetto a un gruppo icosaedrico (1). La Nota del KOHN ha carattere essenzialmete sintetico ed è quindi manchevole della rappresentazione analitica dei gruppi in parola mediante sostituzioni lineari quaternarie. D'altra parte un lavoro analitico del Maschke assegna tutte le specie proiettive di gruppi finiti lineari quaternari che sono oloedricamente isomorfi a gruppi totali, od alterni sopra n elementi (2) e siccome fra questi figurano naturalmente quelli dei poliedri regolari (3) così è certo che pure fra essi debbono cercarsi i gruppi considerati dal KOHN. Determinare quali essi siano fu il primo scopo della Nota presente e di quì a stabilire tutti i gruppi finiti lineari quaternari che posseggono cubiche gobbe invarianti il passo è così naturale e ovvio che basta appena accennarlo. A ciò è dedicata la prima parte di questo lavoro, il quale,

(1) KOHN, *Ueber die Oktaëder und die Ikosaëderlage von zwei cubischen Raumcurven* (Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Wien 1899).

(2) MASCHKE, *Bestimmung aller ternären und quaternürem Collineatione gruppen, welche mit symmetrischen und alternirenden Buchstabenvertanschungsgruppen holoedrisch isomorph sind* (Mathematische Annalen Bd. LI).

(3) Sopra tali gruppi e particolarmente sulla cfz. generata dal più notevole di essi, che è un gruppo icosaedrico, è in corso di stampa negli Annali di Matematica una mia memoria la quale ha con questa qualche punto di contatto (Numeri 5, 6, 7, della Nota presente).

per maggiore omogeneità e facilità di lettura, ho reso indipendente tanto da quello del Kohn, quanto da quello del Maschke. Quelli dei gruppi trovati che si possono mettere sotto forma reale, rientrano naturalmente nella classificazione che di tali gruppi fa il Bagnera nella sua importante memoria destinata a tale scopo (1) e di cui all'occorrenza richiamo notazioni e indicazioni di pagina.

Fra i gruppi quì costruiti, due dànno luogo a cfr. notevoli dal punto di vista geometrico: sono l'ottaedrico e l'icosaedrico. Ma la cfz. di quest'ultimo è largamente studiata nella mia già citata memoria. Mi sono dunque limitato adesso a considerare la cfz. che ha origine dall'altro, cioè dall'ottaedrico e a ciò è dedicata la 2ª parte della Nota presente. Tale cfz. si aggruppa intorno a due esagoni e a due quadrangoli invarianti che ne formano il nucleo e intorno ai quali si dispongono, per così dire, le due cubiche gobbe e le superficie invarianti. Relativamote a queste superficie si vede subito che ne esiste una sola del 2° grado; che non ne esistono del 3°, e che del 4° grado ne esiste un fascio ed una rete (N° 14). Particolarmente interessano quelle fra esse dotate di un numero finito di punti singolari. Così se ne trovano, nella rete, due sistemi ∞^1 in guisa che la superficie generica dell'uno ha 8 punti doppi (N° 20) e la superficie generica dell'altro ne ha 12 (N° 19). Fra tutte vi figurano anche, in numero finito, esempi notevoli: così due Jacobiane di due sistemi lineari ∞^3 di quadriche (superficie di Weddle) (N° 15); due superficie di Kummer 4 volte tetraedroidali (N° 19); due superficie desmiche (N° 19), e infine un caso, che credo nuovo, di quattro superficie con sei punti biplanari e 4 punti conici ciascuna, nei vertici dei due esagoni e dei due quadrangoli invarianti (N° 17).

Costruzione dei gruppi cercati.

1. Per costruire tutti i possibili gruppi finiti di collineazioni quaternarie rispetto alle quali una cubica gobba irriduttibile è invariante, si cominci dall'osservare che se G è uno di tali gruppi esso individuerà sulla curva un gruppo g subordinato di proiettività binarie il quale per la razionalità della curva presenterà i soliti cinque casi cosidetti della piramide, della doppia piramide, del tetraedro dell'ottaedro (o cubo), dell'icosaedro (o dodecaedro). Esaminiamo particolarmente ciascuno di essi.

2. *Gruppi della piramide.* — Il gruppo della piramide è costituito da un gruppo ciclico di potenze di una stessa collineazione che ha il pe-

(1) BAGNERA, *I gruppi finiti reali di sostituzioni quaternarie* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1901).

riodo finito. Per esprimere analiticamente la collineazione ricorreremo alla ben nota rappresentazione parametrica della cubica gobba nella sua forma più semplice. Sieno perciò A e B due punti della curva. Noi assumeremo per tetraedro fondamentale quello formato dai piani osculatori in A e B e dai piani tangenti alle curve in A e B passanti rispettivamente per B e per A, e poichè dovremo ricorrere spesso a un siffatto tetraedro lo chiameremo, per brevità, un « *tetraedro associato* » alla curva. Ogni coppia di punti della cubica ne individua uno. Ricorrendo dunque a un tal tetraedro e disponendo opportunamente del punto unità, la rappresentazione parametrica della cubica è (come ben si sa)

$$x_1 = \lambda^3, \qquad x_2 = \lambda^2, \qquad x_3 = \lambda, \qquad x_4 = 1.$$

Una collineazione C a periodo finito che trasformi la curva in sè stessa, o avrà 4 punti uniti soltanto, o infiniti. Nel 1° caso, poichè il perido è finito, i 4 punti sono vertici di un tetraedro associato alla curva: assumendolo come fondamentale la C può rapprentarsi nel modo seguente:

$$C = \begin{Bmatrix} a^3 x_1, & a^2 x_2, & a x_3, & x_4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{Bmatrix}, \qquad a^r = 1;$$

il periodo r può essere qualunque fuorchè 2, o 3. Nel caso invece che la C possegga infiniti punti uniti essa sarà necessariamente biassiale, o assiale. Se è biassiale è certo una involuzione gobba. Indicando con A e B i due punti uniti sulla curva, gli assi della involuzione sono costituiti da quei due spigoli del tetraedro associato, individuato da $A\,B$, che hanno ciascuno un sol punto comune con la curva. La C può quindi rappresentarsi con la forma precedente supponendovi $a = -1$.

Se finalmente la C è assiale, il periodo è necessariamente uguale a 3: indicando, come dianzi, con A e B i due punti uniti sulla curva, la retta $A\,B$ è asse di punti uniti; la intersezione dei piani osculatori in A e B è asse di piani uniti: su quest'ultimo sono punti uniti i vertici del tetraedro associato che A, B individuano e per la retta $A\,B$ sono piani uniti le due facce del tetraedro medesimo che la contengono. La collineazione si rappresenta ancora con la C di prima supponendo che a sia una delle radici cubiche immaginarie dell' unità.

In conclusione si può dire che il gruppo attuale è individuato dando due punti distinti della curva i quali non sono altro che i punti uniti della proiettività ciclica binaria che viene a stabilirsi, in conseguenza, sulla curva medesima.

3. *Gruppi della doppia piramide.* — Per costruire un tal gruppo basta aggiungere al gruppo della piramide una collineazione C' a periodo 2 rispetto alla quale siano invarianti la curva e il gruppo delle potenze di C del N° precedente. Segue che C' è una involuzione gobba (N° 2) e che i punti uniti di C' sulla curva separano armonicamente i punti A, B del N° precedente. Prendendo quindi per punti uniti di C' quelli della coppia (11), (1, — 1), la C' sarà data da

$$C' = \begin{pmatrix} x_4, & x_3, & x_2, & x_1 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{pmatrix}.$$

La C' e la C generano il gruppo generico cercato.

Appartiene a questa specie il gruppo quadrinomio che può riguardarsi come gruppo della doppia piramide in 3 modi diversi. Per individuarlo basterà prendere tre coppie di punti armoniche, a due, a due, sulla cubica. Le involuzioni che tali coppie individuano, insieme alla identità, costituiscono il gruppo cercato. Servendosi delle tre copie [(1, 0), (0, 1)]; [(1, 1), (1, — 1)]; [(1, i), (1, — i)] il gruppo quadrinomio cercato è formato dalla identità e dalle tre involuzioni gobbe seguenti:

$$\begin{pmatrix} -x_1, & x_2, & -x_3, & x_4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_4, & x_3, & x_2, & x_1 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -x_4, & x_3, & -x_2, & x_1 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{pmatrix}.$$

Gli assi appartengono a una stessa serie rigata esistente sulla quadrica $x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0$. Il gruppo cosi trovato è uno dei 3 possibili gruppi quadrinomi dello spazio a 3 dimensioni (il G_4^{II} della mia citata memoria). Le tre coppie di punti armoniche, a due, a due, sulla curva compongono un esagono al quale ricorreremo così sovente nel seguito da essere costretti per brevità e dargli un nome: lo chiameremo un esagono armonico.

4. Il gruppo quadrinomio precedente individua una seconda cubica gobba, pure invariante, e collegata alla prima da una notevole cfz. di cui ora vogliamo stabilire la esistenza. Si consideri perciò sulla cubica data un punto generico A e i suoi tre trasformati B, C, D per effetto delle collineazioni del gruppo. Il tetraedro $A\,B\,C\,D$ è invariante. Muovendosi il punto A e descrivendo la cubica si hanno infiniti di tali tetraedri: il luogo dei vertici è la cubica data: si domanda qual'è l'inviluppo delle facce? Applicando a queste considerazioni la trasformazione duale che il sistema nullo della cubica data individua, si giunge ad una seconda serie di tetraedri invarianti di cui le facce inviluppano la sviluppabile osculatrice della cubica medesima: si domanda qual'è il luogo dei vertici? La questione è semplice. Le coordinate dei vertici del tetraedro $A\,B\,C\,D$ possono assumersi, in funzione di λ, nel modo seguente:

$$A \equiv (\lambda^3,\ \lambda^2,\ \lambda,\ 1); \qquad B \equiv (-\lambda^3,\ \lambda^2, -\lambda,\ 1);$$
$$C \equiv (1,\ \lambda,\ \lambda^2,\ \lambda^3); \qquad D \equiv (1, -\lambda,\ \lambda^2, -\lambda^3,).$$

Allora le coordinate delle facce sono rispettivaminte:

$$BCD \equiv (\lambda^2,\ \lambda^3,\ -1,\ -\lambda); \qquad ABD \equiv (-\lambda,\ -1,\ \lambda^3,\ \lambda^2)$$
$$ACD \equiv (-\lambda^2,\ \lambda^3,\ 1,\ -\lambda); \qquad ABC \equiv (-\lambda,\ 1,\ \lambda^3,\ -\lambda^2)$$

l'inviluppo è dunque della 3ª classe. Il luogo gli deve corrispondere nel sistema nullo che la cubica data individua: esso sarà dunque costituito da una nuova cubica gobba. I punti corrispondenti ai 4 piani precedenti sono:

$$A' \equiv (3\lambda,\ -1,\ -\lambda^3,\ 3\lambda^2); \qquad C' \equiv (3\lambda^2,\ -\lambda^3,\ -1,\ 3\lambda)$$
$$B' \equiv (-3\lambda,\ -1,\ \lambda^3,\ 3\lambda^2); \qquad D' \equiv (3\lambda^2,\ \lambda^3,\ -1,\ -3\lambda)$$

e si vede inoltre che i piani BCD, ACD, ABD, ABC sono osculatori della nuova curva in A', B', C', D'.

Possiamo dunque dire che:

Data una cubica gobba e un suo esagono armonico, è individuato un gruppo quadrinomio rispetto al quale la curva è invariante. Il luogo dei vertici dei tetraedri invarianti circoscritti alla sua sviluppabile osculatrice e l'inviluppo delle faccie dei quadrangoli invarianti iscritti nella curva, costituiscono una nuova cubica gobba invariante e la sua sviluppabile osculatrice. — Le due cubiche posseggono tre tetraedri associati comuni; ammettono lo stesso sistema nullo e si deducono l'una dall'altra nello stesso modo.

5. *Gruppo del tetraedro.* — Sarà ottenuto dal gruppo quadrinomio precedente aggiungendo una collineazione a periodo 3 rispetto alla quale la cubica gobba data e il gruppo quadrinomio siano invarianti.

Questa collineazione intanto sarà assiale (N° 2). Per individuarla indichiamo con mm', nn', pp', le tre coppie di assi delle involuzioni gobbe del gruppo quadrinomio: con MM', NN', PP', i loro punti di appoggio con la curva. Si consideri poi su di essa il gruppo binario tetraedrico individuato dai punti suddeti e siano AA' due punti uniti di un suo sotto gruppo di 3° ordine, cioè, come è ben noto, quelli che compongono l'hessiano di due terne come MNP, $M'N'P'$. Ebbene la coppia di punti AA' individua, alla maniera del N° 2, una collineazione assiale che è quella richiesta. Manifestamente essa trasformerà in sè medesima anche la 2ª cubica gobba di cui è parola nel N° precedente. Questa collineazione stabilisce fra le rette della serie rigata cui appartengono mm', nn', pp' una corrispondenza a periodo 3 di cui sono rette unite le hessiane delle terne mnp, $m'n'p'$.

Altrettanto può dirsi per le rette della serie coniugata, con la differenza che le due rette unite della corrispondenza (essendo invarianti ciascuna anche rispetto al gruppo quadrinomio) sono invarianti rispetto all'intero gruppo generato il quale viene così a possedere due rette invarianti alle quali manifestamente si appoggiano tutti gli assi del sottogruppo di 2° e 3° ordine. Una maggiore opportunità per le formule che seguiranno suggerisce di mettere le involuzioni gobbe del gruppo quadrinomio sotto la forma seguente (Maschke, pag. 275);

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_4 a\sqrt{2}, & -x_2 + x_3 a^2\sqrt{2}, & x_2 a\sqrt{2} + x_3, & x_1 a^2\sqrt{2} - x_4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, \end{bmatrix}$$

dove per a siano sostituiti successivamente i tre diversi valori delle radici cubiche dell'unità. Allora si vede subito che una qualunque delle precedenti insieme alla

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & a x_3, & a^2 x_4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{pmatrix},$$

dove però è adesso a immaginaria, generano il gruppo richiesto. Esso è uno dei tre possibili gruppi tetraedrici dello spazio a tre dimensioni. È il « tetraeder II » di MASCHKE (pag. 275) e il G_{12}^{*} di BAGNERA (pag. 59) (nella mia citata memoria è indicato con $G_{12}^{'''}$ e così continuerò a indicarlo). Le due rette invarianti sono 2 spigoli opposti del tetraedro di riferimento:

$$[(x_1 = 0,\ x_4 = 0);\quad (x = 0,\ x_3 = 0)].$$

6. *Gruppo dell'ottaedro.* — Lo otterremo dal gruppo tetraedrico precedente mediante queste considerazioni. Il g_{12} binario tetraedrico che già esiste su di una qualunque delle cubiche invarianti, come subordinato al $G_{12}^{'''}$ del numero precedente, appartiene a un g_{24} binario di facile e nota determinazione. Sieno AA' i due punti doppi di una delle 6 involuzioni binarie di g_{24} esterne a g_{12}. Ebbene la coppia AA' individua (n° 2) una involuzione gobba rispetto alla quale tanto la cubica considerata quanto il $G_{12}^{'''}$ sono invarianti. Questa involuzione gobba I è quella da aggiungersi al $G_{12}^{'''}$ per generare il gruppo cercato rispetto al quale, manifestamente, anche la 2ª cubica gobba dei n° precedenti sarà pure invariante. Per ottenere l'espressione analitica di I si osservi che essa, applicata ad una determinata collineazione a periodo 3 del $G_{12}^{'''}$, la trasforma nel suo quadrato e quindi ne lascia invariati gli elementi uniti. Ne segue che le due rette invarianti del $G_{12}^{'''}$ (le quali rispetto al gruppo di cui ora trattiamo debbono comporre una coppia invariante) non possono essere sepa-

ratamente invarianti rispetto a I, ma debbono invece essere trasformate l'una nell'altra. La I sarà dunque della forma:

$$\begin{bmatrix} a\,x_2 + b\,x_3\,, & c\,x_1 + d\,x_4\,, & m\,x_1 + n\,x_4\,, & p\,x_2 + q\,x_3 \\ x_1\,, & x_2\,, & x_3\,, & x_4 \end{bmatrix} = I.$$

Dopo, si esiga che I trasformi la collineazione di 3^0 ordine (n^0. 5)

$$\begin{pmatrix} x_1\,, & x_2\,, & a\,x_3\,, & a^2\,x_4 \\ x_1\,, & x_2\,, & x_3\,, & x_4 \end{pmatrix}$$

nel suo quadrato e finalmente si osservi che la I deve essere permutabile con quella involuzione gobba del gruppo quadrinomio che si ha per $a = 1$ (n^0 5).

Si trova così per la I la forma seguente

$$I = \begin{pmatrix} x_2\,, & x_1\,, & -\,x_4\,, & -\,x_3 \\ x_1\,, & x_2\,, & x_3\,, & x_4 \end{pmatrix}.$$

Questa col G'''_{12} genera il G_{24} cercato (indicato con G^{V}_{24} nella mia memoria: nel seguito continueremo ad indicarlo con G^{V}_{24}). È uno dei cinque gruppi ottaedrici nello spazio a tre dimensioni: è l'« octaeder III » di MASCHKE (pag. 294) e il G^*_{24} di BAGNERA (pag. 125).

7. *Gruppo dell'icosaedro.* — Riprendiamo il G'''_{12} del n° 5, una qualunque delle due cubiche invarianti e il g_{12} binario subordinato che viene a stabilirsi sulla curva in causa del G'''_{12}. Ebbene, si consideri sulla cubica un g_{60} binario icosaedrico di cui il precedente g_{12} sia sottogruppo e in g_{60} una involuzione esterna a g_{12}: se $A\,A'$ sono i punti doppi di questa involuzione, la coppia $A\,A'$ individua, alla maniera del n° 2, una involuzione che trasforma la cubica considerata in sè stessa e che insieme al G'''_{12} del n° 5 genera il gruppo icosaedrico cercato.

Così ne è dimostrata la esistenza: per ottenerne la rappresentazione analitica e insieme far vedere che si tratta di una sola specie proiettiva basta cercare di costruirlo partendo da un G'''_{12}. Allo scopo si costruisca una collineazione I esterna al G'''_{12} e sottoposta alle seguenti condizioni:

$$I^2 = 1\,; \qquad I\,S_3\,I = S_3^2\,; \qquad (I\,S_2)^3 = 1\,,$$

dove S_2 ed S_3 sono due sostituzioni a periodi rispettivi 2 e 3 del G'''_{12}. Assumendo per S_2 ed S_3 le seguenti (n° 5)

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_4\sqrt{2}\,, & -\,x_2 + x_3\sqrt{2}\,, & x_2\sqrt{2} + x_3\,, & x_1\sqrt{2} - x_4 \\ x_1\,, & x_2\,, & x_3\,, & x_4 \end{bmatrix} = S_3$$

$$\begin{bmatrix} x_1\,, & x_2\,, & a\,x_3\,, & a^2\,x_4 \\ x_1\,, & x_2\,, & x_3\,, & x_4 \end{bmatrix} = S_3$$

si è condotti, dopo semplici calcoli, alla seguente forma per I:

$$I = \begin{bmatrix} x_1\sqrt{3} + x_2, & x_1 - x_2\sqrt{3}, & 2x_4, & 2x_3 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{bmatrix}.$$

La I aggiunta al G_{12}''' genera il G_{60} cercato. Esso è « l'ikosaeder III » di Maschke (pag. 281). Non figura fra i gruppi di Bagnera perchè non è reale. Nella mia memoria è indicato con G_{60}^{V} e a quella rimandiamo il lettore per maggiori dettagli tanto per la costruzione della I (n° 14), quanto per dimostrare che anche la seconda cubica gobba invariante del G_{12}''', da cui siamo partiti, è pure invariante rispetto all'intero G_{60}^{V} costruito (n° 38); come infine per esaminare i particolari della notevole cfz. a cui G_{60}^{V} dà origine.

La configurazione del gruppo ottaedrico G_{60}^{V}.

8. Per caratterizzare, anzitutto, con simboli opportuni le collineazioni del G_{60}^{V} osserviamo che esso funziona come gruppo totale sopra 4 elementi: ad es. sopra i 4 assi di punti uniti dei 4 sottogruppi di 3° ordine: indicando queste rette con i singoli m, n, p, q, si vede (n° 5) che esse sono le seguenti:

$$m = \begin{bmatrix} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{bmatrix}; \qquad n = \begin{bmatrix} x_2\sqrt{2} + x_3 = 0 \\ x_1\sqrt{2} - x_4 = 0 \end{bmatrix};$$

$$p = \begin{bmatrix} x_2\, a\sqrt{2} + x_3 = 0 \\ x_1\, a^2\sqrt{2} - x_4 = 0 \end{bmatrix}; \qquad q = \begin{bmatrix} x_2\, a^2\sqrt{2} + x_3 = 0 \\ x_1\, a\sqrt{2} - x_4 = 0 \end{bmatrix};$$

dove a è radice cubica immmaginaria dell'unità. Ebbene, rappresenteremo simbolicamente ogni collineazione del gruppo mediante la sostituzione corrispondente che essa opera sopra i 4 suddetti m, n, p, q.

Ciò premesso, il sottogruppo quadrinomio è costituito dalla identità e dalle 3 involuzioni gobbe seguenti:

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_4\sqrt{2}, & -x_2 + x_3\sqrt{2}, & x_2\sqrt{2} + x_3, & x_1\sqrt{2} - x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} = (m\,n)\,(p\,q)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_4\, a\sqrt{2}, & -x_2 + x_3\, x^2\sqrt{2}, & x_2\, a\sqrt{2} + x_3, & x_1\, a^2\sqrt{2} - x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} = (mp)(nq)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_4\, a^2\sqrt{2}, & -x_2 + x_3\, a\sqrt{2}, & x_2\, a^2\sqrt{2} + x_3, & x_1\, a\sqrt{2} - x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} = (mq)\,(np)$$

Aggiungendovi la

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & a\,x_3, & a^2\,x_4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{pmatrix} = (n\,q\,p)$$

si genrea il sottogruppo tetraedrico (sottogruppo alterno). E finalmente aggiungendo la involuzione gobba del N° 6.

$$(p\,q) = \begin{pmatrix} x_2, & x_1, & -x_4, & -x_3 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{pmatrix}$$

si genera il G_{24}^{V} che adesso vogliamo considerare.

9. Esso contiene 4 sottogruppi di 6° ordine simili fra di loro. Ecco le collineazioni di uno di essi

$$(p\,q\,n)^r, \qquad (p\,n), \qquad (p\,q), \qquad (q\,n) \qquad \text{dove} \quad r = 1\,,\,2\,,\,3\,.$$

In questo, il sottogruppo di 3° è invariante e quindi gli assi dei suoi elementi uniti sono invarianti rispetto a $(p\,q)$, $(p\,n)$, $(q\,n)$; cioè questi assi incontrano quelli di $(p\,q)$, $(q\,n)$, $(p\,n)$. Ma un punto unito per $(p\,q\,n)$ e per $(p\,q)$ è unito per l'intero gruppo di 6° ordine e quindi appartiene anche agli assi di $(n\,p)$ e di $(q\,n)$. Queste poche os servazioni sono sufficienti per esplorare la cfz. del sottogruppo attuale di 6° ordine. Le conclusioni sono le seguenti: In un sottogruppo di 6° ordine G_6 i 6 assi delle involuzioni gobbe s'incontrano, a tre, a tre, in due punti sull'asse di punti uniti del sottogruppo G_3 del 3° ordine del G_6 e dualmente esistono, a tre, a tre, in due piani passanti per l'asse di piani uniti del G_3 stesso in guisa che quelli che passano per un punto esistono anche in un piano e viceversa. I punti in cui tali assi si appoggiano all'asse di piani uniti del G_3 compongono due terne binarie di cui l'una è la forma Q dell'altra: il comune gruppo hessiano è costituito dai punti uniti del G_3 che esistono sull'asse di piani uniti. Dualmente ecc. Un G_6 possiede dunque due punti e due piani invarianti.

Viceversa, se gli assi di due involuzioni gobbe del G_{24}^{V} s'incontrano, le due involuzioni appartengono a uno stesso G_6. Infatti, è anzitutto a notare che non possono incontrarsi assi di involuzioni gobbe appartenenti entrambi al sottogruppo quadrinomio (N° 3). Prendiamo poi un asse di $(p\,q)$ e osserviamo che esso non può incontrare alcuno degli assi l, l' di $(m\,n)(p\,q)$. Perchè avendosi $(m\,q\,n\,p)^2 = (m\,n)(pq)$ segue che i punti uniti di $(m\,q\,n\,p)$ sono sopra l, l'. Ma si ha anche: $(m\,p)(n\,q)(p\,q) = (m\,q\,n\,p)$; ora $(m\,p)(n\,q)$ permuta fra loro l con l', se dunque $(p\,q)$ non facesse altrettanto, i punti uniti di $(m\,p\,n\,q)$ non potrebbero esistere sopra l od l'. Dunque la $(p\,q)$ opera lo scambio di l con l', quindi niuno di questi ultimi incontra assi di $(p\,q)$. Ne segue che un asse di $(p\,q)$ non ne incontra alcuno di $(m\,n)$ altrimenti un tal punto sarebbe unito anche per il

prodotto $(m\,n)(p\,q)$, e finalmente ne segue pure che il medesimo asse in parola non ne incontra alcuno di $(m\,q)(p\,n)$ o di $(m\,p)(q\,n)$ altrimenti, avendosi $(p\,q)\,[(m\,q)(p\,n)]\,(p\,q) = (p\,m)(q\,n)$ esisterebbe un punto unito comune a $(m\,q)(p\,n)$ e $(m\,p)(q\,n)$, il che è impossibile. Dunque l'affermazione fatta è provata e si può dire:

I 12 assi delle 6 involuzioni gobbe esterne al sottogruppo quadrinomio, s'incontrano, a tre, a tre, in 8 punti ed esistono, a tre, a tre, in 8 piani, in guisa che quelli che passano per un punto esistono anche in un piano e viceversa.

10. Gli 8 punti e gli 8 piani precedenti, i quali costituiscono i punti e i piani uniti dei sottogruppi di 6° ordine, sono tutti distinti perchè se due coincidessero esisterebbero punti, o piani invarianti rispetto a due G_6 e quindi rispetto all'intero G^{v}_{24}. Inoltre non esiste in G^{v}_{24} alcuna collineazione che possa trasformare uno nell'altro i due punti uniti, o i due piani uniti di uno stesso G_6 perchè una tale collineazione dovrebbe essere esterna al G_6 e trasformarlo in se stesso. Dunque gli 8 punti in questione e gli 8 piani si dividono in due quadrangoli separatamente invarianti e in due tetraedri pure separatamente invarianti. V'ha di più: considerando la figura descritta nel N° precedente si vede che un piano unito di un G_6 contiene 4 dei punti in questione; di questi, uno è unito per quel G_6, gli altri appartengono ai 3 G_6 rimanenti. Dualmente ecc. Dunque:

Gli 8 punti uniti e gli 8 piani uniti dei 4 sottogruppi di 6° ordine, costituiscono i vertici e le faccie di due tetraedri di Möbius *iscritti e circoscritti l'uno all'altro e ciascuno invariante rispetto al gruppo totale G^{v}_{24}. Le rette che congiungono i vertici omologhi dei due tetraedri e quelle che sono intersezione di facce omologhe, compongono gli assi di punti uniti e gli assi di piani uniti dei sottogrurpi di 3° ordine. Queste otto rette ammettono due, e due sole, trasversali comuni* (1) *che compongono la coppia invariante del G^{v}_{24} totale.*

11. La considerazione delle collineazioni a periodo 4 del gruppo G^{v}_{24} mostra che esse debbono avere 4 soli punti uniti ciascuna (N° 2), due sopra ciascuno dei due esagoni armonici delle due curve. Dunque:

Esistono due, e due soli, esagoni invarianti: essi sono iscritti, uno in ciascuna, delle due cubiche invarianti, e secondo la denominazione adottata sono i due esagoni armonici del gruppo (N° 3).

Esistono finalmente ∞^1 ottagoni e dodecagoni invarianti. Per costituirli basta partire da un punto generico unito per un G_3 o per un G_2 e applicare le collineazioni del G^{v}_{24}.

---

(1) Caporali e Del Pezzo. *Introduzione alla teoria dello spazio rigato.* (Volume delle Memorie di Caporali pag. 277. N. 20).

12. Dimostrata la esistenza di due tetraedri invarianti T e T' (li indicheremo sempre convenzionalmente con queste lettere) assumiamo uno di essi T per fondamentale mediante la trasformazione (Maschke, pag. 275):

$$y_1 \equiv -i\sqrt{3}\,(x_1 + x_2),$$
$$y_2 \equiv x_1 - x_2 + \sqrt{2}\,(x_3 + x_4),$$
$$y_3 \equiv x_1 - x_2 + \sqrt{2}\,(\alpha x_3 + \alpha^2 x_4),$$
$$y_4 \equiv x_1 - x_2 + \sqrt{2}\,(\alpha^2 x_3 + \alpha x_4).$$

In questo nuovo sistema di cordinate le sostituzioni del G_{24}^{V} assumono una forma più semplice. Per sostituzioni generatrici del sottogruppo tetraedrico si possono assumere le due:

$$(m\,n)(p\,q) = \begin{pmatrix} -y_2, & y_1, & -y_4, & y_3 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_1 \end{pmatrix};\ (n\,p\,q) = \begin{pmatrix} y_1, & y_3, & y_4, & y_2 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \end{pmatrix}.$$

Aggiungendovi la

$$(p\,q) = \begin{pmatrix} -y_1, & y_2, & y_4, & y_3 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \end{pmatrix}$$

si ha il G_{24}^{V} totale. Il 2° tetraedro invariante T' ha per facce:

$$y_2 + y_3 + y_4 = 0;\ y_1 + y_3 - y_4 = 0;\ y_1 - y_2 + y_4 = 0;\ y_1 + y_2 - y_3 = 0.$$

Un punto variabile sulle due rette della coppia invariante è:

$$[\alpha - \lambda\alpha^2, -(\alpha^2 + \lambda\alpha), \lambda, 1];\quad [\alpha^2 - \lambda\alpha, -(\alpha + \lambda\alpha^2), \lambda, 1].$$

Per trovare i due esagoni armonici basta scegliere una collineazione a periodo 4: ad es. la $(m\,p\,n\,q)$ che proviene dal prodotto

$$(n\,p\,q)(m\,n)(p\,q)(n\,q\,p)(p\,q);$$

e calcolarne due punti uniti, uno su ciascuno degli anzidetti esagoni. Si trovano così i due punti $(1, i, i^{\frac{3}{2}}, -i^{\frac{1}{2}})$; $(1, i, -i^{\frac{3}{2}}, i^{\frac{1}{2}})$, i quali, per mezzo delle collineazioni del gruppo totale, generano gli esagoni richiesti.

13. Ci proponiamo adesso qualche considerazione geometrica sopra le superficie di 4° ordine invarianti rispetto al gruppo totale. Notiamo, di passaggio, che esiste una sola quadrica invariante: la $\Sigma y_i^2 = 0$ e che non esistono superficie cubiche invarianti. Infatti è il sottogruppo quadrinomio medesimo che non può ammettere superficie invarianti del 3° ordine, perchè ogni retta della serie rigata coniugata a quella cui appartengono mm', nn', pp' (N^i 3, 4, 5) dovrebbe incontrare la superficie supposta in un gruppo invariante di punti, o appartenerle per intero, e poichè la prima ipotesi non è ammissibile, la superficie supposta si spezzerebbe nella

quadrica dianzi nominata e in un piano che sarebbe invariante rispetto all'intero G^{V}_{24} il che non può avvenire.

14. Quanto alle superficie di 4° ordine un calcolo facile porta a concludere che le invarianti sono tutte e sole quelle del fascio e della rete seguenti:

$$F \equiv a\, y_1 y_2 y_3 y_4 + b\,[y_1^3 (y_2 + y_3 + y_4) - y_1 (y_2^3 + y_3^3 + y_4^3)$$
$$+ y_2 y_3^3 + y_3 y_4^3 + y_4 y_2^3 - (y_2^3 y_3 + y_3^3 y_4 + y_4^3 \gamma_2)] = 0$$

$$R \equiv a\, \Sigma\, y_i^4 + b\, \Sigma\, y_i^2 y_k^2 + c\,[y_1^2 (y_2 y_3 + y_3 y_4 + y_4 y_2) -$$
$$- y_2 \gamma_3 y_4 (y_2 + y_3 + y_4) + y_1 (y_2^2 y_3 + y_3^2 y_4 + y_4^2 y_2 - y_3 y_4^2 - y_4 y_2^3)] = 0 .$$

Appartengono al fascio i tetraedri T e T' $\left(\text{si ha } T \text{ per } b = 0\,,\ \text{si ha } T' \text{ per } \frac{a}{b} = 3\right)$ e quindi la curva base del fascio è composta dalle 16 rette comuni alle facce di T e T'. Fra tutte le superficie precedenti, le riduttibili sono soltanto tre: cioè i tetraedri T e T' e la quadrica doppia $\left(\text{esiste nella rete per } c = 0\,,\ \frac{b}{a} = 2\right)$. Infatti, se una superficie del 4° ordine invariante è riduttibile e ne fa parte un piano, essa riducesi necessariamente al sistema di 4 piani e quindi a T, o T' perchè non esistono sistemi invarianti di uno, due, o tre piani. Se poi la superficie in questione si spezzasse in due quadriche distinte, ciascuna sarebbe invariante rispetto a tutti i sottogruppi di 3° ordine, cioè rispetto all'intero G^{V}_{24} e si avrebbero due quadriche invarianti rispetto al G^{V}_{24}, il che è impossibile.

15. Nel fascio F esisteranno altre superficie dotate di punti singolari oltre i tetraedri T e T'? La ricerca è così ovvia che ne enunceremo soltanto i punti principali.

Cominceremo anzitutto da quelle che hanno un numero finito di punti doppi. Essi dunque vanno cercati in punti uniti dei varii sottogruppi. Basterà perciò scrivere le derivate di F e annullarle per le coordinate di un punto generico su di un asse di $(p\,q)$ e si vedrà allora che si ricade necessariamente in T e T. Poi si eseguirà lo stesso calcolo per un punto unito di un sottogruppo di 3° ordine: se il punto è sull'asse di punti uniti si è ricondotti a T e T', se invece il punto è sull'asse di piani uniti e quindi appartiene a una delle rette della coppia invariante (N° 5), ne segue che sono doppi anche gli altri tre punti consimili su tale retta, cioè è doppia la retta; il che conduce a un caso di impossibilità, perchè, almeno nel fascio, non esistono superficie quarti-

che invarianti che abbiano per rette quelle della coppia invariante. Rimane a considerare il caso di un punto doppio sopra un asse di $(m\,n)$ $(p\,q)$: scartando ancora le soluzioni T e T' rimangono due sole superficie con 6 punti doppi ciascuna nei vertici dei due esagoni armonici. Esse sono individuate dai valori del rapporto $\frac{a}{b}$ che soddisfano a

$$a + 4\,b\,(1 \pm i\sqrt{2}) = 0\,.$$

Queste due superficie non possono essere altro che le jacobiane dei due sistemi ∞^3 di quadriche che passano per i due esagoni suddetti, perchè è evidente che tali superficie sono certamente invarianti e, poichè non possono appartenere alla rete (N° 17), apparterranno al fascio.

Non resta che a considerare il caso in cui esistano nel fascio superficie con infiniti punti doppi. Ma una tale eventualità è impossibile perchè il luogo dei punti doppi dovrebbe essere invariante e quindi costituito, o dalle rette della coppia invariante, o da una delle due cubiche invarianti. Ma le rette della coppia invariante si escludono per considerazioni fatte sopra, e si escludono pure le cubiche perchè ognuna di esse si appoggia in due punti all'asse di punti uniti di un qualunque G_3 e l'ipotesi che sia doppio un punto di tale asse riconduce, come già abbiamo osservato, ai tetraedri T e T'. La conclusione è questa·

Le superficie singolari irriduttibili del fascio F sono soltanto le due jacobiane dei due ststemi ∞^3 di quadriche circoscritte ai due esagoni armonici invarianti (superficie di Weddle). *Esse hanno ciascuna 6 punti doppi nei vertici di uno degli esagoni suddetti.*

16. Le sviluppabili osculatrici delle due cubiche gobbe invarianti apparterranno dunque alla rete. Il modo più semplice per trovarle consiste nel cercare quelle fra esse che hanno un punto doppio uniplanare sopra un asse di $(p\,q)$ escludendo però la quadrica doppia. Con facile calcolo si giunge, abbastanza rapidamente, ai valori seguenti che servono a individuare le sviluppabili domandate:

$$a \equiv -2 \pm i\,5\sqrt{2}; \qquad b \equiv -4 \pm i\,6\sqrt{2}; \qquad c \equiv 16\,.$$

La quadrica doppia e le due precedenti sviluppabili esauriscono le superficie della rete con infiniti punti doppi. Infatti, se ne esiste un'altra, essa, anzitutto, non può spezzarsi per ragioni addotte già al N° 14: la linea doppia deve essere invariante, ma non può comporsi delle rette della coppia invariante perchè è facile vedere che, come non esistono in F, così nemmeno esistono in R superficie che abbiano doppie quelle rette all'infuori della quadrica doppia: dunque tale linea è una delle cubiche invarianti. Allora la superficie supposta e la sviluppabile osculatrice

di tale cubica individuano, in R, un fascio di superficie che hanno tutte per linea doppia la cubica in parola. La quadrica doppia che esiste in R è esterna a questo fascio, perchè essa non contiene alcuna delle due cubiche invarianti (come facilmente risulta delle formule dei n^{i} 3 e 4). Ne seguirebbe dunque che i vertici degli esagoni armonici sarebbero doppi per tutte le superficie di R, il che si vede facilmente essere impossibile. Dunque infine:

Le superficie di 4° ordine invarianti rispetto a G_{24}^{V} e dotate di infiniti punti doppi sono soltanto i tetraedri T e T', le due sviluppabili osculatrici delle 2 cubiche invarianti e la quadrica doppia.

17. Cerchiamo adesso le superficie della rete R dotate di un numero finito di punti singolari. Le più notevoli fra esse compongono due certi fasci di cui adesso vogliamo stabilire la esistenza. Vi perverremo cercando quali sono le superficie della rete che hanno punti doppi sopra gli assi delle tre involuzioni gobbe del sottogruppo quadrinomio, il che si ottiene esigendo un punto doppio sopra $(1, i, \lambda, i\lambda)$ che al variare di λ rappresenta un asse di $(m\,h)(p\,g)$. Si è così condotti alla condizione $\lambda = \pm i^{\frac{3}{2}}$ e alla relazione

$$2a - b \pm i\,c\sqrt{2} = 0$$

e si perviene a due fasci in R con 6 punti base ciascuno nei vertici dei due esagoni armonici (n° 12). Questi punti base sono doppi per tutte le superficie del fascio. Appartiene a entrambi i fasci la quadrica doppia e vi appartengono, una a ciascuno, le due sviluppabili delle cubiche invarianti (n° 16).

Sia P uno dei vertici di uno dei due esagoni armonici situato ad es. sopra un asse di $(m\,n)(p\,q)$ e f il fascio delle superficie quartiche relative aventi nei vertici di quell'esagono 6 punti doppi. Le quadriche polari di P rispetto alle superficie di f formano pure un fascio: ma in questo ci sono due piani doppi, cioè il piano tangente in P alla quadrica doppia e il piano osculatore della cubica gobba la cui sviluppabile osculatrice appartiene a f. Questi piani sono distinti (n^{i} 2 e 3) e si tagliano lungo l'asse di $(m\,n)(p\,q)$ che passa per P. Dunque il fascio di quadriche in parola si compone di coppie di piani per quell'asse. Oltre quelle nominate non ve ne sono altre costituite da piani doppi, altrimenti la collineazione $(m\,q\,n\,p)$ che ha in P un punto unito avrebbe infiniti piani uniti per quel punto, il che è impossibile (n° 2). Possiamo dunque dire:

Esistono due fasci di superficie quartiche invarianti con 6 punti-base ciascuno nei vertici dei due esagoni armonici. I 6 punti-base di ogni fascio

costituiscono 6 punti doppi biplanari per ciascuna superficie del fascio. Niuna di queste può essere una delle jacobiane di cui è parola al n° 15. Infatti, appartengono al cono osculatore, in un punto doppio, di una di tali jacobiane le rette che uniscono quel punto agli altri cinque. Se dunque la jacobiana in parola appartenesse a uno dei fasci sopra descritti, tali cinque rette dovrebbero distribuirsi in due piani e in ogni modo avremmo, in un piano, più di 3 vertici di un esagono armonico, il che è inammissibile, altrimenti la cubica circoscritta, che è una delle due invarianti, si spezzerebbe.

In ciascuno dei fasci precedenti esistono due superficie notevoli dotate ognuna di altri 4 punti doppi nei vertici dei tetraedri T, o T'. Per individuarle basta aggiungere alla condizione

$$2a - b \pm i c \sqrt{2} = 0$$

una qualunque delle altre due $a = 0$, $a + b - c = 0$.

Ciascuna di queste 4 superficie ha dunque 6 punti biplanari e altri 4 punti doppi che sono conici (come facilmente si può constatare); è irriduttibile (n° 16) e non ha altri punti singolari.

Esistono dunque nella rete R quattro superficie quartiche irriduttibili dotate ciascuna di 6 punti biplanari e di 4 punti conici: i primi sono i vertici dei due esagoni armonici, i secondi sono i vertici dei due tetraedri invarianti T e T'.

Queste superficie appartengono al cosidetto tipo asizigetico di Rohn (1).

L'asse di $(m\,n)(p\,q)$ che passa per P e che è retta doppia per tutte le quadriche polari di P, rispetto al fascio f, incontra le superficie di f in tre punti riuniti in P e in un punto ulteriore vertice del 2° esagono armonico.

Dunque la diminuzione che il punto singolare P porta nella classe della superficie generica di f è 3. Questa superficie generica è dunque di classe 18 e le 4 superficie particolari, di cui precedentemente è parola, sono ciascuna di classe dieci (2).

18. Un esagono armonico, cioè la cfz. composta dai 6 punti biplanari del n° precedente acquista adesso un maggiore interesse così da non ritenere del tutto inopportune le seguenti osservazioni che valgono a darne una semplice costruzione. Un esagono armonico è costituito, su di una

(1) Rohn, *Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestaltung* (Math. Annal., Bd. 29).

(2) Berzolari, *Sulle intersezioni di tre superficie algebriche* (Annali di Matematica, serie II, tomo XXIV).

cubica gobba, da 3 coppie (di punti) armoniche a due a due; cioè da quel che si suol chiamare covariante sestico di una binaria biquadratica. Se si prende la corda della cubica individuata da una delle coppie suddette si vede facilmente che essa incontra il tetraedro dei 4 vertici rimanenti in due coppie armoniche fra loro e armoniche alla coppia iniziale. Si hanno cioè due covarianti sestici, l'uno sulla cubica, l'altro sulla retta, dotati di una coppia comune. Viceversa, consideriamo due coppie di punti armoniche su di una cubica: esse individuano un tetraedro il quale è segato armonicamente da ∞^3 rette: sopra ognuna di queste viene dunque a stabilirsi un covariante sestico di cui due coppie sono date dalle intersezioni col tetraedro suddetto. Se si esige che la 3ª coppia esista sulla cubica, si trova che tale coppia completa, anche sulla curva, il covariante sestico individuato dalle 2 coppie armoniche che hanno servito come punto di partenza. Per costruire un esagono armonico si possono dunque prendere arbitrariamente 4 punti non in un piano: allora sopra una retta che tagli il tetraedro di quei 4 punti in due coppie armoniche, si scelga la 3° coppia armonica a queste due. Tale 3ª coppia insieme ai 4 punti suddetti individua l'esagono domandato.

19. Proseguendo nell'esame delle superficie singolari della rete, cerchiamo quelle che hanno punti doppi sopra assi di involuzioni gobbe del G_{24}^{V} non appartenenti al sottogruppo quadrinomio. Ad es. scegliamo un asse di $(p\,q)$. Un punto generico P su tale asse è $(0\,\lambda\,\mu\,\mu)$. Sostituendo questi valor nelle $\dfrac{\partial R}{\partial y_i}$ e annullando si hanno le condizioni:

$$2\,a\,\lambda^3 + 2\,b\,\lambda\,\mu^2 - c\,\mu^2\,(1 + \lambda) = 0\,,$$

$$\mu\,[4\,a\,\mu^2 + 2\,b\,(\lambda^2 + \mu^2) - c\,(3\,\lambda\,\mu + \lambda^2)\,] = 0\,.$$

Sia P in posizione generica sull'asse in questione, vale a dire escludiamo per ora i valori $\lambda = 0$, $\mu = 0$. Eliminando il rapporto $\dfrac{\lambda}{\mu}$ si trova la seguente equazione di condizione per a, b, c:

$$(1)\quad \begin{cases} c^2\,(c - 2\,b)^3 + (2\,b - c)^4\,(2\,a + b) + 16\,a^2\,(2\,a + b)^3 - 27\,a\,c^4 - \\ \quad - 8\,a\,(2\,a + b)^2\,(2\,b - c)^2 + 36\,a\,c^2\,(2\,b - c)\,(2\,a + b) = 0\,, \end{cases}$$

soddisfatta la quale si hanno ∞^1 superficie invarianti con 12 punti doppi ciascuna. Dunque

Esiste in R una serie semplicemente infinita di superficie quartiche invarianti, dotate ciascuna di 12 punti doppi, uno su ciascun asse delle 6 involuzioni gobbe esterne al sottogruppo quadrinomio. Ogni punto della curva

di 5° ordine (1) individua una superficie della serie. Appartengono a questa serie la quadrica doppia e le due sviluppabili come è ben naturale.

20. Consideriamo qualche superficie particolare nella serie precedente. Per $\mu = 0$ si ha anche $a = 0$ e si è condotti a un fascio di superficie con 4 punti doppi nei vertici di T. Se inoltre si ha $b = 1$, $c = 2$ quei 4 punti doppi sono uniplanari. Altrettanto può dirsi in relazione al tetraedro T'. È facile anche vedere che in ciascun punto uniplanare si hanno 3 tangenti quadripunte distinte per cui la classe è 12 (1).

Invece per $\lambda = 0$ (escludendo casi già considerati, o poco interessanti) si trova $c = 0$, $2a + b = 0$: l'equazione della superficie diviene

$$\Sigma y_i^4 - 2 \Sigma y_i^2 y_k^2 = 0 ,$$

che è quella d'una superficie desmica riferita al tetraedro T (2).

Il tetraedro T' ne fornisce un'altra.

Finalmente, se si esige che una superficie della serie abbia altri 4 punti doppi nei vertici di T', bisogna aggiungere la condizione $a+b-c=0$ Escludendo casi gia considerati si trova, in conseguenza, $a + b = 0$, $c = 0$ e l'equazione diviene

$$\Sigma y_i^4 - \Sigma y_i^2 y_k^2 = 0 .$$

che è quella di una superficie di Kummer 4 volte tetraedroidale riferita al tedraedro T (2). Un'altra la otteniamo scambiando T con T'.

Dunque:

Nella serie ∞^3 precedente di superficie quartiche invarianti, sono da segnalarsi due superficie dotate ciascuna di 4 punti uniplanari nei vertici di T, o di T'; due superficie desmiche e infine due superficie di Kummer *4 volte tetraedroidali.*

21. Infine un'altra serie ∞^1 si ottiene esigendo che un punto generico sull'asse di punti uniti di un G_3 sia doppio. Si può prendere per G_3 il gruppo $(n\,p\,q)^r$: un punto generico sul suo asse di punti uniti è $(\lambda\,1\,1\,1)$.

Si trovano così, in modo del tutto analogo a quello del N° precedente, le condizioni:

$$2a\lambda^3 + 3\lambda(b + c) = 0 ,$$
$$(b + c)\lambda^2 + 2(a + b - c) = 0 ,$$

(1) SEGRE, *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche* (Annali di Matematica, serie II, tomo 25, pag. 32).

(2) VERONESE, *Sopra alcune notevoli cfz. di punti, re'te e piani,* (Atti R. Acc. Lincei, Memoria II, pag. 339).

da, cui eliminando λ, si trova la condizione

$$3(b+c)^2 - 4a(a+b-c) = 0 . \tag{1}$$

Esiste dunque, sempre nella rete, un altro sistema ∞^1 di superficie invarianti dotate ognuna di 8 punti doppi.

Ogni punto della conica (1) precedente individua una superficie della serie. Queste appartengono al così detto tipo sizigetico di Rohn (1ª memoria citata).

---

(1) ROHN, *Einige specielle Fälle der* KUMMER'*schen Fläche* (Berichte der k. Sächs. Gesellschaft der Wissench. Mai 1884).

QUARTICHE E QUINTICHE GOBBE RAZIONALI INVARIANTI RISPETTO A GRUPPI DI COLLINEAZIONI QUATERNARIE

[*Rendic. Istit. Lomb. 1904*]

Alla costruzione delle omografie che trasformano in sè stessa una quartica gobba razionale hanno cooperato, in vario modo, diversi autori. Così: Segre: *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi ecc.* (Mem. della r. Acc. delle sc. di Torino. Serie II, T. XXXIX N° 44); Del Re: *Omografie che mutano in se stessa una certa curva gobba del 4° ordine ecc.* (id. Rendic. 1887); Brambilla: *Le omografie che mutano in se stessa una quartica gobba* (Ist. Lomb. 1887) (1). E il problema è in tutti i casi completamente risoluto. Se io aggiungo le semplici considerazioni che seguono, è perchè mi sembra che la rappresentazione e il metodo che ho adoperati conducano in modo più naturale ed evidente alla conclusione, e anche per la maniera facile e riassuntiva con la quale essa può formularsi (cfr. il N° 6). Inoltre le omografie in parola compongono dei gruppi che fanno parte di altri recentemente descritti e studiati (2), indipendentemente dalla quartica; onde l'opportunità di metterli in relazione con essa. (Al qual proposito dirò che, occorrendo spesso di richia-

(1) Taccio dei numerosi e importanti altri lavori che considerano la quartica gobba da altri punti di vista e con scopi diversi. Chi desidera avere sull'argomento una bibliografia completa, fino al 1892, può consultare il notevole studio algebrico di Berzolari: *Sui combinanti dei sistemi di forme binarie annessi alle curve gobbe razionali di 4° ordine*, Annali di mat., 1892). È posteriore e recente, la memoria di Marletta che porta il titolo: *Studio geometrico della quartica gobba razionale*, id., 1903.

(2) Maschke, *Bestimmung aller ternären und quaternären Collineationsgruppen, welche mit symmetrischen Buchstabenvertauschungsgruppen holoedrisch isomorph sind*, Math. Annal. Bd. LI. — Bagnera, *I gruppi finiti reali di sostituzioni quaternarie lineari*, Circolo matematico di Palermo 1901. — Ciani, *Sopra i gruppi finiti reali di collineazioni quaternarie oloedricamente isomorfi con quelli dei poliedri regolari*, Annali di matematica 1902).

mare la mia memoria ora citata, mi valgo per brevità del simbolo C con l'indicazione della pagina relativa).

Il metodo adoperato per la quartica si estende in modo naturale alla quintica in un caso interessante segnalato già da Berzolari (1). E' il caso in cui la curva possiede quattro piani ognuno dei quali ha con essa, a comune, cinque punti infinitamente vicini. Le costruzioni e osservazioni che se ne traggono, mi lusingo che vengano giudicate nuove e non prive di interesse. In una seconda Nota, che è quasi pronta per la stampa, mi propongo di considerare, in modo esauriente, tutti i casi possibili in cui una quintica razionale gobba ammette gruppi finiti di collineazioni quaternarie che la trasformano in se stessa.

La ricerca della Nota attuale potrebbe facilmente estendersi a ogni curva razionale di grado n, dotata di quattro piani ciascuno dei quali ha comuni, con essa, n punti infinitamente vicini. Ma l'interesse svanirebbe. Vi ha una differenza di conclusioni nel passaggio dal grado pari al grado dispari, ma basta metterla in evidenza nel passaggio dal grado quarto al quinto.

Quartica.

1. Sia C_4 una quartica gobba razionale, non degenere. Le coordinate di un suo punto corrente si rappresenteranno mediante forme binarie biquadratiche. Assumendo per tetraedro fondamentale quello costituito dai quattro piani osculatori stazionari della curva, tali forme saranno espresse da quarte potenze di forme binarie lineari, Indicando queste ultime con M, N, P, Q, la rappresentazione parametrica della C_4 sarà la seguente:

$$x_1 \equiv M^4; \qquad x_2 \equiv N^4; \qquad x_3 \equiv P^4; \qquad x_4 \equiv Q^4.$$

La binaria biquadratica f, che è il prodotto $M\,N\,P\,Q$, uguagliata a zero rappresenterà complessivamente i 4 valori del parametro che individuano i 4 punti di contatto dei piani stazionari suddetti. Con opportuna disposizione degli elementi di riferimento sopra C_4 si vede facilmente che si può prendere

$$M \equiv a\lambda + b\mu; \quad N \equiv a\lambda - b\mu; \quad P \equiv b\lambda + a\mu; \quad Q \equiv b\lambda - a\mu$$

$$f \equiv a^2 b^2 (\lambda^4 + \mu^4) - (a^4 + b^4)\lambda^2 \mu^2 = 0$$

dove a e b sono coefficienti costanti, λ e μ le variabili delle binarie considerate. Quindi in conclusione noi assumeremo come rappresentazione parametrica di C_4 la seguente:

(1) Berzolari, *Sulla curva gobba razionale del quinto ordine*, Mem. r. Acc. Lincei, 1893.

$$x_1 \equiv (a\,\lambda + b\,\mu)^4$$
$$x_2 \equiv (a\,\lambda - b\,\mu)^4$$
$$x_3 \equiv (b\,\lambda + a\,\mu)^4$$
$$x_4 \equiv (b\,\lambda - a\,\mu)^4.$$

2. Ci proponiamo ora la costruzione dei gruppi di collineazioni rispetto alle quali C_4 è invariante. S' intende che rimangono esclusi dalle nostre considerazioni i pochi casi in cui la precedente rappresentazione è impossibile.

Ciò premesso, si osservi che una collineazione quaternaria che trasformi C_4 in se stessa viene a individuare, sopra C_4, una projetività binaria subordinata rispetto alla quale deve essere manifestamente invariante la forma f dei quattro punti di contatto dei piani stazionari di C_4. Se f è qualunque, non esistono che tre involuzioni binarie che la trasformino in se stessa: sono quelle i cui punti doppi compongono le tre coppie armoniche, a due, a due del covariante sestico di f. Queste involuzioni insieme all'identità costituiscono il gruppo quadrinomio g_4. Se f è armonica, esiste un gruppo g_8 di 8 projettività binarie (compresa l' identità) rispetto alle quali f è invariante. Se finalmente f è equianarmonica, esiste il gruppo tetraedrico g_{12} che trasforma f in se stessa. Non ci sono altri casi possibili e noi esaminandoli separatamente dimostreremo che, in ciascuno di essi, il gruppo binario g, rispetto a cui f è invariante, individua un gruppo quaternario G, rispetto a cui è invariante la nostra curva C_4.

3. *Caso generale.* — Sia f una qualunque binaria biquadratica sottoposta alla sola restrizione che i 4 suoi fattori lineari sieno distinti.

$$f \equiv a^2 b^2 (\lambda^4 + \mu^4) - (a^4 + b^4)\lambda^2 \mu^2) = 0\,.$$

La considerazione che faremo per passare, in tutti i casi, dal gruppo binario g al gruppo quaternario G, di cui è parola nel N. precedente è semplicissima ed è questa: applichiamo una sostituzione s di g alle binarie che rappresentano le coordinate x_1, x_2, x_3, x_4 di un punto di C_4: basterà allora, che per effetto di una tale sostituzione, si permutino fra di esse in un modo qualunque le x_1, x_2, x_3, x_4 (anche a meno di fattori esterni) per affermare che la collineazione quaternaria S, individuata da tale permuta, trasforma la C_4 in se stessa. Nel caso attale le sostituzioni di g sono costituite dalla identità e dalle tre involuzioni:

$$\begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} -\mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix},$$

Esse, applicate a $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ individuano le seguenti involuzioni quaternarie:

$$\begin{pmatrix} x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

le quali secondo l'osservazione fatta trasformano, ciascuna, C_4 in se stessa. Esse, insieme alla identità, compongono uno dei tre gruppi quadrinomi possibili nello spazio a tre dimensioni. E' quello indicato con G_4^{I} (in C pag. 4) e così continueremo a indicarlo. Le tre coppie di assi delle involuzioni del gruppo sono gli spigoli opposti dal tetraedro che ha per vertici

$$(1\,1\,1\,1),\ (1\,1\,-1\,-1),\ (1\,-1\,-1\,1),\ (1\,-1\,1\,-1).$$

Si vede subito che (1 1 1 1) è il vertice del triedro principale di C_4, che gli spigoli passanti per (1 1 1 1) sono le tre corde principali ecc. ecc. e si potrebbero dedurre facilmente tutte le ben note proprietà di C_4.

4. *Caso armonico.* — Allora la f è armonica e si può scrivere:

$$f \equiv \lambda^4 + \mu^4 = 0 \quad \text{con} \quad a = 1 + i,\ b = \sqrt{2}.$$

Per cui si ha:

$$M = (1+i)\lambda + \mu\sqrt{2}\,; \quad N = (1+i)\lambda - \mu\sqrt{2}\,;$$

$$P = \lambda\sqrt{2} + \mu(1+i)\,; \quad Q = \lambda\sqrt{2} - \mu(1+i)$$

e la rappresentazione parametrica di C_4 è sempre:

$$x_1 \equiv M^4\,; \quad x_2 \equiv N^4\,; \quad x_3 \equiv P^4\,; \quad x_4 \equiv Q^4$$

dove M, N, P, Q hanno i valori precedenti. Il punto (11 — 1 — 1) individuato dai due valori $0, \infty$ del parametro $\dfrac{\lambda}{\mu}$, è quindi il nodo della curva. Or bene, per ottenere in questo caso su C_4 il gruppo binario g_8 che trasforma f in se stessa basta aggiungere al gruppo quadrinomio g_4 del caso generale (N° 3) la sostituzione

$$\begin{pmatrix} -i\mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

che trasforma

$$M \text{ in } \frac{\sqrt{2}}{1+i}\cdot M\,; \ N \text{ in } -\frac{\sqrt{2}}{1+i}\cdot N\,; \ P \text{ in } \frac{1+i}{\sqrt{5}}\cdot Q\,; \ Q \text{ in } \frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot P\,.$$

Per conseguenza essa individua la collineazione quaternaria

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

la quale trasforma C_4 in se stessa e quindi, aggiunta al gruppo quaternario G_4^{I}, genera un gruppo di ottavo ordine G_8 rispetto al quale C_4 è invariante. Il gruppo G_8 così trovato è sottogruppo di uno dei cinque pos-

sibili gruppi ottaedrici dello spazio a tre dimensioni. Precisamente appartiene al G_{24}^{II} (C pag. 7) il quale ultimo si caratterizza, fra gli altri gruppi ottaedrici quaternari, come quello che tiene ferma una faccia di un pentaedro e permuta in tutti i modi possibili le altre quattro.

5. *Caso equianarmonico.* — La f è equianarmonica; quindi si può prendere:

$$f \equiv \lambda^4 + \mu^4 + 2\, i \sqrt{3}\, \lambda^2 \mu^2 = 0\,; \quad a = (1+i)(\sqrt{3} - 1),\, b = 2$$

$$M \equiv \lambda (1+i)(\sqrt{3} - 1) + 2\,\mu\,; \quad N = \lambda (1+i)(\sqrt{3} - 1) - 2\,\mu$$

$$P = 2\,\lambda + \mu (1+i)(\sqrt{3} - 1)\,; \quad Q = 2\,\lambda - \mu (1+i)(\sqrt{3} - 1)$$

e ancora

$$x_1 \equiv M^4 \quad , \quad x_2 \equiv N^4 \quad , \quad x_3 \equiv P^4 \quad , \quad x_4 \equiv Q^4 .$$

In questo caso per ottenere sulla C_4 il gruppo binario g_{12} che trasforma f in se stessa, basta aggiungere al gruppo quadrinomio g_4 del caso generale (N° 3) la sostituzione

$$\begin{pmatrix} i(\lambda + \mu) & \lambda - \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}.$$

Essa trasporta M in $\left\{\dfrac{1 + i + \sqrt{3}\,(1 - i)}{2}\right\} . N$

» » N » $-\left\{\dfrac{1 + i + \sqrt{3}\,(1 - i)}{2}\right\} . Q$

» » P » $\left\{\dfrac{-1 + i + \sqrt{3}\,(1 + i)}{2}\right\} . P$

» » Q » $\left\{\dfrac{-1 + i + \sqrt{3}\,(1 + i)}{2}\right\} . M$.

Per conseguenza essa individua il gruppo quaternario

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_3 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^r \quad r = 1, 2, 3$$

il quale col G_4^{I} del caso generale genera un gruppo di 12 collineazioni che è uno dei tre possibili gruppi tetraedrici dello spazio a tre dimensioni. E' quello indicato con G_{12}^{I} (in C pag. 5). Così seguiteremo a indicarlo. Esso è non soltanto oloedrico isomorfo, ma anche projettivamente identico col gruppo delle rotazioni del tetraedro regolare.

6. I risultati dei numeri precedenti possono riassumersi nella forma che segue.

Indichiamo secondo l'uso con il simbolo $(a\, b\, c\, d \ldots)$ la sostitituzione

circolare che porta a in b; b in c; c in d; ecc.; e con $(a\,b\,c\,d\ldots)^r$ la sua potenza r^{ma} e con 1 la identità. Allora le collineazioni rispetto alle quali C_4 è invariante possono scriversi così:

Nel caso generale:

$$(x_1\,x_2)\cdot x_3\,x_4)\,,\quad (x_1\,x_3)\cdot(x_2\,x_4)\,,\quad (x_1\,x_4)\cdot(x_2\,x_3)\,,\quad 1$$

nel caso armonico:

$$(x_1\,x_3\,x_2\,x_4)^r,\quad (x_1\,x_3)\cdot(x_2\,x_4),\quad (x_1\,x_4)\cdot(x_2\,x_3)\,,\quad (x_1\,x_2)\,,(x_3\,x_4)$$
$$\text{con } r=1\,,\,2\,,\,3\,,\,4$$

nel caso equianarmonico:

$$(x_1\,x_2)\cdot(x_3\,x_4)\,,\quad (x_1\,x_3)\cdot(x_2\,x_4)\,,\quad (x_1\,x_4)\cdot(x_2\,x_3)$$
$$(x_1\,x_2\,x_3)^r,\quad (x_2\,x_3\,x_4)^r,\quad (x_3\,x_4\,x_1)^r,\quad (x_4\,x_1\,x_2)^r$$
$$\text{con } r=1\,,\,2\,,\,3.$$

In conclusione, per rappresentare i gruppi di collineazioni rispetto alle quali è invariante la curva C_4, basta semplicemente scrivere le sostituzioni che lasciano invariato il rapporto anarmonico di 4 elementi nel caso generale, nel caso armonico e nel caso equianarmonico e dopo interpretare questi quattro elementi come le coordinate omogenee di un punto dello spazio a tre dimensioni e le sostituzioni suddette come collineazioni quaternarie. La curva C_4 viene così a essere riferita al tetraedro formato dai suoi 4 piani stazionari. A seconda che il gruppo dei 4 elementi suddetti è generico, armonico, o equianarmonico, la C_4 rappresentata è generica, armonica o equianarmonica.

Quintica.

7. Analogamente a quanto fu fatto per la quartica, noi assumeremo per rappresentazione parametrica della quintica razionale C_5 la seguente:

$$x_1 \equiv (a\,\lambda + b\,\mu)^5$$
$$x_2 \equiv (a\,\lambda - b\,\mu)^5$$
$$x_3 \equiv (b\,\lambda + a\,\mu)^5$$
$$x_4 \equiv (b\,\lambda - a\,\mu)^5.$$

Però, mentre per la quartica razionale la rappresentazione assunta può attuarsi nella generalità dei casi, altrettanto ciò non può dirsi per la quintica e quindi quanto segue si riferisce soltanto a quei casi in cui tale rappresentazione è possibile. Ciò accade quando esistono 4 piani ognuno

dei quali ha comuni con la curva cinque punti infinitamente vicini (1). Tali piani noi chiameremo per brevità: *piani stazionari singolari.* La ricerca sarà condotta parallela a quella della quartica e dipende tutta dalla forma f che reppresenta i 4 punti di contatto dei 4 piani singolari. Però le conclusioni differiscono alquanto da quelli della quartica: ne è causa il passaggio del grado pari, al grado dispari della curva. Manteniamo le notazioni adottate nei numeri precedenti.

8. *Caso generale.* — Sia la forma f tutt'affatto generica:

$$f = a^2 b^2 (\lambda^4 + \mu^4) - (a^4 + b^4) \lambda^2 \mu^2 = 0 .$$

Le considerazioni del N° 3, applicate al caso attuale, servono a individuare le tre involuzioni gobbe:

$$\begin{pmatrix} x_3 - x_4 & x_1 - x_2 \\ x_1 & x_2 \quad x_3 \quad x_4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x_4 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_1 & x_2 \quad x_3 \quad x_4 \end{pmatrix} .$$

Queste, insieme, all'identità, compongono un gruppo quadrinomio projettivamente diverso da quello del N° 3. Mentre gli assi delle 3 involuzioni di G_4^{I} del N° 3 costituiscono le 3 coppie di spigoli opposti di un tetraedro; nel caso attuale essi compongono tre coppie armoniche, a due, a due, di una stessa serie rigata. Il gruppo attuale è il G_4^{II} (C, pag. 4). E continueremo a indicarlo così. Si può dunque dire:

Se una quintica razionale gobba possiede quattro piani stazionari singolari, esistono tre involuzioni gobbe che la trasformano in se stessa. Gli assi delle tre involuzioni compongono tre coppie armoniche, a due, a due, di una stessa serie rigata.

9. Il prof. Bertini distingue due specie di quintica razionale a seconda che la curva possiede una quadrisecante, ovvero infinite; nel quale ultimo caso esse costituiscono le generatrici di una quadrica (2). Dimostriamo che la nostra C_5 possiede una sola quadrisecante, che cioè (per servirsi del linguaggio di Bertini) è di 1ª specie. Perciò cominciamo dall'osservare, anzitutto, che la quadrica sulla quale esistono gli assi delle involuzioni che trasformano C_5 in se stessa è:

$$\Omega = x_1^2 + x_4^2 - (x_2^2 + x_3^2) = 0 .$$

(1) Il prof. Berzolari, nella sua memoria già citata sulla quintica, considera il caso attuale mettendolo in relazione con la binaria di 8° ordine da cui si può far dipendere la rappresentazione parametrica della curva. Il caso attuale si verifica quando sia nullo il cataletticante della binaria suddetta, cioè quando essa si possa rappresentare come somma di quattro ottave potenze di forme lineari.

(2) BERTINI, *Sulle curve gobbe razionali di 5° ordine.* Collect. mat. in memoria di Domenico Chelini, pag. 312.

La binaria di 10° grado che individua le intersezioni di C_5 con Ω è la seguente:

$$a\,b\,(a^4 - b^4)\,\lambda\,\mu\,(\lambda^4 - \mu^4)\,\{(a^4 + b^4)(\lambda^4 + \mu^4) + 12\,a^2\,b^2\,\lambda^2\,\mu^2\} = 0\,.$$

Ma $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a^4 \neq b^4$ manifestamente. Dunque, siccome la binaria precedente non può annullarsi in modo identico, così C_5 non esiste sopra Ω. Le soluzioni individuate da $\lambda\,\mu = 0$, $\lambda^4 - \mu^4 = 0$ dànno i punti di appoggio di C_5 con gli assi delle involuzioni gobbe del gruppo. Le 4 rimanenti sono quelle per cui è

$$(a^4 + b^4)(\lambda^4 + \mu^4) + 12\,a^2\,b^2\,\lambda^2\,\mu^2 = 0$$

esse debbono comporre un insieme invariante rispettto a G_4^{II} e quindi forniscono 4 punti in linea retta di C_5. Ecco trovata una quadrisecante q di C_5. Per dimostrare che non ve ne sono altre, occorre prima escludere che altre ve ne siano sopra Ω, il che si ottiene facilmente con un calcolo ovvio che qui per brevità omettiamo. Ciò posto, supponiamo che esistano infinite quadrisecanti di C_5 e indichiamo con Q la quadrica sulla quale giacciono. Siccome la Q deve essere trasformata in se stessa dal gruppo G_4^{II}, così ne segue che Q passa per la coppia di assi di una delle tre involuzioni di G_4^{II}. Le coppie di assi delle altre due involuzioni di G_4^{II} saranno coppie di rette reciproche rispetto a Q. Indichiamo con $m\,m'$, $n\,n'$, $p\,p'$ le coppie di assi di G_4^{II}. La quadrica Q passi per $m\,m'$. Allora Q e Ω si segano secondo le rette m, m', q e quindi secondo una retta ulteriore che dico distinta da q. Infatti le rette $n\,n'$ sono reciproche rispetto a Q e sghembe fra loro e quindi non certamente tangenti a Q. Dunque esistono due generatrici distinte di un sistema di Q e due dell'altro appoggiate a $n\,n'$. Ciò prova che la retta ulteriore suddetta è effettivamente distinta da q e costituisce un'altra quadrisecante di C_5. Esisterebbero dunque due quadrisecanti di C_5 sopra Ω, ciò che abbiamo dichiarato impossibile. Quindi:

La curva possiede una sola quadrisecante, ossia è di prima specie. È anche facile vedere che non può avere punti doppi.

10. *Caso armonico.* — Come al N° 4, cosi abbiamo adesso:

$$f \equiv \lambda^4 + \mu^4 = 0 \quad ; \quad a = 1 + i,\ b = \sqrt{2}$$

$$M = i\,(1 + i)\,\lambda + \mu\sqrt{2}\ ;\ N = (1 + i)\,\lambda - \mu\sqrt{2}\ ;$$

$$P = \lambda\sqrt{2} + (1 + i)\,\mu\ ;\ Q = \lambda\sqrt{2} - (1 + i)\,\mu$$

e la rappresentazione parametrica di C_5 è ancora:

$$x_1 \equiv M^5 \quad , \quad x_2 \equiv N^5 \quad , \quad x_3 \equiv P^5 \quad , \quad x_4 \equiv Q^5.$$

Il gruppo binario g_8 che trasforma f in se stessa è il medesimo, na-

turalmente, di quello del N. 4. Per ottenerlo basta aggiungere a g_4 la sostituzione

$$\begin{pmatrix} -i\mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

Ma in questo caso la collineazione quaternaria che ne nasce è diversa da quella di allora. Essa è adesso una involuzione gobba: allora era omologia armonica. Può rappresentarsi con

$$\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & i\,x_4 & -i\,x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Essa trasforma C_5 in se medesima e insieme al G_4^{II} genera un gruppo G_8^{I} rispetto al quale C_5 è invariante: il gruppo trovato è proiettivamente diverso dal G_8 della quartica armonica (N. 4) sebbene sia identico dal punto di vista dell'isomorfismo oloedrico. Eccone una costruzione indipendente da G_5. Riprendiamo a considerare gli assi $m\,m'$, $n\,n'$, $p\,p'$ di G_4^{II} che esistono sulla quadrica Ω e due rette r, s dell'altro sistema di Ω appoggiate quindi agli assi in parola: denotiamo con le lettere maiuscole corrispondenti e con gli indici r, s i punti di appoggio. Così esistono, sopra r, le coppie di punti $M_r\,M'_r$, $N_r\,N'_r$, $P_r\,P'_r$ armoniche a due, a due. Sopra s si avranno le coppie analoghe: $M_s\,M'_s$, $N_s\,N'_s$, $P_s\,P'_s$. Prendiamo ad esempio le coppie $N_r\,N'_r$, $P_r\,P'_r$: il covariante sestico di questi 4 punti è costituito da $M_r\,M'_r$ e da altre due coppie che indicheremo con $X_r\,X'_r$, $Y_r\,Y'_r$. Sieno $X_s\,X'_s$, $Y_s\,Y'_s$ le coppie analoghe desunte da $N_s\,N'_s$, $P_s\,P'_s$ così che $X_r\,X_s$, $X'_r\,X'_s$, $Y_r\,Y'_s$, $Y'_r\,Y'_s$ sieno generatrici di Ω. Ebbene le due involuzioni gobbe da aggiungere a G_4^{II} per ottenere il gruppo G_8^{I} cercato hanno per assi $(X_r\,X'_s,\ X'_r\,X_s)$, $(Y_r\,Y'_s,\ Y'_r\,Y_s)$. E il suo sottogruppo, a periodo, 4, ha per punti uniti $M_r\,M'_r\,M_s\,M'_s$. — Le due rette r ed s sono invarianti rispetto a G_8^{I}. Il gruppo trovato G_8^{I} appartiene come sottogruppo al G_{24}^{IV} (*C* pag. 8).

11. Segnaleremo una particolarità della curva, in questo caso, ponendolo in riscontro colla costruzione precedente. Poichè adesso $a^4 + b^4 = 0$, ne viene (N. 9) che la quadrisecante del caso generale diviene una bitangente: essa è una delle due rette r od s. I punti di contatto sono in conseguenza $M_r\,M'_r$ oppure M_s, M'_s. Viceversa si vede subito che esigendo che la quadrisecante divenga bitangente si trova f deve essere armonica. Basta perciò esprimere (N. 9) che $(a^4 + b^4)\,(\lambda^4 + \mu^4) + 12\,a^2\,b^2\,\lambda^2\,\mu^2$ sia un quadrato perfetto. Dunque:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè la curva del nostro caso generale sia armonica è che la quadrisecante divenga bitangente.

Altre proprietà possono dedursi facilmente tenendo conto della costruzione del numero precedente e del fatto che C_5 deve essere invariante rispetto a G_8^1.

12. *Caso equianarmonico.* — Come al N. 5 prenderemo

$$f \equiv \lambda^4 + \mu^4 + 2\, i \sqrt{3}\, \lambda^2 \mu^2 = 0$$

$$a = (1 + i)(\sqrt{3} - 1) \quad , \quad b = 2$$

$$M = \lambda (1 + i)(\sqrt{3} - 1) + 2\, \mu \quad , \quad N = \lambda (1 + i)(\sqrt{3} - 1) - 2\, \mu$$

$$P = 2\, \lambda + (1 + i)(\sqrt{3} - 1)\, \mu \quad , \quad Q = 2\, \lambda - (1 + i)(\sqrt{3} - 1)\, \mu$$

e le coordinate di C_5 saranno:

$$x_1 \equiv M^5 \quad ; \quad x_2 \equiv N^5 \quad ; \quad x_3 \equiv P^5 \quad ; \quad x_4 \equiv Q^5 .$$

In questo caso il gruppo binario

$$\begin{Bmatrix} i\,(\lambda + \mu) & \lambda - \mu \\ \lambda & \mu \end{Bmatrix}^r \qquad r = 1, 2, 3$$

genera il gruppo quaternario

$$\begin{Bmatrix} x_4 & i\, x_1 & x_3 & -\, i\, x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{Bmatrix}^r$$

che strasforma C_5 in se stessa. Quest'ultimo, aggiunto al G_4^{II} del caso generale (N. 8), genera il gruppo cercato in questo caso. Si giunge così a un altro dei tre gruppi tetraedrici possibili nello spazio a tre dimensioni. È il G_{12}^{III} (*C* pag. 6) di cui riportiamo qui la costruzione. Riprendiamo a considerare gli assi $m\, m'$, $n\, n'$, $p\, p'$ di G_4^{II} e la quadrica Ω sulla quale esistono. Le terne come $m\, n\, p$, $m'\, n'\, p'$ ammettono la stessa coppia di rette hessiane k, k. Prendiamo due punti X, Y su h e due $X'\, Y'$ su k, in guisa che le rette $X\, X'$, $Y\, Y'$ siano generatrici di Ω. Poi, consideriamo la collineazione assiale a periodo 3 che ha $X\, Y'$ come asse di punti uniti e $X'\, Y$ come asse di piani uniti con la ulteriore condizione che $X\, Y'\, X'$, $X\, Y'\, Y$ siano i due piani uniti per l'asse di punti uniti e X', Y i due punti uniti sull'asse di piani uniti. Ebbene questa collineazione aggiunta al G_4^{II} genera il gruppo G_{12}^{III} in parola. Sono rette invarianti le $X\, X'$, $Y\, Y'$.

13. Come nel caso armonico, così nel caso attuale segnaleremo qualche particolarità della curva. Perciò riprendiamo la considerazione del

gruppo quaternario a periodo 3 del numero precedente:

$$\begin{pmatrix} x_4 & i\,x_1 & x_3 - i\,x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^r \quad r = 1, 2, 3$$

che è uno dei 4 sottogruppi di 3° ordine dell'attuale G_{12}^{III}. Il piano $x_3 = 0$ è unito per il sottogruppo precedente. Dunque è unito anche (0010). Segue che l'asse di piani uniti, o esiste in $x_3 = 0$, o passa per (0010). Ma quest'ultima ipotesi è inammissibile, perchè sarebbero uniti i piani che, dall'asse suddetto, projettano i tre spigoli del tetraedro fondamentale. Dunque $x_3 = 0$ è unito perchè passa per l'asse di piani uniti e quindi il punto di contatto di $x_3 = 0$ con C_5 è uno dei due punti sull'asse dei piani uniti. Ne segue che i quattro punti di contatto dei 4 piani stazionari singolari con C_5 sono in linea retta. Essa è la quadrisecante di C_5 e una delle due rette invarianti di G_{12}^{III}. Viceversa si vede subito che, se i punti di contatto dei piani singolari sono in linea retta, si cade nel caso equia narmonico. Infatti le coordinate dei punti suddetti sono:

$$\begin{array}{cccc} 0 \;, & -(2\,a\,b)^5 \;, & (a^2 - b^2)^5 \;, & -(a^2 + b^2)^5 \\ (2\,a\,b) \;, & 0 \;, & (a^2 + b^2)^5 \;, & (-a^2 + b^2)^5 \\ (-a^2 + b^2)^5 \;, & -(a^2 + b^2)^5 \;, & 0 \;, & -(2\,a\,b)^5 \\ (a^2 + b^2)^5 \;, & (a^2 - b^2)^5 \;, & (2\,a\,b)^5, \;, & 0. \end{array}$$

Per ottenere che sieno in linea retta basta esigere che siano in un piano, giacchè non esistono piani invarianti rispetto a G_4^{II}.

Annullando il determinante relativo, che è emisimmetrico, si perviene alla condizione:

$$(a^2 + b^2)^{10} - (a^2 - b^2)^{10} - (2\,a\,b)^{10} = 0$$

ossia

$$a^2\,b^2\,(a^4 - b^4)^2\,(a^4 + b^4 + 2\,i\sqrt{3}\,a^2\,b^2)\,(a^4 + b^4 - 2\,i\sqrt{3}\,a^2\,b^2) = 0$$

e poichè

$$a \neq 0 \;, \quad b \neq 0 \;, \quad a^4 - b^4 \neq 0$$

si è condotti a:

$$a^4 + b^4 \pm 2\,i\sqrt{3}\,a^2\,b^2 = 0$$

che è la condizione affinchè f sia equianarmonica. Dunque:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè la curva del nostro caso generale sia equianarmonica, è che i 4 punti di contatto dei quattro piani stazionari singolari sieno in linea retta (la quadrisecante della curva). È

poi evidente che il gruppo dei quattro punti suddetti è equianarmonico non soltanto sulla curva, ma anche sulla quadrisecante.

14. Abbiamo già osservato che gli assi r ed s di piani uniti e punti uniti di un sottogruppo di terzo ordine del G_{12}''' si appoggiano alla quadrisecante q. Il punto $q\,r \equiv R$ è di contatto per uno dei piani stazionari singolari di C_5. Sia R' l'altro punto unito del sottogruppo sopra r. Nel piano $R'.\,s$ che è unito viene a individuarsi una omologia a periodo tre di cui s è asse ed R' centro, e rispetto alla quale deve essere invariante il gruppo dei cinque punti d'intersezione del piano con la curva C_5. Ne segue che C_5 avrà a comune con s un punto S' e la tangente in S' passerà per R'. Quindi i cinque punti comuni a C_5 e al piano $s\,q$ sono forniti da S' e dai quattro punti di secamento sopra q. È dunque impossibile che la tangente a C_5 in R si appoggi ad s: d'altra parte tale tangente deve essere unita rispetto al nostro sottogruppo: è dunque necessario che essa sia la r. Cioè:

Le quattro tangenti nei quattro punti di secamento della quadrisecante sono gli assi di piani uniti dei quattro sottogruppi di terzo ordine. Le due rette invarianti di G_{12}^{III} sono quindi costituite dalla quadrisecante e dalla ulteriore retta di appoggio alle tangenti suddette.

15. Mantenendo le notazioni del numero precedente, osserveremo che il piano osculatore di C_5 in S' è unito rispetto al solito sottogruppo di terzo ordine: ma tale piano non può passare per s perchè le intersezioni dei due piani uniti per s ci sono note e niuno di essi piani è osculatore in S': dunque il piano in questione passa per r e quindi R. Dunque:

I punti di contatto dei quattro piani stazionari singolari sono anche punti di contatto di altri quattro piani che osculano altrove la curva e i punti di osculazione di questi ultimi sono i vertici dell'unico tetraedro invariante inscritto nella curva, ecc. ecc.

"LE CURVE GOBBE RAZIONALI DI QUINTO ORDINE INVARIANTI RISPETTO A GRUPPI FINITI DI COLLINEAZIONI QUATERNARIE,,

[*Rendic. Istit. Lomb. 1904*]

Il titolo di questo scritto ne dice chiaramente lo scopo: determinare cioè, mediante la loro rappresentazione parametrica, tutte le quintiche razionali gobbe non degeneri (che per brevità indico ora e nel seguito con il simbolo C_5) le quali sieno invarianti rispetto a gruppi costituiti da un numero finito di collineazioni quaternarie. Sono ben noti i gruppi di esse che trasformano in sè cubiche (1), o quartiche gobbe razionali: circa alle quintiche l'avere già riunito in una pubblicazione precedente (2) l'esame di alcuni casi notevoli, mi faceva vieppiù desiderare di risolvere completamente il problema in tutti i casi possibili. Credo di aver raggiunto l'intento prefissomi dando, caso per caso, insieme alla rappresentazione parametrica della C_5, le sostituzioni generatrici del gruppo rispetto al quale la C_5 è invariante. Sopra alcune delle C_5 trovate mi permetto di richiamare l'attenzione del lettore: così su quelle invarianti rispetto a gruppi quadrinomi (n.^{1} 5, 6, 7, 8) e meglio ancora sulle due specie invarianti rispetto a gruppi tetraedrici, che sono le più notevoli (n.^{0} 12 e seguenti). La ricerca finisce ai gruppi del tetraedro perchè non esistono gruppi ottaedrici, od icosaedrici dotati di C_5 invarianti. E poichè il discorso ne porge qui l'occasioue dirò espressamente che, nel seguito, per

(1) KOHN, *Ueber die Oktaëder und die Ikosaëderlage von zwei cubischen Raumcurven* (Sitz. der math. Cl. d. Ak. d. Wiss., Wien 1889). — CIANI, *Sopra i gruppi finiti di collineazioni quaternarie dotati di cubiche gobbe invarianti* (Circ. mat.^{co} di Palermo 1902).

(2) CIANI, *Sopra alcuni gruppi lineari quaternari dotati di quartica, o di quintica gobba razionale invariante.* Questi Rendic., aprile 1904.

brevità di linguaggio, ho usato spesso la locuzione « gruppo e C_5 che si appartengono » per indicare un gruppo rispetto al quale la C_5 è invariante.

I procedimenti impiegati muovono dallo stesso punto di partenza che già mi servì utilmente per le C_3 e C_4. Se, cioè, una C_5 possiede un gruppo G di collineazioni quaternarie, viene a stabilirsi su di essa un gruppo g subordinato di proiettività binarie, il quale, per la razionalità della curva, deve presentare i soliti cinque casi della piramide, della doppia piramide, del tetraedro, dell'ottaedro e dell'icosaedro. E dall'esame di questi gruppi binari nascono le considerazioni inerenti ai relativi gruppi quaternari a cui i primi sono subordinati.

La Nota attuale è in necessaria relazione con le mie antecedenti pubblicazioni sopra gruppi quaternari lineari. Particolarmente lo è con la Nota già citata, comparsa qualche mese indietro in questi Rendiconti e con la memoria che ha per titolo: *Sopra i gruppi finiti di collineazioni quaternarie, oloedricamente isomorfi con quelli dei poliedri regolari* (Annali di matematica, 1902). Dovendole richiamare spesso mi servirò del simbolo M per la memoria e del simbolo M' per la Nota con la indicazione del numero relativo.

Gruppi della piramide.

1. Un gruppo della piramide è composto dalle varie potenze di una stessa collineazione quaternaria ciclica a periodo qualunque.

Sia dapprima il periodo uguale a due. Se la C_5 deve essere trasformata in se stessa dalla suddetta collineazione S, verrà a individuarsi sulla C_5 medesima una sostituzione binaria s a periodo 2, subordinata di S, che potrà rappresentarsi con

$$s \equiv \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

e sarà evidentemente una involuzione. La S invece può essere tanto omologia armonica, quanto involuzione gobba ed è opportuno distinguere i due casi. Sia S una omologia armonica. I punti doppi di s sono l'uno nel centro e l'altro sul piano fondamentale di S. Assumendo il centro come (0001) e il piano fondamentale come $x_4 = 0$, sarà S così rappresentata:

$$S \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & -x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

e ora esigendo che S appartenga a C_5 si è condotti necessariamente alla curva seguente:

$$x_1 \equiv a_1 \lambda^5 + b_1 \lambda^3 \mu^2 + c_1 \lambda \mu^4,$$
$$x_2 \equiv a_2 \lambda^5 + b_2 \lambda^3 \mu^2 + c_2 \lambda \mu^4,$$
$$x_3 \equiv a_3 \lambda^5 + b_3 \lambda^3 \mu^2 + c_3 \lambda \mu^4,$$
$$x_4 \equiv a_4 \lambda^4 + b_4 \lambda^2 \mu^3 + c_4 \mu^5.$$

Il piano di omologia taglia C_5 in $\mu = 0$ e in altri due punti che sono manifestamente due nodi, poichè ciascuno è individuato da due valori uguali e di segno contrario del parametro $\frac{\lambda}{\mu}$. Si può dunque parlare della coppia di punti armonica ad entrambi su C_5. Essa è costituita dal centro di omologia $\lambda = 0$ e dall'ulteriore punto d'incontro P del piano di omologia con C_5 ($\mu = 0$). La tangente in P, a C_5, passa manifestamente per il centro suddetto. Viceversa si vede subito che le condizioni ora enunciate sono sufficienti perchè la C_5 possegga la S o, come si può dire più brevemente, sia omologica: ed è anche manifesto che niuna altra omologia può appartenere ad una C_5. Cioè:

La C_5 omologica possiede due nodi con la ulteriore particolarità che, presa su di essa la coppia di punti armonica ai nodi, la tangente in uno di questi punti passi per l'altro. Quest'ultimo è centro di omologia; è piano di omologia quello che passa per i nodi e per il punto di contatto della tangente suddetta: l'omologia è armonica. La C_5 esiste su di un cono quadrico e su di una superficie cubica che ha un punto di Eckardt nel vertice del cono, che lo taglia secondo una retta, e lo tocca in due punti. — S'intendono compresi nella curva, ora descritta, tutti quei casi particolari che essa può presentare: ad esempio possono i due nodi essere infinitamente vicini, ecc. ecc.

Se poi S è una involuzione gobba, ciascuno dei suoi assi si appoggia a C_5: assumendoli per ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$); ($x_3 = 0$, $x_4 = 0$) la S si rappresenta con

$$S \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

la s è ancora quella che ha servito per l'omologia, e per C_5 si trova:

$$x_1 \equiv a_1 \lambda^4 \mu + b_1 \lambda^2 \mu^3 + c_1 \mu^5,$$
$$x_2 \equiv a_2 \lambda^4 \mu + b_2 \lambda^2 \mu^3 + c_2 \mu^5,$$
$$x_3 \equiv a_3 \lambda^5 + b_3 \lambda^3 \mu^2 + c_3 \lambda \mu^4,$$
$$x_4 \equiv a_4 \lambda^5 + b_4 \lambda^3 \mu^2 + c_4 \lambda \mu^4.$$

2. La S abbia il periodo uguale a 3. Essa può essere biassiale, o assiale. Sia dapprima biassiale e si assumano gli assi per rette

$$(x_1 = 0,\ x_2 = 0)\ ;\ (x_3 = 0,\ x_4 = 0).$$

Avremo allora:

$$S \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2\,\varepsilon & x_3\,\varepsilon & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix};\quad s = \begin{pmatrix} \varepsilon\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

dove ε è radice cubica immaginaria dell'unità. Si è condotti così alla seguente C_5:

$$x_1 \equiv a_1\lambda^3\mu^2 + b_1\mu^5\ ;\ x_2 \equiv a_2\lambda^3\mu^2 + b_2\mu^5\ ;\ x_3 \equiv a_3\lambda^5 + b_3\lambda^2\mu^3\ ;$$
$$x_4 \equiv a_4\lambda^5 + b_4\lambda^2\mu^3.$$

I punti $(b_1\, b_2\, 0\, 0)$, $(0\, 0\, a_3\, a_4)$ individuati da $\lambda = 0$. $\mu = 0$ sono manifestamente due cuspidi di C_5. Assumendo come (1000), (0001) le cuspidi, come $(x_1 = 0,\ x_3 = 0)$, $(x_2 = 0,\ x_4 = 0)$, le tangenti cuspidali e disponendo opportunamente del punto unità, si giunge alla rappresentazione seguente:

$$x_1 \equiv \mu^5\,,\quad x_2 \equiv \lambda^3\mu^2\,,\quad x_3 \equiv \lambda^2\mu^3\,,\quad x_4 \equiv \lambda^5\,.$$

La C_5 esiste sulla quadrica:

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0$$

e sui coni cubici:

$$x_1 x_2^2 - x_3^3 = 0,\ x_3^2 x_4 - x_2^3 = 0$$

i quali hanno a comune ciascuno, con la quadrica, una delle tangenti cuspidali di C_5. Chiamando *piano stazionario singolare* di C_5 un piano che abbia riunite in un sol punto le sue cinque intersezioni con C_5, si vede che $x_1 = 0, x_4 = 0$, sono 2 piani stazionari singolari. Dunque: *L' unica C_5 dotata di collineazione biassiale a periodo tre, è quella che possiede due cuspidi e un piano stazionario singolare per ciascuna cuspide.* Gli assi della collineazione sono individuati dal piano stazionario singolare di una cuspide e da quello che passa per le cuspidi e la tangente nell'altra cuspide.

Se poi la S è soltanto assiale, assumiamo l'asse di piani uniti per $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; l'asse di punti uniti per $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Sieno inoltre (0010), (0001) i due punti uniti sull'asse di piani uniti, e $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ i due piani uniti per l'asse di punti uniti.

Allora è:

$$S \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2\,\varepsilon & x_3\,\varepsilon^2 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},\ s = \begin{pmatrix} \varepsilon\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

e per C_5 si trovano i due tipi essenzialmente distinti:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\equiv a_1\lambda^3\mu^2 + b_1\mu^5 \\ x_2 &\equiv a_2\lambda^3\mu^2 + b_2\mu^5 \\ x_3 &\equiv a_3\lambda^5 \quad + b_3\lambda^2\mu^3 \\ x_4 &\equiv a_4\lambda^4\mu + b_4\lambda\,\mu^4 \end{aligned}\right\}\text{(a)};\qquad \left.\begin{aligned} x_1 &\equiv a_1\lambda^4\mu + b_1\lambda\,\mu^4 \\ x_2 &\equiv a_2\lambda^4\mu + b_2\lambda\,\mu^4 \\ x_3 &\equiv a_3\lambda^3\mu^2 + b_3\quad\mu^5 \\ x_4 &\equiv a_4\lambda^5 \quad + b_4\lambda^2\mu^3 \end{aligned}\right\}\text{(b)}.$$

Relativamente al caso (a) è da rilevarsi che il piano

$$a_2 x_1 - a_1 x_2 = 0$$

è stazionario singolare in $\mu = 0$ e passa per l'asse di piani uniti.

Relativamente al caso (b) si osserverà invece che il piano:

$$b_2 x_1 - b_1 x_2 = 0 \text{ è stazionario in } \lambda = 0 \text{ e secante in } \mu = 0$$

$$\text{e } a_2 x_1 - a_1 x_2 = 0 \text{ è secante in } \lambda = 0 \text{ e stazionario in } \mu = 0$$

e che i punti $\lambda = 0$, $\mu = 0$ sono i due punti uniti sull'asse di piani uniti. Ecco dunque la seguente osservazione che sarà utile nel seguito. *Se una C_5 possiede una collineazione assiale a periodo tre, o esiste un piano stazionario singolare* (per l'asse di piani uniti); *o esiste una coppia di piani stazionari tali che il punto di contatto dell'uno è punto di secamento per l'altro* (questi punti sono i due uniti sull'asse di piani uniti).

3. La S abbia il periodo uguale a 4. Essa può essere biassiale, assiale, o generica. Mentre dunque per s si ha l'unica forma

$$s \equiv \begin{pmatrix} i\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

per S possono aversi le tre forme seguenti

$$S_a \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & i x_3 & i x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}; \; S_b \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & i x_3 & -i x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix};$$

$$S_c \equiv \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & i x_3 & -i x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Corrispondentemente si trovano per C_5 i tre casi:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\equiv a_1 \lambda^4 \mu + b_1 \mu^5 \\ x_2 &\equiv a_2 \lambda^4 \mu + b^2 \mu^5 \\ x_3 &\equiv a_3 \lambda^5 + b_3 \lambda \mu^4 \\ x_4 &\equiv a_4 \lambda^5 + b_4 \lambda \mu^4 \end{aligned}\right\} \text{(a)}; \qquad \left.\begin{aligned} x_1 &\equiv a_1 \lambda^4 \mu + b_1 \mu^5 \\ x_2 &\equiv a_2 \lambda^4 \mu + b_2 \mu^5 \\ x_3 &\equiv a_3 \lambda^5 + b_3 \lambda \mu^4 \\ x_4 &\equiv a_4 \lambda^3 \mu^2 \end{aligned}\right\} \text{(b)};$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\equiv a_1 \lambda^4 \mu + b_1 \mu^5 \\ x_2 &\equiv a_2 \lambda^2 \mu^3 \\ x_3 &\equiv a_3 \lambda^5 + b_3 \lambda \mu^4 \\ x_4 &\equiv a_4 \lambda^3 \mu^2 \end{aligned}\right\} \text{(c)}.$$

La più interessante è la (a): l'unica dotata di collineazione biassiale a periodo 4. Con evidente ed apportuna disposizione del tetraedro di riferimento, la sua rappresentazione si riduce a

$$x_1 \equiv \mu^5 , \quad x_2 \equiv \lambda^4 \mu , \quad x_3 \equiv \lambda \mu^4 , \quad x_4 \equiv \lambda^5 .$$

Essa esiste sulla quadrica $x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0$ ed è priva di punti doppi. Secondo il linguaggio di Bertini è dunque una C_5 di 2ª specie (1). Possiede due tangenti di ondulazione

$$(x_1 = 0 , x_3 = 0) , \quad (x_2 = 0 , x_4 = 0) .$$

Viceversa si vede subito che l'esistenza di due tali tangenti esige il possesso della S_a. Quindi:

L'unica C_5 dotata di collineazione biassiale, a periodo 4, è quella che possiede due tangenti di ondulazione. Indicando con A e B i punti di contatto, gli assi della collineazione sono individuati dalla intersezione del piano stazionario singolare che passa per A (o per B) con quello individuato dalla retta $A\ B$ e dalla retta tangente a C_5 in B (o in A).

4. Se finalmente S ha il periodo superiore a 5 si potrà prendere:

$$s \equiv \begin{pmatrix} \alpha\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} ; \quad S \equiv \begin{pmatrix} \alpha^m x_1 & \alpha^n x_2 & \alpha^r x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

dove α è radice primitiva di $x^p = 1$. Ciò posto si vede facilmente che tutte e 4 le espressioni parametriche delle coordinate di C_5 non possono contenere più di un termine e si è condotti ai soli seguenti casi effettivamente distinti:

$$x_1 \equiv \lambda^5 , \ x_2 \equiv \lambda \mu^4 , \ x_3 \equiv \lambda^2 \alpha^3 , \ x_4 \equiv \mu^5 \qquad \text{(a)}$$
$$x_1 \equiv \lambda^5 , \ x_2 \equiv \lambda \mu^4 , \ x_3 \equiv \lambda^3 \mu^2 , \ x_4 \equiv \mu^5 \qquad \text{(b)}$$
$$x_1 \equiv \lambda^5 , \ x_2 \equiv \lambda \mu^4 , \ x_3 \equiv \lambda^4 \mu , \ x_4 \equiv \mu^5 \qquad \text{(c)}$$
$$x_1 \equiv \lambda^5 , \ x_2 \equiv \lambda^2 \mu^3 , \ x_3 \equiv \lambda^3 \mu^2 , \ x_4 \equiv \mu^5 \qquad \text{(d)}$$

e le S corrispondentemente possedute sono:

$$S_a \equiv \begin{pmatrix} \alpha^5 x_1 & \alpha x_2 & \alpha^2 x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} , \quad S_b \equiv \begin{pmatrix} \alpha^5 x_1 & \alpha x_2 & \alpha^3 x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$S_c \equiv \begin{pmatrix} \alpha^5 x_1 & \alpha x_2 & \alpha^4 x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} , \quad S_d \equiv \begin{pmatrix} x^5 x_1 & \alpha^2 x_2 & \alpha^3 x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

nè v'è alcun limite superiore per p, a meno che la s non debba essere assiale, o biassiale; nei quali casi $p \leq 5$, $p \leq 4$. Le curve (c) e (d) sono già state considerate ai n.i 2 e 3. Le altre non hanno particolarità notevoli.

I gruppi della piramide sono esauriti.

Gruppi della doppia piramide.

5. Cominciamo dal gruppo quadrinomio. I gruppi quadrinomi dello spazio a tre dimensioni sono tre (M n.º 1). Il G_4^1 è costituito dalla identità e da tre involuzioni gobbe di cui gli assi sono le coppie di spi-

(1) BERTINI, *Sulle curve gobbe razionali del quinto ordine.* (Collect., math. pag. 313).

goli opposti di un tetraedro; il G_4^{II} è costituito dalla identità e da tre involuzioni gobbe di cui gli assi sono tre coppie armoniche, a due, a due di una stessa serie rigata; e finalmente il G_4^{III} è composto dalla identità, da due omologie armoniche tali che il centro dell'una è sul piano fondamentale dell'altra e dalla involuzione gobba, che ne è il prodotto. Si esclude facilmente che una C_5 possegga G_4^{I}, o G_4^{III}. Infatti se una C_5 possiede una involuzione gobba, ciascuno dei suoi assi si appoggia a C_5: ora l'esistenza del G_4^{I} esigerebbe manifestamente che ogni asse si appoggiasse a C_5 in due punti distinti, il che è manifestamente impossibile. Se poi la C_5 possedesse il G_4^{III}, si noti bene che il centro della omologia armonica sarebbe unito per tutt'e e tre le collineazioni del gruppo e siccome tale centro è sopra C_5 (n.^{0} 1), così ne verrebbe che esso dovrebbe essere unito anche per tutte e tre le involuzioni binarie subordinate del gruppo quadrinomio g_4 su C_5: e questo è evidentemente assurdo.

Rimane a discutere l'esistenza di G_4^{II}. Riprendiamo perciò la C_5 del n.^{0} 1 dotata della involuzione gobba

$$S_1 \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

la quale ha per involuzione binaria subordinata su C_5 la

$$s_1 \equiv \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}.$$

Per giungere al G_4^{II} basta aggiungere una involuzione gobba che appartenga a C_5 e che muti in se stessa la S_1. Indicando con S_2 questa involuzione gobba si vede facilmente che, con opportuna disposizione degli elementi di riferimento, si può prendere:

$$S_2 \equiv \begin{pmatrix} x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Esigendo che essa appartenga a C_5 si vede anche la involuzione binaria subordinata di S_2 su C_5 è $S_2 \equiv \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$ e si è condotti così alla C_5 seguente:

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv a\lambda^4\mu + b\lambda^2\mu^3 + c\mu^5 \\ x_2 &\equiv m\lambda^4\mu + n\lambda^2\mu^3 + p\mu^5 \\ x_3 &\equiv c\lambda^5 + b\lambda^3\mu^2 + a\lambda\mu^4 \\ x_4 &\equiv p\lambda^5 + n\lambda^3\mu^2 + m\lambda\mu^4. \end{aligned}$$

Essa possiede manifestamente il G_4^{11} generato da S_1 e S_2. Gli assi delle involuzioni gobbe del gruppo esistono sulla quadrica

$$\Omega \equiv x_1 x_3 - x_2 x_4 = 0.$$

Il solo gruppo quadrinomio che possa appartenere a una C_5 è il G_4^{11}, cioè quello le cui tre involuzioni gobbe hanno per assi tre coppie armoniche, a due, a due, di una stessa serie rigata.

6. Tutte le C_5 dotate di G_4^{11} sono dunque quelle la cui rappresentazione parametrica è indicata nel numero precedente. Ci proponiamo adesso l'esame di alcuni casi particolari notevoli.

Anzitutto è facile vedere che la specie può essere tanto la 1ª quanto la 2ª. Perchè le C_5 sieno di seconda specie deve essere $a = c$, $m = p$ e allora esistono tutte sulla quadrica $\Omega = 0$. Il sistema delle quadrisecanti è quello delle

$$(x_1 = 0,\ x_3 = 0) \quad (x_2 = 0,\ x_4 = 0)$$

e fra esse vi sono in generale tre bitangenti. *Una C_5 di seconda specie dotata di gruppo quadrinomio possiede in generale tre bitangenti.*

7. Se la C_5, dotata di gruppo quadrinomio, ha gli otto piani stazionari tutti distinti, essi si dividono in due quaterne invarianti ciascuna. I punti di contatto di una quaterna e i punti di secamento relativi, avranno evidentemente lo stesso covariante sestico su C_5. Viceversa è utile notare che se, sopra C_5, i 4 punti di contatto di 4 piani stazionari e i 4 punti di secamento relativi hanno lo stesso covariante sestico, la C_5 è dotata di un G_4^{11}. Infatti, mediante opportuna disposizione degli elementi di riferimento su C_5, è possibile rappresentare i parametri che individuano i punti di contatto in discorso con

$$a\lambda + b\mu = 0,\quad a\lambda - b\mu = 0,\quad b\lambda + a\mu = 0,\quad b\lambda - a\mu = 0$$

e quelli dei 4 punti di secamento relativi con

$$a'\lambda + b'\mu = 0,\quad a'\lambda - b'\mu = 0,\quad b'\lambda + a'\mu = 0,\quad b'\lambda - a'\mu = 0.$$

Le due binarie biquadratiche che rappresentano complessivamente gli uni e gli altri saranno dunque:

$$f \equiv a^2b^2(\lambda^4 + \mu^4) - (a^4 + b^4)\lambda^2\mu^2 = 0\,;$$
$$f' \equiv a'^2b'^2(\lambda^4 + \mu^4) - (a'^4 + b'^4)\lambda^2\mu^2 = 0.$$

Riferendo la C_5 al tetraedro dei quattro piani stazionari in parola, otterremo la rappresentazione seguente:

$$x_1 \equiv (a\lambda + b\mu)^4 (a'\lambda + b'\mu),$$
$$x_2 \equiv (a\lambda - b\mu)^4 (a'\lambda - b'\mu),$$
$$x_3 \equiv (b\lambda + a\mu)^4 (b'\lambda + a'\mu),$$
$$x_4 \equiv (b\lambda - a\mu)^4 (b'\lambda - a'\mu).$$

Adesso è evidente che le involuzioni binarie:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

individuano rispettivamente le seguenti involuzioni gobbe:

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_4 & -x_3 & x_2 & -x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

le quali insieme all'identità compongono ancora un G_4^{11}.

Possiamo dunque dire:

Ln condizione necessaria e sufficiente affinchè una C_5, che ha gli otto piani stazionari distinti, possegga un gruppo qaadrinomio, è che fra gli otto piani suddetti se ne possa scegliere una quaterna in guisa che i quattro punti di contatto e i quattro punti di secamento ammettano, su C_5, lo stesso covariante sestico (dopo di che altrettanto accade per la quaterna rimanente).

8. È anche interessante il caso in cui la C_5 possiede quattro piani stazionari singolari. Ricorrendo alla notevole rappresentazione di Berzolari che esprime le coordinate di C_5 come le derivate terze di una binaria di 8° grado, il caso attuale si verifica quando è nullo il cataletticante della binaria suddetta (1). Noi lo otterremo dal caso del numero precedente facendo coincidere le due forme f ed f'. La C_5 è allora così rappresentata:

$$x_1 \equiv (a\lambda + b\mu)^5;$$
$$x_2 \equiv (a\lambda - b\mu)^5;$$
$$x_3 \equiv (b\lambda + a\mu)^5;$$
$$x_4 \equiv (b\lambda - a\mu)^5;$$

ed $f = 0$ cioè $a^2b^2(\lambda^4 + \mu^4) - (a^4 + b^4)\lambda^2\mu^2 = 0$ è la forma dei quattro punti di contatto dei piani stazionari singolari. La curva possiede il G_4^{11} descritto nel n. precedente. È questo il caso del n.° 8 M'. Quindi:

Se una C_5 possiede quattro piani stazionari singolari, essa è anche dotata di un gruppo quadrinomio G_4^{11}.

(1) BERZOLARI, *Sulta curva razionale gobba del quinto ordine.* (Mem. R. Acc. Lincei, 1893).

9. Gli altri gruppi della doppia piramide sono meno interessanti. Ci proponiamo di esaminarli rapidamente. Per trovarli, basta poter aggiungere, a uno qualunque dei gruppi della piramide, una collineazione T a periodo 2 che trasformi la C_5 e il gruppo in se stessi. Passeremo dunque in rivista i gruppi di piramide già trovati, tralasciando quelli del n.° 1 che, dando origine al gruppo quadrinomio, sono stati già considerati nel n.° 5. — Sia adesso il caso del n.° 2 cioè la C_5 possegga un gruppo di 3° ordine.

Se è biassiale la C_5 è la seguente:

$$x_1 \equiv \mu^5;\ x_2 \equiv \lambda^3 \mu^2\ ;\ x_3 \equiv \lambda^2 \mu^3\ ;\ x_4 \equiv \lambda^5.$$

Indicando con t la involuzione binaria subordinata di quella cercata T, è evidente che la t deve scambiare fra di loro le due cuspidi di C_5, per cui sarà

$$t \equiv \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \gamma & \mu \end{pmatrix}$$

e quindi

$$T \equiv \begin{pmatrix} x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Questa, insieme a un qualunque gruppo di piramide posseduto da C_5 (cf. anche il n° 4) genera uno dei gruppi cercati.

Se poi il gruppo di 3° ordine posseduto da C_5 è soltanto assiale, la C_5 può essere la (a), o la (b) del n° 2. Però si osservi che, dovendo un tal gruppo essere invariante rispetto a T, debbono essere separatamente invarianti l'asse di punti uniti e l'asse di piani uniti: d'altra parte la t deve scambiare fra di loro i punti uniti della s su C_5, i quali, nel caso (a), si trovano uno sull'asse di punti uniti e l'altro sull'asse di piani uniti. Dunque nel caso (a) è impossibile la esistenza della T. Nel caso (b) invece, entrambi i punti uniti suddetti esistono sull'asse i piani uniti; la t e la T sono rispettivamente

$$t \equiv \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix};\quad T \equiv \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Perchè la C_5 possegga definitivamente la T deve essere

$$a_1 = b_2\ \ a_2 = b_1\ \ a_3 = b_4\ \ a_4 = b_3.$$

Dopo di che la T e la S di quel numero generano il gruppo cercato.

10. Sia il caso del n.° 3, cioè la C_5 possegga un gruppo a periodo quattro. Se la S generatrice è assiale, la C_5 è la (b) di quel numero e un ragionamento identico a quello del numero precedente per la S assiale, a periodo 3, prova la impossibilità della esistenza di gruppi di doppia piramide.

Se la S è biassiale la C_5 è la (a) di cui la rappresentazione fu posta nella forma semplice

$$x_1 \equiv \mu^5 \ , \ x_2 \equiv \lambda^4 \mu \ , \ x_3 \equiv \lambda \mu^4 \ , \ x_4 \equiv \mu^5 .$$

La t deve scambiare i punti di ondulazione e quindi $t \equiv \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$ e si trova

$$T \equiv \begin{pmatrix} x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

per il possesso della quale non occorre mettere alcuna condizione alla C_5. Allora la T, insieme a uno qualunque dei gruppi di piramide già posseduti da C_5 (cf. anche il N. 4) genera uno dei gruppi cercati.

Se finalmente la S ha soli quattro punti uniti, la C_5 è la (c) del N. 3 e si vede subito che si ha

$$t \equiv \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} , \quad T \equiv \begin{pmatrix} x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} .$$

Perchè la C_5 possegga la T occorre che sia

$$a_1 = b_3 \ , \ b_1 = a_3 \ , \ a_2 = a_4$$

onde la rappresentazione di C_5 può scriversi così:

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv h\lambda^4\mu + k\mu^5 ; \\ x_2 &\equiv \lambda^2\mu^3 ; \\ x_3 &\equiv k\lambda^5 + h\,\lambda\,\mu^4 ; \\ x_4 &\equiv \lambda^3\mu^2 . \end{aligned}$$

Il gruppo è dell'ottavo ordine e può generarsi colla T e colla S_c del N. 3. Esso è descritto in M' al n.° 10 e a quello rimandiamo il lettore desideroso di maggiori dettagli. Solo noteremo che il gruppo attuale contiene, come sottogruppo, il G_4^{11} del n.° 5. Per $k = 1$, $h = 5$ la C_5 possiede quattro piani stazionari singolari che sono i seguenti:

$$\begin{aligned} i\,x_1 - 10\,i\,x_2 + x_3 - 10\,x_4 &= 0, \\ x_1 + 10\ \ x_2 + x_3 + 10\,x_4 &= 0, \\ x_1 - 10\,x_2 + i\,x_3 - 10i\,x_4 &= 0, \\ x_1 + 10\,x_2 - x_3 - 10\ \ x_4 &= 0. \end{aligned}$$

e allora non soltanto il gruppo è quello descritto al n.° 10 in M', ma anche la curva è identica. Quindi si può dire che:

Se una C_5 possiede quattro piani stazionari singolari di cui i punti di contatto formino un gruppo armonico, su C_5, essa è dotata di un gruppo di ottavo ordine, evidentemente isomorfo oloedrico a quello che trasforma in se stessa una forma binaria armonica di quattro elementi.

11. Finalmente le curve (a) e (b) del N. 4 non possono manifestamente possedere gruppi di doppia piramide perchè, mentre la t deve scambiare λ con μ, la T deve trasformare in se stesso il tetraedro fondamentale (le quali due condizioni sono incompatibili). Sono dunque esauriti anche i gruppi della doppia piramide.

Il Gruppo del tetraedro.

12. Siccome l'unico gruppo quadrinomio che possa spettare a una C_5 è il G_4^{II} (n.°5) così, se esiste una C_5 dotata di gruppo tetraedrico, questo deve contenere il G_4^{II} come sottogruppo. Dunque il gruppo tetraedrico cercato non può essere che il G_{12}^{II}, o il G_{12}^{III} (M n.° 3). Ma il G_{12}^{II} lo si esclude subito, perchè le sue collineazioni a periodo tre sono biassiali, la C_5 che lo possedesse dovrebbe dunque avere due cuspidi (n.° 2) le quali dovrebbero quindi comporre una coppia invariante di punti, mentre G_{12}^{II} non ammette certamente una tale coppia. Rimane quindi a considerarsi il solo G_{12}^{III} per la descrizione del quale mi riferisco a M n.i 3 e 4. Per metterlo in relazione con una C_5, in guisa che essa lo possegga, si può osservare, anzitutto, che la C_5 cercata non deve avere punti doppi (perchè come non esiste un punto invariante rispetto a G_{12}^{III}, così non ne esiste nemmeno una coppia e C_5 non può avere più di 2 punti doppi). È anche facile vedere che i piani stazionari di C_5 o saranno tutti e 8 distinti, ovvero si ridurranno a 4 singolari. Infatti un poliedro invariante rispetto a G_{12}^{III} è composto di 12 facce, o di sei, o di quattro. Se le facce debbono essere piani stazionari di C_5 si esclude che possano esser 12. Si esclude anche che possano esser sei, perchè allora ogni piano stazionario passerebbe per un asse di una delle involuzioni gobbe del gruppo e poichè il G_{12}^{II} opera transitivamente sopra di questi assi, ne seguirebbe che ciascuno dei piani suddetti dovrebbe contare come uno nella enumerazione loro. Rimarrebbe quindi una coppia ulteriore di piani stazionari che dovrebbe essere invariante rispetto a G_{12}^{III}. Dunque non restano che due ipotesi da discutere: o gli otto piani stazionari, essendo tutti distinti, si dividono in due tetraedri invarianti ciascuno; oppure essi coincidono, a due, a due, in quattro piani stazionari singolari formanti un

unico tetraedro invariante rispetto a G_{12}^{III}. In conclusione le C_5 dotate di gruppo tetraedrico debbono esser cercate fra quelle del n.° 7 e del n.° 8.

13. Cominciamo da quella del n.° 7. La C_5 è ivi riferita a 4 piani stazionari costituenti un tetraedro invariante rispetto al G_4^{II} già posseduto dalla curva. Riprendiamone la rappresentazione parametrica:

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv (a\lambda + b\mu)\,(a'\lambda + b'\mu)^4, \\ x_2 &\equiv (a\lambda - b\mu)\,(a'\lambda - b'\mu)^4, \\ x_3 &\equiv (b\lambda + a\mu)\,(b'\lambda + a'\mu)^4, \\ x_4 &\equiv (b\lambda - a\mu)\,(b'\lambda - a'\mu)^4. \end{aligned}$$

Le due binarie biquadratiche

$$\begin{aligned} f &\equiv a^2b^2(\lambda^4 + \mu^4) - (a^4 + b^4)\lambda^2\mu^2 = 0 \\ f' &\equiv a'^2b'^2(\lambda^4 + \mu^4) \quad (a'^4 + b'^4)\lambda^2\mu^2 = 0 \end{aligned}$$

rappresentano complessivamente i 4 punti di secamento e i 4 punti di contatto dei 4 piani stazionari fondamentali. Le involuzioni binarie

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} -\mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

individuano rispettivamente le involuzioni gobbe

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_4 & -x_3 & x_2 & -x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

le quali insieme alla identità compongono il G_4^{II} già posseduto da C_5. Ebbene ecco le condizioni che si presentano necessarie per l'esistenza del G_{12}^{III}. Anzitutto il tetraedro attuale dovendo essere in variante rispetto al nuovo gruppo, le due forme f ed f' saranno equianarmoniche coniugate: poi ogni faccia del tetraedro suddetto deve essere invariante rispetto a un determinato sottogruppo di 3° ordine: finalmente essendo questi sottogruppi costituiti di collineazioni assiali (M n.i 3 e 4), la C_5 deve essere della specie (b) descritta al n° 2. E quindi la retta che unisce il punto di contatto al punto di secamento di uno stesso piano stazionario deve essere asse di piani uniti per un sottogruppo di 3° ordine.

Dimostriamo adesso che queste condizioni sono sufficienti. In forza di esse si ha

$$f \equiv \lambda^4 + \mu^4 + 2i\sqrt{3}\lambda^2\mu^2 = 0,\ f' \equiv \lambda^4 + \mu^4 - 2i\sqrt{3}\lambda^2\mu^2 = 0$$

per cui si può prendere $a = (1 + i)(\sqrt{3} - 1)$, $b = 2$. Quanto ai fattori:

$$a'\lambda + b'\mu,\ a'\lambda - b'\mu,\ b'\lambda + a'\mu,\ b'\lambda - a'\mu$$

non si può dire altro, per ora, che debbono essere uguali, o proporzionali ai quattro

$$\alpha\lambda + 2\mu,\ \alpha\lambda - 2\mu,\ 2\lambda - \alpha\mu,\ 2\lambda + \alpha\mu$$

dove

$$\alpha = (1 - i)\ (\sqrt{3} - 1,$$

ma in quale ordine non si può dire. Per deciderlo si osservi che per ottenere sopra C_5 il gruppo binario g_{12} subordinato del G_{12}^{111}, basta aggiungere al gruppo quadrimonio binario già esistente, la sostituzione a periodo tre

$$s \equiv \left\{ \begin{matrix} i(\lambda + \mu) & \lambda - \mu \\ \lambda & \mu \end{matrix} \right\}.$$

Essa attua i seguenti trasporti (cf. anche M', n.° 5)

$$a\lambda + 2\mu \quad \text{in} \quad \frac{1 + i + \sqrt{3}(1 - i)}{2}(a\lambda - 2\mu)$$

$$a\lambda - 2\mu \quad \text{»} \quad \frac{-1 - i + \sqrt{3}(i - 1)}{2}(2\lambda - a\mu)$$

$$2\lambda - a\mu \quad \text{»} \quad \frac{-1 + i + \sqrt{3}(1 + i)}{2}(a\lambda + 2\mu)$$

$$2\lambda + a\mu \quad \text{»} \quad \frac{-1 + i + \sqrt{3}(1 + i)}{2}(2\lambda + a\mu)$$

e analogamente

$$a\lambda + 2\mu \quad \text{in} \quad \frac{1 - i + \sqrt{3}(1 + i)}{2}(2\lambda - a\mu)$$

$$2\lambda - a\mu \quad \text{»} \quad \frac{1 + i + \sqrt{3}(i - 1)}{2}(2\lambda + a\mu)$$

$$2\lambda + a\mu \quad \text{»} \quad \frac{1 + i + \sqrt{3}(i - 1)}{2}(a\lambda + 2\mu)$$

$$a\lambda - 2\mu \quad \text{»} \quad \frac{i - 1 - \sqrt{3}(1 + i)}{2}(a\lambda - 2\mu).$$

Da cui segue che, per la s, sono uniti i punti

$$2\lambda + a\mu = 0, \quad a\lambda - 2\mu = 0$$

quindi essi saranno punti di secamento e di contatto di uno stesso piano stazionario e per conseguenza vanno accoppiati. Servendosi poi delle involuzioni binarie già esistenti, si vede che gli altri vanno così accoppiati:

$$(2\lambda - a\mu = 0,\ a\lambda + 2\mu = 0);\ (a\lambda + 2\mu = 0,\ 2\lambda - a\mu = 0);$$
$$(a\lambda - 2\mu = 0,\ 2\lambda + a\mu = 0).$$

Per cui la rappresentazione definitiva di C_5 è:

$$x_1 \equiv (a\lambda + 2\mu)\ (2\lambda - a\mu)^4,$$
$$x_2 \equiv (a\lambda - 2\mu)\ (2\lambda + a\mu)^4,$$
$$x_3 \equiv (2\lambda + a\mu)\ (a\lambda - 2\mu)^4,$$
$$x_4 \equiv (2\lambda - a\mu)\ (a\lambda + 2\mu)^4.$$

Se ora si osserva che

$$\left\{ \pm \frac{1 - i + \sqrt{3}\,(1 + i)}{2} \right\}^4 = \left\{ \frac{1 + i + \sqrt{3}\,(i - 1)}{2} \right\}^4$$

si vede facilmente che il gruppo binario di 3° ordine

$$\left\{ \begin{matrix} i(\lambda + \mu) & \lambda - \mu \\ \lambda & \mu \end{matrix} \right\}^r \qquad r = 1, 2, 3$$

produce il gruppo quaternario di 3° ordine

$$\left\{ \begin{matrix} -i\,x_2 & ix_4 & x_3 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \right\}^r \ ; \quad r = 1, 2, 3$$

che trasforma C_5 in se stessa e insieme al gruppo G_4^{11}, già esistente, genera il G_{12}^{111} cercato. Vedremo al n° 16 che la C_5 è di seconda specie.

14. Passando adesso alla C_5 del N. 8 non c'è da fare altro che riportare il n.° 12 di M'. La C_5 possiede quattro piani stazionari singolari e la forma dei quattro punti di contatto sulla curva è equianarmonica. La rappresentazione parametrica è quindi:

$$x_1 \equiv (a\lambda + 2\mu)^5,$$
$$x_2 \equiv (a\lambda - 2\mu)^5,$$
$$x_3 \equiv (2\lambda + a\mu)^5,$$
$$x_4 \equiv (2\lambda - a\mu)^5,$$

dove a è quello del numero precedente e la

$$f \equiv \lambda^4 + \mu^4 + 2\,i\sqrt{3}\,\lambda^2\mu^2 = 0$$

è la forma dei punti di contatto. Il G_{12}^{111} è quello già individuato nel numero che precede. La C_5 che lo possiede è di 1ª specie (M', n° 9).

15. Riunendo i resultati dei due numeri precedenti possiamo dunque, dire:

Il solo gruppo tetraedrico che possa appartenere a curve gobbe razionali del quinto ordine è il G_{12}^{111} dotato di due rette invarianti (M n.i 3 e 4).

Esistono due curve C_5 che posseggono un tale gruppo: una di 1ª specie e l'altra di 2ª specie. La prima è caratterizzata dall'esistenza di quattro piani stazionari singolari con la ulteriore condizione che la forma dei quattro punti di contatto su C_5 sia equianarmonica. La seconda ha invece tutti distinti gli otto piani stazionari: essi si dividono in due quaterne in guisa che le forme dei punti di contatto e di secamento di una stessa quaterna (su C_5) sono equianarmoniche e dotate dello stesso covariante sestico.

16. Tralasciamo di notare le proprietà più salienti della prima delle due curve precedenti perchè ciò è fatto in M' (n.i 13, 14, 15). Piuttosto ci occuperemo ora di una particolarità notevole della seconda. Abbiamo già osservato al n.° 13 che essa appartiene alla specie (*b*) del n.° 2. Cioè ogni sottogruppo di 3° ordine individua una coppia di piani stazionari tali che il punto di contatto per l'uno è punto di secamento per l'altro, e tali due punti sono uniti sull'asse di piani uniti del sottogruppo. Ora se si pensa che i sottogruppi di 3° ordine contenuti in G_{12}^{111} sono quattro, si perviene al seguente teorema:

Gli otto piani stazionari di una C_5 di 2ª specie, dotata del gruppo tetraedrico G_{12}^{111}, si dividono in due quaterne invarianti in guisa che i punti di contatto e di secamento dell'una sono i punti di secamento e di contatto dell'altra.

Si può anche dire che tali otto piani si dividono pure in 4 coppie così che i due di una stessa coppia si scambiano fra loro punto di contatto e punto di secamento: sulle 4 coppie il G_{12}^{111} funziona manifestamente da gruppo alterno.

Finalmente ricordando che gli otto punti uniti che esistono sugli assi di piani uniti dei 4 sottogruppi di 3° ordine giacciono, a 4, a 4, sulle due rette invarianti del G_{12}^{111} (M ni 3, 4) abbiamo anche:

Gli otto punti di contatto (o di secamento) delle due quaterne suddette di piani stazionari, si trovano, a 4, a 4, sulle due rette invarianti del gruppo e sopra ciascuna costituiscono evidentemente due forme equianarmoniche.

La curva possiede dunque due quadrisecanti, quindi ne possiede infinite ed esiste sulla quadrica invariante del gruppo. Essa è dunque di 2ª specie.

17. Per completare la ricerca faremo osservare che non esistono gruppi ottaedrici, nè icosaedrici appartenenti a una C_5.

Infatti se esiste una C_5 dotata di gruppo ottaedrico, il sottogruppo alterno deve essere il G_{12}^{111} dei numeri precedenti e la C_5 non può essere certo quella che possiede quattro piani stazionari singolari, perchè la forma dei 4 punti di contatto non può essere invariante rispetto al gruppo ottaedrico binario subordinato che verrebbe a individuarsi su C_5. Quanto all'altra C_5 che possiede il G_{12}^{111} si osservi che per ottenere sulla curva

il gruppo binario ottaedrico subordinato, occorre costruire una involuzione capace di trasformare in se stessa la $\begin{pmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$ e l'una nell'altra le due:

$$\begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}.$$

Si è così condotti alla $\begin{pmatrix} -i\mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$. Ebbene essa trasporta i punti

$$a\lambda + 2\mu = 0, \quad 2\lambda - a\mu = 0$$

che sono uniti per uno *stesso* sottogruppo di 3° ordine (N. 13), nei punti $a\lambda + 2\mu = 0$, $a\lambda - 2\mu = 0$ che sono uniti per due *diversi* sottogruppi di 3° ordine. È dunque impossibile la costruzione di un gruppo ottaedrico appartenente a C_5.

Circa poi alla esistenza di un gruppo icosaedrico basta semplicemente osservare che fra i gruppi della piramide abbiamo trovato casi di C_5 che ne posseggono uno, *ma solo uno* che abbia il periodo uguale a 5 (n.° 4): ora i sottogruppi di 5° ordine di un gruppo icosaedro sono invece sei.

Non esistono dunque C_5 dotate di gruppi ottaedrici, o icosaedrici.

La ricerca è esaurita.

Colgo l'occasione attuale per correggere alcune sviste tipografiche della Nota precedente *M'*. Ecco le correzioni. L'ultima lettera della linea 7a a pag. 346 invece di essere *Q* deve essere *M;* il primo x_3 della linea successiva deve essere x_4; la indicazione del n° 16 a pag. 349 deve essere cambiata in n.° 10; il secondo x_2 della linea 19 a pag. 351 deve essere x_4; e in ultimo la *R* della linea 16 a pag. 353 deve essere cambiata in *R'*.

LE CURVE RAZIONALI DI SESTO ORDINE INVARIANTI RISPETTO A GRUPPI FINITI DI COLLINEAZIONI QUATERNARIE.

[*Rendic. Istit. Lomb. 1906*]

1. Il concetto fondamentale che mi ha servito nella presente Nota per determinare le sestiche gobbe trasformabili in se da gruppi finiti di collineazioni quaternarie è identico, nella sostanza, a quello che mi ha guidato nel risolvere lo stesso problema per le curve razionali del terzo, del quarto e del quint'ordine (1). Il gruppo quaternario che trasforma in sè la curva, individua su di essa un gruppo binario il quale, a causa della razionalità della curva stessa, presenta i soliti e ben noti casi di isomorfismo oloedrico con i gruppi della piramide regolare, della doppia piramide e dei poliedri regolari. L'esame dei casi da considerare è così ben iimitato, e con qualche appropriato espediente (volta, per volta) si giunge sempre, con facilità, alla rappresentazione parametrica della curva cercata e a quella del gruppo corrispondente. Il caso più interessante, per le sestiche, è quello del gruppo icosaedrico il quale individua una sestica invariante talmente collegata alla geometria del pentaedro, che ho stimato utile di presentarne le proprietà più notevoli nel mio studio « sul pentaedro » recentemente pubblicato nei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Citerò, fra queste proprietà (ad esempio), quella di possedere infiniti piani tritangenti formanti una sviluppabile razionale di 6ª classe intimamente collegata al pentaedro. È così realizzato un esempio (credo il primo) di sestica gobba irriducibile dotata di una semplice infinità di piani tritan-

(1) Mi permetto di richiamare qui i seguenti miei lavori in proposito;

Sopra i gruppi finiti di collineazioni quaternarie dotati di cubiche gobbe invarianti. Rendic. Circ. mat. di Palermo 1902.

Sopra alcuni gruppi lineari quaternari dotati di quartica, o di quintica gobba razionale invariante. Rendic. Istit. lomb. 1904.

Le curve gobbe razionali di quinto ordine invarianti rispetto a gruppi finiti di collineazioni quaternarie. Id. id.

genti. Passo ora ad esporre i casi rimanenti, o meglio « i principali » perchè quelli inerenti ai gruppi della piramide e della doppia piramide sono di così ovvia costruzione e di così scarso interesse che basterà accennare appena al metodo generale che serve a ottenerli.

2. *Gruppi della piramide.* — Un tale gruppo è costituito dalle potenze di una stessa collineazione quaternaria, a periodo finito, che potremo rappresentare con la sostituzione:

$$S \equiv \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^r x_2 & \alpha^s x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

dove α è radice primitiva di $x^n = 1$ ed n è il periodo. Rappresentiamo poi parametricamente una sestica razionale gobba C_6 con

$$x_k \equiv a_{6k}\lambda^6 + a_{5k}\lambda^5\mu + a_{4k}\lambda^4\mu^2 + a_{3k}\lambda^3\mu^3 +$$
$$+ a_{2k}\lambda^2\mu^4 + a_{1k}\lambda\mu^5 + a_{0k}\mu^6$$
$$k = 1, 2, 3, 4.$$

Se C_6 deve essere invariante rispetto ad S, verrà a individuarsi sulla curva una proiettività binaria di ugual periodo che potremo indicare mediante la sostituzione

$$s \equiv \begin{pmatrix} \alpha\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}.$$

Si osservi adesso che i sette termini della binaria, rappresentante x_k, si distribuiscono, rispetto alla s, in gruppi che per effetto di s si riproducono a meno di un fattore esterno che è una potenza di α. Dunque, ognuno di questi gruppi può manifestamente rappresentare una coordinata e non rimane altra difficoltà che di sceglierli in guisa che la C_6 non si spezzi. Ad es. il periodo sia uguale a 4, di guisa che sia:

$$s \equiv \begin{pmatrix} i\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}.$$

I gruppi in parola sono:

$$a_{6k}\lambda^6 + a_{2k}\lambda^2\mu^4 ; a_{5k}\lambda^5\mu + a_{1k}\lambda\mu^5 ;$$
$$a_{3k}\lambda^3\mu^3 ; a_{4k}\lambda^4\mu^2 + a_{0k}\mu^6 .$$

Quindi, fra le altre, si perviene alla seguente C_6:

$$x_1 \equiv a_{61}\lambda^6 + a_{21}\lambda^2\mu^4,$$
$$x_2 \equiv a_{52}\lambda^5\mu + a_{12}\lambda\mu^5,$$
$$x_3 \equiv a_{33}\lambda^3\mu^3,$$
$$x_4 \equiv a_{44}\lambda^4\mu^2 + a_{04}\mu^6,$$

che è invariante rispetto alla collineazione:

$$S \equiv \begin{pmatrix} -x_1 & i\,x_2 & -i\,x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

e a tutte le sue potenze.

3. *Gruppi di doppia piramide.* — Un tal gruppo si ottiene da un gruppo di piramide semplice, aggiungendo una opportuna collineazione quaternaria a periodo 2 capace di trasformare in se stesso il suddetto gruppo di piramide semplice. Sulla C_6 viene a individuarsi una nuova involuzione binaria che può rappresentarsi con la sostituzione

$$s' \equiv \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}.$$

Riferendoci alla C_6 del numero precedente si vede subito che basta sia

$$a_{61} = a_{04}\,,\; a_{21} = a_{44}\,,\; a_{52} = a_{12}$$

perchè la curva risulti invariante anche rispetto alla collineazione

$$S' \equiv \begin{pmatrix} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

e quindi rispetto al gruppo generato da S e da S' che è manifestamente del tipo della doppia piramide e di 8° ordine.

4. Fra i gruppi in parola è specialmente interessante il quadrinomio. I gruppi quadrinomi dello spazio a tre dimensioni sono di tre specie ma tutti contengono delle involuzioni gobbe (1) di guisa che conviene prendere come punto di partenza una C_6 invariante rispetto ad una involuz. gobba. Secondo le indicazioni date nel N°2 rappresentazione di una tale C_6 è della forma seguente:

$$\begin{cases} x_1 \equiv a_{61}\,\lambda^6 + a_{41}\,\lambda^4\,\mu^2 + a_{21}\,\lambda^2\,\mu^4 + a_{01}\,\mu^6 \\ x_2 \equiv a_{62}\,\lambda^6 + a_{42}\,\lambda^4\,\mu^2 + a_{22}\,\lambda^2\,\mu^4 + a_{02}\,\mu^6 \\ x_3 \equiv a_{53}\,\lambda^5\,\mu + a_{33}\,\lambda^3\,\mu^3 + a_{13}\,\lambda\,\mu^5 \\ x_4 \equiv a_{54}\,\lambda^5\,\mu + a_{34}\,\lambda^3\,\mu^3 + a_{14}\,\lambda\,\mu^6 \end{cases}$$

la involuzione binaria

$$s \equiv \begin{pmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

individua la involuzione gobba seguente:

(1) Cfr. la mia memoria: *Sopra i gruppi finiti di collineazioni quaternarie oloedricamente isoformi con quelli dei poliedri regolari.* Ann. di mat. 1902.

$$S \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

che trasforma C_6 in se stessa. Con questa rappresentazione è ovvio riconoscere che (quando i coefficienti sieno generici) uno degli assi di S è corda principale di C_6 e l'altro non la incontra, o altrimenti, in un caso particolare, la C_6 ha un punto doppio su di uno degli assi in parola e non ha punti sull'altro. Questa osservazione serve ad escludere che C_6 possa riuscire invariante rispetto al gruppo quadrinomio le cui involuzioni gobbe hanno per assi tre coppie armoniche, a due, a due, di una medesima serie rigata (è il così detto G_4^{II} della mia citata memoria). Infatti una qualunque delle involuzioni iu parola permuta fra loro gli assi di una qualunque delle due rimanenti. La supposta C_6 dovrebbe dunque comportarsi in ugual modo rispetto ad entrambi tali assi.

Rimangono a considerarsi gli altri due gruppi quadrimoni G_4^{I} e G_4^{III}, pag. 4 della cit. memoria. Consideriamoli separatamente.

5. Il G_4^{I} è composto dalla identità e da tre involuzioni gobbe di cui gli assi sono le tre coppie di spigoli opposti di uno stesso tetraedro. Assumendolo come tetraedro di riferimento, le tre involuzioni suddette si rappresentano con le sostituzioni seguenti:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & x_3 & -x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

La C_6 invariante è la seguente:

$$\begin{cases} x_1 \equiv a(\lambda^6 + \mu^6) + b(\lambda^2\mu^4 + \lambda^4\mu^2), \\ x_2 \equiv c(\lambda^6 - \mu^6) + d(\lambda^2\mu^4 - \lambda^4\mu^2), \\ x_3 \equiv e(\lambda^5\mu + \lambda\mu^5) + f\lambda^3\mu^3, \\ x_4 \equiv g(\lambda^5\mu - \lambda\mu^5), \end{cases}$$

e le involuzioni binarie, individuate su C_6 dalle involuzioni gobbe precedenti, sono ripettivamente queste:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}.$$

I tre spigoli del tetraedro fondamentale esistenti in $x_4 = 0$, sono tre corde principali della curva.

6. Il G_4^{III} è costituito dalla identità, da due omologie armoniche tali che il centro dell'una esiste sul piano fondamentale dell'altra e dalla involuzione gobba che nasce dal prodotto di tali omologie: per cui gli assi di questa involuzione sono costituiti dalla retta che unisce i centri e dalla intersezione dei piani fondamentali. L'una, o l'altra di queste rette sarà

corda della curva cercata (N° 4). Si trovano quindi due tipi di C_6 proiettivamente diverse che sono le seguenti:

$$\begin{cases} x_1 \equiv a\,(\lambda^6 + \mu^6) + b\,(\lambda^4\mu^2 + \lambda^2\mu^4), \\ x_2 \equiv a'(\lambda^6 + \mu^6) + b'(\lambda^4\mu^2 + \lambda^2\mu^4), \\ x_3 \equiv e\,(\lambda^6 - \mu^6) + d\,(\lambda^4\mu^2 - \lambda^2\mu^4), \\ x_4 \equiv e\,(\lambda^5\mu + \lambda\mu^5) + f\lambda^3\mu^3\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \equiv a\,(\lambda^5\mu + \lambda\mu^5) + b\,\lambda^3\mu^3, \\ x_2 \equiv a'(\lambda^5\mu + \lambda\mu^5) + b'\lambda^3\mu^3, \\ x_3 \equiv c\,(\lambda^5\lambda - \lambda\mu^5), \\ x_4 \equiv d\,(\lambda^6 + \mu^6) + e\,(\lambda^4\mu^2 + \lambda^2\mu^4). \end{cases}$$

Il gruppo è costituito dalla identità e dalle tre collineazioni:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & -x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

di cui le prime due sono omologie armoniche e la terza è involuzione gobba. Esse individuano sopra C_6, rispettivamente, le tre involuzioni seguenti:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

7. *Gruppo del tetraedro.* — Cerchiamo le C_6 invarianti rispetto a gruppi tetraedrici. Il sottogruppo quadrinomio sarà necessariamente un G_4^{I} (N° 4). Infatti non può essere un G_4^{II} perchè non esistono C_6 invarianti rispetto a G_4^{II} (N° 4): non può essere G_4^{III}, perchè G_4^{III} non è sottogruppo di alcun gruppo tetraedrico (cfr. la mia cit. mem. al N° 2). Riprendiamo dunque la C_6 del N° 5.

Disponendo opportunamente del punto unità, noi ne porremo la rappresentazione sotto la forma seguente:

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 \equiv \lambda^6 + \mu^6 + 15\,m\,(\lambda^2\mu^4 + \lambda^4\mu^2) \\ x_2 \equiv \lambda^6 - \mu^6 + 15\,n\,(\lambda^2\mu^4 - \lambda^4\mu^2) \\ x_3 \equiv 6\,(\lambda^5\mu + \lambda\mu^5) + 20\,p\,\lambda^3\mu^3 \\ x_4 \equiv 6\,(\lambda^5\mu - \lambda\mu^5) \end{cases}$$

allo scopo di semplificare i calcoli che seguono.

Si domanda ora: a quali condizioni deve soddisfare la precedente C_6 affinchè essa riesca invariante rispetto a un gruppo tetraedrico?

A tal fine si osservi che quando tali condizioni, qualunque esse siano, verranno soddisfatte, sarà individuato sopra C_6 un gruppo tetraedrico binario subordinato che si ottiene aggiungendo al gruppo binario quadrinomio già esistente (N° 5) la proiettività binaria definita dalla sostituzione:

$$\begin{Bmatrix} i(\lambda+\mu) & \lambda-\mu \\ \lambda & \mu \end{Bmatrix}.$$

Ebbene, perchè questa sostituzione binaria individui una collineazione quaternaria capace di trasformare la C_6 (dianzi rappresentata) in se stessa, è condizione necessaria e sufficiente che la sostituzione suddetta trasformi in sè la involuzione fondamentale (1) la quale può ritenersi definita dai tre gruppi seguenti (che sono linearmente indipendenti):

$$\lambda^4\mu^2 - \lambda^2\mu^4 - m(\lambda^6+\mu^6) = 0,$$
$$\lambda^4\mu^2 - \lambda^2\mu^4 + n(\lambda^6-\mu^6) = 0,$$
$$p(\lambda^5\mu+\lambda\mu^5) - 2\lambda^3\mu^3 = 0.$$

Per effetto della sostituzione ultima scritta essi divengono:

$$(\lambda^5\mu+\lambda\mu^5)(1+3m) + \lambda^3\mu^3(10m-2) = 0$$
$$(\lambda^4\mu^2+\lambda^2\mu^4)(1+15n) + (\lambda^6+\mu^6)(n-1) = 0$$
$$(\lambda^4\mu^2-\lambda^2\mu^4)(-3+5p) + (\lambda^6-\mu^6)(p+1) = 0.$$

Ecco dunque le condizioni cercate:

$$\begin{vmatrix} 1+3m & 10m-2 \\ p & -2 \end{vmatrix} = 0$$
$$\begin{vmatrix} 1+15n & n-1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = 0$$
$$\begin{vmatrix} -3+5p & p+1 \\ 1 & n \end{vmatrix} = 0$$

che si riducono a due sole indipendenti: Ad es. le seguenti:

$$m = \frac{p-1}{5p+3}, \quad n = \frac{p+1}{5p-3}.$$

Si può dunque dire: *La sestica rappresentata parametricamente dalle* (1) *di questo N° (dove m ed n hanno i valori precedenti) è invariante rispetto a un*

(1) MARLETTA, *Sulle curve razionali di quinto ordine.* Circ. mat. di Palermo 1905.

gruppo quaternario che non è soltanto isoformo oloedrico, ma anche proiettivamente identico, a quello delle rotazioni del tetraedro regolare.

8. *Gruppo dell'ottaedro.* — Il gruppo binario dell'ottaedro si ottiene da quello del tetraedro per l'aggiunta della sostituzione:

$$\begin{pmatrix} i\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}.$$

Occorre dunque che questa trasformi in se stessa la involuzione fondamentale. Aggiungendo le nuove condizioni che così si trovano a quelle del N° precedente, si perviene a due casi proiettivamente diversi che sono i seguenti:

$$(1)\begin{cases} x_1 \equiv \lambda^6 + \mu^6 - 5(\lambda^2\mu^4 + \lambda^4\mu^2) \\ x_2 \equiv \lambda^6 - \mu^6 + 5(\lambda^4\mu^4 - \lambda^2\mu^2) \\ x_3 \equiv \lambda^5\mu + \lambda\mu^5 \\ x_4 \equiv \lambda^5\mu - \lambda\mu^5 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} x_1 \equiv (\lambda^2 + \mu^2)^3 \\ x_2 \equiv (\lambda^2 - \mu^2)^3 \\ x_3 \equiv \lambda^3\mu^3 \\ x_4 \equiv \lambda^5\mu - \lambda\mu^5 . \end{cases}$$

9. Consideriamo separatamente queste due curve, cominciando dalla (1). Per costruire il gruppo ottaedrico che le spetta si osservi che il sottogruppo quadrimonio è quello del N° 5. Aggiungendo la sostituzione quaternaria

$$\begin{pmatrix} 16\,i\,x_3 & -4\,i\,x_1 & x_2 & 4\,x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

generata dalla binaria

$$\begin{Bmatrix} i(\lambda+\mu) & \lambda-\mu \\ \lambda & \mu \end{Bmatrix}$$

si trova il sottogruppo tetraedrico. E finalmente aggiungendo a quest'ultimo la

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_1 & -i\,x_3 & -i\,x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

generata dalla

$$\begin{pmatrix} i\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

si perviene al gruppo richiesto. L'ultima collineazione quaternaria scritta è assiale: dunque si può dire che:

La sestica (1) *del N° precedente è invariante rispetto a un gruppo che non solo è isomorfo oloedrico, ma anche proiettivamente identico al gruppo delle rotazioni dell'ottaedro regolare, o del cubo.*

Ne segue subito che la curva è priva di punti doppi.

Ciascuno dei due piani $x_3 + x_4 = 0$, $x_3 - x_4 = 0$ seca in un punto la curva e nell'altro ha contatto cinque-punto, con la ulteriore particolarità che il punto di contatto per uno è punto di secamento per l'altro. A causa della esistenza del gruppo resulta subito anche la esistenza di altre due coppie di piani analoghi ai precedenti e un calcolo semplice (che per brevità ommettiamo) dimostra che non vi sono altri piani a contatto di 4° ordine.

Attorno a questi si delinea una semplice, ma interessante configurazione, collegata alla curva nel modo espresso dalla seguente proposizione:

Esistono sei piani ognuno dei quali seca la curva in un punto e nell'altro la tocca con contatto cinque-punto. Essi si dividono in tre coppie così che quelli di ciascuna coppia si scambiano fra loro punto di contatto con punto di secamento. Le tre corde principali che ne risultano esistono in uno stesso piano che è il piano invariante del gruppo (il piano all'infinito nel caso dell'ottaedro). Se per ciascuna di queste corde si conduce il piano coniugato armonico del piano invariante, rispetto a quella coppia di piani suddetti che passano per tale corda, si trovano tre piani il cui punto comune è il punto invariante del gruppo (centro nel caso dell'ottaedro).

I punti di contatto dei sei piani sopra nominati appartengono ad una medesima conica e costituiscono tanto su di essa quanto sulla sestica tre coppie armoniche, a due, a due, ecc. ecc.

10. Consideriamo finalmente la (2) del N° 8 cioè la

$$x_1 \equiv (\lambda^2 + \mu^2)^3$$
$$x_2 \equiv (\lambda^2 - \mu^2)^3$$
$$x_3 \equiv \lambda^3 \mu^3$$
$$x_4 \equiv \lambda^5 \mu - \lambda \mu^5$$

Per costruire il gruppo relativo si assuma il solito sottogruppo quadrinomio del N° 5, si aggiunga la collineazione quaternaria:

$$\begin{pmatrix} 64\, x_3 & 8\, x_1 & i\, x_3 & -8\, i\, x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

generata dalla

$$\left\{ \begin{matrix} i(\lambda + \mu) & \lambda - \mu \\ \lambda & \mu \end{matrix} \right\}$$

e si troverà il sottogruppo tetraedrico: aggiungendo in ultimo

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_1 & i\,x_3 & -i\,x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

generata dalla

$$\begin{pmatrix} i\,\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

si troverà il gruppo cercato. L'ultima collineazione non è assiale, ma ha soli quattro punti uniti. *Dunque il gruppo in parola mentre è isomorfo oloedrico con quello delle rotazioni dell'ottaedro, ne è proiettivamente diverso: esso quindi sarà costituito dalle omografie che permutano in tutti i modi possibili 4 punti, o 4 piani, tenendone fisso un quinto* (piano e punto).

Nel gruppo esistono sei omologie armoniche: si può dunque dire che:

La curva è omologico-armonica in sei modi diversi. Ne segue che essa deve possedere dei punti doppi. Infatti essi si determinano osservando che la nostra curva è l'intersezione completa delle due superficie seguenti:

$$-x_1^2 + x_2^2 + 64\,x_3^2 + 12\,x_4^2 = 0$$

$$x_4^3 - x_1\,x_2\,x_3 = 0\,.$$

Dopo di che è ovvio constatare la esistenza dei quattro punti doppi le cui coordinate sono:

$$\begin{array}{rrrr} (8\,i\,, & 8\,, & 1\,, & -4\,i) \\ (8\,i\,, & 8\,, & -1\,, & 4\,i) \\ (8\,i\,, & -8\,, & 1\,, & 4\,i) \\ (-8\,i\,, & 8\,, & 1\,, & 4\,i)\,. \end{array}$$

Ecco quindi come può descriversi una notevole configurazione inerente a questo caso:

La nostra sestica possiede quattro punti doppi ed è invariante rispetto al gruppo ottaedrico di collineazioni che permuta in tutti i modi possibili questi quattro punti doppi tenendo fissi inoltre un punto e un piano che sono polari l'uno dell'altro rispetto al tetraedro dei punti suddetti. Se dal punto fisso si proiettano i punti doppi in parola, i tre piani diagonali del quadrispigolo che ne resulta sono tre piani biosculatori della curva: i sei punti di contatto relativi giacciono su di una conica che esiste sul piano fisso suddetto e considerati tanto sulla conica quanto sulla sestica, compongono tre coppie armoniche, a due, a due.

Politecnico di Torino
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Corso Duca degli Abruzzi, 24
10129 TORINO (ITALIA)