

PROF. EDGARDO CIANI

S C R I T T I
G E O M E T R I C I S C E L T I

VOLUME SECONDO



C E D A M

CASA EDITRICE DOTT. ANTONIO MILANI

PADOVA 1937 - XV

—
PROPRIETÀ LETTERARIA
—

Printed in Italy

Gubbio - Soc. Tipografica "Oderisi", - 1937-XV.

SCRITTI GEOMETRICI SCELTI

SOPRA LA CONFIGURAZIONE DEL PENTAEDRO

Estratto dal tomo XXI (1906) *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*.

Adunanza del 24 gennaio 1906.

Questo lavoro trae la sua origine da mie ricerche sistematiche sulle curve gobbe razionali dei primi sei ordini, che sono invarianti rispetto a gruppi finiti di collineazioni quaternarie. Una parte di queste ricerche fu già pubblicata (1): è quella che riguarda le curve dei primi cinque ordini, e fra poco lo sarà anche la rimanente che riguarda le curve del sesto. Se non che, il caso più notevole di queste ultime è così intimamente collegato alla geometria del pentaedro, che mi è parso utile di prendere le mosse da questo per ritrovare la curva in discorso, mettendola quindi a suo luogo nella configurazione pentaedrale e ponendo bene in evidenza il modo semplice e naturale che la vincola a tale configurazione (cf. n° 27). Ecco la ragione della presente memoria. La curva in discorso è invariante rispetto al gruppo icosaedrico di collineazioni che trasformano il pentaedro in sè medesimo: anzi essa e un'altra, che le è proiettivamente identica, compongono le sole due curve, fra quelle irriducibili dei primi sei ordini, che siano invarianti rispetto al gruppo in parola senza esserlo rispetto al gruppo totale delle collineazioni suddette. Tali curve posseggono ciascuna infiniti piani tritangenti formanti due sviluppabili razionali di sesta classe: è così realizzato un esempio (credo il primo) di sestiche gobbe irriducibili dotate di infiniti piani tritangenti.

(1) CIANI, *Sopra i gruppi finiti di collineazioni quaternarie dotate di cubiche gobbe invarianti* [questi Rendiconti, t. XVI (1902), pp. 327-345]. CIANI, *Sopra alcuni gruppi lineari quaternari dotati di quartica, o di quintica gobba razionale invariante* [Rend. Ist. Lombardo, s. II, vol. XXXVII (1904), pp. 341-353]; *Le curve gobbe razionali di quinto ordine invarianti rispetto a gruppi finiti di collineazioni quaternarie* [Ibid., pp. 580-598].

La configurazione del pentaedro è da lungo tempo studiata: le pubblicazioni più recenti ch'io conosca sono le dissertazioni di laurea dei sigg. Himpel e Grüttner (1) e una Nota di Geiser (2); fra le meno recenti citerò quelle di Hermes, Küppers e De Paolis (3), il quale ultimo se ne è occupato incidentalmente trattando delle superficie di 3° ordine, e infine citerò le « ricerche di Castelnuovo sulla geometria della retta in S_4 » in « Atti del R. Istit. Veneto, 1891 ». In questa Nota, a piè di pagina, sono esposte alcune geniali considerazioni analitiche sul pentaedro.

Pubblicai anch'io una Nota sul pentaedro (4) (15 anni indietro!) ma purtroppo quella Nota contiene una inesattezza: essa fu rilevata nella memoria di Grüttner, già citata, a pag. 43, ma privatamente, molto tempo innanzi, me ne aveva avvertito in forma assai cortese il prof. Segre con lettera gentile che tuttora conservo. Essa riguarda i 15 cosiddetti punti diagonali che io affermai esistere sopra una stessa quadrica: ciò non è: i ragionamenti miei di quella Nota non provano altro che *soltanto* 12 di essi esistono su di una quadrica: ne restano esclusi tre che effettivamente sono esterni a tale quadrica. Riprendendo in esame la cosa sono riuscito invece a dimostrare adesso, che i punti in questione si possono riguardare come 15 punti doppi di una superficie di 4° ordine che, naturalmente, è invariante rispetto al gruppo totale delle collineazioni pentaedrali: tale superficie non è però la più generica fra quelle conosciute dotate di 15 punti doppi, perchè la configurazione dei 6 punti singolari, in uno qualunque dei 10 piani singolari, è particolare, essendo proiettivamente identica a quella di una superficie di Kummer a 16 punti doppi e 4 volte tetraedroidale.

Fra le molte proprietà già conosciute della configurazione pentaedrale, ho scelto quelle che più convenivano al mio scopo, riprendendone la trattazione « ex novo » per cui la lettura della presente memoria è affatto indipendente dai lavori citati. Queste proprietà (più o meno conosciute) sono riunite nei primi due paragrafi e chi vuole, può facilmente ritrovarle per intero, o scoprirne le tracce nei citati lavori ed in altri. Mi lusingo in-

(1) HIMPEL, *Über die Gruppe der 120 Kollineationen, durch die ein räumliches Fünfeck in sich selbst übergeht* (Strassburg, 1903); GRÜTTNER, *Das räumliche Fünfeck* (Breslau (1903).

(2) *Die konjugierten Kernflächen des Pentaeders* [Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, L. (1905), pp. 306-320].

(3) HERMES, *Das Fünfflach und Fünfeck im Raume entsprechend dem Vierseit und Viereck in der Ebene* [Journal für die reine und angew. Mathematik, LVI (1859), pp. 247-262]. KÜPPERS, *Kollineationen, durch welche fünf gegebene Punkte des Raumes in dieselben fünf Punkte transformirt werden* (Bonn, 1890). DE PAOLIS, *Ricerche sulla superficie di 3° ordine* [Mem. R. Acc. Lincei, 1881].

(4) Rend. Acc. Lincei, 1891.

vece che sieno giudicati nuovi, se non interessanti, i risultati contenuti negli ultimi tre paragrafi. — Dovrò bene spesso citare il mio lavoro: *Sopra i gruppi finiti di collinzioni quaternarie, oloedricamente isomorfi con quelli dei poliedri regolari* [Annali di Matematica, s. III, t. VIII (1903), pp. 1-37]. Per brevità a tale scopo adoprerò il simbolo (C) con l'indicazione del n° relativo di richiamo.

§ I. — Il pentagono polare.

1. Assumerò a base della cfz. di cui mi propongo lo studio, cinque piani dello spazio a tre dimensioni in posizione affatto generica indicandoli col simbolo π_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). Essi costituiscono le facce di un pentaedro che chiamerò fondamentale. Vengono così a individuarsi anzitutto i 10 spigoli e i 10 vertici del pentaedro che verranno rappresentati con le lettere s_{ik} , V_{ik} : ad es. s_{12} sarà lo spigolo comune a π_1 π_2 e V_{12} il vertice comune a π_3 π_4 π_5 . Per cui, sopra s_{12} esistono i tre vertici V_{34} V_{35} V_{45} : per V_{12} passano s_{34} s_{35} s_{45} , ecc. Dirò che un vertice ed uno spigolo sono *opposti* quando non appartengono ad una stessa faccia del pentaedro. Così V_{12} ed s_{12} sono opposti. Il piano che essi individuano sarà chiamato *piano diagonale* del pentaedro e indicato con δ_{12} . I piani diagonali sono 10. Quattro facce qualunque del pentaedro individuano sulla faccia rimanente un quadrilatero che ha per lati quattro spigoli del pentaedro. Le diagonali di questo quadrilatero e le loro intersezioni a due a due saranno chiamate *rette diagonali* e *punti diagonali* del pentaedro. Ad es., sopra π_5 si ha il quadrilatero s_{15} s_{25} s_{35} s_{45} che ha per vertici V_{12} V_{13} V_{14} V_{23} V_{24} V_{34} . Le diagonali sue sono le rette V_{12} V_{34} , V_{13} V_{24} , V_{14} V_{23} che saranno indicate rispettivamente con i simboli $d_{12,34}$ $d_{13,24}$ $d_{14,23}$ e chiamate diagonali del pentaedro. I loro punti d'incontro, a due, a due, si chiameranno punti diagonali del pentaedro. Precisando le notazioni, sarà rappresentato col simbolo $\bar{d}_{14,23}$ il punto comune a $d_{12,34}$ $d_{13,24}$, con $D_{12,34}$ il punto comune a $\bar{d}_{14,23}$ $\bar{d}_{13,24}$ e con $D_{13,24}$ quello comune a $\bar{d}_{12,34}$ $\bar{d}_{14,23}$. Si hanno così 15 rette diagonali e 15 punti diagonali del pentaedro. Con le notazioni introdotte risultano subito le relazioni di posizione fra gli enti nominati. Ad es., siccome la diagonale $d_{12,34}$ contiene i vertici V_{12} , V_{34} così ne viene che essa può riguardarsi come la intersezione dei due piani diagonali δ_{12} , δ_{34} . Nel punto diagonale $D_{12,34}$ concorrono le rette diagonali $\bar{d}_{13,24}$ $\bar{d}_{14,23}$ e quindi anche i piani diagonali δ_{13} δ_{24} δ_{14} δ_{23} . Un piano diagonale, come δ_{12} , contiene quattro vertici e cioè V_{12} e V_{34} V_{35} V_{45} di cui i tre ultimi esistono sopra una retta: lo spigolo s_{12} . Lo stesso piano contiene le tre diagonali $\bar{d}_{12,34}$ $\bar{d}_{12,3}$ $\bar{d}_{12,45}$ e quindi anche i 6 punti diagonali seguenti: $D_{14,23}$ $D_{13,24}$ $D_{15,23}$ $D_{13,25}$ $D_{14,25}$ $D_{15,24}$, etc.

Gli elementi principali del pentaedro fondamentale sono così introdotti e cioè: le 5 facce, i 10 spigoli, i 10 vertici, i 10 piani diagonali, le 15 rette diagonali e i 15 punti diagonali.

2. Sopra ogni spigolo del pentaedro esistono tre vertici. Se si considerano i due punti che compongono l'hessiano di quei tre vertici su quello spigolo, si ottengono in tutto 20 punti che saranno chiamati i 20 *punti hessiani* del pentaedro. Ebbene: vale adesso il seguente teorema:

I venti punti hessiani esistono su di una medesima quadrica.

Infatti: esistono intanto su di una stessa conica gli otto punti hessiani che appartengono ad una stessa faccia del pentaedro. È la cosiddetta conica invariante del quadrilatero formato su quella faccia dagli spigoli del pentaedro. È chiamata conica invariante, perchè è tale rispetto al gruppo ottaedrico di collineazioni piane che trasforma il quadrilatero in sè stesso (1). Si hanno così cinque coniche ognuna contenente otto dei punti in discorso. Consideriamo ora tre facce, le tre coniche relative e i tre spigoli intersezioni delle facce suddette a due, a due. È chiaro che due qualunque di tali coniche incontrano lo spigolo comune alle facce, su cui esistono, nei due medesimi punti: dunque tali tre coniche appartengono ad una stessa quadrica la quale viene così a contenere 18 dei punti in questione. I due rimanenti esistono sullo spigolo opposto al vertice comune alle tre facce dianzi considerate: dunque essi appartengono a entrambe le due coniche invarianti esistenti sulle due facce che passano per tale spigolo: ognuna di queste coniche ha dunque sei punti in comune con la quadrica precedente e quindi le appartiene per intero. Il teorema è dimostrato. Esso può anche enunciarsi affermando, che le cinque coniche invarianti delle cinque facce appartengono ad una stessa quadrica. Per una ragione che apparirà nel n° successivo, questa quadrica sarà chiamata la *quadrica invariante* del pentaedro.

Ebbene, tutta la cfz. pentaedrale ora descritta, individua la sua polare reciproca rispetto alla quadrica suddetta. Si perviene così a un pentagono polare che ha 5 vertici, 10 spigoli, 10 facce, 10 punti diagonali, 15 rette diagonali, 15 piani diagonali che sono elementi polari del pentaedro. Questi elementi saranno rispettivamente indicati con i simboli $P'_i, s'_{ik}, \varphi'_{ik}, D'_{ik}, r'_{ik,lm}, \Delta'_{ik,lm}$.

(1) Altri la chiama la *conica dei 14 punti* del quadrilatero perchè oltre gli otto punti hessiani, contiene altri 6 punti notevoli, due su ciascuna diagonale, e precisamente i due che compongono la coppia armonica ai vertici del quadrilatero e ai vertici del trilatero diagonale su quella diagonale.

§ II. — Il gruppo delle 120 collineazioni che trasforma in sè stessa tutta la configurazione.

3. Una permutazione qualunque sulle 5 faccie del pentaedro, individua una collineazione che trasforma tutta la cfz. in sè stessa. Queste collineazioni sono 120 e compongono un gruppo G_{120} che è oloedricamente isomorfo col gruppo totale su cinque elementi. La quadrica del n° precedente è evidentemente invariante rispetto alle collineazioni del gruppo ed è anche chiaro che non ve ne possono essere altre, perchè se una quadrica è invariante rispetto al gruppo nominato, è anche tale rispetto al sottogruppo che tiene ferma una faccia qualunque e permuta in tutti i modi possibili le altre quattro; il che significa, che se una quadrica è invariante rispetto a G_{120} , essa deve contenere le cinque coniche invarianti delle facce e quindi è unica. È poi certo che essa non è un cono perchè il vertice sarebbe un punto invariante rispetto a G_{120} ciò che è impossibile.

È necessario adesso enumerare e classificare, dal punto di vista proiettivo, tutti i possibili sottogruppi del G_{120} totale. È a segnalarsi subito, fra tutti, il sottogruppo alterno, che sarà indicato con G_{60} , e che è un gruppo icosaedrico. Ciascuna permutazione, sulle facce del pentaedro, immagineremo decomposta in cicli: mediante questi, la rappresenteremo e sarà così anche rappresentata la collineazione che essa individua. Se non che, per maggiore semplicità, tralascieremo i simboli π e scriveremo addirittura i cicli sui cinque numeri 1, 2, 3, 4, 5. Così, ad es., (123) indicherà la permutazione circolare $(\pi_1 \pi_2 \pi_3)$; (123). (45) indicherà il prodotto dei due cicli $(\pi_1 \pi_2 \pi_3) \cdot (\pi_4 \pi_5)$, etc.

4. Cominciamo dai gruppi di 2° ordine cioè dalle collineazioni a periodo due. Ne abbiamo di due tipi e cioè: (12) e (12). (45). Le prime sono 10 omologie armoniche: le seconde sono 15 involuzioni gobbe.

I centri e i piani fondamentali delle 10 omologie armoniche, sono i vertici del pentaedro e le facce (polari) del pentagono.

Gli assi delle 15 involuzioni gobbe, sono invece le 15 diagonali del pentaedro e le 15 diagonali del pentagono (polari reciproche le une delle altre).

La polarità è naturalmente sottintesa rispetto alla quadrica invariante.

Risultano subito delle ovvie proprietà di posizione che collegano il pentaedro al pentagono. Ad es.: Ogni faccia del pentagono passa per un determinato spigolo del pentaedro e ogni vertice del pentaedro esiste su di un determinato spigolo del pentagono, ecc.

5. Passiamo ai sottogruppi di 3° ordine cioè alle collineazioni a periodo tre. Il tipo è unico cioè $(123)^m$, $m = 1, 2, 3$. Ne esistono 10. Sono

dunque 10 G_3 , cioè 20 collineazioni a periodo 3. Esse sono assiali: non biassiali. Si può anche dire:

Gli assi di punti uniti e gli assi di piani uniti delle collineazioni a periodo tre, sono gli spigoli del pentaedro e gli spigoli del pentagono: i punti uniti sull'asse di piani uniti sono i punti hessiani e dualmente, etc.

6. I sottogruppi G_4 di 4° ordine sono dei tre tipi seguenti:

$$\begin{aligned} & (1\ 2\ 3\ 4)^m, \quad m = 1, 2, 3, 4 \\ & (1\ 2) \cdot (3\ 4), \quad (1\ 3) \cdot (2\ 4), \quad (1\ 4) \cdot (2\ 3), \quad \text{identità} \\ & (1\ 2), \quad (3\ 4), \quad (1\ 2) \cdot (3\ 4), \quad \text{identità.} \end{aligned}$$

Se ne hanno 15 di ciascuna specie: 45 in tutto. Di ciascuno possiede almeno un punto e un piano invariante vertice del pentagono e faccia del pentaedro.

Un G_4 del 1° tipo è composto dalle varie potenze di una stessa collineazione a periodo 4 la quale non può essere nè assiale, nè biassiale: infatti se possedesse una retta di punti uniti, per il punto d'incontro di tale retta con π_1 passerebbero anche $\pi_2\ \pi_3\ \pi_4$ e il pentaedro non sarebbe più generico (così anche se la retta in questione esistesse in π_1 , per essa passerebbero $\pi_2\ \pi_3\ \pi_4$ onde, etc.). Si può dunque dire: ogni collineazione a periodo 4 del G_{120} possiede 4 soli punti uniti e quattro soli piani uniti vertici e facce di uno stesso tetraedro.

Quanto agli altri G_4 essi realizzano due delle tre specie di gruppi quadrinomi dello spazio a tre dimensioni (*C* pag. 4). L'una è costituita dalla identità e da tre involuzioni gobbe i cui assi sono gli spigoli di uno stesso tetraedro: l'altra è composta dalla identità, da due omologie armoniche (tali che il centro dell'una esiste sul piano fondamentale dell'altra) e dalla involuzione gobba che ne è il prodotto.

7. Lasciamo per ora in disparte i sottogruppi il cui ordine è un multiplo di cinque: proseguendo nel nostro esame troviamo tre tipi di G_6 e cioè

$$\begin{aligned} & (1\ 2); \quad (1\ 3); \quad (2\ 3); \quad (1\ 2\ 3)^m \\ & (1\ 2) \cdot (4\ 5); \quad (1\ 3) \cdot (4\ 5); \quad (2\ 3) \cdot (4\ 5); \quad (1\ 2\ 3)^m \left. \vphantom{\begin{matrix} (1\ 2); \\ (1\ 2\ 3)^m \end{matrix}} \right\} (m = 1, 2, 3,) \\ & [(1\ 2\ 3) \cdot (4\ 5)]^n \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5, 6). \end{aligned}$$

Se ne hanno 10 di ogni specie. Quelli della 1ª specie posseggono due punti e due piani invarianti (vertici del pentagono e facce del pentaedro). Gli altri hanno soltanto due rette invarianti (spigoli del pentaedro e del pentagono).

8. Per costruire un sottogruppo di ottavo ordine basta osservare che (per il teorema di Sylow) esso deve ammettere almeno un sottogruppo di 4° ordine che sarà dunque di una delle tre specie descritte al n° 6, di

guisa che possiamo sempre supporre che quest'ultimo, a sua volta, contenga almeno una involuzione gobba: sia questa la $(1\ 2) \cdot (3\ 4)$ e π_5 la faccia invariante del pentaedro. Dico che se il costruendo G_8 deve contenere un altro G_4 , quest'ultimo deve ammettere π_5 per piano invariante. Infatti se fosse ad es. π_1 tale piano invariante, il G_4 , ultimo nominato, dovrebbe contenere una almeno delle tre involuzioni seguenti:

$$(3\ 5) \cdot (2\ 4), \quad (3\ 4) \cdot (2\ 5), \quad (2\ 3) \cdot (5\ 4);$$

ma allora il prodotto di $(1\ 2) \cdot (3\ 4)$ per una qualunque delle tre involuzioni precedenti, darebbe luogo a una sostituzione a periodo 3, o 5, che dovrebbe far parte del costruendo G_8 , il che è impossibile. Si è così condotti a un solo dipo di G_8 che è il seguente:

$$(1\ 2) \cdot (3\ 4), \quad (1\ 3) \cdot (2\ 4), \quad (1\ 4) \cdot (2\ 3)$$

$$(1\ 2), \quad (3\ 4), \quad (1\ 3\ 2\ 4)^m \quad (m = 1, 2, 3, 4).$$

Esso possiede due piani invarianti cioè π_5 e $\Delta'_{12,34}$ e due punti invarianti $P'_5, D_{12,14}$.

I sottogruppi G_8 sono dunque 15 e di una sola specie.

9. Passiamo ai sottogruppi di ordine 12. Un G_{12} contiene almeno un G_4 rispetto al quale sarà invariante una faccia del pentaedro (n° 6). Se questa faccia è invariante per tutto il G_{12} , si perviene ad un gruppo che è, non soltanto isomorfo oloedrico, ma anche proiettivamente identico al gruppo delle rotazioni del tetraedro. Se poi la faccia in questione non è invariante rispetto al costruendo G_{12} , si perviene al seguente tipo:

$$(1\ 2) \cdot (3\ 4), \quad (1\ 2) \cdot (3\ 5), \quad (1\ 2) \cdot (4\ 5), \quad (3\ 4\ 5)^m \quad (m=1,2,3),$$

$$(3\ 4), \quad (3\ 5), \quad (4\ 5), \quad [(1\ 2) \cdot (3\ 4\ 5)]^n \quad (n=1,2,3,4,5,6),$$

che possiede manifestamente due rette invarianti spigoli del pentaedro e del pentagono.

Esistono dunque 15 sottogruppi di 12° ordine, dei quali 5 sono tetraedrici.

10. Finalmente si vede subito che esistono cinque sottogruppi di 24° ordine. Ciascun d'essi tiene fissi una faccia del pentaedro e un vertice del pentagono e permuta in tutti i modi possibili le 4 facce rimanenti del primo e i 4 vertici del secondo. Questi cinque sottogruppi sono isomorfi oloedrici col gruppo delle rotazioni dell'ottaedro, ma ne sono proiettivamente diversi (C n° 5): basta a tale scopo osservare che essi contengono delle collineazioni a periodo 4, che non sono assiali (n° 6), mentre tutte le rotazioni sono collineazioni assiali.

11. Rimangono a considerare i sottogruppi il cui ordine è un multiplo di 5. Cominciando dai G_5 , si vede che ne esistono sei, tutti proiet-

tivamente identici. Uno qualunque di essi si compone con le potenze di una stessa collineazione a periodo 5. Il tipo è il seguente $(12345)^m$ con $m = 1, 2, 3, 4, 5$. Lo stesso ragionamento fatto per i G_4 ($n^\circ 6$) prova che ogni G_5 ha 4 soli punti uniti e 4 soli piani uniti vertici e facce di un medesimo tetraedro.

Se un sottogruppo di G_{120} contiene due G_5 esso è necessariamente il G_{60} . Infatti, due G_5 si possono sempre intendere come le successive potenze delle due collineazioni

$$M \equiv (1\ 2\ 3\ 4\ 5), \quad N \equiv (1\ 2\ 3\ 5\ 4).$$

Ora si vede subito che la M non trasforma N in una potenza di N : segue che M trasforma successivamente il G_5 che contiene N , negli altri G_5 del G_{120} : questo prova intanto che nel sottogruppo supposto esistono tutti i G_5 . Si ha inoltre:

$$\begin{aligned} (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \cdot (1\ 5\ 2\ 4\ 3) &= (1\ 4\ 2), \\ (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \cdot (1\ 5\ 3\ 2\ 4) &= (1\ 4\ 3). \end{aligned}$$

Dunque il sottogruppo in parola, contenendo $(1\ 4\ 2)$, $(1\ 4\ 3)$ conterrà anche il G_{12} che esse individuano e quindi l'ordine cercato, essendo multiplo di 5 e di 12, sarà 60. È così dimostrata l'affermazione fatta. Ne segue che « i 24 punti uniti dei sei G_5 sono tutti distinti » perchè se due coincidessero esisterebbe un punto invariante rispetto a due G_5 e quindi (per l'osservazione fatta sopra) rispetto all'intero G_{60} , mentre il G_{60} attuale, funzionando da gruppo alterno sopra le cinque facce del pentaedro e sopra le cinque facce del pentagono, non possiede nè piani, nè punti invarianti.

12. Un gruppo di 10° ordine conterrà un G_5 e cinque collineazioni a periodo due che trasformano il G_5 in sè stesso. Si vede facilmente che tali collineazioni non possono essere omologie armoniche e si perviene ad un solo tipo di G_{10} che è il seguente:

$$\begin{aligned} & (1\ 2\ 3\ 4\ 5)^m && (m = 1, 2, 3, 4, 5), \\ (1\ 2).(3\ 5), & (2\ 3).(4\ 1), & (3\ 4).(5\ 2) \\ (4\ 5).(1\ 3), & (5\ 1).(2\ 4). \end{aligned}$$

Dunque esistono 6 G_{10} . È indispensabile considerare un pò più da vicino la struttura proiettiva di un G_{10} . Sieno A, B, C, D i punti uniti del sottogruppo G_5 . Dico che niuno di essi può essere unito per alcuna delle cinque involuzioni gobbe del G_{10} . Infatti se A fosse unito per una, lo sarebbe per tutte, perchè G_{10} si può generare aggiungendo al G_5 una delle cinque involuzioni gobbe esterne. Consideriamo le due: $(1\ 2).(3\ 5)$, $(2\ 3).(4\ 1)$ di cui gli assi sono rispettivamente ($n^\circ 4$) le due coppie di rette:

$(d_{12,35}, d'_{12,35}), (d_{23,41}, d'_{23,41})$. Il punto A sarebbe dunque comune a $d_{12,35}, d_{23,41}$ (oppure a $d'_{12,35}, d'_{23,41}$). Nella 1^a ipotesi esisterebbero in un piano i punti $V_{12}, V_{35}, V_{23}, V_{41}$ e quindi anche le rette $V_{12} V_{14}, V_{35} V_{23}$ che sono gli spigoli $s_{35} s_{14}$: dunque le 4 facce $\pi_3 \pi_5 \pi_1 \pi_4$ avrebbero un punto comune e il pentaedro non sarebbe più generico. Dualmente si vede che A non può esistere sopra $d'_{12,35} d'_{23,41}$. Dunque le rette $d_{12,35} d'_{12,35}$ non passano per alcuno dei punti A, B, C, D . Ma d'altra parte esse costituiscono gli assi di una involuzione gobba che trasforma il tetraedro $ABCD$ in sè stesso, dunque tali rette si appoggeranno a due spigoli opposti del tetraedro suddetto. Pensando poi che G_5 permuta circolarmente le cinque involuzioni gobbe in discorso si conclude che « i loro assi si appoggiano tutti alla stessa coppia di spigoli opposti »: indicandoli con AB, CD , si può dire che essi compongono i soli spigoli di $ABCD$ invarianti rispetto a G_{10} ; o in altre parole che G_{10} è intransitivo riguardo ad AB, CD .

13. Un G_{20} deve contenere un G_5 ; ma non più di uno altrimenti (n° 11) si cade nel G_{60} : conterrà poi le cinque involuzioni gobbe che trasformano G_5 in sè stesso e quindi anche il G_{10} del n° precedente: le collineazioni rimanenti saranno a periodo 4 e trasformeranno G_{10} in sè medesimo. Si è così condotti ad un unico tipo che è il seguente:

$$\begin{array}{ccc} (1\ 2\ 3\ 4\ 5)^m & & (m = 1, 2, 3, 4, 5) \\ (1\ 5\ 2\ 3)^n, & (2\ 1\ 3\ 4)^n, & (3\ 2\ 4\ 5)^n \\ (4\ 3\ 5\ 1)_n, & (5\ 4\ 1\ 2)^n & (n = 1, 2, 3, 4). \end{array}$$

Esistono dunque 6 G_{20} (1). Niuno dei punti A, B, C, D può essere unito per alcuna delle precedenti collineazioni a periodo 4, altrimenti esso sarebbe unito anche per il quadrato di tale collineazione che è una involuzione gobba del G_{10} (n° prec.). E nemmeno può, una qualsiasi delle suddette collineazioni a periodo 4, effettuare dei cicli a periodo due sopra i 4 punti A, B, C, D altrimenti, al solito, il quadrato della collineazione li possiede come punti uniti: dunque essa attuerà sopra i detti punti il ciclo di 4° ordine $(ACBD)^m$ (per $m = 1, 2, 3, 4$) che appunto ha per quadrato $(AB).(CD)$.

Siccome poi il G_{20} è sottogruppo di G_{120} che opera transitivamente sopra i G_5 , così si trae:

Il G_{120} è transitivo sopra i 24 punti uniti dei sei G_5 e li divide in due sistemi d'imprimitività composti di 12 ciascuno: quelli analoghi ad AB in un sistema, quelli analoghi a CD nell'altro. Invece il G_{60} , contenendo i G_{10} , ma non i G_{20} , è transitivo sopra i punti di uno qualunque

(1) Questi sottogruppi sono stati omessi nella citata memoria di HIMPEL.

dei due sistemi suddetti, ma intransitivo dall'uno all'altro sistema. (Ad es. niuna collineazione del G_{60} può portare AB in CD).

14. La quadrica invariante passa per A, B, C, D .

Infatti: uno spigolo qualsiasi del tetraedro $ABCD$ è unito rispetto al G_5 : viene dunque a stabilirsi su di esso una proiezione binaria (subordinata) a periodo 5 che ha per punti uniti i due vertici del tetraedro esistenti su quello spigolo: dunque, o tale spigolo taglia la quadrica invariante nei due vertici, o le appartiene per intero. Siccome poi G_{120} è transitivo sopra i 24 punti uniti in questione (n° 13), così ne viene che la quadrica invariante li contiene tutti. Tornando al tetraedro $ABCD$, si può aggiungere che la quadrica suddetta passa per gli spigoli AC, AD, BC, BD e quindi non passa per AB nè per CD . Infatti il piano tangente in A è unito rispetto al G_5 e quindi deve coincidere con una delle facce del tetraedro e inoltre le rette della quadrica passanti per A , debbono essere due dei tre spigoli AB, AC, AD . Sieno AB, AC : applicando una delle collineazioni a periodo 4 del G_{20} che effettua il ciclo $(ABCD)$ (n° 13) tali rette divengono CD, CB . Ma allora la quadrica contiene le rette AB, AC, BC , il che è impossibile. Analogamente si vede che le rette in questione non possono essere AB, AD [basta servirsi di $(ABCD)$]. Dunque saranno le AC, AD : e quindi anche le BD, BC appartengono alla quadrica.

Consideriamo invece la superficie diagonale di Clebsch inerente al nostro pentaedro: essa è certamente l'unica superficie cubica invariante rispetto al G_{120} (basta a tal fine osservare che tale superficie passa per le 15 diagonali del pentaedro medesimo). La retta AB è invariante rispetto a G_{10} (n° 12), dunque essa, o appartiene per intero alla superficie in parola, ovvero le intersezioni sono assorbite dai punti A, B e quindi due da uno, e una dall'altro: ma questo è impossibile perchè le involuzioni gobbe del G_{10} scambiano A con B . Dunque la superficie in questione passa per AB e quindi anche per CD e per tutte le rette analoghe: segue anche che la superficie non passa per $AC, AD: BC, BD$. Si può dunque dire:

Le sei coppie di rette invarianti dei sei sottogruppi di 10° ordine, compongono quella bisestupla della superficie diagonale di Clebsch che si ottiene escludendo dalle 27 rette della superficie, le 15 diagonali del pentaedro. E anche:

Tanto la quadrica invariante, quanto la superficie diagonale di Clebsch passano per i 24 punti uniti dei sei sottogruppi di 5° ordine: inoltre l'una delle due superficie contiene quelle rette unite di tali gruppi che non sono contenute dalla seconda.

15. L'esame dei possibili sottogruppi di G_{120} è esaurito. Infatti non

esistono nè G_{15} nè G_{30} perchè essi dovrebbero contenere uno ed uno solo G_5 (n° 11) e inoltre almeno un G_3 capace di trasformare il G_5 in sè stesso, ciò che è impossibile. Infine non esistono G_{40} : perchè un tale gruppo dovrebbe contenere uno ed uno solo G_5 (n° 11) e almeno un G_8 : se si considera che il G_8 ammette una faccia del pentaedro come piano invariante (n° 8) ne segue che applicando il G_5 al G_8 si trovano cinque G_8 tutti differenti. Per cui il G_{40} supposto dovrebbe contenere tutte le 15 involuzioni gobbe con le quali si genera invece G_{60} .

§ III. — La configurazione dei punti e piani diagonali del pentaedro.

16. Nel n° 1 abbiamo già osservato, che per un punto diagonale del pentaedro passano 4 piani diagonali del pentaedro stesso e che in un piano diagonale esistono 6 punti diagonali. Così per $D_{ik, nm}$ passano δ_{im} δ_{in} δ_{km} δ_{kn} e in δ_{mn} esistono $D_{mi, nk}$ $D_{mk, ni}$ $D_{mi, nl}$ $D_{ml, ni}$ $D_{mk, nl}$ $D_{ml, nk}$. Ci proponiamo lo studio di questa cfz. La prima proprietà è quella già avvertita:

I 15 punti diagonali e i 10 piani diagonali del pentaedro sono distribuiti nello spazio in guisa che per ogni punto diagonale passano 4 piani diagonali e in ogni piano diagonale esistono sei punti diagonali. Adoperando un simbolo già in uso, si può dire che essi compongono una $(16_4, 10_6)$. La cfz. è manifestamente reale se lo è il pentaedro.

Nel piano δ_{mn} oltre i 6 punti già nominati: $D_{mi, nk}$ $D_{mk, ni}$ $D_{mi, nl}$ $D_{ml, ni}$ $D_{mk, nl}$ $D_{ml, nk}$ esistono anche i quattro vertici seguenti del pentaedro

$$V_{mn}, \quad V_{ik}, \quad V_{il}, \quad V_{ik},$$

di cui gli ultimi tre giacciono sullo spigolo S_{mn} .

Or bene le 4 omologie armoniche dello spazio

$$(m n), \quad (i k), \quad (i l), \quad (k l)$$

individuano sopra δ_{mn} quattro omologie armoniche piane che trasformano in sè stessa la figura dei 6 punti diagonali suddetti. Dunque essi appartengono ad una stessa conica e su di essa si distribuiscono in 4 diverse involuzioni.

Si può dunque dire:

I sei punti diagonali, che esistono in uno stesso piano diagonale del pentaedro, appartengono ad una stessa conica e compongono una figura proiettivamente identica a quella dei sei punti singolari in un piano singolare di una superficie di Kummer quattro volte tetraedroidale (1).

(1) ROHN, *Einige specielle Fälle der KUMMER' schen Fläche* [Berichte der k. sachs. Gesellschaft der Wissensch., Mai 1884].

17. Tutto dunque induce a ritenere che i 15 punti in questione si possano riguardare come punti doppi di una superficie di 4° ordine. Quanto tale induzione sia fondata risulta dai semplici calcoli seguenti. Proponiamoci di cercare la superficie di 4° ordine invariante rispetto a G_{120} : se la superficie in questione esiste, dovrà esser scelta fra di esse. A tale scopo assumiamo per tetraedro fondamentale quello formato da $\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4$ e prendiamo π_5 per piano unità. Allora le superficie di 4° ordine invarianti, rispetto al G_{24} che lascia invariato π_5 , sono le seguenti:

$$a \sum_1^4 X_i^4 + b \sum_1^4 X_i^3 X_k + c \sum_1^4 X_i^2 \sum_k^2 + d \sum_1^4 X_i^2 X_k X_l + e X_1 X_2 X_3 X_4 = 0$$

qualunque siano a, b, c, d, e . Se inoltre si esige la invarianza rispetto alla omologia armonica (15) sarà come esigerla rispetto all'intero G_{120} .

Si perviene così al fascio seguente:

$$\alpha \left(\sum_1^4 X_i^4 + 2 \sum_1^4 X_i^3 X_k + 3 \sum_1^4 X_i^2 X_k^2 \right) + 3 \beta \sum_1^4 X_i^4 X_k X_l + (9 \beta - 6 \alpha) X_1 X_2 X_3 X_4 = 0$$

dove $\frac{\alpha}{\beta}$ è il parametro del fascio. Vi appartengono naturalmente la quadrica invariante contata come doppia ($\alpha = 1, \beta = \frac{4}{3}$) e la hessiana della superficie diagonale di Clebsch ($\alpha = 0$). Intanto, di passaggio si può osservare che:

Le superficie di 4° ordine invarianti rispetto al G_{120} totale, costituiscono un fascio e si toccano tutte lungo una curva di 8° ordine.

Ebbene, per trovare la superficie cercata basta semplicemente esigere il passaggio per un punto diagonale del pentaedro. Infatti sia S la superficie del fascio che passa per $D_{12,34}$. Consideriamo il gruppo quadrinomio costituito dalla identità e dalle tre involuzioni gobbe (1 2).(3 4), (1 3).(4 2), (1 4).(2 3). Gli assi delle tre involuzioni costituiscono gli spigoli di un tetraedro (n° 6) che ha per i vertici i punti

$$P'_5, D_{12,34}, D_{13,24}, D_{14,23}.$$

Ora le tre involuzioni suddette individuano sulle tre facce del tetraedro che passano per $D_{12,34}$, tre omologie armoniche piane che debbono trasformare in sè stesse le sezioni di quei piani con S . Ma quest'ultima passa per $D_{12,34}$, dunque tutte le rette tirate per quel punto ed esistenti in uno qualsiasi dei tre piani suddetti, incontrano S in due punti riuniti in $D_{12,34}$ e ciò basta per affermare che $D_{12,34}$ è doppio per S . Siccome poi G_{120}

è transitivo sui 15 punti $D_{ik,mn}$, così segue che tutti tali punti sono doppi per S ed essa è la superficie cercata. Per scriverne l'equazione basterà dunque esigere il semplice passaggio per un punto $D_{ik,mn}$: ad es. per $D_{15,23}$ che ha per coordinate (-1110) .

L'equazione è dedotta da quella del fascio per $\alpha = 1$, $\beta = \frac{8}{6}$: essa è la seguente

$$\sum_1^4 X_i^4 + 2 \sum_1^4 X_i^3 X_k + 3 \sum_1^4 X_i^2 X_k^2 + 8 \sum_1^4 X_i^2 X_k X_l + 18 X_1 X_2 X_3 X_4 = 0.$$

Non rimane che assicurarsi della irriduttibilità di S . Il che risulta immediatamente pensando alla sua invarianza rispetto a G_{120} . Così se di S fa parte un piano dovrebbero farne parte cinque piani. Se S si decomponesse in due quadriche, ciascuna sarebbe invariante rispetto a tutti i G_3 e quindi passerebbe per i 20 punti hessiani (n° 2): le due quadriche coinciderebbero: la S sarebbe ridotta alla quadrica invariante contata due volte: ciò è impossibile perchè sono diversi i valori di $\frac{\alpha}{\beta}$ che individuano S e la quadrica doppia. Dunque:

I 15 punti diagonali del pentaedro si possono riguardare come i 15 punti doppi di una superficie irriduttibile di 4° ordine invariante rispetto a G_{120} totale. I dieci piani singolari della superficie sono i dieci piani diagonali del pentaedro.

Però la superficie in discorso non è la superficie quartica generica a 15 punti doppi: per convincersene basta pensare quanto è particolare la cfz. dei 6 punti singolari in un piano singolare (1).

È però proprietà comune anche alla superficie generica, ad es., le seguente, che noi esprimeremo riferendola ai punti diagonali del pentaedro:

I 15 punti diagonali del pentaedro esistono, a sei, a sei, sopra 10 coniche, le quali, a loro volta, appartengono, a 4, a 4, a 10 quadriche così che ciascuna di queste ultime taglia la superficie S nel sistema delle 4 coniche suddette (2).

È invece una proprietà particolare della nostra superficie S l'altra:

(1) Sono ben note le superficie quartiche di KUMMER con 16 punti doppi e più volte tetraedroidali (una, due, tre, quattro, sei volte). Cfr. ROHN, loc. cit. e SEGRE, *Sur un cas particulier de la surface de KUMMER* in *Berichte der k. sächs. Gesellschaften der Wissenschaften*, Mai 1884. Ecco ora un esempio di superficie quartiche, ma con soli 15 punti doppi, che (in riguardo alla figura dei 6 punti singolari in un piano singolare) potrebbe dirsi 4 volte tetraedroidale. Esisteranno anche gli altri casi analoghi a quelli sopra citati?

(2) Cfr. ad es. la memoria premiata di ROHN sull'argomento.

I quattro piani che contengono le quattro coniche esistenti su di una qualunque delle quadriche precedenti, passano per uno stesso punto che è un vertice del pentaedro.

Una tale quaterna di piani è ad es: δ_{12} , δ_{34} , δ_{15} , δ_{25} , i quali passano manifestamente per V_{34} .

Per cui, sempre nel caso della superficie S , può anche dirsi che:

I dieci piani singolari passano, a 4, a 4, per i 15 punti singolari e per i 5 vertici del pentaedro.

Riprendiamo la quaterna di piani diagonali:

$$\delta_{12} \delta_{34} \delta_{15} \delta_{25} .$$

Essi contengono complessivamente 12 punti diagonali che esistono su di una delle quadriche dianzi nominate. I tre che rimangono esclusi sono

$$D_{12,34} \quad D_{15,34} \quad D_{25,34}$$

che essendo uniti per l'omologia armonica (34) esisteranno sopra φ'_{34} . Quindi si ha che:

Ogni faccia del pentagono contiene tre punti diagonali del pentaedro: i 12 punti diagonali rimanenti appartengono ad una stessa quadrica.

Gli stessi 4 piani δ_{12} δ_{34} δ_{15} δ_{25} individuano un angoloide tetraedro col vertice in V_{34} sulle cui costole giacciono, a due, a due, i 12 punti in discorso, dunque i piani diagonali di questo angoloide conteranno ciascun 4 dei suddetti punti diagonali. Per cui segue che

I 15 punti diagonali del pentaedro esistono anche, a 4, a 4, sopra 30 piani, ciascuno dei quali quindi viene a tagliare la nostra superficie S in due coniche distinte, ecc. ecc.

§ IV. — Considerazioni sopra le curve invarianti rispetto al G_{120} e al G_{60} .

18. Ci proponiamo di determinare quali sono le curve irriducibili dei primi sei ordini invarianti rispetto a G_{120} . Si escludono le curve piane perchè G_{120} non possiede piani invarianti. Si escludono poi immediatamente le curve gobbe dei primi cinque ordini pensando che, dovendo essere invarianti rispetto alle 10 omologie armoniche del gruppo, dovrebbero esistere sopra 10 coni quadrici coi vertici nei vertici del pentaedro. Sicchè l'ordine non può essere minore di 6. Una sestica invariante, rispetto a G_{120} deve essere tale anche rispetto a un sottogruppo G_5 : quindi una faccia qualunque del tetraedro unito di tale G_5 deve tagliarla in un gruppo di 6 punti invariante rispetto al G_5 : segue che la curva supposta passa per uno almeno dei vertici del tetraedro suddetto. Ma G_{120} è transitivo sopra i 24 punti uniti dei 6 G_5 (n° 13), dunque la curva supposta li contiene tutti e 24 e quindi esiste sulla quadrica invariante e sulla

superficie diagonale di CLEBSCH (n° 14) costituendone la intersezione completa. Questa intersezione è irriduttibile. Infatti non può farne parte nè una quartica, nè una quintica perchè abbiamo già osservato che non esistono nè quartiche, nè quintiche invarianti rispetto a G_{120} . Non può spezzarsi in due cubiche gobbe perchè ciascuna sarebbe invariante rispetto ai G_5 con i quali si può generare il G_{60} (n° 11). Ora il G_{60} icosaedrico dotato di due cubiche gobbe invarianti, non è certo l'attuale sottogruppo del G_{120} (C n° 12). Nemmeno può, la sestica in discorso, spezzarsi in tre coniche perchè non esiste un sistema invariante di tre piani rispetto a G_{120} . Quindi non rimane altro da escludere che la sestica suddetta possa comporsi di sei rette semplici, o di tre rette doppie. Ciò risulta subito osservando che esse dovrebbero comporre un insieme invariante rispetto a un qualunque G_5 e quindi una almeno dovrebbe essere invariante rispetto a tale G_5 . Applicando a tale retta il G_{20} che contiene quel G_5 , si perverrebbe a due rette facenti parte della sestica in questione (n° 13) e finalmente applicando il G_{120} perverremmo a 12 rette costituenti la curva suddetta. Dunque:

Fra le curve irriducibili dei primi sei ordini ne esiste una ed una sola invariante rispetto al G_{120} totale: essa è la sestica di genere 4 intersezione completa della quadrica invariante con la superficie diagonale di CLEBSCH.

È facile vedere che le 24 tangenti-secanti della curva sono le 24 rette unite dei G_5 che esistono sulla quadrica invariante, che i piani uniti di tali G_5 sono osculatori-tangenti, ecc.

19. Proponiamoci di risolvere la stessa questione del n° precedente ma limitandola al sottogruppo alterno G_{60} . Si domanda dunque: quali saranno le curve irriducibili dei primi sei ordini che godano invarianza rispetto a G_{60} ma non rispetto a G_{120} ? Le curve piane si escludono subito perchè G_{60} non possiede piani invarianti. Si escludono anche subito quelle razionali dei primi cinque ordini, perchè la ricerca è già esaurita nei miei lavori citati in principio. La esclusione delle quartiche ellittiche si ottiene immediatamente osservando che dovrebbero comporre una figura invariante i vertici dei coni quadrici che le contengono (il che è manifestamente impossibile). Il seguente ragionamento serve ad escludere ogni e qualsiasi quintica. Se una tal curva è invariante rispetto a G_{60} lo è anche rispetto a ogni G_5 . Segue che un piano qualunque passante per l'asse di piani uniti di tale G_5 (n° 5) la taglia in un gruppo invariante di cinque punti: dunque due almeno sono uniti rispetto a G_5 ed esistono sull'asse suddetto. Ora un qualunque G_{12} del G_{60} è proiettivamente identico alle rotazioni del tetraedro (n° 9), dunque il piano invariante di tale G_{12} contenendo i 4 assi di piani uniti dei 4 G_3 del gruppo, incontra la curva in otto punti.

20. Passiamo alle sestiche. Indichiamo con C_6 una sestica irriduttibile invariante rispetto a G_{60} , ma non a G_{120} , ed esaminiamo a quali condizioni C_6 deve in conseguenza essere sottoposta. Se si applica a C_6 il ragionamento analogo fatto per le sestiche al n° 18, sostituendo però il G_{60} al G_{120} , si vede subito che C_6 passa per i vertici dell'uno, o dell'altro, dei due dodecagoni intransitivi rispetto a G_{60} costituiti dai 24 punti uniti dei sei G_5 (n° 13). Dico « dell'uno, o dell'altro » perchè è certo che se C_6 passasse per i vertici di entrambi i dodecagoni, essa sarebbe la completa intersezione della quadrica invariante con la superficie diagonale di CLEBSCH e quindi riuscirebbe invariante non solo rispetto a G_{60} , ma anche a G_{120} (n° 18). Seguendo le notazioni del n° 13, siano A e B i due vertici del tetraedro $ABCD$ per cui passa C_6 . Nè A nè B possono esser doppi per C_6 altrimenti essa avrebbe 12 punti doppi e si spezzerebbe. Dunque la tangente in C_6 , dovendo essere invariante rispetto al G_5 , sarà uno spigolo del tetraedro $ABCD$ passante per A . Dico che essa non può coincidere nè con AC , nè con AD . Infatti: coincida con AC . A causa delle involuzioni gobbe che attuano gli scambi $(AB).(CD)$ (n° 12) segue che BD sarà la tangente a C_6 in B . Ma la quadrica invariante passa per AC , AD , BC , BD (n° 14) dunque C_6 ha in comune con la quadrica due intersezioni in A , due in B e in tutto 24 intersezioni nei 12 vertici del dodecagono dianzi nominato (al quale appartengono A e B) e in conclusione C_6 esiste sulla quadrica in discorso. Quindi le intersezioni del piano ACD con C_6 debbono esistere sulle rette AC , AD . Ora si noti, come sopra abbiamo già osservato, che nè C nè D appartengono a C_6 : d'altra parte il punto A non può contare per più di una intersezione di AD con C_6 perchè la tangente in A è AC e non AD e finalmente se AD avesse a comune con C_6 un punto diverso da A , o D , ne avrebbe in comune cinque a causa della proiettività binaria che G_5 stabilisce sopra AD , e AD avrebbe a comune con C_6 sei punti il che è impossibile. Dunque i 6 punti d'incontro di C_6 col piano ACD esisteranno tutti sopra AC il che è ugualmente assurdo. Questo dimostra l'affermazione fatta. In modo uguale si vede che la tangente a C_6 in A non può essere AD . Dunque essa sarà la AB : anzi a causa delle solite involuzioni gobbe che attuano gli scambi $(AB).(CD)$, la retta AB sarà bitangente a C_6 in A e B e la C_6 invece di esistere sulla quadrica invariante esisterà sulla superficie diagonale di CLEBSCH (n° 14). La C_6 possiede dunque sei bitangenti che sono le 6 rette analoghe ad AB . Allora i fasci di piani che hanno per assi queste bitangenti, segnano su C_6 delle involuzioni razionali di 2° ordine (le cosiddette g'_2) e basterà dimostrare che due di queste g'_2 hanno una coppia comune per essere certi

che la C_6 (se pure esiste) deve essere razionale. A tal fine consideriamo i due G_{10} che contengono i seguenti G_5

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5)^m, \quad (1\ 2\ 5\ 4\ 3)^m \quad (m = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Appartiene a entrambi i G_{10} suddetti la involuzione gobba

$$(1\ 2).(3\ 5).$$

Quindi, se indichiamo con AB , $A'B'$ gli spigoli dei tetraedri uniti (dei G_5 precedenti) che sono bitangenti a C_6 e con h e k gli assi delle involuzioni dianzi nominate, le rette h e k si appoggeranno tanto ad AB , quanto ad $A'B'$. Ora è facile osservare che una di queste due rette h , k è corda di C_6 e precisamente quella delle due che è diagonale del pentaedro (n° 4). A tale scopo si tagli la C_6 con un piano diagonale del pentaedro il quale a sua volta taglia la superficie di CLEBSCH secondo tre diagonali del pentaedro medesimo. Siccome C_6 esiste sulla superficie suddetta, così i 6 punti d'incontro del piano diagonale con la curva esisteranno sulle diagonali nominate e precisamente due su ciascuna, perchè G_{120} opera transitivamente sopra le sue involuzioni gobbe. Se dunque h è corda di C_6 i punti di appoggio costituiscono la coppia comune alle g'_2 segnate dai fasci di piani che hanno per assi AB e $A'B'$. Si può anche osservare, di passaggio, che i punti in cui h si appoggia a C_6 non possono essere coincidenti altrimenti la g'_2 segnata dal fascio di piani di asse AB (e quella di $A'B'$) avrebbe un punto doppio diverso da A, B .

Possiamo dunque concludere:

Se una curva irriducibile di ordine non superiore a sei deve essere invariante rispetto a G_{60} (ma non a G_{120}), essa non può essere altro che una sestica sghemba razionale.

§ 5. — La sestica gobba dotata di infiniti piani tritangenti.

21. Dimostreremo adesso che G_{60} individua effettivamente due sestiche razionali (proiettivamente identiche) invarianti rispetto ad esso, ma non invarianti rispetto a G_{120} .

A tale scopo assumiamo per tetraedro fondamentale il tetraedro $ABCD$ dei n° precedenti. Il G_{60} , di cui esso è tetraedro unito, potrà rappresentarsi con le varie potenze della sostituzione S seguente:

$$S \equiv \begin{pmatrix} x_1 & \alpha x_2 & \alpha^2 x_3 & \alpha^4 x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

dove α è radice immaginaria di $x^5 = 1$. Seguitiamo a indicare con C_6 la curva cercata. A causa della sua razionalità (n° 20) ogni collineazione del

G_{60} individua, su C_6 , una proiettività binaria subordinata di egual periodo: indicando con s quella subordinata a S e con $\frac{\lambda}{\mu}$ il parametro che figura nelle coordinate di un punto mobile di C_6 , potremo assumere s sotto la forma:

$$s \equiv \begin{pmatrix} a\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}.$$

Esigendo che C_6 sia bitangente ad AB in A e B [$AB \equiv (x_3 = 0, x_4 = 0)$] e che la S trasformi C_6 in sè stessa si perviene alla seguente rappresentazione parametrica di C_6

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 \equiv 6m\lambda^5\mu + n\mu^6, \\ x_2 \equiv p\lambda^6 + 6r\lambda\mu^5, \\ x_3 \equiv 3\lambda^2\mu^4, \\ x_4 \equiv 3\lambda^4\mu^2, \end{cases}$$

dove m, n, p, r sono costanti qualunque e i coefficienti 6 e 3 sono stati messi per comodità dei calcoli che seguono. Ora, per ottenere il G_{10} dal G_5 precedente, basta aggiungere una involuzione gobba che attui gli scambi $(AB), (CD)$ n° 12. Assumiamo la seguente

$$U \equiv \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Questa deve individuare su C_6 una involuzione binaria u capace di trasformare in sè stesso il gruppo binario g_5 : ecco dunque la u :

$$u \equiv \begin{pmatrix} -\mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}.$$

Esigendo adesso che U trasformi C_6 in sè stessa, la rappresentazione parametrica (1) si riduce alla seguente

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 \equiv 6\lambda^5\mu + k\mu^6, \\ x_2 \equiv k\lambda^6 - 6\lambda\mu^5, \\ x_3 \equiv 3\lambda^2\mu^4, \\ x_4 \equiv 3\lambda^4\mu^2, \end{cases}$$

dove k è una costante qualsiasi. Ora si osservi che il G_{60} deve individuare, su C_6 , un g_{60} binario che può ritenersi generato dalle sostituzioni u ed s precedenti e dalla seguente sostituzione t (1):

$$t \equiv \left\{ \begin{array}{cc} q\lambda + \mu & \lambda - q\mu \\ \lambda & \mu \end{array} \right\} \quad q = \alpha^2 + \alpha^5.$$

(1) Cfr. ad es. BIANCHI, *Teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo GALOIS* (Sporri, 1899).

Affinchè la t individui una collineazione T capace di trasformare C_6 in sè stessa è necessario e sufficiente [secondo un notevole teorema di MARLETTA (1)] che t trasformi in sè stessa la involuzione fondamentale su C_6 che è:

$$(3) \quad a(\lambda^6 + k\lambda\mu^5) + b(\mu^6 - k\lambda^5\mu) + c\lambda^3\mu^3 = 0,$$

dove $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ sono i parametri relativi.

Per trovare la nostra C_6 , tutto dunque si riduce ad esigere che i tre gruppi (della involuzione suddetta)

$$\lambda^3\mu^3 = 0, \quad \lambda^6 + k\lambda\mu^5 = 0, \quad \mu^6 - k\lambda^5\mu = 0$$

sieno trasformati in altri tre gruppi della stessa (3).

Si perviene in tale modo all'unica condizione $k = 3$ e quindi si arriva alla definitiva rappresentazione parametrica che individua la curva C_6 cercata:

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 \equiv 2\lambda^5\mu + \mu^6, \\ x_2 \equiv \lambda^6 - 2\lambda\mu^5, \\ x_3 \equiv \lambda^2\mu^4, \\ x_4 \equiv \lambda^4\mu^2. \end{cases}$$

22. Essa è irriduttibile. Per dimostrarlo osserveremo prima che se n rette compongono un insieme invariante rispetto a G_{60} deve essere $n > 4$. Infatti basta semplicemente considerare la invarianza rispetto a un sottogruppo tetraedrico ($n^\circ 9$) per convincersi che $n > 2$ e se $n = 3$, o $n = 4$ le rette relative debbono passare per un punto, od esistere in un piano che sono, rispettivamente, vertice del pentagono e faccia del pentaedro, e siccome questi ultimi non sono certamente invarianti rispetto a G_{60} , così non lo sono nemmeno i suddetti sistemi di 3, o 4 rette. Per cui $n \geq 5$. Resulta quindi che C_6 non può comporsi di tre rette doppie e nemmeno di r rette e di una curva residua di ordine $6 - r$ per $r \leq 4$. Non rimane altro caso che C_6 si componga di 6 rette. Ma allora una è unita per un G_5 ed essendo G_{60} transitivo sui G_5 , ciascuna è unita per un G_5 . Dovrebbe dunque uno spigolo del tetraedro fondamentale far parte di C_6 il che, la rappresentazione parametrica trovata, esclude ben facilmente.

23. Cerchiamo la collineazione T del G_{60} che ha per subordinata la proiettività binaria t del $n^\circ 21$.

Basta perciò osservare che la faccia x_1 del tetraedro fondamentale taglia C_6 in

(1) MARLETTA, *Sulle curve razionali del quinto ordine* [questi Rendiconti, t. XIX (1905), pp. 94-119].

$$2 \lambda^5 \mu + \mu^6 = 0,$$

la quale, per effetto della t , viene trasformata in

$$5 q^5 \lambda q [(\lambda^6 - 2 \lambda \mu^5) - (\mu^6 + 2 \lambda^5 \mu)] + 5 q^2 \lambda^2 \mu^4 + 5 \lambda^4 \mu^2,$$

ossia, per le (4), in

$$5 q^2 [q(-x_1 + x_2) + 5 q^2 x_3 + 5 x_4];$$

analogamente si vede che x_2, x_3, x_4 vengono trasformate rispettivamente in

$$5 q^2 [q(x_1 - x_2) + 5 x_3 + 5 q^2 x_4],$$

$$q^2 [q^3 x_1 + x_2 + 5 q(x_3 - x_4)],$$

$$q^2 [x_1 + q^2 x_2 + 5 q(-x_3 + x_4)].$$

Sono punti uniti per U e T

$$A \equiv (5, 5, 1, 1); B \equiv (-5, -5, 1, 1)$$

Dunque la sostituzione T cercata è della forma seguente:

$$T \equiv \begin{cases} x_1 & \text{trasformato in } \alpha \cdot 5 [q(-x_1 + x_2) + 5 q^2 x_3 + 5 x_4], \\ x_2 & \text{» } \beta \cdot 5 [q(x_1 - x_2) + 5 x_3 + 5 q^2 x_4], \\ x_3 & \text{» } \gamma \cdot [q^2 x_1 + x_2 + 5 q(x_3 - x_4)], \\ x_4 & \text{» } \delta \cdot [x_1 + q^2 x_2 + 5 q(-x_3 + x_4)], \end{cases}$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono coefficienti di proporzionalità che si determinano osservando che si ha $ut = tu$ e quindi anche $UT = TU$ e inoltre $T^2 = 1$, il che richiede $\alpha = \beta = \gamma = \delta$. Si può dunque prendere $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ e la T è perfettamente individuata. Essa insieme alle U, S del n° 21 genera il G_{60} il quale viene così ad essere riferito al tetraedro unito di un G_5 .

24. Servendosi sempre dello stesso tetraedro, le equazioni della quadrica invariante e della superficie diagonale di Clebsch assumono le seguenti semplicissime forme:

$$x_1 x_2 + 25 x_3 x_4 = 0,$$

$$x_1^2 x_4 + x_2^2 x_3 - 5(x_2 x_4^2 + x_1 x_3^2) = 0.$$

Esse possono servire per completare la rappresentazione del G_{20} che ha per sottogruppo il G_{10} generato dalle U, S del n° 21. A tale scopo basta aggiungere al G_{10} una collineazione H per la quale si abbia

$$H^2 = U, \quad H^{-1} G_5 H = G_5$$

e tale inoltre da trasformare in sè stesse le superficie rappresentate dalle due equazioni precedenti. Si trova così

$$H \equiv \begin{pmatrix} 25 x_3 & 25 x_4 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Ora se si applica la H alla C_6 del n° 21 si perviene a quest'altra curva :

$$(5) \quad \begin{cases} x_1 \equiv 25 \lambda^2 \mu^4, \\ x_2 \equiv 25 \lambda^4 \mu^2, \\ x_3 \equiv \lambda^6 - 2 \lambda \mu^5, \\ x_4 \equiv 2 \lambda^5 \mu + \mu^6. \end{cases}$$

Ne concludiamo che :

Fra le curve irriducibili dei primi sei ordini ne esistono soltanto due invarianti rispetto a G_{60} , ma non rispetto a G_{120} . Esse sono due sestiche razionali proiettivamente identiche rappresentate parametricamente dalle (4) del n° 21 e dalle (5) di questo n°.

Resulta così che le collineazioni del G_{120} che operano una sostituzione pari sulle facce del pentaedro, trasformano in sè ciascuna delle due curve suddette, invece quelle collineazioni del G_{120} che operano una sostituzione dispari sulle facce suddette, trasformano le due curve l'una nell'altra.

25. Siccome esse, dal punto di vista proiettivo, costituiscono una sola specie, noi le riuniremo sotto il nome di « *sestica razionale invariante rispetto al G_{60}* ». L'epiteto razionale è indispensabile per non confondere la curva attuale, con la sestica di genere 4 che essendo invariante col G_{120} , lo è anche naturalmente col G_{60} (è la intersezione della quadrica invariante con la superficie diagonale di Clebsch n° 18).

Abbiamo già notato che C_6 è bitangente ad AB e quindi ad altre cinque rette analoghe a AB . Dunque :

La sestica razionale invariante rispetto a G_{60} possiede sei bitangenti le quali compongono una delle due sestuple che si ottengono togliendo dalle 27 rette della superficie di Clebsch le 15 diagonali del pentaedro.

Vi ha di più : un calcolo estremamente semplice dimostra che C_6 possiede infiniti piani tritangenti.

Infatti, se si cercano i punti d'incontro di C_6 con il piano

$$l^2 m^4 x_1 + l^1 m^2 x_2 + (l^6 + 2 l m^5) x_3 + (m^6 - 2 l^5 m) x_4 = 0,$$

si trova sempre il seguente quadrato perfetto

$$\{ l^2 m \lambda^3 + m^3 \lambda^2 \mu - l^3 \lambda \mu^2 + l m^2 \mu^3 \}^2 = 0$$

qualunque sia $\frac{l}{m}$, e questo prova l'affermazione fatta. Si può aggiungere

anzi, che il piano tritangente assume una ∞^1 di posizioni generando la sviluppabile razionale di 6^a classe seguente:

$$(6) \quad \begin{cases} u_1 \equiv l^2 m^4, \\ u_2 \equiv l^4 m^2, \\ u_3 \equiv l^6 + 2 l m^5, \\ u_4 \equiv m^6 - 2 l^5 m, \end{cases}$$

dove $\frac{l}{m}$ è il parametro.

Dunque: *La sestica razionale invariante di G_{60} possiede infiniti piani tritangenti costituenti una sviluppabile razionale di 6^a classe.*

È questo il primo esempio di sestica gobba dotata di ∞^1 piani tritangenti a meno del caso ovvio di C_6 esistenti su di un corso quadrico.

Si può anche osservare che *il piano di due tangenti della nostra curva ne contiene necessariamente una terza.* Infatti: la sezione di un piano qualsiasi

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4 = 0$$

con C_6 è data da

$$(7) \quad \alpha(2\lambda^5\mu + \mu^6) + \beta(\lambda^6 - 2\lambda\mu^5) + \gamma\lambda^2\mu^4 + \delta\lambda^4\mu^2 = 0;$$

ma se tale piano contiene due bitangenti, l'equazione della sezione deve essere della forma:

$$(8) \quad (\lambda - a\mu)(\lambda - b\mu)(c\lambda^2 + d\lambda\mu + e\mu^2)^2 = 0;$$

e la nostra affermazione è dimostrata se si prova che $a = b$. Ora confrontando la (7) con la (8) si giunge necessariamente alle seguenti condizioni:

$$(9) \quad \frac{2cd - c^2(a + b)}{e^2 ab} = 2,$$

$$(10) \quad \frac{2de - e^2(a + b)}{c^2} = -2,$$

$$(11) \quad 2cdab - (a + b)(d^2 + 2ce) + 2de = 0.$$

Dalle (9) e (10) si ricava:

$$a + b = 2 \frac{cde + c^2e^2}{c^2de + e^4}, \quad ab = \frac{e^2cd - c^4}{c^2de + e^4},$$

per cui a e b sono radici della equazione

$$(12) \quad (c^2de + e^4)z^2 - 2(cde + c^2e^2)z + e^2cd - c^4 = 0;$$

d'altra parte, sostituendo in (11) i valori trovati per $a + b$, ab si trova

$$ce(c^2d^2e^2 + 2c^3e^3 + cd^4e + c^5d - de^5) = 0,$$

la quale (esclusi i casi ovvii di $c, d = 0$) esprime proprio che le radici della (12) debbono essere uguali e questo dimostra l'osservazione fatta. —

Ne segue:

La sviluppabile tritangente contata tre volte e l'insieme dei sei fasci di piani che hanno per assi le sei bitangenti della nostra curva, stanno a rappresentare la sviluppabile bitangente del caso generico di una sestica razionale. (Infatti una sestica razionale generica ha la sviluppabile bitangente di classe 24).

26. Come G_{60} possiede due sole sestiche razionali invarianti, così anche ammetterà due sole sviluppabili razionali invarianti di sesta classe, le quali dunque necessariamente saranno le due sviluppabili tritangenti delle due curve suddette e anche le loro polari reciproche rispetto alla quadrica invariante. Un facile calcolo dimostra che avviene fra le due curve una specie di scambio espresso dal seguente teorema:

Le due sestiche razionali invarianti di un medesimo G_{60} sono così collegate che la sviluppabile tritangente dell'una curva è la polare reciproca dell'altra rispetto alla quadrica invariante.

27. Facili osservazioni su queste 2 curve sono innumerevoli. Ad es.: esse si possono riguardare come la intersezione completa della superficie diagonale di CLEBSCH con la superficie quartica seguente:

$$4(x_1^3x_3 + x_2^3x_4) + 100(x_1x_4^3 + x_2x_3^3) - (x_1^2x_2^2 + 5^4x_3^2x_4^2) - 110x_1x_2x_3x_4 = 0.$$

La rappresentazione piana della superficie di CLEBSCH ci dice che le due curve hanno 20 punti comuni: essi esistono, a due, a due, sopra gli assi di punti uniti dei G_3 , cioè sugli spigoli del pentagono, etc.

In ultimo, consideriamo un qualsiasi sottogruppo quadrinomio di G_{60} : ad es. quello le cui involuzioni gobbe hanno per assi $(d_{12,34} d'_{12,34})$, $(d_{13,42} d'_{13,42})$, $(d_{14,23} d'_{14,23})$ componenti gli spigoli di un tetraedro che ha un vertice in P'_5 (dove concorrono le d') e per faccia opposta π_5 (dove esistono le d). Ora i punti di appoggio di queste ultime con C_6 compongono le tre coppie di punti doppi delle involuzioni binarie, su C_6 , subordinate delle involuzioni gobbe precedenti. Abbiamo dunque il teorema:

Ogni faccia del pentaedro taglia la nostra curva in tre coppie di punti armoniche, a due, a due.

Oppure anche:

Se si considerano le tre involuzioni appartenenti ad uno stesso gruppo quadrinomio binario su C_6 (subordinato dell'analogo gruppo quaternario di G_{60}) e si costruiscono i punti doppi di queste involuzioni, si trovano sei punti di C_6 in un medesimo piano. Ripetendo la costruzione per tutti e

cinque i sottogruppi quadrimomi si ottengono cinque piani che sono le facce del pentaedro.

È forse questo il modo più efficace per esprimere il legame geometrico che collega la nostra curva alla cfz. del pentaedro e come tale lo presentiamo qui a modo di conclusione.

SOPRA LE SESTICHE GOBBE DOTATE DI INFINITI PIANI TRITANGENTI.

Estratto del tomo XXII (1906) dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*.

Adunanza del 22 luglio 1906.

1. Una sestica gobba generica possiede un numero finito di piani tritangenti. Però si conoscono esempi di sestiche, che pure essendo irriducibili, ne posseggono un numero infinito. Il caso più ovvio è fornito dalla curva d'intersezione di un cono quadrico con una superficie cubica non passante per il vertice del cono. Evidentemente ogni piano tangente al cono è tritangente alla curva. Un esempio più interessante si presenta nello studio della configurazione del pentaedro. È noto infatti che esistono due sestiche razionali irriducibili invarianti rispetto al sottogruppo alterno delle collineazioni che trasformano il pentaedro in sè stesso e ognuna di queste sestiche possiede come si sa infiniti piani tritangenti (1). Queste due curve costituiscono, dal punto di vista proiettivo, una sola specie che noi, per brevità, indicheremo col nome di *sestica del pentaedro*. Ebbene, altri esempi di sestiche con infiniti piani tritangenti non si conoscono. Sorge quindi spontanea la questione di esaminare se altri esempi possano esistere. Chi scrive presume di risolvere negativamente tale questione mediante le considerazioni seguenti.

2. Abbiasi dunque una sestica C_6 irriducibile dotata di infiniti piani tritangenti. Escludiamo per ipotesi il caso ovvio in cui essa esista su di un cono quadrico. Ci proponiamo di dimostrare che la C_6 deve essere la sestica del pentaedro.

Faremo la dimostrazione per gradi.

Anzitutto è manifesto che i piani tritangenti in questione non possono costituire una doppia infinità, altrimenti per un punto generico dello

(1) Cfr. la mia memoria: *Sopra la configurazione del pentaedro* [questi Rendiconti, tomo XXI (1906), pp. 322-341].

spazio ne passerebbe una semplice infinità: una proiezione piana della C_6 da quel punto ammetterebbe ∞^1 tritangenti. Dunque la infinità dei piani tritangenti supposti sarà semplice, cioè essi costituiranno una sviluppabile che indicheremo con S . Questa sviluppabile non può essere evidentemente di 1^a classe e per ipotesi non è di seconda. Vedremo in seguito (n° 3) che deve essere di sesta. È anche manifesto che le generatrici di S debbono necessariamente essere trisecanti di C_6 , per cui si potrà dire che deve esistere una rigata di trisecanti che è sviluppabile: è la sviluppabile tritangente S . Ma ancora non si può affermare che questa sviluppabile esaurisca per intero la rigata delle trisecanti. Però anche questo risulterà in seguito (n° 4). Segue intanto che la C_6 non può esistere su di una quadrica altrimenti quest'ultima, contenendo le trisecanti, sarebbe un cono il che è contro l'ipotesi. Così anche il fatto accertato che i tre punti di contatto di un piano tritangente devono essere in linea retta, esclude che tutte le tangenti di C_6 sieno delle tangenti-secanti (dato anche che possano esistere delle sestiche sghembe irriduttibili con infinite tangenti-secanti).

3. L'ultima osservazione ci dice che niuna delle trisecanti C_6 tirate da un suo punto generico P , sarà tangente a C_6 e quindi la proiezione piana di C_6 da P , sarà una curva di 5° ordine che avrà tanti tacnodi quante sono le generatrici di S passanti per P , od altrimenti quanti sono i piani tritangenti passanti per P . E siccome il numero massimo di tali tacnodi è tre, così ne segue che tre è il numero massimo di piani tritangenti che si possono tirare da P . Vogliamo dimostrare che questi piani tritangenti sono proprio tre. A tal fine si osservi, anzitutto, che niuno dei suddetti piani può essere osculatore in P a C_6 , altrimenti un tale piano sarebbe stazionario in P , e P non sarebbe più punto generico di C_6 . Ciò premesso, si può dire che ciascuno dei piani in parola non può contare per più di due, perchè se contasse per tre, o per più di tre, esso sarebbe osculatore in P a C_6 . Sono dunque da esaminare i 2 casi seguenti: per il punto P passa un solo piano di S , ovvero ne passano due distinti. Il 1° caso è da escludere subito perchè il piano in parola contando al più per due, la classe di S sarebbe uno, o due. Nel 2° caso la C_6 è linea multipla per S e quindi la classe di S è almeno 4, ma non può essere maggiore di 4, perchè ciascuno dei due piani tritangenti che passano per S conta al massimo per due: inoltre C_6 è linea doppia per S . Per accertare la impossibilità di questo, basta osservare dualmente che una sviluppabile irriduttibile di 6^a classe non può mai far parte della sviluppabile bitangente di una curva gobba di 4° ordine. Dunque effettivamente per P passano tre piani tritangenti distinti e non più. Segue che la proiezione di C_6 da P è del 5° ordine e possiede tre tacnodi, ossia è razionale: quindi anche C_6 è razionale. Le sei trise-

canti che passano per un punto generico di una sestica razionale generica si riducono nel caso attuale a tre sole distinte: in altre parole esse sono, a due, a due, infinitamente vicine e costituiscono le tre generatrici di S che passano per ogni punto di C_6 . Di qui si trae anche che S è di sesta classe. Infatti per determinare la classe di S basta enumerare i piani S passanti per un punto dello spazio, osservando che se il punto è sopra S il piano di S che vi passa deve esser contato almeno due volte nella enumerazione suddetta. Ora i ragionamenti precedenti provano che C_6 è linea tripla per S , quindi ciascuno dei tre piani che passano per P , punto generico di C_6 , deve esser contato almeno due volte, ma niuno di essi può contarsi più di due volte, altrimenti C_6 farebbe parte dello spigolo di regresso di S , ciò che abbiamo già osservato essere impossibile.

4. Le considerazioni del n° precedente servono anche ad escludere che la C_6 possieda dei punti multipli. Infatti sia M un punto doppio di C_6 e P il solito punto generico della stessa curva. Il cono che da M proietta C_6 è costituito da trisecanti e non da quadrisecanti altrimenti tale cono è quadrico contro l'ipotesi. Quindi la generatrice MP non incontra ulteriormente C_6 . Inoltre il piano individuato da M e dalla tangente a C_6 in P , non può toccare altrove C_6 se no la proiezione di C_6 da M avrebbe infinite bitangenti e d'altra parte il medesimo piano non può essere stazionario in P perchè P è generico. Affinchè dunque tale piano riuscisse tritangente a C_6 bisognerebbe che M assorbisse 4 punti d'intersezione e quindi che la tangente in P , si appoggiasse alle tangenti nodali se M fosse un nodo, alla tangente cuspidale se M fosse una cuspidale, ipotesi tutte da scartarsi perchè, al solito, P è generico. In conclusione la retta PM deve riguardarsi come trisecante ma non come generatrice di S . Ebbene i ragionamenti del n° precedente dimostrano che per P passano tre generatrici distinte di S : ora abbiamo veduto che niuna di queste generatrici può essere costituita dalla PM , quindi la proiezione di C_6 da P , oltre i tre tacodi provenienti dalle generatrici in parola, avrà anche un punto doppio proveniente dalla PM . Questo è manifestamente impossibile.

Il ragionamento si applica anche al caso in cui M sia triplo. Se poi M fosse quadruplo, la C_6 esisterebbe su di un cono quadrico: il cono che la proietta da M .

Le considerazioni di questi due n° provano anche che la sviluppabile tritangente S deve esaurire per intero la rigata delle trisecanti.

5. Essendo C_6 razionale e senza punti multipli noi conosciamo i seguenti numeri di CAYLEY: $m = 6$, $H = \beta = 0$, $h = 10$. Vogliamo dimostrare che è $\gamma = 18$. Infatti si osservi che nel piano di due tangenti distinte ve ne è sempre una 3^a. (Perchè, una tangente t generica di C_6 si

appoggia alle 6 tangenti che provengono dal considerare le tre generatrici di S che passano per il punto di contatto di t). D'altra parte t non può incontrare altre tangenti di C_6 , essendo in generale $2(n-3)$ il numero delle tangenti di una curva razionale d'ordine n che incontrano una tangente generica della stessa curva. Da tale osservazione segue che la S esaurisce tutti i piani che sono bitangenti a C_6 in punti aventi tangenti distinte. La classe di S è sei (n° 4) ogni piano di S essendo tritangente va contato tre volte, dunque, secondo le notazioni di CAYLEY, si ha $y=18$. Allora dalle formule relative si trae $\omega=6$, cioè la curva possiede 6 bitangenti: esse quindi stanno a rappresentare, nel caso attuale, le sei quadrisecanti che possiede in generale una sestica razionale. Ebbene sia t una di queste bitangenti: essa individua un fascio di piani che segna, su C_6 , una involuzione di cui indicheremo con M ed N i punti doppi. I piani tM , tN sono tritangenti, dunque (n° 2) i relativi punti di contatto, su ciascuno, saranno in linea retta: ciò esige che M ed N sieno infinitamente vicini ai punti di contatto di t e che i piani in parola sieno stazionari in essi. Rimane da escludere che la suddetta involuzione possa degenerare (il che accadrebbe, ad esempio, se i punti di contatto di t coincidessero), ma allora la t funzionerebbe da cinquesecante: le quadrisecanti sarebbero più di sei, chè la sola t ne assorbirebbe più di una; la C_6 ammetterebbe dunque infinite quadrisecanti, fra cui almeno una cinquesecante, e quindi esisterebbe su di una quadrica che sarebbe un cono (n° 2) il che è contro la ipotesi.

6. Ricorriamo adesso alla rappresentazione parametrica di C_6 il che è lecito perchè C_6 è razionale (n° 3). Assumiamo per punti (1000) e (0100) i punti di contatto di una bitangente t e per piani $x_3=0$, $x_4=0$ i due piani stazionari passanti per t , secondo quanto è stabilito nel n° precedente. La rappresentazione di C_6 sarà dunque dalla forma seguente:

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv a_1\lambda^5\mu + b_1\lambda^4\mu^2 + c_1\lambda^3\mu^3 + d_1\lambda^2\mu^4 + e_1\lambda\mu^5 + f_1\mu^6, \\ x_2 &\equiv a_2\lambda^6 + b_2\lambda^5\mu + c_2\lambda^4\mu^2 + d_2\lambda^3\mu^3 + e_2\lambda^2\mu^4 + f_2\lambda\mu^5, \\ x_3 &\equiv a_3\lambda^2\mu^4, \\ x_4 &\equiv a_4\lambda^4\mu^2, \end{aligned}$$

dove $\frac{\lambda}{\mu}$ è il parametro e i punti $\lambda=0$, $\mu=0$ sono collocati nei punti di contatto di t . I piani $x_1=0$, $x_2=0$ sono assoggettati all'unica condizione di passare per i punti $\mu=0$, $\lambda=0$ rispettivamente. Ebbene fissiamoli in guisa che essi coincidano rispettivamente con i piani segnenti:

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + \beta x_3 + \gamma x_4 &= 0, \\ \alpha' x_2 + \beta' x_3 + \gamma' x_4 &= 0, \end{aligned}$$

dove sia

$$\begin{aligned} ab_1 + \gamma a_4 &= 0, & \alpha' e_2 + \gamma' a_4 &= 0, \\ ad_1 + \beta a_3 &= 0, & \alpha' e_2 + \beta' a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ciò allo scopo di eliminare i termini in $\lambda^4\mu^2, \lambda^2\mu^4$ che compaiono nelle prime due coordinate x_1, x_2 . Aggiungendo poi un evidente cambiamento dell'elemento unità, la rappresentazione si semplifica così:

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv a\lambda^5\mu + b\lambda^3\mu^3 + c\lambda\mu^5 + \mu^6, \\ x_2 &\equiv \lambda^6 + d\lambda^5\mu + e\lambda^3\mu^3 + f\lambda\mu^5, \\ x_3 &\equiv \lambda^2\mu^4, \\ x_4 &\equiv \lambda^4\mu^2. \end{aligned}$$

Le intersezioni di un piano generico $u_x = 0$ o con C_6 sono date da:
 $n_2\lambda^6 + (u_1a + u_2d)\lambda^5\mu + u_1\lambda^4\mu^2 + (u_1b + u_2e)\lambda^3\mu^3 + u_6\lambda^2\mu^4 + (u_1c + u_2f)\lambda\mu^5 + u_1\mu^6 = 0$.

Se si esige che $u_x = 0$ sia un piano tritangente, sarà il primo membro dell'equazione precedente un quadrato perfetto della forma:

$$[m\lambda^3 + n\lambda^2\mu + p\lambda\mu^2 + q\mu^3]^2 = 0.$$

Si perviene così alle seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} u_2 &= \varrho m^2, & u_1a + u_2d &= \varrho \cdot 2mn, \\ u_4 &= \varrho(n^2 + 2mp), & u_1b + u_2e &= \varrho \cdot 2(np + mq), \\ u_6 &= \varrho(p^2 + 2nq), & u_1c + u_2f &= \varrho \cdot 2pq, & u_1 &= \varrho q^2, \end{aligned}$$

dove ϱ è un fattore di proporzionalità.

Con un facile calcolo si giunge necessariamente alla seguente equazione (in $\frac{m}{q}$)

$$m^4 \cdot df - m^3 q \cdot 2e + m^2 q^2 (4 + af + cd) - m q^3 \cdot 2b + q^4 \cdot ac = 0$$

che deve essere identicamente soddisfatta qualora si esiga che i piani tritangenti sieno in numero infinito. Si è così condotti ai due casi seguenti:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &\equiv a\lambda^5\mu + \mu^6, \\ x_2 &\equiv \lambda^6 - \frac{4}{a}\lambda\mu^5, \\ x_3 &\equiv \lambda^2\mu^4, \\ x_4 &\equiv \lambda^4\mu^2; \end{aligned} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &\equiv c\lambda\mu^5 + \mu^6, \\ x_2 &\equiv \lambda^6 - \frac{4}{c}\lambda^5\mu, \\ x_3 &\equiv \lambda^2\mu^4, \\ x_4 &\equiv \lambda^4\mu^2. \end{aligned} \right.$$

Ma quest'ultimo si esclude perchè la curva esiste sul cono quadrico:

$$-16x_3^2 - c^4x_4^2 + 12c^2x_3x_4 + c^4x_3x_2 + 16x_4x_1 + 4c^2x_1x_2 = 0.$$

Quanto alla prima, basta cambiare il parametro così:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{5}} \frac{\lambda_1}{\mu_1}$$

e poi attuare la seguente trasformazione di coordinate

$$\begin{aligned}x_1 &= y_1, \\x_2 &= \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{6}{5}} y_2, \\x_3 &= \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{2}{5}} y_3, \\x_4 &= \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{4}{5}} y_4,\end{aligned}$$

per ottenere la curva:

$$\begin{aligned}y_1 &\equiv 2\lambda_1^5 \mu_1 + \mu_1^6, \\y_2 &\equiv \lambda_1^6 - 2\lambda_1 \mu_1^5, \\y_3 &\equiv \lambda_1^2 \mu_1^4, \\y_4 &\equiv \lambda_1^4 \mu_1^2,\end{aligned}$$

che è la sestica del pentaedro (cfr. la mia memoria già citata: pag. 16): Il teorema è dunque dimostrato. Cioè:

L'unica sestica gobba irriduttibile dotata di infiniti piani tritangenti è la sestica del pentaedro, all'infuori del caso ovvio della intersezione di un cono quadrico con una superficie cubica.

7. Chiudo queste poche linee con le osservazioni seguenti.

Dopo la stampa del mio recente lavoro sul pentaedro, il prof. SEGRE mi ha fatto notare che la sestica in parola trovasi già accennata in KLEIN [Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade (Lipsia, 1884), pag. 167]. Il prof. BERZOLARI, a sua volta, mi scrive che, se non proprio la C_6 , la sviluppabile S trovasi in GEISER [Die konjugierten Kernflächen des Pentaeders (Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 1905)]. Infatti in questa Nota, in fine della pag. 10, l'Autore osserva che mentre un punto P percorre una generatrice della quadrica invariante, il vertice del cono polare quadrico di P , rispetto al pentaedro, descrive una conica. Mentre poi la generatrice descrive la serie rigata cui appartiene (sulla quadrica invariante), il piano della conica suddetta descrive una sviluppabile razionale di 6^a classe. Così alle due serie rigate della quadrica suddetta corrispondono due tali sviluppabili. Ora siccome ho dimostrato che il G_{60} possiede due sole sviluppabili razionali invarianti, irriduttibili, di 6^a classe, che sono precisa-

mente le sviluppabili tritangenti delle due C_6 pentaedriche (pag. 20 della mia memoria) così ne segue la identità di queste ultime sviluppabili con quelle di GEISER.

Ma nè l'uno, nè l'altro dei due autori approfondisce lo studio sull'argomento: ad es. niuno dei due considera gli infiniti piani tritangenti, o gli elementi duali. È però indiscutibile che, ove ne valesse la pena, io non ho più alcun diritto a priorità di sorta circa alla esistenza di questa sestica. Appunto per questo mi sarà dunque tanto più lecito mettere in evidenza il particolare interesse che ha tale curva di cui mi propongo in una prossima pubblicazione esporre altre notevoli proprietà.

SOPRA LE CURVE GOBBE RAZIONALI DOTATE DI QUATTRO PUNTI D'IPEROSCOLAZIONE

Estratto dal tomo XXVI (2° sem. 1908) dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*.
Adunanza del 22 dicembre 1907.

Si dice che una curva gobba razionale, d'ordine n superiore a tre, possiede un punto d'iperosculatione, quando, in quel punto, il piano osculatore ha contatto n -punto con la curva. Se questa deve essere irriduttibile, il massimo numero di tali punti d'iperosculatione è quattro (1). Lo

(1) Se si riflette che $4(n-3)$ è il numero dei piani stazionari di una curva gobba razionale di ordine n , si presenta spontanea una considerazione geometrica (veramente più intuitiva che rigorosa) la quale stabilisce questo numero massimo. È decisivo invece il seguente semplicissimo calcolo. Ricorriamo alla rappresentazione parametrica del n° 1 per la nostra curva e avremo:

$$x_1 \equiv \lambda^n, \quad x_2 \equiv \mu^n, \quad x_3 \equiv (\lambda + \mu)^n, \quad x_4 \equiv (a\lambda + b\mu)^n.$$

Se deve esistere un quinto punto d'iperosculatione, indichiamo con $c\lambda + d\mu = 0$ l'equazione che serve a individuarlo sulla curva. Allora se $u_x = 0$ è il piano osculatore in quel punto, la sezione piana di $u_x = 0$ con la curva deve esser data da

$$(c\lambda + d\mu)^n = 0.$$

Si perviene così alle seguenti condizioni:

$$u_1 + u_3 + u_4 a^n = \rho c^n; \quad u_3 + u_4 a^{n-1} b = \rho c^{n-1} d; \quad u_3 + u_4 a^{n-2} b^2 = \rho c^{n-2} d^2 \\ u_3 + u_4 a^{n-3} b^3 = \rho c^{n-3} d^3; \dots; u_2 + u_3 + u_4 b^n = \rho d^n,$$

dove ρ è fattore di proporzionalità. Ebbene, se $n > 3$, segue che deve essere necessariamente

$$(u_3 + u_4 a^{n-2} b^2)^2 = (u_3 + u_4 a^{n-1} b)(u_3 + u_4 a^{n-3} b^3),$$

da cui:

$$u_3 u_4 a^{n-3} b (a - b)^2 = 0,$$

il che è impossibile.

studio della curva presenta dunque tutto l'interesse che di solito presentano i cosiddetti casi massimi. L'esempio più semplice è quello della quartica di 2^a specie con i suoi quattro piani stazionari. In generale, per n qualunque lo studio in parola ha dato origine a varii recenti lavori che io nomino qui a piè di pagina in ordine cronologico (1). I fatti geometrici più salienti scaturiscono principalmente dalla esistenza di un gruppo quadrimo di collineazioni quaternarie che trasformano la curva in sè stessa. Nei citati lavori questo gruppo è stato considerato nel caso più comune in cui la quaderna dei punti d'iperosculatione è generica, ma niuno (ch'io sappia) ha considerato i gruppi più ampi che si presentano quando tale quaderna sia armonica, od equianarmonica (se si prescinde da $n = 4$) cioè dalla quartica di 2^a specie, studiata ormai da tutti i punti di vista possibili, e dal caso $n = 5$ che io ebbi già a considerare per l'addietro (2). Presento dunque al lettore particolarmente il caso armonico ed equianarmonico sopra indicati: ma siccome la esistenza del gruppo quaternario, in essi, si può stabilire con una considerazione unica dalla quale, nel medesimo modo, proviene pure il caso generico, così mi permetto anche di segnalare il teorema del n° 3 che riguarda tale considerazione e che costituisce la base sostanziale di quanto contiene breve scritto. Dovrò citare spesso oltre la mia Nota già indicata, una mia memoria che riguarda gruppi lineari quaternari (3). Per brevità assumerò il simbolo « Nota » per la prima e « Memoria » per la seconda facendo seguire a tale simbolo quello che indica il n° richiamato.

I.

Il caso generico.

1. L'ipotesi della razionalità della nostra curva (che ora e nel seguito indicheremo con C_n) si esprime rappresentando le coordinate omogenee di

(1) MARLETTA, *Contributo alla teoria delle curve razionali* [questi Rendiconti, t. XXI (1° semestre 1906), pp. 192-210]. — BERZOLARI, *Sulle curve gobbe razionali dotate di quattro punti d'iperosculatione* [questi Rendiconti, t. XXIV (2° semestre 1907), pp. 1-16]. — MARLETTA, *Sulle curve gobbe razionali dotate di quattro punti d'iperosculatione* [questi Rendiconti, t. XXIV (2° semestre 1907), pp. 32-35].

(2) CIANI, *Sopra alcuni gruppi lineari quaternari dotati di quartica, o di quintica gobba razionale invariante* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, serie II, vol. XXXVII (1904), pp. 341-353].

(3) CIANI, *Sopra i gruppi finiti di collineazioni quaternarie, oloedricamente isomorfi con quelli dei poliedri regolari* [Annali di matematica pura ed applicata, serie III, t. VIII (1903), pp. 1-37].

un suo punto mediante funzioni razionali intere di un parametro $\frac{\lambda}{\mu}$. Cominciamo dal considerare il caso generico, cioè quello nel quale è generico il valore del rapporto anarmonico dei quattro valori del parametro individuanti i 4 punti d'iperosculazione. Assumiamo sopra C_n due di questi punti come fondamentali e allora con opportuna ed evidente disposizione del punto unità, i 4 valori suddetti di $\frac{\lambda}{\mu}$ potranno ritenersi individuati dalle seguenti equazioni:

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \lambda + \mu = 0, \quad a\lambda + b\mu = 0,$$

dove il rapporto $\frac{a}{b}$ ha valore generico. Allora, prendendo per tetraedro fondamentale quello dei quattro piani iperosculanti, la rappresentazione parametrica di C_n è la seguente:

$$x_1 \equiv \lambda^n, \quad x_2 \equiv \mu^n, \quad x_3 \equiv (\lambda + \mu)^n, \quad x_4 \equiv (a\lambda + b\mu)^n.$$

2. È essenziale adesso di considerare la involuzione fondamentale, su C_n , la quale, come è ben noto, è costituita da tutti i gruppi di n punti di C_n che sono apolari a tutte le sue sezioni piane. La sezione di un piano $u_x = 0$ con C_n è:

$$\varphi = \lambda^n(u_1 + u_3 + a^n u_4) + \lambda^{n-1} \mu n_1(u_3 + a^{n-1} b u_4) + \dots \\ \dots + \lambda \mu^{n-1} n_1(u_3 + a b^{n-1} u_4) + \mu^n(u_2 + u_3 + b^n u_4) = 0$$

Ora, la nota condizione di apolarità fra due binarie $\alpha_x^n = 0, \beta_x^n = 0$ si esprime in coefficienti simbolici con

$$(\alpha \beta)^n = 0.$$

Ebbene, esigiamo che questa condizione sia adempiuta fra la $\varphi = 0$ e una binaria incognita $\alpha_x^n = 0$ in modo indipendente dalle u_i .

Passando dai coefficienti simbolici agli effettivi si trova, dopo un facile calcolo, che $\alpha_x^n = 0$ rappresenterà la involuzione cercata se le α saranno sottoposte alle sole condizioni che seguono:

$$\alpha_0 = \alpha_n = 0$$

$$\alpha_n - n_1 \alpha_{n-1} + n_2 \alpha_{n-2} - n_3 \alpha_{n-3} + \dots + (-1)^n \alpha_0 = 0$$

$$\alpha_n - n_1 a^{n-1} b \alpha_{n-1} + n_2 a^{n-1} b^2 \alpha_{n-2} - \dots + (-1)^n b^n \alpha_0 = 0$$

le quali non fanno altro che esprimere l'appartenenza dei quattro punti d'iperosculazione al gruppo generico della involuzione cercata. In conclusione si può dunque dire che:

La involuzione fondamentale su C_n è così costituita che ogni suo gruppo si compone dei quattro punti d'iperosculatione e di altri $n-4$ punti qualsiasi di C_n . Questa semplice osservazione, che per sè ha ben scarso interesse, ne acquista invece quando si proceda da essa alla costruzione delle collineazioni quaternarie che trasformano C_n in sè medesima.

3. Infatti, secondo un noto teorema di MARLETTA (1) la condizione necessaria e sufficiente affinchè una proiettività fra i punti di C_n individuati nello spazio una omografia rispetto alla quale C_n sia invariante, è che tale proiettività trasformi in sè la involuzione fondamentale. Dunque, nel nostro caso, basterà che la proiettività binaria, in parola, trasformi in sè stessa semplicemente la quaderna dei quattro punti d'iperosculatione e quindi basterà considerare i soli casi della quaderna generica, della quaderna armonica e di quella equianarmonica per dichiarare esaurita la questione delle collineazioni di C_n in sè.

Abbiamo dunque il seguente risultato:

Data una curva gobba razionale dotata di quattro punti d'iperosculatione, ogni proiettività binaria, su di essa, che trasforma in sè la quaderna dei punti suddetti, individua una omografia dello spazio che trasforma la curva in sè medesima. Per cui ogni gruppo di tali proiettività binarie individua un corrispondente gruppo, isomorfo oloedrico, di omografie quaternarie rispetto al quale la curva data è invariante. Se tale quaderna è generica, il gruppo è quadrinomio e si ha un teorema noto (2). Se tale quaderna è armonica il gruppo corrispondente è dell'ottavo ordine e sarà studiato nel Capitolo II di questo scritto; se è equianarmonica il gruppo è tetraedrico, cioè di dodicesimo ordine, e sarà studiato nel Capitolo III.

4. Rimanendo sempre nella ipotesi che la quaderna in discorso sia generica, è però opportuno cambiare il sistema di riferimento sulla C_n assumendolo in guisa che la forma biquadratica f dei quattro punti d'iperosculatione sia ridotta alla forma canonica e si abbia

$$f \equiv (\lambda^4 + \mu^4)a^2b^2 - (a^4 + b^4)\lambda^2\mu^2 = 0.$$

Allora la rappresentazione parametrica di C_n è la seguente:

$$x_1 \equiv (a\lambda + b\mu)^n, \quad x_2 \equiv (a\lambda - b\mu)^n, \quad x_3 \equiv (b\lambda + a\mu)^n, \quad x_4 \equiv (b\lambda - a\mu)^n,$$

dove il parametro è $\frac{\lambda}{\mu}$, e $\frac{a}{b}$ è una costante che ha valore generico. Il

(1) MARLETTA, *Sulle curve razionali del 5° ordine* [Questi Rendiconti, t. XIX (1905), pp. 94-119].

(2) MARLETTA, *Contributo*, etc. [loco citato (2)].

gruppo binario quadrimio che trasforma f in sè stessa è costituito dalla identità e dalle tre seguenti involuzioni

$$\begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}.$$

Esse generano rispettivamente le tre seguenti involuzioni gobbe:

$$\begin{pmatrix} x_3 & \mp x_4 & x_1 & \mp x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_4 & \mp x_3 & x_2 & \mp x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

dove si prenderanno i segni superiori, o gl' inferiori a seconda che n è pari o dispari. Il gruppo è un G_4^I , o un G_4^{II} (Memoria, n° 1; Nota, n° 2 e 8).

Nel 1° caso gli assi delle involuzioni compongono le tre coppie di spigoli opposti di uno stesso tetraedro, nel 2° essi costituiscono tre coppie armoniche, a due, a due, di una stessa serie rigata. Dall'attuale rappresentazione discendono facilmente molti dei teoremi noti degli autori più volte citati e altri nuovi possono aggiungersi. Ad esempio, per n dispari, si vede facilmente che la quadrica Ω che contiene gli assi delle involuzioni gobbe di G_4^{II} è la seguente:

$$\Omega \equiv x_1^2 + x_4^2 - (x_2^2 + x_3^2) = 0$$

ed un calcolo ovvio dimostra che Ω non può contenere C_n . Delle intersezioni di Ω con C_n , sei sono date dal covariante sestico di C_n (sono i punti d'appoggio di C_n con gli assi di G_4^{II}): ciascuna delle rimanenti individua una quadrisecante di C_n esistente per intero su Ω . Dunque:

Se il grado è dispari, la serie rigata coniugata a quella degli assi di G_4^{II} passa per $\frac{n-3}{2}$ quadrisecanti della curva.

Ancora: consideriamo la involuzione di 4° ordine che viene individuata su C_n dalla forma f e dal suo hessiano. Ogni gruppo di questa involuzione è invariante, evidentemente, rispetto al gruppo quadrimio quaternario che trasforma C_n in sè stessa. Se n è dispari non esistono piani invarianti rispetto a G_4^{II} e quindi si può dire:

Se il grado è dispari nessun gruppo della involuzione individuata su C_n da f e dal suo hessiano può esser piano senza essere rettilineo: i gruppi rettilinei sono $\frac{n-3}{2}$ ed esistono sulle quadrisecanti di C_n dianzi ricordate.

II.

Il caso armonico.

5. Più interessanti del caso generico sono i casi armonico ed equiarmonico, perchè, come già abbiamo avvertito, i gruppi quaternari cor-

rispondenti, che trasformano C_n in sè stessa, non sono stati considerati dai citati autori. Cominciamo dal caso armonico. Servendosi della rappresentazione del n° precedente avremo:

$$f = \lambda^4 + \mu^4 = 0, \quad \text{cioè} \quad a^4 + b^4 = 0.$$

Con ciò i due punti di riferimento $\lambda = 0, \mu = 0$ sono (sopra C_n) quelli che compongono la coppia che separa armonicamente le due coppie armoniche costituenti f . Si può prendere

$$a = 1 + i, \quad b = \sqrt{2}.$$

Con questi valori ponendo:

$$M = a\lambda + b\mu, \quad N = a\lambda - b\mu, \quad P = b\lambda + a\mu, \quad Q = b\lambda - a\mu$$

la rappresentazione parametrica di C_n è la seguente (Nota, n° 1 e 4):

$$x_1 \equiv M^n, \quad x_2 \equiv N^n, \quad x_3 \equiv P^n, \quad x_4 \equiv Q^n.$$

Abbiamo già osservato al n° 3 che, nel caso attuale, deve esistere un gruppo quaternario G_8 di ottavo ordine capace di trasformare C_n in sè stessa.

Per costruirlo si osservi che il gruppo binario, che serve a generarlo, si compone del gruppo binario già segnalato al n° 4 a cui si aggiunge la sostituzione:

$$\begin{pmatrix} -i\mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix},$$

la quale attua questa trasformazione:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \frac{\sqrt{2}}{1+i}M & -\frac{\sqrt{2}}{1+i}N & \frac{1+i}{\sqrt{2}}Q & -\frac{1+i}{\sqrt{2}}P \\ M & N & P & Q \end{array} \right\}.$$

6. A questo punto, innanzi di proseguire, è opportuno distinguere il caso di n pari, da quello di n dispari.

Sia n pari. La sostituzione binaria ultima del n° precedente produce questa sostituzione quaternaria

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \pm x_4 & \pm x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

dove si prenderanno i segni superiori, o gl' inferiori a seconda che n è, o no, multiplo di 4.

Il gruppo cercato è subito ottenuto. Volendo il quadro completo delle

sue sostituzioni basta aggiungere al G_4^I del n° 4 le quattro collineazioni seguenti:

$$\begin{array}{l}
 A \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \pm x_3 & \pm x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \text{ che è generata da } \begin{pmatrix} -i\mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \\
 B \equiv \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & \pm x_3 & \pm x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \begin{pmatrix} i\mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \\
 C \equiv \begin{pmatrix} x_4 & x_3 & \pm x_1 & \pm x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \begin{pmatrix} i\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \\
 D \equiv \begin{pmatrix} x_3 & x_4 & \pm x_2 & \pm x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \begin{pmatrix} -i\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}
 \end{array}$$

dove, al solito, si assumeranno i segni superiori, o gl'inferiori, a seconda che n è, o no, multiplo di 4. Le A e B rappresentano due omologie armoniche, le C , D , due omografie generiche a periodo quattro. Per la costruzione del gruppo attuale si può dunque dire:

Si aggiunga al G_4^I del n° 4 una omologia armonica che abbia il centro C su di uno spigolo s del tetraedro fondamentale del gruppo e per piano fondamentale quello individuato dallo spigolo opposto ad s e da quel punto di s che è coniugato armonico di C rispetto alla coppia di vertici del tetraedro suddetto esistenti su s . Questa omologia armonica aggiunta al G_4^I genera il gruppo cercato che è di ottavo ordine e appartiene come sottogruppo al G_{24}^{II} (Memoria, n° 7; Nota, n° 4). La presenza delle due omologie armoniche nel gruppo è forse il fatto più notevole dal punto di vista geometrico e può esprimersi così:

Se il grado è pari e il gruppo dei punti d'iperosculatione è armonico, la nostra curva C_n è due volte omologico-armonica.

7. Come il gruppo precedente sia collegato a C_n in modo che dalla C_n possa subito costruirsi, risulterà dalle considerazioni seguenti.

Intanto come sia collegato G_4^I a C_n risulta dai lavori citati e anche dal n° 4 di questo scritto. Chiamando, col MARLETTA, corde principali di C_n quelle che contengono le coppie del covariante sestico di f , si può dire che esse compongono sempre tre spigoli del tetraedro fondamentale di G_4^I e passano per uno stesso vertice, od esistono su di una stessa faccia a seconda che n è, o no, un multiplo di 4. Non manca dunque che di esaminare come si colleghi con C_n una delle due omologie armoniche del n° precedente, chè una qualsiasi di esse aggiunta a G_4^I genera il gruppo attuale (come abbiamo già osservato più volte). A tale scopo si osservi che i piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ sono uniti per la omologia A e siccome niuno di essi è piano fondamentale, così la loro retta d'intersezione passa per il centro di A . Gli altri due piani $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ vengono scambiati fra

loro e quindi altrettanto accade dei loro punti di osculazione con C_n per cui la retta che congiunge questi punti passa pure per il centro in parola. Allora indicando con $MNPQ$ i quattro punti d'iperosculatione (n° 5), con $\mu\nu\pi\lambda$ i relativi piani iperosculanti ed essendo MN, PQ le due coppie armoniche di f , si può dire che i centri delle omologie in parola sieno l'uno il punto comune alle rette $MN, \pi\lambda$ e l'altro quello comune alle rette $\mu\nu, PQ$. Dalla costruzione dei centri si passa poi a quella dei piani fondamentali e quindi di tutto il gruppo nel modo indicato dal n° precedente.

8. Finalmente come ultima particolarità notevole del caso in cui f è armonica e n un multiplo di quattro, si osservi che, in questa doppia ipotesi, i punti $\lambda=0, \mu=0$ di C_n coincidono nell'unico punto di coordinate $\{(-1)^k, (-1)^k, 1, 1\}$ ove $k = \frac{n}{4}$, il che si può interpretare geometricamente mediante il seguente enunciato:

Se il gruppo dei punti d'iperosculatione è armonico e se inoltre il grado è multiplo di quattro, la curva possiede un nodo: i due valori del parametro che individuano i due rami del nodo, compongono la coppia che separa armonicamente le due coppie armoniche del gruppo suddetto. Per $n=4$ si ha il ben noto caso della quartica razionale nodale (Nota, n° 4).

9. Pure rimanendo nel caso armonico supponiamo ora che il grado di C_n sia dispari. Per quest'ultima circostanza il gruppo quadrinomio che trasforma C_n in sè stessa è il G_4^{II} (n° 4). Per ottenere il gruppo di ottavo ordine relativo basta osservare che la sostituzione binaria del n° 5

$$\begin{pmatrix} -i\mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

produce ora (in forza del n° 5 medesimo) la collineazione quaternaria seguente:

$$\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & \pm ix_3 & \pm ix_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

dove si prenderanno i segni superiori a seconda che n supera di uno, o di tre un multiplo di quattro. Ebbene, aggiungendo al G_4^{II} la collineazione ultima, che è manifestamente una involuzione gobba, si ottiene il gruppo di ottavo ordine richiesto. Riportiamo qui, per comodità del lettore, la descrizione geometrica del gruppo come è fatta al n° 10 della mia Nota più volte citata. A tale scopo indichiamo con $m m', n n', p p'$, le tre coppie di assi delle involuzioni appartenenti a G_4^{II} . Esse compongono tre coppie armoniche a due a due di una stessa serie rigata esistente su Ω (n° 4). Alla serie rigata coniugata appartengono evidentemente le tre cor-

de principali di C_n . Indichiamo con r quella di esse che contiene i punti $\lambda = 0, \mu = 0$ costituenti la coppia che separa armonicamente le due coppie armoniche di f , e indichiamo con s la coniugata armonica di r rispetto alle due rimanenti rette suddette (sulla serie rigata cui appartengono). Rappresentiamo poi con le lettere maiuscole corrispondenti i punti di appoggio di $m m', n n', p p'$ con r ed s . Di guisa che sopra r si avranno le tre coppie armoniche a due a due seguenti: $M_r M'_r, N_r N'_r, P_r P'_r$ e analogamente sopra s le altre tre: $M_s M'_s, N_s N'_s, P_s P'_s$. Il covariante sestico di $N_r N'_r, P_r P'_r$ è formato da $M_r M'_r$ e da altre due coppie che indicheremo con $X_r X'_r, Y_r Y'_r$. Sieno $X_s X'_s, Y_s Y'_s$ le coppie analoghe desunte da $N_s N'_s, P_s P'_s$, ma in modo che $X_r X_s, X'_r X'_s, Y_r Y_s, Y'_r Y'_s$ sieno rette della serie rigata cui appartengono $m m', n n', p p'$. Ebbene, per ottenere il gruppo cercato basta aggiungere al G_{24}^{II} una (e quindi l'altra) delle due involuzioni gobbe che hanno per assi X_r, X'_s, X'_r, X_s ; ovvero Y_r, Y'_s, Y'_r, Y_s . Le due rette r ed s sono invarianti. Il gruppo che così si ottiene appartiene come sottogruppo al G_{24}^{IV} (Memoria n° 6).

III.

Il caso equianarmonico.

10. Il gruppo dei quattro punti d'iperosculazione sia equianarmonico e quindi sia equianarmonica la f . Servendosi della rappresentazione dei n° 4 e 5 si vede che, nel caso attuale, si può prendere

$$a = (1 + i)(\sqrt{3} - 1), \quad b = 2$$

e quindi

$$x_1 \equiv M^n, \quad x_2 \equiv N^n, \quad x_3 \equiv P^n, \quad x_4 \equiv Q^n,$$

dove a e b hanno i precedenti valori. Per ottenere sopra C_n il gruppo binario tetraedrico trasformante f in se stessa basta aggiungere al gruppo binario quadrinomio del n° 4 la sostituzione:

$$\left\{ \begin{array}{cc} i(\lambda + \mu) & \lambda - \mu \\ \lambda & \mu \end{array} \right\},$$

essa applicata a M, N, P, Q attua le seguenti operazioni:

$$\begin{array}{l} M \text{ viene portato in } \frac{1 + i + \sqrt{3}(1 - i)}{2} \cdot N \\ N \quad \gg \quad \gg \quad \gg - \frac{1 + i + \sqrt{3}(1 - i)}{2} \cdot Q \\ P \quad \gg \quad \gg \quad \gg \frac{-1 + i + \sqrt{3}(1 + i)}{2} \cdot P \\ Q \quad \gg \quad \gg \quad \gg \frac{-1 + i + \sqrt{3}(1 + i)}{2} \cdot M. \end{array}$$

È opportuno adesso distinguere il caso di n pari da quello di n dispari.

11. Sia n pari. Allora la sostituzione binaria del n° precedente produce la seguente sostituzione quaternaria:

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_4 & \pm x_3 & \pm x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

dove si prenderanno i segni superiori, o gl'inferiori, a seconda che n è, o no, un multiplo di 4. La collineazione precedente è a periodo 3 e assiale (non biassiale) e quindi aggiungendola al G_4^I già esistente, si perviene necessariamente al G_{12}^I (Memoria, n° 2).

Si ha dunque il teorema:

Se il grado è pari e il gruppo dei punti d'iperosculatione è equianarmonico, la curva è trasformata in sé stessa da un gruppo di collineazioni quaternarie che è non soltanto isomorfo oloedrico, ma anche proiettivamente identico al gruppo delle rotazioni del tetraedro regolare. Il collegarsi del gruppo poi alla curva (mediante il G_4^I) è così ovvio che non vale la pena di rilevarlo.

12. Se poi il grado è dispari, la sostituzione binaria del n° 10 produce la sostituzione quaternaria seguente:

$$\begin{pmatrix} x_2 & -x_4 & \pm i x_3 & \pm i x_1 \\ x_2 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

dove si prenderanno i segni superiori, od inferiori, a seconda che n è multiplo di quattro aumentato di uno, o di tre. In entrambi i casi la collineazione è a periodo 3 e assiale (non biassiale). Aggiungendola al G_4^{II} , già esistente, si perviene a un gruppo tetraedrico che è il G_{12}^{III} (Memoria, n° 4). Per farne la descrizione ed esaminarne il collegamento con C_n riprendiamo le rette $m m'$, $n n'$, $p p'$ del n° 9 appartenenti a una delle due serie rigate di Ω . Sappiamo che all'altra serie rigata di Ω appartengono le tre corde principali di C_n : ebbene sieno r ed s le rette componenti il gruppo hessiano di queste tre corde e sieno $X_r Y_r$, $X_s Y_s$ i punti dove r ed s incontrano le due rette componenti il gruppo hessiano di $m n p$ (o di $m' n' p'$ che è lo stesso) e in modo che $X_r \cdot X_s$, $Y_r \cdot Y_s$ sieno generatrici di Ω . Consideriamo allora la collineazione assiale a periodo tre che ha $X_s \cdot Y_r$ per asse di punti uniti e $X_s \cdot Y_r$ come asse di piani uniti con la condizione ulteriore che $X_r Y_s Y_r$, $X_r Y_s X_s$ sieno i piani uniti per l'asse di punti uniti e X_s , Y_r i punti uniti sull'asse di piani uniti. Ebbene: questa è la collineazione da aggiungersi al G_4^{II} per ottenere il gruppo cercato. Sono rette invarianti le r , s .

13 Tali rette equistano un più notevole risalto geometrico se il gra-

do di C_n , pure essendo dispari, non è multiplo di tre. Risulta allora facilmente dalla rappresentazione parametrica adottata, che i quattro punti di iperosculazione sono in linea retta. Questa retta è una delle due dianzi nominate e allora si vede che anche l'altra è quadrisecante e che i punti di secamento costituiscono il gruppo hessiano di f . Si ha dunque il seguente risultato (di cui la prima parte si trova già nei citati lavori di Marletta e Berzolari):

Se la quaderna dei punti d'iperosculazione è equianarmonica e il grado è dispari non multiplo di tre, sono in linea retta i punti suddetti e anche quelli che compongono il loro gruppo hessiano. Le due quadrisecanti che così si ottengono sono le due rette invarianti del gruppo quaternario che trasforma la curva in sè. Tale gruppo è isomorfo oloedrico a quello delle rotazioni del tetraedro regolare, ma ne è proiettivamente diverso e la sua costruzione può farsi evidentemente dipendere dalle due quadrisecanti suddette secondo la descrizione geometrica del gruppo fatta nel n° precedente.

14. Finalmente, riunendo quanto è stato esposto nei capitoli precedenti relativamente al caso in cui n è un multiplo di 4, si può enunciare il seguente teorema, il quale non è altro che una immediata estensione di quello espresso al n° 6 della mia Nota più volte citata.

Le permutazioni su di un gruppo di quattro parametri $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ che lasciano invariato il rapporto anarmonico del gruppo, possono interpretarsi come le rappresentanti analitiche di altrettante collineazioni quaternarie trasformanti in sè stessa una curva gobba dotata di quattro punti d'iperosculazione e con l'ordine multiplo di quattro. Basta a tale scopo immaginare che i quattro parametri in parola sieno le coordinate omogenee di un punto dello spazio e che la curva venga riferita al tetraedro formato dai quattro piani iperosculanti mediante la rappresentazione parametrica seguente:

$$x_1 \equiv (a\lambda + b\mu)^{4k}, \quad x_2 \equiv (a\lambda - b\mu)^{4k}, \quad x_3 \equiv (b\lambda + a\mu)^{4k}, \quad x_4 \equiv (b\lambda - a\mu)^{4k}.$$

A seconda che tali permutazioni sono inerenti a un gruppo generico, armonico, od equianarmonico, sarà generica, armonica, od equianarmonica, la forma binaria biquadratica

$$f = (\lambda^4 + \mu^4) a^2 b^2 - (a^4 + b^4) \lambda^2 \mu^2 = 0$$

che rappresenta sulla curva il gruppo dei quattro punti d'iperosculazione.

È superfluo notare che per $k = 1$ si hanno di qui tutti i noti teoremi riguardanti le collineazioni quaternarie che trasformano in sè una quartica gobba razionale.

INTORNO AD ALCUNE DEFINIZIONI PROIETTIVE ED ANALITICHE DELLE CONICHE E DELLE QUADRICHE

[Periodico di Mat.^{ca} Anno XXIV. 1908]

1. Stralcio delle mie lezioni del corso libero di Geometria analitica (tenuto quest'anno nella R. Università di Genova) le seguenti considerazioni sulle coniche e sulle quadriche. Esse hanno per fine essenziale quello di collegare la teoria sintetica con la teoria analitica e quindi il corso di Geometria proiettiva con quello di Geometria analitica.

2. Comincio dalle coniche. Assumo per definizione proiettiva quella della generazione mediante forme proiettive fondamentali di 1^a specie: assumo, per definizione analitica, l'insieme di tutti i punti reali del piano le cui coordinate cartesiane sono vincolate da una relazione di secondo grado a coefficienti reali (ed escludo quindi dalle considerazioni seguenti la conica immaginaria). Il passaggio dall'una all'altra definizione è estremamente semplice quando ci si possa servire di coordinate omogenee. Ma quando, per ragioni didattiche, si sia costretti a ritardare la introduzione di tali coordinate (così da doversi servire delle cartesiane) la questione si presenta in modo alquanto differente dal lato tecnico del calcolo, ed io mi permetto qui di esporre il metodo seguito nelle mie lezioni.

Sieno due fasci di raggi proiettivi complanari a centri distinti S ed S' . Nel piano dei fasci assumiamo la retta SS' per asse delle y , la perpendicolare a tale retta nel punto medio O di SS' come asse delle x e per unità di misura positiva prendiamo il segmento OS : per cui le coordinate di S ed S' saranno $(0, 1)$ e $(0, -1)$. L'asse delle x taglierà i due fasci secondo due punteggiate proiettive sovrapposte.

Indicando con λ e μ le ascisse di due punti corrispondenti, fra λ e μ passerà dunque la relazione bilineare seguente

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0. \quad (1)$$

con $ad - bc \neq 0$. Indicando con P e P' questi punti corrispondenti, le loro coordinate saranno $(\lambda, 0)$, $(\mu, 0)$. Facendo variare λ e conseguentemente μ , così che sia sempre soddisfatta la (1), le rette SP , $S'P'$ descrivono i due fasci proiettivi dati e quindi il loro punto comune M descrive la conica la quale viene in tal modo a essere individuata mediante la definizione proiettiva.

Le equazioni delle rette SP ed $S'P'$ sono rispettivamente

$$x + \lambda(y - 1) = 0, \quad x - \mu(y + 1) = 0,$$

e quindi le coordinate del loro punto d'incontro sono le seguenti

$$x = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + \mu}; \quad y = \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}$$

dove è da tener presente che λ e μ sono collegate dalla (1). Per cui le precedenti possono scriversi così:

$$\lambda(xa + 2b) + \mu(ax + 2c) = -2d$$

$$\lambda(y - 1) + \mu(y + 1) = 0.$$

Risolvendo queste rispetto a λ e μ eppoi sostituendo nella (1) si perviene alla cercata equazione della conica. Essa è la seguente:

$$ad(1 - y^2) + \{c(y - 1) - b(y + 1)\} \{ax + y(b - c) + b + c\} + \{ax + y(b - c) + b + c\}^2 = 0. \quad (2)$$

Ossia è una equazione del 2° grado in x e y . Si può osservare che nell'eliminazione è supposto d differente da zero: ora il caso $d = 0$ non interessa perchè allora i due fasci hanno per raggio unito SS' e sono prospettivi: la conica si spezza in due rette le quali possono sempre rappresentarsi con un'equazione complessiva di 2° grado.

Se d è differente da zero i due fasci in parola non sono prospettivi, la conica non può comporsi di due rette e questo toglie quindi ogni sospetto che la (2) possa decomporre in due fattori lineari. Così il passaggio dalla definizione proiettiva a quella analitica è attuato.

3. Viceversa abbiassi un'equazione di 2° grado in x e y (coordinate cartesiane ortogonali di un punto). I coefficienti della equazione siano reali ed escludiamo il caso in cui il luogo rappresentato da questa equazione sia completamente immaginario. Ed escludiamo anche il caso ovvio in cui il 1° membro della equazione si decomponga in due fattori lineari.

Sieno dunque S, S' due punti reali del luogo. Assumiamo (come prima) questa retta per asse delle y , la perpendicolare a SS' nel punto medio come asse delle x e il segmento OS come unità di misura positiva. L'equazione del luogo sarà quindi della forma

$$a_{11} x^2 + y^2 - 1 + 2 a_{12} x y + 2 a_{13} x = 0. \quad (3)$$

Prendiamo sull'asse delle x due punti qualunque P e P' di coordinate $(\lambda, 0), (\mu, 0)$. Le equazioni delle rette SP ed $S'P'$ saranno

$$x + \lambda (y - 1) = 0, \quad x - \mu (y + 1) = 0,$$

e le coordinate del punto comune:

$$x = \frac{2 \lambda \mu}{\lambda + \mu}, \quad y = \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}.$$

Esigiamo adesso che questo punto appartenga al luogo (sostituendo nella (3) ad x e y i precedenti valori) e troveremo la seguente condizione fra λ e μ

$$\lambda \mu [a_{11} \lambda \mu + \lambda (a_{12} + a_{13}) + \mu (a_{13} - a_{12}) - 1] = 0$$

ma la soluzione $\lambda \mu = 0$ non ci apprende altro che questo: « i punti S ed S' appartengono al luogo »: cioè nulla di nuovo. Rimane l'altra

$$a_{11} \lambda \mu + \lambda (a_{12} + a_{13}) + \mu (a_{13} - a_{12}) - 1 = 0; \quad (4)$$

che è la relazione bilineare fra λ e μ . Dunque, al variare di λ e conseguentemente di μ , i punti P e P' descrivono due punteggiate proiettive (in cui O non è unito) e quindi le rette $SP, S'P'$ descrivono due fasci proiettivi non proiettivi). La condizione essenziale affinchè la (4) sia una proiettività è che

$$- a_{11} + a_{12}^2 - a_{13}^2 \neq 0;$$

ma questa è certamente soddisfatta, perchè il 1° membro è proprio il discriminante della (3), il quale è differente da zero per ipotesi.

Ecco dunque effettuato anche il passaggio inverso dalla definizione analitica di conica a quella proiettiva.

4. Passiamo alle quadriche. Assumiamo la seguente definizione proiettiva: *date due stelle reciproche a centri distinti, si chiama quadrica il luogo geometrico dei punti d'incontro dei raggi dell'una stella con i piani corrispondenti dell'altra.* Dico che le coordinate cartesiane di un punto del luogo sono vincolate da una equazione di secondo grado. Infatti sieno S ed S' i centri delle due stelle. Prendiamo per asse delle z la retta SS' , per piano xy quello perpendicolare ad SS' nel suo punto medio O e il segmento OS per unità di misura positiva per cui le coordinate di S ed S' saranno $(0,0,1), (0,0,-1)$. Tagliando col piano xy le due stelle, troveremo una reciprocità, che è facile rappresentare analiticamente. Basterà, nel piano suddetto far corrispondere al punto R (le coordinate cartesiane sieno α, β) la retta r rappresentata dalla equazione seguente:

$$(a\alpha + b\beta + c)x + (d\alpha + e\beta + f)y + m\alpha + n\beta + p = 0,$$

dove $a, b, c, d, e, f, m, n, p$ sono numeri reali qualsiasi con la sola condizione restrittiva che

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & p \end{vmatrix} \neq 0.$$

Allora le coordinate di un punto variabile sopra la retta SR saranno le seguenti:

$$x = \frac{\alpha}{\lambda + 1}, \quad y = \frac{\beta}{\lambda + 1}, \quad z = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \quad (5)$$

dove λ è un parametro variabile. Il piano che da S' proietta la retta r' avrà per equazione:

$$(a\alpha + b\beta + c)x + (d\alpha + e\beta + f)y + (m\alpha + n\beta + p)(z + 1) = 0. \quad (6)$$

Variando R , nel piano xy , e conseguentemente r' , viene descritta la reciprocità piana, e quindi il raggio SR e il piano $S'r'$ descrivono la supposta reciprocità fra le due stelle di centri S ed S' . La quadrica è il luogo geometrico del punto d'incontro della retta SR col piano $S'r'$ secondo la definizione proiettiva assunta. Per trovare le coordinate di tale punto bisognerebbe sostituire nella (6) i valori di x, y, z dati dalle (5), risolvere rispetto a λ l'equazione che ne seguirebbe e finalmente sostituire questo valore di λ nelle (5) medesime. Troveremmo così le coordinate richieste espresse per a e β , eliminando le quali a e β , perverremo alla equazione del luogo. Siccome, in sostanza, quel che occorre è quest'ultima, l'eliminazione può abbreviarsi così: risolviamo rispetto a λ l'ultima delle (5) e sostituiamo nelle prime due: otterremo

$$\lambda = \frac{z}{1-z}, \quad \alpha = \frac{x}{1-z}, \quad \beta = \frac{y}{1-z}.$$

Ponendo adesso nella (6) questi valori, perverremo alla equazione cercata, che è la seguente:

$$\begin{aligned} ax^2 + ey^2 - pz^2 + p + (b+d)xy + (m-c)xz + \\ + (n-f)yz + (m+c)x + (n+f)y = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

e con questo l'affermazione fatta è dimostrata e il passaggio dalla definizione proiettiva delle quadriche alla definizione analitica è ottenuto.

5. Viceversa: data l'equazione generale di 2° grado in x, y, z a coefficienti reali, cerchiamo di individuare le due stelle reciproche che generano il luogo geometrico rappresentato da quella equazione. Per lo scopo escluderemo il caso in cui tutti i punti del luogo sono immaginari. Sieno

dunque S, S' due punti reali generici del luogo: assumiamo la retta SS' per asse delle z e il piano perpendicolare a SS' , nel punto medio 0 , per piano xy , con OS unità di misura positiva. Le coordinate di S, S' saranno $(0, 0, 1), (0, 0, -1)$, e l'equazione del luogo potrà ridursi alla forma:

$$Ax^2 + By^2 - z^2 + 1 + Cxy + Dxz + Eyz + Fx + Gy = 0. \quad (8)$$

Questa assumerà la forma (7), se saranno adempiute le seguenti condizioni:

$$\frac{a}{p} = A, \quad \frac{e}{p} = B, \quad \frac{b}{p} + \frac{d}{p} = C, \quad \frac{m}{p} - \frac{c}{p} = D,$$

$$\frac{n}{p} - \frac{f}{p} = E, \quad \frac{m}{p} + \frac{c}{p} = F, \quad \frac{n}{p} + \frac{f}{p} = G;$$

da cui segue:

$$\frac{m}{p} = \frac{D+F}{2}, \quad \frac{c}{p} = \frac{F-D}{2}, \quad \frac{n}{p} = \frac{E+G}{2}, \quad \frac{f}{p} = \frac{G-E}{2}.$$

Si possono dunque calcolare, dalle precedenti, i seguenti rapporti

$$\frac{a}{p}, \quad \frac{e}{p}, \quad \frac{m}{p}, \quad \frac{c}{p}, \quad \frac{n}{p}, \quad \frac{f}{p}.$$

Quanto ai due rimanenti $\frac{b}{p}, \frac{d}{p}$ basta semplicemente che la loro somma sia uguale a C .

È dunque possibile, in infiniti modi, trasformare la (8) nella (7). Ciascuna di queste soluzioni individua mediante i numeri $a, b, c, d, e, f, m, n, p$ una reciprocità nel piano xy e conseguentemente una reciprocità fra le stelle di centri S ed S' (ottenuta per proiezione dalla reciprocità piana suddetta) e così il luogo di secondo grado, rappresentato dalla (8), si può generare mediante la reciprocità stellare sopra indicata. È dunque effettuato anche il passaggio dalla definizione analitica delle quadriche alla definizione proiettiva. Possono soltanto presentarsi casi particolari facilmente discutibili. Ne segue l'importante osservazione che *i centri delle due stelle reciproche generanti una quadrica, non vengono a essere punti speciali della superficie ma sono da riguardarsi come punti generici*. Infatti si generi la quadrica con le stelle di centri S ed S' , e si pervenga a stabilirne la equazione. Poi si prendano due nuovi punti generici qualunque S'', S''' della superficie, e si applichino tutte le considerazioni fatte precedentemente per passare dalla definizione analitica alla proiettiva, e si troveranno così le due nuove stelle generanti la quadrica con i centri nei punti S'' ed S''' . Per tal modo, il teorema inerente al così detto «*spostamento dei centri delle*

stelle » è stabilito evitando la nota e laboriosa dimostrazione che se ne dà abitualmente in forma sintetica.

6. Dal punto di vista geometrico è però desiderabile assegnare qualche proprietà più espressiva inerente alle stelle in parola.

Può ad es. farsi questa domanda: *data una quadrica e presi due punti generici su di essa come possono individuarsi (senza fare alcun calcolo) due stelle reciproche con i centri in quei punti e capaci di generare la quadrica data?* La risposta è semplice e può essere spiegata appena fatta la teoria della polarità. Essa è la seguente: *si tagli la quadrica con un piano generico passante per la retta reciproca di quella che congiunge i due punti e si proietti da essi il sistema polare che ha origine nel piano suddetto rispetto alla conica sezione con la quadrica. Questa proiezione si faccia dunque nel senso che da uno dei punti dati si proiettino i punti del piano in parola e dall'altro le rette polari di questi punti rispetto alla conica sezione. Ebbene si otterranno così le due stelle reciproche cercate: la quadrica data potrà riguardarsi come il luogo geometrico dei punti d'incontro dei raggi dell'una con i piani corrispondenti dell'altra.*

Ecco la dimostrazione. Sieno A e B i due punti generici presi sulla quadrica data e π un piano passante per la retta polare reciproca della congiungente di A con B . Sia c la conica sezione di π con la quadrica: sia R un punto qualunque di π ed r la polare di R rispetto a c , e finalmente sia P il polo di π : per le ipotesi fatte P esiste sulla retta AB . Si consideri ora il piano dei tre punti A, B, R : esso segnerà la superficie secondo una conica c' passante per A e B per cui AR e BR segheranno, ciascuna, c' in un altro punto: sieno M ed N queste ulteriori intersezioni rispettive. Riguardando la omologia armonica che ha il centro in P e per piano fondamentale π , e osservando che essa trasforma la quadrica in se stessa, si vede subito che il punto H comune alle rette AN, BM esiste sopra π : d'altra parte H appartiene al piano polare di R rispetto alla quadrica, perchè il quadrangolo completo $ABMN$ è iscritto in c' , e R ed H sono punti diagonali: dunque H esiste sulla retta r . Per conseguenza il piano che passa per B e per r contiene tutta la retta BH e quindi anche il punto M esistente sopra AR . (Uguualmente si vede che il piano passante per A ed r taglia il raggio che unisce B ad R nel punto N). c. d. d. La costruzione cade se la retta AB appartiene per intero alla quadrica. Quanto al piano π , siccome si hanno a nostra disposizione infinite sue posizioni possibili (esso non è sottoposto altro che a passare per la reciproca della AB), noi lo sceglieremo in modo che esso tagli la quadrica in una conica reale non degenera.

7. Come utile esercizio ci si può proporre di assegnare le due stelle reciproche in guisa da potere ritrovare, l'uno, dopo l'altro, tutti i

casi metrici possibili di quadriche a punti reali (non spezzate).

La questione può risolversi costruendo le due stelle reciproche mediante la proiezione del sistema polare piano, rispetto a una conica c , da due punti A, B esterni a quel piano. Vale allora la osservazione generale seguente: *Quando la conica c sia reale, la quadrica generata dalle stelle in parola ha punti iperbolici, parabolici, od ellittici a seconda che il punto d'incontro M della retta AB col piano della conica c è esterno alla conica suddetta, ovvero esiste su di essa, o finalmente è interno.* — Infatti basta osservare che ogni tangente che da M si può tirare a C individua una retta della quadrica passante per A (e quindi una per B) e viceversa. Perchè se t è una tale tangente ed N il punto di contatto con c , alla retta AN corrisponde il piano individuato da B e da t che passa manifestamente per la AN , onde tutti i punti di AN appartengono alla quadrica: viceversa se per A passa una retta della quadrica, essa si appoggia a c in un punto: detto N questo punto e t la traccia del piano corrispondente al raggio AN , sul piano di c , ne segue che t passa per N perchè tutta la retta AN esiste nel proprio piano corrispondente: quindi t è tangente a c in N (perchè polare di N rispetto a c): d'altra parte il piano corrispondente suddetto contenendo AN contiene tutta la retta AB e per conseguenza t passa per M .

Ciò premesso ecco la risposta da darsi nei varii casi.

Ellissoide. Perchè la quadrica risulti ellissoide basterà evidentemente che la conica c sia immaginaria e sul piano all'infinito. O, in altre parole; ecco la costruzione: si prenda sopra un piano a distanza finita un sistema polare privo di conica unita e lo si proietti da un punto A esterno al piano, in guisa da ottenere nella stella che ha il centro in A un sistema polare privo di cono unito. Poi preso un altro punto B si tiri per B un raggio qualsiasi r , da A il raggio parallelo r' e poi, per A , il piano q' corrispondente ad r' nella polarità sopra indicata. Variando r nella stella di centro B e conseguentemente q' nella stella di centro A si otterranno due stelle reciproche generanti un'ellissoide perchè mai accadrà che r e q' siano paralleli.

Se, in particolare, si riferiscono tutti raggi per un punto ai piani rispettivamente perpendicolari passanti per un altro punto, la quadrica generata è la sfera che ha per diametro la distanza fra i due punti.

Iperboloide a una falda. La quadrica generata sarà iperboloide ad una falda se la congiungente i punti AB incontrerà il piano di c in un punto esterno a c e se inoltre c sarà ellisse reale. Infatti, per l'osservazione fatta, in generale, la quadrica sarà a punti iperbolici, ma non potrà essere il paraboloido iperbolico perchè contiene la ellisse c .

Iperboloide a due falde. La retta AB incontra il piano di c in un punto interno a c e la c sia iperbole. La quadrica sarà iperboloide a due falde perchè ha punti ellittici per la solita osservazione già fatta, e non può essere nè l'ellissoide, nè il paraboloido ellittico, perchè contiene la iperbole c .

Paraboloido ellittico ed iperbolico. Si può osservare che la quadrica sarà paraboloido se uno dei centri A (o B) sarà all'infinito, se la conica c non sarà parabola e se la congiungente i centri AB passerà per il centro di c . Dunque se c sarà ellisse reale avremo il paraboloido ellittico, se c sarà iperbole avremo il paraboloido iperbolico.

Cono. La quadrica sarà un cono se la retta AB si appoggia a c . (Si vedrebbe anche che il vertice è il coniugato armonico del punto di appoggio rispetto ad AB).

SOPRA I POLIEDRI REGOLARI CONVESSI

(Un capitolo di Geometria descrittiva)

[Periodico di *Mat:ca* Anno XXV. 1909]

Lo scopo principale di questo modesto scritto è di rappresentare, mediante il metodo di Monge, le rotazioni che trasformano in se stessi i poliedri regolari convessi. L'argomento è generalmente dimenticato negli ordinari trattati di Geometria descrittiva malgrado la sua indiscutibile importanza. Dopo la pubblicazione della ormai classica opera di Klein sull'icosaedro (1) è impossibile svolgere un qualsiasi corso di teorie grup-pali senza far capo in qualche modo ai tre notevoli gruppi che prendono nome dai poliedri regolari.

Come utile preparazione sembra dunque opportuno, a chi scrive, di far posto nella Geometria descrittiva (nel capitolo della rappresentazione dei poliedri) alla esposizione sistematica di tali gruppi servendosi del metodo più acconcio che, in questo caso, è quello di Monge.

Ho diviso il presente scritto in due parti. La 1^a contiene la rappresentazione dei cinque solidi regolari convessi. Veramente avrei potuto limitarmi a tre di essi, chè, dal punto di vista gruppale, è ben noto come la teoria del cubo sia identica a quella dell'ottaedro, e quella del do-decaedro a quella dell'icosaedro. Ma, per omogeneità di trattazione, non ho trascurato alcuno dei cinque solidi, riportando pure quelle rappresen-tazioni di essi che sono conosciutissime e si trovano in tutti i trattati, anche perchè mi si è presentata così la occasione di dimostrare certe osserva-zioni che ordinariamente sono soltanto affermate (cfr. per es. i n. 5 e 6).

In base alle costruzioni date nella 1^a parte, si svolge la 2^a parte espressamente dedicata alla descrizione delle rotazioni che sovrappongono a se stessi i poliedri rappresentati e agli importanti gruppi nei quali esse, per così dire, si organizzano.

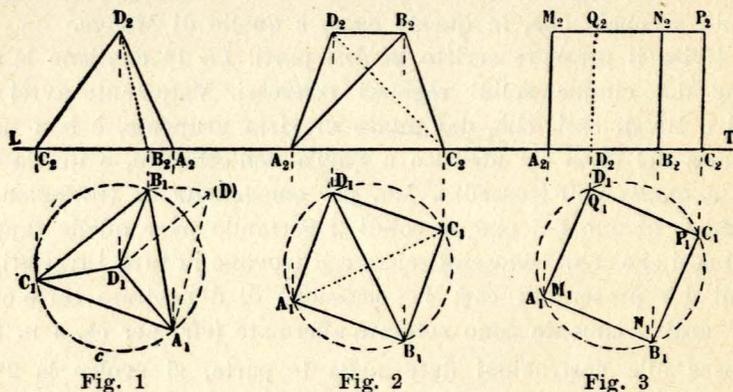
(1) KLEIN, *Vorlesungen über das Ikosaeder un die Auflösung der Gleichungen vom fün-ften Grade*, (Leipzig, Teubner, 1884).

I.

Rappresentazione nel metodo di Monge.

1. *Tetraedro*. — Rappresenteremo il solido in due posizioni particolari rispetto ai piani coordinati. La prima di queste posizioni è la solita adoperata usualmente. Assumiamo per piano orizzontale quello di una faccia e conseguentemente per piano verticale uno che sia parallelo all'altezza del solido che cade su tale faccia. Indichiamo con A, B, C, D i vertici del solido. La proiezione orizzontale si comporrà del triangolo equilatero $A_1 B_1 C_1$ e del suo centro D_1 (fig. 1). Le proiezioni verticali A_2, B_2, C_2 saranno sulla linea di terra nei punti d'incontro con le rispettive ordinate condotte da A_1, B_1, C_1 rispettivamente. Quanto a D_2 esso si troverà sulla ordinata tirata da D_1 ad una distanza dalla linea di terra che è cateto di un triangolo rettangolo che ha per altro cateto $A_1 D_1$ e per ipotenusa il lato del solido che è uguale al lato del triangolo $A_1 B_1 C_1$. Nella figura 1 il triangolo in parola è $A_1 D_1 (D)$ e può considerarsi come il ribaltamento del triangolo $A_1 D_1 D$ sul piano orizzontale attorno al cateto $A_1 D_1$.

« L'altezza del punto D sul piano orizzontale (cioè in sostanza l'altezza del solido) risulta anche uguale al lato del quadrato inscritto nel cerchio c , in cui è pure iscritta una faccia del solido ».



Infatti, prendendo per unità di misura il raggio di c , dal triangolo rettangolo $A_1 D_1 (D)$ si trova:

$$D_1 (D) = \sqrt{A_1 B_1^2 - 1} = \sqrt{2}.$$

Questa osservazione può recare qualche semplificazione quando tutta la figura 1 si incominci dal tracciare il circolo c .

Nella 2^a posizione che dobbiamo considerare, assumeremo per piano verticale uno che sia parallelo alla perpendicolare comune a due spigoli opposti del solido e per piano orizzontale quello che passa per uno di tali spigoli ed è parallelo all'altro (fig. 2). La proiezione orizzontale sarà composta con i vertici del quadrato $A_1 B_1 C_1 D_1$ di cui la diagonale sia uguale al lato del solido. Se AC è il lato esistente sul piano orizzontale, $\overline{A_2 C_2}$ e $\overline{B_2 D_2}$ si troveranno rispettivamente sulla linea di terra e su di una parallela ad essa. Conducendo da $A_1 C_1 B_1 D_1$ le relative ordinate, non mancherà che di conoscere le distanza delle due rette $\overline{A_2 C_2}$, $\overline{B_2 D_2}$ per completare la rappresentazione del solido. Ma tale distanza è manifestamente cateto di un triangolo rettangolo che ha per altro cateto il lato del quadrato $A_1 B_1 C_1 D_1$ e per ipotenusa il lato del solido (cioè la diagonale del quadrato suddetto). Si può dunque dire che:

« La minima distanza di due spigoli opposti del tetraedro uguaglia il lato del quadrato che ha per diagonale lo spigolo del solido ».

2. *Cubo.* — Basta una sola rappresentazione che è la consueta. Assumiamo per piano orizzontale quello di una faccia e per piano verticale uno qualunque perpendicolare al precedente (fig. 3). Allora la proiezione orizzontale è tutta assorbita da un quadrato di cui ogni vertice rappresenta due vertici del solido: le otto proiezioni verticali dei vertici si di-

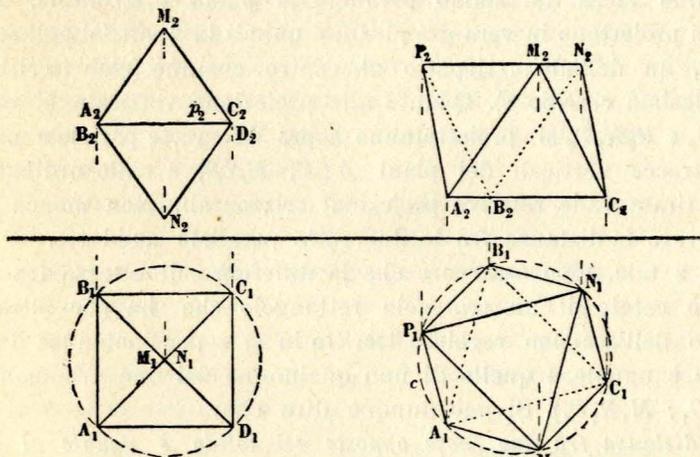


Fig. 4

Fig. 5

stribuiscono, a 4, a 4, sopra due rette parallele (di cui una è la linea di terra) a una distanza fra loro che è uguale al lato del solido cioè al lato del quadrato suddetto. Non manca che di condurre le ordinate dai ver-

tici del quadrato a incontrare le due rette nominate e la rappresentazione è completa.

3. *Ottaedro*. — Occorrono due rappresentazioni.

Per chiarire bene quale deve essere la posizione del solido nella 1^a rappresentazione, indichiamo con A, B, C, D i vertici del solido esistenti in un piano diagonale, con M ed N i due rimanenti. Sceglieremo allora, per piano orizzontale, un piano parallelo al piano diagonale suddetto e per verticale uno che sia perpendicolare ai due spigoli opposti AB, CD (e quindi parallelo ad AD, BC). Ne segue (fig. 4) che la proiezione orizzontale è costituita dal quadrato $A_1B_1C_1D_1$ (uguale al quadrato obbiettivo $ABCD$) e dal centro del suddetto quadrato come rappresentante i due vertici rimanenti M ed N (in $M_1 \equiv N_1$). Per fissare la proiezione verticale si fissi la traccia verticale p_2 del piano diagonale in discorso: dove essa incontrerà le A_1B_1, C_1D_1 , ivi saranno le proiezioni verticali dei vertici di $ABCD$ ed evidentemente A_2 coinciderà con B_2 e C_2 e con D_2 . I punti M_2 ed N_2 esistono sulla ordinata da $M_1 \equiv N_1$, uno da una parte e uno dall'altra di p_2 ad una distanza uguale alla semidiagonale del solido, cioè alla semidiagonale del quadrato $A_1B_1C_1D_1$.

Nella 2^a posizione si assumerà per piano orizzontale uno che sia parallelo a una faccia (fig. 5) e per piano verticale un qualsiasi piano perpendicolare al primo.

Indichiamo allora con ABC e con MNP i due triangoli che costituiscono le due facce del solido parallele al piano orizzontale. Tali due triangoli si proiettano in vera grandezza e quindi in due triangoli equilateri simmetrici, un dell'altro, rispetto al centro comune (cioè iscritti anche in un medesimo cerchio c). Quanto alla proiezione verticale si osserverà che $A_2B_2C_2$ e $M_2N_2P_2$ si proietteranno sopra due rette parallele alla linea di terra (tracce verticali dei piani ABC, MNP) e sulle ordinate corrispondenti tirate dalle relative proiezioni orizzontali. Non manca dunque che di trovare la distanza fra le due rette parallele suddette.

Basta a tale uopo osservare che la differenza di altezza fra i punti C ed M è cateto di un triangolo rettangolo che ha per altro cateto C_1M_1 (lato dell'esagono regolare iscritto in c) e per ipotenusa il lato del solido (che è uguale a quello di uno qualunque dei due triangoli equilateri $A_1B_1C_1; M_1N_1P_1$). Si può dunque dire che:

« *La distanza fra due facce opposte del solido è uguale al lato del quadrato iscritto nel cerchio in cui è pure iscritta una faccia del solido medesimo* ».

Infatti assumendo per unità di misura il raggio di c si ha $C_1M_1=1$; $A_1B_1=\sqrt{3}$ e quindi la distanza in parola è $=\sqrt{2}$.

4. *Dodecaedro.* — È sufficiente rappresentare il poliedro in una sola posizione, che è la solita. Sia, a tale scopo, piano orizzontale il piano di una faccia $ABCDE$. Essa si rappresenterà orizzontalmente in se stessa nel pentagono regolare $A_1B_1C_1D_1E_1$ (fig. 6), inscritto nel cerchio c . La faccia opposta si proietterà orizzontalmente secondo un altro pentagono $R_1S_1T_1U_1V_1$ inscritto nel medesimo cerchio e simmetrico del primo rispetto al centro comune. I vertici rimanenti del solido

compongono un decagono gobbo che si proietta orizzontalmente in un decagono regolare convesso inscritto in un cerchio d concentrico a c . Vediamo come si possa costruire un tal cerchio d , o (ciò che è lo stesso) cerchiamo la proiezione orizzontale di un vertice del suddetto decagono. Immaginiamo, a tale scopo, di far ruotare la faccia $A_1B_1C_1D_1E_1$ del solido attorno a B_1C_1 fino a farla coincidere con l'altra faccia che passa per B_1C_1 . La proiezione orizzontale del punto D_1 , durante il movimento, si sposta sulla perpendicolare tirata da D_1 all'asse di rotazione che è B_1C_1 : d'altra parte quando il movimento di rotazione è finito, la proiezione cercata deve trovarsi sul raggio O_1C_1 ; dunque il punto D_1 alla fine del movimento suddetto, si proietterà nel punto K_1 comune al raggio e alla perpendicolare suddetta. Il cerchio concentrico a c e di raggio O_1K_1 è il cerchio d richiesto. E sopra i raggi che da O_1 proiettano i vertici dei due pentagoni precedenti, nei punti d'incontro di tali raggi con d , si troveranno i vertici del decagono cercato. È così costruita la consueta proiezione orizzontale del solido.

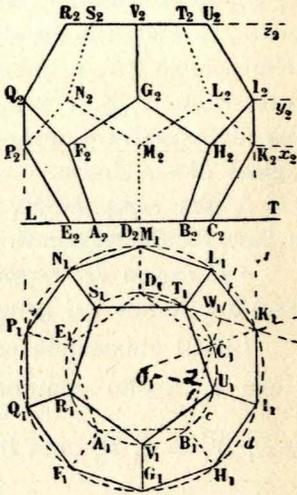


Fig. 6

compongono un decagono gobbo che si proietta orizzontalmente in un decagono regolare convesso inscritto in un cerchio d concentrico a c . Vediamo come si possa costruire un tal cerchio d , o (ciò che è lo stesso) cerchiamo la proiezione orizzontale di un vertice del suddetto decagono. Immaginiamo, a tale scopo, di far ruotare la faccia $A_1B_1C_1D_1E_1$ del solido attorno a B_1C_1 fino a farla coincidere con l'altra faccia che passa per B_1C_1 . La proiezione orizzontale del punto D_1 , durante il movimento, si sposta sulla perpendicolare tirata da D_1 all'asse di rotazione che è B_1C_1 : d'altra parte quando il movimento di rotazione è finito, la proiezione cercata deve trovarsi sul raggio O_1C_1 ; dunque il punto D_1 alla fine del movimento suddetto, si proietterà nel punto K_1 comune al raggio e alla perpendicolare suddetta. Il cerchio concentrico a c e di raggio O_1K_1 è il cerchio d richiesto. E sopra i raggi che da O_1 proiettano i vertici dei due pentagoni precedenti, nei punti d'incontro di tali raggi con d , si troveranno i vertici del decagono cercato. È così costruita la consueta proiezione orizzontale del solido.

Per caratterizzare nel modo più opportuno la proiezione verticale si indichi con $F_1G_1H_1I_1K_1L_1M_1N_1P_1Q_1$ il decagono regolare ultimo trovato e si assuma la linea di terra perpendicolare ai due lati opposti I_1K_1 ; P_1Q_1 . Le proiezioni verticali dei vertici vengono a disporsi, a cinque, a cinque, sulla linea di terra e sopra altre 3 linee ad essa parallele, che indicheremo ordinatamente con x_2, y_2, z_2 . Conducendo dalle proiezioni orizzontali le relative ordinate avremo:

- A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 , sopra la LT
- K_2, H_2, M_2, F_2, P_2 , » » x_2
- I_2, L_2, G_2, N_2, Q_2 , » » y_2
- R_2, S_2, T_2, U_2, V_2 , » » z_2 .

Per completare la proiezione verticale non manca che di trovare le mutue distanze fra le quattro rette parallele suddette. Ci serviremo a tale scopo del solito metodo. La distanza fra $L_2 T_2$ e la x_2 è la lunghezza della proiezione verticale dello spigolo CK , di cui si conosce la vera lunghezza (lato del solido) e la proiezione orizzontale $C_1 K_1$. Dunque la distanza cercata sarà cateto di un triangolo rettangolo che ha per altro cateto $C_1 K_1$ e per ipotenusa il lato del pentagono iscritto nel cerchio c . Analogamente, la distanza fra x_2 e y_2 è la lunghezza della proiezione verticale dello spigolo IK , e quindi è cateto di un triangolo rettangolo che ha per altro cateto $I_1 K_1$ e per ipotenusa il lato del pentagono suddetto. Quanto alla distanza fra y_2 e z_2 essa è uguale a quella fra LT e x_2 per ovvie ragioni di simmetria.

5. Per semplificare, in modo evidente, il processo costruttivo valgono le osservazioni seguenti.

« Il raggio del cerchio d si può ottenere aggiungendo al raggio del cerchio c il lato del decagono regolare iscritto in c ».

$$\begin{aligned} & \text{Infatti chiamando con } W_1 \text{ il punto comune alle rette } B_1 C_1 \text{ e } D_1 K_1 \\ & \text{e con } Z_1 \text{ quello comune alle } O_1 U_1, B_1 C_1 \text{ si ha } C_1 K_1 \cdot \cos K_1 \widehat{C_1 W_1} = \\ & = \overline{C_1 W_1} = \overline{C_1 D_1} \cdot \cos D_1 \widehat{C_1 W_1}, \text{ e quindi } \overline{C_1 K_1} = \overline{C_1 D_1} \cdot \frac{\cos D_1 \widehat{C_1 W_1}}{\cos K_1 \widehat{C_1 W_1}} = \\ & = - C_1 D_1 \cdot \frac{\cos B_1 \widehat{C_1 D_1}}{\cos B_1 \widehat{C_1 O_1}} = - \overline{C_1 D_1} \cdot \frac{\cos (2 \cdot B_1 \widehat{C_1 O_1})}{\cos B_1 \widehat{C_1 O_1}} = \\ & = - \overline{C_1 D_1} \left\{ \frac{\cos^2 B_1 \widehat{C_1 O_1} - \sin^2 B_1 \widehat{C_1 O_1}}{\cos B_1 \widehat{C_1 O_1}} \right\} = \overline{C_1 D_1} \left\{ \frac{1 - 2 \cos^2 B_1 \widehat{C_1 O_1}}{\cos B_1 \widehat{C_1 O_1}} \right\} = \\ & = \overline{C_1 D_1} \left\{ \frac{1 - 2 \sin^2 C_1 \widehat{O_1 Z_1}}{\sin C_1 \widehat{O_1 Z_1}} \right\} \end{aligned}$$

e prendendo per unità di misura il raggio del cerchio c , sarà

$$\overline{C_1 K_1} = \frac{\overline{C_1 D_1} \left\{ 1 - 2 \left(\frac{B_1 C_1}{2} \right)^2 \right\}}{\frac{B_1 C_1}{2}} = \frac{\overline{B_1 C_1} \left\{ 1 - \frac{B_1 C_1^2}{2} \right\}}{\frac{B_1 C_1}{2}} = 2 - \overline{B_1 C_1}^2. \text{ Ma}$$

$\overline{B_1 C_1}$ è il lato del pentagono convesso regolare iscritto in c e quindi

$$\overline{B_1 C_1} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{5}}.$$

E perciò

$$\overline{C_1 K_1} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

il che prova l'affermazione fatta.

« La distanza fra la linea di terra e la retta x_2 è uguale al raggio del cerchio. c . Infatti essa è cateto di un triangolo rettangolo che ha per altro cateto il lato del decagono iscritto in c (per l'osservazione precedente) e per ipotenusa il lato del pentagono. Ora è ben noto che esiste un triangolo rettangolo che ha per cateti il raggio e il lato del decagono iscritto e per ipotenusa il lato del pentagono iscritto, dunque la distanza cercata è effettivamente data dal raggio in parola.

« La distanza fra le due rette parallele $x_2 y_2$ è uguale al lato del decagono iscritto nel cerchio c ».

Infatti, come abbiamo visto, essa è cateto di un triangolo rettangolo che ha per ipotenusa il lato del pentagono iscritto in c e per altro cateto il lato del decagono iscritto in d , cosicchè (per il teorema dianzi citato) tutto si riduce a dimostrare che il lato del decagono iscritto in d è uguale al raggio di c . Ciò risulta subito dal confronto dei due triangoli simili $O_1 C_1 T_1$, $O_1 K_1 L_1$ i quali dànno:

$$\overline{O_1 C_1} + \overline{C_1 K_1} : K_1 L_1 = O_1 C_1 : O_1 T_1$$

ma sappiamo già che $\overline{C_1 K_1} = C_1 T_1$, dunque:

$$O_1 C_1 \cdot C_1 T_1 + \overline{C_1 T_1}^2 = \overline{O_1 C_1} \cdot \overline{K_1 L_1}$$

e d'altra parte è

$$\overline{C_1 T_1}^2 = \overline{O_1 C_1} \cdot (O_1 C_1 - O_1 T_1)$$

per cui sostituendo si trova:

$$\overline{O_1 C_1} = \overline{K_1 L_1}$$

ciò che dimostra la nostra affermazione.

6. *Icosaedro*. — È necessario considerare tre posizioni diverse del solido rispetto ai piani coordinati.

La prima di queste posizioni è la consueta. Si assuma per piano orizzontale un piano perpendicolare alla retta che congiunge due vertici opposti M ed N (fig. 7). Tale piano riesce parallelo ai piani di due pentagoni che hanno per vertici i rimanenti 10 vertici del solido e che noi, per brevità, chiameremo « pentagoni diagonali ». Essi si proiettano orizzontalmente in vera grandezza in due pentagoni regolari col lato uguale allo spigolo del solido, iscritti nel medesimo cerchio c e simmetrici uno del-

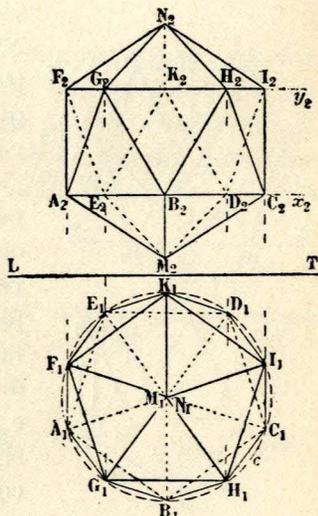


Fig. 7

l'altro rispetto al centro del cerchio (il quale centro rappresenta orizzontalmente le proiezioni $M_1 \equiv N_1$ di M ed N).

Per maggiore simmetria, assumiamo per linea di terra una perpendicolare ad una delle altezze comuni dei suddetti pentagoni $A_1 B_1 C_1 E_1$, $F_1 G_1 H_1 I_1 K_1$. Per costruire la proiezione verticale si osservi che $A_2 B_2 C_2 D_2 E_2 F_2 G_2 H_2 I_2 K_2$ si disporranno sopra due rette $x_2 y_2$ parallele alla linea di terra, e che M_2 ed N_2 si troveranno a distanze uguali dalla striscia che tali parallele individuano uno al disopra e uno al disotto. Per cui non manca che di trovare la distanza fra x_2 e y_2 e quella fra M_2 e x_2 per potere completare, mediante le ordinate relative, la proiezione verticale. Per determinare tali distanze si osservi che la distanza fra M_2 e x_2 non è che l'altezza del punto C_2 sopra il piano parallelo all'orizzontale condotto per M . Essa è dunque cateto di un triangolo rettangolo che ha per ipotenusa il lato del solido (cioè il lato di uno dei due pentagoni iscritti in c) e per altro cateto il segmento $M_1 C_1$ (cioè il raggio di c). In modo analogo la distanza fra x_2 e y_2 si vede che è l'altezza del punto F sopra il piano parallelo all'orizzontale passante per E . Essa è dunque cateto di un triangolo rettangolo che ha per ipotenusa il lato del solido (cioè il lato di uno dei due pentagoni iscritti in c) e per altro cateto il segmento $E_1 F_1$ (ossia il lato del decagono iscritto in c).

Le costruzioni inerenti a queste distanze possono semplificarsi dimostrando:

« Che la distanza fra M_2 e x_2 uguaglia il lato del decagono iscritto in c ».

« Che la distanza fra x_2 e y_2 uguaglia il raggio di c ». Per convincersene basta considerare la esistenza, già notata al N° 5, di un triangolo rettangolo che ha per ipotenusa il lato del pentagono iscritto in un cerchio qualunque e per cateti il lato del decagono iscritto nello stesso cerchio e il raggio.

7. Per collocare il solido nella seconda delle posizioni volute si assuma per piano orizzontale quello di una faccia $A B C$ (fig. 8). Con ciò i 12 vertici vengono a disporsi, a tre, a tre, in quattro piani paralleli di cui il primo è il piano orizzontale. Sieno tali terne in ordine di altezza così indicate: $A B C$, $D E F$, $G H I$, $K M N$. La prima e l'ultima costituiscono due facce opposte: esse si proiettano, in vera grandezza, in due triangoli equilateri $A_1 B_1 C_1$, $M_1 N_1 K_1$ iscritti nel medesimo cerchio e simmetrici uno dell'altro rispetto al centro. Nella figura 8 tale cerchio, che indiche-

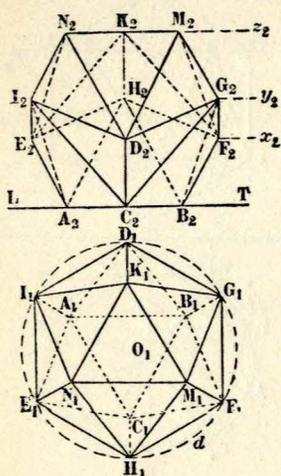


Fig. 8

remo con c , non è disegnato per non complicarla troppo. Rimangono da rappresentarsi orizzontalmente i 6 vertici DEF, GHI che possono riguardarsi componenti l'esagono regolare gobbo $DGFHEI$. Esso si proietterà in un esagono regolare direttamente omotetico a $K_1 B_1 M_1 C_1 N_1 A_1$ e non mancherà quindi che di trovare il raggio del cerchio d circoscritto a tale esagono. Si consideri perciò il pentagono diagonale $MNECF$ e si osservi che la sua diagonale EF si proietta in vera grandezza (orizzontalmente) e precisamente nel lato del triangolo equilatero iscritto in d . Ma EF è anche diagonale del pentagono regolare che ha per lato $A_1 B_1$. Si costruisca dunque una tale diagonale eppoi si descriva (concentrico a c) un cerchio il cui triangolo equilatero iscritto abbia per lato la lunghezza della diagonale prima trovata e la questione sarà risolta.

Quanto alla proiezione verticale si osserverà che i vertici vengono, ivi, a distribuirsi secondo le terne già scritte in 4 rette parallele di cui la prima è la linea di terra. Indichiamo le altre con $x_2 y_2 z_2$. Non manca che di trovarne le mutue distanze perchè (servendosi delle ordinate relative) possa dirsi completata anche la proiezione verticale.

Ora la distanza fra LT e x_2 è l'altezza di F sul piano orizzontale e quindi è cateto di un triangolo rettangolo che ha per altro cateto $B_1 F_1$ e per ipotenusa il lato del solido (cioè $B_1 C_1$). In modo analogo la distanza fra x_2 e y_2 è la differenza delle altezze di G e D sul piano orizzontale e per conseguenza uguaglia il cateto di un triangolo rettangolo che ha per altro cateto $D_1 G_1$ e per ipotenusa il lato del solido (ossia $B_1 C_1$).

8. Le costruzioni del N. precedente possono semplificarsi notevolmente mediante le seguenti osservazioni.

Circa all'icosaedro si può aggiungere che le diagonali sono di due specie. Quelle di una specie riuniscono due vertici opposti. La loro lunghezza è $2d + r = \sqrt{5}$ (d è il lato del decag. iscritto nel cerchio di raggio r).

Quelle delle altre specie sono diagonali di uno qualunque dei pentagoni piani facce del solido. Ognuna ha per sez. aurea il lato del solido e

$$\text{quindi è} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$$

« Il raggio del cerchio esterno d si può ottenere aggiungendo al raggio del cerchio interno c il lato del decagono iscritto in c ».

Infatti

$$\overline{O_1 F_1} = \frac{\overline{E_1 F_1}}{\sqrt{3}}, \quad \overline{O_1 M_1} = \frac{\overline{M_1 N_1}}{\sqrt{3}}.$$

Ma prendendo per unità di misura il raggio del cerchio, in cui è iscritto il pentagono regolare di lato M_1N_1 , si ha:

$$\overline{M_1N_1} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2}; E_1F_1 = 2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2}$$

e quindi

$$\overline{M_1F_1} = \overline{O_1F_1} - \overline{O_1M_1} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2\sqrt{3}}$$

da cui

$$\frac{\overline{M_1F_1}}{\overline{O_1M_1}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}. \quad \text{c. d. d.}$$

« Le distanze di x_2 , y_2 dalla linea di terra sono rispettivamente uguali ai raggi dei cerchi c e d ».

Dimostriamo prima che la distanza fra LT e y_2 è uguale al raggio del cerchio d . Perciò osserviamo che, essa può riguardarsi come altezza di G sul piano orizzontale, ossia come cateto di un triangolo rettangolo che ha per altro cateto B_1G_1 e per ipotenusa il lato del solido (ossia A_1B_1). Basta dunque dimostrare la seguente identità

$$\overline{A_1B_1}^2 - \overline{B_1G_1}^2 = (\overline{O_1B_1} + \overline{B_1G_1})^2,$$

la quale si rende manifesta osservando che, per l'osservazione precedente si ha:

$$\overline{B_1G_1}^2 = \overline{O_1B_1} \cdot (\overline{O_1B_1} - \overline{B_1G_1}), \quad \overline{A_1B_1}^2 = 3 \overline{O_1B_1}^2.$$

Finalmente, per dimostrare che la distanza fra LT e x_2 è uguale al raggio del cerchio c , basta dimostrare che la distanza fra x_2 e y_2 è uguale a B_1G_1 . Ora la distanza fra x_2 e y_2 , essendo l'altezza del punto G sul piano parallelo all'orizzontale che passa per F , è cateto di un triangolo rettangolo che ha per altro cateto F_1G_1 e per ipotenusa A_1B_1 .

Tutto dunque si riduce a dimostrare la seguente identità

$$\overline{A_1B_1}^2 - \overline{F_1G_1}^2 = \overline{B_1G_1}^2.$$

Ma $\overline{F_1G_1}$, lato dell'esagono iscritto in d , uguale al raggio del cerchio d , e allora si ricade nella identità dimostrata precedentemente, c. d. d. Quanto poi alla distanza fra y_2 e z_2 essa è uguale a quella fra LT e x_2 per evidenti ragioni di simmetria.

9. In ultimo, per collocare il solido nella terza posizione che occorre di considerare, si osservi che già dalla figura 7 risulta che i 30 spigoli sono, a due a due, paralleli in guisa che i 15 piani che così vengono

individuati compongono 5 triedri trirettangoli col vertice nel centro del solido. Uno di tali triedri (è in quella figura 7) individuato dai tre piani: $MKNB$, $GHDE$, $AFCI$. Ebbene prendiamo per piani coordinati due che sieno paralleli a $MKNB$, $GHDE$ (fig. 9). Se il piano orizzontale è quello parallelo a $MKNB$, un tale rettangolo si proietterà, ivi, in vera grandezza in $M_1K_1N_1B_1$ dove i lati $M_1K_1K_1N_1$ saranno rispettivamente uguali allo spigolo del solido e alla diagonale di un pentagono diagonale. Se si osserva, che lo spigolo suddetto è anche lato del nominato pentagono e che d'altra parte il lato del pentagono regolare è la parte maggiore della sua diagonale divisa in sezione aurea, si vede che per costruire un rettangolo come $M_1N_1K_1B_1$ si può prendere il lato maggiore a piacere e il lato minore uguale alla parte maggiore del lato maggiore diviso in sezione aurea. I quattro vertici $GHDE$ (situati sopra i due spigoli opposti GH , DE) si proietteranno, a due, a due, negli estremi del segmento $G_1H_1 \equiv D_1E_1$ che avrà la lunghezza K_1M_1 e si disporrà sull'asse di simmetria del (rettangolo $M_1K_1N_1B_1$) che è parallelo a K_1N_1 e avrà il suo punto medio nel centro del rettangolo medesimo. I quattro vertici rimanenti A, F, C, I si proietteranno a due, a due negli estremi di un segmento che avrà la lunghezza K_1N_1 , che sarà disposto sull'altro asse di simmetria del solito rettangolo e sarà bisecato dal centro del medesimo rettangolo. Per l'esattezza della costruzione si osservi che i tre punti M_1, G_1, C_1 debbono essere in linea retta perchè i loro obbiettivi sono vertici del pentagono diagonale $MGCIE$ che esiste in un piano perpendicolare all'orizzontale (è il piano delle rette EG, IC). La stessa cosa può dirsi di $K_1G_1A_1$ e di $I_1D_1B_1, A_1H_1N_1$. La proiezione verticale si può ottenere dalla orizzontale facendola ruotare, nel piano del disegno, di 90° attorno al suo centro e poi spostandola con una traslazione arbitraria nel senso A_1C_1 .

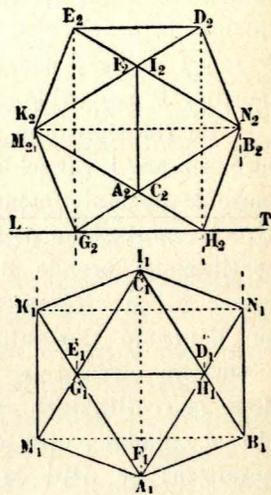


Fig. 9

II.

I gruppi di rotazioni.

10. Prima di trattare delle rotazioni che trasformano in sè stesso un poliedro regolare convesso, sarà utile fare qualche considerazione di carattere generico. Indichiamo col simbolo θ una rotazione dello spazio intorno ad un asse. Se immaginiamo di compierla successivamente n volte

troveremo una nuova rotazione che indicheremo col simbolo θ^n . Se l'ampiezza di θ è parte aliquota della intera circonferenza, ad es: la p -esima parte, ne segue che la rotazione θ^p riporta in se stesso ogni punto dello spazio. Allora si suol dire che θ^p è la identità, che p è il periodo di θ e si suole scrivere $\theta^p = 1$. La rotazione inversa di θ è quella che si ottiene eseguendo la θ in senso inverso: si suole indicarla con θ^{-1} e si scrive $\theta \cdot \theta^{-1} = 1$ per esprimere che eseguendo la θ e dopo la θ^{-1} si ottiene l'identità. È poi evidente che si ha $\theta^{-1} = \theta^{p-1}$.

Le rotazioni che dovremo prendere in considerazione, permutano fra loro sempre i vertici di un poliedro. Per cui riteniamo opportuno richiamare le nozioni fondamentali inerenti alle permutazioni sopra n elementi. Una permutazione sopra n elementi si chiama sostituzione. Per $n = 2$ la sostituzione prende il nome di trasposizione. Se all'elemento a si sostituisce b , se all'elemento b si sostituisce l'elemento c e così di seguito, se all'ultimo elemento k si sostituisce a , la sostituzione si chiama « sostituzione circolare » o « ciclo » e si indica col simbolo $(abc \dots k)$. Se, dopo la sostituzione S , si eseguisce la T , si trova una nuova sostituzione che si chiama prodotto di S per T e si indica con ST . Il concetto si generalizza: se dopo la sostituzione ST si effettua la U si dice che si è fatta la sostituzione STU prodotto di S per T e per U ecc. Un prodotto di più sostituzioni non gode in generale la proprietà commutativa, gode invece sempre la proprietà associativa. Se $S = T = U = \dots$ il prodotto si chiama potenza di S . Con S^{-1} si indica la sostituzione inversa di S . Una sostituzione qualsiasi può sempre riguardarsi come il prodotto di più sostituzioni circolari: quando così la si riguardi, si può dire che la si decompone in cicli. Si può sempre fare in modo che questi cicli sieno trasposizioni. A seconda che il numero di queste trasposizioni è pari, o dispari, la sostituzione si chiama pari, o dispari. La sostituzione $S^{-1}TS$ si chiama trasformata di T mediante S . Più sostituzioni si dice che formano un gruppo quando il prodotto di due qualunque di esse equivale ad un'altra sostituzione del gruppo. Chiamasi ordine del gruppo il numero delle sostituzioni che lo compongono, l'identità compresa. Un esempio semplice di gruppo è fornito dalle potenze di una stessa sostituzione. Un altro esempio è dato dal gruppo di tutte le sostituzioni pari sopra n elementi. Esso ha l'ordine $= \frac{n!}{2}$ e si chiama « gruppo alterno ». Il gruppo di tutte le sostituzioni (pari e dispari) è d'ordine $n!$ e si chiama gruppo totale. Se le sostituzioni di un gruppo G_1 appartengono tutte a un altro gruppo, più ampio, G_2 si dice che G_1 è sottogruppo di G_2 . Così il gruppo alterno è sottogruppo del gruppo totale.

11. *Gruppo del tetraedro.* — Proponiamoci ora di esaminare le rotazioni che sovrappongono a se stesso un poliedro regolare convesso cominciando dal tetraedro. La figura 1 dimostra la esistenza di una rotazione di ampiezza $\frac{2\pi}{3}$, attorno all'altezza del tetraedro che passa per il vertice D , capace di trasformare il tetraedro in se medesimo: infatti la figura stessa ci dice che, per effetto di tale rotazione, il vertice D non cambia, mentre i rimanenti tre vertici vengono permutati circolarmente. Il periodo della rotazione è uguale a 3. Con essa viene a individuarsi il suo quadrato, o (ciò che è lo stesso) la sua inversa.

L'effetto di una tale rotazione può rappresentarsi col simbolo (ABC) che denota la sostituzione prodotta sopra i vertici ABC .

Quanto a D , è sottinteso che rimane fisso. La rotazione inversa avrà il simbolo $(ABC)^{-1} = (ABC)^2 = (ACB)$. Si può dunque dire che esistono otto rotazioni del solido in se stesso a periodo tre: a due, a due, sono inverse una dell'altra e si compiono attorno alle 4 altezze del solido.

D'altra parte considerando la figura 2 si può affermare la esistenza di un'altra rotazione che trasforma il tetraedro in se stesso. L'asse è la perpendicolare comune ai due spigoli opposti AC, BD : l'ampiezza è π e quindi il periodo è uguale a due. Essa scambia A con C e B con D per cui il suo effetto sopra i vertici può rappresentarsi col simbolo $(AC)(BD)$.

Esistono dunque altre tre rotazioni (a periodo 2) che sovrappongono il solido a se medesimo. Esse si compiono attorno alle rette che congiungono i punti medi di due spigoli opposti.

12. Si hanno quindi in tutto 11 rotazioni che trasformano il solido in se stesso. Ebbene, se si considerano le 11 sostituzioni sui vertici che sono l'effetto di tali rotazioni, e si aggiunge la identità, si trova un insieme di 12 sostituzioni le quali formano un gruppo nel senso stabilito nel n. precedente. Per dimostrarlo si osservi che esse, possono rappresentarsi simbolicamente come segue

$$\begin{array}{ccccccc} (AB)(CD); & (AC)(BD); & (AD)(BC) \\ (ABC)^r; & (BCD)^r; & (ACD)^r; & (ABD)^r \\ & & r = 1, 2, 3 \end{array}$$

dove per $r = 3$ si avrà la identità. Or bene è evidente che ciascuna è una sostituzione pari (ad es. $(ABC) = (AB)(AC)$: il prodotto di due sostituzioni pari è ancora pari: d'altra parte le sostituzioni pari sopra $ABCD$ sono tutte e sole quelle sopra rappresentate: è dunque necessario che il prodotto di due qualunque di esse equivalga a una 3^a sostituzione scelta fra le 12 medesime.

Questo prova che esse formano un gruppo. Lo si chiama il « Gruppo del tetraedro ». Si può dunque enunciare il seguente teorema:

« Le rotazioni che sovrappongono a sè stesso un tetraedro regolare sono delle due specie seguenti: ne esistono tre a periodo due i cui assi sono le tre congiungenti i punti medi di 2 spigoli opposti del solido;

ne esistono otto a periodo tre (a due, a due, inverse una dell'altra) e aventi per assi le quattro altezze del tetraedro.

Se a queste rotazioni si aggiunge la identità e si considera l'effetto che esse producono sui vertici del solido, si perviene al gruppo alterno di 12 sostituzioni sopra 4 elementi ».

Un notevole sottogruppo del gruppo ora descritto, è quello composto dalla identità e da tutte e tre le sostituzioni a periodo due:

$$(AB)(CD); \quad (AC)(BD); \quad (AD)(BC).$$

Esso suol chiamarsi un gruppo quadrimio e siccome esso è unico, nel sottogruppo alterno in parola, così è chiaro che tutte le 12 sostituzioni considerate, debbono trasformarlo in se stesso; il che si esprime dicendo che il gruppo alterno in discorso possiede come sottogruppo invariante il gruppo quadrimio.

13. Gruppo dell'ottaedro (o del cubo). — Procedendo nelle nostre considerazioni, in modo analogo a quel che si è fatto per il tetraedro, dovremmo prendere in esame, adesso, le rotazioni che sovrappongono a se medesimo il cubo. Ma si vede facilmente che esse sono identiche a quelle inerenti all'ottaedro. Basta infatti osservare che i centri delle facce di un cubo possono riguardarsi come vertici di un ottaedro regolare e, quindi ogni rotazione che sovrappone a se stesso il cubo, sovrappone a se stesso anche l'ottaedro e viceversa. Ecco dunque perchè l'ottaedro e il cubo, si sogliono riguardare insieme; e noi, in considerazione delle proiezioni disegnate, riferiremo il nostro linguaggio all'ottaedro.

La figura 4 ci dimostra la esistenza di due specie di rotazioni che trasformano l'ottaedro in se stesso. L'una si compie attorno alla diagonale MN , perpendicolare al piano orizzontale, ha l'ampiezza di $\frac{\pi}{2}$ e quindi il periodo uguale a quattro. L'altra si compie attorno alla retta che passa per i punti medi dei due spigoli opposti AD , BC (e che risulta perpendicolare al piano verticale). L'ampiezza di questa seconda rotazione è π cioè il suo periodo è uguale a due.

La figura 5 dimostra poi la esistenza di un'altra specie di rotazioni sovrapponenti il solido a se medesimo. Infatti da quella figura risulta manifesto che, facendo una rotazione di ampiezza $\frac{2\pi}{3}$, attorno alla retta

che unisce i centri delle due facce opposte ABC , MNP il solido si trasforma in se stesso. Il periodo di una tale rotazione è uguale a tre.

14. Consideriamo ora l'effetto che producono queste varie specie di rotazioni sulla 4 rette $abc.l$ che uniscono i punti medi di due facce opposte dell'ottaedro (o, ciò che è lo stesso, sulle 4 diagonali del cubo).

Una rotazione a periodo 4, permuta circolarmente le 4 facce del solido che concorrono nell'uno, o nell'altro, dei due vertici esistenti sull'asse di rotazione: essa permuterà dunque, nel medesimo modo, i centri di tali facce e quindi anche le relative rette a, b, c, d . Dunque l'effetto di una tale rotazione, sopra le nominate rette, è quello di produrre una sostituzione del tipo $(abcd)$.

Una rotazione a periodo tre, si compie attorno a una delle rette in parola: quindi una tale retta rimane fissa e le altre tre vengono permutate circolarmente. La sostituzione che viene a effettuarsi su di esse è del tipo (abc) .

Finalmente le rotazioni a periodo due, possono essere di due specie. Quelle, già descritte, che hanno per assi le congiungenti i punti medi di due spigoli opposti e quelle che costituiscono i quadrati delle rotazioni a periodo 4. Quanto a quest'ultime, il simbolo della sostituzione che esse producono è subito trovato: basta fare il quadrato di $(abcd)$ e si trova il tipo $(ac)(bd)$. Circa alle prime si osservi che si permutano fra loro due facce segantesi nell'uno, o nell'altro, dei due spigoli che si appoggiano all'asse di rotazione, dunque altrettanto avverrà dei centri di tali facce e quindi delle relative rette $abcd$. Le rimanenti coppie di facce opposte non vengono permutate. Dunque la sostituzione cercata è del tipo (ab) .

Ora se si tien presente che le sostituzioni possibili sopra a, b, c, d sono necessariamente appartenenti ai tipi dianzi trovati:

$$(abcd), \quad (abc), \quad (ac)(bd), \quad (ab)$$

si vede che (riunendo in una sola proposizione i risultati delle osservazioni di questo n. e del precedente) si può enunciare questo teorema:

« Le rotazioni che sovrappongono a se stesso un ottaedro regolare si possono classificare, a seconda del loro periodo, nelle seguenti specie:

Ne esistono sei a periodo quattro. A due, a due, sono inverse una dell'altra e si compiono attorno alle tre diagonali del solido.

Ne esistono otto a periodo tre. A due, a due, sono inverse una dell'altra e si compiono intorno alle 4 rette che congiungono i centri di due facce opposte.

Ne esistono nove a periodo due. Sei hanno per assi le sei congiungenti i punti medi di due lati opposti. Le tre rimanenti non sono altro che i quadrati delle rotazioni a periodo quattro.

Se a queste 23 rotazioni, si aggiunge la identità e si considera l'effe-

to che esse producono sopra i quattro assi delle rotazioni a periodo tre, si perviene al gruppo totale di 24 sostituzioni sopra quattro elementi ».

È dunque naturale di chiamare un tale gruppo « il gruppo dell'ottaedro ». Esso contiene manifestamente come sottogruppo invariante quello del tetraedro.

15. Gruppo dell'icosaedro (o del dodecaedro). — In modo perfettamente analogo a quanto si è fatto per l'ottaedro e per il cubo, si può osservare, che ogni rotazione che sovrappone a se stesso un icosaedro regolare, sovrappone a se stesso anche il dodecaedro regolare che ha i vertici nei centri delle facce dell'icosaedro e viceversa: ogni rotazione in se del secondo solido è tale anche per il primo. Possiamo dunque limitarci a considerare l'icosaedro. Giovano a tale scopo le figure 7, 8 e 9.

La figura 7 dimostra la esistenza di una rotazione a periodo 5, sovrapponente il solido a se medesimo. La rotazione si compie attorno alla retta che unisce i due vertici opposti M, N .

La figura 8 mette in evidenza una rotazione, trasformante il solido in se stesso, col periodo uguale a tre. L'asse di rotazione è la retta che unisce i centri delle due facce opposte: ABC, MNK .

Finalmente dalla considerazione della figura 9 risulta un'altra specie di rotazione del solido in se stesso. Il periodo è uguale a due e l'asse congiunge i punti medi dei due spigoli opposti DE, GH .

16. Per vedere l'effetto prodotto da queste rotazioni, osserviamo come già vedemmo al N. 9 e figura 9, che i 12 vertici del solido possono distribuirsi a 4 a 4 nei tre piani $DEGH, MKNB, ICFA$ formanti un triedro trirettangolo con il vertice nel centro del solido e i cui spigoli sono le tre congiungenti i punti medi degli spigoli opposti (DE, GH), (MK, NB), (IC, FA). È manifesto che una distribuzione dei 12 vertici in tre quaterne, come quelle descritte, può farsi in cinque modi dando così luogo a cinque triedri, come quello descritto, che chiameremo i triedri di simmetria del solido e indicheremo con le lettere $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$. Ebbene: ci proponiamo di esaminare l'effetto che si produce sopra questi triedri da ciascuna delle rotazioni descritte nel N. precedente. Cominciamo da una rotazione a periodo due. Il suo asse sarà spigolo di uno dei triedri suddetti: per es. di α . Ne segue che α non varia nella rotazione (i rimanenti due spigoli di α vengono scambiati fra loro). Dei rimanenti triedri $\beta, \gamma, \delta, \epsilon$ niuno rimane immutato perchè; se ad es. β rimanesse tale, bisognerebbe che uno dei suoi tre spigoli fosse asse di rotazione, cioè α e β dovrebbero avere uno spigolo in comune il che è impossibile. Ma d'altra parte il periodo della rotazione è due, dunque la sostituzione che essa produce sarà una delle seguenti tre:

$$(\beta\gamma) (\delta\epsilon); \quad (\beta\delta) (\epsilon\gamma); \quad (\beta\epsilon) (\delta\gamma).$$

Quando si fa invece una sostituzione a periodo tre, come nella figura 8, si vede che si permuteranno circolarmente gli assi che passano per i punti medi di AB , BC , CA i quali appartengono manifestamente a tre diversi triedri di simmetria. Quanto ai due triedri rimanenti è certo che essi non possono venire scambiati altrimenti il periodo della rotazione non potrebbe essere uguale a tre: dunque rimarranno immutati. La sostituzione cercata è dunque del tipo $(\alpha\beta\gamma)$.

Finalmente, dall'esame della figura 7 si vede che una rotazione a periodo 5 permuta circolarmente i cinque spigoli concorrenti in M e siccome due di essi non appartengono certamente a un medesimo triedro di simmetria, così ne viene che i cinque triedri in parola vengono permutati circolarmente e la sostituzione corrispondente è del tipo $(\alpha\beta\gamma\delta\epsilon)$.

Ebbene: se alle sostituzioni dei tipi trovati si aggiunge la identità, è evidente che si trovano tutte le sostituzioni pari sopra i cinque elementi $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$ e costituenti quindi il gruppo alterno. Riunendo questo risultato a quello del precedente si può dunque formulare la seguente proposizione:

« Le rotazioni che sovrappongono a se stesso un icosaedro regolare si possono classificare, a seconda del loro periodo, nel modo seguente:

Ne esistono 24 a periodo cinque divisibili in sei quaterne, quelle di ogni quaterna essendo le 4 diverse potenze di una medesima e avendo quindi l'asse in comune. I sei assi che così si trovano sono le sei rette che congiungono due vertici opposti del solido.

Ne esistono 20 a periodo tre divisibili in 10 coppie, quelle di ogni coppia essendo l'una inversa dell'altra e avendo quindi l'asse in comune. I 10 assi che così si trovano sono le 10 rette che congiungono ciascuna i centri di due facce opposte del solido.

Ne esistono 15 a periodo due, attorno alle 15 rette congiungenti ciascuna i punti medi di due spigoli opposti.

Se a queste 59 rotazioni si aggiunge la identità e si considera l'effetto che esse producono sopra i cinque triedri di simmetria del solido, si perviene al gruppo alterno di 60 sostituzioni sopra cinque elementi».

Ecco perchè un tal gruppo si suol chiamare « il gruppo dell'icosaedro ». Esso contiene i cinque sottogruppi tetraedrici che si ottengono tenendo fisso uno dei triedri suddetti e permutando gli altri quattro secondo le sostituzioni del gruppo alterno sopra quattro elementi (1).

(1) Relativamente alla prima parte di questo scritto veggansi le seguenti pubblicazioni di E. P. PATERNÒ: *Su talune proprietà dei poliedri regolari di prima specie*. Palermo, tip. del « Giornale di Sicilia », 1882. *Un teorema sulle proiezioni di due segmenti rettangolari*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1904.

Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page. The text is too light to transcribe accurately.

**SOPRA LA CURVA MERIDIANA DELLA SUPERFICIE
D'ONDA DEL MIRAGGIO.**

[Nuovo Cimento 1909]

Il Prof. Garbasso in alcune sue recenti ricerche (1) si è imbattuto in un ente geometrico che sembra degno di rilievo, non soltanto per il significato fisico, ma anche dal punto di vista matematico.

Si tratta della superficie d'onda del miraggio. Essa è una superficie di rotazione. Alla sua sezione meridiana sono dedicate le brevi pagine seguenti.

L'interesse particolare che presenta questa curva (la quale è algebrica) si concentra intorno al fatto di avere uguali le caratteristiche Plückeriane duali, il che può esprimersi dicendo che è una curva duale di se stessa o, più brevemente chiamandola « *autoduale* ». L'ordine e la classe sono entrambi uguali a sei, la curva possiede otto cuspidi e altrettanti flessi: è priva di punti doppi a tangenti distinte e di bitangenti a punti di contatto distinti. Il genere è dunque uguale a 2. Questo costituisce un'altra particolarità non disprezzabile giacchè gli esempi più ovvi di curve autoduali sono tutti di genere zero. Così ad es. la conica, la cubica cuspidale, la quartica con un nodo e due cuspidi (di cui sono casi particolari metrici la lumaca di Pascal e il cosiddetto « *cocked hat* » (2) ecc., sono tutte curve razionali. E d'altra parte volendo cercare esempi meno semplici di curve autoduali, non basterà supporre uguali i numeri duali delle formule di Plücker, eppoi cercarne delle soluzioni intere e positive, o nulle; giacchè è ben noto come non si possa affatto affermare che a un sistema di numeri interi positivi capaci di soddisfare alle formule di Plücker, corrisponda una curva così che le sue caratteristiche Plückeriane sieno rappre-

(1) Si veda la nota precedente.

(2) G. LORIA. *Spezielle algebraische, und transcendente ebene Kurven*. Leipzig. Teubner. 1902, pp. 140-143.

sentate da quei numeri. Dunque anche dal punto di vista del genere è a ritenersi che la nostra curva sia degna di qualche interesse.

§ I. — Il caso metrico

1. La superficie d'onda del miraggio è, come abbiamo già detto, una superficie di rotazione. Per individuarla basta dunque assegnare l'equazione di una sezione meridiana e la posizione dell'asse di rotazione.

Riprendiamo a tale scopo le notazioni di Garbasso. Egli indica con n l'indice di rifrazione e pone:

$$n^2 = n_0^2 + a x$$

dove a è una costante, x una variabile reale e n_0^2 il valore di n per $x = 0$. Rappresentando con t il tempo e facendo le seguenti posizioni:

$$A = a^2(x^2 + y^2); \quad B = 2n_0^2 + a x; \quad \Theta = 3 a t$$

si vede che le due equazioni:

$$B(3A + B^2) - \Theta^2 = 0$$

$$B^2 - A = 0$$

possono riguardarsi come quelle di due curve piane dei gradi rispettivi tre e due quando x e y si pensino come coordinate cartesiane ortogonali di un punto in un piano.

Indichiamo con U e V , per brevità, i primi membri delle equazioni precedenti in guisa che esse possano scriversi rispettivamente sotto la forma:

$$U = 0, \quad V = 0.$$

Ebbene, la equazione della curva meridiana, che ci proponiamo di studiare, acquista allora la forma notevole

$$U^2 = V^3$$

ed è col sussidio di questa forma notevole che ci avviamo adesso allo studio in parola.

2. La curva che ci occupa è dunque una curva piana del sesto ordine o, come suol dirsi brevemente, è una sestica che noi indicheremo col simbolo S . Le due curve $U = 0$, $V = 0$ le chiameremo le curve generatrici di S e specificando: « la cubica generatrice, la conica generatrice ». Quest'ultima intanto è una parabola. Infatti, sostituendo nella sua equazione per A e B i loro valori si trova

$$4 n_0^4 + 4 n_0^2 a x - a^2 y^2 = 0$$

che rappresenta manifestamente una parabola di cui l'asse è $y = 0$ e la tangente nel vertice è la retta :

$$ax + n_0^2 = 0.$$

Allo scopo di semplificare, assumiamo per nuovo asse $x = 0$ la tangente suddetta. Basterà perciò cambiare x in $x - \frac{n_0^2}{a}$ e così troveremo nelle nuove coordinate (che per semplicità seguiranno a chiamare come le antiche) le due equazioni :

$$\begin{aligned} 4a^3 x^3 + 3a^3 xy^2 + 3a^2 n_0^2 y^2 + 4n_0^6 - \Theta^2 &= 0 \\ 4a n_0^2 x - a^2 y^2 &= 0 \end{aligned}$$

come rappresentanti le curve generatrici.

E ora con le posizioni :

$$\frac{n_0^2}{a} = h; \quad \frac{4n_0^6 - \Theta^2}{a^3} = k$$

le equazioni suddette acquistano le forme semplici seguenti

$$\begin{aligned} (1) \quad 3y^2(x + h) + 4x^3 + k &= 0 \\ y^2 &= 4hx \end{aligned}$$

e quindi quella della sestica S è :

$$(2) \quad [3y^2(x + h) + 4x^3 + k]^2 + [y^2 - 4hx]^2 = 0.$$

Sopra queste equazioni è più facile lo studio che ci proponiamo di fare.

3. Anzitutto cominceremo dall'osservare che la nostra sestica non è affatto la più generale fra le curve la cui equazione può scriversi sotto la forma

$$U^2 = V^3$$

dove $U = 0$, $V = 0$ sono le equazioni di una cubica e di una conica. Infatti, nel caso nostro, le due curve generatrici suddette non hanno posizione generica, ma sono vincolate da legami geometrici che ora vogliamo porre bene in evidenza.

Intanto le equazioni 1) non mutano cambiando y in $-y$. Dunque l'asse $y = 0$ è un comune asse di simmetria ortogonale per le due curve (1). Per la parabola generatrice è l'asse ordinario. Per la cubica direttrice esso sarà dunque una delle 9 polari armoniche e il flesso relativo sarà il punto all'infinito di $x = 0$. La forma dell'equazione della cubica mostra poi

(1) Questo è anche l'asse di rotazione della superficie d'onda del miraggio.

che la tangente nel flesso suddetto è la retta $x + h = 0$. Ciò si rende più manifesto quando si introduca la omogeneità nella equazione suddetta scrivendola come segue :

$$3 y^2 (x + hz) + 4 x^3 + kz^3 = 0$$

e assumendo, dopo, per $z = 0$ la retta all'infinito. La costante h è ciò che si chiama il semiparametro della parabola e le coordinate cartesiane del fuoco sono dunque $(h, 0)$. Ebbene la tangente suddetta di flesso non è altro che la polare del fuoco rispetto alla parabola, ossia la sua direttrice.

Finalmente, in coordinate omogenee, si vede che i punti d'incontro dell'asse $y = 0$ con le due curve direttrici, vengono rappresentati dalle due equazioni :

$$4 x^3 + k z^3 = 0$$

$$x z = 0$$

il che significa, in linguaggio algebrico, che la seconda forma costituisce la hessiana della prima.

I legami geometrici che vincolano le due curve generatrici sono tutti trovati e sarà bene riassumerli nel seguente enunciato.

« *L'asse della parabola è anche asse di simmetria ortogonale per la cubica generatrice e quindi quest'ultima possiede un flesso all'infinito nella direzione normale a tale asse.* »

La tangente in tale flesso alla cubica coincide con la direttrice della parabola.

L'asse suddetto taglia la cubica in una terna di punti che ha per coppia hessiana il vertice della parabola e il suo punto all'infinito ».

4. Eliminando la x fra le equazioni (1) si trova

$$(y^2 + 4 h^2)^3 = 16 h^3 (4 h^3 - k)$$

e quindi

$$y^2 + 4 h^2 = \alpha \cdot 2h \sqrt[3]{8 h^3 - 2k}$$

dove α è una qualunque delle tre radici cubiche dell'unità positiva. E poichè una sola di queste è reale (uguale a uno) e le altre sono immaginarie coniugate, così si può dire che i 6 punti comuni alle due curve generatrici sono generalmente distinti. Quattro sono immaginari. I due rimanenti possono essere reali distinti, reali coincidenti, o immaginari coniugati. Corrispondentemente si hanno tre tipi distinti di superficie d'onda, già segnalati dal Garbasso.

5. Cerchiamo ora le caratteristiche Plückeriane della nostra sestica S. L'ordine intanto è uguale a 6. « *I sei punti, generalmente distinti* (cfr. il

num. prec.): *comuni alle due curve generatrici, sono altrettante cuspidi per S* ». Questa affermazione non è evidente, ma troviamo opportuno darne la dimostrazione, in coordinate proiettive, al N. 8. Per determinare altre caratteristiche ricorriamo ai punti all'infinito della curva. A tale scopo torniamo a rendere omogenea la equazione (2) della S introducendo la terza coordinata z e dopo (assumendo per $z=0$ la retta all'infinito) facciamo $z=0$. Troveremo così che i punti all'infinito richiesti dipendono dalla equazione seguente :

$$(3 y^2 x + 4 x^3) + y^6 = 0$$

che può anche scriversi

$$(3) \quad (x^2 + y^2)(4x^2 + y^2) = 0.$$

Consideriamo separatamente le due soluzioni

$$x^2 + y^2 = 0, (4x^2 + y^2) = 0.$$

Assumendo la prima si vede che la curva passa per i punti ciclici del piano. Ma vi passa semplicemente perchè il fattore $x^2 + y^2$ entra al 1° grado nella (3). La equazione complessiva delle tangenti a S nei suddetti punti è

$$(4) \quad y^2 + (x - hz)^2 = 0.$$

Infatti se si pone $y^2 = -(x - hz)^2$ nella equazione di S (resa omogenea) si perviene alla seguente equazione in x, z :

$$\{(x + hz)^3 + z^3(k - 4h^3)\}^2 - \{(x - hz)^3\}^2 = 0$$

che può anche scriversi nel modo seguente (decomponendo la differenza dei due quadrati)

$$\{2(x + hz)^3 + z^3(k - 4h^3)\} \{k - 4h^3\} z^3 = 0.$$

E siccome quest'ultima è soddisfatta da $z^3 = 0$ così, non solo è dimostrato l'affermazione fatta sopra, ma ne segue che i punti ciclici sono due flessi e le relative tangenti sono quelle la cui equazione complessiva è la (4). Esse si tagliano manifestamente nel fuoco della parabola generatrice.

6. Per studiare il modo di comportarsi di S negli altri due punti all'infinito dati da

$$4x^2 + y^2 = 0$$

consideriamone uno che indicheremo con P. Le sue coordinate potranno scriversi così :

$$P \equiv (1, 2i, 0)$$

dove i è l'unità immaginaria. Cambiando i in $-i$ otterremo le coordinate dell'altro. Indichiamo poi con R un punto qualunque dell'asse di simmetria, cosicchè le sue coordinate potranno rappresentarsi con

$$R \equiv (1, 0, m).$$

Al variare di m , R varia descrivendo l'asse suddetto e quindi la retta PR varia descrivendo il fascio di centro P , e finalmente un punto variabile a sua volta sulla retta PR avrà per coordinate:

$$1 + \lambda, 2i, \lambda m$$

per tutti i valori possibili di λ .

Per trovare dove la retta PR incontra la nostra sestica S dovremo sostituire le coordinate ultime scritte nella equazione di S . Troveremo così la seguente equazione di 6° grado in λ :

$$\{\lambda^3 (km^3 + 4) + 12 \lambda^2 - 12 hm \lambda - 8i^2 - \\ - 64 \{\lambda^2 mh + \lambda mh + 1\}^3 = 0$$

che, ordinando in λ , diviene:

$$\lambda^6 \{(km^3 + 4)^2 - 64 m^3 h^3\} + \lambda^5 \{24 (km^3 + 4) - 192 m^3 h^3\} + \\ + \lambda^4 \{144 - 24 hm (km^3 + 4) - 192 m^2 h^2 - 192 m^3 h^3\} + \\ + \lambda^3 \{-16 (km^3 + 4) - 288 hm - 384 m^2 h^2 - 64 m^3 h^3\} - \\ - \lambda^2 \{48 m^2 h^2 + 192 + 192 mh\} = 0.$$

Siccome questa è soddisfatta da $\lambda^2 = 0$ così vuol dire che P è un punto doppio per S . Fra tutte le rette passanti per P (s'intende nel piano di S) quelle per cui m ha tale valore da annullare il coefficiente di λ^2 , saranno tangenti nel punto doppio P . Ma annullando il coefficiente di λ^2 si perviene alla condizione

$$mh + 2 = 0$$

la quale individua una sola retta capace di incontrare la S in tre punti riuniti in P . Dunque P è una cuspidi.

Abbiamo quindi il seguente enunciato.

« La sestica S possiede, all'infinito, due flessi e due cuspidi. I flessi sono nei punti ciclici del piano e le tangenti relative concorrono nel fuoco della parabola generatrice. Anche le due cuspidi sono immaginarie coniugate. La equazione complessiva delle tangenti relative è in coordinate cartesiane:

$$(2x + h^2 + y)^2 = 0.$$

Esse dunque convergono in quel punto dell'asse di simmetria che è a ugual distanza dal vertice della parabola e dalla sua direttrice ».

La nostra sestica viene quindi a possedere otto cuspidi: cioè le due sopra indicate e altre sei nelle intersezioni delle due curve generatrici (cf. il N° 5). Vedremo in seguito che non ne ha altre. Fra tutte, due al più possono essere reali.

7. Siamo ora in grado di calcolare tutte le caratteristiche Plückeriane di S . Siccome occorrerà citare le formule di Plücker così non sarà inopportuno introdurre le seguenti notazioni. Sia data una curva algebrica irriducibile. Indichiamo con n l'ordine, con m la classe, con δ il numero dei punti doppi a tangenti distinte, con τ il numero delle tangenti doppie a punti di contatto distinti, con k il numero delle cuspidi, con i il numero dei flessi.

Nel nostro caso della S si sa che

$$n = 6; \quad k = 8 + a; \quad i = 2 + \beta$$

dove a e β sono nulli, o numeri interi positivi. Ora, una delle formule di Plücker può essere scritta:

$$i = 3n(n - 2) - 6\delta - 8k.$$

Ne segue, per il caso della S ,

$$(5) \quad \beta + 6\delta + 8a = 6$$

e quindi $a = 0$ e inoltre $\delta = 0$, oppure $\delta = 1$.

Ma se esistesse un solo punto doppio a tangenti distinte, esso (a causa della simmetria) dovrebbe trovarsi all'infinito, o sull'asse di simmetria. Ma i risultati del N° precedente escludono che esso possa trovarsi all'infinito. D'altra parte i punti d'intersezione della S con l'asse di simmetria dipendono dalle radici della equazione:

$$16x^6 + 8x^3(k - 8h^3) + k^2 = 0.$$

Questa dovrebbe dunque avere almeno una radice doppia. E quindi dovrebbe avere una radice doppia la equazione seguente:

$$16\lambda^2 + 8\lambda(k - 8h^3) + k = 0$$

il che non è in generale (perchè annullare il suo discriminante equivale a esigere una condizione fra k e h).

Dunque si ha, in generale, $\delta = 0$. Allora dalla (5) segue $\beta = 6$ e per conseguenza

$$k = i = 8.$$

Servendosi quindi della formula:

$$k - i = 3(n - m)$$

resulta $m = n = 6$ e finalmente dalla

$$\delta - \tau = (n - m)(n - m + 1)$$

si ha

$$\delta = \tau = 0.$$

Ecco quindi trovate le caratteristiche richieste

$$n = m = 6; \quad k = i = 8; \quad \delta = \tau = 0.$$

Si ha quindi il seguente risultato: « *La sestica S è una curva duale di se stessa. L'ordine e la classe sono entrambi uguali a 6. Essa possiede otto cuspidi e altrettanti flessi. È priva di punti doppi a tangenti distinte e di tangenti doppie a punti di contatto distinti. Il genere è dunque uguale a due* ». E si potrebbe facilmente vedere che, fra tutte le curve autoduali di genere due, è quella che ha l'ordine minimo.

§ II. - Il caso proiettivo.

8. Dal punto di vista proiettivo (usando anche un linguaggio più appropriato) si può dire che l'equazione della nostra sestica S può scriversi sotto la forma

$$U^2 = V^3$$

dove U e V sono due ternarie: cubica la prima, quadratica la seconda. Geometricamente le equazioni

$$U = 0, \quad V = 0$$

rappresentano, in coordinate proiettive, due curve dei gradi rispettivi tre e due (o come si suol dire una cubica e una conica). Seguiranno a chiamarle le curve generatrici di S . Anzitutto, servendosi delle attuali coordinate proiettive, dimostreremo l'affermazione del N. 5, che cioè: ogni punto comune alle due curve generatrici $U = 0, V = 0$ è una cuspidale per la sestica S (la cui tangente cuspidale coincide con la tangente a $U = 0$ in tale punto).

Infatti assumendo un simile punto come (001) le equazioni di U e V potranno scriversi:

$$\begin{aligned} a_1 x_3^2 + a_2 x_3 + a_3 &= 0 \\ b_1 x_3 + b_2 &= 0 \end{aligned}$$

dove le a e le b sono binarie in $x_1 x_2$ d'ordine uguale al loro indice.

L'equazione di S sarà dunque:

$$(a_1 x_3^2 + a_2 x_3 + a_3)^2 - (b_1 x_3 + b_2)^3 = 0$$

ossia, ordinando in x_3 :

$$x_3^4 a_1^2 + x_3^3 (2 a_1 a_2 - b_1^3) + x_3^2 (a_2^2 + 2 a_1 a_3 - 3 b_1^2 b_2) + \\ + x_3 (2 a_2 a_3 - 3 b_1 b_2^2) + a_3^2 - b_2^3 = 0$$

e il semplice esame di questa equazione dimostra l'asserto.

9. Il legame metrico che si esprime dicendo che le due curve generatrici godono entrambe simmetria ortogonale rispetto a una retta (cfr. il N. 3), equivale proiettivamente ad esigere che un flesso e la relativa polare armonica della cubica generatrice, sieno polo e polare rispetto alla conica generatrice. Esigiamo inoltre che la polare armonica suddetta tagli la cubica in una terna di punti la cui coppia hessiana sia costituita dai punti in cui la stessa retta taglia la conica. E infine assumiamo per $x_2 = 0$ tale retta; per (010) il flesso dianzi nominato e per (100), (001) i punti della coppia hessiana sopra indicata. Le equazioni delle due curve potranno scriversi nel modo seguente:

$$x_2^2 (a x_1 + b x_3) + c x_1^3 + d x_3^3 = 0 \\ m x_2^2 + n x_1 x_3 = 0$$

dove a, b, c, d, m, n , sono costanti.

La simmetria ortogonale di cui esse godevano nel caso metrico è adesso sostituita dalla omologia armonica

$$\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

che trasforma in se stessa tanto l'una quanto l'altra.

Finalmente nel caso metrico, abbiamo notato un ulteriore legame fra le curve generatrici, espresso dal fatto che la tangente nel flesso all'infinito della cubica, coincideva con la direttrice della parabola (N. 3). Non è facile esprimere in forma semplice il corrispondente legame proiettivo. Noi lo sostituiamo scrivendo una equazione di condizione fra a, b, c, m, n . Per ottenerla, eseguiamo la seguente trasformazione di coordinate

$$x_1 = \alpha x; \quad x_2 = \beta y; \quad x_3 = \gamma z$$

dove α, β, γ sono costanti da determinarsi nel modo che risulterà dalle seguenti considerazioni.

Intanto le equazioni trasformate sono:

$$y^2 (a \beta^2 \alpha x + b \beta^2 \gamma z) + c \alpha^3 x^3 + d \gamma^3 z^3 = 0 \\ m \beta^2 y^2 + n \alpha \gamma x z = 0$$

che possono scriversi anche così:

$$3 y^2 \left(x + \frac{b \gamma}{a \alpha} z \right) + 4 \cdot \frac{3 c \alpha^2}{4 \alpha \beta^2} x^3 + d \cdot \frac{3 \gamma^3}{\alpha \beta^2 \alpha} z^3 = 0 \\ y^2 = 4 \left(\frac{-n \alpha \gamma}{4 m \beta^2} \right) x z.$$

Ebbene, se è possibile fare:

$$\frac{b y}{a \alpha} = \frac{-n \alpha \gamma}{4 m \beta^2}, \frac{3 c \alpha^2}{4 a \beta^2} = 1,$$

saremo pervenuti alle (1). Ora essendo α, β, γ differenti da zero, dalle due condizioni precedenti si trae:

$$a^2 n + 3 m b c = 0$$

che è l'equazione di condizione cercata. Adempiuta questa, si può fare

$$\beta = \gamma = 1; \alpha = 2 \sqrt{\frac{a}{3c}} \text{ e dopo:}$$

$$h = \frac{b}{a \alpha}, \quad k = \frac{3 d}{a \alpha}$$

dove α ha il precedente valore.

10. Non possiamo chiudere queste poche osservazioni senza far notare la esistenza di altre sestiche piane notevoli la cui equazione può scriversi sotto la formd

$$U^2 = V^3$$

dove U e V sono due ternarie dei gradi rispettivi tre e due. Tali sestiche non sono altro che le duali di quartiche razionali.

Abbiasi infatti una curva piana razionale di 4^a classe. Le coordinate omogenee di una sua tangente mobile potranno riguardarsi come funzioni razionali intere di 4^o grado di un parametro λ cosicchè indicando con $u_1 u_2 u_3$ quelle coordinate, avremo;

$$(6) \quad \begin{cases} u_1 = a_1 \lambda^4 + 4 b_1 \lambda^3 + 6 c_1 \lambda^2 + 4 d_1 \lambda + e_1 \\ u_2 = a_2 \lambda^4 + 4 b_2 \lambda^3 + 6 c_2 \lambda^2 + 4 d_2 \lambda + e_2 \\ u_3 = a_3 \lambda^4 + 4 b_3 \lambda^3 + 6 c_3 \lambda^2 + 4 d_3 \lambda + e_3 \end{cases}$$

dove le a, b, c, d, e sono costanti.

Sia ora un punto generico M di coordinate $y_1 y_2 y_3$. Le coordinate $u_1 u_2 u_3$ di una retta incidente a M soddisfano alla condizione:

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = 0.$$

E quindi le 4 tangenti della nostra curva passanti per M saranno individuate dai 4 valori di λ che sono radici della seguente equazione di 4^o grado in λ :

$$(7) \quad \lambda^4 a_y + 4 \lambda^3 b_y + 6 \lambda^2 c_y + 4 \lambda d_y + e_y = 0$$

dove

$$a_y = a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3; b_y = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3$$

$$c_y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3; d_y = d_1 y_1 + d_2 y_2 + d_3 y_3$$

$$e_y = e_1 y_1 + e_2 y_2 + e_3 y_3.$$

Ebbene, annullando il discriminante della (7) si avrà il luogo di un punto da cui partono due tangenti coincidenti della nostra curva, cioè la sua equazione in coordinate di punti. Ora se si pone

$$U = 3\sqrt{3} \begin{vmatrix} a_y & b_y & c_y \\ b_y & c_y & d_y \\ c_y & d_y & e_y \end{vmatrix}$$

$$V = a_y e_y - 4 b_y d_y + 3 c_y^2$$

è ben noto⁽¹⁾ che il discriminante in parola è

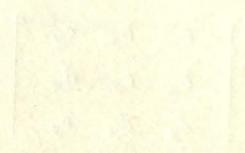
$$U^2 = V^3$$

Dunque la precedente equazione rappresenterà, nelle coordinate y_i , una sestica piana razionale, che sarà certamente differente dalla nostra sestica S perchè quest'ultima è del genere due (cfr. il N. 7).

Ne concludiamo dunque che, data una qualsiasi equazione del tipo $U^2 = V^3$, non si potrà dire che essa rappresenti sempre una sestica razionale come potrebbe suppersi da un esame superficiale del tipo della sua equazione. Si tratterà di una sestica razionale se sarà possibile il passaggio (inverso di quello sopra svolto) dalla equazione alla forma parametrica (6). Ora, anche un semplice computo di costanti, dimostra che un tale passaggio non è sempre possibile. Ciò significa che per potere attuare un tal passaggio dovranno le due curve $U = 0$, $V = 0$ essere collegate da particolari vincoli geometrici. Pure ignorando quali debbano essere questi vincoli, si può affermare però che non saranno compatibili con quelli che debbono sussistere e che abbiamo effettivamente determinato nel caso che $U^2 = V^2$ rappresenti la nostra sestica S .

(1) Cfr. p. es. Clebsch Lindemann. Vol. I, pag. 284-299.

Faint, illegible text at the top of the page, possibly a title or header.



Main body of faint, illegible text, appearing to be several paragraphs of a document.

Faint text at the bottom of the page, possibly a signature, date, or footer.

UNA INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEL GRUPPO TOTALE DI SOSTITUZIONI SOPRA SEI ELEMENTI.

[Ann.: di Mat.: 1909]

Una permutazione sopra n elementi può sempre considerarsi come una collineazione fra i punti di uno spazio lineare a $n-2$ dimensioni. Basta a tale scopo osservare, anzi tutto, che una tale collineazione è individuata dando n coppie di punti corrispondenti: dopo di che si riguardino gli n elementi come n punti generici dello spazio in parola, eppoi riferendo ciascun elemento (e quindi ciascun punto) a quello che lo sostituisce per opera della permutazione suddetta, si osservi che verranno a individuarsi n coppie di punti corrispondenti i quali serviranno a stabilire conseguentemente la cercata collineazione. Ne segue che qualsiasi gruppo di sostituzioni sopra n elementi si può rappresentare mediante un gruppo di collineazioni fra n punti di uno spazio lineare a $n-2$ dimensioni (il quale gruppo possiede come figura invariante quella costituita dall'insieme degli n punti rappresentanti degli elementi dati). Per conseguenza anche il gruppo totale sopra gli n elementi dati trova così una naturale interpretazione geometrica, nel gruppo totale di tutte le collineazioni che permutano in tutti i modi possibili n punti generici dello spazio in parola.

Il presente scritto è un modesto saggio di questa interpretazione geometrica nel caso particolare di $n=6$ e quindi potrebbe anche intitolarsi come uno studio della configurazione dell'esagono nello spazio lineare a 4 dimensioni.

Sono ben note altre e certamente più importanti (se non ugualmente semplici) interpretazioni geometriche di gruppi di sostituzioni sopra sei elementi. Citerò, ad esempio, una Memoria assai elaborata di Gerbaldi che è inerente al gruppo alterno (1). Ma più particolarmente citerò un ben co-

(1) GERBALDI *Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane*. Cir. mat. co di Palermo XII 23-94; T. XIII, pp. 161-199; T. XIV, pp. 66-114; T. XVI, pp. 129-154.

nosciuto lavoro di Veronese sull'argomento perchè ha qualche punto di contatto col mio, pure essendone diverso il concetto fondamentale (1). L'illustre autore assume (cf. il N° 8 di quel lavoro) un punto di coordinate $y_1 y_2 \dots y_n$ in uno spazio R_{n-1} a $n-1$ dimensioni e considera gli $n!$ punti che si ottengono permutando in tutti i modi possibili gl'undici delle coordinate suddette. Alla permutazione che cambia la successione $1, 2, 3, \dots, n$ nella successione k, l, m, \dots, p , egli fa corrispondere la collineazione espressa dalle formule:

$$\varrho x'_1 = x_k; \quad \varrho x'_2 = x_l; \quad \varrho x'_3 = x_m; \dots \quad \varrho x'_n = x_p$$

e quindi egli trasforma il gruppo totale sopra n elementi nel gruppo totale di collineazioni sopra un certo numero di punti costituiti dagli $n!$ suddetti a cui si aggiunge necessariamente il punto unità (manifestamente invariante per tutte le collineazioni descritte). È così che l'A. interpreta, in particolare, il gruppo totale sopra sei lettere, nello spazio a cinque dimensioni, assumendo come gruppo invariante quello dei 720 punti che si ottengono permutando in tutti i modi possibili le coordinate di un punto generico in tale spazio e aggiungendovi il punto unità. Io invece interpreto il gruppo totale di sostituzioni su sei elementi, nello spazio a 4 dimensioni, mediante il gruppo totale di 720 collineazioni che permutano in tutti i modi possibili sei punti generici di tale spazio. La rappresentazione geometrica del Veronese è dunque diversa dalla mia.

Siccome la cfz.^{no} che io considero è quella dell'esagono in S_4 , così credo opportuno premettere le seguenti osservazioni d'indole generica sopra le cfz.^{no} che hanno per nucleo di origine un poligono di n vertici. Intanto sarà elemento essenziale lo spazio S_r di dimensione minima contenente il dato poligono: per cui $n > r$. Ma per $n = r + 1$ i vertici del poligono sono tutti indispensabili per individuare lo spazio ambiente S_r . In tal caso lo studio della cfz.^{no}, dal punto di vista proiettivo, è infecondo perchè mancano i così detti spazi diagonali della cfz.^{no}. Così è infecondo lo studio proiettivo della coppia di punti su di una retta, del triangolo nel piano (2), del tetraedro nello spazio ordinario, del pentagono nello spazio a

(1) VERONESE, *Interprétations géométriques de la théorie des substitutions de n lettres, particulièrement pour $n = 3, 4, 5, 6$ en relation avec les groupes de l'Hexagramme mystique* (Ann. di Mat., s. II, T. XI, pp. 93-236).

(2) Non è inutile forse osservare che la geometria del triangolo è essenzialmente metrica e quindi legata alla retta all'infinito: per conseguenza, dal punto di vista proiettivo, essa non è che geometria del quadrilatero (o del quadrangolo) piano. Analogamente può dirsi che la metrica del tetraedro è caso particolare di quella del pentaedro, o del pentagono gobbo.

4 dimensioni, ecc. La cfz.^{no} comincia a essere interessante per $n = r + 2$ perchè allora esistono gli spazi diagonali e principalmente perchè interviene in questo caso la considerazione veramente feconda del gruppo di $n!$ collineazioni che permutano in tutti i modi possibili i vertici del poligono. Proseguendo ad aumentare il numero dei vertici, senza aumentare il numero delle dimensioni dello spazio ambiente, si può prevedere che l'interesse della ricerca abbia (in generale) a diminuire perchè il gruppo suddetto manca. Il caso più interessante è dunque dato da $n = r + 2$. Ecco perchè, nello spazio a 4 dimensioni, si presenta promettente lo studio dell'esagono (1). Esso fu già intrapreso da Richmond in due lavori (2) nei quali però manca la considerazione e l'analisi del gruppo totale delle collineazioni che trasformano l'esagono in s'è stesso e che costituiscono la sorgente più viva delle proprietà geometriche inerenti alla cfz.

Lo scritto presente è indipendente dalle ricerche di Richmond e (come ormai è costume) accennerò a qualche punto rilevante contenuto nelle pagine seguenti che lo compongono.

Prima di tutto è chiaro che in S_4 lo studio dell'esagono è identico allo studio della cfz. composta da sei spazi, a tre dimensioni lineari, in posizione generica e che ho chiamato esaedro. Basta attuare la trasformazione polare rispetto alla quadrica invariante (N^0 2) per passare dall'esagono, all'esaedro e viceversa. Cosicchè si può scegliere come cfz. iniziali l'uno, o l'altro, indifferentemente, come pure si potrà riferire all'uno, o all'altro, il linguaggio relativo ad ogni risultato. Però, nella scelta, ho avuto di mira che ogni teorema fosse il più espressivo possibile dal punto di vista della intuizione geometrica e il servirsi dell'esagono, o dell'esaedro, può mutare sapore alla frase pur mantenendone la sostanza. La geometria dell'esagono in S_4 ha delle analogie con quella dell'esagrammo mistico. Ne è causa un fatto comune ad entrambe le teorie. Come ogni esagono ordinato di un esagrammo mistico individua la propria retta di Pa-

(1) I casi precedenti son ben conosciuti. Per $r = 3$ si ha la cfz. del pentagono, o del pentaedro, nello spazio ordinario, sulla quale lo scritto più recente è la mia Memoria che si intitola dal pentaedro (cf. *Circ. Mat. Palermo*, T. XXI, 1906, pp. 322-341) e dalla quale si può avere notizia dei lavori anteriori. Per $r = 2$ la cfz. è quella del quadrangolo o del quadrilatero piano. L'ultima pubblicazione in argomento è di BERZOLARI, porta il titolo: *La lemniscata proiettiva* (*Rendic. Istit. Lomb.*, s. II, Vol. XXXVIII, 1904, pp. 277-288 e pp. 304-313). Finalmente il caso $r = 1$ è realizzato da una terna di punti su di una retta, con la forma Q , con il comune gruppo hessiano, ecc.

(2) H. W. RICHMOND, *On the figure of six points in space of four dimension*. *Quarterly*, No 122, 1899, pp. 125-160. — *The figure formed from six points in space of four dimension*. *Math. Annal.*, Bd. 53, pp. 161-176.

scal, così (in modo non uguale, ma analogo) ogni esagono ordinato di un esagono completo in S_4 individua, mediante la considerazione delle 3 coppie di lati opposti, una retta che ho chiamato ancora retta di Pascal per ragione dell'analogia suddetta (1). La quale dà motivo a credere di affermarsi con altri fatti. Ad esempio ai 20 punti di Steiner in cui concorrono, a 3, a 3, le 60 rette di Pascal dell'esagrammo mistico, fanno riscontro 20 rigate quadriche, a due, a due, coniugate su cui si distribuiscono a tre, a tre, le 60 rette di Pascal dell'esagono completo di S_4 , ecc., ecc.

Ho destinato un capitolo alla interpretazione geometrica di tutti i sottogruppi conosciuti del G_{720} totale enunciando, per ciascuno, i fatti geometrici più salienti. Fra essi i più interessanti sono i sei G_{120} : ciascuno funziona come gruppo totale sopra un notevole aggruppamento di cinque rette scelte fra le 15 diagonali di 1^a specie le quali danno luogo così a sei tali aggruppamenti. Del resto queste 15 rette, oppure i 15 piani duali, furono già considerati da altri autori. Chi vuol prenderne notizia precisa legga le belle pagine che il prof. Bertini dedica nel suo libro iperspaziale alla V_3^3 di S_4 luogo delle rette che si appoggiano a 4 piani generici (2).

Ho anche considerato le ipersuperficie invarianti rispetto a G_{720} , e d'ordine inferiore a sei. Non esiste alcuno spazio lineare invariante. Esiste una sola quadrica invariante (alla quale abbiamo già accennato): anche le ipersuperficie cubiche invarianti si riducono a una sola che è la V_3^3 dianzi nominata e che nel seguito noi indicheremo col nome di Segre (3) dal primo che l'ha considerata. Esistono finalmente infinite ipersuperficie invarianti di 4^o e 5^o ordine: tanto le une quanto le altre formano un fascio. Fra le quartiche è da segnalare la W di Castelnuovo (4) dotata di 10 rette doppie distribuite, a sei, a sei, sopra 10 quadriche (tre su ciascuna serie rigata). Fra le quintiche la più notevole appare la Hessiana della V_3^3 di Segre, a causa delle sue linee e punti singolari, così da far ritenere possibile di utilizzarla per studiarne opportune sezioni con spazi a tre dimensioni, nella speranza di acquisire qualche esempio di superficie quintica, del nostro spazio che sia nuovo e interessante del lato proiettivo per il numero e la posizione dei punti singolari. Del resto, non è questo il solo argomento del

(1) Anche RICHMOND considera 60 rette collegate alla cfz. che egli chiama rette di PASCAL, ma non apparisce affatto il legame di ciascuna con un esagono ordinato: esse dipendono da altre considerazioni e in ogni modo sono differenti dalle mie.

(2) E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, pp. 176-177. Pisa, Spoerri, 1907.

(3) SEGRE, *Sulla varietà cubica con 10 punti coppi* (Atti R. Acc. di Torino, 22, 1887) e *Sulle varietà cubiche*, ecc. (Mem. id. 39 (2), 1888).

(4) CASTELNUOVO, *Ricerche di Geometria della retta nello spazio a 4 dimensioni* (Atti R. Istit. Veneto, T. II, s. VII, pp. 855-901).

presente scritto che sembri meritare ancora qualche considerazione ulteriore: anche limitandosi a cercare risultati inerenti alla geometria del nostro spazio rimangono a considerarsi le proiezioni e le sezioni più opportune delle cfz. qui studiate. Un cosiffatto indirizzo di ricerche costituisce lo scopo principale delle già citate Memorie di Richmond, ma esse non esauriscono certo l'argomento in questione.

CAPITOLO I.

Gli elementi fondamentali dell'esaedro e del suo esagono polare.

1. Lo spazio ambiente sia lineare ed abbia quattro dimensioni. Per indicarlo lo chiameremo per brevità « *spazio ambiente* » senz'altro. Esso contiene punti, rette, piani e spazi lineari a tre dimensioni che saranno chiamati spazi senz'altra qualifica. Nello spazio ambiente consideriamo sei spazi in posizione generica e chiamiamo esaedro la cfz.^{no} a cui essi danno luogo. Indicheremo con $S(1), S(2), \dots, S(6)$ tali spazi e li chiameremo gli « *spazi fondamentali* » dell'esaedro.

Riferendo un punto qualunque M dello spazio ambiente a questi sei spazi indicheremo con x_1, x_2, \dots, x_6 le coordinate di M (con la condizione $\sum_1^6 x_i = 0$) e allora le equazioni $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_6 = 0$ serviranno a rappresentare analiticamente i sei spazi fondamentali suddetti. Due spazi fondamentali come $S(1), S(2)$ si tagliano secondo un piano che chiameremo « *faccia* » dell'esaedro e indicheremo col simbolo $S(1\ 2)$. Esso è rappresentato analiticamente da $x_1 = 0, x_2 = 0$. L'esaedro ha dunque 15 facce. Ogni spazio fondamentale ne contiene 5. Tre spazi fondamentali come $S(1), S(2), S(3)$ hanno in comune una retta che chiameremo « *spigolo* » dell'esaedro e indicheremo col simbolo $S(1\ 2\ 3)$. Essa è rappresentata analiticamente da $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$. L'esaedro ha dunque 20 spigoli: ogni faccia ne contiene 4. Finalmente 4 spazi fondamentali come $S(1), S(2), S(3), S(4)$ hanno in comune un punto che sarà chiamato « *vertice* » dell'esaedro e indicato col simbolo $S(1\ 2\ 3\ 4)$. Le sue coordinate sono dunque $(0\ 0\ 0\ 0\ 1 - 1)$. L'esaedro ha quindici vertici: ogni spigolo ne contiene tre. Sopra ogni spazio fondamentale gli altri cinque individuano un pentaedro completo. si hanno così sei pentaedri completi di cui i vertici, gli spigoli e le facce sono rispettivamente vertici, spigoli e facce dell'esaedro.

2. Una permutazione qualsiasi, operata sopra i sei spazi fondamentali, individua una collineazione, nello spazio ambiente, che trasforma l'esaedro in se medesimo. Abbiamo dunque così un gruppo di 720 collineazioni che

indicheremo con G_{720} e rispetto al quale l'esaedro è invariante. Tali colineazioni possono rappresentarsi analiticamente mediante le permutazioni sulle x_i . A suo tempo studieremo questo gruppo con qualche dettaglio. Ma fin d'ora osserveremo che esso non possiede alcun spazio lineare invariante, giacchè l'equazione che lo rappresenterebbe dovrebbe essere lineare e simmetrica nelle x_i ; essa sarebbe dunque la $\sum_1^6 x_i = 0$ la quale non definisce nessuno spazio perchè ad essa soddisfano, per ipotesi, le coordinate di qualunque punto dello spazio ambiente. Esiste invece una ed una sola quadrica invariante, non specializzata, che può rappresentarsi indifferentemente con l'una o con l'altra delle due equazioni

$$\sum_1^6 x_i^2 = 0; \quad \sum_1^6 x_i x_k = 0$$

a causa di $\sum_1^6 x_i = 0$. Qualificheremo questa quadrica con l'aggettivo « invariante » e la indicheremo col simbolo F . Si può dunque dire:

« Esiste una sola quadrica (a tre dimensioni) invariante rispetto al gruppo G_{720} totale: essa taglia ogni spazio fondamentale dell'esaedro secondo la quadrica (a due dimensioni) che è invariante rispetto a quel sottogruppo G_{120} che tiene fisso quello spazio (1): taglia ogni faccia dell'esaedro secondo la conica invariante rispetto a quel sottogruppo G_{24} che tiene fissa quella faccia (1) e finalmente taglia ogni spigolo dell'esaedro nella coppia Hessiana dei tre vertici situati su quello spigolo (la quale coppia Hessiana è invariante rispetto al sottogruppo G_6 che tiene fisso tale spigolo) ».

3. — Ebbene l'esaedro con i suoi spazi fondamentali, con le sue facce, i suoi spigoli e vertici compone una cfz.^{no} la quale individua la sua polare reciproca rispetto alla quadrica F suddetta. Si perviene così ad un esagono i cui vertici, spigoli, facce e spazi fondamentali sono polari reciproci rispettivamente degli spazi fondamentali, delle facce, degli spigoli e dei vertici dell'esaedro dato.

I vertici dell'esagono sono sei: le coordinate del vertice polo di $S(1)$ sono $(-5, 1, 1, 1, 1, 1)$: ed è ovvio scrivere le coordinate degli altri cinque. Indicheremo con $\Sigma(i)$ questi vertici.

Gli spigoli dell'esagono sono 15. Indicheremo con $\Sigma(i k)$ lo spigolo che congiunge $\Sigma(i)$ con $\Sigma(k)$: esso è polare di $S(i k)$. Lo spigolo $\Sigma(12)$ può essere rappresentato dalle equazioni simultanee $x_3 = x_4 = x_5 = x_6$ (che si riducono a tre indipendenti).

(1) CIANI loc. cit., n.º 2.

(1) BERSOLARI, loc. cit., n.º 1.

Le facce dell'esagono sono 20. Indicheremo con $\Sigma (i h k)$ la faccia individuata da $\Sigma (i)$, $\Sigma (h)$, $\Sigma (k)$. Essa è polare di $S (i h k)$. La faccia $\Sigma (123)$ è rappresentata analiticamente dalle equazioni $x_4 = x_5 = x_6$ (che si riducono a due indipendenti).

Finalmente l'esagono ha 15 spazi fondamentali. Indicheremo con $\Sigma (i h k l)$ lo spazio individuato da $\Sigma (i)$, $\Sigma (h)$, $\Sigma (k)$, $\Sigma (l)$. Esso è il polare di $S (i h k l)$. Lo spazio $\Sigma (1234)$ è rappresentato dalla equazione $x_5 = x_6$.

È poi evidente che essendo generico l'esaedro, anche l'esagono polare è generico e si potrebbe manifestamente partire dall'esagono per definire l'esaedro. Per cui tutta la cfz.^{na} che ci proponiamo di considerare ammette per così dire come nuclei di origine l'esaedro e l'esagono suddetti polari reciproci rispetto alla quadrica F . Qualificheremo l'uno e l'altro con l'aggettivo « *fondamentale* ».

CAPITOLO II.

Gli elementi diagonali.

4. — Combinando in vario modo gli elementi fondamentali dell'esaedro e dell'esagono si ottengono punti, rette, piani e spazi i quali chiameremo « *diagonali* » per analogia a elementi così chiamati e inerenti al quadrangolo e quadrilatero del piano, e al pentaedro e pentagono dello spazio a tre dimensioni. Se non che nel caso dell'esaedro e dell'esagono attuali questi elementi sono tanti e tali da consigliare una scelta. Noi presenteremo al lettore quelli che sembrano i più notevoli in riguardo a considerazioni ulteriori, contenute nel presente scritto. Intanto le definizioni che siamo per dare sono legate al concetto di elementi « *opposti* ». Un vertice e una faccia dell'esaedro si diranno opposti quando la faccia è comune ai due spazi fondamentali che non passano per il vertice. Due spigoli dell'esaedro si diranno opposti quando non esistono in un medesimo spazio fondamentale. Ebbene lo spazio individuato da un vertice e dalla faccia opposta si chiamerà « *spazio diagonale di 1^a specie* ». Così ad es. $S (1 2 3 4)$ e $S (5 6)$ individuano lo spazio diagonale di 1^a specie rappresentato da $x_5 + x_6 = 0$ e che indicheremo con $\Delta (5 6)$. Esistono 15 tali spazi. Analogamente: lo spazio individuato da due spigoli opposti dell'esaedro come $S (1 2 3)$, $S (4 5 6)$ sarà chiamato « *spazio diagonale di 2^a specie* » e indicato con l'uno, o l'altro, dei due simboli equivalenti $\Delta (1 2 3)$, ovvero $\Delta (4 5 6)$. L'equazione è $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, ovvero la sua equivalente $x_4 + x_5 + x_6 = 0$. Esistono 10 tali spazi. Finalmente chiameremo « *spazi diagonali di 3^a specie* » quelli rappresentati da equazioni del tipo $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. Il simbolo relativo sarà $\Delta (12, 34)$. Esistono 45 tali spazi.

5. — Chiameremo punti diagonali gli elementi polari dei precedenti rispetto alla quadrica F . Così, premessa la definizione di elementi opposti dell'esagono (dualmente a quella data innanzi per l'esaedro), si chiamerà punto diagonale di 1^a specie quello comune a $\Sigma(1\ 2\ 3\ 4)$ e allo spigolo opposto $\Sigma(5\ 6)$. Indicheremo con $D(5\ 6)$ un tale punto: le sue coordinate sono $(1\ 1\ 1\ 1 - 2 - 2)$.

I punti diagonali di prima specie sono 15.

Prese invece due facce opposte dell'esagono, come $\Sigma(1\ 2\ 3)$, $\Sigma(4\ 5\ 6)$ si chiamerà « punto diagonale di 2^a specie » il loro punto comune. Sarà indicato con l'uno, o l'altro, dei due simboli equivalenti $D(1\ 2\ 3)$, ovvero $D(4\ 5\ 6)$. Le coordinate sono $(1, 1, 1, -1, -1, -1)$. Esistono 10 punti diagonali di 2^a specie.

Finalmente: esistono 45 punti diagonali di 3^a specie. Il simbolo è $D(i\ h, k\ l)$, e ad esempio $D(12, 34)$ ha per coordinate $(1, 1, -1, -1, 0, 0)$.

Sono così accoppiate tre specie di spazi diagonali e tre specie di punti diagonali secondo la polarità rispetto alla quadrica F . I simboli rispettivi sono caratterizzati dalle lettere Δ e D .

6. — In modo analogo accoppieremo ora piani e rette diagonali caratterizzando i primi col simbolo δ e le seconde col simbolo d e distinguendo tre specie.

Chiameremo « piani diagonali di 1^a specie » quelli individuati da equazioni del tipo $x_1 + x_2 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$, $x_5 + x_6 = 0$, notando bene che tali equazioni si riducano a due indipendenti a causa di $\sum_1^6 x_i = 0$. Il simbolo corrispondente sia $\delta(12, 34, 56)$. Esistono 15 tali piani.

Chiameremo *piani* diagonali di 2^a specie quelli rappresentati da equazioni del tipo $x_1 = x_2$, $x_3 = x_4$; cioè la intersezione di due spazi fondamentali dell'esagono aventi due vertici comuni. Il simbolo relativo sia $\delta(12, 34)$. Essi sono in numero di 45. E finalmente chiameremo « piani diagonali di 3^a specie » quelli rappresentati da equazioni del tipo $x_1 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$. Il simbolo sia $\delta(1, 23)$. Essi sono 60. Gli elementi polari rispetto a F delle tre specie di piani diagonali ora descritti si chiameranno ordinatamente « rette diagonali di 1^a, 2^a, 3^a specie » indicandole con i simboli rispettivi: $d(i\ h, k\ l, m\ n)$; $d(i\ h, k\ l)$; $d(i, h\ k)$. Si hanno dunque 15 rette diagonali di 1^a specie; 45 di 2^a e 60 di 3^a.

7. — È utile avvertire che, fra gli elementi diagonali ora introdotti figurano tutti quelli che con questo nome si presentano nei sei pentaedri fondamentali completi di cui è parola alla fine del n° 1. Adottando le denominazioni della mia Memoria sul pentaedro si vede che i piani, le rette e i punti diagonali dei sei pentaedri suddetti sono ordinatamente:

i piani diagonali di 3^a specie, le rette diagonali di 2^a e i punti diagonali di 3^a della cfz.^{no} attuale.

Nel quadro della pagina seguente sono riuniti, per comodità del lettore, gli elementi diagonali sin qui descritti.

ELEMENTI LINEARI DELLA CONFIGURAZIONE DIAGONALE

POLARITÀ RISPETTO ALLA QUADRICA *F*.

spazi diagonali	{	15 spazi diagonali di 1 ^a specie $\Delta(12) \cdot x_1 + x_2 = 0$	}	15 punti diagonali di 1 ^a specie $D(12) \equiv (-2, -2, 1, 1, 1, 1)$
		10 spazi diagonali di 2 ^a specie $\Delta(123)$ ovvero $\Delta(456)$ $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, ovvero: $x_4 + x_5 + x_6 = 0$		10 punti diagonali di 2 ^a specie $D(123)$ ovvero $D(456)$ $\equiv (1, 1, 1, -1, -1, -1)$
		45 spazi diagonali di 3 ^a specie $\Delta(12, 34); x_1 + x_2 = x_3 + x_4$		45 punti diagonali di 3 ^a specie $D(12, 34) \equiv (1, 1, -1, -1, 0, 0)$
piani diagonali	{	15 piani diagonali di 1 ^a specie $\delta(12, 34, 56)$ $(x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0, x_5 + x_6 = 0)$	}	15 rette diagonali di 1 ^a specie $d(12, 34, 56)$ $(1 + \lambda, 1 + \lambda, -1, -1, -\lambda, -\lambda)$
		45 piani diagonali di 2 ^a specie $\delta(12, 34); (x_1 = x_2, x_3 = x_4)$		45 rette diagonali di 2 ^a specie $d(12, 34)$ $(\lambda, -\lambda, 1, -1, 0, 0)$
		60 piani diagonali di 3 ^a specie $\delta(1, 23); (x_1 = 0; x_2 + x_3 = 0)$		60 rette diagonali di 3 ^a specie $d(1, 23)$ $(-5 + \lambda, 1 - 2\lambda, 1 - 2\lambda, 1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \lambda)$
NB.: Δ è simbolo di spazio diagonale		NB.: λ è un parametro		
δ » piano »		... D è simbolo di punto diagonale		
		... d » » retta »		

CAPITOLO III.

La configurazione diagonale.

8. — Ci proponiamo ora di mettere in rilievo i più notevoli legami geometrici che vincolano fra di loro gli elementi diagonali introdotti nel capitolo precedente. Intanto cominceremo dal notare come, mediante la considerazione degli spazi diagonali di 1^a specie, si possa, dall'esaedro costruire facilmente l'esagono, senza ricorrere alla polarità rispetto alla quadrica in-

variante. Basta semplicemente osservare che i due spazi fondamentali dell'esaedro, passanti per una faccia qualunque, sono separati armonicamente dallo spazio diagonale di 1^a specie e dallo spazio fondamentale dell'esagono passanti per quella medesima faccia. Un tale gruppo, armonico, è ad es. $S(1)$, $S(2)$, $A(12)$, $\Sigma(3456)$. Ecco dunque come si può descrivere la costruzione cercata:

Dato l'esaedro, si osservi che per una sua faccia qualunque passano due spazi fondamentali e uno spazio diagonale di 1^a specie. Ebbene, si costruisca, per quella faccia, lo spazio coniugato armonico dello spazio diagonale rispetto ai due fondamentali suddetti, e si ripe'a questa costruzione per tutte le facce suddette. Si troveranno così 15 spazi i quali vengono a passare, a 10, a 10, per sei punti vertici dell'esagono polare richiesto ».

9. — Consideriamo una retta diagonale di 1^a specie come ad es. la $d(12, 34, 56)$. Dalla rappresentazione parametrica risulta immediatamente che essa contiene i 6 punti $D(12)$, $D(34)$, $D(56)$; $D(12, 34)$, $D(12, 56)$; $D(34, 56)$ e che $D(12)$ è coniugato armonico di $D(34, 56)$ rispetto alla coppia $D(34)$, $D(56)$, ecc. Dunque si può dire:

« Ogni retta diagonale di 1^a specie contiene sei punti diagonali e cioè tre di 1^a specie e tre di 3^a specie. Queste due terne si deducono l'una dall'altra costruendo il quarto armonico di un punto dell'una rispetto ai due rimanenti. Servendosi di un linguaggio ben noto si può dire che le due terne sono ciascuna la forma Q dell'altra (1). Il comune gruppo Hessiano è costituito dalla coppia di punti d'incontro della retta diagonale in parola con la quadrica F ».

10. — Nello spazio ambiente è chiaro che tre rette in posizione generica ammettono una sola trasversale comune. Si considerino allora tre lati dell'esagono fondamentale non aventi, a due, a due, in comune alcun vertice: ad es. $\Sigma(12)$, $\Sigma(34)$, $\Sigma(56)$. Sopra $\Sigma(12)$ esiste $D(12)$; sopra $\Sigma(34)$ esiste $D(34)$; sopra $\Sigma(56)$ esiste $D(56)$; ma $D(12)$, $D(34)$, $D(56)$ esistono a loro volta sopra $d(12, 34, 56)$ secondo il numero precedente. Tale trasversale è quindi precisamente $d(12, 34, 56)$. Si ha dunque il risultato:

« I lati dell'esagono possono raggrupparsi in quindici terne così che i 3 lati di ciascuna terna non abbiano, a due, a due, vertici comuni: ogni terna individua una ed una sola trasversale comune alle rette della terna: si trovano, in tal guisa, 15 trasversali che costituiscono le 15 diagonali di 1^a specie. I punti di appoggio di esse con i lati suddetti, sono i 15 punti diagonali di 1^a specie ».

(1) Ct. p. es. CLEBSCH-LINDEMANN. Vol. I, pag. 275.

11. — Per il punto $D(1\ 2)$, passano $d(1\ 2, 3\ 4, 5\ 6)$; $d(1\ 2, 3\ 6, 4\ 5)$; $d(1\ 2, 3\ 5, 4\ 6)$ le quali esistono tutte tre in $\Sigma(3\ 4\ 5\ 6)$. D'altra parte $d(1\ 2, 3\ 4, 5\ 6)$ contiene $D(1\ 2)$, $D(3\ 4)$, $D(5\ 6)$. Si ha perciò: « *I 15 punti e le 15 rette diagonali di 1ª specie compongono una cfz. $(15_3, 15_3)$ cioè tale che ogni retta contiene tre punti e per ogni punto passano 3 rette. Le 3 rette della cfz. che passano per un punto esistono in uno spazio fondamentale dell'esagono* ».

12. — Uno spazio diagonale di 2ª specie, come $\Delta(1\ 2\ 3)$, contiene sei rette diagonali di 1ª specie che noi divideremo nelle due terne seguenti:

$$\begin{aligned} & d(1\ 4, 2\ 5, 3\ 6); \quad d(1\ 5, 2\ 6, 3\ 4); \quad d(1\ 6, 2\ 4, 3\ 5) \\ & d(1\ 4, 2\ 6, 3\ 5); \quad d(1\ 5, 2\ 4, 3\ 6); \quad d(1\ 6, 2\ 5, 3\ 4). \end{aligned}$$

È facile constatare che due di tali 6 rette s'incontrano, o no, a seconda che appartengono, o no, a terne differenti. Quindi:

« *Ogni spazio diagonale di 2ª specie contiene sei rette diagonali di 1ª specie le quali si dividono in due terne appartenenti a due serie rigate coniugate su di una medesima quadrica* ».

Si hanno così 10 di queste quadriche (a due dimensioni). Le indicheremo con $Q(i\ h\ k)$. Sopra $Q(1\ 2\ 3)$, o $Q(4\ 5\ 6)$ (che è lo stesso) esistono quelle sei rette $d(i\ h, k\ l, m\ n)$ i cui simboli binari $i\ h, k\ l, m\ n$ portano ciascuno uno dei tre simboli 1, 2, 3 e uno dei tre, 4, 5, 6.

13. — Un piano diagonale di 3ª specie come $\delta(1, 2\ 3)$ contiene i sei punti diagonali di 3ª specie seguenti:

$$D(2\ 5, 3\ 6); \quad D(2\ 6, 3\ 5); \quad D(2\ 4, 3\ 6); \quad D(2\ 6, 3\ 4); \quad D(2\ 4, 3\ 5); \quad D(2\ 5, 3\ 4).$$

D'altra parte tale piano è anche diagonale per il pentaedro che viene individuato sopra $S(1)$ dagli altri 5 spazi fondamentali dell'esaedro e i 6 punti precedenti sono diagonali pure per il pentaedro e quindi esistono su di una conica (cf. la mia Memoria « *sul pentaedro* » n° 18). Dunque:

« *I 45 punti diagonali di 3ª specie esistono, a 6, a 6, sopra 60 coniche giacenti nei 60 piani diagonali di 3ª specie* ».

Una diagonale di 2ª specie come $d(12, 34)$ contiene i due punti diagonali di 3ª specie seguenti: $D(13, 24)$, $D(14, 23)$ e i due vertici dell'esaedro $S(1256)$, $S(3456)$. Finalmente una diagonale di 3ª specie come $d(1, 23)$ contiene $\Sigma(1)$, che è un vertice dell'esagono fondamentale, e il punto $D(23)$ che è diagonale di 1ª specie.

CAPITOLO IV.

Le 60 rette di Pascal dell'esagono fondamentale.

14. — Come già abbiamo dichiarato nelle brevi pagine che hanno servito a guisa d'introduzione al presente scritto, l'esagono fondamentale

individua 60 rette inerenti ai suoi 60 esagoni ordinati che hanno analogia con le 60 rette di PASCAL dell'esagrammo mistico. E l'analogia è tale da ritenere opportuno di conservare la denominazione. Ecco come possono presentarsi queste rette: indichiamo con $\Sigma(123456)$ l'esagono ordinato i cui vertici si susseguono nell'ordine indicato dalla permutazione circolare chiusa in parentesi. Poi si osservi che presi due lati opposti come $\Sigma(12)$, $\Sigma(45)$ e la retta che passa per i vertici rimanenti, cioè la $\Sigma(36)$, esiste la diagonale di 1^a specie $d(12, 45, 36)$ appoggiata a tutte e tre le rette suddette (° 10) essendo $D(12)$, $D(45)$, $D(36)$ i punti di appoggio. Dopo di che si costruisca il coniugato armonico di $D(36)$ rispetto a $D(12)$, $D(45)$ ossia (n° 9) il punto $D(12, 45)$. Così dai lati opposti $\Sigma(12)$, $\Sigma(45)$ si è pervenuti a costruire $D(12, 45)$. In ugual modo dalle altre due coppie di lati opposti si perviene a $D(23, 56)$, $D(34, 61)$. Ebbene dico che i tre punti:

$$D(12, 45); D(23, 56); D(34, 61)$$

sono in linea retta che sarà chiamata retta di PASCAL del dato esagono ordinato. Per dimostrare questa affermazione, basta ricorrere alla collineazione (135) (246) la quale subordina, in $\Delta(123)$, una collineazione biassale a periodo tre (cf. il n° 20) e poi osservare che i tre punti suddetti esistono in $\Delta(123)$ e vi compongono un ciclo: essi dunque stanno su di una retta (unita per la collineazione nominata). Questa retta è vincolata al considerato esagono ordinato $\Sigma(123456)$ e la indicheremo col simbolo $p(123456)$.

Esistono dunque 60 rette di PASCAL in tutto.

Riunendo allora il risultato attuale con quello del n° 10 si può enunciare il teorema seguente:

« I 45 punti diagonali di 3^a specie giacciono, a 3, a 3, sopra 75 rette: 15 di esse sono le 15 diagonali di 1^a specie, le 60 rimanenti sono le 60 rette di PASCAL dei 60 esagoni ordinati contenuti nell'esagono completo fondamentale ».

15. Quand'è che due rette di PASCAL s'incontrano? Ciò accade, manifestamente, quando gli esagoni ordinati relativi hanno una coppia comune di lati opposti, chè allora il punto comune alle due rette è diagonale di 3^a specie. Ma possono anche incontrarsi in un altro caso: basta che i due esagoni abbiano in comune una coppia di vertici opposti e i lati concorrenti in questi vertici. Così s'incontrano

$$p(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6), \quad p(1\ 2\ 3\ 6\ 5\ 4)$$

e le coordinate del punto comune sono $(1, 2, 1, -1, -2, -1)$. Esso è, sulla prima, il coniugato armonico di $D(34, 61)$ rispetto a $D(12, 45)$

e $D(23, 56)$ e, sulla seconda, il coniugato armonico di $D(36, 14)$ rispetto a $D(12, 56)$, $D(23, 54)$. Ne segue che la $p(123456)$ incontra, fuori dei punti diagonali di 3^a specie, le altre tre rette seguenti :

$$p(1\ 2\ 3\ 6\ 5\ 4), \quad p(1\ 4\ 3\ 2\ 5\ 6), \quad p(1\ 6\ 3\ 4\ 5\ 2).$$

D'altra parte per $D(12, 45)$ passano le 4 rette seguenti :

$$p(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6), \quad p(1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 3), \quad p(1\ 2\ 3\ 5\ 4\ 6), \quad p(1\ 2\ 6\ 5\ 4\ 3).$$

Dunque: « Una retta di PASCAL ne incontra altre 12. Di queste, 9 sono incontrate (a tre, a tre) nei tre punti diagonali di 3^a specie esistenti sulla retta nominata: le tre rimanenti sono incontrate nei tre punti coniugati armonici di ciascuno dei precedenti rispetto agli altri due ».

16. Tenendo conto di questi risultati si vede che le due terne seguente

$$p(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6); \quad p(1\ 4\ 3\ 6\ 5\ 2); \quad p(1\ 6\ 3\ 2\ 5\ 4)$$

$$p(1\ 2\ 3\ 6\ 5\ 4); \quad p(1\ 4\ 3\ 2\ 5\ 6); \quad p(1\ 6\ 3\ 4\ 5\ 2)$$

appartengono a due serie rigate coniugate di una medesima quadrica che è $Q(135)$ (cf. il n° 12). I sei esagoni relativi sono quelli che hanno per vertici alternati 135; 246. Si ha quindi :

« Le 60 rette di Pascal appartengono, a 6, a 6, alle stesse quadriche $Q(i\ h\ k)$ a cui appartengono pure, a 6, a 6, le 15 diagonali di 1^a specie e, come quest'ultime, su ciascuna di tali quadriche, esse si dividono in due terne appartenenti alle due serie rigate coniugate ».

Per ogni diagonale di 1^a specie, comune $d(12, 34, 56)$, passeranno 4 quadriche $Q(i\ h\ k)$ e cioè $Q(135)$, $Q(136)$, $Q(145)$, $Q(146)$. Invece per ogni retta di Pascal, come $p(123456)$ passa la sola $Q(135)$.

17. — Esistono 4 esagoni che hanno i medesimi vertici opposti 14, 25, 26. Le rette di Pascal sono le seguenti :

$$p(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) \text{ che contiene: } D(12, 45), \quad D(23, 56), \quad D(34, 61)$$

$$p(1\ 5\ 3\ 4\ 2\ 6) \quad \gg \quad \gg \quad D(15, 42), \quad D(53, 26), \quad D(34, 61)$$

$$p(1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 3) \quad \gg \quad \gg \quad D(12, 45), \quad D(26, 53), \quad D(64, 31)$$

$$p(1\ 5\ 6\ 4\ 2\ 3) \quad \gg \quad \gg \quad D(15, 42), \quad D(56, 23), \quad D(64, 31)$$

quindi queste rette e questi punti sono lati e vertici di un quadrilatero completo esistente in $\delta(14, 25, 36)$, cioè :

« Le 60 rette di Pascal esistono, a 4, a 4, nei 15 piani diagonali di 1^a specie: il quadrilatero che esse compongono, in ciascuno di tali piani, ha per vertici i sei punti diagonali di 3^a specie che quel piano contiene ».

18. — La cfz. dell'esagono fondamentale procede manifestando altri punti di contatto con quella dell'esagrammo mistico. Così sarebbe facile

vedere che i 20 punti di Steiner dell'esagrammo hanno il loro riscontro nelle 20 serie rigate (coniugate a due, a due) delle 10 quadriche $Q(i h k)$. Ma l'indagine ulteriore di queste analogie ci porterebbe troppo fuori del cammino che ci siamo proposti. Piuttosto passeremo adesso ad esaminare la struttura delle collineazioni componenti il G_{720} totale.

CAPITOLO V.

Le collineazioni componenti G_{720} .

19. — Descriveremo queste collineazioni classificandole secondo il valore numerico del loro periodo. Ogni collineazione decomporremo in cicli effettuati sugli spazi fondamentali dell'esaedro, e per semplicità scriveremo i cicli effettuati sugli indici 1, 2, 3, 4, 5, 6. Così ad esempio il simbolo (123) rappresenterà la collineazione che attua la permutazione circolare $S(1) S(2) S(3)$ e lascia fissi $S(4)$, $S(5)$, $S(6)$.

Periodo uguale a 2. Esistono le tre specie seguenti:

$$(12), (12)(34), (12)(34)(56).$$

Ma prima di descriverle separatamente faremo la seguente osservazione che vale per tutte. Siano S_r , S_{4-r-1} gli spazi di punti uniti (con $r < 4$) e PP' due punti corrispondenti. Siccome il periodo è due, la retta PP' è unita e quindi ha un punto, M , comune con S_r e uno, N , con S_{4-r-1} in guisa che $MNP'P'$ è un gruppo armonico. Vale dunque la seguente costruzione che serve a trovare P' quando si conosca P . Si congiunga S_r con P mediante l' S_{r+1} che li contiene e si determini il punto M comune a tale S_{r+1} e all' S_{4-r-1} : sia N il punto comune alla retta MP e a S_r (punto che sicuramente esiste perchè la retta S_r esistono in S_{r+1}): il coniugato armonico di P rispetto ad MN è il punto P' cercato.

Ciò premesso esaminiamo la 1ª specie (12). Si ha $r = 0$. È punto unito $S(3456)$, è spazio di punti uniti $\Sigma(3456)$. La costruzione generica dianzi indicata, applicata a questo caso particolare, dimostra la opportunità di chiamare omologie armoniche le collineazioni di questa specie che sono 15. I centri di omologia sono i vertici dell'esaedro: gli spazi di omologia sono gli spazi fondamentali dell'esagono.

La 2ª e la 3ª specie si possono invece paragonare alle involuzioni gobbe del nostro spazio e noi lo chiameremo appunto con tale nome. Il luogo dei punti uniti della involuzione gobba (12)(34) è costituito dalla retta diagonale di 2ª specie $d(12, 34)$ e dal piano polare relativo $\delta(12, 34)$. Le collineazioni di questa specie sono 45.

Invece il luogo dei punti uniti della (12)(34)(56) è composto della

retta diagonale di 1^a specie d (1 2, 3 4, 5 6) e del piano polare δ (1 2, 3 4, 5 6). Le collineazioni di questa specie sono 15.

20. — *Periodo uguale a 3.* Esistono le due specie seguenti:

$$(1\ 2\ 3); (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6).$$

Nella prima sono punti uniti tutti quelli di $\Sigma(4\ 5\ 6)$ e i punti d'incontro di $S(4\ 5\ 6)$ con la quadrica F . Le collineazioni di questa specie sono 40 e, a due, a due, inverse l'una dell'altra.

Nella 2^a: è unito $\Delta(1\ 2\ 3)$ e in esso (n° 12) $Q(1\ 2\ 3)$. Le due terne seguenti sopra $Q(1\ 2\ 3)$

$$\begin{aligned} d(1\ 4, 2\ 6, 3\ 5), \quad d(2\ 5, 3\ 4, 1\ 6), \quad d(3\ 6, 1\ 5, 2\ 4), \\ d(1\ 4, 2\ 5, 3\ 6), \quad d(1\ 5, 2\ 6, 3\ 4), \quad d(1\ 6, 2\ 4, 3\ 5), \end{aligned}$$

sono unite, ma le rette della 1^a terna vengono permutate circolarmente, quella della 2^a sono invece mantenute fisse dalla collineazione in parola. Dunque si può dire che il luogo dei punti uniti è costituito dalle due rette che compongono la coppia Hessiana della prima terna e da $D(1\ 2\ 3)$, punto diagonale di 2^a specie, polo di $\Delta(1\ 2\ 3)$. In $\Delta(1\ 2\ 3)$ viene a subordinarsi una collineazione biassiale, a periodo tre, di cui gli assi sono le rette Hessiane suddette.

Le collineazioni di questa specie sono 40 (a due, a due inverse una dell'altra).

21. *Periodo uguale a 4.* Si hanno le due specie:

$$(1\ 2\ 3\ 4); (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6).$$

Sono punti uniti della prima tutti quelli della retta $\Sigma(5\ 6)$ ehe è uno spigolo dell'esagono fondamentale: fuori di questa retta sono uniti i due punti d'incontro di $d(1\ 3, 2\ 4)$ con la quadrica F e il punto diagonale $D(1\ 3, 2\ 4)$. Le collineazioni di questa specie sono 90 (a due, a due inverse).

Passiamo alla 2^a specie:

$$(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6).$$

Essa possiede la retta individuata dai due punti $D(1\ 3\ 5)$, $D(1\ 3\ 6)$ come luogo di punti uniti. Fuori di questa retta è unito $D(5\ 6)$ e sono uniti i punti d'incontro di $d(1\ 3, 2\ 4)$ con F .

Anche le collineazioni di questa specie sono 90 (a due, a due inverse).

22. *Periodo uguale a 5.* Si ha una sola specie:

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5).$$

È punto unito $\Sigma(6)$. Nello spazio polare $S(6)$ si viene a subordinare una collineazione, a periodo 5, che opera sul pentaedro completo le cui facce sono: $S(1\ 6)$, $S(2\ 6)$, $S(3\ 6)$, $S(4\ 6)$, $S(5\ 6)$. Valgono quindi le con-

Essi insieme a $\Sigma(6)$ costituiscono i cinque punti uniti della collineazione considerata.

Il numero di queste collineazioni è 144 (a due, a due inverse).

23. *Periodo uguale a 6.* Esistono le due specie:

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6); (1\ 2\ 3)(4\ 5).$$

La 1^a possiede 5 soli punti uniti che sono: $D(1\ 3\ 5)$ e i 4 punti d'incontro di E con le due rette $d(1\ 4, 2\ 5, 3\ 6)$, $p(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$, di cui la 1^a è diagonale di 1^a specie e la 2^a retta di PASCAL dell'esagono ordinato $\Sigma(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$.

Le collineazioni di questa specie sono 120 (a due, a due inverse).

Quanto alla 2^a si vede che è luogo di punti uniti la retta che passa per i due punti $D(123)$ e $\Sigma(6)$. Fuori di tale retta sono uniti tre punti e cioè $S(1\ 2\ 3\ 6)$ e i punti d'incontro di $S(4\ 5\ 6)$ con F .

Anche le collineazioni di questa specie sono 120 (a due, a due inverse).

CAPITOLO VI.

Descrizione dei sottogruppi di G_{720} che non lasciano fisso alcun vertice dell'esagono (o alcuno spazio fondamentale dell'esaedro).

24. In questo capitolo ci proponiamo la descrizione di quanto è principalmente inerente ai sottogruppi di G_{720} . Tralascieremo però quelli di essi che lasciano fisso qualche spazio fondamentale dell'esaedro (e quindi qualche vertice dell'esagono) giacchè la rappresentazione geometrica di tali gruppi è ovvia, o sulla retta, o sul piano, o nello spazio a tre dimensioni.

Ci occuperemo dunque sistematicamente di quei sottogruppi che non lasciano fisso nessuno spazio fondamentale e li classificheremo a seconda dell'ordine, cominciando dagli ordini più bassi e salendo, a mano, a mano, ai più alti. A tale scopo seguiremo la nota tabella di CAYLEY (1) tenendo conto delle correzioni apportatevi da COLE (2).

25. — *Ordine uguale a 2.* Esiste una sola specie G_2^I che è

$$\{(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)\}^r; \quad r = 1, 2.$$

Il gruppo è ciclico: vale quindi il n° 19.

(1) A. CAYLEY, *On the substitution groups for two, three, four, five, six, seven and eight letters.* The Quarterly Journal of Math., Vol. XXV, pp. 82-83. — Veggasi anche;

(2) I. N. COLE, *Note on the substitution groups of six, seven and eight letters.* Bulletin of the New-York Mat. Soc. Vol. II, pp. 184-190 (1883).

Il gruppo è dispari. Il sottogruppo pari massimo è l'identità. Il numero di questi gruppi è 15.

26. — *Ordine uguale a 3.* Esiste una sola specie G_3^I che è

$$\{(1\ 2\ 3)\ (4\ 5\ 6)\}^r; \quad r = 1, 2, 3.$$

Anche questo è ciclico e quindi veggasi il n° 20.

Il gruppo è pari. Il numero è 20.

27. — *Ordine uguale a 4.* Esistono 4 specie che descriveremo separatamente.

I^a specie G_4^I :

$$(1\ 2)\ (3\ 4)\ (5\ 6); \quad (1\ 3)\ (2\ 4)\ (5\ 6); \quad (1\ 4)\ (2\ 3); \quad I$$

dove con I si indica la identità.

Il gruppo si può generare con due qualsiasi delle sue prime tre collineazioni (fra quelle scritte). Sono punti invarianti tutti quelli della retta che unisce $D(1\ 4\ 5)$ con $D(1\ 4\ 6)$ e gli altri tre: $D(5\ 6)$, $D(1\ 2, 3\ 4)$, $D(1\ 3, 2\ 4)$. Il gruppo è dispari. È sottogruppo pari massimo $\{(1\ 4)\ (2\ 3)\}^r; r = 1, 2$. Il numero di questi gruppi è 45.

II^a specie G_4^{II} :

$$(1\ 2)\ (3\ 4)\ (5\ 6); \quad (1\ 2)\ (3\ 4); \quad (5\ 6); \quad I.$$

Generando il gruppo con la 1^a e la 3^a collineazione si trova che sono invarianti tutti i punti delle due rette $d(1\ 2, 3\ 4, 5\ 6)$; $d(1\ 2, 3\ 4)$ e inoltre il punto $S(1\ 2\ 3\ 4)$. Il gruppo è dispari. Il sottogruppo pari massimo è $\{(1\ 2)\ (3\ 4)\}^r; r = 1, 2$. Il numero è 45.

III^a specie G_4^{III} :

$$(1\ 2)\ (3\ 4); \quad (1\ 2)\ (5\ 6); \quad (3\ 4)\ (5\ 6); \quad I.$$

Generando il gruppo con la 1^a e la 2^a collineazione si vede subito che sono invarianti tutti i punti di $d(1\ 2, 3\ 4, 5\ 6)$, e inoltre $S(1\ 2\ 3\ 4)$, $S(1\ 2\ 5\ 6)$, $S(3\ 4\ 5\ 6)$. Il gruppo è pari. Il numero è 15.

IV^a specie. G_4^{IV} :

$$\{(1\ 2\ 3\ 4)\ (5\ 6)\}^r; \quad r = 1, 2, 3, 4.$$

Il gruppo è ciclico. Veggasi dunque il n° 21.

Il gruppo è pari. Il numero è 45.

28. — *Ordine uguale a 6.* Esistono 3 specie.

I^a specie G_6^I :

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)^r; \quad r = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Il gruppo è ciclico. Veggasi dunque il n° 23. il gruppo è dispari. È sottogruppo pari massimo G_3^I . Il numero è 60.

II^a specie. G_6^{II} :

$$\{(1\ 2\ 3)\ (4\ 5\ 6)\}^r; r = 1, 2, 3; \quad (1\ 2)(4\ 5); \quad (2\ 3)\ (5\ 6); \quad (3\ 1)(6\ 4).$$

È invariante il solo punto $D(1\ 2\ 3)$. Il gruppo è pari.

Il numero è 60 (triplo di quello dei G_3^I).

III specie. G_6^{III} :

$$\{(123)\ (456)\}^r; r = 1, 2, 3; \quad (14)\ (26)\ (35); \quad (25)\ (34)\ (16); \quad (36)\ (15)\ (24).$$

È invariante il solo punto $D(123)$. Il gruppo è dispari.

È sottogruppo pari massimo G_3^I . Il numero è 20.

29. — *Ordine uguale a 8.* Esistono sei specie: esse provengono dall'associare due G_4 di specie diversa in tutti i sei modi possibili.

I^a specie G_8^I . Si associi il G_4^I del n° 27 col G_4^{II} seguente:

$$(1\ 4)\ (2\ 3)\ (5\ 6); \quad (1\ 4)\ (2\ 3); \quad (5\ 6); \quad I$$

e si avrà il cercato G_8^I . Esistono i seguenti 5 punti invarianti:

$$D(1\ 3, 2\ 4), \quad D(1\ 2, 3\ 4), \quad D(1\ 4, 2\ 3), \quad D(5\ 6), \quad S(1\ 2\ 3\ 4).$$

Il gruppo è dispari: il sottogruppo pari massimo è

$$(1\ 2)(3\ 4); \quad (1\ 3)(2\ 4); \quad (1\ 4)(2\ 3); \quad I.$$

Il numero è 15.

II^a specie G_8^{II} . Si associi il G_4^I solito del N° 27 col G_4^{III} seguente:

$$(1\ 4)(2\ 3); \quad (1\ 4)(5\ 6); \quad (2\ 3)(5\ 6); \quad I.$$

I punti invarianti sono i tre seguenti:

$$S(1\ 2\ 3\ 4); \quad D(1\ 4, 2\ 3); \quad D(5\ 6).$$

Il G_8^{II} è dispari. È sottogruppo massimo il G_4^{III} precedente. Il numero dei G_8^{II} è 45.

III^a specie G_8^{III} . il medesimo G_4^I del N° 27 associato col G_4^{IV} seguente: $\{(1\ 2\ 4\ 3)(5\ 6)\}^r, r = 1, 2, 3, 4$ dà luogo al G_8^{III} ora cercato. Sono invarianti tutti i punti della retta che unisce $D(1\ 4\ 5)$ con $D(1\ 4\ 6)$ e inoltre $D(5\ 6)$. Il G_8^{III} è dispari. Il sottogruppo pari massimo è il G_4^{IV} precedente. Il numero dei G_8^{III} è 45.

IV^a specie G_8^{IV} . Esso proviene dall'associare i due G_4^{II} e G_4^{III} del N° 27. Sono invarianti tutti i punti della retta $d(1\ 2, 3\ 4, 5\ 6)$ e inoltre: $S(1\ 2\ 3\ 4), S(1\ 2\ 5\ 6), S(3\ 4\ 5\ 6)$. Il G_8^{IV} è dispari. È sottogruppo pari massimo G_4^{III} . Il numero dei G_8^{IV} è 15.

V^a specie G_8^V . Si associ il G_4^{II} del N° 27 col seguente G_4^{IV} :

$$\{(1\ 3\ 2\ 4)(5\ 6)\}^r, \quad r = 1, 2, 3, 4.$$

Sono invarianti i 5 punti seguenti: $S(1\ 2\ 3\ 4)$, $D(1\ 2, 2\ 4)$, $D(5\ 6)$ e i punti d'incontro di $d(1\ 2, 3\ 4)$ con F . Il G_8^V è dispari. È sottogruppo pari massimo il G_4^{IV} precedente. Il numero è 45.

VI^a specie G_8^{VI} . Finalmente associando il G_4^{IV} del N° 27 col seguente G_4^{III} : $\{(1\ 3)(2\ 4); (1\ 3)(5\ 6); (2\ 4)(5\ 6); I\}$ si otterrà il richiesto G_4^{VI} . Sono invarianti i tre punti

$$S(1\ 2\ 3\ 4); \quad D(1\ 3, 2\ 4); \quad D(5\ 6).$$

Il G_8^{III} è pari. Il numero è 45.

30. Ordine uguale a 9. Esiste una sola specie G_9^I . Un tal gruppo è il prodotto di due G_3 . Basta ad esempio moltiplicare $(1\ 2\ 3)^r$ per $(4\ 5\ 6)^r$, $r = 1, 2, 3$ in tutti i modi possibili. Sono punti invarianti $D(1\ 2\ 3)$ e i 4 punti d'intersezione di $S(1\ 2\ 3)$, $S(4\ 5\ 6)$ con F . Il G_9^I è pari. Il numero è 10.

31. Ordine uguale a 12. Esistono due specie.

I^a specie. G_{12}^I . Per ottenere questo gruppo basta aggiungere al G_6^I seguente (N° 28): $(123456)^r$, $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ la collineazione $(1\ 2)(4\ 5)(3\ 6)$ i di cui simboli si ottengono scegliendo due lati opposti dell'esagono 123456 e i due vertici rimanenti. Esiste un solo punto invariante che è $D(1\ 3\ 5)$. Il G_{12}^I è dispari. È sottogruppo pari massimo un G_6^{II} . il numero è 60.

II^a specie. G_{12}^{II} (considerato da COLE, ommesso da CAYLEY). Per generare un tal gruppo si assuma il seguente G_4^{III} :

$$(14)(25); \quad (25)(36); \quad (36)(14); \quad I$$

e vi si aggiunga la collineazione $(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)$ che lo trasforma in se stesso e si troverà il cercato G_{12}^{II} . Sono invarianti i punti d'incontro di $d(1\ 4, 2\ 5, 3\ 6)$ con la F . Il G_{12}^{II} è pari. Il numero è 15.

32. Ordine uguale a 16. Si ha una sola specie G_{16}^I .

Esso può ottenersi aggiungendo al G_8^{VI} , del N° 29, la collineazione $(5\ 6)$. Sono invarianti i medesimi punti che sono tali rispetto al G_8^{VI} suddetto e cioè

$$S(1\ 2\ 3\ 4); \quad D(1\ 3, (2\ 4)); \quad D(5\ 6).$$

Il G_{16}^I è dispari. È sottogruppo pari massimo G_8^{VI} .

Il numero dei G_{16}^I è 45.

33. Ordine uguale a 18. Si hanno tre specie.

I^a specie: G_{18}^I . Esso può riguardarsi come il prodotto del gruppo totale sopra 1, 2, 3 per $(4\ 5\ 6)^r$, $r = 1, 2, 3$. Il G_{18}^I è dispari, essendo sottogruppo pari massimo il G_9^I del N° 30. Tenendo conto di questa circostanza

si vede che i punti invarianti, rispetto all'attuale G_{18}^I , sono i due punti d'incontro di $S(123)$ con la quadrica F e il punto $D(123)$.

Il numero dei G_{18}^I è 20.

II^a specie: G_{18}^{II} . Per ottenerlo si faccia il prodotto del gruppo totale sopra 1, 2, 3 per il gruppo totale sopra 4, 5, 6 e dopo si scelgano le sostituzioni pari. Si trova così il cercato G_{18}^{II} che riesce un gruppo pari. È sottogruppo invariante il G_9^I del N° 30. Onde si deduce che esiste un sol punto invariante rispetto a G_{18}^{II} ed è $D(123)$.

Il numero dei G_{18}^{II} è 10.

III^a specie: G_{18}^{III} . Si aggiunga al G_9^I del N° 30 una collineazione a periodo 6 che lo trasformi in sè stesso: ad es. (1 4 2 5 3 6) e si otterrà G_{18}^{III} . Il simbolo di tale collineazione è quello di un esagono che ha per vertici alternati 123, 456 essendo (1 2 3)^r, (4 5 6)^r, i gruppi che hanno generato il G_9^I (cf. il N° 30). Tali esagoni sono sei (cf. il N° 17): ogni G_{18}^{III} ne assorbe tre. Il G_{18}^{III} è dispari. È sottogruppo pari massimo il suddetto G_9^I . Il numero dei G_{18}^{III} è 20.

34. — *Ordine uguale a 24.* Esistono 5 specie.

I^a specie: G_{24}^I . Esso proviene dal gruppo tetraedrico sopra 1 2 3 4 per l'aggiunta di (5 6). È un sottogruppo il G_8^I del n° 29 mediante il quale risulta che G_{24}^I possiede i soli due punti invarianti $S(1234)$, $D(56)$. Il gruppo attuale è dispari. È sottogruppo pari massimo il gruppo tetraedrico suddetto. Il numero di questi G_{24}^I è 15.

II^a specie: G_{24}^{II} . Per ottenere questo gruppo si possono prendere tutte le sostituzioni dispari sopra 1 2 3 4 e moltiplicarle per (5 6) e dopo aggiungere il gruppo tetraedrico sopra gli stessi elementi 1 2 3 4. Si perviene così a un gruppo pari che è il G_{24}^{II} cercato. Esso possiede G_8^{VI} come sottogruppo (n° 29) per cui si vede che i punti invarianti, rispetto all'attuale G_{24}^{II} , sono due soltanto e cioè: $S(1234)$ e $D(56)$. Il numero dei G_{24}^{II} è 15.

III^a specie: G_{24}^{III} . Si aggiunga al G_{12}^{II} del n° 31 la sostituzione (1 2 4 5) e si otterrà G_{24}^{III} . Vengono così ad aggiungersi le sostituzioni simili (1 3 4 6), (2 3 5 6) con le loro inverse e in conseguenza (1 6) (2 5) (3 4) e altre 5 simili. Non esiste alcun punto invariante. Il gruppo attuale è dispari. È sottogruppo pari massimo il G_{12}^{II} sopra nominato. Anche questi G_{24}^{III} sono in numero di 15.

IV^a specie: G_{24}^{IV} . Se al medesimo G_{12}^{II} precedente, si aggiunge (1 2 4 5) (3 6), in luogo di (1 2 4 5), si perviene al G_{24}^{IV} invece che a G_{24}^{III} . Anche G_{24}^{IV} è privo di punti invarianti (come G_{24}^{III}). Il gruppo attuale è pari. Il numero è 15.

V^a specie: G_{24}^V (considerato da COLE, ommesso da CAYLEY). Il solito G_{12}^{II} è invariante rispetto a (1 4). Aggiungendo una tale collineazione si

perviene al cercato G_{24}^V . Si vengono così ad aggiungere (2 5) e (3 6) e altre 8 collineazioni a periodo 6 (a due, a due inverse): i simboli di queste collineazioni a periodo 6 sono costituiti dagli esagoni che hanno per vertici opposti 1 4, 2 5, 3 6. Sono punti invarianti quelli d'incontro di d (1 4, 2 5, 3 6) con la quadrica F . Il G_{24}^V è dispari, essendo sottogruppo pari massimo G_{12}^{II} . Il numero è 15.

35. — *Ordine uguale a 36*. Vi sono tre specie.

I^a specie: G_{36}^I . Esso è il prodotto del gruppo totale sopra 1 2 3 per il gruppo totale sopra 4 5 6. È un gruppo dispari che ha per sottogruppo pari massimo il G_{18}^{II} il cui punto invariante D (1 2 3) è anche tale rispetto al presente G_{36}^I . Il numero di questi G_{36}^I è 10.

II^a specie: G_{36}^{II} . Per ottenerlo basta aggiungere al G_{18}^{II} la collineazione (2 5 3 6) (1 4). Si vengono così ad aggiungere, in conseguenza, altre 8 collineazioni simil in guisa da averne 9: esse, con le loro inverse, completano il gruppo cercato. È invariante il solo punto D (1 2 3). Il G_{36}^{II} è pari. Il numero dei G_{36}^{II} è 10.

III^a specie: G_{36}^{III} (considerato da COLE, ommesso da CAYLEY). Per ottenere un tal gruppo si osservi che G_{18}^{II} e G_{18}^{III} hanno in comune G_9^I e basta riunirli per ottenere il cercato G_{36}^{III} . Vengono, con ciò, ad aggiungersi 9 collineazioni esterne ai due G_{18}^{II} e G_{18}^{III} . I simboli di queste nuove collineazioni possono compendiarsi in quelle dei tre esagoni (1 5 2 4 3 6), (1 6 2 5 3 4), (1 4 2 6 3 5) i quali, insieme ai tre già esistenti in G_{18}^{III} , costituiscono i sei che hanno per vertici alternati 1 2 3, 4 5 6. È punto invariante il solo D (1 2 3). Il G_{36}^{III} è dispari, avendo G_{18}^{II} per sottogruppo pari massimo. Il numero dei G_{36}^{III} è 10.

36. — *Ordine uguale a 48*. — Esistono due specie.

I^a specie: G_{48}^I . Esso proviene dal gruppo totale sopra 1, 2, 3, 4 per l'aggiunta della collineazione (5 6). Il gruppo è dispari essendo sottogruppo pari massimo G_{24}^{II} . Sono punti invarianti S (1 2 3 4) e D (5 6). Il numero è 15.

II^a specie: G_{48}^{II} . Questo gruppo si può ottenere riunendo G_{24}^{IV} con G_{24}^V quali hanno in comune G_{12}^{II} (n° 34). Le 12 nuove collineazioni che vengono ad aggiungersi sono dei due tipi seguenti: (1 2 4 5) e (1 2) (4 5) (3 6): sei dell'uno e sei dell'altro. Il gruppo attuale è privo di punti invarianti. È dispari avendo per sottogruppo pari massimo il G_{24}^{IV} . Il numero è 15. Bisogna anche notare che il G_{48}^{II} è il gruppo imprimitivo di ordine massimo quando siano riguardati come sistemi di imprimitività 1 4, 2 5, 3 6. Possiede come retta invariante la diagonale di 1^a specie d (1 4, 2 5, 3 6) e come piano invariante δ (1 4, 2 5, 3 6).

37. — *Ordine uguale a 60*. Esiste una sola specie: G_{60}^I . Per costruire tal gruppo si assuma un G_{10} sopra i cinque elementi 1. 2. 3. 4. 5.

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5)^r; \quad r = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$(1\ 2)(3\ 5); (2\ 3)(4\ 1); (3\ 4)(5\ 2); (4\ 5)(1\ 3); (5\ 1)(2\ 4).$$

Ebbene, ciascuna di queste collineazioni a periodo 2 individua un G_{12}^{II} (cf. il n° 31) e così si ottengono i cinque sottogruppi tetraedrici del G_{60}^{I} domandato. Le collineazioni esterne a tali sottogruppi sono le seguenti (a periodo 5) insieme a tutte le loro potenze:

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5), (1\ 3\ 2\ 4\ 6), (1\ 3\ 6\ 5\ 2), (1\ 4\ 6\ 2\ 5), (1\ 6\ 3\ 5\ 4), (2\ 6\ 5\ 3\ 4).$$

Il G_{60}^{I} è privo di punti invarianti; è icosaedrico e quindi è pari. Il numero è 6.

38. — *Ordine uguale a 72.* Vi è una sola specie: G_{72}^{I} . Il gruppo può ottenersi riunendo G_{36}^{II} e G_{36}^{III} i quali hanno a comune il G_{18}^{II} . Le 18 collineazioni, esterne ai due gruppi soprannominati, sono delle due specie (1 2), (1 2 3) (4 5) e precisamente 6 della 1ª e 12 della 2ª. È invariante il solo punto $D(1\ 2\ 3)$. Il G_{72}^{I} è dispari essendo sottogruppo pari massimo G_{36}^{II} . Il numero è 10. È da notarsi che G_{72}^{I} è il gruppo d'ordine massimo quando si riguardino come sistemi di imprimitività: 1 2 3, 4 5 6.

39. — *Ordine uguale a 120.* Esiste una sola specie di G_{120}^{I} . Per costruire un tale gruppo basta aggiungere la collineazione (1 3) (2 5) (4 6) al G_{60}^{I} (n. 37). Si perviene così al G_{120}^{I} che è dispari e ha per sottogruppo pari G_{60}^{I} . Il numero dei G_{120}^{I} è sei. Ciascuno è privo di punti invarianti. Fra le collineazioni di G_{120}^{I} esterne a G_{60}^{I} sono da annoverarsi le seguenti 10 a periodo due:

$$\begin{aligned} (1\ 3)(2\ 5)(4\ 6); & \quad (1\ 5)(2\ 3)(4\ 6), \\ (2\ 4)(3\ 1)(5\ 6); & \quad (2\ 1)(3\ 4)(5\ 6), \\ (3\ 5)(4\ 2)(1\ 6); & \quad (3\ 2)(4\ 5)(1\ 6), \\ (4\ 1)(5\ 3)(2\ 6); & \quad (4\ 3)(5\ 1)(2\ 6), \\ (5\ 2)(1\ 4)(3\ 6); & \quad (5\ 4)(1\ 2)(3\ 6). \end{aligned}$$

Ora ricordiamo che tutte le collineazioni di questa specie del G_{720} totale sono 15: ebbene i simboli delle cinque che avanzano sono identici a quelli delle seguenti cinque rette diagonali di 1ª specie:

$$\begin{aligned} d(1\ 6, 3\ 4, 2\ 5); & \quad d(2\ 6, 4\ 5, 3\ 1); \quad d(3\ 6, 5\ 1, 4\ 2) \\ d(4\ 6, 1\ 2, 5\ 3); & \quad d(5\ 6, 2\ 3, 1\ 4) \end{aligned}$$

ed è facile constatare che G_{120}^{I} funziona da gruppo totale sopra queste cinque rette come G_{60}^{I} funziona da gruppo alterno. Ne segue che due qualunque delle rette nominate non s'incontrano altrimenti tutte si incontrerebbero, a due, a due, e quindi dovrebbe esistere un punto, o un piano, invarianti rispetto a G_{120}^{I} . Dunque i sistemi di cinque diagonali di 1ª specie analoghi al precedente sono sei (questi sono i G_{120}^{I}). Se per bre-

vità si chiama quintupla un tal sistema di 5 rette diagonali sghembe a due, a due: si possono allora enunciare i seguenti teoremi:

« Con le 15 rette diagonali di 1^a specie si possono formare sei quintuple. Sopra le diagonali di ciascuna quintupla funziona da gruppo totale un G_{120}^I e da gruppo alterno il relativo sottogruppo icosaedrico G_{60}^I . Ogni diagonale di 1^a specie appartiene a due quintuple. Una quintupla è individuata da due delle sue rette ».

Se si riflette che una terna di rette in posizione generica fra loro ammette nello spazio ambiente una ed una sola trasversale appoggiata alle tre rette della terna, si può anche aggiungere:

« Le 10 rette diagonali di 1^a specie che avanzano quando si tolgono da tutte le 15, quelle di una quintupla, costituiscono le 10 trasversali delle 10 terne contenute nella quintupla medesima ».

40. — Consideriamo i 15 punti diagonali di 1^a specie. Essi sono a tre, a tre allineati sopra le 5 diagonali di una quintupla qualunque, (ad es.: la quintupla precedente). Formiamo i due pentagoni ordinati seguenti: $D(1\ 2)\ D(4\ 5)\ D(2\ 3)\ D(1\ 5)\ D(3\ 4)$; $D(1\ 4)\ D(2\ 5)\ D(1\ 3)\ D(2\ 4)\ D(3\ 5)$.

I lati di questi pentagoni possono riferirsi in guisa che i corrispondenti s'incontrino nei 5 punti $D(i\ k)$ rimanenti. Infatti si ha che

le due rette	$D(1\ 2) \cdot D(4\ 5)$	}	s' incontrano in	$D(3\ 6)$
	$D(1\ 4) \cdot D(2\ 5)$			
» » »	$D(4\ 5) \cdot D(2\ 3)$	}	»	» $D(1\ 6)$
	$D(2\ 4) \cdot D(3\ 5)$			
» » »	$D(2\ 3) \cdot D(1\ 5)$	}	»	» $D(4\ 6)$
	$D(2\ 5) \cdot D(1\ 3)$			
» » »	$D(1\ 5) \cdot D(3\ 4)$	}	»	» $D(2\ 6)$
	$D(3\ 5) \cdot D(1\ 4)$			
» » »	$D(3\ 4) \cdot D(1\ 2)$	}	»	» $D(5\ 6)$
	$D(1\ 3) \cdot D(2\ 4)$			

Si può dunque dire che: con i 15 punti diagonali di 1^a specie si possono formare tre pentagoni di cui 2 ordinati in guisa che i loro lati s'incontrino nei vertici del 3° pentagono (che risulta così, iscritto nei primi due). I vertici dei 3 pentagoni sono allineati, a tre, a tre, nelle cinque diagonali di una quintupla a cui la cfz. attuale rimane, in tal modo, coordinata. Esistono quindi 6 tali cfz.ⁿⁱ.

41. — Ordine uguale a 360. Esiste una sola specie e un sol gruppo G_{360}^I che è il sottogruppo alterno. Esso contiene i 6 G_{60}^I del n° 37 e

per generarlo basta aggiungere al G_{60}^I di quel numero una sostituzione pari esterna a tale G_{60}^I .

CAPITOLO VII.

Alcune considerazioni sopra le ipersuperficie invarianti dei primi cinque ordini.

42. — Abbiamo già osservato al n° 2 che non esiste alcun iperpiano invariante rispetto a G_{720} , e che di quadriche invarianti ne esiste una sola rappresentata analiticamente da $\sum_1^6 x_i^2 = 0$ e indicata col simbolo F . Anche le ipersuperficie cubiche invarianti si riducono ad una sola (che è la V_3^3 di SEGRE). Infatti si consideri il sottogruppo G_{120} che tiene fisso uno spazio fondamentale e permuta in tutti i modi possibili gli spazi rimanenti. Esso subordina, in tale spazio, un gruppo di collineazioni quaternarie dotato di una sola superficie cubica invariante (cf. la mia Memoria sul pentaedro n° 14) e quindi appartenente a tutte le ipersuperficie cubiche invarianti rispetto al G_{720} totale. Se dunque queste ipersuperficie fossero due, esse avrebbero in comune le sei superficie cubiche, analoghe a quella descritta, nei sei spazi fondamentali dell'esaedro. Ciò è impossibile evidentemente.

Dunque :

« L'unica ipersuperficie cubica invariante, è la V_3^3 di SEGRE (la quale, come è ben noto ha 10 punti doppi nei 10 punti diagonali di 2 specie) ».

43. — Passiamo alle ipersuperficie quartiche. Esse potranno rappresentarsi tutte con una equazione della forma :

$$a \sum_1^6 x_i^4 + b \sum_1^6 x_i^3 x_h + c \sum_1^6 x_i^2 x_h^2 + d \sum_1^6 x_i^2 x_h x_h x_k + e \sum_1^6 x_i x_h x_k x_l = 0.$$

dove a, b, c, d, e sono costanti.

Se non che, a causa di $\sum_1^6 x_i = 0$, valgono le seguenti identità :

$$\sum_1^6 x_i^3 x_h = - \sum_1^6 x_i^4; \quad \sum_1^6 x_i^2 x_h x_k = \frac{1}{2} \sum_1^6 x_i^4 - \sum_1^6 x_i^2 x_k^2$$

$$\sum_1^6 x_i x_h x_k x_l = - \frac{1}{8} \sum_1^6 x_i^4 + \frac{1}{4} \sum_1^6 x_i^2 x_k^2.$$

Per cui il sistema cercato si riduce al seguente fascio :

$$a \sum_1^6 x_i^4 + \beta \sum_1^6 x_i^2 x_k^2 = 0$$

al quale appartiene la quadrica F contata due volte ($\alpha = 1$, $\beta = 2$).

Si ha dunque :

« *Le ipersuperficie quartiche invarianti formano un fascio e tutte si toccano lungo una superficie di 8° ordine situata sulla quadrica fondamentale* ».

44. Fra le ipersuperficie precedenti merita speciale considerazione quella individuata da $\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{2}{3}$ cioè la seguente :

$$3 \sum_1^6 x_i^4 - 2 \sum_1^6 x_i^2 x_h^2 = 0$$

e che noi indicheremo col simbolo W secondo una notazione già introdotta da CASTELNOVO (1). Ci proponiamo adesso di esporre qui le proprietà più notevoli di questa ipersuperficie alcune delle quali rilevate già dall'autore suddetto.

Si cominci dall'osservare che W passa per uno e quindi per tutti i punti diagonali di 1ª e di 3ª specie: da cui segue che essa contiene per intero le 15 rette diagonali di 1ª specie perchè ciascuna possiede tre punti diagonali di 1ª e tre di 3ª specie (N° 9). Dico che ciascuna di queste rette è doppia per W . Infatti sia P un punto qualunque di d (1 2, 3 4, 5 6). La collineazione (1 2)(3 4)(5 6) trasforma W in se stessa: ogni retta r passante per P e che abbia un punto comune col piano δ (1 2, 3 4, 5 6), è unita per la collineazione suddetta (N° 19) e quindi il punto P assorbe almeno due delle intersezioni di r con W : per conseguenza r esiste nell' S_3 tangente a W in P , da cui segue che tale S_3 (se è determinato) è quello individuato da P e dal piano δ (1 2, 3 4, 5 6). Ma d (1 2, 3 4, 5 6), appartenente a W , è esterna allo spazio suddetto individuato da P e da δ (1 2, 3 4, 5 6), perchè d (1 2, 3 4, 5 6), e il suo piano polare δ (1 2 3 4 5 6) non hanno alcun punto comune. Ne segue che l' S_3 tangente in P a W è indeterminato e quindi P è un punto doppio.

Si ha dunque il risultato :

« *La ipersuperficie W possiede come rette doppie le 15 diagonali di 1ª specie. Essa dunque è tangente, lungo una quadrica, a ciascuno spazio diagonale di 2ª specie Δ (i h k). Tale quadrica è la Q (i h k) del n° 12.*

« *Spettano dunque a tali 15 rette doppie tutte le proprietà dei n° 9-12: il fatto che esse sono distribuite, a 6, 6, nelle 10 quadriche suddette, induce*

(1) Loc. cit. L'equazione della ipersuperficie, nella forma data da CASTELNOVO, è :

$$\left(\sum_1^6 x_i^2\right)^2 - 16 \sum_1^6 x_i x_k x_h x_l = 0.$$

Essa si riduce subito alla nostra tenendo conto delle identità del n° 43.

a ritenere la ipersuperficie in discorso come la più naturale estensione (nello spazio a 4 dimensioni) della superficie quartica (dello spazio a 3) dotata di 15 punti doppi situati, a 6, a 6, sopra 10 coniche, in 10 piani singolari tangenti alla superficie lungo tali coniche ».

E' appunto di tale specie la superficie sezione di W con uno qualunque dei 6 spazi fondamentali (cf. la mia Memoria sul pentaedro: n° 17).

45. Ogni piano diagonale di 3^a specie contiene sei punti diagonali di 3^a specie esistenti su di una stessa conica (n° 13), dunque si può dire che
« I 60 piani diagonali di 3^a specie toccano ciascuna la ipersuperficie W lungo una conica.

Siccome ogni retta di PASCAL contiene 3 punti diagonali di 3^a specie (n° 14) che sono doppi per W , così ne viene che ciascuna di tali rette appartiene per intero a W . Tenendo presente il n° 17 ne segue che: « I quindici piani diagonali di 1^a specie tagliano, ciascuno, le ipersuperficie W secondo un quadrilatero che ha per lati 4 rette di PASCAL ».

Uno spazio diagonale di 1^a specie come $\Delta(1\ 2)$ contiene tre piani diagonali di 1^a specie: $\delta(1\ 2, 3\ 4, 5\ 6)$, $\delta(1\ 2, 3\ 5, 4\ 6)$, $\delta(1\ 2, 3\ 6, 4\ 5)$; contiene 4 piani diagonali di 3^a specie $\delta(3, 1\ 2)$, $\delta(4, 1\ 2)$, $\delta(5, 1\ 2)$, $\delta(6, 1\ 2)$ e non contiene alcuna diagonale di 1^a specie: dunque la sezione di $\Delta(1\ 2)$ con W sarà una superficie quartica con 15 punti doppi situati, a tre, a tre, sopra 12 rette e a 6, a 6 sopra 4 coniche. Con le 12 rette si potranno formare 3 quadrilateri piani aventi per vertici i 15 punti doppi suddetti, ecc., ecc.

Finalmente la sezione, con uno spazio fondamentale dell'esagono, è una superficie di STEINER. Ad es.: la sezione con $\Sigma(3\ 4\ 5\ 6)$ ha come rette doppie: $d(1\ 2, 3\ 4, 5\ 6)$, $d(1\ 2, 3\ 5, 4\ 6)$, $d(1\ 2, 3\ 6, 4\ 5)$, concorrenti in $D(1\ 2)$ che è il punto triplo della superficie sezione, ecc., ecc.

46. — Per cercare tutte le ipersuperficie quintiche invarianti, osserveremo (analogamente a ciò che fu fatto nel n° 43) che esse potranno rappresentarsi con una equazione della forma:

$$a \sum_1^6 x_i^5 + b \sum_1^6 x_i^4 x_h + c \sum_1^6 x_i^3 x_h^2 + d \sum_1^6 x_i^3 x_h x_k + \\ + e \sum_1^6 x_i^2 x_h^2 x_k + f \sum_1^6 x_i^2 x_h x_k x_l + g \sum_1^6 x_i x_h x_k x_l x_m = 0,$$

dove a, b, c, d, e sono costanti.

Ma, a causa di $\sum_1^6 x_i = 0$, risulta identicamente:

$$\sum_1^6 x_i^4 x_h = - \sum_1^6 x_i^5$$

$$\begin{aligned} \sum_1^6 x_i^3 x_h^2 &= \frac{1}{5} \sum_1^6 x_i^5 - 6 \sum_1^6 x_i x_h x_k x_l x_m, \\ \sum_1^6 x_i^3 x_h x_k &= \frac{2}{5} \sum_1^6 x_i^5 + 3 \sum_1^6 x_i x_h x_k x_l x_m, \\ \sum_1^6 x_i^2 x_h^2 x_k &= -\frac{1}{5} \sum_1^6 x_i^5 + 6 \sum_1^6 x_i x_h x_k x_l x_m, \\ \sum_1^6 x_i^2 x_h x_k x_l &= -5 \sum_1^6 x_i x_h x_k x_l x_m. \end{aligned}$$

Per cui si perviene al fascio seguente:

$$\alpha \sum_1^6 x_i^5 + \beta \sum_1^6 x_i x_h x_k x_l x_m = 0.$$

Esso può essere definito dalla Hessiana di $V_3^3 (\alpha = 0)$ e dalla ipersuperficie costituita da V_3^3 e da $F \left(\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1}{5} \right)$ la quale ipersuperficie è anche l'unica riduttibile nel fascio. Abbiamo dunque il risultato:

« Come le ipersuperficie quartiche invarianti, così, anche le quintiche, formano un fascio: esso è individuato dalla Hessiana della V_3^3 di SEGRE e dalla ipersuperficie spezzata nella V_3^3 suddetta e nella quadrica invariante fondamentale ».

La forma medesima della equazione della Hessiana dimostra il suo passaggio per tutte le facce $S(i k)$ dell'esaedro. Per lo spigolo $S(1 2 3)$ passano $S(1 2)$, $S(1 3)$, $S(2 3)$ che non esistono in un medesimo spazio: dunque $S(1 2 3)$ è doppio e i vertici dell'esaedro, su di esso, sono tripli per l'Hessiana in discorso, la quale ha anche per punti doppi i 10 $D(i h k)$. Quindi: « L'Hessiana di V_3^3 ha 15 rette doppie nei 15 spigoli dell'esaedro e 20 punti tripli nei 20 vertici: ha inoltre 10 punti doppi nei 10 punti doppi di 2^a specie (e non ha altri punti multipli).

LE QUARTICHE PIANE PROIETTIVE A SÉ STESSE.

Estratto dal tomo XXVIII (2^o sem. 1909) dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*.
Adunanza del 28 febbraio 1909.

Se una quartica piana è invariante rispetto a una collineazione periodica del suo piano, si suol dire che è proiettiva a sè stessa, o che possiede la collineazione suddetta, dopo di che possiede anche evidentemente tutte le potenze della collineazione medesima. Sorge così e si amplia il concetto di gruppo di collineazioni spettanti a una quartica e si delinea quindi la questione seguente: « *determinare tutti i casi, proiettivamente distinti, nei quali una quartica piana irriduttibile è invariante rispetto a gruppi finiti di collineazioni piane* ». Alla completa risoluzione di questo problema è destinato il presente scritto. Ma prima di intraprendere la trattazione sistematica non sarà inopportuna un poco di storia sull'argomento.

KLEIN (1) per il primo ha presentato e illustrato il caso più notevole, fra quelli suddetti, col ben noto gruppo di 168 collineazioni piane. Posteriormente, S. KANTOR (2) e (con maggior precisione) A. WIMAN (3) risolvono, quasi contemporaneamente, il problema per tutte le quartiche di genere tre. Qualche anno dopo avendo io trattato, indipendentemente dal genere, la questione inerente al numero e alla configurazione delle omologie

(1) *Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen* [Mathematische Annalen, Bd. XIV (1879), pp. 428-471].

(2) *Neue Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene* [Acta Mathematica, Bd. XIX (1895), pp. 115-193].

(3) *Ueber die hyperelliptischen Curven und diejenigen vom Geschlechte $p = 3$, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen* [Bihang till Kongl Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar, Bd. XXI (1895), Abth. I, No. 1, pp. 1-23]; *Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene* [Mathematische Annalen, Bd. XLVIII (1897), pp. 195-240].

armoniche spettanti ad una quartica piana (1), mi servivo, in seguito, dei miei risultati per risolvere, sempre indipendentemente dal genere, la questione più ampia sopra delineata. Questi risultati io pubblicai sotto la forma di enunciato in una breve noticina dell'Istituto Lombardo (2) riservandomi a dare per esteso tutti gli sviluppi e dimostrazioni relative: ma poi preoccupato della eccessiva complicazione degli uni e delle altre tralasciai ogni cosa. Tornando recentemente a occuparmi dell'argomento, sono riuscito a cambiamenti e semplificazioni tali da indurmi alla presente pubblicazione anche perchè essa risolve la questione dianzi enunciata qualunque sia il genere della quartica (mentre i due Autori sopracitati si limitano al genere tre).

Del resto anche la ricerca nel caso $p = 3$ potrebbe facilmente ridursi a quella inerente a quartiche singolari (salvo pochi casi) mediante le considerazioni seguenti. Se con $f = 0$ si rappresenta analiticamente la quartica, con A il suo invariante cubico e con $S = 0$ il covariante S , è ben noto (3) che tutti i covarianti di 4° ordine e di 4° grado sono quelli del fascio:

$$S + \lambda A \cdot f = 0.$$

Un esempio di un tale covariante diverso da S e da f è il contravariante quadratico del contravariante quadratico di f (luogo di un punto tale che tirando da esso le 4 trasversali che tagliano equianarmonicamente f , queste formino nuovamente un gruppo equianarmonico). Indichiamo con E questo covariante: esso è individuato nel fascio precedente da $\lambda = \frac{1}{3}$.

Ebbene, se f possiede un gruppo G di collineazioni, tale gruppo spetterà anche ad S e ad E (perchè sono due covarianti), cioè a tre curve del fascio suddetto e quindi a tutte e per conseguenza alle curve singolari del fascio medesimo. Farà eccezione la quartica che ha S (ed E) coincidenti con sè medesima, cioè la quartica di KLEIN (4); faranno eccezione le quartiche che hanno S indeterminato (anche queste ben conosciute) e finalmente quelle a invariante cubico nullo, o (ciò che è lo stesso) quelle che hanno

(1) *I vari tipi possibili di quartiche piane più volte omologico-armoniche* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XIII (1899), pp. 347-373].

(2) *I gruppi finiti di collineazioni piane dotati di una quartica invariante irriducibile* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, vol. XXXIII (1900), pp. 1170-1176].

(3) MAISANO, *Sistemi completi dei primi cinque gradi della forma ternaria biquadratica e degl'invarianti, covarianti e controvarianti di sesto grado* [Giornale di Matematiche, vol. XIX (1881), pp. 198-237].

(4) CIANI, *Un teorema sopra il covariante S della quartica piana* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XIV (1900), pp. 16-21].

S ed E coincidenti fra loro e non con f : e pure quest'ultime, per quanto meno note, si presentano di facile studio. Potrebbero quindi anche queste considerazioni servire di traccia per lo studio della questione proposta sebbene io non me ne sia servito nel presente lavoro e abbia preferito una via più breve.

La memoria attuale è divisa in tre capitoli. Trattandosi di collineazioni periodiche, ho cominciato dal destinare il primo capitolo all'esame di quelle fra di esse che ammettono una quartica invariante irriduttibile, riprendendo quindi, per intero, particolarmente i risultati di S. KANTOR e aggiungendovi quelli inerenti a quartiche singolari (dal KANTOR tralasciati). Nel 2° capitolo è contenuto il teorema che risolve completamente la questione proposta. Nel 3° capitolo ho preso in considerazione, con qualche dettaglio, uno fra i casi trovati, notevole per la particolare relazione che esso ha con la cosiddetta quartica di CAPORALI già, sotto altri punti di vista, riconosciuta feconda di belle e interessanti proprietà geometriche (1).

I.

Le collineazioni periodiche dotate di quartica invariante irriduttibile.

1. A quali condizioni debbono soddisfare una collineazione piana periodica e una quartica irriduttibile affinché la seconda sia invariante rispetto alla prima? Per rispondere a questa domanda distingueremo diversi casi cominciando da quello nel quale la suddetta collineazione è una omologia. Siccome essa deve essere periodica, così il centro e l'asse non possono essere incidenti: si può dunque assumere il centro come punto (001) e l'asse come retta $x_3 = 0$, per cui indicando con C la omologia supposta, essa si rappresenterà con la sostituzione

$$C \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \alpha x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

dove α è radice primitiva di $z^r = 1$ (essendo r il periodo di C). Sia $f = 0$ l'equazione di una quartica irriduttibile. Se essa deve riuscire invariante rispetto a C , si è condotti ovviamente ai tre casi seguenti:

$$f = a x_3^4 + b x_3^2 + c = 0, \quad r = 2,$$

$$f = a x_3^3 + b = 0, \quad r = 3,$$

$$f = a x_3^4 + b = 0, \quad r = 4,$$

(1) CIANI, *La quartica di CAPORALI*, [Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (sezione della Società Reale di Napoli), serie III, vol. II (1896), pp.126-144].

dove nella prima e nella 3^a a è una costante; nella 2^a e nella 3^a b è una binaria biquadratica in $x_1 x_2$; nella 1^a b e c sono binarie dei gradi rispettivi 2 e 4 e nella 2^a a è lineare in $x_1 x_2$.

2. Se poi la supposta collineazione C non è omologica e ha il periodo non superiore a 4, si trova per $r = 3$

$$f = a x_3^4 + b x_3^2 x_1 x_2 + c x_3 x_1^3 + d x_3 x_2^3 + e x_1^2 x_2^2 = 0$$

con

$$C \equiv \begin{pmatrix} a x_1 & \alpha^2 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \alpha^3 = 1,$$

dove a, b, c, d, e sono costanti con $e \neq 0$, se no da f si stacca x_3 e c, d non sono nulli insieme altrimenti f si compone di due coniche bitangenti.

Per $r = 4$ si può prendere

$$C \equiv \begin{pmatrix} i x_1 & -x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

e si trovano per f i due tipi seguenti:

$$f = a x_1^4 + b x_1^2 x_2 x_3 + c x_2^4 + d x_2^2 x_3^2 + e x_3^4 = 0,$$

$$f = a x_1^2 x_3^2 + b x_1^2 x_2^2 + c x_2^3 x_3 + d x_2 x_3^3 = 0,$$

dove a, b, c, d, e sono costanti.

3. Sia adesso $r > 4$ e qualche potenza di C , ma non tutte, sia omologica. Per conseguenza la f avrà una delle tre forme trovate al n° 1.

Discutiamole separatamente. La f abbia dunque la prima forma:

$$f = a x_3^4 + b x_3^2 + c = 0,$$

dove b non è identicamente nullo altrimenti si cade nella 3^a forma.

Scriviamo C nel modo seguente:

$$C = \begin{pmatrix} a x_1 & \alpha^k x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

dove α è radice primitiva di $\alpha^r = 1$.

Se $a \neq 0$, si è condotti alla quartica:

$$f = a x_3^4 + b x_3^2 x_2^2 + c x_1^3 x_2 + d x_2^4 = 0,$$

dove a, b, c, d sono costanti. Il periodo $r = 6$; $k = 3$, $\alpha^3 = -1$.

Se poi $a = 0$, disponendo opportunamente del punto unità, si trovano le due forme:

$$f = x_3^2 x_1 x_2 + x_1^4 + x_2^4 = 0,$$

$$f = x_3^2 x_2^2 + x_1^4 + x_1 x_2^3 = 0.$$

Nella prima $r = 8$, $k = 3$; nella seconda $r = 6$, $k = 5$.

4. La f abbia la 3ª forma omologica del n° 1, cioè

$$f = a x_3^4 + b = 0$$

e la C sia quella generica del n° precedente. Escludiamo i casi che rientrano nel n° precedente e quelli che spettano al numero seguente (allorchè considereremo la f omologica a periodo 3). Rimane soltanto il caso

$$f = x_3^4 + x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 = 0$$

con $r = 8$, $k = 5$. Con opportuna, quanto ovvia, trasformazione di coordinate la f può portarsi alla forma

$$f = \sum_1^3 x_i^4 = 0.$$

La quartica attuale è quella di DYCK (n° 16).

5. La f abbia la 2ª forma omologica del n° 1. Escludendo casi già trovati, rimangono i seguenti.

Il 1° è:

$$f = x_3^3 x_2 + x_1^4 + x_1 x_2^3 = 0$$

con $r = 9$, $k = 4$.

Il 2° è:

$$f = x_3^3 x_2 + x_1^4 + x_2^4 = 0$$

con $r = 12$, $k = 4$. La quartica è quella di CAPORALI specializzata (Cap. III).

Il 3° è:

$$x_3^3 x_2 + x_1^4 = 0.$$

Ma per questa, r può esser grande a piacere.

6. Sia ora $r > 4$ e numero primo: ne segue che C non può essere omologica (n° 1). Considerando poi la proiettività binaria che C subordina sopra ogni lato del triangolo unito, ne viene che essa non può essere identica e che il suo periodo r supera 4 per cui le intersezioni dei lati suddetti con f sono tutte assorbite dai vertici del medesimo triangolo. Se uno dei vertici è singolare per f , le tangenti in esso sono tutte assorbite dai lati che passano per quel vertice. Sono possibili due casi a seconda che la f passa per due dei vertici suddetti, o per tutti e tre. Sarà utile distinguerli.

7. La f passi per due vertici. Ne viene che uno, ed uno solo di essi deve essere singolare. Esso può essere doppio, o triplo. Suddistinguiamo.

Sia doppio. Si vede subito che non può esser cuspidè e si è condotti a una equazione della forma seguente :

$$f = a x_2^2 x_1 x_3 + x_2 (b x_1^2 + c x_1^2 x_3 + d x_1 x_3^2) + e x_3^4 = 0,$$

dove a, b, c, d, e sono costanti: $a \neq 0$ se no (010) è triplo (e non doppio); $b \neq 0$ se no f si spezza. Ora la cubica polare del punto doppio si compone di $x_1 = 0$ e della conica

$$2 a x_2 x_3 + b x_1^2 + c x_1 x_3 + d x_3^2 = 0$$

e questa, essendo invariante rispetto a C , non può segare il trilatero unito fuori dei vertici.

Essendo a e $b \neq 0$ segue $c = d = 0$. E allora la f può ridursi alla forma :

$$f = x_2^2 x_1 x_3 + x_2 x_1^2 + x_3^4 = 0$$

e la C è la seguente

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^2 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \alpha^5 = 1, \quad r = 5.$$

Se poi il vertice singolare è triplo, si trova necessariamente che f è della forma

$$f = x_2 x_1^3 + x_3^4 = 0;$$

ma, come già abbiamo osservato, r è allora qualunque.

8. La f passi per tutti e tre i vertici del triangolo unito. Se tutti e tre sono semplici si trova :

$$f = x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2 = 0.$$

La f è la quartica di KLEIN (cfr. prefazione): la C ha il periodo $r = 7$ ed è la seguente :

$$\begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^3 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \alpha^7 = 1.$$

Non rimane altro caso possibile che uno dei vertici sia multiplo per f e gli altri due punti semplici. Ma si esclude subito che la molteplicità sia 3. E se deve essere 2 risulta che il vertice in parola è cuspidè e si per viene necessariamente alla :

$$f = x_2^2 x_3^2 + x_2 x_1^2 + x_1 x_3^2 = 0$$

con

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x_1 & x_2 & \alpha^4 x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad r = 5, \quad \alpha^5 = 1.$$

9. Dalle considerazioni fatte sin qui risulta che i valori primi possibili di r sono soltanto 2, 3, 5, 7, e, se il genere è tre, il valore 5 si esclude. Ne segue che, se r non è primo, i suoi fattori primi non possono essere diversi da 2, o da 3. Infatti sia q un fattore primo di r : se C è la collineazione a periodo r , la collineazione $C^{\frac{r}{q}}$ avrà per periodo q e quindi $q = 2, 3, 5, 7$: ma se $q = 7$ abbiamo già visto che siamo nel caso della quartica di KLEIN e $r = q = 7$ (contro la ipotesi che r non sia primo). Se $q = 5$, siamo nei due casi trovati nei N° 7 e 8 e vedremo al N° 13 che allora non esistono altre collineazioni possibili e quindi $r = q = 5$ (contro l'ipotesi che r non sia primo). Dunque i valori possibili di r sono della forma: $2^m; 3^n; 2^s \cdot 3^t$. Nel 1° e nel 3° caso la $C^{\frac{r}{2}}$ è omologia armonica e quindi valgono le considerazioni dei N° 3 e 4 e non troviamo tipi nuovi. Se finalmente $r = 3^n$ con $n > 1$, la $C^{3^{n-1}}$ ha il periodo 3, e se sarà omologica, valgono le considerazioni del N° 5: altrimenti potremo assumere

$$C^{3^{n-1}} \equiv \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^2 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \text{ con } \alpha^3 = 1$$

e la f sarà (N° 2)

$$f = a x_3^4 + b x_3^2 x_1 x_2 + c x_3 x_1^3 + d x_3 x_2^3 + e x_1^2 x_2^2 = 0,$$

dove $e \neq 0$ e c, d non possono insieme annullarsi altrimenti f si spezza. Tenendo presente questo, si ponga

$$C \equiv \begin{pmatrix} \beta x_1 & \beta^k x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

e si esiga che C appartenga ad f e si vedrà come necessariamente debba essere $n = 1$.

La discussione è quindi esaurita: non sono possibili altri casi all'infuori di quelli trovati.

È necessario riassumerli classificandoli a seconda del valore del periodo ed enunciando, volta, a volta, le caratteristiche proiettive più rimarchevoli.

10. Periodo uguale a due (cfr. il N° 1).

Si ha un solo caso

$$f = a x_3^4 + b x_3^2 + c = 0,$$

dove a è una costante; b e c due binarie in x_1 e x_2 dei gradi rispettivi 2 e 4. La collineazione C è

$$C \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Il centro di omologia è uno dei 21 punti doppi della Steineriana; l'asse è una delle 21 tangenti quaduple della Cayleyana (1): ogni punto comune all'asse e alla curva (che non sia singolare) è un punto sestattico.

11. *Periodo uguale a tre.* (cfr. Nⁱ 1 n 2).

Si hanno due casi a seconda che la C è omologica, o no.

1° *Caso.* La C sia omologica e rappresentabile con

$$C \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & a x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad a^3 = 1.$$

La quartica è

$$f = x_3^3 x_1 + \varphi(x_1, x_2) = 0,$$

dove φ è una binaria biquadratica in x_1, x_2 .

La curva possiede 4 flessi sull'asse di omologia ($x_3 = 0$) con le relative tangenti concorrenti nel centro di omologia (001), che è per la curva un punto di ondulazione ($x_1 = 0$ tangente di ondulazione).

2° *Caso.* — La C non sia omologica e rappresentabile con

$$C \equiv \begin{pmatrix} a x_1 & a^2 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad a^3 = 1.$$

La quartica è

$$f = a x_3^4 + b x_3^3 x_1 x_2 + c x_3 x_1^3 + d x_3 x_2^3 + e x_1^2 x_2^2 = 0,$$

dove a, b, c, d, e sono costanti. La retta $x_3 = 0$ è, in generale, una bitangente di f .

12. *Periodo uguale a quattro* (cfr. i nⁱ 1 e 2).

Si hanno tre casi distinti.

1° *Caso* — La C sia omologica e rappresentabile con

$$C \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & i x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

La quartica è

$$f = x_3^4 + \varphi(x_1, x_2) = 0,$$

dove $\varphi(x_1, x_2)$ è binaria biquadratica in x_1, x_2 . La curva possiede 4 on-

(1) BERTINI, *Le tangenti multiple della Cayleyana di una quartica piana generale* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXII (1896-97), pp. 32-33].

dulazioni sull'asse di omologia con le tangenti relative concorrenti nel centro di omologia (che non può appartenere alla curva).

2° Caso

$$f = a x_1^4 + b x_1^2 x_2 x_3 + c x_2^4 + d x_2^2 x_3^2 + e x_3^4 = 0.$$

3° Caso

$$f = a x_1^2 x_3^2 + b x_1^2 x_2^2 + c x_2^3 x_3 + d x_2 x_3^4 = 0.$$

In entrambi si ha la C non omologica seguente :

$$C \equiv \begin{pmatrix} i x_1 & -x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Nel 3° caso la curva possiede sempre un punto doppio: nel 2° caso, in generale, non lo possiede.

13. *Periodo uguale a cinque* (cfr. i n° 7 e 8).

1° Caso.

$$f = x_2^2 x_1 x_3 + x_2 x_1^3 + x_3^4 = 0,$$

$$C \equiv \begin{pmatrix} a x_1 & a^2 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad a^5 = 1.$$

2° Caso

$$f = x_2^2 x_3^2 + x_2 x_1^3 + x_1 x_3^3 = 0,$$

$$C \equiv \begin{pmatrix} a x_1 & x_2 & a^4 x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad a = 1.$$

Sono proprietà comuni a entrambi le seguenti: la curva possiede un punto doppio; le intersezioni del trilatero unito della C con la f sono tutte assorbite dai vertici; la f non possiede altre collineazioni all'infuori di C e delle sue potenze. — Specificando i due casi si può aggiungere che nel 1° il punto doppio è un nodo, nel 2° una cuspidè; nel 1° caso la f passa per due vertici del triangolo unito di C , nel 2° passa per tutti e tre, etc.

14. *Periodo uguale a sei* (cfr. il n° 3).

1° Caso

$$f = a x_3^4 + b x_3^2 x_2^2 + c x_1^3 x_2 + d x_2^4 = 0,$$

dove a, b, c, d sono costanti. La C è la seguente :

$$C = \begin{pmatrix} a x_1 & -x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad a^3 = -1.$$

Il quadrato e il cubo di C sono due omologie con i rispettivi periodi uguali a 2 e a 3. Il centro dell'una omologia esiste sull'asse dell'altra.

2° Caso

$$f = x_3^2 x_2^2 + x_1^4 + x_1 x_2^3 = 0$$

con

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x_1 & -\alpha^2 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \alpha^3 = -1.$$

La curva possiede un tac-nodo (001) con $x_2 = 0$ tangente tac-nodale. La C di questo 2° caso è proiettivamente diversa da quella del 1° caso: infatti la C attuale non ha per 2ª potenza una omologia.

15. *Periodo uguale a sette* (cfr. il n° 8).

Esiste un solo caso: la quartica di KLEIN

$$f = x_1 x_2^3 + x_2 x_3^3 + x_3 x_1^3 = 0$$

con

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^3 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \alpha^7 = 1.$$

La f possiede altre collineazioni formanti con C il noto G_{168} .

16. *Periodo uguale a otto* (cfr. i n° 3 e 4).

1° Caso. — La quartica di DYCK (1)

$$f = \sum_1^3 x_i^4 = 0$$

con

$$C \equiv \begin{pmatrix} i x_2 & -x_1 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

La f possiede altre collineazioni formanti con C il noto G_{96} . Esse possono rappresentarsi con $\begin{pmatrix} \alpha x_i & \beta x_h & \gamma x_k \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$, dove α, β e γ sono radici quarte dell'unità e $i, h, k = 1, 2, 3$.

2° Caso.

$$f = x_3^2 x_1 x_2 + x_1^4 + x_2^4 = 0$$

con

(1) WALTHER DYCK *Notiz über eine reguläre RIEMANN'sche Fläche vom Geschlechte drei und die zugehörige « Normalcurve » vierter Ordnung* [Mathematische Annalen, Bd. XVII (1880), pp. 510-516].

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^3 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \alpha^8 = 1.$$

La f possiede altre collineazioni che si possono rappresentare con

$$\begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^3 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^r \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \quad (r = 1, 2, \dots, 8).$$

Esse insieme a C compongono un G_{16} .

17. *Periodo uguale a nove* (cfr. il N° 5)

Esiste un solo caso:

$$f = x_3^3 x_2 + x_1^4 + x_1 x_2^3 = 0$$

con

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^4 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \alpha^9 = 1, \quad (\alpha \text{ rad. primitiva}).$$

Le potenze di C compongono l'intero gruppo spettante a f .

18. *Periodo uguale a dodici* (cfr. il N° 5).

Esiste un solo caso: la quartica di CAPORALI specializzata

$$f = x_3^3 x_2 + x_1^4 + x_2^4 = 0$$

con

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^4 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \alpha^{12} = 1. \quad (\alpha \text{ rad. primitiva}).$$

La f possiede altre collineazioni: esse con C formano un G_{48} di cui diremo nel Capitolo III.

19. *Periodo qualunque* (cfr. il N° 5).

$$f = x_3^4 + x_1^3 x_2 = 0$$

con

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^k x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

con la sola condizione $3 + k = r$.

II.

Teorema fondamentale.

20. Indichiamo ora con G l'intero gruppo di collineazioni posseduto dalla quartica irriducibile f e consideriamo il caso in cui G contenga delle omologie armoniche e la f sia quindi una, o più volte, omologico-armonica. Ricordando il teorema del N° 13 della mia memoria già citata su tali quartiche, si può dire che i centri e gli assi di tali omologie sono così disposti da potere assicurare sempre, o la esistenza di un solo triangolo invariante rispetto alle omologie in parola, ovvero la esistenza di un solo punto

e di una sola retta invarianti (e non incidenti) rispetto alle omologie in parola. Esiste un solo caso di eccezione: la quartica di KLEIN che per ora intendiamo di escludere. A precisare le cose, si può aggiungere che esiste il triangolo invariante nei casi II, VI, VII considerati in quel N. 13 sopra nominato, esiste un punto e una retta invarianti nei casi I, III, IV e V del N. stesso. Questo è quanto risulta immediatamente dal teorema citato, ma evidentemente il numero delle omologie armoniche di G e la figura composta con i loro centri e i loro assi, sono invarianti non soltanto rispetto alle omologie suddette, ma rispetto anche a ogni altra collineazione di G e quindi esisterà o un solo triangolo invariante, o una sola retta e punto invarianti, rispetto all'intero gruppo G . Dico che questa conclusione vale anche se in G non esiste alcuna omologia armonica. Infatti risulta allora dal capitolo precedente che il periodo di una qualunque collineazione di G non può essere diverso da 3, o da 5, o da 7. Il caso $r = 7$ si esclude perchè conduce alla quartica di KLEIN (N. 15); per $r = 5$ esiste un solo triangolo invariante che è il triangolo unito della collineazione che ha tale periodo e infatti essa, con le sue potenze, compone l'intero gruppo spettante alla curva (N. 13). Rimane dunque a considerare il caso in cui tutte le collineazioni di G siano a periodo tre e quindi l'ordine di G sia 3^n (cfr. il N. 9). Ma in tal caso G possiede un sottogruppo invariante G_3 di 3° ordine composto quindi con le potenze di una stessa collineazione C a periodo tre. Se C è omologica il centro e l'asse compongono un punto e una retta invarianti rispetto a G_3 e quindi rispetto a G . Se C non è omologica è invariante il triangolo dei punti uniti. Si ha dunque il seguente risultato:

Se una quartica irriducibile possiede un gruppo G di collineazioni, o esiste un solo triangolo invariante rispetto a G , o esistono un punto e una retta invarianti e non incidenti, o altrimenti la quartica è quella di KLEIN e il gruppo è il relativo G_{168} .

21. Ci proponiamo adesso di discutere le eventualità espresse dal precedente enunciato cominciando dal considerare il caso in cui esista un punto e una retta invarianti (non incidenti) e non esista alcun triangolo invariante. Assumiamo tale punto come (001) e tale retta come $x_3 = 0$. Su di essa il gruppo ternario G supposto, subordina un gruppo binario g rispetto al quale deve essere invariante l'insieme delle 4 intersezioni di f con $x_3 = 0$. Dunque il gruppo g è di specie conosciuta, esso è isomorfo oloedrico col gruppo della piramide, o della doppia piramide, o con alcuno di quelli spettanti a poliedri regolari. Ma se si trattasse del gruppo della piramide (semplice, o doppia) esisterebbe sopra $x_3 = 0$ una coppia invariante di punti: essi insieme a (001) individuerrebbero un triangolo invariante e saremmo fuori della ipotesi fatta. Dunque g è isomorfo oloe-

drico con il gruppo spettante a qualche poliedro regolare : ma d'altra parte esso deve possedere, come elemento invariante, l'insieme delle 4 intersezioni di $x = 0$ con f , dunque g è il gruppo del tetraedro e l'insieme suddetto compone un gruppo equianarmonico. Siccome poi in g esiste la identità, così esisterà in G la collineazione

$$C \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \alpha x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \quad \text{con } \alpha^r = 1 \text{ (} \alpha \text{ rad. primitiva),}$$

che è manifestamente una omologia a periodo r col centro -n (001) e con asse $x_3 = 0$.

Dunque la nostra quartica f sarà omologica ed r non può avere altri valori che 2, o 3, o 4 (cfr. il N. 1). Ma se fosse $r = 3$, il gruppo g ammetterebbe almeno un punto invariante : quello d'incontro di $x = 0$ con la tangente a f nel centro di omologia (cfr. il N. 11). Sarà quindi $r = 2$ ovvero $r = 4$ e in entrambi i casi l'equazione di f sarà della forma seguente :

$$a x_3^4 + b x_3^2 + c = 0,$$

dove a è una costante, b una binaria quadratica in $x_1 x_2$ e c una binaria biquadratica equianarmonica (per quanto abbiamo visto sopra). Ma (001) e $x_3 = 0$ debbono essere invarianti rispetto a G , sarà dunque invariante rispetto a g la coppia di punti (distinti, o no) secondo i quali $b = 0$ incontra $x_3 = 0$: il che abbiamo già dichiarato essere impossibile. Occorre quindi che la forma b sia nulla identicamente, cioè che r sia uguale a 4 e la f sia la seguente

$$f = a x_4^3 + c = 0$$

con la c equianarmonica. Ne segue (cfr. il capitolo seguente) che f è la quartica di CAPORALI specializzata, e G il G_{48} relativo.

22. Passiamo ora al caso in cui esista un triangolo invariante che assumeremo subito come fondamentale, di guisa che tutte le collineazioni di G si potranno rappresentare con sostituzioni della forma :

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \alpha x_i & \beta x_h & x_k \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

dove ihk è una permutazione qualunque di 123.

Suddistinguiamo poi il caso attuale in due, a seconda che esiste, o no, in G una collineazione a periodo tre. Esista questa collineazione C . Può essere che G si componga esclusivamente delle potenze di C : se ciò non accade, discutiamo un momento l'effetto che C produce. Essa permuterà circolarmente i tre lati del triangolo invariante supposto, ovvero li

terrà fissi. Quando li permuti circolarmente, C non può essere omologica: assumendo per punto unità un punto unito di C avremo

$$C \equiv \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

e quindi f avrà la forma seguente:

$$f = a \sum_1^3 x_i^4 + b (x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1) + c (x_1 x_2^3 + x_2 x_3^3 + x_3 x_1^3) + \\ + d \sum_1^3 x_i^2 x_h^2 + e x_1 x_2 x_3 \sum_1^3 x_i = 0,$$

dove a, b, c, d, e sono costanti. Le altre sostituzioni di G saranno della forma (1); dovendo esse spettare a f ne segue che α e β sono radici quarte dell'unità, quando a , o d sieno diverse da zero; ovvero, radici settime quando si abbia $a = d = e = 0$. Per conseguenza G o coincide con G_{96} (cfr. il N. 16), oppure con G_{168} (cfr. il N. 15), o altrimenti è sottogruppo dell'uno, o dell'altro.

Quando invece la C tenga fissi i lati del triangolo invariante essa può essere omologica e quindi rappresentabile con

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \alpha x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

e la f con (cfr. il N. 11)

$$x_3^3 x_1 + \varphi(x_1, x_2) = 0,$$

dove φ è binaria biquadratica in x_1, x_2 . Ora si osservi che se esiste un'altra omologia ciclica di 3° ordine diversa da C , o da C^2 , si perviene alla quartica di CAPORALI specializzata e quindi G è G_{48} , o gli appartiene come sottogruppo (cfr. il N. 29 del Capitolo seguente). Rimane dunque a vedere quel che accade quando C e C^2 sono le sole omologie di 3° ordine spettanti a f . Allora ogni altra collineazione di C ha la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha x_1 & \beta x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Esigendo la appartenenza alla f si trova anzitutto la condizione $\alpha = \beta^4$ (per la presenza indispensabile dei due termini $x_3^3 x_1, x_2^4$, altrimenti f si spezzerebbe), dopo di che si trova che, o G appartiene al G_{48} , ovvero si compone delle potenze di una stessa collineazione (non appartenente a G_{48}).

Se poi la C , pure avendo il periodo tre, non è omologia, avremo:

$$(2) \quad C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^2 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \alpha^3 = 1$$

$$f = a x_3^4 + b x_3^2 x_1 x_2 + c x_1^3 x_3 + d x_2^3 x_3 + e x_1^2 x_2^2 = 0,$$

dove a, b, c, d, e sono costanti e il triangolo fondamentale è il supposto triangolo invariante. E ora ogni altra collineazione C' di G dovendo spettare a f è della forma

$$C' \equiv \begin{pmatrix} \beta x_1 & \gamma x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

a meno che c e d non sieno uguali. Se non lo sono, si osservi che $e \neq 0$ e che, d'altra parte, uno almeno dei due termini $x_1^3 x_3, x_2^3 x_3$ ci deve essere se no f si spezza; e per la stessa ragione non può mancare uno degli altri due $a x_3^4, b x_3^2 x_1 x_2$ e quindi si trova che G è costituito per intero con le potenze di C' .

Se poi c e d sono uguali, si aggiunge la sostituzione:

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

e il gruppo G è generato da quest'ultima e dalla (2) precedente. Allora, con evidente trasformazione di coordinate, tali due sostituzioni generatrici possono scriversi rispettivamente

$$\begin{pmatrix} y_2 & y_1 & y_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_2 & y_3 & y_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

e ora manifestamente C appartiene al G_{96} (cfr. il N. 16).

23. Non resta a discutere altra ipotesi che (pure esistendo un triangolo invariante) non esista in G alcuna collineazione a periodo tre. Ne segue (Capitolo I) che il periodo r delle collineazioni di G non potrà avere valori diversi da 2, 4, 5, 8, ovvero potrà essere qualsiasi; ma allora G si comporrà delle potenze di una stessa collineazione (n. 19). Ciò accadrà anche per $r = 5$ (cfr. il n. 13). Se $r = 8$, o G apparterrà al G_{96} , o sarà il G_{96} medesimo, oppure sarà, o apparterrà al G_{16} inerente alla quartica

$$f = x_3^2 x_1 x_2 + x_1^4 + x_2^4 = 0$$

secondo le considerazioni del n° 16. E se finalmente $r = 2$ ovvero $r = 4$, è evidente la appartenenza di G al G_{96} .

24. Risulta dunque dimostrato il seguente teorema:

Se una quartica piana irriduttibile possiede un gruppo finito di collineazioni, esso è necessariamente uno dei seguenti qui sotto descritti, o gli appartiene come sottogruppo.

- a) Il G_{168} d'ordine 168 della quartica di KLEIN;
- b) Il G_{96} d'ordine 96 della quartica di DYCK;
- c) Il G_{48} d'ordine 48 della quartica di CAPORALI specializzata (cfr. li Capitolo seguente).
- d) Il G_{16} descritto al n° 16 e inerente alla quartica:

$$f = x_3^2 x_1 x_2 + x_1^4 + x_2^4 = 0.$$

Esso può ritenersi generato dalle due sostituzioni:

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^3 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \quad \alpha^8 = 1 \text{ (}\alpha \text{ rad. primitiva).}$$

e) Ogni gruppo composto con le potenze di una stessa collineazione non contenuta nei gruppi precedenti. Il periodo di questa collineazione può essere 5, 6, 9, o qualunque, e i casi relativi sono descritti ai n° 13, 14, 67, 19.

E' bene che il lettore osservi che i gruppi precedentemente indicati sono tali che niuno può essere sottogruppo del precedente quando anche (l'ordine del maggiore essendo multiplo dell'ordine del minore) potrebbe nascere il sospetto di una tale dipendenza. Così è ben noto che G_{168} non possiede dei G_{48} . Il G_{48} non può appartenere al G_{96} (n^0 27). E nemmeno il G_{16} può appartenere al G_{96} perchè nel G_8 del G_{16} non esiste la omologia ciclica a periodo 4 che esiste invece nei G_8 di G_{96} .

III.

La quartica di Caporali specializzata.

25. Fra i casi specificati dal teorema precedente ne segnaliamo uno che si è presentato in altri punti della presente memoria e che ora vogliamo considerare con qualche dettaglio mettendo in luce particolarmente il gruppo di 48 collineazioni che la curva possiede. — *Essa intanto può ritenersi caratterizzata dall'aver 4 ondulazioni in linea retta, formanti gruppo equianarmonico, con le relative tangenti di ondulazione concorrenti in un punto.* — Questo fatto mette in evidenza una particolare generazione della curva, così da poterla riguardare come caso speciale della quartica di CAPORALI. Ecco come.

E' noto che tale quartica non è altro che la jacobiana di una retta r e di un fascio φ di cubiche sizigetiche: in seguito a ciò si dimostra che la stessa curva può anche considerarsi come jacobiana di una seconda retta r' e di un secondo fascio φ' di cubiche sizigetiche. Ebbene può accadere che le rette r ed r' coincidano: ciò avviene quando si prenda per retta r una delle nove polari armoniche di φ , in seguito a che tale retta è anche una polare armonica di φ' . Precisamente in tal caso la quartica si può ritenere caratterizzata dal possedere quattro ondulazioni allineate formanti gruppo equianarmonico con le tangenti di ondulazione concorrenti in un punto. Ciò costituisce quindi il caso attuale e rende ragione della adottata denominazione di quartica di CAPORALI specializzata (1).

(1) Cfr. 8).

26. Assumendo per $x_3 = 0$ la retta delle ondulazioni, e su di essa [per (100), (010)] una coppia del covariante sestico del gruppo delle ondulazioni, e finalmente per (001) il punto comune alle tangenti di ondulazione, la equazione della curva può scriversi (con opportuna disposizione del punto unità)

$$f = x_3^4 + x_1^4 + x_2^4 + 2i\sqrt{3}x_1^2x_2^2 = 0.$$

Essa è manifestamente priva di punti multipli, e potrebbe anche caratterizzarsi esigendo la invarianza rispetto a una omologia, a periodo quattro con l'asse di omologia secante equianarmonicamente la curva.

Ciò premesso, si osservi che il gruppo delle quattro ondulazioni, essendo equianarmonico, è invariante rispetto alle 12 proiettività binarie del gruppo tetraedrico. Esso può ottenersi aggiungendo al gruppo quadrinomio binario seguente :

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -x_2 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

la sostituzione a periodo tre

$$\begin{pmatrix} -x_1 + ix_2 & x_1 + ix_2 \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Si hanno così, da tutti i prodotti possibili, le dodici sostituzioni del gruppo binario suddetto. Ebbene la binaria biquadratica in x_1x_2 che compare in $f=0$ rimane invariata per le prime 4 proiettività precedenti: per effetto delle altre si riproduce col fattore esterno $2 + 2i\sqrt{3}$. Perchè dunque tutta la f sia cambiata in sè stessa, basta alle prime quattro sostituzioni binarie aggiungere x_3 trasformantesi in ax_3 dove a è radice quarta di uno e, alle otto rimanenti, x_3 trasformantesi in $\sqrt[4]{2 + 2i\sqrt{3}}$. Siccome tanto a quanto $\sqrt[4]{2 + 2i\sqrt{3}}$ hanno 4 valori, avremo in tutto 48 proiettività ternarie costituenti il gruppo cercato G_{48} .

Si può dunque dire :

La quartica di CAPORALI specializzata è invariante rispetto a un gruppo di 48 collineazioni piane che è isomorfo meriedrico al gruppo del tetraedro. Per rappresentare geometricamente i 4 elementi fondamentali su cui opera il gruppo tetraedrico suddetto, si possono assumere le 4 ondulazioni allineate della curva.

27. Per mettere in evidenza le collineazioni a periodo dodici possedute dalla curva, osserviamo che il gruppo delle ondulazioni può rappresentarsi con $x_1^4 + x_1x_1^3 = 0$. Basta collocare i due punti fondamentali su $x_3 = 0$ così: l'uno sulla curva e l'altro sul punto polare rispetto alle altre

intersezioni di f con $x_3 = 0$. Scegliendo opportunamente il punto unità, la f può scriversi

$$f = x_3^4 + x_1^4 + x_1 x_2^3 = 0$$

e ora è manifesta la invarianza di f rispetto alla seguente collineazione a periodo 12

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha^4 x_1 & x_2 & \alpha x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

dove α è radice primitiva di $z^{12} = 1$. È questo il caso del N. 18. Si può quindi dire:

La curva attuale è l'unica quartica irriducibile dotata di collineazioni a periodo 12.

La presenza di questa collineazione potrebbe servire a caratterizzare la curva. È notevole che C^3 , C^4 , C^6 sieno tutte e tre omologiche col periodo rispettivo 4, 3, 2. Si può dunque aggiungere che *la nostra curva costituisce il solo esempio possibile di quartica dotata contemporaneamente delle 3 specie di omologie che una quartica possa possedere* (N. 1).

Dal momento che il G_{48} attuale possiede collineazioni a periodo 12 è manifesto che esso non possa essere sottogruppo di G_{96} , perchè in G_{96} non esistono sicuramente tali collineazioni.

28. Riprendiamo le omologie C^3 e C^4 del N. precedente. L'asse della prima taglia f in 4 ondulazioni formanti gruppo equianarmonico, l'asse della seconda taglia f in 4 flessi formanti un gruppo armonico. Le 4 tangenti di ondulazione concorrono in un punto del 2° asse, le 4 tangenti di flesso concorrono in un punto del 1°. Il punto di concorso delle tangenti di flesso non solo esiste sulla retta delle ondulazioni ma coincide con una determinata di queste: il punto di concorso delle tangenti di ondulazione è sulla retta dei flessi ma naturalmente non appartiene a f . Se si considera come è costruito il triangolo fondamentale del N. precedente, si vede che si può costruirne altri tre in uguali condizioni. Essi hanno a comune un vertice e il lato opposto (centro e asse della omologia a periodo 4): gli altri due vertici sono costituiti, per ciascun triangolo, da una ondulazione e dal suo punto polare rispetto alle tre rimanenti:

Esistono dunque in G_{48} quattro sottogruppi G_{12} composti ciascuno dalle potenze di una collineazione a periodo 12.

Infine le proprietà dei flessi possono riassumersi nel seguente enunciato:

La quartica di CAPOREALI specializzata possiede 4 ondulazioni e 16 flessi. Le 4 ondulazioni compongono un gruppo equianarmonico su di una retta e le tangenti relative concorrono in un punto. I 16 flessi compongono 4 gruppi armonici sopra 4 rette di un fascio equianarmonico che ha per centro il punto

comune alle tangenti di ondulazione suddette. Le 4 tangenti dei 4 flessi di un gruppo armonico concorrono in un punto di ondulazione così che ogni gruppo armonico di 4 flessi è coordinato a un punto di ondulazione.

La curva possiede 12 omologie di cui 7 a periodo 2, una a periodo 4 e quattro a periodo 3.

29. Finalmente osserveremo che se una quartica piana irriducibile possiede due omologie a periodo tre (che non siano l'una il quadrato dell'altra) la curva è necessariamente l'attuale.

Infatti se f possiede una omologia a periodo tre l'equazione potrà scriversi (N. 1)

$$x_3^3 x_1 + \varphi(x_1, x_2) = 0,$$

dove φ è binaria biquadratica in $x_1 x_2$. Il centro d'omologia (001) è punto di ondulazione con $x_1 = 0$ tangente relativa: l'asse d'omologia è $x_3 = 0$.

La cubica polare del centro si compone dell'asse contato due volte e della tangente suddetta. Questo dimostra che se esiste un'altra omologia a periodo tre, che non sia il quadrato di quella già esistente, è impossibile la coincidenza dei due centri delle due omologie medesime, come pure è impossibile che il centro della 2^a omologia esista sopra $x_3 = 0$ [perchè questo centro è punto di ondulazione, mentre i punti comuni a $x_3 = 0$ e a f sono flessi e al più punti singolari (N. 12)]. Segue che il centro della 2^a omologia non è unito per la prima, per cui applicando la prima al centro della 2^a, troveremo 4 ondulazioni in linea retta formanti gruppo equianarmonico e con le tangenti relative concorrenti nel punto comune agli assi delle due omologie, il che caratterizza precisamente la quartica di CAPORALI specializzata.

LE CURVE PIANE DI QUART' ORDINE

(MONOGRAFIA)

[Giorn. di Mat.ca 1910]

Il presidente scritto ha per iscopo di dare in forma espositiva le proprietà principali, sin qui conosciute, delle curve piane di quart'ordine, distribuendole secondo i vari metodi e indirizzi, seguiti sin ora, nello studio delle curve suddette. Sono omesse, naturalmente, gran parte delle dimostrazioni, ma io confido che il lettore desideroso di approfondire l'argomento, possa facilmente ritrovarle nelle Memorie originali che le contengono, dietro le indicazioni bibliografiche sparse nei punti più notevoli.

Ho diviso il lavoro in due parti principali: la prima riguarda le proprietà generali comuni a ogni quartica piana: la seconda si sofferma a considerare quelle quartiche speciali che, per particolari circostanze, furono oggetto di maggiore studio e di più elaborata considerazione. La Monografia si chiude con la indicazione di ulteriori ricerche da fare e di varie questioni ancora da risolvere: le une e le altre si presentano, a mano, a mano, che l'argomento si svolge, ma ho preferito riunirle tutte alla fine per richiamare più vivamente su di esse l'attenzione del lettore. Un indice abbastanza dettagliato permette di ritrovare con facilità i punti principali della monografia.

Una parte del presente lavoro è stata già riassunta allo scopo di comporre l'articolo « *Allgemeine Theorie der ebenen Kurven vierter Ordnung* » per la nuova edizione tedesca del Repertorio di E. PASCAL di recente pubblicazione.

Il lettore troverà ad ogni occasione le notizie bibliografiche che più interessano, ma fin d'ora mi preme di segnalare alla sua considerazione il capitolo « *Spezielle ebene algebraische Kurven* » della « *Enciclopedia* » il quale, nella sua prima parte, per opera del KOHN, tratta ampiamente le cubiche e le quartiche piane.

PARTE PRIMA

CAPITOLO I.

Classificazione, forma e generazione.

1. *Classificazione e forma.* — Indichiamo col simbolo C_4 una curva piana irriduttibile del 4° ordine o, come diremo più brevemente, una quartica piana. Essa può rappresentarsi analiticamente annullando una ternaria biquadratica irriduttibile a coefficienti reali. Una retta qualunque del piano di C_4 la incontra in 4 punti. La ternaria suddetta dipende da 14 coefficienti: ne segue che per 14 punti presi in posizione generica nel piano suddetto passa una (1) ed una sola C_4 . Se invece tali punti hanno posizioni particolari, può darsi che essi non siano sufficienti a individuare la curva. Così, ad esempio, se essi sono scelti fra i 16 punti comuni a due C_4 ne segue che vi passano $\infty^1 C_4$ formanti un fascio di cui i 16 punti suddetti compongono il gruppo dei punti base.

Una C_4 può possedere nodi, cuspidi, punti isolati, bitangenti e flessi (tacendo, per adesso, di singolarità più complicate le quali saranno oggetto di particolare considerazione al N. 42). Se ai numeri che rappresentano gli enti precedenti si aggiungono quelli che esprimono l'ordine e la classe di C_4 , si ottengono le cosiddette caratteristiche Plückeriane fra le quali passano dei legami algebrici costituenti appunto le formule di PLÜCKER. Escludendo i casi di singolarità superiori rimangono quelli espressi dalla tabella del SALMON a pag. seguente (2).

Per l'intelligenza di questa tabella il lettore tenga presenti le notazioni del SALMON che indica con m l'ordine, con δ il numero dei punti doppi a tangenti distinte, con k il numero delle cuspidi e con n, τ, i i numeri ordinatamente duali cioè: classe, bitangenti e tangenti di flesso.

2. Il metodo più antico per classificare le quartiche piane è una estensione immediata di quello che serve anche oggi per classificare le coniche, e cioè il numero e la specie dei punti all'infinito. La retta all'in-

(1) CHASLES. Paris *C. R.* 37 (1853) p. 372, 437; JONQUIÈRES. *J. de math.* (2), 1, (1856) p. 411; H. I. St. SMITH. *Ann. di mat.* (2) 3 (1869), p. 218; SIEBECK. *Ann. di mat.* (2) 3 (1869) p. 65; VALENTINER. *Nyt. Tidskr.* 3 (1892), p. 33.

(2) SALMON. « *Curve piane* » p. 302 (traduzione francese di CHEMIN, Parigi 1884). In questa traduzione, nella tabella nominata, sono da rilevare due sviste tipografiche inerenti alle specie ivi designate coi simboli IV e V. Ciò risulta subito dal confronto con la tabella qui riportata.

finito del piano di C_4 può presentare (come qualsiasi altra retta di tale piano) i seguenti casi principali: 4 intersezioni reali, due intersezioni reali e due immaginarie coniugate, quattro intersezioni immaginarie distribuite in due coppie coniugate. Questi casi possono poi dar luogo a suddistinzioni notevoli, quanto evidenti, allorchè si tenga conto delle radici

m	δ	k	n	τ	i	D
4	0	0	12	28	24	3
4	1	0	10	16	18	2
4	0	1	9	10	16	2
4	2	0	8	8	12	1
4	1	1	7	4	10	1
4	0	2	6	1	8	1
4	3	0	6	4	6	0
4	2	1	5	2	4	0
4	1	2	4	1	2	0
4	0	3	3	1	0	0

multiple eventuali. PLÜCKER in base a queste distinzioni e suddistinzioni enumera ben 152 specie e di ciascuna assegna la equazione in forma canonica (1).

ZEUTHEN si è particolarmente occupato della forma dei rami reali di C_4 e ne ha dedotto un metodo di classificazione che non dipende più dai punti all'infinito (2). Egli comincia dall'osservare che i rami reali di una curva possono distinguersi in due specie e cioè: pari, o dispari, a seconda che sono incontrati da una retta in un numero pari, o dispari, di punti.

(1) EULER. *Introductio in analysin infinitorum* 2. Lausanne 1748, p. 139; CRAMER. *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Genève 1750; PLÜCKER. *Algebraische Kurven*, Bonn 1839.

(2) ZEUTHEN. *Math. Ann.* 7 (1874), p. 411; CAYLEY. *Phil. Mag.* (4) 29 (1865), p. 105.

Se la curva è priva di singularità non può avere più di un ramo dispari: ne segue che le curve d'ordine pari, e per conseguenza le quartiche, posseggono soltanto rami pari e siccome il numero dei rami reali non può superare di una unità il genere, così ne viene che una C_4 avrà uno, o due, o tre, o, al più, 4 rami reali che saranno tutti rami pari. Si presenta opportuna a questo punto la considerazione delle bitangenti di C_4 e la loro divisione in due specie. L'Autore chiama bitangente di 1^a specie ogni bitangente che abbia i punti di contatto immaginari coniugati, ovvero esistenti su di un medesimo ramo reale, e bitangente di seconda specie ogni tangente comune a due diversi rami. Le bitangentidi 1^a specie sono sempre 4: il numero delle altre è zero, quattro, dodici, o ventiquattro. Ne segue che 8, al più, sono i flessi reali. L'Autore chiama ovale il ramo reale privo di bitangenti, lo chiama unifolium, bifolium, trifolium, quadrifolium, quando ne possiede ordinatamente una, due, tre, o quattro. Analizzando tutte le eventualità possibili inerenti a queste distinzioni, egli trova 36 specie di quartiche non singolari e dopo, con un passaggio al limite, egli classifica anche le quartiche singolari.

Il KLEIN ha posto la discussione, intorno ai punti reali, su di un'altra base mediante la considerazione della superficie di RIEMANN inerente alla curva e relativi integrali Abeliani (1).

Ma la classificazione che ci sembra più opportuna è quella che ha per base il genere ed è adottata anche da KOHN nel già citato articolo dell'*Enciclopedia*. Siccome il genere può avere i valore 0, 1, 2, 3 (Cfr. il N. 1), così è naturale la distinzione delle quartiche in altrettante specie. Le quartiche considerate in questa prima parte hanno il genere tre. Ma anche alcune di quelle descritte nella 2^a parte hanno il genere tre, e volta, per volta, non mancheremo di enumerare espressamente il genere.

3. *Generazione*. — La maggior parte dei metodi di generazione di C_4 è così collegata alla teoria delle bitangenti che reputiamo più opportuno parlarne nel Capitolo V dedicato completamente allo studio della interessante configurazione a cui esse danno luogo.

Prescindendo dunque da tali metodi rimangono principalmente a considerarsi i due seguenti che ora esporremo.

L'uno non è che un caso particolare della generazione di una curva piana di ordine n mediante due fasci proiettivi di curve degli ordini r ed s in guisa che $n = r + s$. Ne consegue dunque la generazione di C_4 come luogo geometrico dei punti d'incontro delle curve corrispondenti

(1) KLEIN. *Math. Ann.* 10 (1876), p. 11.

di due fasci proiettivi di coniche, ovvero di due fasci proiettivi: uno di rette e uno di cubiche.

Per descrivere l'altro si consideri una conica e una cubica, nel medesimo piano; si dimostra allora che il luogo geometrico dei 4 poli di ciascuna tangente della conica, rispetto alla cubica, è una quartica piana (1). Quali altri vincoli geometrici colleghino la conica e la cubica alla quartica risulterà dal N. 10 di questa Monografia.

CAPITOLO II.

La teoria della polarità.

4. *Curve polari.* — Un punto qualunque del piano di C_4 individua tre curve polari, rispetto a C_4 , le quali sono degli ordini tre, due, uno; e si chiamano rispettivamente cubica, conica e retta polare (o anche prima, seconda e terza polare). Se l'equazione di C_4 si scrive in coefficienti simbolici sotto la forma: $a^4_x = 0$ e se con y_1, y_2, y_3 si indicano le coordinate omogenee di un punto generico del piano di C_4 , le equazioni delle tre curve polari del punto, sono ordinatamente:

$$a_y a^3_x = 0 \quad , \quad a^2_y a^2_x = 0 \quad , \quad a^3_y a_x = 0.$$

Quando il punto di coordinate $y_1 y_2 y_3$ appartenga a C_4 , l'ultima equazione scritta è anche quella della tangente a C_4 in quel punto. Questi fatti geometrici non sono che casi particolari della teoria generale della polarità rispetto a una curva di qualsiasi ordine n .

Sono invece caratteristiche per la quartica C_4 le considerazioni seguenti. Ricordiamo che in generale due curve l'una di ordine n e l'altra di classe n rappresentate rispettivamente dalle due equazioni $a^n_x = 0$, $\alpha^n_u = 0$ si chiamano apolari, o coniugate, o armoniche, quando è nullo il loro invariante simultaneo a^n_u . A scanso di equivoci noi adotteremo l'ultima denominazione suddetta quando ne sia il caso. Per $n = 2$ il significato geometrico dell'annullarsi dell'invariante sopra indicato è così conosciuto che è inutile il ricordarlo. Ebbene: data una conica generica (del piano di C_4) riguardiamola come involuppo e sia $m_{2u} = 0$ la sua equazione. Mediante la equazione $a^4_x = 0$, rappresentante la nostra C_4 , viene conseguentemente a individuarsi una conica luogo rappresentata dalla equazione $a^2_m a^2_x = 0$ e che evidentemente può riguardarsi come il luogo di un punto tale che la sua conica polare sia armonica alla conica-involuppo data.

(1) Cfr. in ordine cronologico: SALMON. *loc. cit.* p. 321; GERBALDI. *Rendic. Palermo* (8193), 7, p. 178; CIANI. *Rend. Ist. Lomb.* 1895.

La $a^2_m a^2_x = 0$ si chiama la conica polare di $m^2_u = 0$ rispetto a C_4 : invece $m^2_u = 0$ si chiama conica antipolare di $a^2_m a^2_x = 0$ (1). Risulta così che una conica involuppo ha una ed una sola conica polare. Viceversa si dimostra che una qualsiasi conica-luogo ha una ed una sola conica antipolare. Vi è anche un modo assai semplice per calcolare l'equazione dell'antipolare mediante quella della conica-luogo data. Si può dunque dire che una quartica generica stabilisce una corrispondenza biunivoca fra le coniche-inviluppo e le coniche-luogo del suo piano. Questa corrispondenza si può anche opportunamente rappresentare nello spazio a 5 dimensioni di cui i punti e gli iperpiani sieno posti in corrispondenza biunivoca con le coniche-inviluppo e le coniche-luogo del piano di C_4 . Basta a tal uopo considerare, in tale iperspazio, la iperquadrica rappresentata analiticamente dalla equazione del N. 9 la quale ha per discriminante l'invariante sestico di C_4 . Un punto e un iperpiano (dell'iperspazio suddetto) che sieno polo e polare rispetto alla iperquadrica in parola rappresentano rispettivamente una conica-inviluppo e la conica-luogo polare nel senso già stabilito. Ne risulta così che la corrispondenza in parola è biunivoca finchè il discriminante della iperquadrica sia differente da zero (2). Maggiori particolari saranno esposti al N. 9.

Finalmente la cubica polare di un punto individua la propria Hessiana e la propria Cayleyana che sono state considerate la prima volta da CAPORALI (3) sotto il nome di polohessiana e polocayleyana del punto. Indicando con $y_1 y_2 y_3$ le coordinate del punto e con $a^4_x = b^4_x = c^4_x = 0$ una serie di simboli equivalenti rappresentanti C_4 , le equazioni della polohessiana e della polocayleyana del punto suddetto sono le seguenti: (4)

$$(abc)^2 a_x b_x c_x a_y b_y c_y = 0 \quad ; \quad (abc)(abu)(acu)(bcu) a_y b_y c_y = 0.$$

Se poi nella seconda si riguardano le u_i cost. e le y variabili si ha l'equazione della G_r (cioè della jacobiana della rete delle coniche polari miste di tutte le infinite coppie di punti situate sulla retta r le cui coordinate sono le u_i).

5. *Poligoni coniugati.* — In generale un gruppo di n punti costituisce un poligono coniugato, rispetto a una curva di ordine n , quando que-

(1) REYE. *J. f. math.* 78 (1873).

CAPORALI. *Memorie di Geometria*, p. 354, Pellerano, Napoli 1888.

(2) SCHERRER. *Ann. di mat.* (2) 10 (1882), p. 212.

SEGRE. *Ann. di mat.* (2) 20 (1892), p. 237.

CIANI. *Rend. Linc.* (5) 4 (1895), p. 274.

(3) CAPORALI. *loc. cit.* p. 345.

(4) CIANI. *Ann. di mat.* (2) 20 (1892), p. 257.

st'ultima è armonica alla curva di classe n composta dagli n punti suddetti. Nè si esclude che questi punti possano avere posizioni particolari. Per esempio, possono essere in linea retta. In tal caso si presenta spontanea la ricerca dell'inviluppo delle rette che tagliano la curva in un gruppo di n punti formanti un poligono coniugato alla curva. Se n è dispari tale inviluppo è indeterminato, ma se n è pari esso è rappresentato dalla equazione $(abu)^n = 0$ essendo $a^nx = b^nx = 0$ la curva. La definizione si estende anche ad un $(n+1)$ -gono coniugato chiamando così ogni gruppo di $n+1$ punti tali che presi ad n , ad n , essi compongano altrettanti n -goni coniugati. Ebbene, non c'è da fare che $n=4$ per ottenere quanto è inerente (1), sull'argomento, alla quartica C_4 . Si chiamerà dunque coniugato ogni quadrangolo i cui i 4 vertici compongono una curva di 4^a classe armonica a C_4 . Se si esige che i 4 vertici siano in linea retta, l'inviluppo di tale retta è uno dei più notevoli contravarianti di C_4 ; la sua equazione è $(abu)^4 = 0$ e ne parleremo al N. 8. Un pentagono si dirà coniugato a C_4 quando lo siano tutti i quadrangoli che si ottengono escludendo un vertice del pentagono medesimo. La C_4 possiede ∞^5 pentagoni coniugati. Fissati due vertici i tre rimanenti possono variare e descrivono una quintica. Vi sono ∞^1 coppie di punti ognuna delle quali è comune a ∞^2 pentagoni coniugati: tali coppie descrivono il cosiddetto covariante S (Cfr. il N. 7). Esistono ∞^1 pentagoni coniugati alla quartica e iscritti nel suo covariante S : ogni punto di S è vertice comune a 18 pentagoni.

6. *Polilateri polari*. — Più interessante e più ampia è la teoria dei polilaterali (2). In generale un p -latero si chiama polare rispetto a una curva C_n di ordine n , quando l'equazione della C_n possa scriversi uguagliando a zero una combinazione lineare delle potenze n esime delle forme lineari rappresentanti i p lati del polilatero. La condizione necessaria e sufficiente perchè un p -latero sia polare rispetto a una C_n , è che tutte le curve di classe n , iscritte in esso, sieno armoniche rispetto a C_n . Ne segue che se $p > N(n)$ la ricerca dei p -lateri polari non ha alcun interesse perchè allora esistono infinite curve di classe n iscritte nel p -latero e fra queste ve ne sarà almeno una armonica rispetto a C_n . Nel caso

(1) Cfr. in ordine cronologico:

ROSANES. *J. f. Math.* 76 (1873), p. 323.

SCORZA. *Ann. di mat.* (3) 2 (1899) p. 329.

MANFREDINI. *Giorn. di mat.* 40 (1902), p. 16.

(2) La Memoria più importante sull'argomento è quella già citata di SCORZA, anche perchè riassume le ricerche antecedenti. Un accenno della teoria dei polilateri polari è anche in CAPORALI (*loc. cit.* p. 348).

dunque delle quartiche basterà considerare i soli valori per $p \leq 14$. Ma anche per $p = 14, 13, 12$ si hanno risultati di scarso interesse. Situando poi il p -latero in posizioni particolari, il numero p può abbassarsi fino a 6 senza che per questo la quartica cessi di essere generica. Se poi si esige soltanto che essa sia irriduttibile il numero p può abbassarsi sino a 3. Quando sia $p = 3, 4, 5$ la quartica, pure essendo irriduttibile, è però particolare e ce ne occuperemo espressamente nei capitoli VI e VII. Rimangono dunque a considerarsi qui i soli casi di $p = 6, 7, 8, 9, 10, 11$. Riassumendo rapidamente le proprietà inerenti a questi casi, si hanno i seguenti teoremi (dovuti principalmente a SCORZA¹). Una C_4 generica possiede ∞^3 esalateri polari. Fra questi ve ne sono ∞^2 di cui 3 lati concorrono in un punto. Vi sono ∞^6 ettalateri polari. Date tre rette arbitrarie, vi è in generale uno ed uno solo ettalatero polare (di una quartica così individuata) che abbia tre lati su quelle tre rette. Fra questi ∞^6 ettalateri ve ne sono ∞^2 costituiti da sei lati di un quadrangolo completo e da un'altra retta in posizione generica rispetto ai lati suddetti. Esistono ∞^9 ottolateri polari. Prese 4 rette arbitrarie esse fanno parte di ∞^1 ottolateri polari. I nove-lateri polari sono ∞^{12} ; i decalateri sono ∞^{15} , gli undici-lateri sono ∞^{18} . E qui ci arrestiamo per le ragioni anzidette.

CAPITOLO III.

Enti geometrici invariati.

7. *Covarianti*. — Una idea semplice quanto geniale per trovare dei covarianti di una qualsiasi curva di ordine n è dovuta a CLEBSCH ed è esposta in una Memoria ormai classica sulle quartiche piane (1). Basta a tale scopo scrivere l'equazione della polare r^{ma} di un punto qualunque e dopo annullare un invariante di questa polare. Le coordinate del punto suddetto vengono così a essere vincolate da una relazione algebrica che è l'equazione del covariante cercato. In tal modo la ricerca di una gran parte dei covarianti di una curva di ordine n si fa dipendere da quella degli invarianti di curve di ordine inferiore ad n . Questo concetto applicato alla cubica polare di un punto, serve a CLEBSCH nella citata Memoria a trovare i seguenti covarianti segnati (a), (b), (c):

(1) CLEBSCH. *J. f. Math.* 59 (1861). p. 125. — Questa importantissima Memoria contiene però un errore là ove si afferma che il contravariante ψ coincide con l'inviluppo armonico (Cfr. il N. 8 della presente monografia). Ma, all'infuori di questo, può dirsi che quasi tutto il contenuto dell'attuale Capitolo III è parte essenziale della Memoria suddetta. Diciamo così non solo per attirare l'interesse del lettore sulla Memoria in parola, ma anche per risparmiarci di citarla ad ogni passo.

(a) Il covariante $S = 0$ è il luogo di un punto la cui cubica polare è equianarmonica (ossia ha nullo l'invariante S'). Annullando tale invariante si trova l'equazione del covariante S in forma simbolica così:

$$(abc)(abd)(acd)(bcd) a_x b_x c_x d_x = 0$$

dove $a_x^4 = b_x^4 = c_x^4 = d_x^4 = 0$ sono serie di simboli equivalenti di C_4 . Questo covariante è dunque una quartica. I suoi coefficienti sono di 4° grado in quelli di C_4 . Servendosi di una denominazione introdotta al N. 4, si può dire che il covariante S è il luogo dei punti le cui polohessiane sono triangoli e anche il luogo dei vertici di questi triangoli. È privo di punti singolari (1) (se la C_4 è generica). Essendo il suo ordine uguale a 4 era naturale di proporsi la questione di vedere se una quartica generica possa riguardarsi come covariante S di altre quartiche. La questione è stata risolta affermativamente da SCORZA dimostrando che qualunque quartica può, in generale, riguardarsi come covariante S di altre 36 quartiche (2). Esiste una ed una sola quartica irriduttibile coincidente col proprio covariante S (3). È la cosiddetta quartica di KLEIN (Cfr. il N. 21).

(b) Il covariante $T = 0$ è il luogo dei punti le cui cubiche polari sono armoniche. Se ne ottiene l'equazione annullando l'invariante T della cubica polare di un punto. Il covariante T è dunque una sestica. L'equazione è la seguente:

$$(abc)(def)^2(abd)(ace)(bcf) a_x b_x c_x d_x e_x f_x = 0$$

dove

$$a_x^4 = b_x^4 = c_x^4 = d_x^4 = e_x^4 f_x^4 = 0$$

sono serie di simboli equivalenti.

(c) Se finalmente si annulla il discriminante della cubica polare di un punto P , il luogo descritto da P sarà la Steineriana di C_4 . La sua equazione sarà dunque rappresentabile con $S^3 - T^2 = 0$. Essa è quindi del 12° ordine. Si dimostra inoltre che possiede 21 punti doppi a tangenti distinte: le cubiche polari di questi 21 punti si spezzano ciascuna in una retta e in una conica (4). La stessa curva possiede 24 cuspidi nei 24 punti comuni a $S = 0$, e a $T = 0$. Ognuna di queste cuspidi ha la cubica polare che è cuspidata a sua volta.

Il processo applicato sin qui alla cubica polare di un punto, può ap-

(1) CIANI. *Rend. Linc.* (5) 4 (1895), p. 274.

(2) SCORZA *Math. Ann.* 52 (1899), p. 457.

(3) CIANI. *Palermo Rend.* 14 (1900), p. 16.

(4) LAGUERRE. *Oeuvres* 2, p. 375; C. R. (1874).

SCORZA. *Ann. di mat.* (3) 2 (1898), p. 162.

plicarsi anche alla conica polare: essa ha un solo invariante (il discriminante); annullandolo troveremo un altro covariante di C_4 : esso sarà dunque il luogo di un punto la cui conica polare si spezza, cioè l'Hessiana di C_4 . Essa può anche riguardarsi come il luogo di un punto per cui passa la propria propria polohessiana. Se ne troverà dunque l'equazione ponendo $x = y$ nella polohessiana del punto y (N. 4) e si troverà che la Hessiana è rappresentata da

$$(abc)^2 a^2_x b^2_x c^2_x = 0.$$

Essa taglia C_4 nei 24 flessi.

8. *Contravarianti.* — Applicando il noto principio di trasporto di CLEBSCH ai principali invarianti di una binaria biquadratica si perviene ai tre seguenti contravarianti segnati (a), (b), (c).

(a) Il contravariante equianarmonico è l'inviluppo delle rette che tagliano la C_4 in gruppi equianarmonici. La sua equazione è $(a b u)^4 = 0$ e in questa forma è già stato considerato al N. 5 quale inviluppo delle rette seganti C_4 in un gruppo di punti coniugato a C_4 . È una curva di 4^a classe e di 2^o grado nei coefficienti di C_4 . Costituisce quindi la forma invariante di grado minimo.

(b) Il contravariante armonico è l'inviluppo delle rette che segano armonicamente C_4 . L'equazione è $(abu)^2 (acu)^2 (bcu)^2 = 0$. È dunque una curva di 6^a classe e di 3^o grado C_4 .

(c) Un terzo contravariante può anche considerarsi ottenuto col metodo sopra descritto, scrivendo l'equazione di C_4 in coordinate di rette. Se $P = 0$, $Q = 0$ sono l'equazioni dei due contravarianti (a) e (b), la equazione di questo terzo contravariante sarà della forma $P^3 - 6 Q^2 = 0$. Le 24 tangenti comuni a $P = 0$, $Q = 0$ (1) sono manifestamente le 24 tangenti di flesso di C_4 .

Ai contravarianti precedenti aggiungeremo questi altri contrassegnati (φ), (ψ), (χ), (Ω) scelti fra i più notevoli (2).

(φ) La Cayleyana di C_4 è l'inviluppo delle rette che uniscono i punti corrispondenti dell'Hessiana e della Steineriana. Tale corrispondenza va intesa così: se A è un punto dell'Hessiana la conica polare di A si spezza in due rette che si tagliano in un punto A' della Steineriana, e la cubica polare di A' ha un punto doppio in A : ebbene A e A' sono punti corri-

(1) LAGUERRE. *J. de math.* (3) 1 (1875), p. 265; *Oeuvres* 2 p. 221, 398.

KOHN. *Wien. Ber.* 94² (1887), p. 318.

JEFFERY *Bull. Soc. math. France* 17 (1889), p. 176; *Quart. J.* (34) 1890, p. 250

(2) Per ulteriori interpretazioni geometriche di forme invariantive veggasi specialmente: MAISANO. *Giorn. di mat.* 19 (1881), p. 198

spondenti delle due curve suddette. Mentre A descrive l'Hessiana, A' descrive la Steineriana e la retta AA' involupa la Cayleyana. Le sue caratteristiche plückeriane si ottengono ben facilmente desumendole dalle formule generali che le danno per la Cayleyana di una qualsiasi curva di ordine n (1). Risulta così che nel caso attuale la classe è uguale a 18 e che esistono 126 tangenti doppie. È notevole osservare che esse sono tutte assorbite da 21 tangenti quadruple costituite dalle 21 rette che fanno parte delle 21 cubiche polari spezzate (2).

(ψ) L'involuppo ψ di CLEBSCH è quello individuato dai lati dei triangoli polohessiani. CLEBSCH credette di averne dimostrato la coincidenza con l'involuppo armonico: ma la dimostrazione è errata (3). Tale coincidenza non può mai avvenire. L'involuppo ψ e la Hessiana hanno le caratteristiche plückeriane duali uguali fra loro (4): ψ è dunque della 6^a classe ecc.

(λ) Fra i punti del covariante S si può istituire una corrispondenza chiamando corrispondenti due punti che sieno ciascuno un vertice del triangolo polohessiano dell'altro: onde nasce la considerazione dell'involuppo delle rette che uniscono punti corrispondenti del covariante S . Il contravariante che così si trova è la Steineriana di C_4 : hanno uguali le caratteristiche plückeriane duali (4). Dunque il contravariante λ è della 12^a classe ecc.

(Ω) Richiamando la definizione già data (N. 4) di conica antipolare di una data conica-luogo, consideriamo il caso in cui quest'ultima sia una retta doppia. Ne segue che ogni retta del piano di C_4 (considerata doppiamente) individua la propria conica antipolare. Ebbene il contravariante (Ω) di CLEBSCH è l'involuppo delle rette che sono tangenti alle proprie coniche antipolari. Esso è di 4 classe e di 5^o grado nei coefficienti di C_4 . Il contravariante equiarmonico e l'attuale (Ω) costituiscono i più notevoli contravarianti di 4^a classe.

9. *Invarianti.* I due più notevoli, dal punto di vista dell'interpretazione geometrica, sono l'invariante cubico e il sestico.

Cominciamo dal 1^o: si chiama cubico perchè è di 3^o grado nei coefficienti di C_4 e può rappresentarsi simbolicamente con $(abc)^4$. Noi lo indicheremo con A .

L'annullamento di A esprime la condizione necessaria e sufficiente

(1) Cfr. p. es. SALMON, loc. cit., p. 507.

(2) BERTINI. *Atti Acc. Torino*, 32 (1896-97), p. 32.

(3) CIANI. *Ann. di mat.* (2) 20 (1892), p. 257.

(4) CIANI. *Rend. Linc.* (5) 4 (1895), p. 274.

(5) Cfr. SALMON. loc. cit. p. 377; MAISANO. loc. cit. p. 198 e seg.

perchè C_4 sia armonica col proprio involuppo equianarmonico. L'invariante cubico compare anche in una formola notevole che rappresenta analiticamente tutti i covarianti di 4° grado e di 4° ordine di C_4 . Si dimostra infatti (5) che tali covarianti appartengono tutti al fascio $S + \lambda A f = 0$ dove S ed A hanno i significati già conosciuti ed $f = 0$ è l'equazione di C_4 .

L'invariante sestico può scriversi sotto la forma del seguente determinante simmetrico di 6° ordine:

$$\begin{vmatrix} a_{1111} & a_{1122} & a_{1133} & a_{1112} & a_{1123} & a_{1131} \\ a_{2211} & a_{2222} & a_{2233} & a_{2212} & a_{2223} & a_{2231} \\ a_{3311} & a_{3322} & a_{3333} & a_{3312} & a_{3323} & a_{3331} \\ a_{1211} & a_{1222} & a_{1233} & a_{1212} & a_{1223} & a_{1231} \\ a_{2311} & a_{2322} & a_{2333} & a_{2312} & a_{2323} & a_{2331} \\ a_{3111} & a_{3122} & a_{3133} & a_{3112} & a_{3123} & a_{3131} \end{vmatrix}$$

dove è da tener presente la equazione di C_4 nella forma simbolica $a^i_x = 0$. Risulta allora che il precedente determinante può riguardarsi come il discriminante della seguente iperquadrica (dello spazio a 5 dimensioni)

$$\begin{aligned} & a_{1111}x_1^2 + a_{2222}x_2^2 + a_{3333}x_3^2 + a_{1212}x_4^2 + a_{2323}x_5^2 + a_{3131}x_6^2 + \\ & + 2a_{1122}x_1x_2 + 2a_{1133}x_1x_3 + 2a_{1112}x_1x_4 + 2a_{1123}x_1x_5 + 2a_{1131}x_1x_6 + \\ & + 2a_{2233}x_2x_3 + 2a_{2212}x_2x_4 + 2a_{2223}x_2x_5 + 2a_{2231}x_2x_6 + \\ & + 2a_{3312}x_3x_4 + 2a_{3323}x_3x_5 + 2a_{3331}x_3x_6 + \\ & + 2a_{1223}x_4x_5 + 2a_{1231}x_4x_6 + \\ & + 2a_{2331}x_5x_6 = 0. \end{aligned}$$

È questa la iperquadrica già nominata nel N. 4 ed apparisce chiaro adesso il significato dell'invariante sestico (quando si riprendano le considerazioni in proposito fatte al N. 4 suddetto). L'annullarsi di tale invariante, esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè la corrispondenza fra coniche luogo e coniche-inviluppo, stabilita da C_4 , non sia più completa ed abbia invece delle eccezioni. Quali sieno queste eccezioni e quale altra interpretazione geometrica più notevole abbia l'annullarsi dell'invariante sestico, vedremo meglio nel Capitolo VII trattando le quartiche particolari (1).

(1) Per non esorbitare dal nostro campo, essenzialmente geometrico, tralasciamo di occuparci della ternaria biquadratica come ente algebrico. Però non possiamo a meno di citare la importante Memoria di E. PASCAL, premiata dalla R. Acc. di Napoli (*Atti*) (2) 12 (1905) p. 1). In essa sono considerati i casi di decomposizione in fattori della ternaria suddetta o, ciò che è lo stesso, la decomposizione di C_4 in curve di ordine inferiore. Veggasi anche: EMMY NOETHER. *J. f. Math.* (1908) p. 134, e *Diss.* Erlangen, 1908).

CAPITOLO IV.

I sistemi di coniche e di cubiche inviluppanti C_4 .

10. *Sistemi di coniche inviluppanti C_4 .* Fra i sistemi di curve inviluppanti C_4 i più notevoli sono costituiti da coniche e da cubiche. Cominciamo dalle coniche.

Una C_4 generica può sempre riguardarsi come inviluppo di 63 diversi sistemi di coniche che si chiamano le 63 serie di coniche inviluppanti. Ciascuna serie è quadratica e ∞^1 . L'equazione di una tale serie è della forma

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + W = 0$$

dove

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0$$

sono tre coniche, e λ il parametro della serie. Ad essa appartengono le due coniche U e W ma non la V . L'equazione di C_4 può scriversi, conseguentemente, sotto la forma $UW = V^2$, la quale dimostra che gli 8 punti di contatto di U e W , con C_4 esistono sulla V . Ne segue che la condizione necessaria e sufficiente affinché due coniche inviluppanti appartengano alla stessa serie, e che gli 8 punti di contatto con C_4 esistano su di una medesima conica. In una stessa serie esistono 6 coppie di rette le quali dunque vengono a costituire 12 bitangenti di C_4 . Ma, di queste, diremo con maggiori dettagli nel Capitolo che segue, interamente dedicato alla importante configurazione delle bitangenti. Ogni serie di coniche inviluppanti è contenuta in una rete che adesso vogliamo considerare. Così la serie precedente è contenuta nella rete

$$\alpha U + \beta V + \gamma W = 0.$$

Ora è noto che una rete di coniche può sempre riguardarsi come rete di coniche polari rispetto a una cubica: indichiamo con ψ una tale cubica per la rete precedente; d'altra parte i tre numeri $\lambda^2, 2\lambda, 1$ possono riguardarsi come le coordinate omogenee di un punto variabile su di una conica φ (al variare di λ): dunque C_4 si potrà riguardare come l'inviluppo delle coniche polari dei punti di φ rispetto a ψ , o anche come il luogo di un punto la cui retta polare, rispetto a ψ , è tangente a φ , o finalmente come il luogo dei poli delle tangenti di φ rispetto a ψ . Si perviene così alla generazione di C_4 già data al N. 3.

Si può aggiungere che se $c_1 c_2$ sono due coniche della serie precedente e quindi polari dei punti $M_1 M_2$ di φ , la conica che passa per gli 8 punti di contatto di $c_1 c_2$ con C_4 è la polare rispetto a ψ del punto d'incontro

delle tangenti a φ in M_1 e M_2 . Le curve φ e ψ sogliono chiamarsi curve direttrici di C_4 , e coniche generatrici quelle della serie relativa. Ogni serie di coniche involuppati individua una coppia di curve direttrici φ e ψ e viceversa. Esistono 63 coppie di tali curve, cioè 63 modi diversi di riguardare C_4 come l'involuppo delle coniche polari dei punti di una conica rispetto a una cubica (1).

Seguendo un concetto analogo si può anche definire C_4 come l'involuppo delle coniche polari di una retta φ' rispetto a un'altra quartica ψ' , ovvero come il luogo di un punto la cui conica polare rispetto a ψ' tocca φ' . Approfitando di questa definizione si dimostra facilmente che i sei punti della Steineriana che corrispondono a sei punti allineati della Hessiana esistono su di una stessa conica.

Se si adotta una ben nota definizione di CREMONA, si può dire che *la seconda polare pure di una retta, rispetto a una quartica piana generica, è un'altra quartica generica*. La retta φ' e la quartica ψ' si chiamano ancora le direttrici di C_4 . Ne segue che ogni retta, del piano di C_4 , si può assumere come direttrice e le possibili quartiche direttrici compongono un sistema lineare triplo e hanno tutte sulla retta medesima quattro contatti tripunto. Si può anche aggiungere che le Hessiane delle quartiche direttrici involuppano la quartica fondamentale C_4 (2).

11. *Sistemi di cubiche involuppati C_4* . — I sistemi di cubiche involuppati la nostra C_4 sono 64 e ciascuno è triplamente infinito. Essi si dividono in due specie. Quelli di 1^a specie sono 36 e ognuno contiene un sistema ∞^1 di cubiche spezzate in una retta e in una conica: la retta è una tangente di C_4 , la conica è tritangente e passa inoltre per i due ulteriori punti d'incontro della tangente suddetta con C_4 . Nella rappresentazione di HESSE (Cfr. il N. 13) ognuno di questi sistemi può mettersi in corrispondenza con tutti i punti dello spazio.

I sistemi di cubiche involuppati di 2^a specie sono 28 e ciascuno è individuato da una bitangente di C_4 . Rappresentando questa bitangente col lato x_1 del triangolo fondamentale, l'equazione di C_4 può scriversi $x_1 C_3 = C_2^2$ dove $C_3 = 0$ è una cubica appartenente al sistema individuato dalla bitangente suddetta e $C_2 = 0$ è una conica. Così risulta chiaro che

(1) PLÜCKER. loc. cit. p. 228; STEINER. *J. f. Math.* 49 (1855), p. 265, oppure « Werke » 2, p. 605; HESSE. *J. f. Math.* 55 (1857), p. 83, p. 279; ARONHOLD. *Berlin Monatsber.* (1864), p. 505; GEISER. *J. f. Math.* 72 (1870), p. 370; AMESSEDER. *Wien. Ber.* 85 (1882), p. 396; SALMON. loc. cit. p. 317; KOHN. *J. f. Math.* 107 (1890), p. 1 e (1891), p. 5; WIRTINGER. *Untersuchung über Thetafunktionen*. Leipzig 1895; CIANI. *Istit. Lomb. Rend.* (2) 28 (1895), p. 659.

(2) CIANI. *Istit. Lomb. Rend.* (2) 28 (1895), p. 959.

i sei punti di contatto di una cubica $C_3 = 0$ del 2° sistema con la C_4 e i punti di contatto della bitangente relativa $x_1 = 0$ appartengono sempre a una stessa conica. I 12 punti di contatto di due cubiche appartenenti a un medesimo sistema di 1ª o di 2ª specie esistono su di una terza cubica. In ciascun sistema di cubiche ve ne sono 64 che hanno, ciascuna, con C_4 , tre contatti quadripunto. Finalmente, un teorema che serve a dare una proprietà caratteristica, per due cubiche di un medesimo sistema, è il seguente: due cubiche involuppati C_4 appartengono a un medesimo sistema di 1ª o di 2ª specie a seconda che abbiano una conica tritangente comune, ovvero tre intersezioni allineate (1).

CAPITOLO V.

La configurazione delle bitangenti.

12. Le numerose e belle proprietà di questa cfz. sono state investigate da molti autori e con diversi metodi. Esporremo qui i principali in ordine cronologico.

Metodo di Steiner-Plücker (2). — Le ricerche di questi due illustri geometri hanno il loro fondamento nelle 63 serie di coniche involuppati C_4 di cui abbiamo già trattato nel capitolo precedente. Riprendiamo dunque a considerare una di tali serie. Abbiamo già notato che essa contiene sei coppie di bitangenti di C_4 . Considerando i punti d'incontro delle due bitangenti di ogni coppia, si hanno 6 punti che esistono su di una stessa conica armonica a tutte le coniche della serie, quando esse sieno riguardate come coniche-inviluppo. Si può dunque dire che i 378 punti d'incontro, a due, a due, delle 28 bitangenti esistono, a sei, a sei, sopra 63 coniche armoniche alle 63 serie suddette. Se $ab = 0$, $cd = 0$ sono due coppie di bitangenti della stessa serie, questa può rappresentarsi con la equazione $\lambda^2 ab + 2\lambda V + cd = 0$ dove $V = 0$ è la conica che passa per gli 8 punti di contatto di a, b, c, d con C_4 . La equazione di C_4 è $V^2 = abcd$. Siccome la coppia ab può associarsi con ciascuna delle altre 5 coppie della serie, così, tenendo anche conto del numero delle serie, si trova che le coniche come V sono 315. Ne segue che i punti di contatto delle bitangenti con C_4 esistono, a 8, a 8, sopra 315 coniche (3). Le sei coppie di rette esistenti

(1) HESSE. *J. f. Math.* 49 (1855) p. 243, 279 oppure « *Werke* » p. 319, 345.

CLEBSCH. *Math. Ann.* 3 (1871) p. 45; NOETHER. *München Abh.* 17 (1869) p. 105.

ROSATI. *Giorn. di mat.* 38 (1900), p. 165.

(2) STEINER. loc. cit.; PLÜCKER, id. id.

(3) SALMON, loc. cit. p. 317; NOETHER. *Math. Ann.* 15 (1879), p. 89; 46 (1895); *München Ber.* 25 (1895), p. 93; E. PASCAL. *Rend. Linc.* (5) 1 (1892) p. 385, 417; (5) 2 (1893), p. 8.

in una medesima serie di coniche inviluppanti, compongono un gruppo di 12 bitangenti che si chiama « gruppo Steineriano ». Esse toccano una stessa curva di 3^a classe che è la Cayleyana della rete di coniche cui appartiene la serie. A tale curva sono tangenti i lati rimanenti dei 6 quadrangoli formati (ciascuno) dai 4 punti di contatto delle bitangenti di ogni coppia, mentre i punti diagonali relativi esistono su di una medesima curva che è la Jacobiana della rete. Tale Jacobiana è evidentemente l'Hessiana della cubica ψ del N. 10, come la curva di 3^a classe soprannominata, ne è la Cayleyana (1). Se $ab = 0$, $cd = 0$, $ef = 0$ sono 3 coppie di bitangenti di uno stesso gruppo Steineriano l'equazione C_4 si può porre sotto la forma

$$\alpha\sqrt{ab} + \beta\sqrt{cd} + \gamma\sqrt{ef} = 0.$$

Confrontando due gruppi Steineriani si trova che possono essere collegati in due modi sostanzialmente differenti a seconda che abbiano 4, o 6 bitangenti comuni. Nel primo caso si chiamano sizigetici, nel 2° azigetici (2). Quando due gruppi sono sizigetici, con le 4 bitangenti comuni si possono formare due coppie dell'uno e due coppie dell'altro. Ecco un esempio :

$$ab, cd, ef, gh, ij, kl$$

$$ac, bd, mn, op, qr, st$$

e allora esiste un 3° gruppo sizigetico con entrambi che è :

$$ad, be, uv, wx, yz, \varphi\psi.$$

Si ha quindi una terna di gruppi sizigetici, a due, a due, e le 28 bitangenti sono così esaurite. Esistono 315 terne siffatte. Due gruppi azigetici sono invece così costituiti che le loro coppie possono farsi corrispondere in guisa che due coppie corrispondenti abbiano sempre una bitangente comune. Eccone un esempio :

$$ab, cd, ef, gh, ij, kl$$

$$am, cn, eu, gx, iz, k\psi$$

ed è notevole che le bitangenti non comuni formino un 3° gruppo azigetico con entrambi. Esso è

$$bm, dn, fu, hx, jz, l\psi.$$

(1) SALMON, *loc. cit.* p. 320; KOHN. *Wien Monatsh.* 1 (1890), p. 71, 129.

HUMBERT. *Paris C. R.* 120 (1895), p. 863.

(2) FROBENIUS. *J. f. Math.* 103 (1888), p. 151.

CIANI *Ist. Lomb. Rend.* (2) 28 (1895), p. 659.

Si ha quindi una terna di gruppi azigetici, a due, a due. Essa contiene 18 bitangenti. Esistono 336 tali terne.

13. *Metodo di Hesse* (1). — Esso consiste nel riferire la quartica C_4 a una notevole figura stereometrica di cui il nucleo è un ottagono gobbo. Nelle particolari relazioni geometriche fra C_4 e tale figura stereometrica risiede la ingegnosità e la fecondità del metodo di HESSE. Eccone la sostanza. Siano

$$a^2_x = 0 \quad , \quad b^2_x = 0 \quad , \quad c^2_x = 0$$

le equazioni di tre quadriche: esse individuano la rete:

$$\alpha a^2_x + \beta b^2_x + \gamma c^2_x = 0$$

che ha per punti base gli otto punti comuni alle tre quadriche date e quindi a ogni altra quadrica della rete. Tutti i coni della rete sono individuati da quei valori α, β, γ che annullano il discriminante della precedente equazione. Ebbene, scriviamo l'equazione che esprime l'annullarsi di questo determinante e poi, riguardando $\alpha \beta \gamma$ come coordinate omogenee di un punto in un piano, interpretiamo tale equazione, che è di 4° grado in α, β, γ , come quella che rappresenta una quartica generica C_4 . Si viene così a stabilire una corrispondenza biunivoca fra questa C_4 e la sestica gobba luogo dei vertici dei coni della rete. Infatti ogni punto di C_4 individua un sistema di valori di α, β, γ annullante il discriminante in parola e quindi individua un cono della rete e per conseguenza il suo vertice: viceversa un cono della rete, e per conseguenza il suo vertice, individua un sistema di valori di α, β, γ annullante il discriminante e quindi un punto di C_4 . Una relazione lineare fra $\alpha \beta \gamma$ individua, nel piano di C_4 , una retta e nello spazio un fascio di coni contenuti nella rete: ai 4 punti in cui la retta incontra C_4 corrispondono i 4 coni del fascio. Se la retta è bitangente a C_4 il fascio corrispondente possiede due coni doppi: la curva base del fascio si compone di una cubica gobba passante per 6 degli 8 punti base della rete e della retta che congiunge i due rimanenti. Si può così istituire una corrispondenza biunivoca fra le bitangenti di C_4 e i lati dell'ottagono gobbo completo che ha per vertici gli 8 punti base suddetti. Questa corrispondenza non solo è importante come utile raffronto fra due notevoli cfz.ⁿⁱ l'una costituita dalle bitangenti di C_4 e l'altra dall'ottagono suddetto, ma anche per utile notazione da applicarsi alle bitangenti

(1) HESSE. *J. f. Math.* 49 (1855), p. 279 e anche « *Werke* » p. 376.

CAYLEY. *J. f. Math.* 68 (1868), p. 176.

SALMON. *loc. cit.* p. 327.

medesime. Indichiamo con i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i punti base della rete: con le loro combinazioni binarie si potranno rappresentare le bitangenti di C_4 . Ci serviremo ora di questa notazione per segnalare alcuni importanti aggruppamenti di bitangenti.

Anzitutto le 378 coppie di bitangenti si rappresentano con i due tipi di simboli equivalenti (12 . 13), (12 . 34).

Esistono 1260 terne di bitangenti tali che i sei punti di contatto esistono su di una conica. I simboli relativi sono di due tipi e cioè:

$$(12 . 23 . 34) \quad \text{e} \quad (12 . 34 . 56).$$

Esistono 315 quaterne di bitangenti con gli otto punti di contatto su di una conica, e ne abbiamo già parlato al N. 12. Scriveremo ora i nuovi simboli di queste quaterne, che sono pure di due tipi, ossia:

$$(12 . 23 . 34 . 41) \quad \text{e} \quad (12 . 34 . 56 . 78).$$

Fra i gruppi di sei bitangenti ne segnaleremo due specie. Quelli di una specie sono rappresentati dai tre seguenti tipi:

$$(12 . 23 . 31 . 45 . 56 . 64); (12 . 34 . 35 . 36 . 37 . 38); (12 . 13 . 14 . 56 . 57 . 58).$$

La proprietà geometrica che li caratterizza, è che le bitangenti di ciascuno toccano una medesima conica. I gruppi di questa specie sono 1008.

I gruppi di 6 bitangenti dell'altra specie si rappresentano mediante questi altri tre tipi:

$$(12 . 23 . 31 . 14 . 45 . 51); (12 . 23 . 34 . 45 . 56 . 61); (12 . 34 . 35 . 36 . 67 . 68)$$

e ciascuno è caratterizzato dal fatto che le sei bitangenti si dividono in 3 coppie in modo che i tre punti doppi delle tre coppie sono allineati. I gruppi di questa specie sono 5040.

14. *Metodo di Aronhold* (1). Questo metodo può farsi dipendere dalle osservazioni seguenti. Consideriamo il sistema ∞^2 di tutte le curve di 3^a classe tangenti a 7 rette fisse in posizione generica. Due curve C e C' del sistema hanno altre due tangenti comuni di cui indichiamo con P il punto d'intersezione. Tenendo fisso C e facendo variare C' (nel sistema suddetto) il punto P descrive una retta r tangente a C e che si chiama la coresiduale di C rispetto al sistema delle 7 rette date. Così una curva C del sistema individua una retta r tangente a C e coresiduale. Viceversa una retta r qualunque si può sempre riguardare come coresiduale (e quindi

(1) ARONHOLD. *Berlin Monatsber.* (1864), p. 499; FROBENIUS- *J. f. Math.* 99 (1886), p. 290; CAYLEY. *J. f. Math.* 68 (1868), p. 176; KOHN. *J. f. Math.* 107 (1890), p. 1; TIMMERDING. *Math. Ann.* 53 (1900), p. 193; CLEBSCH. *Math. Ann.* 3 (1871), p. 45; STURM. *J. f. Math.* 70 (1869), p. 229.

tangente) di una curva C del sistema. Siccome C è del 6° ordine così la r la incontra ulteriormente in altri 4 punti che sono punti di contatto di C con altre 4 curve del sistema: non esistono altre curve del sistema capaci di toccare C . Ciò premesso, risulta facilmente che il luogo geometrico dei punti di contatto di due curve del sistema è una quartica C_4 , e poche altre considerazioni dimostrano che C_4 è generica. Le 7 rette fisse date sono 7 bitangenti. Per determinare le altre 21 si osservi che, fra le curve del sistema, ve ne sono 21 spezzate in una conica e un punto. Basta infatti considerare la conica tangente a 5 delle rette date e il punto comune alle due rimanenti per ottenere una di tali curve spezzate. Ebbene le 21 rette coresiduali di queste 21 curve spezzate sono le 21 bitangenti cercate.

È da notare che la costruzione di queste ultime si può fare linearmente. Il gruppo delle 7 rette che ha servito di punto di partenza è un gruppo particolare: esso è costituito in modo che i 6 punti di contatto di 3 qualunque di esse non esistono su di una stessa conica. Un tal gruppo si chiama, un sistema completo di ARONHOLD. Esistono 72 tali sistemi contenenti una data bitangente: ne esistono 16 contenenti due bitangenti arbitrarie e il numero totale di tali sistemi è 288 (1).

15. *Metodo di Geiser* (2). Questo metodo ha qualche affinità con quello già esposto di HESSE e con un altro che descriveremo al N. 18 in quanto che pone in relazione le bitangenti di C_4 con una interessante cfz.^{no} dello spazio.

A tale scopo il GEISER osserva che il cono circoscritto a una superficie cubica (non singolare), da un suo punto, è del 4° ordine e che la sua sezione con un piano qualunque può riguardarsi come una quartica generica C_4 . Le 28 bitangenti di C_4 provengono dalla intersezione del suo piano col piano tangente alla superficie nel vertice del cono suddetto e dalle proiezioni (dal vertice medesimo) delle 27 rette della susuperficie. È utile osservare che la prima bitangente nominata non viene a trovarsi in condizioni dissimetriche dalle altre 27 come potrebbe far credere il modo diverso col quale viene ottenuta. Si viene così a collegare la cfz.^{no} delle bitangenti di C_4 con quella delle 27 rette di una superficie cubica e le molte proprietà conosciute della seconda possono servire a trovare altrettante proprietà della prima.

16. *Metodo di Noether-De Paolis* (3). Questi Autori riguardano una

(1) Per un facile riassunto di questa teoria veggasi anche: SALMON, loc. cit. p. 331.

(2) GEISER. *Math. Ann.* 1 (1869), p. 129.

ZEUTHEN. *Math. Ann.* 8 (1875), p. 1.

quartica piana generica come curva limite di una trasformazione piana doppia di 3° ordine e di 1° genere e svolgendo questo concetto ritrovano, con metodo facile e uguale, la più gran parte delle proprietà conosciute, sino allora, delle bitangenti di C_4 altre aggiungendone di nuove. Nel citato lavoro di DE PAOLIS è particolarmente notevole la semplicità con la quale vengono a stabilirsi le equazioni delle 28 bitangenti in parola.

17. *Metodo delle caratteristiche.* Un'altra utile rappresentazione delle bitangenti di C_4 può ottenersi mediante le cosiddette caratteristiche dispari di genere 3. Ciascuna bitangente può rappresentarsi col simbolo :

$$\begin{pmatrix} i & j & h \\ i_1 & j_1 & h_1 \end{pmatrix}$$

dove $ijh, i_1j_1h_1$ sono numeri uguali a zero, o a uno, e inoltre la somma

$$ii_1 + jj_1 + hh_1$$

è dispari (2). E PASCAL svolge questo concetto in gran parte di una elaborata Memoria nella quale, fra altro sono studiate le bitangenti di C_4 . Secondo questa rappresentazione, ad es. una quaterna di bitangenti i cui punti di contatto sieno su di una conica, viene rappresentata da 5 caratteristiche dispari tali che le somme degli elementi che occupano i medesimi posti sieno tutte pari ecc. (3).

18. *Metodo suggerito dalla configurazione di Kummer.* L'idea di porre in relazione la cfz.^{ne} delle bitangenti di C_4 con una figura stereometrica, attuata già con i metodi prima esposti di HESSE e di GEISER, può essere utilmente e ulteriormente sfruttata mediante la nota superficie di KUMMER con 16 punti doppi.

È stato appunto il KUMMER a osservare, per primo, che per una C_4 generica si potevano condurre ∞^4 superficie della specie suddetta (4). Era dunque naturale di studiare più a fondo il legame che poteva stabilirsi, per tale via, fra la cfz.^{ne} delle bitangenti di C_4 e quella inerente ai punti doppi di una delle ∞^4 superficie sopra nominate specialmente dopo la pubblicazione di una ben nota Memoria di CAPORALI (5) che, alle proprietà già conosciute della cfz.^{ne} di KUMMER, molte altre interessanti ne aggiungeva così da avere di tutte insieme un quadro completo. Lo studio in pa-

(1) NOETHER, *Erlangen. Ber.* 1 (1878), p. 81 e *München. Abh.* 17 (1889).

DE PAOLIS. *Mem. Linc.* (3) 2 (1878), p. 152.

(2) NOETHER. *München Abh.* 17 (1879), p. 105; *Math. Ann.* 38 (1889), p. 354.

RIEMANN. *Werke*, 2 Aufl. p. 487.

(3) PASCAL. *Ann. di mat.* (2) 20, 21 (1892-93).

(4) KUMMER. *Monatsb. Berl.* 1864.

(5) CAPORALI. loc. cit. p. 86.

rola costituisce parte essenziale di una mia memoria (1) di cui adesso mi permetto di riassumere i risultati principali. A tale scopo sarà utile aver presente anche la cosiddetta cfz.^{no} di KLEIN che viene individuata da una data cfz.^{no} di KUMMER, cioè la figura composta da 6 complessi in involuzione, dalle 15 coppie di assi delle involuzioni gobbe che ne nascono ecc.

I 16 piani doppi di una superficie di KUMMER passante per C_4 tagliano il suo piano in un gruppo di 16 bitangenti che chiamasi « un gruppo di KUMMER »: le 12 bitangenti, che avanzano, compongono un gruppo Steineriano secondo la denominazione introdotta nel N. 12. Due tali gruppi (di KUMMER e di STEINER) si chiamano complementari. Essi sono così collegati che variando la cfz.^{no} di KUMMER attorno alle 16 bitangenti di un gruppo di KUMMER e assumendo tutte le ∞^4 posizioni possibili e quindi variando conseguentemente i 6 complessi relativi, non variano i 6 poli del piano di C_4 rispetto ai 6 complessi suddetti. Essi sono i 6 punti doppi delle 6 coppie di bitangenti che compongono il gruppo Steineriano complementare del gruppo di KUMMER primitivo. Ciò può esprimersi anche così: una cfz.^{no} di KUMMER e la relativa cfz.^{no} di KLEIN che la prima individua, sono così legate che facendo variare in tutti i modi possibili la prima intorno ad una sua sezione piana, la seconda varia ugualmente intorno alla propria sezione col medesimo piano. È anche interessante la figura costituita dalle 15 coppie di punti d'incontro delle 15 coppie di assi fondamentali della cfz.^{no} di KLEIN. Chiamiamo per brevità punti M , tali punti che sono in numero di 30. Essi possono costruirsi senza uscire dal piano della quartica. A tale scopo si osservi che sopra ogni lato dell'esagono completo, formato coi sei poli suddetti, viene segnata una involuzione mediante i lati del quadrangolo completo che ha per vertici i 4 rimanenti poli esterni al lato suddetto. Ebbene i punti doppi di questa involuzione sono i due punti M situati su quel lato, e siccome questi lati sono 15, si possono così ottenere tutti i 30 punti M richiesti. Questi esistono anche, a tre, a tre, sopra 60 rette m con le quali si possono formare 15 quadrilateri di vertici M . Le 60 rette m passano, a tre, a tre, per 320 punti in guisa che con i quadrilateri suddetti, si possono formare 20 terne desmiche associate a due a due.

Dalla nota proprietà che i 6 piani doppi della cfz.^{no} di KUMMER, che passano per uno stesso punto doppio, riescono tangenti a un medesimo cono quadrico, ne segue immediatamente che le 16 bitangenti di un gruppo di KUMMER sono, a 6, a 6, tangenti a 16 coniche. Queste e le bitangenti suddette sono dunque costruite così che ciascuna delle prime è tangente a 6 delle seconde, e viceversa. Essendo 63 i gruppi di KUM-

(1) CIANI. *Ann. di mat.* (3) 2 (1899), p. 53.

MER si ritrova per altra via che il numero totale delle coniche in parola è 1008 (cf. il N. 13). La considerazione delle cosiddette rette R di CAPORELLI, inerenti alla cfz.^{na} di KUMMER, conduce subito a concludere che i punti d'incontro, a due, a due, delle 16 bitangenti di un gruppo di KUMMER esistono, a 3, a 3, sopra 240 rette le quali passano a loro volta, a 3, a 3, per 1280 punti: 320 sono quelli di specie già conosciuta: gli altri 960 sono di specie nuova.

Riunendo poi insieme tutta la cfz.^{na} dei 63 gruppi di KUMMER si può enunciare il seguente teorema: i 378 punti d'incontro, a 2, a 2, delle 28 bitangenti stanno, a 3, a 3, sopra 5040 rette π le quali passano, a 3, a 3, per 6720 punti s e 60480 punti k . Ogni retta π contiene 4 punti s e 36 punti k . I 6720 punti s stanno, a 4, a 4, sopra 15120 rette σ . I 60480 punti k stanno, a 3, a 3, sopra 20160 rette c che passano, a 3, a 3, oltre che per i 6720 punti s per altri 15120 punti.

Sapevano già per altra via che i punti d'incontro a 2 a 2 delle bitangenti esistono, a 6, a 6, sopra 63 coniche (N. 12). Col metodo attuale si può aggiungere, in proposito, qualche cosa di più accertando la esistenza di altre 2835 coniche ognuna delle quali contiene non soltanto 6, ma bensì 8 dei punti suddetti. Queste coniche sono tanto più notevoli inquantochè ciascuna passa anche per 8 dei punti contrassegnati M . A causa di questo, tali coniche furono chiamate le coniche dei 16 punti.

In fine della Memoria è indicata poi una semplice costruzione di una delle ∞^4 cfz.ⁿⁱ di KUMMER passanti per C_4 segnalando anche di quale arbitrarietà si possa usufruire nella costruzione medesima (1).

SECONDA PARTE

Quartiche particolari

CAPITOLO VI.

Le quartiche auto-proiettive.

19. Una quartica piana si chiama auto-proiettiva quando esiste almeno una collineazione periodica, nel suo piano, capace di trasformarla in

(1) Veggasi pure:

KOHN. *Wien. Monatsch.* 1 (1890), p. 100

WIRTINGER. *Untersuchungen über Thetafunktionen*, Leipzig, 1895.

TIMMERDING. *J. f. Math.* 122 (1900), p. 209.

Non possiamo lasciare l'argomento delle bitangenti di C_4 senza citare anche il bel libro di H. WEBER (*Lehrbuch der Algebra*, Braunschweig, 1899) nel quale un intero Capitolo è dedicato alle bitangenti della quartica piana come geniale applicazione dei gruppi di sostituzioni.

sè stessa. Una quartica generica non è auto-proiettiva: le quartiche auto-proiettive sono dunque quartiche particolari.

Le questioni inerenti a questo proposito possono porsi in vario modo. Si può cominciare dal ricercare quali condizioni debbono essere adempiute perchè una collineazione periodica e una quartica siano in tal guisa collegate che la seconda sia invariante rispetto alla prima. Tale questione, che si presenta per prima, in questo genere di studi, è stata risolta da S. KANTOR assegnando, per ogni caso trovato, la forma canonica della equazione relativa (1). Si presenta poi la questione di decidere se e in quali casi una stessa quartica possa essere trasformata in sè medesima da diverse collineazioni periodiche: sorge così e si amplia il concetto di gruppo formato da tutte le collineazioni rispetto a cui una quartica può essere invariante. Il problema è stato risolto da WIMAN per tutte le quartiche non singolari (2). E finalmente la risoluzione completa del problema per tutte le quartiche irriducibili (singolari e non singolari) è contenuta in una mia Memoria di recente pubblicazione (3). Ne riassumeremo i risultati essenziali descrivendo qui tutti i gruppi trovati e dando per ognuno la equazione della relativa quartica auto-proiettiva. Ecco questi gruppi: li indicheremo col simbolo G_n dove n è l'ordine.

a) Il G_{168} che ha per invariante la quartica di KLEIN di cui l'equazione può scriversi così: (cfr. il N. 21)

$$x_1^3x_2 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1 = 0.$$

b) Il G_{96} di cui è invariante la quartica di DYCK (cfr. il N. 22). L'equazione della curva è

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0.$$

c) Il G_{48} che ha per invariante la quartica di CAPORALI specializzata la di cui equazione può porsi sotto la forma

$$x_3^4 + \varphi(x_1x_2) = 0$$

dove φ è una binaria biquadratica ed equianarmonica in x_1x_2 (cfr. il N. 26).

d) Il G_{16} caratterizzato dalla seguente quartica invariante:

$$x_3^2x_1x_2 + x_1^4 + x_2^4 = 0.$$

Mentre per il G_{168} , il G_{96} , il G_{48} rimandiamo il lettore rispettivamente ai Numeri 71, 22, 26 (come sopra abbiamo accennato) per l'attuale G_{16} (meno importante) daremo subito la rappresentazione analitica mediante le seguenti sostituzioni:

(1) S. KANTOR. *Acta Math.* 19 (1895).

(2) WIMAN. *Stockholm Bihang till Handlingar* 21 (1895) N. 3.

(3) CIANI. *Rend. Palermo* 28, (1909).

$$\begin{pmatrix} \alpha^3 x_1 & \alpha x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^r ; \begin{pmatrix} \alpha^3 x_1 & \alpha x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

dove $r = 1, 2 \dots 8$ e α è radice 8ª primitiva dell'unità.

e) I gruppi composti dalle potenze di una stessa collineazione non contenuti nei casi precedenti. Essi sono i seguenti:

Il G_5 individuato dalla collineazione:

$$\begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^2 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} ; \alpha^5 = 1.$$

Le curve invarianti si riducono ai due tipi:

$$x_2^2 x_1 x_3 + x_2 x_1^3 + x_3^4 = 0 ; x_1^2 x_3^2 + x_1 x_2^3 + x_2 x_3^3 = 0.$$

Il G_6 individuato dalla:

$$\begin{pmatrix} \alpha^5 x_1 & \alpha x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

dove α è radice sesta primitiva dell'unità. Esso spetta alla quartica

$$x_3^2 x_1^2 + x_1^3 x_2 + x_2^4 = 0.$$

E finalmente il G_9 individuato dalla

$$\begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^4 x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

dove α è radice nona primitiva dell'unità. La quartica relativa è

$$x_3^3 x_2 + x_1^4 + x_1 x_2^3 = 0.$$

Si può aggiungere che il periodo della collineazione può avere un valore qualsiasi r nel caso in cui la curva sia la seguente:

$$x_3^4 + x_1^3 x_2 = 0$$

e la collineazione sia

$$\begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha^k x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

con α radice primitiva di $x^r = 1$ essendo $3 + k = r$.

20. Può interessare di sapere quali, fra le collineazioni descritte nel numero precedente, sono omologie (1). È notevole che queste omologie sieno tutte armoniche all'infuori dei casi seguenti:

$$x_1^4 + \varphi(x_2, x_3) = 0 , x_1^3 x_2 + \varphi(x_2, x_3) = 0$$

(1) CIANI. *Rend. Palermo*. 13 (1899), p. 347. — Per il caso poi in cui tali omologie sieno simmetrie ortogonali veggasi la mia tesi di abilitazione in *Annali scuola norm. sup. di Pisa* 1889.

dove φ è una binaria biquadratica in x_2, x_3 . Le omologie spettanti a questi casi hanno il periodo uguale a 4, o a 3 rispettivamente. Nei rimanenti casi ogni quartica omologica è necessariamente omologico-armonica e può esserlo in più modi quando esista più di una omologia armonica che trasformi la curva in sè stessa. Il centro di ogni tale omologia è un punto doppio della Steineriana, l'asse è parte della cubica polare del vertice.

Il numero di queste omologie può essere 1, 3, 5, 7, 9, 15, 21. Gli ultimi due casi, che sono i più interessanti, sono realizzati rispettivamente dalla quartica di DYCK e di KLEIN già nominate nel numero precedente.

21. *Quartica di Klein.* — Fra tutti i casi segnalati nel N. 19 sono particolarmente interessanti quelli indicati con a), b), c): le quartiche relative portano i nomi di KLEIN, di DYCK e di CAPORALI specializzata. Di questa ultima tratteremo a suo tempo (N. 26) considerando prima la quartica di CAPORALI nel caso generico (N. 24).

Delle altre due esporremo adesso le proprietà principali cominciando da quella di KLEIN. Essa costituisce, fra tutte le quartiche autoproiettive, il caso massimo e presenta anche l'interesse massimo. Fu scoperta da KLEIN (1) insieme al relativo gruppo d'ordine 168 di cui essa è invariante, e dopo KLEIN vari Autori ebbero ad occuparsene (2).

La curva è di genere tre e quindi non ha punti multipli. Una delle caratteristiche più notevoli è che il tangenziale di un flesso è un altro flesso. Ecco, più particolarmente, di che si tratta: sia A un flesso della curva, B il suo tangenziale: questo è, di nuovo, un flesso: se con C s'indica il tangenziale di B , anche C è un flesso ed ha per tangenziale il flesso A . Ne segue che ABC è un triangolo che ha per vertici 3 flessi e per lati le tre tangenti di flesso relative, onde l'equazione della curva, riferita a tale triangolo, può scriversi così:

$$x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 = 0.$$

Esistono 8 triangoli come ABC : di guisa che essi esauriscono così i 24 flessi. Un'altra proprietà caratteristica della quartica attuale è la coincidenza col proprio covariante S (N. 7). Si può fare una semplice rappresentazione analitica del suo gruppo G_{168} assumendo come gruppo di rife-

(1) KLEIN. *Math. Ann.* 14 (1879), p. 428.

(2) KLEIN-FRICKE *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, Leipzig 1892, p. 675, 678, 701.

BRIOSCHI. *Rend. Lincei* (3) 8 (1884), p. 164.

HASKELL *Amer. J.* 13 (1890), p. 1.

CIANI, *Rend. Palermo* 13 (1899), p. 347; id. 14 (1900), p. 16; *Ann. di mat.* (3) 5 (1901), p. 33.

rimento uno dei sottogruppi ottaedrici in esso contenuti. Si scrivano a tale scopo, sotto la forma

$$\begin{pmatrix} \pm x_i & \pm x_k & \pm x_l \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

(dove ikl è una qualunque permutazione di 123), tutte le collineazioni del gruppo ottaedrico suddetto.

Le quartiche invarianti rispetto a questo gruppo sono tutte e sole quelle del fascio

$$\Sigma x_i^4 + 6\lambda \Sigma x_i^2 x_k^2 = 0,$$

dove λ è il parametro del fascio. Ebbene, si ottiene il G_{168} aggiungendo, al gruppo ottaedrico precedente, la collineazione:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mu(x_2 - x_1) + 2x_3 & \mu(x_1 - x_2) + 2x_3 & \mu^2(x_1 + x_2) \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \right\}$$

dove $\mu = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$. Nel fascio esistono due quartiche di KLEIN: basta

fare $\lambda = \frac{-1 \mp i\sqrt{7}}{2}$ dove i segni superiori e gl'inferiori di λ e μ vanno

presi insieme. Abbiamo già osservato che la quartica attuale è covariante S di sè stessa. Le altre 35 quartiche di cui essa è covariante S (cfr. il N. 7) si dividono in due specie: 14 sono invarianti, ciascuna, rispetto a uno dei sottogruppi ottaedrici di G_{168} ; le altre 21 lo sono, ciascuna, rispetto a uno dei sottogruppi di 8° ordine. I 24 flessi sono collegati anche da altre proprietà (oltre quelle esposte): ad es. essi esistono, a 8, a 8, sopra 147 coniche e, a 6, a 6, sopra altre 112 coniche ognuna delle quali ultime taglia la quartica nei punti di contatto di una medesima bitangente (1).

22. *Quartica di Dyck.* Dopo la quartica di KLEIN, per numero di collineazioni in sè, viene quella di DYCK. Essa ne conta 96 e il loro gruppo è il G_{96} rappresentato da tutte le sostituzioni possibili del tipo

$$\begin{pmatrix} \alpha x_i & \beta x_h & \gamma x_k \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

dove con ikh si indica un qualunque permutazione di 123, e con $\alpha\beta\gamma$ tutte le possibili radici biquadratiche dell'unità. La C_4 attuale si può caratterizzare mediante l'esistenza di un trilatero polare (N. 6) riferendo al quale la curva, se ne può scrivere l'equazione nella forma canonica

(1) CIANI. *Ann. di mat.* (3) 5 (1901), p. 33.

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0.$$

Si può aggiungere che essa possiede 12 ondulazioni distribuite in quattro quaterne armoniche sui lati del triangolo fondamentale. Il covariante S è indeterminato. Il covariante T e l'Hessiana si compongono del suddetto triangolo contato due volte. La Steineriana si riduce al medesimo triangolo contato quattro volte (1). Esiste un tessuto di coniche apolari.

CAPITOLO VII.

Altre quartiche speciali di genere tre.

23. Abbiamo già considerato, nel numero precedente, due interessanti quartiche speciali di genere tre. La loro importanza proveniva dall'esistenza di due notevoli gruppi di collineazioni rispetto ai quali esse sono invarianti.

Indipendentemente da questo carattere, esistono altre quartiche particolari di genere tre non meno interessanti delle precedenti. Vogliamo considerarne le principali.

Quartiche di Clebsch e di Lüroth. Abbiamo già visto al N. 6 che una quartica generica non ammette polilateri con un numero di lati inferiori a 6. Le quartiche dotate di pentalateri polari sono dunque speciali: esse prendono nome da CLEBSCH che per primo ne ha constatata la esistenza (2) e sono caratterizzate analiticamente dall'annullarsi dell'invariante sestico con la caratteristica uguale a 5. Esse ammettono una conica apolare (cioè una conica la quale, riguardata come involuppo, ha la conica polare indeterminata (N. 4)). La esistenza di un pentalatero polare trae seco la esistenza di ∞^4 di teli pentalateri tutti circoscritti alla conica suddetta ed iscritti nel covariante S , il quale, in questo caso, è, esso pure, una quartica speciale e prende nome da LÜROTH che per il primo se ne è occupato (3). Onde una quartica di LÜROTH non è altro che il covariante S di una quartica di CLEBSCH. Viceversa, ogni quartica circoscritta a un pentalatero è una quartica di LÜROTH (ossia può riguardarsi come covariante S di un'altra quartica il cui invariante sestico si annulla con la caratteristica 5). Si può dunque dire che una quartica di LÜROTH è ca-

(1) DYCK. *Math. Ann.* 27 (1880), p. 473, 510.

CAYLEY. *Papers.* 10, p. 603.

MASONI. *Rend. Acc. Napoli* 21 (1882), p. 45.

SCORZA. *Ann. di mat.* (3) 2 (1899), p. 329.

(2) CLEBSCH. *J. f. Mat.* 59 (1861), p. 125.

(3) LÜROTH. *Math. Ann.* 1 (1869), p. 37; 13 (1878), p. 548.

GRASSI. *Giorn. di mat.* 38 (1900), p. 244.

FRAHM. *Math. Ann.* 7 (1874), p. 635.

ratterizzata dall'essere circoscritta ad uno, e quindi a ∞^1 pentalateri polari.

Abbiamo detto al N. 7 che una quartica generica ha 24 cubiche polari cuspidate. Se si tratta della quartica di CLEBSCH le 24 tangenti cuspidali non sono distinte, ma coincidono, a 3, a 3, nelle 8 tangenti alla conica apolare, nei punti in cui essa incontra il covariante S . I 24 poli rispettivi, cioè le 24 cuspidi della Steineriana (N. 7) formano 8 triangoli circoscritti alla conica suddetta e al covariante S . Queste 24 cuspidi sono allineate, a 3, a 3, sopra le 8 tangenti suddette. Finalmente la condizione necessaria e sufficiente perchè una quartica sia di CLEBSCH può anche esprimersi esigendo che il suo covariante S ed il suo involuppo equianarmonico sieno due curve armoniche fra loro (1).

24. *La quartica di Caporali.* — La cosiddetta quartica di CAPORALI è specialmente notevole perchè costituisce uno dei pochi casi in cui la cfz.^{no} dei flessi assume un particolare interesse. Sulla quale cfz.^{no} mi sia concesso, poichè l'occasione lo porta, la seguente digressione.

Se si riflette alle numerose e svariate proprietà geometriche che gode la cfz.^{no} dei flessi di una cubica piana generica si è facilmente indotti a presumere che altrettanto debba accadere per la cfz.^{no} dei 24 flessi di una quartica generica. Che questa presunzione abbia avuto credito risulta da tracce evidenti di tentativi fatti per uno studio sistematico di tale cfz.^{no}. — Fra altro si cercò di dimostrare che la conica passante per 5 flessi di C_4 passa anche per un sesto flessio. Ma la dimostrazione è errata (2). Propriamente, fin ora, non si può *in generale* affermare altra proprietà geometrica, inerente alla suddetta cfz.^{no}, all'infuori di quella che colloca i 24 flessi nei 24 punti d'intersezione della C_4 con la sua Hessiana. Poca cosa invero se si pensa che una tale proprietà vale per qualsiasi C_n . — Tutto questo in generale: ben s'intende.

Se la C_4 si specializza possono allora balzar fuori particolarità e fatti geometrici salienti. Ad es. basta appena che quattro flessi sieno in linea retta per potere affermare che altrettanto accade per i loro tangenziali. Già nelle quartiche autoproiettive abbiamo avuto esempi di qualche notevolezza nella cfz.^{no} in discorso (Numeri 21 e 22) e anche se ne avrà esempio nelle quartiche singolari. Ma il caso più caratteristico si presenta con la quartica di CAPORALI di cui adesso esporremo le proprietà principali (3).

(1) SCORZA. *Ann. di mat.* (3) 2 (1899), p. 329.

(2) Cfr. ad es. LORIA. *Bollettino di matematica*, Ottobre-Dicembre 1906.

(3) Un primo elenco di queste apparve in una Nota del CAPORALI stampata dal la R. Acc. di Napoli (*Rendic.* Dicembre 1882). Altri accenni più, o meno espliciti a questa curva si trovano nel volume delle Memorie già citato, a p. 336, 340, 349 e in due lettere dirette al Prof. SEGRE e da questi pubblicate (*Ann. di mat.* (2) 20 (1892), p. 274). Per una esposizione sistematica delle proprietà finora conosciute di questa quartica, veggasi la mia Memoria in *Rend. Acc. Napoli* (3) 2 (1896), p. 126.

Prima di tutto ecco la definizione della curva (che può servire anche a generarla). Si chiama quartica di CAPORALI la Jacobiana di una retta r e di un fascio φ sizigetico di cubiche. Questa Jacobiana è di 4° ordine, è priva di punti multipli e quindi è di genere 3. Una prima proprietà notevole è che essa ammette una seconda generazione come Jacobiana di una seconda retta r' e di un secondo fascio φ' . Più precisamente ciò risulta dalla proposizione seguente: la quartica di CAPORALI generata come Jacobiana del fascio sizigetico

$$\varphi \equiv x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - \lambda x_1 x_2 x_3 = 0$$

e della retta $r \equiv u_x = 0$, ammette una seconda generazione uguale alla prima, come Jacobiana dell'altro fascio sizigetico seguente:

$$\begin{aligned} \varphi' \equiv & x_1^3(u_3^3 - u_2^3) + x_2^3(u_1^3 - u_3^3) + x_3^3(u_2^3 - u_1^3) + \\ & + 3u_2 u_3 x_2 x_3 (u_2 x_2 - u_3 x_3) + 3u_3 u_1 x_3 x_1 (u_3 x_3 - u_1 x_1) + 3u_1 u_2 x_1 x_2 (u_1 x_1 - u_2 x_2) + \\ & + \lambda [u_2 u_3 x_1 (u_3 x_3^2 - u_3 x_3^2) + u_3 u_1 x_2 (u_1 x_3^2 - u_3 x_1^2) + u_1 u_2 x_3 (u_2 x_1^2 - u_1 x_2^2)] = 0 \end{aligned}$$

e dell'altra retta:

$$r' \equiv u_1 x_1 (u_2^3 - u_3^3) + u_2 x_2 (u_3^3 - u_1^3) + u_3 x_3 (u_1^3 - u_2^3) = 0.$$

L'equazione della quartica è la seguente:

$$C_4 \equiv u_1 x_1 (x_2^3 - x_3^3) + u_2 x_2 (x_3^3 - x_1^3) + u_3 x_3 (x_1^3 - x_2^3) = 0.$$

I due fasci φ e φ' sono proiettivi e generano l'Hessiana di C_4 .

Ebbene la quartica così generata ha 12 flessi nei vertici dei 4 trilateri sizigetici di φ e altri 12 nei vertici dei 4 trilateri sizigetici di φ' . In questo modo la cfz.^{ne} dei flessi di C_4 si riannoda a quella di cfz.ⁿⁱ tanto note quanto interessanti inerenti a cubiche ed è inutile insistervi.

Dal punto di vista proiettivo la quartica di CAPORALI è definita mediante i fatti geometrici seguenti:

Essa possiede una schiera di coniche apolari (1);

è armonica col proprio involuppo equianarmonico.

Le condizioni analitiche equivalenti sono:

L'invariante sestico si annulla con la caratteristica uguale a 4 (tre condizioni distinte); (N. 9)

è nullo l'invariante cubico (N. 9) (un'altra condizione).

La curva viene quindi a dipendere da 10 costanti.

(1) Il quadrilatero circoscritto a tutte le coniche della schiera è dunque un quadrilatero polare. Quando questa sola condizione sia soddisfatta, e non altra, la C_4 è quella studiata da DEL PEZZO in *Rend. Acc. di Napoli* 22 (1892), p. 203; veggasi anche CAPORALI loc. cit. p. 349.

Un'altra notevole generazione di questa C_4 può ottenersi mediante due serie ∞^1 di quadrangoli iscritti, di cui i lati la segano armonicamente e di cui i punti diagonali descrivono l'Hessiana.

25. *La rete sizigetica di quartiche.* — Riprendiamo l'equazione della curva precedente

$$u_1 x_1 (x_2^3 - x_3^3) + u_2 x_2 (x_3^3 - x_1^3) + u_3 x_3 (x_1^3 - x_2^3) = 0.$$

Considerando le u_i come parametri, tale equazione rappresenta una rete di quartiche di CAPORALI dotata di 12 punti base nei 12 vertici dei 4 trilateri esistenti nel fascio φ . Tali 12 punti sono 12 flessi per ogni quartica della rete. Per estensione di linguaggio, come si chiama fascio sizigetico di cubiche ogni fascio di cubiche i cui 9 punti base sieno flessi per ogni cubica del fascio, così si dirà che una rete di quartiche è sizigetica allorchando esistano 12 punti comuni, a tutte le quartiche della rete i quali sieno, per tutte, altrettanti flessi. Ebbene: l'esempio rappresentato dalla equazione precedente è appunto un esempio di rete sizigetica. È dunque naturale di chiedersi se ve ne siano altri. La risposta è negativa e si può così affermare che l'unica rete sizigetica di quartiche è quella rappresentata dalla equazione precedente e costituita per intero da quartiche di CAPORALI.

26. *La quartica di Caporali specializzata.* Riprendendo le considerazioni del N. 24 vogliamo segnalare un caso speciale notevole della quartica di CAPORALI: quello in cui le rette r ed r' coincidano. Ciò avviene quando la posizione comune che esse assumono costituisce una delle nove rette polari armoniche del fascio φ e conseguentemente anche di φ' . Il caso è importante perchè allora la curva acquista carattere invariante rispetto a un gruppo di 48 collineazioni già considerato al N. 19.

La curva attuale può anche caratterizzarsi mediante il possesso di 4 ondulazioni in linea retta formanti un gruppo equiarmonico con le relative tangenti concorrenti in un punto. Ne segue che, con opportuna ed evidente scelta degli elementi di riferimento, la sua equazione potrà scriversi così:

$$x_3^4 + x_1^4 + 2i\sqrt{3} x_1^2 x_2^2 + x_2^4 = 5.$$

Per avere le collineazioni del suddetto G_{48} si scrivano prima quelle, formanti un gruppo tetraedrico, che trasformano in sè stessa la binaria biquadratica in $x_1 x_2$ che figura nella precedente equazione. Esse si ottengono scrivendo quelle del gruppo quadrinonio:

$$\begin{pmatrix} x_i & x_h \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

(dove ih è una qualunque permutazione di 1, 2) e aggiungendovi la seguente :

$$\begin{pmatrix} -x_1 + ix_2 & x_1 + ix_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene così il G_{48} binario che trasforma in sè stessa la binaria suddetta. Ebbene, per avere le cercate collineazioni del G_{48} , basta aggiungere, alle sostituzioni del gruppo binario quadriminomio precedente x_3 , che si trasforma in αx_3 , dove α è radice quarta dell'unità e alle altre rimanenti x_3 che si trasforma in $x_3 \sqrt[4]{2 + 2i\sqrt{3}}$. E siccome tanto quest'ultima radice 4^a , quanto α , hanno 4 valori si perverrà così dal G_{12} binario suddetto, al G_{48} ternario richiesto. Esso è dunque isoformo meriedrico col gruppo del tetraedro.

Altre particolarità geometriche della curva attuale sono le seguenti: essa possiede, oltre le 4 ondulazioni già nominate, altri 16 flessi i quali si distribuiscono in 4 quaterne armoniche su 4 rette di un fascio equiarmonico che ha il centro nel punto comune alle 4 tangenti di ondulazione (1).

27. *Quartica desmica, o di Humbert* (2). Si chiama quartica desmica, secondo HUMBERT, la sezione piana generica di una superficie desmica di 4° ordine. La curva non ha, in generale, punti multipli, per cui il suo genere è 3. Indipendentemente da considerazioni spaziali, si dice che una quartica è desmica quando appartiene a un fascio di quartiche nel quale esistono 3 curve composte ciascuna di quattro rette (quadrilateri desmici, o fasciali). Tali rette sono tangenti a una medesima curva C_3 di 3ª classe. I 4 punti di contatto con C_3 , dei lati di un quadrilatero desmico, sono allineati su di una tangente a C_3 . Ripetendo la considerazione per gli altri due quadrilateri desmici, si trovano tre tangenti di C_3 passanti per un medesimo punto. La condizione perchè una quartica sia desmica si può esprimere geometricamente esigendo che esistano 3 bitangenti tali che i loro punti di contatto siano vertici di un quadrilatero completo che abbia per diagonali le bitangenti suddette: dopo di che esistono in conseguenza altri 5 siffatti quadrilateri. Lo SCHUR (3) ha dimostrato che questa quartica può riguardarsi come un caso particolare di quella di LÜROTH.

(1) CIANI. *Ist. Lomb. Rend.* (2) 33 (1900), p. 1700; *Rend. Palermo* 28 (1909).

(2) HUMBERT. *J. de math.* (4) 6 (1890), p. 423; id. (4) 7 (1891).

(3) SCHUR. *J. f. Math.* 95 (1883), p. 217.

CAPITOLO VIII.

Le quartiche di genere due (iperellittiche).

28. Se la C_4 è di genere due essa ha un punto doppio e viceversa ed è una curva iperellittica (1). La g'_2 che le dà il carattere iperellittico è segnata su di essa dal fascio di rette che ha il centro nel punto doppio. Cominciamo dal considerare il caso in cui le tangenti, nel punto doppio sono distinte (nodo, o punto isolato). Allora dalla tabella del N. 1 risulta l'esistenza di 16 bitangenti e di 18 flessi. La classe è 10. Le 16 bitangenti compongono un gruppo di KUMMER. Vi sono altre sei rette ciascuna delle quali ha due coppie di punti coincidenti a comune con C_4 , ma non sono bitangenti in senso proprio: esse costituiscono le 6 tangenti tirate, dal punto doppio, a toccare C_4 altrove, e si sogliono chiamare le bitangenti improprie. Delle 63 serie di coniche inviluppanti del caso generale, ve ne sono 30 ordinarie [composte, cioè di coniche quadritangenti]. I gruppi Steineriani corrispondenti si compongono ciascuno di 4 coppie di bitangenti proprie e di un paio di bitangenti improprie contato due volte. Ogni conica dei rimanenti sistemi inviluppanti, è tritangente a C_4 e la taglia nel punto doppio. Ciascun gruppo Steineriano corrispondente si compone di 6 bitangenti proprie e di 6 improprie: ogni coppia contiene una di ciascuna specie.

Circa alla generazione dell'attuale C_4 si può dire che si otterrà una quartica con un punto doppio quando si particolarizzi nel modo seguente alcuno dei metodi dati in generale:

a) nella generazione mediante due fasci proiettivi di coniche, basta che i due fasci abbiano in comune un punto base (N. 3).

b) nel metodo di HESSE, basta che due vertici dell'ottagono gobbo coincidano (N. 13);

c) nel metodo di ARONHOLD, basta che 3 delle 7 bitangenti di un sistema di ARONHOLD passino per un medesimo punto (N. 14);

(1) Ecco un elenco dei principali lavori inerenti a queste curve:

ROCH. *J. f. Math.* 66 (1866), p. 114; BRILL. *Math. Ann.* 6 (1872), p. 66; HUMBERT. *J. de math.* (4) 2 (1886), p. 239; KOHN. *Wien. Ber.* 95 (1887), p. 321; BOBECK. *Wien. Denkschr.* 53 (1887), p. 119; ANDOYER. *Ann. Toulouse* 3 (1889); KLEIN. *Math. Ann.* 36 (1890), p. 59; JEFFERY. *Quart. Journ.* 24 (1890), p. 250.

Per una rappresentazione parametrica non razionale della curva veggasi: CLEBSCH. *Math. Ann.* 1 (1869), p. 170.

d) nel metodo di GEISER basta che il centro di proiezione sia sopra una delle 27 rette della superficie cubica (N. 15) (1).

Finalmente è caso particolare notevole quello nel quale le tangenti nodali sono anche tangenti di flesso (punto nodale inflessionale si chiama allora il punto doppio), di guisa che tali tangenti hanno tutte le loro intersezioni con C_4 assorbite dal punto doppio (2).

Anche la quartica desmica (N. 27) può avere un punto doppio e HUMBERT medesimo ha considerato questo caso (3).

Se poi il punto doppio è una cuspidale, la solita tabella del N. 1 ci dice che esistono 10 bitangenti e 16 flessi. La classe è 9. La quartica cuspidale è stata oggetto di studio da parte di vari Autori (4).

29. *La conica di Bertini.* Abbiamo già osservato nel N. precedente che per il punto doppio di C_4 si possono condurre 6 rette a toccare altrove la curva. Ebbene, si dimostra facilmente che i sei punti di contatto esistono su di una medesima conica. Questo teorema non è che un caso particolare di uno più ampio riguardante in generale una curva di grado n con un punto $(n-2)^{pl}$, ed è dovuto a BERTINI (5) onde il nome di conica di BERTINI alla conica sopra nominata.

Questa conica e il punto doppio di C_4 individuano una inversione quadrica che trasforma la curva in sè stessa (6). Cominciamo così a trovare un primo esempio di quartica trasformata in sè stessa da una corrispondenza fra i punti del suo piano che non è più lineare. Altri esempi vedremo in seguito.

CAPITOLO IX.

Le quartiche di genere uno (ellittiche).

30. Una quartica con due punti doppi, ovvero con una singolarità e-
quivalente (ad es. un tac-nodo) è di genere uno e ammette quindi una

(1) Per un'altra generazione della curva veggasi BOBECK. loc. cit.

(2) BRIOSCHI. *Math. Ann.* 4 (1871), p. 95; *Opere*, t. V, p. 199.

(3) HUMBERT. *J. de math.* (4) 7 (1891), p. 385.

(4) Veggasi particolarmente: RICHMOND. *Quart. Journ.* 26 (1892), p. 5.

(5) BERTINI. *Rend. Linc.* (3) 1 (1877), p. 92; CAPORALI ha proseguito, in quest'ordine di idee, in una interessante nota Nota (loc. cit. p. 164).

(6) ROBERTS. *London. Math. Soc.* 25 (1894), p. 151; DE VRIES. *Nieuw. Arch.* (2) 3 (1897), p. 158. La cfz. dei flessi è stata considerata, in questo caso, da BRILL, *Math. Ann.* 13 (1878), p. 175 e da RICHMOND. *Quart. Journ.* 26 (1892), p. 5.

rappresentazione parametrica per funzioni ellittiche (1). Se i punti doppi sono distinti la curva acquista una particolare importanza, dal punto di vista metrico, quando con una trasformazione omografica tali punti vengono trasportati nei punti ciclici del piano della curva. Dal punto di vista proiettivo invece è indifferente che i punti doppi suddetti sieno nei punti ciclici, o altrove. Noi considereremo particolarmente il caso in cui i punti doppi sieno i punti ciclici: così dal lato proiettivo non avremo alcuna specificazione notevole; mentre un vantaggio indiscutibile ne verrà per le proprietà metriche.

Se i punti ciclici sono due nodi la C_4 , si chiama « bicircolare » se sono due cuspidi si chiama « Cartesiana ».

31. *Quartiche bicircolari generiche* (2). Come dianzi abbiamo detto, una quartica si chiama bicircolare se ha due punti doppi (a tangenti distinte) nei punti ciclici del suo piano. Secondo la tabella del N. 1 la curva possiede 8 bitangenti e 12 flessi. La classe è 8. Da ciascun punto doppio si possono tirare 4 tangenti a toccare altrove la curva: si hanno così due quaterne le quali hanno il medesimo birapporto: il suo valore può assumersi come modulo della curva. Ne segue che i 16 punti d'incontro di queste tangenti esistono, a 4, a 4, sopra 4 coniche passanti per i punti doppi e siccome questi sono i punti ciclici così ne segue che tali coniche sono cerchi, onde si ha il teorema che afferma la esistenza di 16 fuochi, a 4, a

(1) CLEBSCH. *J. f. Math.* 64 (1864); CAYLEY. *Cambr. Trans.* 14 (1889), p. 484; SIEBECK. *J. f. Math.* 57 (1860), p. 359; 59 (1861), p. 173.

Per altre proprietà inerenti a queste curve veggasi: RICHMOND. *Quart. Journ.* 32 (1900), p. 63; AMESDER. *Wien. Ber.* 87 (1883), p. 15; JEFFERY. *London. Math. Soc.* 21 (1896), p. 287.

(2) A cominciare da questo punto, sino alla fine della presente Monografia, si presentano, quasi senza interruzione, quartiche particolari che, dal punto di vista metrico, furono oggetto di studio, in tempi abbastanza lontani dai nostri, quando cioè i metodi di ricerca non avevano acquistato la generalità che oggi li caratterizza. È merito non piccolo delle vedute moderne quello di avere inquadrato nella teoria delle curve piane algebriche (come casi particolari metrici) la più gran parte delle curve studiate dagli antichi. L'interesse di queste curve dal punto di vista proiettivo è scarso: non altrettanto può dirsi dal punto di vista metrico, e particolarmente dal punto di vista storico. È perciò che chi scrive abbandona, d'ora in avanti, in gran parte, le citazioni particolari rimandando il lettore alla 2^a edizione del bel libro di LORIA intitolato: *Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven*. (Leipzig und Berlin. Teubner 1910). Ad ogni occasione sarà quindi richiamato il numero della pagina preceduto brevemente dal semplice simbolo « LORIA ».

Veggansi anche i due libri seguenti:

BASSET. *An elementary treatise on cubic and quartic Curves* (Cambridge (1901).

WIELEITNER. *Spezielle ebene Kurven* (Leipzig 1908).

4, sopra 4 cerchi. Può darsi che qualcuno di questi si componga di due rette (di cui una all' ∞), onde ne viene la possibilità che 4 fuochi sieno in linea retta. Vi sono 4 sistemi di cerchi involuppati la curva. Ciascuno può riguardarsi come generato da un cerchio mobile di cui il centro si muova su di una conica fissa (conica deferente) e tagli ortogonalmente un cerchio fisso (cerchio direttore). Le 4 coniche deferenti sono confocali e i 4 cerchi direttori sono, a 2, a 2, ortogonali. Esistono 4 trasformazioni analamatiche della curva in sè stessa: esse sono quelle individuate dai 4 cerchi direttori suddetti. Per ogni centro d'inversione passano due bitangenti della curva. Relativamente al modo di rappresentarla analiticamente, si può dire che se C_1, C_2, C_3 , sono 3 cerchi involuppati dello stesso sistema, l'equazione della curva si può porre sotto la forma

$$\lambda_1 \sqrt{C_1} + \lambda_2 \sqrt{C_2} + \lambda_3 \sqrt{C_3} = 0.$$

Assumendo per assi cartesiani gli assi della conica deferente, l'equazione acquista quest'altra forma:

$$(x^2 + y^2)^2 + ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0.$$

Aggiungeremo anche che, relativamente a queste quartiche, può farsi una teoria dei poligoni iscritti tutt'affatto simile a quella che PONCELET ha fatto per le coniche (1).

32. *Quartiche bicircolari speciali (spiriche di Perseo, ovali di Cassini).* È caso particolare notevole quello nel quale il centro di un cerchio direttore è sopra un asse della relativa conica deferente. Allora la C_4 gode simmetria ortogonale rispetto a tale asse e ne ammetterà un'altra di tali simmetrie quando il cerchio e la conica suddetta sieno concentrici. In quest'ultimo caso la curva si chiama « *spirica di Perseo* » e si può anche ottenere tagliando un toro con un piano parallelo all'asse. Le spiriche si possono pure riguardare come curve isoptiche di due coniche (2).

Un caso particolare interessante delle curve precedenti è realizzato allorchè, riguardando una spirica di PERSEO come sezione piana di un toro, il piano della curva riesce tangente al toro medesimo. La curva prende allora il nome di lemniscata di BOOTH (3).

Se poi i punti ciclici, oltre essere doppi, sono anche inflessionali la C_4 prende il nome di « *OVALE DI CASSINI* » (4). In ciascun punto doppio le tan-

(1) SALMON. loc. cit., p. 339.

BASSET. loc. cit., p. 133.

LORIA. p. 114.

(2) LORIA. p. 124.

(3) LORIA. p. 134.

(4) LORIA. p. 208.

genti relative esauriscono ivi le loro intersezioni con C_4 . La curva si può definire metricamente come il luogo di un punto tale che il prodotto delle sue distanze da due punti fissi (fuochi) sia costante. Se $2a$ è la distanza fra i due punti, e k^2 il valore del prodotto suddetto, l'equazione della curva può scriversi:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = k^4 - a^4.$$

Se $k < a$ la parte reale della curva si compone di due ovali esterne l'una all'altra. Se $k = a$ la curva acquista un 3° punto doppio nell'origine e diviene la lemniscata di BERNOULLI di cui parleremo al N° 37. Se $k > a\sqrt{2}$ la parte reale della curva è costituita da una sola ovale. Ogni parallelogrammo iscritto nella curva e ad essa concentrico, è tale che la somma algebrica degli angoli, sotto i quali si vedono i lati opposti da un punto della curva, è costante.

33. *Quartiche Cartesiane.* — Se i punti ciclici sono due cuspidi la quartica si chiama Cartesiana come già altrove abbiamo accennato (1). La curva può riguardarsi come il luogo di un punto le cui distanze da due punti fissi moltiplicate per due numeri costanti danno una somma costante. Si dimostra allora l'esistenza di 3 fuochi in linea retta. Se con ρ' , ρ'' , ρ''' si indicano le distanze di un punto qualunque di C_4 dai fuochi, si ha

$$\alpha\rho' + \beta\rho'' + \gamma\rho''' = 0$$

dove α , β , γ sono costanti.

La curva si può anche riguardare come l'involuppo del sistema di cerchi

$$\lambda^2 kB + 2\lambda A + k^2 = 0$$

dove $A = 0$ è un cerchio, $B = 0$ una retta (che risulta bitangente a C_4), k una costante e λ un parametro variabile. Ne risulta l'equazione sotto la forma

$$A^2 = k^3 B.$$

In coordinate polari essa può scriversi

$$\rho^2 - 2(m + n \cos\omega)\rho + p = 0$$

dove m , n , p sono costanti e il polo è un fuoco. Ne segue che 4 punti della curva che sieno allineati, sono tali che la somma delle loro distanze dal fuoco suddetto è costante. Per $p = 0$ il polo diviene un punto doppio e si ha la lumaca di PASCAL: se di più $m = n$ il punto doppio

(1) LORIA p. 174.

suddetto è una cuspidè e si ha la cardioide. Ma entrambi questi casi particolari saranno inclusi nel Capitolo seguente dedicato appositamente alle quartiche razionali.

CAPITOLO X.

Le quartiche di genere zero (razionali).

34. La nostra C_4 sia di genere zero (1). Ne segue che le coordinate omogenee di un suo punto si potranno esprimere mediante funzioni razionali intere di 4° grado di un parametro λ , (ovvero mediante binarie biquadratiche in λ e μ). Questa semplice rappresentazione fornisce il mezzo più opportuno e più semplice per determinare i punti singolari della curva, i suoi flessi e le sue bitangenti. Si perviene anche a determinare con facilità l'equazione della curva in coordinate di rette, considerando la binaria biquadratica in λ e μ che si ottiene sostituendo, nella equazione di una retta $u_x=0$, in luogo della x_i le binarie biquadratiche corrispondenti. Fra i molti modi di studiare la C_4 attuale, è notevole quello che ne deduce le proprietà principali per proiezione dalla curva gobba razionale di 4° ordine, intersezione di due quadriche tangenti fra di loro in un punto (2).

35. *Quartiche trinodali.* — Chiamasi trinodale ogni C_4 dotata di 3 punti doppi tutti a tangenti distinte (3). Una tale C_4 possiede 4 bitangenti e 6 flessi (N^0 1). La classe è 6. Gli elementi più notevoli inerenti alla curva dànno luogo alla considerazione di varie coniche di cui enumereremo ora le principali. Sono tangenti ad una stessa conica le 6 tangenti nodali, ad una seconda conica sono tangenti le 6 rette che dai nodi si possono condurre a toccare altrove la curva: sono tangenti ad una terza conica le 6 tangenti di flesso. Esistono su di una 4ª conica i 6 flessi, su di una 5ª gli 8 punti di contatto delle 4 bitangenti, sopra una 6ª giacciono i 6 rimanenti punti d'incontro, con C_4 , delle 6 tangenti nodali, e finalmente su di una 7ª i 6 punti di contatto delle tangenti a C_4 condotte dai punti doppi. — Il luogo geometrico dei punti tali, che tirando da essi le 6 tangenti a C_4 i punti di contatto esistano su di una stessa conica, è una cubica notevole anche per altri legami geometrici che la collegano a C_4 .

(1) LORIA. p 107.

(2) STAHL. *J. f. Math.* 101 (1887), p. 300.

(3) Una Memoria che riassume i principali risultati conosciuti intorno a queste curve è di DE VRIES. *Archiv. Teyler* (2) 7; (1900).

Un metodo fecondo per investigare le proprietà della curva consiste nel trasformarla quadraticamente in una conica. Ad es. si scriva l'equazione di C_4 , riferendola al triangolo dei punti doppi, nella forma seguente:

$$ax_1^2x_2^2 + bx_2^2x_3^2 + cx_3^2x_1^2 + 2x_1x_2x_3(dx_1 + ex_2 + fx_3) = 0$$

ovvero:

$$a\left(\frac{1}{x_3}\right)^2 + b\left(\frac{1}{x_1}\right)^2 + c\left(\frac{1}{x_2}\right)^2 + 2d\frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_3} + 2e\frac{1}{x_3} \cdot \frac{1}{x_1} + 2f\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = 0$$

ed ora basta applicare la inversione $x_i = \frac{1}{x_i}$ per trasformare C_4 in una conica.

Un caso metrico notevole, della attuale C_4 , è la *Trisecante* così nominata perchè può essere utilmente adoperata nel problema della trisezione di un angolo (1). Essa possiede due nodi a distanza finita e uno all'infinito e passa semplicemente per i punti ciclici del piano.

36. *Quartica trinodale inflessionale, o lemniscata proiettiva.* — Col nome di lemniscata proiettiva, il BERZOLARI indica la quartica trinodale le cui tangenti nodali sono anche tangenti di flesso (2). Egli mette in relazione la geometria della curva con la geometria del quadrilatero e del quadrangolo piano osservando che la C_4 attuale può riguardarsi come parte della Steineriana del quadrilatero completo formato dalle 4 bitangenti della curva. Se $abcd$ sono queste rette e $k=0$ la conica dei 14 punti del precedente quadrilatero, l'equazione di C_4 può scriversi sotto la forma notevole: $abcd + k^2 = 0$. I punti diagonali del quadrilatero in parola sono i tre punti nodali inflessionali di C_4 . I 4 punti di contatto di due bitangenti qualunque e i due nodi allineati col punto comune a tali rette, appartengono a una stessa conica. Si trovano così 6 coniche notevoli intimamente collegate a C_4 .

Nel N° precedente abbiamo avuto luogo di considerare una cubica luogo geometrico di un punto P tale che appartengano ad una stessa conica i punti di contatto delle 6 tangenti condotte da P a C_4 . Ebbene, nel caso attuale tale cubica è indeterminata: cioè da qualunque punto del piano partano le 6 tangenti a C_4 , sempre i punti di contatto esistono su di una medesima conica: se poi il punto giace su C_4 le tangenti che toccano altrove C_4 si riducono a 4, e i punti di contatto sono in linea retta.

(1) LORIA. p. 228.

(2) BERZOLARI. *Rend. Istit. Lomb.* (2) 37 (1904), p. 277 e p. 304.

Questo lavoro composto di due Note (seguitesi: una all'altra) riassume tutte le proprietà proiettive conosciute in argomento e altre interessanti ne aggiunge.

La curva attuale è anche notevole perchè costituisce uno dei pochi casi in cui la configurazione dei punti sestatici ha qualche interesse (1). Infatti si dimostra che tali punti (in numero di 12) costituiscono le ulteriori intersezioni (fuori dei nodi) dei lati del quadrangolo polare del quadrilatero $abcd$, e anche punti di contatto delle coppie di tangenti semplici tirate a C_4 dai vertici di $abcd$ omologhi (polari) dei lati del quadrangolo suddetto.

L'autore considera anche i più notevoli covarianti e controvarianti di C_4 . Le proprietà trovate e tutti gli enti geometrici considerati si collegano poi mediante il gruppo di 24 collineazioni trasformanti in sè stesso il quadrilatero $abcd$ e tutta la intera configurazione. Questo carattere invariante di C_4 è particolarmente messo in evidenza scrivendone l'equazione sotto la forma:

$$x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 = 0$$

dove il triangolo di riferimento è il diagonale del quadrilatero suddetto.

Si può dunque dire che la C_4 attuale è anche una notevole quartica autoproiettiva e quindi rientra nelle specie descritte nel Capitolo VI.

37. *Lemniscata di Bernoulli*. — È un caso particolare metrico della quartica trinodale inflessionale considerata nel N° precedente (2): basta che due nodi sieno nei punti ciclici del piano. Può dunque esser riguardata come una particolare ovale di CASSINI (N. 32). Trattando di queste ovali fu dato infatti il modo di ottenere l'equazione della C_4 attuale particularizzando le costanti che entrano nelle equazione di una Cassinoide generica (basta fare $k = a$ (N. 32)). Tale costante k riceve allora questa notevole interpretazione geometrica: essa rappresenta la radice quadrata della metà dell'area racchiusa dalla curva. Fra le molte definizioni metriche della C_4 attuale, sono notevoli quelle che la collegano all'iperbole equilatera. Così essa può riguardarsi come podaria, rispetto a una tale iperbole, del centro della iperbole stessa. È per questo che la lemniscata attuale si chiama anche lemniscata iperbolica. Tralasciamo poi le molte proprietà spettanti alla curva ma aventi carattere infinitesimale, perchè esorbitano dal nostro campo.

38. *Quartiche che sono contemporaneamente bicuspidali e nodali (lumaca di Pascal)*. — Se una quartica possiede due cuspidi e un nodo risulta dalla tabella del N. 1 che possiede una bitangente e due flessi: la classe è uguale a 4. Si può dunque dire che le caratteristiche plückeriane duali

(1) BASSET. *Quart Journ.* 35 (1903), p. 1.

(2) LORIA. p. 214.

siano uguali, ed è notevole che ciò accada solo in questo caso (per le curve di 4° ordine).

Il più interessante caso metrico di questa specie è costituito dalla luma di PASCAL (1) che ha le due cuspidi nei punti ciclici e il nodo a distanza finita. Essa è dunque anche una particolare quartica Cartesiana, come abbiamo già veduto al N. 33 dove l'equazione fu posta in coordinate polari nella forma

$$\rho = a + b \cos \omega.$$

Ecco le principali generazioni di questa curva :

È la podaria di un punto M rispetto a un cerchio.

Il raggio del cerchio è a : la distanza di M dal centro del cerchio è b ; essendo a e b le costanti che figurano nella equazione sopra indicata.

È la concoide di un cerchio (precisando, è la concoide di M rispetto al cerchio che ha per diametro il segmento compreso fra M e il centro del cerchio precedente di raggio b . La lunghezza costante da riportarsi è uguale ad a).

È la inversa di una conica, essendo centro d'inversione un fuoco.

È la rulletta generata da un punto connesso al piano di un cerchio il quale rotola sopra di un altro cerchio di ugual raggio.

39. *Quartiche tricuspideali* (2). — Se una quartica ha tre cuspidi essa possiede una bitangente, è priva di flessi ed ha la classe uguale a 3 (cfr. la tabella del N. 1). Dunque la C_4 attuale può riguardarsi come la duale della cubica nodale di cui sono ben note le molte proprietà. Ne segue che le proprietà proiettive della C_4 in parola, essendo le duali di quelle della cubica suddetta, presentano un scarso interesse. Quando però si tratti di casi metrici particolari, le proprietà in parola possono specializzarsi rispetto ai punti ciclici così da dare origine a teoremi e costruzioni notevoli ed eleganti. Noi ne daremo due esempi: l'ipocicloide di STEINER e la cardioide.

40. *Ipocicloide di Steiner*. La curva descritta da un punto di un cerchio mobile che rotola su di un altro fisso si chiama epicicloide, o ipocicloide secondo che il rotolamento avviene all'esterno, o all'interno del cerchio fisso. L'ipocicloide generata nel caso particolare che il raggio mobile sia la 3^a parte di quello del cerchio fisso, è l'ipocicloide tricuspide, o di STEINER dal nome del primo che la considerò.

Il punto descrivente la curva si colloca sul cerchio fisso in tre posizioni che sono le 3 cuspidi : i raggi del cerchio suddetto passanti per quei 3 punti sono le tre tangenti cuspidali relative. Da una ben conosciuta Me-

(1) LORIA. p. 178.

(2) LORIA. p. 153.

moria del CREMONA (1) togliamo le seguenti proprietà (fra le più interessanti). Anzitutto la C_4 attuale si può ritenere caratterizzata, fra le quartiche tricuspideali dall'essere bitangente alla retta all' ∞ nei punti ciclici. Tutte le tangenti della curva compongono una ∞^1 di coppie di rette perpendicolari così che i punti di contatto di due tangenti perpendicolari esistono su di una 3^a tangente. Si hanno dunque infiniti angoli retti i cui lati toccano la curva; il luogo dei vertici è un cerchio c . Le normali della curva involuppano un'altra ipocicloide di STEINER inversamente omotetica alla prima. Il centro di omotetia è il centro di figura; il rapporto di omotetia è di 3 a 1. Chiamando ortogonale un quadrangolo completo di cui i vertici sieno costituiti da quelli di un triangolo e dal suo ortocentro, si vede che esistono infiniti di questi quadrangoli circoscritti alla curva. Il luogo dei punti diagonali è il cerchio c .

Due tangenti perpendicolari della curva attuale possono riguardarsi come asintoti di un fascio di iperbole equilatera; considerando tutte le ∞^1 coppie di tangenti perpendicolari si ha una rete di iperbole equilatera; l'ipocicloide di STEINER non è altro che la Cayleyana della rete. I vertici di ogni quadrangolo ortogonale circoscritto alla curva sono i punti base di un fascio della rete.

Le 2 seguenti generazioni della curva sono legate a un trilatero che le sia circoscritto. Esea è l'involuppo degli assi di tutte le parabole iscritte in tale trilatero ed è anche l'involuppo di tutte le rette di SIMSON relative a tale trilatero.

Sono anche da segnalarsi queste altre generazioni.

È il luogo dei centri delle coniche diametrali ordinarie, o l'involuppo dei diametri, di una quartica di genere 3 bitangente alla retta all' ∞ nei punti ciclici (2).

È il luogo del polo, rispetto a un triangolo, di una retta che ruota attorno al centro del cerchio circoscritto al triangolo (3).

41. *La Cardioide* (4). È la quartica tricuspideale che ha due cuspidi nei punti ciclici e la 3^a distanza finita. Essa è dunque una particolare quartica Cartesiana (N. 33) e può anche riguardarsi come un caso particolare della Lumaca di PASCAL.

Ecco alcune generazioni della curva: ve ne ha fra di esse che sono manifestamente casi particolari di altre date per la Lumaca di PASCAL (N. 38).

(1) CREMONA. *J. f. Math.* 64 (1864) p. 104.

(2) CIANI. *Ann. Scuola norm. di Pisa* 1889.

(3) CIANI. *Rend. Istit. Lomb.* (2) 28 (1895), p. 659.

(4) LORIA. p. 153.

È l'epicicloide di un cerchio rotolante su di un altro di ugual raggio.

È la podaria di un punto di una circonferenza rispetto alla circonferenza medesima ($a = b$; N. 38).

È l'inversa di una parabola rispetto al fuoco.

L'area racchiusa dalla cardioide è 6 volte quella del cerchio di cui è concoide, ovvero $\frac{2}{3}$ di quella del cerchio di cui è podaria.

42. *Quartiche dotate di singolarità superiori* (1). Fra quelle dotate di un tac-nodo (equivalente a due punti doppi) citeremo le due seguenti: la concoide di NICOMEDE e la lemniscata di GERONO.

La concoide di Nicomede (2). È la concoide di una retta; è caratterizzata proiettivamente dall'esistenza di un tac-nodo e da un ulteriore punto doppio (il polo). Il tac-nodo è il punto all' ∞ della retta suddetta la quale è la tangente tac-nodale.

L'equazione in coordinate polari è $\rho = \frac{a}{\cos\omega} + l$. Il polo è nodo, cuspidale, o punto isolato secondo che $l \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} a$.

La lemniscata di Gerono (o curva a otto). Si può caratterizzarla dalla sua equazione, in coordinate cartesiane, che è $y^4 = y^2 - x^2$. Essa possiede un tac-nodo all' ∞ (essendo la retta all' ∞ la tangente relativa) e un nodo a distanza finita (nell'origine). Il ramo reale a distanza finita assomiglia per la forma alla lemniscata di BERNOULLI e ha quindi la forma di un otto (onde il nome) (3).

Quartica con punto triplo. — Assumendo il punto triplo come punto fondamentale (001) l'equazione della curva in coordinate omogenee può scriversi $ax_3 + b = 0$, dove a e b sono binarie in x_1x_2 dei gradi 3 e 4 rispettivamente. La equazione $a = 0$ rappresenta complessivamente le tre tangenti nel punto triplo. Se esse sono tutte distinte il punto triplo conta come tre punti doppi (nodi).

(1) SALMON. loc. cit. p. 303; cfr. anche il libro di BASSET (già citato), p. 103 e seg.

(2) LORIA, p. 136.

(3) Un altro esempio metrico notevole di quartica tac-nodale è fornito dalla « *concale* » luogo di un punto tale che il prodotto delle due distanze da un punto fisso e da una retta fissa sia costante (LORIA, p. 205). La curva ha all'infinito un tac-nodo, essendo la retta suddetta la tangente tac-nodale, ma in generale non ha altri punti doppi; per cui il genere non è zero, ma uno.

Questioni da risolvere.

1. *Sopra alcune curve invariantive.*

Fra i molti covarianti già conosciuti di C_4 non sembra che sia stato considerato il seguente luogo geometrico che pure presenta una costruzione molto semplice. Sopra ogni tangente di C_4 si costruisca il coniugato armonico del punto di contatto rispetto alle ulteriori due intersezioni della tangente con la curva: studiare l'insieme di tutti i punti così costruiti. Prima di tutto sarà bene accertare che non ogni punto del piano di C_4 appartiene al luogo. Poi sarà utile collegare un tal luogo alla considerazione delle tangenti di flesso e delle bitangenti, e forse da questo collegamento dipende il più opportuno inizio della ricerca.

Fra i contravarianti citeremo l'inviluppo delle coppie di rette che costituiscono le coniche polari dei punti della Hessiana come esempio di contravariante semplice e poco studiato (nel caso di C_4). Merita poi sicuramente studio ulteriore il contravariante Ω di CLEBSCH (N° 8). La polarità che esso individua pare collegata da vincoli semplici, quanto poco noti, con la polarità rispetto a C_4 .

2. *Studio di alcune configurazioni collegate a C_4 .*

Tralasciamo la cfz.^{ne} delle bitangenti ormai studiata e considerata sotto moltissimi aspetti. Quanto a quella dei flessi, per una C_4 generica, è ormai certo che finora fu studiata ed è poi indubitabile che lo studio fu infecondo (N° 24). Invece per C_4 particolari tale studio ha dato i suoi frutti (Numeri 21, 24, 25, 26). Il trovare qualche nuova particolare C_4 per cui altrettanto accadesse potrebbe avere uno speciale interesse.

Passando ad altre cfz.ⁿⁱ, ci sembrano degne di studio le seguenti:

a) la configurazione dei tangenziali dei flessi (chiamando tangenziale di un flesso il punto in cui la tangente relativa incontra ulteriormente la curva). Lo studio potrebbe utilmente cominciarci da quelle C_4 particolari nelle quali (come dianzi abbiamo detto) la cfz.^{ne} dei flessi fosse già stata riconosciuta dotata di belle ed interessanti proprietà.

b) La configurazione dei 21 punti doppi e delle 24 cuspidi della Steineriana, quella dei relativi punti corrispondenti della Hessiana, quella delle 21 tangenti quadruple della Cayleyana ecc. (N° 7 e 8).

c) La configurazione dei punti sestatici (N° 36).

3. *Sopra la polarità fra coniche-inviluppo e coniche-luogo.*

Ogni conica del piano di C_4 , considerata come inviluppo, individua la propria conica polare; considerata invece come luogo, individua la propria conica antipolare (N° 4).

Può darsi che polare e antipolare di una stessa conica coincidano?

Esisteranno particolari C_4 per cui ciò accada, per tutte le coniche del piano, ovvero per una infinità d'ordine inferiore a 5?

Ancora: Può una conica coincidere essa stessa con la propria polare? Esigere una tale coincidenza significa particolarizzare C_4 ? E in che modo? Se le due questioni ammettono soluzioni, ne consegue subito la opportunità dello studio delle configurazioni nascenti dalle coniche aventi i requisiti richiesti.

4. *Intorno al metodo di Hesse.*

Nel metodo di HESSE (N° 13), per lo studio delle bitangenti, si pone in relazione una figura stereometrica con una figura piana, e dalle proprietà della 1^a si deducono proprietà della 2^a. Si potrebbe fare il contrario. Dedurre cioè dalle proprietà già conosciute della quartica piana, proprietà nuove della sestica gobba (di genere tre) che con la quartica piana è in corrispondenza biunivoca (secondo la costruzione di HESSE).

5. *Una estensione inerente alla quartica di Klein.*

La quartica di KLEIN (N° 21) si può ritenere caratterizzata nel modo seguente: sia A un flesso e B il suo tangenziale; B sia di nuovo un flesso e C il relativo tangenziale, e finalmente C sia un 3° flesso che abbia per tangenziale A . In tal guisa ABC è un triangolo i cui vertici sono flessi e i lati le relative tangenti di flesso; l'equazione della curva riferita a tale triangolo può porsi sotto la forma

$$x_1^3x_2 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1 = 0.$$

Dopo di che esistono, in conseguenza, 7 altri triangoli come ABC .

Come questi fatti geometrici possono estendersi? Chiamiamo, per brevità, *catena di flessi* una tal successione di flessi $ABC\dots MN$ così che ciascuno sia tangenziale del precedente e l'ultimo del 1° (B tangenziale di A , C di B , ecc... N di M e A di N) e diciamo *ordine* della catena il numero dei flessi che la compongono. L'ordine minimo possibile è 3; il massimo sembrerebbe 24. Ebbene: la quartica di KLEIN porge l'unico esempio conosciuto finora di « *catena di flessi* ». Essa possiede 8 catene di 3° ordine ciascuna e basta che ne esista una perchè in conseguenza ne esistono altre 7. Si domanda dunque: Esisteranno altre quartiche dotate di catene di flessi d'ordine superiore a 3? Di quale ordine sono tali catene? L'esistenza di una catena d'ordine n , non trarrà sempre seco l'esistenza di altre catene? E di qual'ordine? E in qual numero?

6. *Sopra le quartiche razionali.*

Per intendere bene la questione che intendiamo sottoporre al giudizio del lettore, cominciamo dal considerare, non una quartica razionale, ma una qualsiasi C_4 di genere qualunque. Sia r una retta generica del piano di C_4 secante la curva nella quaterna di punti $ABCD$. La considerazione del

birapporto $(ABCD)$ sulla r conduce a due contravarianti ben conosciuti a seconda che $(ABCD)$ è una quaterna armonica, o equianarmonica. Nel 1° caso la classe dell'inviluppo è 6, nel 2° è 4. Se la C_4 si rappresenta con

$$a_x^4 = b_x^4 = c_x^4 = 0$$

le equazioni relative sono rispettivamente

$$(abu)^2(bcu)(acu)^2 = 0, (abu)^4 = 0$$

[indicate brevemente con $P = 0, Q = 0$ (cfr. il N. 8)].

Sia ora la C_4 razionale e si ricorra alla sua rappresentazione parametrica; indichiamo con m, n, p, q i valori da attribuirsi al parametro per ottenere rispettivamente i punti A, B, C, D . Ebbene, alla nozione di birapporto $(ABCD)$ sulla r , si aggiunge ora una nuova nozione (che prima non aveva significato), quella cioè del birapporto $(mnpq)$, o se si vuole di $(ABCD)$ sulla C_4 . Si presentano dunque due nuovi contravarianti ossia l'inviluppo delle rette r per cui $(mnpq)$ è armonico e quello delle rette r per cui $(mnpq)$ è equianarmonico. Ricorrendo alla rappresentazione parametrica di C_4 , si vede facilmente che il 1° è di 3ª classe e il 2° è di 2ª (ossia è una conica). *Essi sono dunque distinti da $P = 0, Q = 0$* (il dubbio che $P = 0, Q = 0$ sieno curve doppie si toglie subito). Questo fatto non è stato forse finora avvertito e in ogni modo non appare sfruttato abbastanza, quando si pensi ai legami geometrici (probabilmente assai interessanti) che collegano fra di loro questi quattro inviluppi e tutti con la C_4 fondamentale.

7. *Sopra la quartica dotata di due nodi e una cuspid.*

Fra i molti esempi metrici citati non ve ne è alcuno di quartica dotata di due nodi e una cuspid (l'unico caso in cui la classe è 5). Il trovare un tale esempio, con particolare posizione degli elementi singolari rispetto ai punti ciclici, potrebbe condurre forse a proprietà metriche notevoli. Nè sarebbe inutile considerare anche il caso proiettivo, anzi converrebbe probabilmente cominciare da questo. Lo studio sarebbe assai facilitato dalla razionalità della curva e da una disposizione opportuna del triangolo di riferimento (rispetto agli elementi singolari della curva medesima).

I N D I C E

PARTE PRIMA (quartiche in generale).

CAPITOLO I. — *Classificazione, forma e generazione.*

N. 1 e 2. — *Classificazione e forma.*

» 3. — *Generazione.*

- CAPITOLO II. — *La teoria della polarità*
 N. 4. — Curve polari.
 » 5. — Poligoni coningati.
 » 6. — Polilateri polari.
- CAPITOLO III. — *Enti geometrici invariantivi.*
 N. 7. — Covarianti.
 » 8. — Contravarianti.
 » 9. — Invarianti.
- CAPITOLO IV. — *I sistemi di coniche e di cubiche involuppati.*
 N. 10. — Sistemi di coniche quadritangenti.
 » 11. — Sistemi di cubiche sei-tangenti.
- CAPITOLO V. — *La configurazione delle bitangenti.*
 N. 12. — Metodo di STEINER-PLÜCKER.
 » 13. — Metodo di HESSE.
 » 14. — Metodo di ARONHOLD.
 » 15. — Metodo di GEISER.
 » 16. — Metodo di NOETHER-DE PAOLIS.
 » 17. — Metodo delle caratteristiche
 » 18. — Metodo suggerito dalla configurazione di KUMMER.

PARTE SECONDA (quartiche particolari).

- CAPITOLO VI. — *Le quartiche autoproiettive.*
 N. 19 e 20. — Collineazioni e gruppi di collineazioni dotati di quartica invariante irriduttibile.
 N. 21. — Quartica di KLEIN.
 » 22. — Quartica di DYCK.
- CAPITOLO VII. — *Altre quartiche notevoli di genere tre.*
 N. 23. — Quartiche di CLEBSCH e di LÜROTH.
 » 24. — La quartica di CAPORALI.
 » 25. — La rete sizigetica di quartiche.
 » 26. — La quartica di CAPORALI specializzata.
 » 27. — La quartica desmica, o di HUMBERT.
- CAPITOLO VIII. — *Le quartiche di genere due (iperellittiche).*
 N. 28. Considerazioni generali sulle quartiche di genere due. Esempi e casi particolari.
 » 29. — La conica di BERTINI.
- CAPITOLO IX. — *Le quartiche di genere uno (ellittiche).*
 N. 30. — Considerazioni generali sulle quartiche di genere uno.
 » 31. — Quartiche bicircolari generiche.
 » 32. — Quartiche bicircolari speciali (spiriche di PERSÉO, ovali di CASSINI).
 » 33. Quartiche Cartesiane.
- CAPITOLO X. — *Le quartiche di genere zero (razionali).*
 N. 34. — Considerazioni generali sulle quartiche di genere zero.
 » 35. — Quartiche trinodali.
 » 36 e 37. — Quartiche trinodali inflessionali (Lemniscata proiettiva e Lemniscata di BERNOULLI).
 » 38. — Quartiche bicuspidali nodali (Lumaca di PASCAL).
 » 39, 40, 41. — Quartiche tricuspideali (Ipocicloide di STEINER e cardioide).
 » 42. — Quartiche dotate di singolarità superiori (Lemniscata di GERONO, conoide di NICOMEDE, quartica con un punto triplo).
- Questioni da risolvere.
-

SOPRA LE COLLINEAZIONI SPAZIALI

[Periodico di Mat: 1910]

1. Lo scopo essenziale di questo modesto scritto è di esporre i casi più notevoli della collineazione spaziale deducendoli, con metodo semplice e uniforme dalle due proposizioni fondamentali, che reggono tutta la teoria e che ora qui ricordo esplicitamente ammettendole come dimostrate.

La prima è la seguente: « esiste una ed una sola collineazione spaziale che fa corrispondere ai cinque punti A, B, C, D, E , ordinatamente i cinque punti A', B', C', D', E' , Unica condizione restrittiva è che 4 qualunque dei 5 punti A, B, C, D, E non siano in un piano e che altrettanto possa dirsi dei 5 corrispondenti A', B', C', D', E' .

La seconda è questa: se una collineazione possiede 5 punti uniti di cui 4 qualunque non esistenti in un piano, tutti i punti dello spazio sono uniti per tale collineazione (il che si suole esprimere, più brevemente, dicendo che la collineazione è identica).

Ebbene, in base a queste due proposizioni, io riguarderò la collineazione definita dai 4 punti uniti $ABCD$ (non esistenti in un piano) e da una ulteriore coppia di punti corrispondenti distinti MM' , in guisa dunque che la collineazione resulti individuata facendo corrispondere ai 5 punti.

A, B, C, D, M

ordinatamente i 5 punti

A, B, C, D, M' ,

e mi proporrò di considerare, separatamente, tutti i casi possibili che può presentare la posizione della retta MM' riguardo al tetraedro $ABCD$ (che chiamerò tetraedro fondamentale). — Quando si tenga conto della restrizione imposta alla prima delle proposizioni, dianzi ricordate, si vede che i casi in parola si riducono ai seguenti:

a) La retta MM' non incontra alcuno spigolo del tetraedro $ABCD$.

b) La retta MM' incontra uno ed un solo spigolo del tetraedro suddetto.

c) La retta MM' si appoggia a due spigoli opposti senza passare per alcun vertice.

d) La retta MM' passa per un vertice del tetraedro (e non incontra altri spigoli all'infuori di quelli che concorrono in tal vertice).

Corrispondentemente si vedrà che saranno attuati i casi più notevoli rispettivamente:

- a)* della collineazione generica,
- b)* della collineazione assiale,
- c)* della collineazione biassiale,
- d)* della omologia solida.

Vengono con ciò ad essere esclusi altri casi della collineazione spaziale: ciò non è dubbio (ad es. si escludono, in tal modo, quelli per i quali i punti $ABCD$ non siano tutti reali, e quelli nei quali i detti punti non sono tutti distinti). Ma è altrettanto non dubbio che i casi esclusi presentano minore interesse, specialmente dal punto di vista degli invarianti assoluti della collineazione, la nozione dei quali (nei casi esclusi) o svanisce, o si presenta in forma più complicata.

Chiudo queste poche parole d'introduzione pregando il cortese lettore a non cercare nelle pagine seguenti più di quello che, di proposito, vi è espresso!... Dunque: niuna novità nelle proposizioni: se qualche novità vi può essere è soltanto nella uniformità del metodo di esposizione, che è quello recentemente seguito nelle mie lezioni universitarie di Geometria proiettiva.

2. *Collineazioni del tipo generico.* — Cominciamo dal considerare il caso (*a*) del n. precedente. La collineazione sia dunque determinata dal tetraedro fondamentale $ABCD$, esigendo che i suoi vertici sieno punti uniti, e dalla coppia di punti corrispondenti distinti MM' , dati in guisa che la retta MM' non incontri alcuno spigolo del tetraedro suddetto. Dico che non esistono altri punti uniti all'infuori di A, B, C, D . Infatti: se ne esistesse un altro, esso dovrebbe giacere in una faccia, almeno, del tetraedro fondamentale altrimenti (per la 2^a proposizione del numero precedente) la collineazione sarebbe identica e quindi M ed M' dovrebbero coincidere. Ebbene, sia dunque unito un punto E della faccia ABC . Se E non appartiene a nessuna delle costole di $ABCD$ (situate in ABC); nel piano ABC abbiamo i 4 punti uniti $ABCE$ di cui tre non sono in linea retta: dunque tutti i punti di tale piano sono uniti: ne segue che è unita ogni retta per D , perchè contiene due punti uniti, cioè D è il punto in cui essa incontra la faccia ABC : dunque coincidono le due rette DM, DM' , ossia la retta MM' passa per D il che è contro la ipotesi.

Se poi E esiste sullo spigolo AB , tutti punti di AB sono uniti e quindi sono uniti tutti i piani per CD , perchè ciascuno può riguardarsi come individuato da C, D e dal suo punto d'intersezione con AB : dunque coincidono i piani che da CD proiettano M ed M' , ossia la retta MM' si appoggia allo spigolo CD il che è ancora contro la ipotesi. Dualmente si vede che non esistono altri piani uniti all'infuori delle facce del tetraedro $ABCD$. E infine se una retta è unita, è anche unito ogni suo punto d'incontro con le faccie suddette e quindi essa è uno spigolo del tetraedro medesimo. Dunque:

« *La collineazione attuale non possiede altri punti, rette e piani uniti, all'infuori dei vertici, spigoli e facce del tetraedro fondamentale* ».

Noi diremo che questa collineazione appartiene al « *tipo generico* ».

3. Sieno MM', NN' due coppie qualunque di punti corrispondenti. Le due quaterne di piani che dallo spigolo AB proiettano le due quaterne di punti $CDMN, CDM'N'$ si corrispondono e quindi sono proiettive: tagliandole con la retta CD troveremo su di essa due quaterne proiettive di punti. Indicando dunque con R, R', S, S' le intersezioni di CD , ordinatamente, con i piani che da AB proiettano M, M', N, N' avremo:

$$CDRS \overline{\wedge} CDR'S'$$

ovvero

$$(CDRS) = (CDR'S')$$

che si può anche scrivere:

$$(CDR'R') = (CDSS') = \text{costante.}$$

Si ha dunque il teorema:

« *Se da uno spigolo AB del tetraedro fondamentale $ABCD$, si proiettano due punti corrispondenti qualunque MM' , sullo spigolo opposto CD , è costante il valore del birapporto della quaterna formata ordinatamente da C, D e dalle due proiezioni suddette* ». Il valore di questa costante si chiamerà « *invariante assoluto* » relativo allo spigolo CD . (Si esclude il valore uno, altrimenti tutti i punti di CD sono uniti e, ovviamente, si escludono i valori zero e infinito).

4. Si hanno così sei invarianti assoluti (tanti quanti gli spigoli di $ABCD$), ma non sono tutti indipendenti. Così ad es., se sono dati tre di essi inerenti a tre spigoli concorrenti in uno stesso vertice di $ABCD$, i rimanenti sono determinati perchè rimane in tal modo individuata la collineazione. Ciò esprime il seguente teorema (che ora dimostreremo):

« *La collineazione attuale è determinata quando sia dato il tetraedro fondamentale e i tre invarianti assoluti inerenti a tre spigoli concorrenti in un medesimo vertice* ».

Per precisare le cose stabiliremo di leggere le quaterne inerenti agli invarianti assoluti suddetti, cominciando dal vertice comune. Ciò

premessi, sieno $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ i tre invarianti assoluti inerenti agli spigoli AB, AC, AD , concorrenti in A . Allora, per trovare il corrispondente di un qualsiasi dato punto M , proiettiamolo da CD, DB, BC successivamente sopra gli spigoli opposti AB, AC, AD in Q, R, S , e dopo determiniamo, sopra tali spigoli, tre punti Q', R', S' , in guisa che si abbia:

$$(ABQQ') = \lambda_1; (ACRR') = \lambda_2; (ADSS') = \lambda_3.$$

Poi proiettiamo i punti così trovati Q', R', S' rispettivamente da CD, DB, BC : il punto M' d'intersezione dei tre piani che si ottengono sarà il punto cercato corrispondente a M .

« *I tre invarianti assoluti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ debbono essere tutti disuguali* » Infatti, se due fossero uguali, ad es. $\lambda_1 = \lambda_2$ seguirebbe

$$ABQQ' \overline{\wedge} ACRR'$$

e quindi le tre rette $BC, QR, Q'R'$ s'incontrerebbero in un medesimo punto che sarebbe unito: onde sulla BC avremmo un 3° punto unito il che è impossibile (n. 2).

5. La collineazione che ha lo stesso tetraedro fondamentale unito $ABCD$ e i cui tre invarianti assoluti inerenti al vertice A sono gl'inversi di $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, si chiama la collineazione inversa di quella data. Se la collineazione data si indica con Ω , la sua inversa si suole indicare col simbolo Ω^{-1} . La ragione del nome e del simbolo sta in questo: se a un punto M qualunque si applica la collineazione Ω pervenendo così a M' , applicando dopo la collineazione Ω^{-1} a M' si ritorna in M . Infatti chiamiamo M'' il corrispondente di M' secondo la Ω^{-1} , e con Q'', R'', S'' le proiezioni di M'' , ordinatamente da CD, DB, BC , sugli spigoli opposti: avremo dunque:

$$(ABQ'Q'') = \frac{1}{\lambda_1}; (ACR'R'') = \frac{1}{\lambda_2}; (ADS'S'') = \frac{1}{\lambda_3}$$

cioè

$$(ABQ''Q') = \lambda_1; (ACR''R') = \lambda_2; (ADS''S') = \lambda_3$$

e per conseguenza (n. 4)

$$ABQQ' \overline{\wedge} ABQ''Q'; ACRR' \overline{\wedge} ACR''R' \\ ADS'S' \overline{\wedge} ADS''S'$$

cioè Q'', R'', S'' coincidono ordinatamente con Q, R, S , e quindi anche M'' con M' . Questo dimostra l'affermazione fatta dianzi.

« *Una collineazione del tipo generico non può mai coincidere con la propria inversa* ». Infatti ciò richiederebbe $\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_1}, \lambda_2 = \frac{1}{\lambda_2}, \lambda_3 = \frac{1}{\lambda_3}$ e quindi: $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \lambda_3^2 = 1$, ossia gli invarianti assoluti non potrebbero essere disuguali il che è impossibile (n. 4).

Il piano all'infinito individua due piani che gli corrispondono nella

collineazione diretta e nella inversa. *Essi si chiamano i piani limiti di entrambe.*

6. *Collineazioni del tipo assiale.* Passiamo ora a considerare il caso (b) del N. 1. Cioè la retta MM' incontra uno ed uno solo spigolo AB del tetraedro fondamentale $ABCD$. Segue subito che è unito ogni piano per AB giacchè sono uniti i tre piani ABC , ABD , $ABMM'$, ma non ogni punto di AB è unito, altrimenti sarebbe unito ogni piano per CD (come individuato da CD e dalla sua intersezione con AB), e quindi coinciderebbero i piani CDM , CDM' , ossia la retta MM' incontrerebbe anche CD il che è contro la ipotesi. Dunque, mentre la retta AB è involuppo di piani uniti essa non è luogo di punti uniti: essa contiene i due soli punti A , B e non altri. Ne segue che ogni punto di CD è unito, perchè comune alla retta unita CD e al piano unito che lo proietta da AB . Dunque CD è invece luogo di punti uniti, ma non involuppo di piani uniti e due soli piani per CD sono uniti, cioè: CDA e CDB . Non vi sono altri punti uniti, perchè, se ne esistesse un altro, indicandolo con E , si vedrebbe che E dovrebbe essere esterno ad AB e allora sarebbe sempre possibile aggiungere ai tre punti A , B , E due punti della retta CD , così da ottenere cinque punti uniti (di cui 4 qualunque non esistono in un piano) e quindi la collineazione sarebbe identica (N. 1), il che è impossibile perchè M ed M' sono due punti distinti. Dualmente si vede che non vi sono altri piani uniti all'infuori di quelli descritti. Noi diremo che la collineazione attuale appartiene « al tipo assiale ». Dunque si ha:

« In una collineazione del tipo assiale sono piani uniti tutti quelli di una retta r e altri due situati su di una retta s sghemba con r . Dualmente: sono piani uniti tutti quelli che passano per s e altri due: quelli che da r proiettano i due punti uniti giacenti sopra s ».

Esiste dunque un asse luogo di punti uniti, ma non involuppo di piani uniti e un altro asse (sghembo col primo), che è invece involuppo di piani uniti, ma non luogo di punti uniti. Chiameremo il primo: l'asse di punti uniti; e il secondo l'asse di piani uniti. Non esistono altri punti nè piani uniti all'infuori di quelli descritti.

7. Se M è un punto qualunque, il piano che passa per M e per l'asse di piani uniti, è unito e quindi contiene il punto M' corrispondente di M . Quindi:

« Tutte le rette che congiungono due punti corrispondenti si appoggiano all'asse di piani uniti ».

Dualmente: tutte le rette intersezioni di due piani corrispondenti si appoggiano all'asse di punti uniti.

Ora una retta unita è contemporaneamente congiungente di punti

corrispondenti e intersezione di piani corrispondenti; per conseguenza si può dire che :

« Nella collineazione attuale sono rette unite i due assi e inoltre tutte quelle dei due fasci che si ottengono proiettando l'asse di punti uniti dai due punti uniti che giacciono sull'asse di piani uniti ».

Non esistono altre rette unite.

8. La considerazione dei due fasci precedenti conduce subito a quest'altro teorema :

« Una collineazione del tipo assiale possiede due e due sole omologie piane subordinate : esse hanno in comune l'asse, che è l'asse di punti uniti della collineazione : i centri sono i due punti uniti dell'asse di piani uniti ».

Gli invarianti assoluti di queste due omologie piane si chiameranno gli invarianti assoluti della collineazione. Fissiamo che la quaterna che individua l'invariante assoluto di una omologia piana, sia ordinata nel modo seguente: un punto qualunque, il suo corrispondente, il centro d'omologia, il punto d'incontro della sede della quaterna con l'asse di omologia; allora si può enunciare una proposizione del tutto simile a quella del N. 4, cioè:

« I due invarianti assoluti di una collineazione del tipo assiale debbono essere disuguali ».

Infatti siano A, B i centri delle due omologie subordinate: conduciamo per AB un piano a incontrare in R l'asse di punti uniti: se PP' sono due punti corrispondenti sopra AR e QQ' altri due punti corrispondenti sopra BR (secondo le due omologie suddette); i due invarianti in parola sono i due birapporti

$$(PP'AR), (QQ'BR).$$

Se essi fossero uguali ne seguirebbe

$$PP'AR \overline{\wedge} QQ'BR$$

e quindi le tre rette $AB, PQ, P'Q'$ dovrebbero passare per uno stesso punto che evidentemente sarebbe unito per la nostra collineazione, e quindi sull'asse AB di piani uniti esisterebbero tre punti uniti il che è impossibile (N. 6).

9. « Una collineazione del tipo assiale è determinata dalle sue due omologie subordinate purchè esse sieno sottoposte alle seguenti condizioni :

« Sieno situate in piani differenti, ma abbiano l'asse in comune (e sia, naturalmente, la retta intersezione dei due piani);

« i centri non sieno incidenti al comune asse suddetto, e gl'invarianti assoluti sieno disuguali ».

Quando queste condizioni sieno adempiute l'asse di punti uniti della

collineazione risultante è l'asse di omologia suddetto, e i due ulteriori punti uniti della collineazione sono i relativi centri di omologia. Indichiamo infatti con A e B i centri e con r l'asse delle due omologie (in posizione sghemba con la retta AB). Sia M un punto qualsiasi esterno alla r e alla AB , e indichiamo con R il punto ove il piano ABM incontra la r : proiettiamo poi M da A e da B rispettivamente sopra BR e AR nei punti Q e P . Sieno Q' e P' i corrispondenti di Q e P nelle due omologie date: essi giacciono rispettivamente sopra BR e AR , così che le rette AQ' , BP' esistono nel piano ABR e quindi s'incontrano in un punto che indicheremo con M' . Prendiamo finalmente sopra r due punti C, D diversi da r e consideriamo la collineazione che ha i quattro punti uniti A, B, C, D e in cui M, M' sono punti corrispondenti. Essa è del tipo assiale perchè la retta MM' incontra il solo spigolo AB del tetraedro unito $ABCD$ (N. 6): manifestamente le omologie date sono ad essa subordinate, non solo ma si può anche dire che la costruzione precedente serve a trovare il corrispondente M' di un punto generico M .

Il teorema ora dimostrato si esprime affermando che:

« Una collineazione del tipo assiale è determinata quando sieno dati: l'asse di punti uniti, i due punti uniti ulteriori (su di una retta sghemba con l'asse in parola) e i valori dei due invarianti assoluti ».

10. La collineazione assiale che ha gli stessi punti uniti di quella data e i cui invarianti assoluti sono inversi rispettivamente di quelli della data (in guisa dunque che le due omologie piane subordinate dell'una, sieno inverse di quelle dell'altra) si chiama la *collineazione inversa* della data.

Indicando quella data col simbolo Ω , ci serviremo del simbolo Ω^{-1} per l'inversa. La ragione del nome e del simbolo è identica a quella già addotta, in uguale occasione, al n. 5. Infatti la costruzione del numero precedente dimostra che se Ω trasporta M in M' , la Ω^{-1} trasporta M' in M .

« Una collineazione del tipo assiale non può mai coincidere con la propria inversa ».

Indicando infatti con λ_1, λ_2 gl'invarianti assoluti di Ω , quelli di Ω^{-1} saranno $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}$ e quindi se Ω e Ω^{-1} coincidessero dovremmo avere $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 1$, ma il valore uno va escluso altrimenti la corrispondente omologia sarebbe una identità: dunque $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, cioè gl'invarianti assoluti dovrebbero essere uguali, ciò che è impossibile (n. 8).

I due piani che corrispondono al piano all'infinito secondo la Ω e la Ω^{-1} , si chiamano i *piani limiti* di Ω o di Ω^{-1} . Siccome due piani corrispondenti si tagliano secondo una retta che si appoggia all'asse di punti uniti (n. 7), così ne viene che:

« *I piani limiti di una collineazione del tipo assiale sono paralleli all'asse di punti uniti* ».

11. *Collineazioni del tipo biassiale.* — Passiamo adesso al caso (c) del n. 1. Cioè la retta MM' si appoggia ai due spigoli opposti AB , CD del tetraedro fondamentale $ABCD$. Il ragionamento fatto al n. 6 è ora simmetrico rispetto a entrambi gli spigoli AB , CD : per ciascuno passano 3 piani uniti e quindi tutti sono uniti, da cui segue immediatamente che l'uno e l'altro sono anche luogo di punti uniti. Si dice allora che la collineazione appartiene al tipo biassiale.

Dunque: « *Una collineazione del tipo biassale possiede due assi sghembi, ciascuno dei quali è contemporaneamente luogo di punti uniti e involuppo di piani uniti* ».

Non esistono altri punti uniti. Infatti se ne esistesse uno sarebbe possibile considerare, insieme ad esso, altri 4 punti uniti (due sopra ciascun asse) in guisa da avere 5 punti uniti di cui 4 non esistenti in un piano: la collineazione sarebbe identica (n. 1) mentre M ed M' sono due punti distinti per ipotesi. Dualmente si vede che non esistono altri piani uniti.

12. Conduciamo per un punto qualunque P dello spazio la retta appoggiata ai due assi r ed s della nostra collineazione: siccome i due punti di appoggio sono uniti, così la retta in parola è unita e quindi contiene il corrispondente P' di P .

Tenendo presente anche la considerazione duale si può dire che:

« *In una collineazione biassale ogni retta che congiunge due punti corrispondenti è anche retta d'incontro di piani corrispondenti e si appoggia a entrambi gli assi della collineazione* ».

D'altra parte ogni retta unita, che non sia luogo di punti uniti, congiunge punti corrispondenti ed è intersezione di piani corrispondenti. Quindi: *Sono rette unite gli assi e tutte quelle che incontrano entrambi gli assi.* Non esistono altre rette unite.

13. Sieno PP' due punti corrispondenti qualunque e H, K , i punti in cui la retta PP' incontra gli assi r, s della collineazione: dico che il birapporto $(PP'HK)$ è costante al variare della coppia PP' . L'affermazione è evidente se la retta HK rimane fissa e P, P' , variano conseguentemente su di essa, giacchè allora viene a subordinarsi, sopra tale retta, una proiettività rettilinea di cui H e K sono punti uniti e PP' due punti corrispondenti qualunque. Consideriamo poi un'altra coppia di punti corrispondenti Q, Q' , su di una retta diversa dalla HK e siano E, F , i punti in cui la QQ' si appoggia a r, s . Tiriamo le due rette corrispondenti $PQ, P'Q'$, e da un punto T della prima conduciamo la retta t a incontrare r ed s . Il punto T' deve esistere sulla t e d'altra parte anche

sulla $P'Q'$, quindi ne viene che la t incontra pure la $P'Q'$. Allora considerando i 4 piani che da t proiettano le quattro rette PQ , $P'Q'$, r , s , si vede subito che le due quaterne $PP'HK$, $QQ'EF$ sono proiettive (come sezioni della quaterna di piani sopra nominata). Dunque

$$(PP'HK) = (QQ'EF).$$

Resulta quindi il teorema seguente:

« In una collineazione del tipo biassiale è costante il birapporto della quaterna rettilinea formata ordinatamente da un punto qualunque, dal suo corrispondente e dai due punti nei quali la retta che congiunge i punti corrispondenti suddetti si appoggia agli assi della collineazione ».

Il valore di questo birapporto si chiama « invariante assoluto » della collineazione. È interessante il caso in cui tale valore è l'unità negativa, per una ragione che vedremo nel prossimo numero. Quando ciò accade la quaterna in parola è armonica e la collineazione prende allora il nome di involuzione gobba.

In ogni caso è manifesto che :

« La collineazione biassiale è individuata quando siano dati gli assi e l'invariante assoluto ».

Infatti se r ed s sono gli assi dati (sghembi) e λ è l'invariante assoluto, per trovare il corrispondente M' di un punto qualsiasi M basterà tirare da M la retta appoggiata a r e s : se H e K sono i punti di appoggio, dovremo dopo trovare, su tale retta, il punto M' tale che sia

$$(MM'HK) = \lambda$$

e la costruzione sarà così ottenuta.

14. Indichiamo col simbolo Ω la nostra collineazione e col simbolo Ω^{-1} quella che ha gli stessi assi di Ω , ma il cui invariante assoluto è inverso di quello di Ω . Chiameremo Ω^{-1} la inversa di Ω . La ragione del nome e del simbolo è la stessa di quella già addotta in occasioni analoghe nei numeri 5 e 10.

Se cioè al punto M corrisponde M' nella Ω , si dimostra facilmente che a M' corrisponde M nella Ω^{-1} . Infatti indicando con M'' il corrispondente di M' nella Ω^{-1} , osserveremo che i tre punti M , M' , M'' sono in linea retta (perchè Ω e Ω^{-1} hanno in comune gli assi). Indicando con H e K i punti in cui tale retta incontra gli assi r , s , avremo:

$$(MM'HK) = \lambda, (M'M''HK) = \frac{1}{\lambda}$$

e quindi

$$(M''M'HK) = \lambda$$

cioè:

$$MM'HK \overline{\wedge} M''M'HK$$

dunque M ed M'' coincidono, il che prova l'affermazione fatta.

Può una collineazione biassiale coincidere con la propria inversa? Perchè ciò accada bisogna che sia $\lambda = \frac{1}{\lambda}$, cioè $\lambda = \pm 1$, ma $\lambda = 1$ si esclude altrimenti Ω è identica, quindi $\lambda = -1$.

Dunque: l'unica collineazione biassiale che coincida con la propria inversa è la involuzione gobba » (N. 13).

15. I piani corrispondenti al piano all'infinito, nella Ω e nella Ω^{-1} , si chiamano i *piani limiti* dell'una, o dell'altra. Siccome due piani corrispondenti si tagliano secondo una retta appoggiata a entrambi gli assi, così si può dire che

« I piani limiti di una collineazione biassiale sono paralleli a entrambi gli assi della collineazione ».

Si può anche aggiungere che :

« La distanza fra un piano limite e uno degli assi è uguale alla distanza fra l'altro piano limite e l'altro asse ». Infatti, sulla retta che misura la minima distanza fra gli assi, consideriamo i corrispondenti R' e R'' del punto R_∞ di tale retta (nella Ω e nella Ω^{-1}) e osserviamo che avremo (indicando con H e K i punti in cui la retta in parola si appoggia agli assi):

$$(R_\infty R'HK) = \frac{1}{(R_\infty R''HK)}$$

cioè :

$$\frac{\overline{KR'}}{\overline{HR'}} = \frac{\overline{HR''}}{\overline{KR''}}$$

ovvero :

$$\frac{\overline{KR'} - \overline{HR'}}{\overline{HR'}} = \frac{\overline{HR''} - \overline{KR''}}{\overline{KR''}}$$

ed anche:

$$\frac{\overline{KH}}{\overline{HR'}} = \frac{\overline{HK}}{\overline{KR''}}$$

e quindi, in valore assoluto, $\overline{HR'} = \overline{KR''}$, $\overline{KR'} = \overline{HR''}$, il che prova l'asserto.

16. *Omologie solide.* Finalmente non manca che l'esame del caso (d) del N. 1: cioè la retta MM' passa per un vertice A del tetraedro fondamentale e i punti M , M' non esistono in alcuna faccia del tetraedro medesimo. Segue subito che sono uniti tutti i punti del piano BCD (perchè in esso sono uniti B , C , D e il punto d'incontro colla retta che contiene i tre punti A , M , M').

La collineazione attuale si chiama « una omologia solida », A è « il centro di omologia », il piano BCD è « il piano di omologia ». Dunque :

« In una omologia solida sono punti uniti: il centro, tutti i punti del piano di omologia e non altri ». Se esistesse infatti un altro punto P sarebbe possibile scegliere, nel piano di omologia, tre punti in guisa che insieme a P e al centro di omologia si avessero cinque punti uniti, di cui 4 non esistenti in un piano, e la collineazione dovrebbe essere identica (N. 1), il che è impossibile perchè M , ed M' sono due punti distinti, per ipotesi.

« Dualmente si vede che i soli piani uniti sono: il piano di omologia e tutti quelli passanti per il centro di omologia ».

17. Ogni retta passante per il centro A è unita perchè congiunge due punti uniti (il punto A e la intersezione sua col piano di omologia). Se dunque N ed N' sono due punti corrispondenti qualunque le rette AN , AN' debbono coincidere, cioè i tre punti A , N , N' sono in linea retta. Quindi :

« In una omologia solida due punti corrispondenti sono sempre allineati col centro e, dualmente, due piani corrispondenti si tagliano sempre in una retta esistente sul piano di omologia ».

Il punto d'incontro di una retta col piano di omologia è unito, ed è anche unito il piano che la proietta dal centro ; dunque si ha che :

« Due rette corrispondenti si tagliano sul piano di omologia ed esistono in un piano passante per il centro di omologia ».

Una retta unita, se non è luogo di punti uniti, congiunge punti corrispondenti e quindi ne segue :

« Sono rette unite (e non altre) quelle del piano di omologia e quelle passanti per il centro di omologia ».

18. Sieno M , M' due punti corrispondenti qualunque: sulla retta che li congiunge consideriamo il centro A di omologia e il punto H d'incontro col piano di omologia: dico che il birapporto $(MM'AH)$ non varia al variare della coppia MM' . Il teorema è evidente se la coppia MM' varia sulla retta AH , perchè, su tale retta, viene a individuarsi una proiettività rettilinea subordinata in cui A , H sono punti uniti. Se poi la retta che congiunge altri due punti corrispondenti NN' è diversa dalla MM' si può osservare che le due rette MN , $M'N'$, essendo corrispondenti, si taglieranno in un punto S del piano di omologia, per cui indicando con K il punto d'incontro di tale piano con NN' ne seguirà che le due quaterne

$$MM'AH, NN'AK$$

saranno prospettive da S e quindi

$$(MM'AH) = (NN'AK)$$

il che prova l'asserto. Si può dunque enunciare il seguente teorema:

« In una omologia solida è costante il valore del birapporto della quaterna rettilinea costituita ordinatamente: da un punto, dal suo corrispondente, dal centro e dal punto d'incontro della sede della quaterna, col piano di omologia ».

Il valore di questa costante si chiama « *invariante assoluto* » della omologia. È interessante, come vedremo, il caso in cui questo valore sia l'unità negativa e quindi la quaterna suddetta sia armonica. Allora la omologia prende il nome di *omologia armonica*.

19. Una omologia solida è determinata quando sia dato il centro A , il piano d'omologia π e una coppia di punti corrispondenti MM' allineati col centro (ed esterni a π).

Infatti (poichè noi escludiamo il caso in cui A sia incidente con π) sarà sempre possibile scegliere tre punti BCD in π , in guisa che resulti individuata la collineazione in cui A, B, C, D sono punti uniti ed M, M' corrispondenti. Siccome la retta MM' passa per A così ne segue che tale collineazione è l'omologia cercata (N. 16). Dato un punto N esterno alla retta MM' , per costruirne il corrispondente basta osservare che esso deve trovarsi sopra la AN e sulla corrispondente alla MN , la quale è subito costruita perchè passa per M' e per il punto d'incontro di MN con π . La costruzione cade se N è sulla retta MM' : ma vi si può rimediare costruendo, avanti, una coppia di punti corrispondenti esterni a tale retta e valendosi dopo di questa nuova coppia per trovare N' .

20. L'omologia è anche determinata quando sia dato il centro, il piano di omologia e il valore dell'invariante assoluto λ . Perchè se A è il centro e π il piano dato, per trovare il corrispondente di un punto qualsiasi M , basta congiungere M con A , trovare il punto H in cui tale retta incontra π e, dopo, costruire su di essa un tal punto M' , così che si abbia:

$$(MM'AH) = \lambda.$$

20. L'omologia solida che ha lo stesso centro e lo stesso piano d'omologia della data, ma il cui invariante assoluto sia inverso di quello della data, si chiama *omologia inversa*. Se quella data si indica con Ω , la inversa si indicherà con Ω^{-1} .

La ragione del nome e del simbolo è la solita (numeri 5, 10, 14). Se, cioè, nella Ω al punto M corrisponde M' , nella Ω^{-1} a M' corrisponde M . Infatti chiamando con M'' il corrispondente di M' in Ω^{-1} si osservi che M, M', M'' esistono su di una retta per A : se H è il punto in cui essa incontra il piano di omologia avremo:

$$(MM'AH) = \lambda; (M'M''AH) = \frac{1}{\lambda}$$

e quindi

$$(M''M'AH) = \lambda$$

e per conseguenza

$$MM'AH \bar{\wedge} M''M'AH$$

il che significa che M ed M'' coincidono.

Può una omologia solida coincidere con la propria inversa? Perchè ciò accada deve essere $\lambda = \frac{1}{\lambda}$, cioè $\lambda = \pm 1$, ma il segno positivo si esclude altrimenti Ω è l'identità. Dunque $\lambda = -1$, ossia (N. 18):

« *L'unica omologia solida che coincida con la propria inversa è l'omologia armonica* ».

21. I piani corrispondenti al piano all'infinito in una omologia e nella sua inversa chiamansi i *piani limiti* dell'una, o dell'altra. Siccome due piani corrispondenti si tagliano sul piano di omologia (N. 17), così ne segue facilmente che:

« *I piani limiti sono paralleli al piano di omologia* ».

Se poi si applica il ragionamento del n. 15, riferendolo alla perpendicolare tirata per il centro sul piano di omologia, si può aggiungere che:

« *La distanza fra il centro e un piano limite è uguale, in valore assoluto, alla distanza fra il piano d'omologia e l'altro piano limite* ».

22. *Coppie involutorie*. — Rimanendo sempre nel campo delle collineazioni descritte nei numeri precedenti, diremo che una coppia di punti AA' è involutoria, quando essi si corrispondono tanto nella collineazione diretta Ω , quanto nella inversa Ω^{-1} . Se tutte le coppie possibili sono involutorie allora Ω e Ω^{-1} coincidono e la collineazione prende il nome di « *involuzione spaziale* ». Riunendo i teoremi dei numeri 5, 10, 14, 20 si può dire che:

« *Le sole involuzioni spaziali sono: l'omologia armonica e l'involuzione gobba* ».

All'infuori di questo caso si può porre la seguente questione: *può una collineazione Ω possedere delle coppie involutorie senza che tutte lo siano? (senza cioè che Ω sia una involuzione spaziale?)*

Per rispondere a questa domanda cominciamo dall'osservare che se esiste una coppia involutoria AA' , ne esistono infinite: la sede comune è la retta AA' e su di essa compongono una involuzione rettilinea subordinata a Ω . Di guisa che la questione si tramuta in quest'altra: « *Quante involuzioni rettilinee possono essere contenute nella nostra collineazione Ω , senza che, per questo, Ω sia una involuzione spaziale?* »

Se si osserva che le sedi di tali involuzioni rettilinee debbono essere rette unite per Ω si vede subito che Ω non può essere omologia, nè ap-

partenere al tipo biassiale (perchè l'invariante assoluto, calcolato su tali rette unite, sarebbe l'unità negativa e quindi Ω sarebbe una involuzione).

23. Rimangono dunque da esaminare le collineazioni del tipo assiale e quelle del tipo generico. Per procedere per gradi, proviamo a esigere la esistenza di una (e una sola) involuzione rettilinea subordinata, e cerchiamo le conseguenze.

Se Ω è assiale la sede supposta non può appartenere come raggio unito ad alcuna delle due omologie piane subordinate, altrimenti la omologia relativa sarebbe armonica e Ω possederebbe infinite involuzioni rettilinee subordinate. Dunque la sede non può essere altro che l'asse dei piani uniti (n. 6). Indichiamo allora con Ω^2 la collineazione che si ottiene applicando successivamente due volte la Ω . Si vede subito che Ω^2 è biassiale ed ha per assi quelli di Ω . Riprendiamo le notazioni del n. 8 chiamando con P'' , Q'' i corrispondenti di P' , Q' secondo Ω , di guisa che P' , Q'' saranno i corrispondenti di P , Q secondo Ω^2 . Ma si ha

$$(PP'AR) = (P'P''AR) = \lambda_1$$

$$(QQ'BR) = (Q'Q''BR) = \lambda_2$$

dove λ_1 e λ_2 sono gl'invarianti assoluti di Ω . Segue

$$(PP''AR) = (PP'AR) (P'P''AR) = \lambda_1^2$$

$$(QQ''BR) = (QQ'BR) (Q'Q''BR) = \lambda_2^2$$

e Ω_2 essendo biassiale ne viene (n. 13) che

$$(PP''AR) = (QQ''BR)$$

e quindi

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2$$

ma non può essere $\lambda_1 = \lambda_2$ (n. 8), dunque sarà $\lambda_1 = -\lambda_2$, cioè Ω avrà gli invarianti assoluti uguali ma di segno contrario.

Se poi Ω è del tipo generico, la sede della involuzione rettilinea dovendo essere unita, non può essere altro che uno spigolo del tetraedro fondamentale (n. 2). Si ha dunque il teorema:

« Se una collineazione possiede una involuzione rettilinea subordinata (e non altre), essa è necessariamente del tipo assiale, o del tipo generico. Nel 1° caso la sede dell'involuzione è l'asse di piani uniti e i due invarianti assoluti sono uguali in grandezza, ma di segno contrario. Nel 2° caso la sede è uno degli spigoli del tetraedro fondamentale ».

24. Procedendo sempre per gradi esigiamo ora la presenza di due (e non più) involuzioni rettilinee subordinate.

Le sedi saranno sghembe altrimenti esisterebbero, in conseguenza in finite involuzioni rettilinee subordinate, e precisamente tutte quelle di una

omologia piana armonica subordinata. Il centro sarebbe il punto d'incontro delle due sedi supposte e il piano sarebbe quello individuato dalle due sedi medesime. Le sedi essendo sghembe, la collineazione cercata non potrebbe essere assiale altrimenti gli invarianti assoluti sarebbero uguali, il che è impossibile (n. 8).

Non resta dunque altra ipotesi (n. 22) che la Ω sia del tipo generico e le due sedi sieno due spigoli opposti del tetraedro fondamentale. In conclusione si può dunque enunciare la seguente proposizione:

« Il massimo numero di involuzioni rettilinee subordinate che possa contenere una collineazione senza contenerne infinite, è due: la collineazione che le possiede è del tipo generico e le sedi delle due involuzioni sono due spigoli opposti del tetraedro fondamentale.

« L'unica collineazione che contenga infinite involuzioni rettilinee (senza perciò essere una involuzione spaziale) appartiene al tipo assiale e una delle sue omologie piane subordinate è armonica ». (Le sedi delle involuzioni rettilinee suddette costituiscono tutti i raggi uniti di detta omologia piana).

LE QUINTICHE PIANE AUTOPROIETTIVE

Estratto dal tomo XXXVI (2° sem. 1913) dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*.

Il problema di cercare tutte le curve algebriche piane che sono invarianti rispetto a collineazione del loro piano, è stato risoluto, fin qui, in modo completo sino a tutte le curve di 4° ordine (1). Al di là di quest'ordine, non si conoscono che casi particolari in cui il problema è stato trattato. Fra i lavori dedicati a questi casi speciali (2) è da citare particolarmente una memoria di SNYDER (3) che tratta le curve di 5° ordine. Ma i risultati ivi conseguiti, non esauriscono tutti i casi possibili forniti da tali curve. Dal proposito di completare le ricerche di SNYDER è nato il presente scritto, alla fine del quale il lettore troverà un quadro riassuntivo di tutti i casi che si sono presentati (con la indicazione di quelli già trovati da SNYDER) fidando così che il quadro risulti il più completo possibile.

(1) Tralasciando i casi ovvii delle rette e delle coniche, veggasi per le cubiche, ad es., la Nota di C. SEGRE: *Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, XXIV (1889), pp. 734-756. In detto lavoro il caso delle cubiche ellittiche è trattato, assai succosamente, ma in modo completo, a piè delle pagine 751, 752. Circa alle quartiche mi permetto di citare la mia Memoria: *Le quartiche piane proiettive a sè stesse* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXVIII (2° semestre 1909), pp. 217-232] anche perchè in essa sono rapidamente riassunti i risultati precedenti in argomento.

(2) A. WIMAN, *Ueber die hyperelliptischen Curven und diejenigen vom Geschlechte $p = 3$, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen* [Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar, Bd. XXI (1895), No 1]; A. WIMAN, *Ueber die algebraischen Curven von den Geschlechtern $p = 4, 5$ und 6 , welche eindeutige Transformationen in sich besitzen* [Ibid., Bd. XXI (1895), No. 3]; F. GERBALDI, *Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXII (1898), pp. 23-94; t. XIII (1899), pp. 161-199; t. XIV (1900), pp. 66-114; t. XVI (1902), pp. 129-154].

(3) V. SNYDER, *Plane Quintic Curves which Possess a Group of Linear Transformations* [American Journal of Mathematics, vol. XXX (1908), pp. 1-9].

È strumento principale delle presenti ricerche, un certo covariante cubico (n° 5), la cui considerazione, del resto, dovrebbe essere utile anche nello studio più ampio delle quintiche piane generiche. Certo è che nel caso attuale, delle quintiche autoproiettive, esso è di un ausilio veramente prezioso. In sostanza, si tratta di questo: siccome ogni collineazione capace di trasformare in sè stessa una quintica, deve fare altrettanto di tutti i covarianti della curva, così è naturale di approfittare di quelli di essi che sono d'ordine inferiore a cinque, allo scopo di ridurre il problema a casi già noti. Fra tali covarianti quello che meglio si presta è il covariante cubico sopra indicato. Per tal modo il problema delle collineazioni, trasformanti in sè una quintica, viene a dipendere da quello, già completamente risoluto, delle collineazioni capaci di trasformare in sè una cubica.

I.

Le collineazioni spettanti a quintiche piane.**I valori possibili per i relativi periodi.**

1. Cominceremo dal presentare la seguente questione: come possono essere collegate una curva piana del 5° ordine (o come sul dirsi, più brevemente, una quintica) e una collineazione del suo piano affinché la prima sia invariante rispetto alla seconda.

Per ragioni ovvie ci limiteremo al caso in cui la quintica sia irriducibile e la collineazione sia periodica, le quali condizioni saranno sempre supposte nel seguito. Ogni quintica avente i requisiti ora descritti sarà chiamata autoproiettiva e si dirà che essa è dotata della collineazione in parola, ovvero che la possiede, o che le spetta.

2. L'esempio più semplice è quello delle cosiddette quintiche binomiali la cui equazione può ridursi a contenere soltanto due termini.

Indicando con $x y z$ le coordinate omogenee di un punto della curva (1) si hanno così i due tipi:

$$z^5 + x^4 y = 0, \quad z^5 + x^3 y^2 = 0.$$

Se una collineazione C deve appartenere a uno di essi, occorre manifestamente che il triangolo fondamentale sia invariante, e quindi C potrà rappresentarsi con la sostituzione:

$$\begin{pmatrix} ax & \alpha^k y & z \\ x & y & z \end{pmatrix},$$

(1) Perchè la lettura della presente memoria possa più facilmente collegarsi col lavoro di SNYDER [loc. cit. 3] ne adotteremo anche le notazioni servendoci dei simboli $x y z$ per indicare le coordinate omogenee di un punto (piuttosto che i simboli più usati $x_1 x_2 x_3$).

dove α è radice primitiva dell'unità e di grado uguale al periodo r di C . Esigendo che C appartenga all'una, o all'altra, delle due curve precedenti si trovano le condizioni: $k = r - 4$ per la prima, $k = \frac{r-3}{2}$ per la seconda. Ciò significa che, nel primo caso, r non è sottoposto ad alcuna condizione, nel secondo alla sola restrizione di esser un numero dispari.

In entrambi i casi non vi è limite superiore per r . È perciò che noi intenderemo, di qui in avanti, che le quintiche binomiali vengano tacitamente escluse dalle nostre considerazioni. Una quintica binomiale è sempre autoproiettiva.

3. Dopo le quintiche binomiali considereremo le quintiche omologiche. La collineazione da attribuirsi alla quintica sia, cioè, una omologia. Essa potrà rappresentarsi con la sostituzione

$$\begin{pmatrix} x & y & \alpha z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^r = 1 \text{ (rad. primit.)},$$

dove r è il periodo.

Scriviamo l'equazione di una quintica generica f_5 nel modo seguente:

$$f_5 \equiv a z^5 + a_1 z^4 + a_2 z^3 + a_3 z^2 + a_4 z + a_5 = 0,$$

dove a è una costante e a_i sono binarie in xy di grado uguale all'indice i . Esigendo la invarianza di f_5 , rispetto alla sostituzione sopra indicata, si perviene ai seguenti casi:

- (1) Per $r = 2$: $f_5 \equiv a_1 z^4 + a_3 z^2 + a_5 = 0$.
 (2) Per $r = 3$: $f_5 \equiv a_2 z^3 + a_5 = 0$.
 (3) Per $r = 4$: $f_5 \equiv a_1 z^4 + a_5 = 0$.
 (4) Per $r = 5$: $f_5 \equiv a z^5 + a_5 = 0$.

4. Determinate così anche le quintiche omologiche potremo escludere d'ora in avanti che la collineazione da attribuirsi a una quintica sia omologica, e, per procedere con un certo ordine, cominciamo dal cercare quei casi in cui il periodo è una potenza del 2.

Per $r = 4$, si ha

$$(5) \quad f_5 \equiv a z^4 x + b z^2 x^2 y + c z^2 y^3 + d x^5 + e x^3 y^2 + f x y^4 = 0$$

che è dotata della

$$C \equiv \begin{pmatrix} x & -y & iz \\ x & y & z \end{pmatrix}.$$

Per $r = 8$, la f_5 può ridursi alla forma:

$$(6) \quad f_5 \equiv z^4 x + z^2 y^3 + x^3 y^2 = 0$$

e possiede la

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^3 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^8 = 1 \text{ (rad. primit.)}.$$

5. È necessario adesso dimostrare che la (6) non possiede altre collineazioni all'infuori della C già indicata e delle sue potenze. Ricorreremo perciò al covariante cubico di f_5 . Esso può ottenersi scrivendo l'equazione della prima polare di un punto $(x_1 y_1 z_1)$ e annullandone poi l'invariante cubico. Si perviene così ad una equazione di terzo grado in $x_1 y_1 z_1$ che rappresenterà il covariante cubico cercato (1). Si avverta però di introdurre, prima, nella (6) i coefficienti binomiali allo scopo di potere approfittare delle espressioni già calcolate dell'invariante in parola, in base appunto alla presenza dei coefficienti suddetti (2).

Si trova così che il covariante cercato è il seguente :

$$3x^3 + 4z^2y = 0.$$

Questo deve quindi possedere tutte le collineazioni spettanti a f_5 . Esse sono dunque tutte del tipo

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \beta y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}.$$

Esigendo che appartengano alla (6), si ricade necessariamente nella collineazione già esistente, od in qualche sua potenza.

6. La (6) è irriduttibile. Infatti è evidente, anzitutto, che non se ne distacca alcun lato del triangolo fondamentale, cioè nessuna delle rette unite della collineazione posseduta dalla curva. È dunque impossibile che se ne distacchi qualsiasi altra retta, perchè, applicando a quest'ultima la collineazione in parola, f_5 dovrebbe comporsi di otto rette. Finalmente non può far parte di f_5 alcuna conica irriduttibile, perchè niuna è invariante rispetto alla collineazione suddetta.

7. Dalle considerazioni del N. 5 risulta che i casi $r = 2, 4, 8$, già descritti, costituiscono tutti quelli nei quali r può essere una potenza del 2. Infatti, se una f_5 possedesse una collineazione C a periodo $r = 2^n$, con $n > 2$, possederebbe anche la $C^{2^{n-3}}$ che ha il periodo 8 e quindi ricadremmo nella (6) che è l'unico caso possibile di f_5 dotate di collineazioni a pe-

(1) Esso potrà dunque riguardarsi come il luogo di un punto la cui prima polare rispetto a f_5 è armonica col proprio involuppo equianarmonico. Cfr. la mia monografia; *Le curve piane di quart'ordine* [Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. XLVII (1910), pp. 259-304].

(2) Veggasi, ad es.: G. SALMON, *Traité de Géométrie analytique (Courbes planes) destiné à faire suite au Traité des Sections coniques*, traduit par O. CHEMIN, 1^{ère} édition (Paris, Gauthier-Villars, 1884), pag. 371.

riodo 8. Ora dal N. precedente risulta che una tale f_5 non possiede altre collineazioni all'infuori di quelle descritte.

8. Passiamo ora ai casi in cui il periodo r della collineazione supposta sia 3 od una potenza di 3.

Escludendo le quintiche omologiche già considerate, per $r = 3$, si ha :

$$(7) f_5 \equiv a z^5 + b z^3 x y + c z^2 x^3 + d z^2 y^3 + e z x^2 y^2 + f x^4 y + g x y^4 = 0,$$

che è dotata della collineazione

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^2 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^3 = 1.$$

Per $r = 9$ si è condotti alla

$$(8) f_5 \equiv x^3 y^2 + y^3 z^2 + z^5 = 0,$$

alla quale spetta la collineazione :

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^3 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^9 = 1 \text{ (rad. primit.)}.$$

È facile dimostrare, con un ragionamento analogo a quello del N. 5, che la (8) non può possedere altre collineazioni all'infuori di quella già descritta e delle sue potenze. Infatti il covariante cubico (N. 5) della (8) è $x^2 z = 0$. Sono dunque invarianti, rispetto a qualsiasi collineazione spettante a f_5 , i lati $x = 0$, $z = 0$ del triangolo fondamentale, dopo di che risulta subito che tale deve essere anche $y = 0$. Segue allora immediatamente che, se una collineazione deve appartenere alla (8), essa non può essere che quella indicata, od una sua potenza.

Un ragionamento simile a quello del N. 6 prova poi che la (8) è irriduttibile.

9. I casi, già considerati, di $r = 3, 9$ esauriscono tutti quelli nei quali il valore del periodo è 3, od una sua potenza. Infatti (come nel n° 7) se esistesse una f_5 dotata di una collineazione C a periodo 3^n con $n > 2$, alla stessa f_5 spetterebbe la collineazione $C^{3^{n-2}}$ la quale ha il periodo 9: la f_5 supposta sarebbe dunque la (8).

10. Vengono adesso quei casi in cui il periodo della supposta collineazione C non contiene altri fattori primi che 2 e 3 e quindi $r = 2^m \cdot 3^n$. Ora se $m > 2$, spetta a f_5 tale potenza di C il cui periodo è 8 e quindi si cade nella (6); se $n > 1$ spetta a f_5 tale altra potenza di C il cui periodo è 9 e quindi si cade nella (8).

Dunque le sole eventualità di questa specie da esaminare sono $r = 6$, ovvero $r = 12$.

11. Sia $r = 6$. Indicando al solito con C la collineazione supposta

spettante a f_5 , si vede che C^2 può essere omologica, o no. In quest'ultimo caso si può prendere:

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^2 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^6 = 1 \text{ (rad. primit.)},$$

la quale spetta ai due seguenti tipi:

$$(9) \quad f_5 \equiv a x^4 y + b x^2 y^2 z + c y^3 z^2 + d z^5 = 0,$$

$$(10) \quad f_5 \equiv a x^2 y^3 + b x^2 z^3 + c y^4 z + d y z^4 = 0.$$

Se invece C^2 è omologica, si ha:

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x & -y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^6 = 1 \text{ (rad. primit.)},$$

la quale spetta a:

$$(11) \quad f_5 \equiv a z^4 y + b z^2 x^3 + c z^2 y^3 + d x^3 y^2 + e y^5 = 0.$$

Per $r = 12$ si hanno due casi seguenti:

$$(12) \quad f_5 \equiv x^4 y + y^3 z^2 + z^5 = 0$$

a cui spetta:

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^8 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^{12} = 1 \text{ (rad. primit.)};$$

$$(13) \quad f_5 \equiv z^4 y + x^3 z^2 + y^5 = 0$$

che possiede:

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^3 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^{12} = 1 \text{ (rad. primit.)}.$$

12. Bisogna accertare che nè la (12), nè la (13) posseggono altre collineazioni all'infuori di quelle già indicate e delle loro potenze.

A tale scopo si osservi che il covariante cubico della (12) è $y^3 = 0$. Dunque $y = 0$ è invariante per qualsiasi collineazione spettante alla curva. Segue che è invariante (100) e $x^3 y = 0$ quartica polare di (100): quindi anche $x = 0$ è invariante e per conseguenza (001). Ora la quartica polare di quest'ultimo punto si compone di tre rette passanti per (100) e di $z = 0$, per cui, infine, pure $z = 0$ deve essere invariante. In conclusione debbono essere invarianti, separatamente, i lati del triangolo fondamentale; dopo di che l'affermazione fatta sopra risulta facilmente.

Quanto alla (13), si troverà che il suo covariante cubico è $x^2 y = 0$, onde la invarianza di $x = 0$ e di $y = 0$ rispetto a qualunque collineazione spettante a f_5 . Ne segue la invarianza di (001) e, dopo, quella di (100) e, successivamente, l'altra di $z = 0$. Sono dunque invarianti i lati del

triangolo fondamentale, rispetto a qualsiasi collineazione spettante a f_5 , e la conclusione è identica a quella per la (12),

Un ragionamento simile a quello del n° 6 serve poi a dimostrare che tanto la (12) quanto la (13) sono irriduttibili.

13. Passiamo ai casi in cui r sia multiplo di 5. Vedremo che basterà esaminare i casi di $r = 5, 10, 15$.

Per $r = 5$, escludendo le quintiche omologiche già considerate, si trovano i seguenti tre tipi:

$$(14) \quad f_5 \equiv a x^5 + b y^5 + c z^5 + d x y^2 z^2 + e x^3 y z = 0,$$

$$(15) \quad f_5 \equiv a z^4 x + b z^2 y^3 + c z x^2 y^2 + d x^4 y = 0,$$

$$(16) \quad f_5 \equiv a z^4 y + b z^3 x^2 + c z x y^3 + d x^3 y^2 = 0.$$

Esse posseggono la

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^2 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^5 = 1.$$

14. Per $r = 10$ si hanno tre specie. Due sono le seguenti:

$$(17) \quad f_5 \equiv x^5 + y^5 + x y^2 z^2 = 0,$$

$$(18) \quad f_5 \equiv z^4 x + z^2 y^3 + x^4 y = 0.$$

Ad entrambe spetta la

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^7 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^{10} = 1 \text{ (rad. primit.)}.$$

La terza è

$$(19) \quad f_5 \equiv a z^5 + b x^4 y + c x^2 y^3 + d y^5 = 0$$

a cui spetta

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^6 y & z \\ x & x & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^{10} = 1 \text{ (rad. primit.)}.$$

15. Le (17) e (18) non posseggono altre collineazioni all'infuori di quella già descritta e sue potenze. Infatti il covariante cubico della (17) è $x^3 = 0$; dunque $x = 0$ è invariante rispetto a qualunque collineazione spettante a f_5 : segue che tale è anche (001) e per conseguenza $x y^2 z$ che è la prima polare di (001). Sono dunque invarianti separatamente i lati del triangolo fondamentale e così risulta subito l'affermazione fatta.

Quanto alla (18), si osservi che il suo covariante cubico (dopo avere introdotto i coefficienti binomiali) è il seguente:

$$3 y^3 + 4 x z^2 = 0.$$

Questa cubica deve dunque essere invariante rispetto a tutte le colli-

neazioni spettanti a f_5 . Dunque altrettanto deve accadere dei lati del triangolo fondamentale e quindi, etc.

16. Il covariante cubico della (19), è, previa introduzione dei coefficienti binomiali,

$$z [y^2 (b d + 3 c^2) - 4 b c x^2] = 0.$$

Si vede di qui che questo covariante non può mai essere indeterminato, giacchè dovrebbe (altrimenti) la f_5 , essere binomiale, o spezzarsi. Dunque, $z = 0$ deve essere sempre invariante rispetto a qualsiasi collineazione spettante a f_5 . Inoltre (100) è centro di una omologia armonica pure spettante a f_5 e $x = 0$ è l'asse corrispondente. Questa omologia è la 5^a potenza di C (nè possono esistere altre), dunque anche $x = 0$ deve essere invariante e pure $y = 0$ che è la tangente in (100). In conclusione debbono essere invarianti i lati del triangolo fondamentale. Se si vuole allora che la (19) possenga altre collineazioni, oltre quelle descritte, si trova che deve essere $c = 0$, per cui la f_5 può ridursi alla forma

$$(20) \quad f_5 \equiv x^5 + x^4 y + y^5 = 0$$

e le collineazioni che essa possiede sono costituite dalla

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^{16} y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^{20} = 1 \text{ (rad. primit.)}$$

e dalle sue potenze, e quindi $r = 20$.

Il solito ragionamento del n° 6 dimostra poi la irriduttibilità della (20).

17. Per $r = 15$ si hanno le tre seguenti specie:

$$(21) \quad f_5 \equiv x^3 y z + y^5 + z^5 = 0$$

che possiede la

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^{12} y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^{15} = 1 \text{ (rad. primit.)};$$

$$(22) \quad f_5 \equiv x^3 y^2 + y^5 + z^5 = 0$$

a cui spetta la

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^6 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^{15} = 1 \text{ (rad. primit.)};$$

$$(23) \quad f_5 \equiv z^5 + x^4 y + x y^4 = 0$$

alla quale spetta la

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^{11} y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^{15} = 1 \text{ (rad. primit.)}.$$

18. Esaminiamo ora se le ultime tre quintiche trovate godono di altre collineazioni oltre quelle descritte. Cominciamo dalla (21). Però non si può ricorrere al suo covariante cubico perchè è indeterminato. Ricorreremo

perciò al covariante sestico che si ottiene annullando l'invariante sestico della prima polare di un punto rispetto a f_5 (1). Tale covariante è $x^4yz = 0$, e siccome esso deve possedere tutte le collineazioni spettanti a f_5 , così ne segue la invarianza del triangolo fondamentale e si conclude che il gruppo di collineazioni posseduto dalla (21) è d'ordine 30 e può esser generato dalla collineazione C , già esistente, a cui si aggiunga l'omologia armonica

$$\begin{pmatrix} y & x & z \\ x & y & z \end{pmatrix}.$$

Quanto alla (22), si trova che il suo covariante cubico è $x^2z = 0$ e quello della (23) è costituito dal triangolo fondamentale, per cui, in entrambi i casi, esso deve riuscire invariante rispetto a tutte le collineazioni spettanti a f_5 . Dopo di che si vede che la (22) non possiede altre collineazioni oltre la C già descritta e le sue potenze, e la (23) possiede inoltre la omologia armonica

$$\begin{pmatrix} y & x & z \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

per cui il gruppo completo della (23) è di ordine 30 come per la (21).

19. Dal n. 13 in avanti, abbiamo considerato per r i valori 5, 10, 15, 20. Essi rientrano nella espressione più generica di

$$r = 5^m \cdot 2^n \cdot 3^p \quad (m > 0),$$

e vogliamo ora dimostrare che altri valori di r compresi nella espressione precedente, sono impossibili. Infatti per $n = p = 0$ e $m > 1$ esisterebbe una tal potenza di C il cui periodo sarebbe 5. La f_5 dovrebbe dunque essere una delle seguenti: (4), (14), (15), (16). Ora su queste si esperimenta facilmente che non posseggono collineazioni di periodo $r = 5^m$ di cui una qualche potenza sia la collineazione a periodo 5 già esistente. Dunque intanto $m = 1$ e inoltre n e p non possono contemporaneamente annullarsi. Ne segue che esiste una tale potenza di C il cui periodo è 10, ovvero 15, oppure 20. Ma in ciascuno di questi casi (N^o 14, 15, 16, 17, 18), o non esistono altre collineazioni, oltre quelle con i periodi suddetti, od esiste al più una omologia armonica spettante a f_5 e non contenuta fra le potenze delle collineazioni indicate.

L'affermazione fatta è dimostrata.

20. Andiamo finalmente a considerare quei casi in cui r (periodo della supposta collineazione spettante a f_5) è un numero primo maggiore di 5.

Scriviamo questa collineazione sotto la solita forma

(1) Questo covariante sestico è dunque il luogo geometrico dei punti le cui prime polari sono quartiche di CLEBSCH. Cfr., ad es. la mia monografia, loc. cit. 5) pag. 286.

$$C = \begin{pmatrix} \alpha x & \beta y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

con $\alpha^r = \beta^r = 1$, essendo r primo e > 5 e $\alpha \neq \beta$.

Ordiniamo poi la equazione di f_5 in z , scrivendola nel modo seguente :

$$f \equiv a z^5 + a_1 z^4 + a_2 z^3 + a_3 z^2 + a_4 z + a_5 = 0,$$

dove a è una costante e le a_i sono binarie in x, y , di grado uguale al loro indice.

Valgono allora le seguenti osservazioni.

Sopra ogni lato del triangolo fondamentale viene a subordinarsi una proiettività binaria di periodo r rispetto alla quale deve essere invariante il gruppo dei punti d'intersezione del lato con f_5 . Siccome $r > 5$, così ne segue che le suddette intersezioni sono tutte assorbite dai vertici del triangolo in parola.

Le a_i per effetto della C debbono tutte riprodursi, a meno di un fattore esterno. Ne segue che ogni a_i non può contenere più di un termine, perchè, se a_i contenesse ad es. i due termini:

$$x^m y^{i-m}, \quad x^n y^{i-n},$$

dovrebbe essere:

$$\alpha^m \beta^{i-m} = \alpha^n \beta^{i-n},$$

cioè:

$$\alpha^{m-n} = \beta^{m-n};$$

il che contraddice le ipotesi fatte.

Finalmente il termine che costituisce a_5 non può mancare, altrimenti f_5 si spezza.

21. Tenendo conto di queste osservazioni, una facile discussione dimostra che tutti i casi di r primo > 5 si riducono ai seguenti:

Per $r = 7$ si hanno 4 tipi distinti che sono:

$$(24) \quad f_5 \equiv x^3 y^2 + y^3 z^2 + z^3 x^2 = 0$$

con

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^3 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^7 = 1;$$

$$(25) \quad f_5 \equiv z^4 y + z x^2 y^2 + x^5 = 0$$

con

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^5 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^7 = 1;$$

$$(26) \quad f_5 \equiv z^3 y^2 + z x y^3 + x^5 = 0;$$

$$(27) \quad f_5 \equiv z^2 x^3 + z y^4 + x^4 y = 0.$$

Queste ultime posseggono la

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^6 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^7 = 1.$$

Per $r = 11$ si ha una sola specie che è:

$$(28) \quad f_5 \equiv z^4 y + z x z^3 + x^5 = 0$$

con

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^5 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^{11} = 1.$$

Finalmente per $r = 13$ si ha pure una sola specie che è

$$(29) \quad f_5 \equiv x^4 y + y^4 z + z^4 x = 0$$

con

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^{10} y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}.$$

22. Per vedere se le quintiche del n° precedente posseggono altre collineazioni, oltre quelle ivi descritte, basta calcolare il covariante cubico.

Si perviene così ai seguenti risultati (previa introduzione, nelle rispettive equazioni, dei coefficienti binomiali, o polinomiali).

Il covariante cubico di (24) e di (29) è il triangolo fondamentale. Dunque esso è invariante rispetto a qualsiasi collineazione spettante a f_5 . Si trova così che il gruppo completo di collineazioni spettante alla (24) è d'ordine 21 ed è generato dalle due

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^3 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad C' \equiv \begin{pmatrix} y & z & x \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^7 = 1$$

e quello spettante alla (29) è d'ordine 39 ed è generato da

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^{10} y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad C' \equiv \begin{pmatrix} y & z & x \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^{13} = 1.$$

Quanto alle rimanenti, (25), (26), (27), (28), si dimostra che non posseggono altre collineazioni, all'infuori di quelle già descritte, desumendo (dal calcolo del covariante in parola) che i lati del triangolo fondamentale debbono rimanere invarianti per qualsiasi collineazione spettante alla curva. Dopo ciò è lecito rappresentare una tale collineazione sotto la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \beta y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

e quindi dedurre la coincidenza con le collineazione già considerate, o con loro potenze.

Così il covariante cubico della (25) è $yz^2 = 0$. Sono dunque invarianti $y = 0$, $z = 0$ e quindi anche (100) e per conseguenza pure la prima polare di (100) che si compone di una cubica irriduttibile e di $x = 0$. Dunque infine anche $x = 0$ è invariante.

Il covariante cubico della (26) è

$$x(3z^2 - 4xy) = 0,$$

da cui risulta subito la invarianza delle tre rette $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Il covariante cubico della (27) è $x^2z = 0$. Sono dunque invarianti $x = 0$, $z = 0$ e quindi anche (010) e per conseguenza pure i due rimanenti vertici del triangolo fondamentale e il lato $y = 0$ che li congiunge.

Anche il covariante cubico della (28) è $x^2z = 0$, per cui $x = 0$, $z = 0$ sono invarianti e quindi (010), da cui segue che lo è (001) e finalmente $y = 0$ tangente in (001).

In ultimo, un ragionamento analogo e quello del n° 6 può servire a dimostrare che le quintiche ora considerate sono irriduttibili.

23. Non manca che discutere il caso il cui r , non essendo primo, ammetta però un fattore primo k maggiore di 5. Dal n° 21 risulta che k deve avere uno dei valori 7, 11, 13. Posto allora $r = hk$, indicando con C la collineazione supposta, si vede che f_5 (possedendo ogni potenza di C) possederà $C^{\frac{r}{h}}$ la quale ha il periodo k . Necessariamente dunque f_5 sarà una delle quintiche del n° 21 e conseguentemente $h = 1$, $r = k$. Il caso supposto è impossibile.

Riassumendo, si può dire che la questione posta al principio di questa prima parte della presente memoria è completamente risolta: i valori possibili per il periodo r sono i seguenti:

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 20.$$

II.

I gruppi di collineazioni spettanti a quintiche piane.

24. Le considerazioni svolte sin qui mettono in evidenza il caso più semplice del problema che stiamo per trattare: quello in cui il gruppo è costituito esclusivamente delle varie potenze di una medesima collineazione. Ci proponiamo adesso la ricerca dei casi rimanenti. Indichiamo con n l'ordine del gruppo cercato e con G_n il gruppo medesimo. Anzitutto, si vede subito che se n contiene un fattore primo r maggiore di

5 si ricade in casi già considerati. Infatti in G_n figurerà sicuramente qualche collineazione a periodo r ed essendo $r > 5$ i valori possibili di r saranno 7, 11, 13 (cfr. n° 21, 23) e quindi, o G_n sarà esaurito dalle potenze di una medesima collineazione, oppure i valori possibili per n saranno 21, 39. In ogni modo la f_5 relativa è già stata considerata ed è una delle seguenti: (24), (25), (26), (27), (28), (29).

25. Rimane l'ipotesi in cui n non contenga fattori diversi da 2, da 3, da 5.

Cominciamo dal supporre che n sia una potenza del 2. Allora G_n contiene sicuramente un sottogruppo commutativo diverso dall'identità. Una collineazione di questo sottogruppo deve avere per periodo un divisore di n , cioè una potenza del 2, e quindi essa, oppure una sua potenza, sarà una omologia armonica, la quale dovrà dunque essere permutabile con qualunque altra collineazione di G_n . Ma quest'ultima, avendo per periodo di nuovo una potenza del 2, è una omologia armonica, ovvero lo è una qualche sua potenza. Si perviene così ad ammettere in G_n la esistenza di due omologie armoniche permutabili e quindi tali che l'asse dell'una passi per il centro dell'altra. Esse dunque potranno rappresentarsi con le due sostituzioni

$$\begin{pmatrix} -x & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & -y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

e ne risulta subito che esse non possono appartenere ad una stessa f_5 irriducibile.

Quindi i soli casi possibili in cui n è una potenza del 2, sono costituiti da quelli già considerati nella prima parte: in ognuno di essi il gruppo è esaurito dalle potenze di una stessa collineazione.

26. Ad analoga conclusione si perviene nell'ipotesi in cui n sia una potenza di 3 (e con uguale ragionamento). Infatti una collineazione del sottogruppo commutativo, od una sua potenza, ha il periodo 3 ed altrettanto può dirsi di qualunque altra collineazione di G_n . Esistono dunque in G_n due collineazioni, a periodo tre, permutabili fra loro. Se sono omologiche, l'asse dell'una passerà per il centro dell'altra e quindi potranno rappresentarsi con

$$\begin{pmatrix} \alpha x & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & \beta y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^3 = \beta^3 = 1$$

e queste non possono appartenere ad una medesima f_5 irriducibile.

Se una di queste collineazioni è omologica e l'altra no, per il fatto che sono permutabili, dovranno potersi rappresentare con

$$\begin{pmatrix} \alpha x & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^2 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^3 = 1$$

e di nuovo il loro possesso rende f_5 riduttibile.

Se finalmente nè l'una nè l'altra sono omologiche avranno gli stessi punti uniti, ciascuna sarà il quadrato dell'altra e il G_n sarà o un G_3 e la f_5 sarà la (3), o la (7), o altrimenti il G_n sarà un G_9 e la f_5 sarà la (8).

La conclusione è dunque perfettamente analoga a quella del n. 25: se n è una potenza del 3, i soli casi possibili sono costituiti da quelli già considerati nella prima parte: in ciascuno di essi il gruppo è formato dalle potenze di una stessa collineazione.

27. Se poi n è una potenza del 5, il ragionamento dei n. 25 e 26, applicato a questo caso, dimostra che si perviene a un solo caso nuovo che è il seguente:

$$(30) \quad f_5 \equiv x^5 + y^5 + z^5 = 0$$

che possiede il G_{25} costituito da tutte le collineazioni rappresentabili con

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \beta y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^5 = \beta^5 = 1.$$

Queste però non esauriscono tutte quelle che spettano alla (30) giacchè il covariante cubico è formato dal triangolo fondamentale e quindi appartengono alla (30) (inoltre) tutte quelle che sono rappresentabili col gruppo totale di sostituzioni sopra le tre lettere xyz . Per tal modo la (30) viene a possedere il G_{150} generato dal G_{25} precedente a cui si aggiungano le due collineazioni:

$$\begin{pmatrix} y & z & x \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y & x & z \\ x & y & z \end{pmatrix}.$$

28. Passiamo al caso in cui n contiene i soli fattori primi 2 e 3 e quindi $n = 2^h \cdot 3^k$. Segue $k = 1$ altrimenti esiste in G_n un sottogruppo G_9 e quindi (n. 26, 8, 9) la f_5 è la (8) e si ha $n = 9$. Anche $h = 1$. Infatti se $h > 2$ esiste in G_n un sottogruppo G_8 e quindi (n. 25, 4, 5, 6, 7) la f_5 è la (6) e si ha $n = 8$. Se $h = 2$, siccome $k = 1$ così ne viene $n = 12$. Se G_n è costituito dalle potenze di una stessa collineazione, si ricade in casi già considerati (n. 11). Altrimenti si vede facilmente che, in ogni modo, G_{12} deve possedere una collineazione a periodo 3 e una a periodo 4 permutabili fra loro. Ammettendo la esistenza di quest'ultima la f_5 sarà la (3) o la (5) e dopo, esigendo il possesso di una collineazione a periodo tre permutabile con quella a periodo quattro già esistente, non si trovano casi nuovi.

29. Se dunque $n = 2^h \cdot 3^k$, l'unica eventualità che rimane a discutere è $n = 6$. Volendo poi escludere i casi già considerati in cui G_6 è formato dalle potenze di una stessa collineazione, si è necessariamente condotti al G_6 generato dalle due seguenti:

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^2 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y & x & z \\ x & y & z \end{pmatrix}.$$

La f_5 relativa è quel caso particolare della (7) in cui è $c = d, f = g$. Essa dunque può scriversi nel modo seguente:

$$(31) \quad m z^5 + x y z (n z^2 + p x y) + (x^3 + y^3) (q z^2 + r x y) = 0.$$

30. Sia adesso $n = 2^h \cdot 5^k$. Anzitutto si vede che $k = 1$, altrimenti esiste un sottogruppo d'ordine 25 e si ha la (30). Ugualmente si vede che h non può superare 2, perchè, per $h = 3$, esiste un sottogruppo d'ordine 8 e si ha la (6). Dunque i soli valori di n di questa specie che rimangono da esaminare sono $n = 20, n = 10$.

Per $n = 20$ si vede che esiste un solo sottogruppo G_5 che sarà quindi invariante. Esisterà anche almeno un sottogruppo G_4 che sarà dunque composto con le potenze di una stessa collineazione C a periodo 4 (n. 25). Ne segue che C^2 sarà una omologia armonica trasformante G_5 in sè stesso. Ciò posto, la presenza del G_5 induce a ritenere che la f_5 sarà una delle seguenti:

$$(4), (14), (15), (16).$$

Discutiamole separatamente.

La (4) può scriversi:

$$f_5 \equiv a z^5 + b x^5 + c x^4 y + d x^3 y^2 + e x^2 y^3 + f x y^4 + g y^5 = 0$$

e il G_5 è costituito dalle potenze di

$$\begin{pmatrix} x & y & \alpha z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^5 = 1.$$

L'omologia armonica C^2 potrà dunque rappresentarsi con

$$\begin{pmatrix} -x & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

e perchè appartenga a f_5 deve essere $b = d = f = 0$. Segue che C non può scambiare x con y e quindi avremo

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha x & \beta y & z \\ x & y & z \end{pmatrix} \text{ con } \alpha^2 = -\beta^2 = -1.$$

Ma se C deve appartenere a f_5 , deve anche essere $\beta = 1, \alpha = \pm i$, e inoltre $e = 0$, e si cade nella (20).

Quanto alla (14), occorre che C^2 trasformi in sè stesso il triangolo fondamentale. Si è così condotti ai due tipi

$$\begin{aligned} a x^5 + b y^5 + d x y^2 z^2 &= 0, \\ a x^5 + y^5 + z^5 + d z^2 x y^2 + e z x^3 y &= 0 \end{aligned}$$

e C^2 , è $\begin{pmatrix} x & y & -z \\ x & y & z \end{pmatrix}$ per il 1° tipo, $\begin{pmatrix} y & x & z \\ x & y & z \end{pmatrix}$ per il 2°. Ma il 1° tipo non è che la (17) e inoltre $n = 10$. Quanto al 2°, esso deve possedere altri G_4 e quindi altre omologie armoniche, altrimenti è $n = 10$, e queste omologie armoniche debbono trasformare in sè stesso il triangolo fondamentale, ciò che richiede $d = e = 0$ e si cade nella (30).

Scrivendo la (15):

$$f_5 \equiv a z^4 x + b z^2 y^3 + c z x^2 y^2 + d x^4 y = 0$$

si vede che C^2 , se deve appartenere, non può permutare due lati del triangolo fondamentale e poichè niuno dei tre coefficienti a, b, d può annullarsi (se no f_5 si spezza) si vede che deve essere $c = 0$,

$$C^2 \equiv \begin{pmatrix} x & y & -z \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

e si cade nella (18) e inoltre $n = 10$.

Finalmente la (16) va esclusa perchè non può manifestamente possedere, (senza spezzarsi, o essere binomiale) alcuna omologia armonica capace di trasformare in sè stesso il triangolo fondamentale.

In conclusione $n = 20$ non conduce a casi nuovi.

31. Per $n = 10$ le considerazioni del n. precedente provano la esistenza di un solo sottogruppo G_5 invariante. Le rimanenti collineazioni sono omologie armoniche e debbono trasformare in sè il sottogruppo suddetto. Il possesso di questo gruppo esige (come nel n° precedente) che la f_5 sia una delle seguenti

$$(4), (14), (15), (16)$$

e, in ciascuno di questi casi, bisogna esaminare se è possibile aggiungere una omologia armonica capace di trasformare in sè stesso il triangolo invariante. L'unico caso possibile è quello della (14) dove però b e c sieno entrambi differenti da zero. Allora l'equazione può ridursi alla forma seguente:

$$(32) \quad f_5 \equiv y^5 + z^5 + a x^5 + b x y^2 z^2 + c x^3 y z = 0$$

e il gruppo G_{10} è generato da

$$\begin{pmatrix} a x & a^2 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & z & y \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad a^5 = 1.$$

32. Sia $n = 3^h \cdot 5^k$. Segue $h = 1, k = 1$ altrimenti esiste un sottogruppo d'ordine 3^h e un altro d'ordine 5^k i quali (n° 26, 27) non possono essere altro che il G_9 della (8), od il G_{25} della (30).

D'altra parte per $r = 15$ si osserverà che il numero dei sottogruppi G_5 e quello dei sottogruppi G_3 deve essere rispettivamente $5p + 1$,

$3q+1$, e che, infine, nel gruppo non possono esistere che collineazioni a periodo 3, o a periodo 5, o a periodo 15. Ne risulta che il gruppo cercato deve essere composto dalle varie potenze di una medesima collineazione, a periodo 15, il che non porta niun caso nuovo (n° 18).

33. Le considerazioni svolte dal n° 25, fino a questo punto, inducono a concludere che rimangono ad esaminare i casi di

$$n = 2^h \cdot 3^k \cdot 5^l$$

nella sola ipotesi in cui nessuno degli esponenti sia nullo. Ma se $h > 2$ esiste un sottogruppo G_{2^h} e vale il n° 25, se $k > 1$ esiste un sottogruppo G_{3^k} e vale il n° 26, se finalmente $l > 1$ esiste un G_{5^l} e vale il n° 27. Per conseguenza rimangono da considerare soltanto i casi di

$$n = 30, \quad n = 60$$

il che adesso faremo.

34. Sia dunque $n = 30$: allora G_n non può essere un gruppo semplice. Esso conterrà quindi un sottogruppo $G_{n'}$ il cui ordine n' sarà un divisore di 30 e quindi avrà uno dei seguenti valori:

$$2, \quad 3, \quad 5, \quad 6, \quad 10, \quad 15.$$

Se $n' = 15$ si ha la (21), o la (22), o la (23). Per le considerazioni del n° 18, il G_{30} cercato non esiste per la (22): per la (21), o (23) è quello ivi descritto.

Se $n' = 10$ si ha la (17), o la (18), o la (19), o la (32). Ma, per le considerazioni dei N. 15 e 16, si vede che le prime tre non posseggono alcun G_{30} . Quanto alla (32), siccome G_{10} deve essere invariante, così bisogna potere aggiungere una collineazione, a periodo 3, che trasformi il triangolo fondamentale in sè stesso. Segue $b = 0$ e si cade nella (21).

Se $n' = 6$ si ha la (9), o la (10), o la (11), o la (31). In tutti i casi è impossibile aggiungere una collineazione, a periodo 5, che lasci invariato il triangolo fondamentale, all'infuori del caso (31), in cui si faccia $n=p=q=0$, ma allora si cade nella (23) già considerata.

Se $n' = 5$ si ha la (4), o la (14), o la (15), o la (16). Bisogna aggiungere una collineazione a periodo 3 che trasformi, in sè stesso, il G_5 già esistente. Si trova così un G_{15} e quindi si ricade nei casi già considerati cioè nelle (21), (22), (23).

Se $n' = 3$ si ha la (2), o la (7). È adesso una collineazione a periodo 5 che bisogna aggiungere così che trasformi in sè stesso il G_3 esistente e di nuovo si perviene a un G_{15} , etc.

Se $n' = 2$ si ha la (1). Bisogna aggiungere una collineazione, a periodo 5, che lasci invariato (001) e $z = 0$. Si è così condotti, o alla (19) con $d = 0$, oppure alla (17). Ma nè l'una nè l'altra posseggono altre collinea-

zioni (N. 16 e 15), oltre quelle del G_{10} , che in tal modo viene a formarsi.

In conclusione per $n = 30$ non si hanno casi nuovi.

35. È impossibile che n sia uguale a 60.

Infatti è anzitutto impossibile che il supposto G_{60} sia composto dalle potenze di una stessa collineazione di cui 60 sia il periodo (N. 23).

È anche impossibile che il G_{60} che si cerca sia un gruppo semplice. Infatti esso sarebbe isomorfo oloedricamente col gruppo dell'icosaedro e quindi conterrebbe 5 sottogruppi G_{12} . Ma le f_5 che posseggono G_{12} sono soltanto le (12) e (13), in forza delle considerazioni del N. 28, e inoltre alle (12) e (13) non spettano altre collineazioni all'infuori di quelle del G_{12} suddetto (N. 12).

Non manca che esaminare se G_{60} possa essere un gruppo composto. Esso ammetterà allora un sottogruppo invariante $G_{n'}$ il cui ordine n' sarà un divisore di 60. Se n' è un divisore anche di 30 valgono le considerazioni del N. precedente. Altrimenti n' avrà uno dei valori seguenti:

$$4, 12, 20, 30.$$

Ma se $n' = 12, 20, 30$ valgono i N. 11, 16, 18 e in tutti quei casi $G_{n'}$ è il gruppo completo delle collineazioni spettanti a f_5 .

Rimane a discutere il caso $n' = 4$. La f_5 relativa è la (3), o la (5). Bisogna aggiungere almeno una collineazione a periodo tre, rispetto alla quale, il G_n esistente sia invariante e si è condotti alla (12), la quale non possiede altre collineazioni che quelle del G_{12} ivi descritte.

La discussione è esaurita.

Riassunto.

Al quadro riassuntivo delle specie trovate premettiamo le seguenti osservazioni (1).

Le a_i sono binarie in x, y di grado uguale al loro indice.

I simboli $a, b, c, d, e, f, g, m, n, p, q, r$, rappresentano numeri reali generici.

Le quintiche binomiali e trinomiali contenute nel quadro sono irriducibili. Le rimanenti sono anche irriducibili (almeno finchè i loro coefficienti sono generici, cioè non vincolati da alcuna condizione).

Sono ovvie altre rappresentazioni semplici per alcune delle forme trovate. Avverto di questo il lettore che desiderasse confrontare i miei risultati con quelli di SNYDER (nella memoria citata in principio). Così la

(1) I risultati espressi da questo quadro furono oggetto di comunicazione al Congresso delle Scienze tenutosi in Genova l'ottobre 1912.

f_5 simmetrica in x, y possiede una omologia armonica avente per asse $x - y = 0$ e col centro in $(1 - 1 0)$. La f_5 invariante per la sostituzione circolare $\begin{pmatrix} y & z & x \\ x & y & z \end{pmatrix}$ possiede una collineazione, non omologica, a periodo 3 e quindi è identica con la (7). La f_5 invariante rispetto al gruppo totale di sostituzioni sopra xyz possiede il G_6 generato dalle due collineazioni:

$$\begin{pmatrix} y & z & x \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y & x & z \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

e quindi è identica con la (31).

Di fronte ad ogni specie è indicato lo stesso numero col quale essa è stata precedentemente contraddistinta (nello svolgimento del lavoro). Ciò allo scopo di rintracciare più facilmente il punto in cui essa è stata trovata.

Le specie già trovate da SNYDER portano la indicazione del numero col quale questo autore le ha contrassegnate.

Ciò premesso il quadro è il seguente: esso si svolge in base all'ordine n del gruppo (in senso crescente).

$a = 2$ (Una specie):

(1) $f_5 \equiv a_1 z^4 + a_3 z^2 + a_5 = 0.$

Il G_2 è costituito dalle potenze di

$$\begin{pmatrix} x & y & -z \\ x & y & z \end{pmatrix}.$$

$n = 3$ (Due specie):

1^a specie:

(2) $f_5 \equiv a_2 z^3 + a_5 = 0.$

Il G_5 , è costituito dalle potenze di

$$\begin{pmatrix} x & y & \alpha z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^3 = 1.$$

2^a specie:

(7) $f_5 \equiv a z^5 + b z^3 x y + c z^2 x^3 + d z^2 y^3 + e z x^2 y^2 + f x^4 y + g x y^4 = 0.$

Il G_3 è costituito dalle potenze di

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^2 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^3 = 1.$$

$n = 4$ (Due specie):

1^a specie:

$$(3) \quad f_5 \equiv a_1 z^4 + a_5 = 0.$$

Il G_4 è costituito dalle potenze di

$$\begin{pmatrix} x & u & iz \\ x & y & y \end{pmatrix}.$$

2^a specie:

$$(5) \quad f_5 \equiv a z^4 x + b z^2 x^2 y + c z^2 y^3 + d x^5 + e x^3 y^2 + f x y^4 = 0.$$

Il G_4 è costituito dalle potenze di

$$\begin{pmatrix} x & -y & iz \\ x & y & z \end{pmatrix}.$$

$n = 5$ (Quattro specie):

1^a specie:

$$(4) \quad f_5 \equiv a z^5 + a_5 = 0.$$

Il G_5 è costituito dalle potenze di

$$\begin{pmatrix} x & y & az \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad a^5 = 1.$$

2^a specie:

$$(14) \quad f_5 \equiv b y^5 + c z^5 + d x y^2 z^2 + e x^3 y z = 0.$$

3^a specie:

$$(15) \quad f_5 \equiv a z^4 x + b z^2 y^3 + c z x^2 y^2 + d x^4 y = 0.$$

4^a specie:

$$(16) \quad f_5 \equiv a z^4 y + b z^3 x^2 + c z x y^3 + d x^3 y^2 = 0.$$

In queste tre ultime specie il G_5 è costituito dalle potenze di

$$\begin{pmatrix} ax & x^2 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad a^5 = 1.$$

$n = 6$ (Quattro specie):

1^a specie:

$$(9) \quad f_5 \equiv a x^4 y + b x^2 y^2 z + c y^3 x^2 + d z^5 = 0.$$

2^a specie:

$$(10) \quad f_5 \equiv a x^2 y^3 + b x^2 z^3 + c y^4 z + d y z^4 = 0.$$

In entrambe il G_6 è costituito dalle potenze di

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^2 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^6 = 1 \text{ (rad. primit.)}.$$

3^a specie

$$(11) \quad f_5 \equiv a z^4 y + b z^2 x^3 + c z^2 y^3 + d x^3 y^2 + e y^5 = 0$$

[(5) e (3) di SNYDER].

Il G_6 è costituito dalle potenze di

$$\begin{pmatrix} \alpha x & -y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^6 = 1 \text{ (rad. primit.)}.$$

4^a specie:

$$(31) \quad f_5 \equiv m z^5 + x y z (n z^2 + p x y) + (x^3 + y^3) (q z^2 + r x y) = 0$$

[(13) di SNYDER].

Il G_6 è generato dalle due collineazioni:

$$\begin{pmatrix} \alpha x & -y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^3 = 1; \quad \begin{pmatrix} y & x & z \\ x & y & z \end{pmatrix}.$$

$n = 7$ (Tre specie):

1^a specie:

$$(25) \quad f_5 \equiv z^4 y + z x^2 y^2 + x^5 = 0.$$

Il G_7 è costituito dalle potenze di

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^5 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^7 = 1.$$

2^a specie:

$$(26) \quad f_5 \equiv z^3 y^2 + z x y^3 + x^5 = 0.$$

3^a specie:

$$(27) \quad f_5 \equiv z^2 x^3 + z y^4 + x^4 y = 0.$$

Per entrambe il G_7 è costituito dalle potenze di

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^6 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^7 = 1.$$

$n = 8$ (Una specie):

$$(6) \quad f_5 \equiv z^4 x + z^2 y^3 + x^3 y^2 = 0.$$

Il G_8 è costituito dalle potenze di

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^3 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^8 = 1 \text{ (rad. primit.)}$$

$n = 9$ (Una specie):

(8) $f_5 \equiv x^3 y^2 + y^3 z^2 + z^5 = 0.$

Il G_9 è costituito dalle potenze di

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^3 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^9 = 1 \text{ (rad. primit.)}$$

$n = 10$ (Quattro specie):

1^a specie :

(17) $f_5 \equiv x^5 + y^5 + x y^2 z^2 = 0$

[(2) di SNYDER].

2^a specie :

(18) $f_5 \equiv z^4 x + z^2 y^3 + x^4 y = 0.$

In entrambe il G_{10} è costituito dalle potenze di

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^7 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^{10} = 1 \text{ (rad. primit.)}$$

3^a specie :

[(19) $f_5 \equiv a z^5 + b x^4 y + c x^2 y^3 + d y^5 = 0.$

[(9) di SNYDER].

Il G_{10} è costituito dalle potenze di

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^6 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^{10} = 1 \text{ (rad. primit.)}$$

4^a specie :

(32) $f_5 \equiv y^5 + z^5 + a x^5 + b x y^2 z^2 + c x^3 y z = 0.$

Il G_{10} è generato dalle due collineazioni :

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^2 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^5 = 1; \quad \begin{pmatrix} x & z & y \\ x & y & z \end{pmatrix}.$$

$n = 11$ (Una specie):

(28) $f_5 \equiv z^4 y + z x y^3 + x^5 = 0.$

Il G_{11} è costituito dalle potenze di

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^5 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^{11} = 1.$$

$n = 12$ (Due specie):

1^a specie:

$$(12) \quad f_5 \equiv x^4 y + y^3 z^2 + z^5 = 0.$$

Il G_{12} è costituito dalle potenze di

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^8 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^{12} = 1 \text{ (rad. primit.)}$$

2^a specie:

$$(13) \quad f_5 \equiv z^4 y + x^3 z^2 + y^5 = 0$$

[(10) di SNYDER].

Il G_{12} è costituito dalle potenze di

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^3 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^{12} = 1 \text{ (rad. primit.)}$$

$n = 15$ (Una specie):

$$(22) \quad f_5 \equiv x^3 y^2 + y^5 + z^5 = 0$$

[(6) di SNYDER].

Il G_{15} è costituito dalle potenze di

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^6 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^{15} = 1 \text{ (rad. primit.)}$$

$n = 20$ (Una specie):

$$(20) \quad f_5 \equiv z^5 + x^4 y + y^5 = 0$$

[(8) di SNYDER].

Il G_{20} è costituito dalle potenze di

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^{16} y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^{20} = 1 \text{ (rad. primit.)}$$

$n = 21$ (Una specie):

$$(24) \quad f_5 \equiv x^3 y^2 + y^3 z^2 + z^3 x^2 = 0$$

[(12) di SNYDER].

Il G_{21} è generato dalle due collineazioni:

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^3 y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^7 = 1; \quad \begin{pmatrix} y & z & x \\ x & y & z \end{pmatrix}.$$

$n = 30$ (Due specie):

1^a specie:

$$(21) \quad f_5 \equiv x^3 y z + y^5 + z^5 = 0$$

[(7) di SNYDER].

Il G_{30} è generato dalle due collineazioni:

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^{12} y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^{15} = 1 \text{ rad. primit.}; \quad \begin{pmatrix} x & z & y \\ x & y & z \end{pmatrix}.$$

2^a specie:

$$(23) \quad f_5 \equiv z^5 + x^4 y + x y^4 = 0$$

Il G_{30} è generato dalle due collineazioni:

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^{11} y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^{15} = 1 \text{ (rad. primit.)}; \quad \begin{pmatrix} u & x & z \\ x & y & z \end{pmatrix}.$$

$n = 39$ (Una specie):

$$(29) \quad f_5 \equiv x^4 y + y^4 z + z^4 x = 0$$

[(11) di SNYDER].

Il G_{39} è generato dalle due collineazioni:

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^{10} y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^{13} = 1; \quad \begin{pmatrix} y & z & x \\ x & y & z \end{pmatrix}.$$

$n = 150$ (Una specie):

$$(30) \quad f_5 \equiv x^5 + y^5 + z^5 = 0$$

[(14) di SNYDER].

Il G_{150} è generato dalle collineazioni:

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \beta y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^5 = \beta^5 = 1; \quad \begin{pmatrix} u & z & x \\ x & y & z \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y & x & z \\ x & y & z \end{pmatrix}.$$

Quintiche binomiali (Due specie):

1^a specie

$$f_5 \equiv z^5 + x^4 y = 0$$

[(1) di SNYDER].

2^a specie:

$$f_5 \equiv z^5 + x^3 y^2 = 0$$

cfr. il n° 2.

[(14) di SNYDER].

Ma per entrambe il gruppo non è più *finito* (nel senso che esso sia

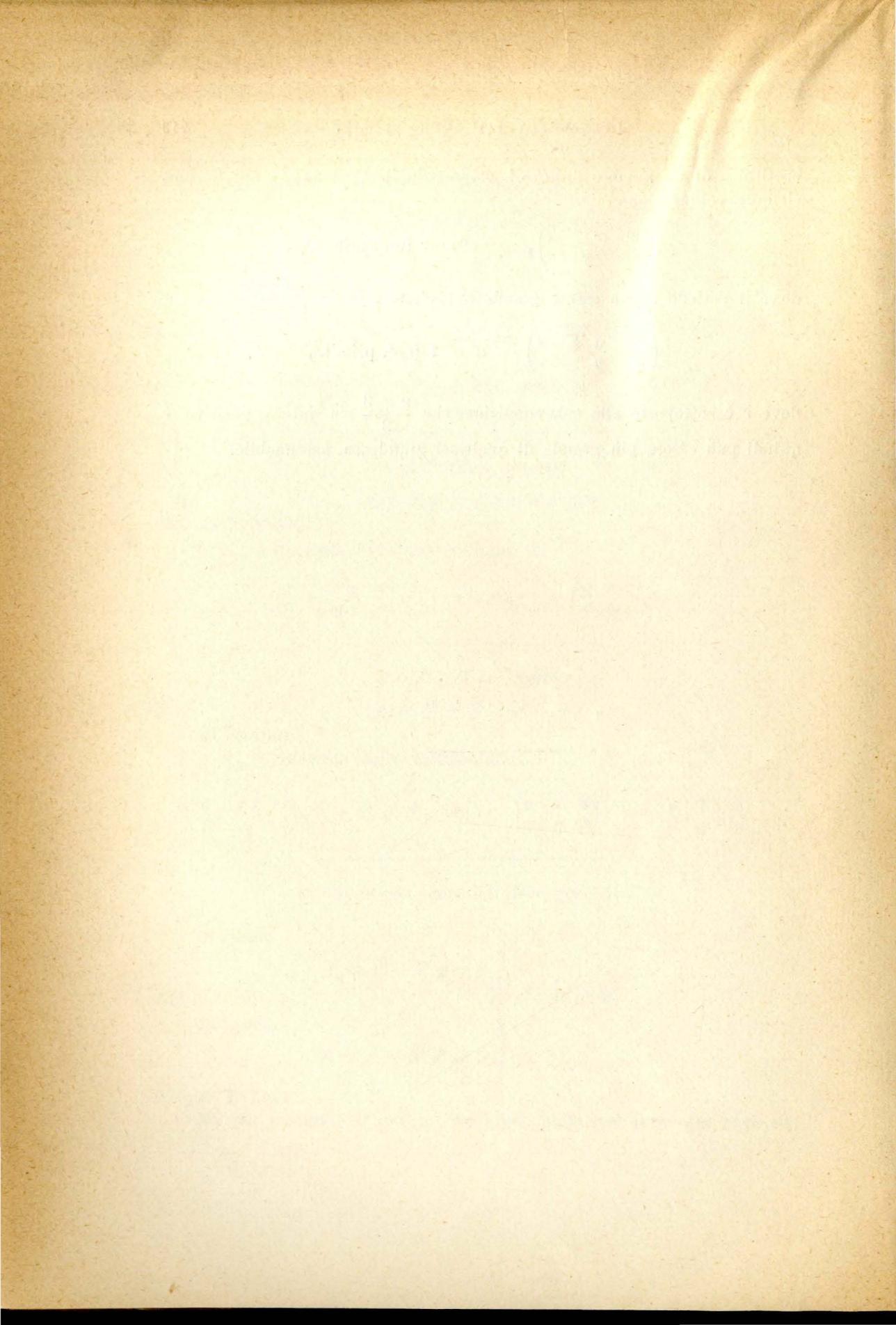
costituito di un numero finito di collineazioni). Così la 1^a specie possiede la collineazione

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^{r-1} & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \quad \alpha^r = 1 \text{ (rad. primit.)},$$

dove il periodo r può essere grande a piacere, e la 2^a possiede

$$\begin{pmatrix} \alpha x & \alpha^{\frac{r-3}{2}} & z \\ x & y & z \end{pmatrix} \quad \alpha^r = 1 \text{ (rad. primit.)},$$

dove r è sottoposto alla sola condizione che $\frac{r-3}{2}$ sia intero positivo e quindi può essere più grande di qualsiasi grandezza assegnabile.



ALCUNE COSTRUZIONI INERENTI ALLA QUARTICA PIANA DOTATA DI UN PUNTO DOPPIO

[Giorn. di Mat.^{ca} 1915]

Le seguenti considerazioni, di carattere semplice e quasi elementare, hanno avuto origine della lettura di due Note, l'una del BRIOSCHI, l'altra del CREMONA, di cui l'argomento è la quartica piana con un punto doppio (1). Avverto però che il presente scritto è affatto indipendente da tali Note. La parte essenziale è la costruzione presentata al N. 4 e forse avrei potuto limitarmi a indicarla, senz'altro aggiungere, nella sicurezza che un lettore esperto troverebbe subito il modo di giustificarla: se invece ho aggiunto quei dettagli che conducono nel modo più semplice a dimostrarla e a delucidarla, è perchè mi lusingo che la facile lettura di tali schiarimenti possa invogliare qualche giovane studente a proseguire in questo indirizzo che, per quanto modesto, non è sicuramente privo di un certo interesse.

1. Consideriamo, in un piano, due fasci proiettivi di raggi non concentrici, nè prospettivi. Indicandone i centri con R , R' e assumendo questi due punti come (100) , (010) , due raggi corrispondenti potranno rappresentarsi con

$$x_2 = \lambda x_3 \quad , \quad \lambda x_1 = x_3$$

dove λ è il parametro della proiettività. I due fasci in parola generano la conica c_2 :

$$x_1 x_2 - x_3^2 = 0$$

la quale è tangente a $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, rispettivamente in R' R . Queste

(1) BRIOSCHI, *Les tangentes doubles à une courbe du quatrième ordre avec un point double*. Math. Annal. Bd. 4, pag. 95.

CREMONA, *Observations géométriques à propos de la Note de M. Brioschi: Sur les tangentes doubles d'une courbe du 4^e ordre avec un point double* Ibid. pag. 99.

tangenti si tagliano in $P \equiv (001)$ che è il cosiddetto centro di collineazione.

La proiettività così definita viene a istituire una corrispondenza biunivoca, fra i punti del piano-ambiente, riguardando un suo punto generico M come la intersezione dei due raggi a, b' che lo proiettano da R, R' , e assumendo come punto corrispondente quello dove si tagliano i raggi a', b corrispondenti ad a, b' , nella proiettività in parola. Indicando con N il corrispondente di M si vede che la retta MN passa per P , che M ed N sono coniugati rispetto alla conica c_2 e che quindi, sulla retta MN , è armonico il gruppo formato da MN e dai punti d'incontro di tal retta con la conica medesima. Si conclude dunque che la corrispondenza così costruita è una inversione quadrica di HIRST avente P come centro e c_2 come conica d'inversione. La già attuata disposizione degli elementi di riferimento permette di rappresentare analiticamente questa inversione mediante la sostituzione:

$$I \equiv \begin{Bmatrix} x_1 x_3 & x_2 x_3 & x_1 x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{Bmatrix}$$

da effettuarsi sopra le coordinate omogenee $x_1 x_2 x_3$ del punto generico M . La I non è che una particolare trasformazione quadratica che ha per triangolo fondamentale quello di riferimento. Ad una retta generica del piano ambiente corrisponde quindi una conica circoscritta al triangolo suddetto: fanno eccezione le rette passanti per P ciascuna delle quali è unita, e quelle passanti per R alle quali corrispondono le rette passanti per R' secondo la proiettività definita in principio, per cui può dirsi che questa proiettività sia contenuta nella inversione I .

2. Alla figura precedente si aggiunga ora una cubica c_3 , nel piano ambiente, sottoposta alla sola condizione di essere irriducibile e di avere un punto doppio nel punto P centro della inversione I . Siccome è scopo di questa Nota di indicare la possibilità pratica delle relative costruzioni mediante riga e compasso, così osserveremo subito che la costruzione della cubica c_3 in parola si può facilmente ottenere riguardandola, ad esempio come la curva corrispondente ad una conica passante per P in un'altra inversione quadrica la quale sia sottoposta alla condizione di avere il centro ancora in P ed esterni alla conica suddetta i due rimanenti punti fondamentali. Tenendo presente la già attuata posizione del triangolo fondamentale, si vede che l'equazione della cubica c_3 potrà scriversi sotto la forma:

$$2 u x_3 + v = 0$$

dove u e v sono binarie in x_1, x_2 , dei gradi rispettivi 2° e 3° e dove il fattore 2 è stato posto per comodità dei calcoli che seguiranno.

3. Costruite, in tal guisa, le curve c_2 e c_3 consideriamo il seguente

luogo geometrico. Sopra ogni secante comune alle due curve e passante per P , si costruisca la coppia armonica alle due coppie di punti costituite dalle intersezioni della secante con l'una e con l'altra delle due curve suddette. A scanso di equivoci è bene osservare subito che (pure essendo P doppio per c_3) le due intersezioni con c_3 , si intendono costituite da P e dall'ulteriore punto d'incontro della secante medesima con c_3 . Per ottenere l'equazione del luogo cercato, si osservi che si possono rappresentare analiticamente tutti i punti della secante in parola tenendo fisso il rapporto $\frac{x_1}{x_2}$ delle prime due coordinate e facendo variare la terza coordinata x_3 così da riferire i punti suddetti ai valori del parametro x_3 . Ora una coppia di punti, come MN del numero precedente, formanti un gruppo armonico rispetto alle due intersezioni con c_2 , non sono altro che due punti corrispondenti secondo la inversione I e quindi (N. 1):

$$M \equiv (x_1, x_2, x_3) \quad ; \quad N \equiv \left(x_1, x_2, \frac{x_1 x_2}{x_3} \right).$$

Indicando poi con L il punto in cui la retta MN incontra c_3 , fuori di P , si desume dalla equazione di c_3 :

$$L \equiv \left(x_1, x_2, -\frac{v}{2u} \right).$$

D'altra parte:

$$P \equiv (0, 0, 1).$$

Se dunque il gruppo $MNLP$ deve essere armonico occorre e basta che sia:

$$\left(x_3, \frac{x_1 x_2}{x_3}, -\frac{v}{2u}, \infty \right) = -1$$

cioè:

$$(1) \quad u(x_1 x_2 + x_3^2) + v x_3 = 0$$

la quale equazione rappresenta una quartica con un punto doppio in P . È dunque questo il luogo cercato.

4. Viceversa è facile vedere che l'equazione di una quartica piana con un punto doppio (nodo), in generale, può ridursi alla forma (1). Va soltanto escluso il caso particolare in cui le tangenti nodali sieno anche tangenti di flesso. Infatti, escludendo questo caso, si può esser sicuri che la retta che unisce i due tangenziali TT' del punto doppio in parola, non passa pel punto doppio medesimo. Allora indicando con P questo punto, con R, R' , le ulteriori intersezioni della retta TT' con la curva, basta riferirla

al triangolo PRR' perchè la equazione relativa assuma la forma (1) del numero precedente (1).

Vale dunque la seguente costruzione:

« Date in un piano una conica e una cubica dotata di un punto doppio, se sopra ogni secante comune, passante pel punto doppio, si costruisce la coppia armonica alle coppie d'intersezione con le due curve, il luogo geometrico dei punti componenti tali infinite coppie armoniche, è una quartica che ha un punto doppio nel punto nominato e le relative tangenti nodali coincidenti con quelle della cubica ».

Per la migliore intelligenza della costruzione è utile aggiungere i seguenti schiarimenti. Le due curve sieno irriducibili e sottoposte alla condizione restrittiva che la conica non passi per il punto doppio della cubica. È da intendere che le due intersezioni della secante in parola, con la cubica, siano da riguardarsi costituite dal punto doppio (contato per uno) e dall'ulteriore punto comune della secante con la cubica medesima. Dalla generazione precedente si esclude il caso particolare in cui le tangenti nodali sieno anche tangenti di flesso (quello che dal punto di vista delle trasformazioni birazionali costituisce « la forma normale iperellittica »).

5. Chiamando, per brevità, curve generatrici, la conica e la cubica si vede che:

« La conica generatrice non è altro che la conica fondamentale della inversione quadrica I di Hirst che trasforma la quartica in sè stessa essendo centro d'inversione il punto doppio della curva. La conica in parola passa dunque per i sei punti di contatto delle tangenti condotte alla quartica, dal suo punto doppio, e quindi coincide con la conica di Bertini » (2).

Si può aggiungere che la involuzione razionale g'_2 sulla quartica, che basta ad imprimerle il carattere iperellittico, è da riguardarsi come contenuta nella inversione I suddetta.

« Quanto infine alla cubica generatrice si vede subito che essa viene ad essere la prima polare del punto doppio rispetto alla quartica generata ».

6. Un altro modo di generare la nostra curva discende dalle seguenti considerazioni. Riprendiamo a considerare due suoi punti M, N allineati col punto doppio P . Le rette che proiettano M, N , dai punti R, R' del n. 1 si incontrano in due punti A, B che appartengono manifestamente alla conica generatrice. Ne segue che le tangenti a tale conica in A e B si incontrano in un punto L della retta MN che è coniugato armonico di P rispetto alla coppia MN . Dunque L appartiene alla prima polare di P

(1) J. DE VRIES. *La quartique nodale*. Archives Teyler. s. II. t. IX.

(2) Cfr. ad es. il N. 29 della mia monografia: *Le curve piane di 4° ordine*. Giorn. di matematiche di Batt., v. XLVIII (1° della 3ª serie).

cioè alla cubica generatrice. Rovesciando il procedimento si ha quindi quest'altra costruzione della nostra quartica.

« Se da un punto qualunque della cubica generatrice si conducono le tangenti alla conica generatrice e se ne proiettano i punti di contatto da R, R', gli ulteriori due punti d'incontro di queste proiettanti forniscono due punti della quartica allineati col suo punto doppio ».

7, Una terza generazione della curva si può desumere dalla considerazione di una corrispondenza fra i punti della conica generatrice che si istituisce mediante le osservazioni seguenti. Preso un punto qualunque A della conica in parola, lo si congiunga con R, si cerchino poi i tre punti in cui la retta RA incontra ulteriormente la quartica (oltre R) e si proiettino questi tre punti da R': segnando questi raggi con la conica suddetta si troveranno tre punti B, C, D che riguarderemo come corrispondenti, di A. È ovvia la costruzione inversa. Si ha così, sulla conica generatrice, una corrispondenza (3, 3) che vogliamo ora rappresentare analiticamente. A tale scopo, scrivendo per disteso le due binarie che entrano nell'equazione della curva, questa può porsi sotto la forma:

$$(ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2)x_3^2 + x_1x_2 + (mx_1^3 + nx_1^2x_2 + px_1x_2^2 + qx_2^3)x_3 = 0.$$

Sieno ora:

$$A \equiv (\lambda^2, 1, \lambda) \quad , \quad B \equiv (\mu^2, 1, \mu)$$

due punti qualunque della conica generatrice: essi saranno corrispondenti, secondo il senso già stabilito dianzi, se le rette RA, R'B s'incontreranno in un punto M della nostra quartica, dopo di che s'incontreranno in un punto N della stessa curva anche le rette R'A, RB e inoltre M, N, saranno allineati con P. Tenendo presenti le coordinate di A, B, R, R' si trova che quelle di M, N, sono date da:

$$M \equiv (\lambda\mu, 1, \lambda) \quad ; \quad N \equiv (\lambda\mu, 1, \mu).$$

Esigendo che M (e quindi N) appartenga alla quartica, si perviene alla seguente relazione:

$$(a\lambda^2\mu^2 + b\lambda\mu + c)(\lambda + \mu) + m\lambda^3\mu^3 + n\lambda^2\mu^2 + p\lambda\mu + q = 0.$$

Essa collega i parametri λ, μ , di due punti corrispondenti sulla conica e individua quindi la corrispondenza cercata la quale viene a essere, per tal guisa, un sistema simmetrico (3, 3). Proiettando questo sistema simmetrico da R, R', viene a istituirsi una corrispondenza della stessa specie fra i raggi dei fasci che hanno i centri in quei punti e nasce così

una ulteriore generazione della nostra quartica come il luogo dei punti d'incontro dei raggi corrispondenti dei due fasci.

8. Chiuderemo queste poche osservazioni segnalando due curve invariante notevoli. L'una è un covariante e si può riguardare come la curva corrispondente alla cubica generatrice nella inversione che tramuta la quartica in sè stessa. L'equazione di questo covariante è quindi:

$$vx_3 + 2ux_1x_2 = 0$$

che rappresenta un'altra quartica con un punto triplo nel punto doppio della quartica primitiva. Riprendendo le notazioni dei numeri precedenti, si vede subito che la retta MN incontra il covariante in parola, oltre che nel punto triplo, nel suo punto K d'incontro con la AB. Ora se s'indica con S il punto in cui MN incontra RR' si vede che è armonico il gruppo MNSK, da cui si trae che la quartica covariante in parola è anche la corrispondente della retta RR' nella involuzione di JONQUIÈRES che ha per curva fondamentale la quartica primitiva.

L'altra curva invariante, di cui sopra, non è altro che l'involuppo delle rette che uniscono i punti corrispondenti della conica generatrice secondo il sistema (3, 3) del numero precedente. Con le solite notazioni si riscontra che la retta AB del nostro involuppo non è altro che la polare del punto L della cubica rispetto alla conica generatrice. Dunque l'involuppo in parola si può riguardare come la curva polare reciproca della cubica, rispetto alla conica generatrice, il che permette di scriverne subito l'equazione sotto la forma:

$$u_3 (au_2^2 + bu_1u_2 + cu_1^2) - (mu_2^3 + nu_2^2u_1 + pu_2u_1^2 + qu_1^3) = 0.$$

Quest'involuppo è dunque un contravariante di 3^a classe, dotato di una tangente doppia, ecc., ecc.

**SOPRA ALCUNI GRUPPI NOTEVOLI
DI TRASFORMAZIONI QUADRATICHE PIANE.**

Estratto dal tomo XLII (1917) dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*

Le trasformazioni quadratiche le quali intendo presentare al Lettore, in questo scritto, hanno la proprietà fondamentale di trasformare, in sè stessa, la figura composta da due gruppi, di quattro raggi ciascuno, corrispondenti in due fasci proiettivi non concentrici e situati nel medesimo piano. La semplicità estrema di questa configurazione invariante (che è, per così dire, il nucleo dello studio attuale) mette in evidente interesse la considerazione del gruppo generato dalle trasformazioni in parola che è dell'8° ordine se le due quaterne di raggi sono generiche, del 48° se sono armoniche e del 96° se sono equianarmoniche. Le più notevoli di queste trasformazioni sono inversioni di HIRST, altre sono involutorie con 4 punti uniti, le rimanenti hanno il periodo 3, o 4, a seconda dei casi.

Ma l'interesse aumenta pensando alle possibili applicazioni. L'esempio più espressivo viene dato dalla quartica piana con due punti doppi, giacchè è ben noto che le due quaterne di tangenti alla curva, tirate da tali punti, sono proiettive. Nasce dunque l'idea di applicare, a tali quaterne, le considerazioni svolte in questa Nota, così da far ritenere che le proprietà della configurazione attuale possano cambiarsi in altrettante proprietà della quartica ellittica. Avverto però che un tale cambiamento non sembra nè facile, nè conforme alle più ovvie ed immediate previsioni: oserei dire che anzi si presenta addirittura in contraddizione con proposizioni comunemente accettate (almeno nel caso metrico speciale in cui i centri dei fasci sieno i punti ciclici e quindi la quartica sia bicircolare). Il dimostrare quanto questa contraddizione sia fondata, come e perchè si giustifichi, sarà oggetto di una prossima pubblicazione dedicata esclusivamente alle quartiche piane che sono invarianti rispetto a trasformazioni quadratiche.

IL CASO GENERICO.

1, In un piano abbiasi due quaterne proiettive di raggi:

$$a b c d \overline{\wedge} a' b' c' d'$$

in due fasci non sovrapposti e sieno $x y z$ le coordinate omogenee di un punto qualunque del piano. Assumendo due punti fondamentali nei centri F ed F' dei due fasci e il terzo punto fondamentale G_1 nel centro della collineazione della proiettività suddetta, scriveremo:

$$F \equiv (1, 0, 0); F' \equiv (0, 1, 0); C_1 \equiv (0, 0, 1).$$

Allora tale proiettività si può rappresentare esigendo che sieno corrispondenti i due raggi:

$$\lambda y - z = 0, \quad x - \lambda z = 0$$

dove λ è un parametro. La conica k_1 , che essa genera, è quindi rappresentata da:

$$k_1 \equiv \{x y - z^2 = 0\}.$$

Indicando con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, quattro valori generici del parametro λ , rappresenteremo così le due quaterne $a b c d, a' b' c' d'$:

$$a \equiv \{\alpha y - z = 0\}, \quad b \equiv \{\beta y - z = 0\}, \quad c \equiv \{\gamma y - z = 0\}, \quad d' \equiv \{\delta y - z = 0\}$$

$$a' \equiv \{x - \alpha z = 0\}, \quad b' \equiv \{x - \beta z = 0\}, \quad c' \equiv \{x - \gamma z = 0\}, \quad d' \equiv \{x - \delta z = 0\}$$

da cui segue:

$$a \cdot a' \equiv (\alpha^2, 1, \alpha); \quad b \cdot b' \equiv (\beta^2, 1, \beta); \quad c \cdot c' \equiv (\gamma^2, 1, \gamma); \quad d \cdot d' \equiv (\delta^2, 1, \delta)$$

ed è ovvio verificare che questi punti esistono sopra k_1 . Ciò premesso si vede facilmente che esiste una inversione quadrica di HIRST che ha il centro in C_1 e per conica fondamentale k_1 , la quale trasforma in se stessa la configurazione descritta sinora subordinando fra i fasci di centri F ed F' la proiettività dinanzi menzionata. Questa inversione che indicheremo col simbolo T_1 , può rappresentarsi analiticamente con la sostituzione:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x z & y z & x y \\ x & y & z \end{array} \right\} \equiv T_1$$

da intendersi nel senso che, per attuarla, debbano sostituirsi alle coordinate x, y, z di un punto qualunque, ordinatamente i prodotti $x z, y z, x y$.

2. Insieme alla inversione T_1 si può constatare, analogamente, l'esistenza di altre tre inversioni T_2, T_3, T_4 , che adempiano un ufficio analogo. Basta perciò osservare che da:

segue:

$$\begin{aligned} & a b c d \overline{\wedge} a' b' c' d' \\ & a b c d \wedge b' a' d' c' \\ & a b c d \overline{\wedge} c' d' a' b' \\ & a b c d \overline{\wedge} d' c' b' a' \end{aligned}$$

e quindi possiamo ripetere, ogni volta, le considerazioni del N. precedente. Indicando ordinatamente con C_2, C_3, C_4 , i centri di queste nuove inversioni e con k_2, k_3, k_4 , le relative coniche fondamentali si trova:

$$C_2 \equiv \{ \alpha \beta (\gamma + \delta) - \gamma \delta (\alpha + \beta), (\alpha + \beta) - (\gamma + \delta), (\alpha \beta - \gamma \delta) \}$$

$$C_3 \equiv \{ \alpha \gamma (\beta + \delta) - \beta \delta (\alpha + \gamma), (\alpha + \gamma) - (\beta + \delta), (\alpha \gamma - \beta \delta) \}$$

$$C_4 \equiv \{ \alpha \delta (\beta + \gamma) - \beta \gamma (\alpha + \delta), (\alpha + \delta) - (\beta + \gamma), (\alpha \delta - \beta \gamma) \}$$

e per le coniche fondamentali ordinatamente:

$$(\alpha \gamma - \beta \delta) (z^2 + x y) - \{ \alpha \beta (\gamma + \delta) - \gamma \delta (\alpha + \beta) \} y z - \{ (\alpha + \beta) - (\gamma + \delta) \} x z = 0,$$

$$(\alpha \gamma - \beta \delta) (z^2 + x y) - \{ \alpha \gamma (\beta + \delta) - \beta \delta (\alpha + \gamma) \} y z - \{ (\alpha + \gamma) - (\beta + \delta) \} x z = 0,$$

$$(\alpha \delta - \beta \gamma) (z^2 + x y) - \{ \alpha \delta (\beta + \gamma) - \beta \gamma (\alpha + \delta) \} y z - \{ (\alpha + \delta) - (\beta + \gamma) \} x z = 0.$$

3. Le formule precedenti possono compendiarsi osservando che se con (m, n, p) si indicano le coordinate di uno qualsiasi dei tre centri C_2, C_3, C_4 , la relativa conica fondamentale è:

$$(2) \quad p (z^2 + x y) - m y z - n x z = 0.$$

In tal guisa la corrispondente inversione viene ad essere rappresentata mediante la sostituzione:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} (p x - m z) (p z - m y), & (n x - p z) (n z - p y), & (n z - p y) (p x - m z) \\ x & y & z \end{array} \right\}.$$

Così si può intendere che questa sostituzione serva a rappresentare tutt'e tre le inversioni $T_2 T_3 T_4$: basta perciò porre per m, n, p , le coordinate dei centri rispettivi (N. 2), come per ottenere le rispettive coniche fondamentali basta fare la stessa sostituzione nella equazione (2).

4. Le inversioni $T_1 T_2 T_3 T_4$ sono, a due, a due, permutabili. Consideriamo infatti due qualunque di esse: ad es. $T_1 T_2$.

Servendosi delle (1) e (3) si vede che si ha:

$$(4) \quad T_1 T_2 = T_2 T_1 \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} (p z - m y) (p x - m z), & (n z - p y) (n x - p z), & (n x - p z) (p z - m y) \\ x & y & z \end{array} \right\}.$$

Si perviene così a una nuova trasformazione quadratica che ha per punti fondamentali F, F' e il punto (mp, np, mn) , e quattro punti uniti che sono quelli comuni alle due coniche degeneri:

$$n x^2 - 2 p x z + m z^2 = 0, \quad m y^2 - 2 p y z + n z^2 = 0.$$

Dalla

$$T_1 T_2 = T_2 T_1$$

segue inoltre :

$$(T_1 T_2)^2 = T_1 T_2 T_2 T_1 \equiv T_1 T_2^2 T_1 = T_1^2 = 1,$$

cioè anche $T_1 T_2$ è involutoria.

5. Consideriamo adesso il prodotto $T_2 T_3 T_1$. Osserveremo perciò che indicando con $(m_2 n_2 p_2)$ $(m_3 n_3 p_3)$ le coordinate di C_2 e di C_3 e ponendo :

$$\begin{aligned} p_2 p_3 - m_2 n_3 &= q; & m_2 p_3 - m_3 p_2 &= r; \\ n_2 p_3 - p_2 n_3 &= s; & p_2 p_3 - n_2 m_3 &= t; \end{aligned}$$

si trova :

$$T_2 T_3 T_1 \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} (q z + r y)(q x + r z), & (s z + t y)(s x + t z), & (s z + t y)(q x + r z) \\ x & y & z \end{array} \right\}.$$

Ora l'inversione quadrica che ha per centro $(rt, qs, -qt)$ e per conica fondamentale :

$$q t (z^2 + x y) + r t y z + q s x z = 0$$

è rappresentata da (N. 3) :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} t^2 (q z + r y)(q x + r z), & q^2 (s z + t y)(s x + t z), & - q t (s z + t y)(q x + r z) \\ x & y & z \end{array} \right\}$$

la quale trasformazione coincide con $T_2 T_3 T_1$ purchè si abbia

$$q = -t$$

cioè

$$2 p_2 p_3 = m_2 n_3 + n_2 m_3$$

il che si verifica subito ponendo per $m_2 n_2 p_2$, $m_3 n_3 p_3$ i rispettivi valori dati nel N. 2. Dunque, intanto, il prodotto $T_2 T_3 T_1$ è una inversione.

6. Questo fatto induce a ritenere che $T_2 T_3 T_1$ debba coincidere con T_4 . La conferma di questa induzione si ottiene osservando che le condizioni affinchè la inversione $T_2 T_3 T_1$ coincida con quella che ha per centro (m, n, p) e per conica fondamentale :

$$p (z^2 + x y) - m y z - n x z = 0$$

sono :

$$r t : q s : - q t = m : n : p$$

le quali, a causa di $t = -q$, divengono:

$$ms + rn = 0, \quad tm - pr = 0.$$

Ebbene queste si verificano subito prendendo per m, n, p , le coordinate di C_4 (N. 2) e per r, s, t , i rispettivi valori dati nel N. 5.

Dunque effettivamente

$$T_2 T_3 T_1 = T_4,$$

da cui:

$$T_2 T_3 = T_4 T_1.$$

Si conclude quindi:

« Le quattro inversioni $T_1 T_2 T_3 T_4$ sono, a due, a due, permutabili. Il prodotto di due qualunque di esse equivale al prodotto delle due rimanenti, come il prodotto di tre qualsiasi equivale alla quarta. Da tali prodotti, a due, a due, si ottengono, per conseguenza, tre sole nuove trasformazioni che sono ancora quadratiche e involutorie (ma non inversioni). Aggiungendo l'identità si viene a formare un gruppo G_8 , di ottavo ordine, rispetto al quale la configurazione attuale è invariante. Esso possiede, come sottogruppo quadrimo invariante, quello costituito dai tre prodotti $T_h T_k$ e dall'identità ».

7. Essendo le T_h a periodo due e permutabili fra loro, ne segue che ciascuna è invariante rispetto a una qualunque delle rimanenti. Infatti da

$$T_h T_k = T_k T_h$$

segue

$$T_h T_k T_h = T_k T_h^2$$

ma

$$T_h^2 = 1, \quad T_h^{-1} = T_h$$

e quindi

$$T_h^{-1} T_k T_h = T_k$$

Però bisogna bene intendersi sul valore dell'affermazione precedente. Quando si dice, ad esempio, che T_2 è invariante rispetto a T_1 , ciò significa che se a due punti PQ corrispondenti (secondo la T_2) si applica la T_1 i nuovi punti RS , che così si ottengono, sono ancora corrispondenti secondo la T_2 medesima. Per indurre poi da ciò che il centro di T_2 rimanga invariato per opera della T_1 , bisognerebbe che alla retta PQ corrispondesse, secondo la T_1 , la retta RS , il che non è perchè T_1 è quadratica e non lineare. È dunque naturale che il centro di T_2 non sia invariante rispetto a T_1 . Il che, del resto, risulta subito anche applicando, a tal centro, la $T_1^{-1} T_2 T_1$: esso rimarrebbe invariato se fosse un punto unito per T_2 il che non è. D'altra parte è invece indubbio ed evidente che sia invariante rispetto a T_1 la conica fondamentale di T_2 .

8. Mediante le trasposizioni attuate sopra le rette $abcd, a'b'c'd'$ delle due quaterne, le trasformazioni del gruppo G_8 , descritto al n° 6, possono rappresentarsi con i seguenti simboli :

$$T_1 = (a a') (b b') (c c') (d d')$$

$$T_2 = (a b') (b a') (c d') (c d)$$

$$T_3 = (a c') (b d') (c a') (d b')$$

$$T_4 = (a d') (b c') (c b') (d a')$$

$$T_1 T_2 = T_2 T_1 = T_3 T_4 = T_4 T_3 = (a b) (c d) (a' b') (c' d')$$

$$T_1 T_3 = T_3 T_1 = T_2 T_4 = T_4 T_2 = (a c) (b d) (a' c') (b' d')$$

$$T_1 T_4 = T_4 T_1 = T_2 T_3 = T_3 T_2 = (a d) (b c) (a' d') (b' c')$$

identità.

Circa poi alla composizione del gruppo attuale si può osservare che « esso è isomorfo oloedrico col gruppo generato dalle quattro omologie armoniche individuate dai vertici e dalle facce di uno stesso tetraedro, alle quali omologie vengono ad aggiungersi i loro prodotti, a due, a due, cioè le tre involuzioni gobbe che hanno per assi gli spigoli opposti del tetraedro e l'identità ». Le collineazioni di un tal gruppo possono rappresentarsi con la sostituzione :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \pm x_1, & \pm x_2, & \pm x_3, & \pm x_4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{array} \right\}$$

dove le x_i della linea inferiore sono le coordinate omogenee di un punto generico dello spazio, e venga stabilito che a ciascuna debba esser sostituita la corrispondente della linea superiore combinando i segni in tutti i modi possibili.

9. Abbiamo già osservato al n° 4 che le trasformazioni quadratiche costituite dai prodotti $T_h \cdot T_k$, pure essendo involutorie, non sono inversioni e posseggono ciascuna quattro punti uniti che adesso vogliamo meglio considerare. Ad esempio, due punti uniti della $T_1 \cdot T_2$ sono evidentemente quelle due intersezioni M, N , delle coniche $k_1 k_2$ che sono diverse da F e da F' . I due rimanenti punti uniti PQ esisteranno, manifestamente, sulla retta $C_1 C_2$ componendo su di essa la coppia armonica alle due coppie d'intersezione di tale retta con le coniche k_1 e k_2 . Siccome poi il prodotto $T_3 \cdot T_4$ equivale a $T_1 \cdot T_2$ (n° 6) così ne viene che M, N sono anche i punti d'incontro di k_3 con k_4 (fuori di F ed F') come pure i punti M, N esisteranno sulla retta $C_3 C_4$ e comporranno, su di essa, la coppia armonica alle due coppie d'intersezione della retta medesima con le nominate coniche k_3 e k_4 . Si può aggiungere qualche altro particolare. Ad esempio, le coniche k_1 e k_2 sono le seguenti (n° 1 e 2):

$$xy - z^2 = 0$$

$$(\alpha\beta - \gamma\delta)(z^2 + xy) - \{\alpha\beta(\gamma + \delta) - \gamma\delta(\alpha + \beta)\}yz - \{(\alpha + \beta) - (\gamma + \delta)\}xz = 0$$

Per individuare i punti M, N , basta osservare che un punto variabile, sopra k_1 , ha per coordinate $(\lambda^2, 1, \lambda)$, quindi M ed N saranno determinati dalla equazione in λ :

$$(5) \quad \{(\alpha + \beta) - (\gamma + \delta)\} \lambda^2 - 2\lambda(\alpha\beta - \gamma\delta) + \alpha\beta(\gamma + \delta) - \gamma\delta(\alpha + \beta) = 0$$

Ebbene, vogliamo dimostrare che la coppia MN separa armonicamente, sopra k_1 , le due coppie di punti (a, a', b, b') ; (c, c', d, d') . Infatti queste due coppie di punti sono individuate, sopra k_1 , dai valori $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, del parametro λ (n° 1): indicando dunque con λ_1, λ_2 quei valori di λ che individuano la coppia armonica in parola avremo:

$$(\alpha\beta\lambda_1\lambda_2) = -1; \quad (\gamma\delta\lambda_1\lambda_2) = -1$$

cioè:

$$2(\alpha\beta + \lambda_1\lambda_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)(\alpha + \beta)$$

$$2(\gamma\delta + \lambda_1\lambda_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)(\gamma + \delta)$$

da cui:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{2(\alpha\beta - \gamma\delta)}{(\alpha + \beta) - (\gamma + \delta)}, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{\alpha\beta(\gamma + \delta) - \gamma\delta(\alpha + \beta)}{(\alpha + \beta) - (\gamma + \delta)}$$

il che prova come λ_1 e λ_2 siano radici della (5) e quindi la nostra affermazione è dimostrata.

Si può dunque concludere che:

« I punti uniti delle tre trasformazioni T_h, T_k sono le 12 intersezioni, a due, a due, delle quattro coniche fondamentali $k_1 k_2 k_3 k_4$ (all'infuori dei punti E ed F'). Sopra ciascuna di tali coniche esistono quindi sei di tali punti componenti il covariante sestico della binaria biquadratica rappresentata dai quattro punti di tal conica in cui s'incontrano i raggi delle due quaterne $abcd, a'b'c'd'$.

I medesimi punti uniti esistono anche, a due, a due, sopra i sei lati del quadrangolo completo i cui vertici sono i quattro centri d'inversione e sopra ciascun lato, compongono la coppia armonica alle due coppie d'intersezione del lato con le due coniche fondamentali relative ai due centri situati su quel medesimo lato ».

IL CASO ARMONICO.

10. Le due quaterne $abcd \overline{\wedge} a'b'c'd'$ siano armoniche. In tal caso oltre:

$$abcd \overline{\wedge} a'b'c'd' \overline{\wedge} b'a'd'c' \overline{\wedge} c'd'a'b' \overline{\wedge} d'c'b'a'$$

abbiamo anche:

$$a b c d \overline{\wedge} a' b' d' c' \overline{\wedge} b' a' c' d' \overline{\wedge} c' d' b' a' \overline{\wedge} d' c' a' b'$$

e quindi, imitando il ragionamento dei n° 1 e 2, si vede che, alle inversioni del caso generico, vengono ad aggiungersene altre quattro provenienti dal confronto della quaterna $a b c d$ con ciascuna delle tre rimanenti della seconda linea precedente.

Per considerare il gruppo di trasformazioni, che per tal guisa è generato, cominciamo da scrivere nel modo seguente le trasformazioni del gruppo generico (n° 8):

$$\begin{aligned} T_1 &= (a a') (b b') (c c') (d d'); & T'_1 &= \text{identità} \\ T_2 &= (a b') (b a') (c d') (d c'); & T'_2 &= (a b) (c d) (a' b') (c' d') \\ T_3 &= (a c') (b d') (c a') (d b'); & T'_3 &= (a c) (b d) (a' c') (b' d') \\ T_4 &= (a d') (b c') (c b') (d a'); & T'_4 &= (a d) (b c) (a' d') (b' c') \end{aligned}$$

Così ciascuna T'_h di sinistra è ottenuta moltiplicando la T_h corrispondente di destra per T_1 .

Nel caso attuale vengono ad aggiungersi, come abbiamo osservato sopra, le seguenti 4 inversioni che scriveremo ponendo di faccia a ciascuna il proprio prodotto per T_1 :

$$\begin{aligned} T_5 &= (a a') (b b') (c d') (d c'); & T'_5 &= (c d) (c' d') \\ T_6 &= (a b') (b a') (c c') (d d'); & T'_6 &= (a b) (a' b') \\ T_7 &= (a c') (b d') (c b') (d a'); & T'_7 &= (a c b d) (a' d' b' c') \\ T_8 &= (a d') (b c') (c a') (d b'); & T'_8 &= (a d b c) (a' c' b' d'). \end{aligned}$$

Mediante tutti i prodotti possibili vengono infine ad aggiungersi le seguenti che accoppieremo nel solito modo:

$$\begin{aligned} T_9 &= (a b' b a') (c c' d d'); & T'_9 &= (a b) (c' d') \\ T_{10} &= (a a' b b') (c d' d c'); & T'_{10} &= (c d) (a' b') \\ T_{11} &= (a c' b d') (a' d b' c); & T'_{11} &= (a c) (b d) (a' d') (b' c') \\ T_{12} &= (a d' b c') (a' c b' d); & T'_{12} &= (a d) (b c) (a' c') (b' d') \\ T_{13} &= (a b' b a') (c d' d c'); & T'_{13} &= (a b) (c d) \\ T_{14} &= (a c' b d') (a' c b' d); & T'_{14} &= (a c b d) (a' c' b' d') \\ T_{15} &= (a d' b c') (a' d b' c); & T'_{15} &= (a d b c) (a' d' b' c') \\ T_{16} &= (a a' b b') (c c' d d'); & T'_{16} &= (a' b') (c' d') \end{aligned}$$

11. Vogliamo dimostrare che queste sostituzioni formano un gruppo di ordine 32. A tale scopo osserveremo che le 16 sostituzioni T_h permu-

tano fra loro i due fasci di centri F, F' , mentre le altre 16 sostituzioni T'_h li lasciano entrambi invariati. Ebbene, cominceremo dal dimostrare che queste ultime formano un gruppo G_{16} di 16° ordine. Perciò considereremo ogni sostituzione T'_h composta di due: una che opera sopra i raggi $a b c d$ di F e l'altra sopra i raggi $a' b' c' d'$ di F' . Scriviamo queste due sostituzioni l'una di faccia all'altra, per ogni T'_h dividendole nelle 4 specie seguenti

$$\left\{ \begin{array}{l|l} \text{identità} & \text{identità} \\ (a b) (c d) & (a' b') (c' d') \end{array} \right\} \text{ 1ª specie}$$

$$\left\{ \begin{array}{l|l} (a c) (b d) & (a' c') (b' d') \\ (a d) (b c) & (a' d') (b' c') \end{array} \right\} \text{ 2ª specie}$$

$$\left\{ \begin{array}{l|l} (a b) & (a' b') \\ (c d) & (c' d') \end{array} \right\} \text{ 3ª specie}$$

$$\left\{ \begin{array}{l|l} (a c b d) & (a' c' b' d') \\ (a d b c) & (a' d' b' c') \end{array} \right\} \text{ 4ª specie}$$

È facile adesso constatare che le 16 sostituzioni T'_h si ottengono associando, in tutti i modi possibili, due sostituzioni del quadro precedente, una di sinistra e una di destra, sottoponendole alla sola condizione di appartenere alla stessa specie. Per scrivere poi le rimanenti 16 sostituzioni T_h basta moltiplicare le 16 sostituzioni T'_h così ottenute per T_1 . Ciò premesso, per dimostrare che le 16 T'_h formano gruppo, consideriamo il prodotto $T'_h T'_k$ di due qualunque di esse e osserviamo che le due sostituzioni di cui si compone ogni T'_h (una sopra $a b c d$, l'altra sopra $a' b' c' d'$) sono permutabili. Allora, discutendo tutti i casi possibili, si giunge alle seguenti conclusioni.

Se entrambe le $T'_h T'_k$ sono della stessa specie il prodotto è di 1ª specie.

Se una è di 1ª e una di 2ª il prodotto è di 2ª.

Se una è di 1ª e una di 3ª il prodotto è di 3ª.

» » » » 1ª » » » 4ª » » » 4ª.

» » » » 2ª » » » 3ª » » » 4ª.

» » » » 2ª » » » 4ª » » » 3ª.

» » » » 3ª » » » 4ª » » » 2ª.

È così dimostrato che le 16 sostituzioni T'_h formano un gruppo G_{16} di 16° ordine.

12. Passiamo infine a dimostrare che tutte le 32 sostituzioni descritte al n° 10 formano un gruppo G_{32} . Osserveremo perciò che, per definizione, si ha:

$$(6) \quad T'_h = T_h T_1$$

da cui, essendo $T_1^2 = 1$,

$$(7) \quad T'_h T_1 = T_h.$$

È poi facile constatare che:

$$(8) \quad T_1 T'_h = T_l$$

Allora, il prodotto di due qualunque sostituzioni del n° 10 può presentare i seguenti casi:

$$T'_h \cdot T'_k; \quad T_h \cdot T'_k; \quad T'_h \cdot T_k; \quad T_h T_k.$$

Il primo caso è già stato considerato nel n° 11 e quindi si può scrivere:

$$(9) \quad T'_h \cdot T'_k = T'_l$$

Nel secondo caso, per le (8), (9), si ha:

$$T_h \cdot T'_k = T_1 T'_m T'_k = T_1 T'_n = T_s.$$

Nel terzo caso per le (8), (7), segue:

$$T'_h \cdot T_k = T'_h T_1 T'_m = T_h T'_m.$$

e quindi, ricadendo nel secondo caso, si avrà:

$$T'_h \cdot T_k = T_p.$$

Nel quarto caso per le (7), (8), (6), (9):

$$T_h \cdot T_k = T'_h T_1 T'_k T_1 = T'_h T_l T_1 = T'_h T'_l = T'$$

e il teorema è dimostrato in ogni caso.

13. Il gruppo G_{32} , ora individuato, possiede, come sottogruppo invariante, il G_{16} formato dalle sostituzioni T'_h , il quale G_{16} funziona in G_{32} in modo perfettamente analogo a quello di un gruppo alterno qualsiasi nel relativo gruppo totale. Un sottogruppo notevole del G_{16} è il G_8 formato dalle:

$$T'_1 T'_2 T'_3 T'_4 T'_{11} T'_{12} T'_{13} T'_{16}$$

e questo G_8 contiene, a sua volta, il sottogruppo quadrimo costituito dalle prime quattro delle sostituzioni precedenti. Un altro sottogruppo notevole del G_{32} è il G_8 del caso generico formato dal gruppo quadrimo precedente con l'aggiunta di $T_1 T_2 T_3 T_4$ etc. etc.

14. Così le 32 trasformazioni T_h, T'_h , del G_{32} sono caratterizzate mediante le sostituzioni che operano sopra le otto rette: $a b c d, a' b' c' d'$. Si

può dimostrare che tali trasformazioni sono tutte quadratiche. Infatti il G_{32} attuale si ottiene aggiungendo, al G_8 del caso generico, le quattro inversioni $T_5 T_6 T_7 T_8$ (n° 10). Ora tanto queste ultime quanto le trasformazioni che compongono il G_8 , sono tutte quadratiche e biunivoche. Tutti i loro prodotti possibili saranno dunque intanto delle trasformazioni birazionali. V'ha di più: ciascuna delle trasformazioni generanti il G_{32} subordina delle proiettività che scambiano i fasci F ed F' fra loro, o che li trasformano ciascuno in se stesso. Ne segue che anche il prodotto di un numero qualunque di tali trasformazioni generanti G_{32} si potrà sempre riguardare come ottenuto riferendo proiettivamente due coppie di fasci di raggi il che basta per assicurare che tale prodotto sarà una trasformazione quadratica.

15. Circa al periodo di queste trasformazioni esso è messo in evidenza dai simboli adoperati nel n° 10. Così hanno il periodo due le:

$$T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 T_7 T_8 T'_2 T'_3 T'_4 T'_5 T'_6 T'_9 T'_{10} T'_{11} T'_{12} T'_{13} T'_{16}$$

mentre le rimanenti (precindendo dall'identità) hanno il periodo 4. Circa alle prime si può aggiungere che le otto T_i sono inversioni rispetto a coniche non degeneri aventi in comune due punti fondamentali F ed F' . Le $T'_2 T'_3 T'_4 T'_5 T'_6 T'_9 T'_{10} T'_{11} T'_{12}$ non sono inversioni ma però sono sempre involutorie (con 4 punti uniti ciascuna). Finalmente le T'_{13}, T'_{16} sono inversioni rispetto a coniche degeneri in coppie di rette e si può ottenerne la rappresentazione analitica, direttamente, nel modo seguente. Consideriamo la:

$$T'_{16} = (a' b') (c' d').$$

Il simbolo che la rappresenta dice che sono invarianti le rette a, b, c, d , cioè sono invarianti tutte le rette passanti per F . Siccome poi essa è quadratica e involutoria, così ne segue che sarà una inversione col centro in F e finalmente poichè subordina intorno a F' l'involuzione individuata dalle coppie $(a' b')$, $(c' d')$, la conica fondamentale della inversione sarà costituita da una coppia di rette passanti per F' . Indichiamone l'equazione complessiva con:

$$h x^2 + 2 k x z + l z^2 = 0.$$

Allora, l'inversione che ha il centro in $F \equiv (100)$ e per conica fondamentale la coppia precedente è la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} -z(kx + lz) & y(hx + kz) & z(hx + kz) \\ x & y & z \end{array} \right\}.$$

Perchè questa coincida con T'_{16} bisogna e basta che sia operata la sostituzione $(a' b') (c' d')$. Ricordando (n° 1) che si ha:

$$a' \equiv \{ x - \alpha z = 0 \}, \quad b' \equiv \{ x - \beta z = 0 \}, \\ c' \equiv \{ x - \gamma z = 0 \}, \quad d' \equiv \{ x - \delta z = 0 \}$$

si trovano le condizioni:

$$h \alpha \beta + k (\alpha + \beta) + l = 0$$

$$h \gamma \delta + k (\gamma + \delta) + l = 0$$

da cui si possono ricavare k, l , prescindendo da un fattore di proporzionalità che non ha influenza. Si conclude così che

$$\text{la } T'_{16} \text{ trasforma } \begin{cases} x \text{ in } z \{ (\alpha \beta - \gamma \delta) x + [\gamma \delta (\alpha + \beta) - \alpha \beta (\gamma + \delta)] z \} \\ y \gg y \{ [(\alpha + \beta) - (\gamma + \delta)] x + (\gamma \delta - \alpha \beta) z \} \\ z \gg z \{ [(\alpha + \beta) - (\gamma + \delta)] x + (\gamma \delta - \alpha \beta) z \}. \end{cases}$$

In modo perfettamente analogo si vede che T'_{13} è una inversione col centro in F' e avente per conica fondamentale una coppia di rette passanti per F . La relativa rappresentazione analitica si attua scrivendo che:

$$T'_{13} \text{ trasforma } \begin{cases} x \text{ in } x \{ [\alpha \beta (\gamma + \delta) - \gamma \delta (\alpha + \beta)] y + (\gamma \delta - \alpha \beta) z \} \\ y \gg z \{ (\alpha \beta - \gamma \delta) y + [(\gamma + \delta) - (\alpha + \beta)] z \} \\ z \gg z \{ [\alpha \beta (\gamma + \delta) - \gamma \delta (\alpha + \beta)] y + (\gamma \delta - \alpha \beta) z \} \end{cases}$$

16. Per ottenere, nel modo più semplice, le rappresentazioni analitiche delle altre trasformazioni dal G_{32} conviene cercare quelle di T_5 e di T_6 . Perciò si osservi che

$$T_5 = (a a') (b b') (c d') (d c')$$

è una inversione e che può rappresentarsi in modo analogo a quello seguito per le T_2, T_3, T_4 del N. 2. La relativa conica fondamentale deve passare per F, F' e per i punti:

$$a \cdot a' \equiv (\alpha^2, 1, \alpha); \quad b \cdot b' \equiv (\beta^2, 1, \beta); \quad c \cdot d' \equiv (\gamma \delta, 1, \gamma); \quad d \cdot c' \equiv (\gamma \delta, 1, \delta).$$

La sua equazione sarà dunque:

$$(z^2 + x y) (\alpha + \beta) - 2 x z - 2 \alpha \beta y z = 0.$$

Il centro d'inversione (polo di $z = 0$) avrà per coordinate $\{ 2 \alpha \beta, 2, (\alpha + \beta) \}$. Allora, come al N. 3, segue che T_5 può rappresentarsi mediante la (3) ossia:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} p x - m z & (p z - m y), & (n x - p z) (n z - p y), & (n z - p y) (p x - m z) \\ x & & y & z \end{array} \right\}$$

ponendo:

$$m = 2 \alpha \beta, \quad n = 2, \quad p = \alpha + \beta.$$

Se invece si prende:

$$m = 2 \gamma \delta, \quad n = 2, \quad p = \gamma + \delta$$

si trova la rappresentazione di T_6 .

Non riescono ugualmente semplici (malgrado le apparenze) le rappresentazioni analitiche delle altre due inversioni T_7 e T_8 quando si cerchino direttamente in modo analogo a quello seguito per T_5 e T_6 .

17. Val meglio cercarle con mezzi più indiretti che indicheremo adesso completando così la rappresentazione analitica di tutte le trasformazioni del G_{32} . Intanto quelle già date si riferiscono alle $T_1 T_2 T_3 T_4$ (N° 1, 2, 3), alle T'_{16}, T'_{13} (N. 15) e alle $T_5 T_6$, (N. 16). Da queste, moltiplicando per T_1 , si trovano le seguenti (a prescindere dall'identità)

$$T_2 T_1 = T_2; \quad T_3 T_1 = T_3; \quad T_4 T_1 = T_4; \quad T_5 T_1 = T_5; \quad T_6 T_1 = T_6; \\ T'_{13} \cdot T_1 = T_{13}; \quad T'_{16} \cdot T_1 = T_{16}$$

dopo di che si trovano le rimanenti e precisamente:

$$T'_{11} = T'_{13} \cdot T'_4; \quad T'_{12} = T'_{13} \cdot T'_3; \quad T'_{14} = T'_4 \cdot T'_5; \quad T'_{15} = T'_3 \cdot T'_5 \\ T'_9 = T'_{15} \cdot T'_{11}; \quad T'_{10} = T'_{15} \cdot T'_{12}; \quad T'_7 = T'_{15} \cdot T'_{13}; \quad T'_8 = T'_{15} \cdot T'_{16}$$

e infine.

$$T_7 = T'_7 \cdot T_1; \quad T_8 = T'_8 \cdot T_1; \quad T_9 = T'_9 \cdot T_1; \quad T_{10} = T'_{10} \cdot T_1; \quad T_{11} = T'_{11} \cdot T_1 \\ T_{12} = T'_{12} \cdot T_1, \quad T_{14} = T'_{14} \cdot T_1; \quad T_{15} = T'_{15} \cdot T_1.$$

e lo scopo è pienamente raggiunto.

18. Si può dunque concludere, riassumendo, che « Nel caso in cui le due quaterne $a b c d$, $a' b' c' d'$ sieno armoniche, esistono 31 trasformazioni quadratiche le quali, insieme all'identità, compongono un gruppo G_{32} di 32° ordine rispetto a cui tutta la configurazione è invariante. Otto di queste trasformazioni sono inversioni di HIRST rispetto a coniche non degeneri, due sono inversioni rispetto a coppie di rette, altre nove sono pure involutorie, ma non inversioni; le rimanenti 12 (prescindendo dall'identità) hanno il periodo 4 ».

« Sedici di queste trasformazioni permutano fra loro i due gruppi $a b c d$, $a' b' c' d'$: le sedici rimanenti li lasciano entrambi invariati e costituiscono quindi un sottogruppo G_{16} che è il più notevole fra i sottogruppi del G_{32} suddetto ».

IL CASO EQUIANARMONICO.

19. Le due quaterne $abcd \overline{a'b'c'd'}$ sieno equianarmiche. Allora alle solite proiettività del caso generico :

$$abcd \overline{a'b'c'd'} \overline{b'a'd'c'} \overline{c'd'a'b'} \overline{d'c'b'a'}$$

vengono ad aggiungersi quest'altre :

$$abcd \overline{a'c'd'b'} \overline{a'd'b'c'} \overline{c'b'd'a'} \overline{d'b'c'a'} \overline{a'b'd'c'} \overline{a'd'c'b'} \overline{b'c'a'd'} \overline{c'a'd'b'}$$

e quindi, ripetendo il ragionamento dei N^o 1 e 2, si vede che, in questo caso, si aggiungono altre otto inversioni. Per rappresentarle simbolicamente, nel modo più adatto, insieme a tutte le altre trasformazioni che si generano dai loro prodotti, riprendiamo le notazioni del N. 10 scrivendo nuovamente, anzitutto, le sostituzioni del gruppo generico :

$$\begin{aligned} T_1 &= (aa')(bb')(cc')(dd'); & T'_1 &= \text{identità} \\ T_2 &= (ab')(ba')(cd')(dc'); & T'_2 &= (ab)(cd)(a'b')(c'd') \\ T_3 &= (ac')(cb')(ca')(db')(bd'); & T'_3 &= (ac)(bd)(a'c')(b'd') \\ T_4 &= (ad')(da')(cb')(bc')(ca')(cd'); & T'_4 &= (ad)(bc)(a'd')(b'c'). \end{aligned}$$

Nel caso attuale, le otto inversioni in parola sono le seguenti otto di sinistra. Di faccia a ciascuna è indicato, come al solito, il relativo prodotto per T_1 .

$$\begin{aligned} T_5 &= (a'a')(b'c')(c'd')(d'b'); & T'_5 &= (bc'd)(b'd'c') \\ T_6 &= (a'a')(b'd')(c'b')(d'c'); & T'_6 &= (b'dc)(b'c'd') \\ T_7 &= (a'c')(b'b')(c'd')(d'a'); & T'_7 &= (acd)(a'd'c') \\ T_8 &= (a'd')(b'b')(c'a')(d'c'); & T'_8 &= (adc)(a'c'd') \\ T_9 &= (a'b')(b'd')(c'c')(d'a'); & T'_9 &= (abd)(a'd'b') \\ T_{10} &= (a'd')(b'a')(c'c')(d'b'); & T'_{10} &= (adb)(a'b'd') \\ T_{11} &= (a'b')(b'c')(c'a')(d'd'); & T'_{11} &= (abc)(a'c'b') \\ T_{12} &= (a'c')(b'a')(c'b')(d'd'); & T'_{12} &= (acb)(a'b'c'). \end{aligned}$$

Infine, da tutti i possibili prodotti di queste 24 nascono le seguenti 72 che seguiranno a scrivere, come per l'innanzi, cioè ponendo di faccia a ciascuna di sinistra il proprio prodotto per T_1 :

$$\begin{aligned} T_{13} &= (a'c'c'b')(a'd'd'b); & T'_{13} &= (acb)(a'd'b') \\ T_{14} &= (a'd'd'b')(a'c'c'b); & T'_{14} &= (adb)(a'c'b') \end{aligned}$$

$T_{15} = (a b' d' d') (a' b c' c');$	$T'_{15} = (a b c) (a' b' d')$
$T_{16} = (a b' c c') (a' b d' d');$	$T'_{16} = (a b d) (a' b' c')$
$T_{17} = (a d' c a') (b b' d c');$	$T'_{17} = (a d c) (b' d' c')$
$T_{18} = (a a' d c') (b d' c b');$	$T'_{18} = (b d c) (a' d' c')$
$T_{19} = (a c' d a') (b b' c d');$	$T'_{19} = (a c d) (b' c' d')$
$T_{20} = (a a' c d') (b c' d b');$	$T'_{20} = (b c d) (a' c' d')$
$T_{21} = (a d' d c') (a' b b' c);$	$T'_{21} = (a d c) (a' b' c')$
$T_{22} = (a b' b c') (a' d d' c);$	$T'_{22} = (a b c) (a' d' c')$
$T_{23} = (a d' b a') (c c' d b');$	$T'_{23} = (a d b) (b' c' d')$
$T_{24} = (a a' d b') (b c' c d');$	$T'_{24} = (b c d) (a' d' b')$
$T_{25} = (a c' d d') (b a' c b');$	$T'_{25} = (a c b) (a' c' d')$
$T_{26} = (a c' b b') (a' c d' d);$	$T'_{26} = (a c d) (a' c' b')$
$T_{27} = (a a' b d') (c b' d c');$	$T'_{27} = (b d c) (a' b' d')$
$T_{28} = (a b' d a') (b d' c c');$	$T'_{28} = (a b d) (b' d' c')$
$T_{29} = (a b' b d') (c c' d a');$	$T'_{29} = (a b d) (a' c' d')$
$T_{30} = (a c' c d') (a' b b' d);$	$T'_{30} = (a c d) (a' b' d')$
$T_{31} = (a a' c b') (b d' d c');$	$T'_{31} = (b d c) (a' c' b')$
$T_{32} = (a c' b a') (c b' d d');$	$T'_{32} = (a c b) (b' d' c')$
$T_{33} = (a a' b c') (c d' d b');$	$T'_{33} = (b c d) (a' b' c')$
$T_{34} = (a b' c a') (b c' d d');$	$T'_{34} = (a b c) (b' c' d')$
$T_{35} = (a d' c c') (b a' d b);$	$T'_{35} = (a d b) (a' d' c')$
$T_{36} = (a d' b b') (c a' d c');$	$T'_{36} = (a d c) (a' d' b')$
$T_{37} = (a c' b d') (a' d b' c);$	$T'_{37} = (a c) (b d) (a' d') (b' c')$
$T_{38} = (a d' c b') (a' b c' d);$	$T'_{38} = (a d) (b c) (a' b') (c' d')$
$T_{39} = (a b' d c') (a' c d' b);$	$T'_{39} = (a b) (c d) (a' c') (b' d')$
$T_{40} = (a d' b c') (a' c b' d);$	$T'_{40} = (a d) (b c) (a' c') (b' d')$
$T_{41} = (a b' c d') (a' d c' b);$	$T'_{41} = (a b) (c d) (a' d') (b' c')$
$T_{42} = (a c' d b') (a' b d' c);$	$T'_{42} = (a c) (b d) (a' b') (c' d')$
$T_{43} = (a b' b a') c d' d c';$	$T'_{43} = (a b) (c d)$
$T_{44} = (a c' c a') (b d' d c');$	$T'_{44} = (a c) (b d)$
$T_{45} = (a d' d a') (b c' c d');$	$T'_{45} = (a d) (b c)$

$$\begin{aligned}
 T_{46} &= (a a' b b') (c c' d d'); & T'_{46} &= (a' b') (c' d') \\
 T_{47} &= (a a' c c') (b b' d d'); & T'_{47} &= (a' c') (b' d') \\
 T_{48} &= (a a' d d') (b b' c c'); & T'_{48} &= (a' d') (b' c').
 \end{aligned}$$

20. Si hanno così 96 sostituzioni le quali, come dimostreremo, formano un gruppo G_{96} di ordine 96. Osserveremo anzitutto che le 48 T'_h di destra del quadro precedente lasciano invariati ciascuno dei due gruppi $a b c d$, $a' b' c' d'$, mentre le 48 T_h di sinistra li scambiano fra loro. Per scrivere più compendiosamente le 48 di destra è da osservare che ciascuna si compone di due sostituzioni: l'una che opera sopra i 4 raggi $a b c d$, l'altra sopra i 4 raggi $a' b' c' d'$ (epperò tali due sostituzioni sono permutabili). Come nel quadro del n° 11, così adesso scriviamo queste due sostituzioni una di faccia all'altra dividendole nelle specie seguenti :

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{c|c} \textit{identità} & \textit{identità} \\ (a b) (c d) & (a' b') (c' d') \\ (a c) (b d) & (a' c') (b' d') \\ (a d) (b c) & (a' d') (b' c') \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 1^a \text{ specie} \\
 & \left(\begin{array}{c|c} (b c d) & (b' d' c') \\ (a c d) & (a' c' d') \\ (a b d) & (a' d' b') \\ (a c b) & (a' b' c') \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 2^a \text{ specie} \\
 & \left(\begin{array}{c|c} (b d c) & (b' c' d') \\ (a c d) & (a' d' c') \\ (a d b) & (a' b' d') \\ (a b c) & (a' c' b') \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 3^a \text{ specie}
 \end{aligned}$$

Ebbene è facile riscontrare che, per ottenere le 48 sostituzioni T'_h del n° precedente, basta associare (come nel n° 11) una sostituzione di destra con una di sinistra, del quadro ora scritto, in tutti i modi possibili, sottoponendo però tali due sostituzioni alla condizione di appartenere alla medesima specie. Ottenute poi le 48 T'_h basta moltiplicarle ciascuna per T_1 per ottenere le rimanenti T_h del n° precedente.

21. Ciò premesso dimostriamo intanto che le 48 T'_h formano gruppo. È da osservare perciò che il prodotto $T'_h \cdot T'_k$ di due tali sostituzioni può presentare i seguenti casi :

$$\begin{aligned}
 & \text{Se entrambe sono di } 1^a \text{ specie il prodotto è di } 1^a \text{ specie} \\
 & \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad 2^a \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad 3^a \quad \gg \\
 & \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad 3^a \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad 2^a \quad \gg
 \end{aligned}$$

Se una è di 1ª specie e l'altra è di 2ª il prodotto è di 2ª

» » » » 2ª » » » » 3ª » » » » 1ª

» » » » 3ª » » » » 1ª » » » » 3ª.

Resulta così dimostrata l'esistenza del G_{48} formato con le T'_h .

Infine per dimostrare che tutte le 96 sostituzioni T_h e T'_h formano un gruppo G_{96} , basta applicare al caso attuale le considerazioni del n° 12 sostituendo al G_{16} , ivi riguardato, il G_{48} ora accertato.

22. Le trasformazioni in parola vengono caratterizzate mediante le sostituzioni che esse operano sopra i simboli $a b c d, a' b' c' d'$ ed è quindi ovvio ricavarne il periodo. Così dunque (prescindendo dalla identità) se ne hanno 27 involutorie, 32 a periodo 3 e 36 a periodo 4. Fra quelle involutorie ci sono 12 inversioni rispetto a coniche proprie, 6 inversioni rispetto a coppie di rette (analoghe alle T'_{16}, T'_{13} del n° 15): le rimanenti 9 hanno, ciascuna, 4 punti uniti.

Ripetendo poi il ragionamento del n° 14 si conclude che tutte le trasformazioni in parola sono quadratiche.

23. Circa alla rappresentazione analitica, basta considerare che, per generare il G_{96} attuale, è sufficiente aggiungere al G_8 del caso generico le inversioni $T_5 T_6 \dots T_{12}$ (n° 19). Prendiamo dunque a rappresentare una di esse: ad es. la

$$T_5 = (a a') (b c') (c d') (d b').$$

Ora la relativa conica fondamentale passa, anzitutto, per F' ed F'' e quindi l'equazione è del tipo:

$$(10) \quad z^2 + h x y + k x z + l y z = 0.$$

Essa inoltre passa per i quattro punti:

$$a a' \equiv (\alpha^2, 1, \alpha); \quad b c' \equiv (\beta\gamma, 1, \beta); \quad c d' \equiv (\gamma, \delta, 1, \gamma); \quad (d b' \equiv (\beta\delta, 1, \delta).$$

Esigendo questi 4 passaggi si trovano le condizioni

$$(11) \quad \begin{cases} \alpha + h \alpha + k \alpha^2 + l = 0 \\ \beta + h \gamma + k \beta \gamma + l = 0 \\ \gamma + h \delta + k \gamma \delta + l = 0 \\ \delta + h \beta + k \beta \delta + l = 0. \end{cases}$$

le quali coesistono perchè:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \beta & \gamma & \beta \gamma & 1 \\ \gamma & \delta & \gamma \delta & 1 \\ \delta & \beta & \beta \delta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

esprime la condizione, per ipotesi soddisfatta, affinché le due quaterne $abcd$, $a'b'c'd'$ sieno equianarmoniche. Così l'equazione della conica fondamentale è precisata potendo calcolare h , k , l , da tre qualunque delle (11). Allora, tenendo presente che la conica d'inversione è la (10), che il centro d'inversione deve essere il polo (rispetto ad essa) di $z = 0$, cioè il punto $(l, k, -h)$, si ottiene facilmente la seguente rappresentazione analitica di T_5 :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (z + ly)(hx + lz), & (z + kx)(hy + kz), & -(hx + lz)(hy + kz) \\ x & y & z \end{array} \right\}$$

e lo scopo è raggiunto.

24. Riassumendo i principali risultati conseguiti, nel caso equianarmonico, si ha il seguente enunciato:

« Se le due quaterne $abcd \overline{\wedge} a'b'c'd'$ sono equianarmoniche, esistono 95 trasformazioni quadratiche le quali, insieme all'identità, compongono un gruppo G_{96} , di ordine 96, rispetto a cui la configurazione è invariante. Dodici di queste trasformazioni sono inversioni di Hirst rispetto a coniche non degeneri, sei sono inversioni rispetto a coppie di rette, altre nove sono involutorie (a 4 punti uniti ciascuna). Delle rimanenti, 32 hanno il periodo 3 e 36 hanno il periodo 4.

Il sottogruppo più notevole di questo G_{96} è il G_{48} formato dalle trasformazioni che operano separatamente sopra $abcd$ e sopra $a'b'c'd'$: le 48 rimanenti invece scambiano fra loro i due gruppi suddetti $abcd$, $a'b'c'd'$ ».

LE QUARTICHE PIANE INVERTIBILI

[Giorn. di Mat.ca : 1919]

Il vecchio problema di trasformare in se stessa una quartica piana mediante una inversione per raggi vettori reciproci, si collega agli studi sulle proprietà focali delle quartiche bicircolari.

Il primo a riconoscere l'esistenza di quattro tali inversioni, per ogni quartica della specie suddetta, è stato CASEY in una elaborata Memoria la cui pubblicazione risale al 1871 (1). Però, mentre l'Autore presenta una di queste inversioni nel modo più semplice, mediante la generazione della curva quale involuppo di un cerchio mobile, desume poi le altre tre inversioni, dalla prima, attraverso una costruzione complicata dalla quale non apparisce affatto il legame simmetrico che collega tutt'e quattro le inversioni in parola alle due quaterne di tangenti condotte alla curva dai suoi punti doppi (punti ciclici del suo piano). Anche il SALMON, per tacere di altri Autori, riassumendo nel suo ormai classico trattato « *Sulle curve piane* » quanto si era fatto sino allora intorno alle proprietà focali delle quartiche bicircolari, sfiora e, per così dire, rasenta il problema senza risolverlo (2). In ogni modo nè egli, nè altri (ch'io sappia) ha studiato sinora, in relazione alla curva, il notevole gruppo (di ottavo ordine) di trasformazioni quadratiche che viene generato dalle quattro inversioni in parola e di cui è nucleo la figura, dianzi ricordata, delle due quaterne di tangenti tirate alla curva dai punti ciclici (3).

(1) CASEY, « *On the Bicircular Quartics* ». Transact. Irish Acad. vol. XXIV, p. 457, 1871.

(2) Cfr. p. es. a pag. 339 e seg. della traduzione francese di O. CHEMIN, Paris, 1884 Gauthier-Villars.

(3) La costruzione di questo gruppo può farsi indipendentemente dalla quartica e dai punti ciclici partendo da due quaterne corrispondenti di raggi in due fasci proiettivi compiani e non concentrici secondo la mia Nota « *Sopra alcuni gruppi notevoli di tra-*

Tali inversioni hanno i loro centri esterni alla quartica, ma ampliando il concetto di inversione per raggi vettori reciproci, nella ben nota inversione quadrica che porta il nome di HIRST e quindi abbandonando anche i punti ciclici, si affaccia la possibilità che il centro d'inversione appartenga alla quartica e per conseguenza (dovendo la curva essere invariante) sia un suo punto doppio. La questione è stata risolta, in senso affermativo, la prima volta, da DE VRIES (1) e, con qualche restrizione, vale per ogni punto doppio (2).

Dopo DE VRIES, un Autore inglese, il RICHARDS (3), per via sintetica, ha preso a considerare tanto il caso del centro esterno alla curva, quanto quello del centro esistente sulla curva per le quartiche uninodali e binodali. Ma per queste ultime è incorso in un errore che verrà rilevato al N. 42 della presente Memoria.

Invogliato a trattare l'argomento, per disteso, ho redatto questo lavoro nel quale mi sono proposto, prima, di esaminare (in tutti i casi possibili) quali circostanze si esigono perchè una quartica piana sia invariante rispetto a una inversione quadrica di HIRST (non escludendo le eventualità che la conica fondamentale dell'inversione degeneri in una coppia di rette, o che contenga il relativo centro); di ricercare, poi, quali e quante di tali inversioni possano esistere per la stessa quartica; di studiare, infine, per quel che mi è riuscito, i gruppi e le relative configurazioni generate dalle inversioni in discorso.

Il lettore troverà dunque qui riunito ed esposto con maggiore precisione della consueta (così almeno mi lusingo!) quanto di più notevole si era fatto sinora sull'argomento, con l'aggiunta di quel poco che mi è parso nuovo e interessante. I casi trattati riguardano specialmente le quartiche binodali, le cuspidali, le tac-nodali e le trinodali: queste due ultime

sformazioni quadratiche piane » pubblicata nei Rend. del Circ. Mat. di Palermo nell'Ottobre 1917.

Veggasi anche « MONTESANO. « *Su alcuni gruppi chiusi di trasformazioni involutorie nel piano e nello spazio* ». Atti Istit. Veneto, Tomo 6^o, serie 6^a, 1888. Anzi, a questo proposito, debbo dichiarare che, quando pubblicai la mia Nota suddetta, non conoscevo il lavoro del prof. MONTESANO. Informato poi dall'A. e presa cognizione del lavoro medesimo, debbo adesso riconoscere che, ivi, l'esistenza del gruppo era già stabilita, in modo semplice ed elegante, per via sintetica, pur non trovandovisi messa in rilievo la figura nucleo costituita dalle due quaterne di rette sopra indicate, nè essendovi traccia alcuna di collegamento con la quartica piana.

(1) J. DE VRIES. « *La quartique nodale* ». Archives Taylei s. II, t, IX 1904.

(2) CIANI. « *Alcune costruzioni inerenti alla quartica piana dotata di un punto doppio* ». — Giorn. di math. vol. LIII (1915) 6^o della 3^a serie.

(3) RICHARDS. « *A geometrical proof of some of the property of nodal quartics* ». Quarterly, vol. XLII, 1911.

specie sono quelle che parmi conducano a risultati più notevoli (Cap. IV e V). Non pretendo, con questo, di avere esaminato tutti i casi particolari possibili: credo di avere considerato i più importanti: quelli in cui gli ommessi potrebbero ritenersi compresi (1).

La ricerca non è esaurita: rimane fra altro, una questione importante da risolvere e per la quale ogni tentativo mi è riuscito vano sinora. Ecco di che si tratta. Consideriamo, ad esempio, la binodale la quale è invariante rispetto a sei inversioni (N. 14). Si domanda: il gruppo che esse generano è discreto, o continuo? Per adesso, non si può affermare altro che generano un gruppo di discreto (un G_6) quelle quattro di esse che hanno i centri esterni alla curva. Ma aggiungendo le due rimanenti che hanno i centri nei punti doppi, il gruppo rimarrà discreto, ovvero si perverrà al gruppo ∞^1 continuo di trasformazioni birazionali spettante a ogni curva ellittica? Ugualmente si può presentare la questione per la trinodale che ammette nove inversioni che la trasformano in sè stessa. Or bene relativamente ai gruppi che esse generano non si può affermare altro (per il momento) che l'esistenza di tre gruppi quadrimomi i quali saranno naturalmente sottogruppi dell'intero gruppo generato. Ma questo sarà discreto, o continuo? Soltanto nel caso della tac-nodale la questione è completamente risolta. L'intero gruppo è discreto.

Chiudo queste poche linee d'introduzione spiegando alcune denominazioni usate a scopo di brevità. Dirò che una inversione quadrica di HIRST (più brevemente: una inversione) spetta, o appartiene, o è posseduta da una quartica, quando la curva è invariante rispetto a tale inversione, nel qual caso la curva medesima sarà chiamata *invertibile* onde la ragione del titolo del presente lavoro. È poi sottinteso che le quartiche oggetto di questi studi sono sempre supposte irriducibili.

CAPITOLO I.

Le varie specie di quartiche invarianti rispetto a una data inversione.

1. Cominceremo dall'osservare che una inversione può presentare vari casi a secondo che la conica fondamentale è propria, o degenerare, oppure

(1) È poi indubbio che, ove si volesse ricorrere a considerazioni spaziali, si potrebbero sistematicamente ottenere tutti i casi trattati all'infuori della uninodale mediante opportuna proiezione della quartica di 1^a specie alla maniera di SEGRE cfr. « *Surfaces du 4^e ordre a conique double* » in Math. Annal Bd 24 pag. 324. Non si vede però come, con questo mezzo, si possano conseguire le rispettive rappresentazioni analitiche delle cercate inversioni.

a secondo che si assoggetta il centro d'inversione ad appartenere, o no, alla conica medesima.

Associando, in tutti i modi possibili, queste eventualità si è condotti ai seguenti casi:

a) La conica fondamentale sia propria: il centro d'inversione non le appartenga.

Assumendo tal centro come (001), collocando i due rimanenti punti (100) (010) nei due rimanenti punti fondamentali dell'inversione e, infine, disponendo opportunamente del punto unità, si può prendere per conica fondamentale:

$$z^2 - xy = 0$$

e quindi si può rappresentare la inversione mediante la sostituzione:

$$\begin{cases} xz & yz & xy \\ x & y & z \end{cases}$$

da effettuarsi sopra x, y, z , coordinate omogenee di punto.

b) La conica fondamentale sia degenera: il centro d'inversione non le appartenga. Mantenendo (001) nel centro, si può prendere per conica fondamentale

$$y^2 - z^2 = 0$$

e l'inversione può rappresentarsi con

$$\begin{cases} xz & yz & y^2 \\ x & y & z \end{cases}$$

c) La conica fondamentale sia propria e il centro d'inversione le appartenga. Assumendo (100) nel centro e

$$y^2 - xz = 0$$

come conica fondamentale, l'inversione è

$$\begin{cases} 2y^2 - xz & , & yz & , & z^2 \\ x & & y & & z \end{cases}$$

d) Se infine la conica è degenera e il centro le appartiene, esso non può trovarsi nel punto d'incontro delle due rette che costituiscono la conica fondamentale, altrimenti anche la inversione stessa degenera. Bisogna dunque che il centro si trovi sull'una delle due rette in parola e non sull'altra. Ma allora la inversione si riduce alla omologia armonica che ha il centro nel punto nominato e per asse l'altra retta sopra indicata.

2. Si presenta adesso il seguente problema.

Assoggettando una quartica a possedere una inversione, nei varii casi

considerati nel n. precedente, quali specie si trovano? Discuteremo separatamente tali casi suddividendo ciascuno in due, a seconda che si esige che il centro d'inversione esista, o no, sulla quartica. Però escludiamo fin d'ora il caso (*d*) che conduce naturalmente alle quartiche omologico-armoniche già ampiamente studiate (1).

Cominciamo dunque dal caso (*a*) del N. precedente aggiungendo l'ipotesi che il centro d'inversione appartenga alla quartica. Ne segue che esso è doppio per la curva la quale è inoltre obbligata a passare per i rimanenti punti fondamentali. Dopo di che, esigendo l'appartenenza alla curva della inversione:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} xz & yz & xy \\ x & y & z \end{array} \right\},$$

si è facilmente condotti alla forma seguente:

$$(1) \quad (ax^2 + bxy + cy^2)(z^2 + xy) + z(dx^3 + ex^2y + fxy^2 + gy^3) = 0$$

che è quella del N. 7 della mia Nota già citata « *Alcune costruzioni inerenti alla quartica piana dotata di un punto doppio* ». Richiamando le considerazioni di quella Nota si trae che la curva precedente costituisce il caso generico della quartica dotata di un punto doppio. Il vertice (001) del triangolo di riferimento è il punto doppio: gli altri due sono i rimanenti punti d'incontro, con la curva, della retta che unisce i tangenziali del punto doppio. Si escludono dunque soltanto i casi in cui tale riferimento sia impossibile (ad es. il caso del nodo inflessionale). La conica fondamentale dell'inversione passa per i sei punti di contatto delle tangenti condotte alla curva dal punto doppio, ossia è la conica di BERTINI inerente a tal punto (2).

3. Se poi, pur rimanendo nel caso (*a*), il centro d'inversione deve essere esterno alla quartica si vede subito che gli altri due punti fondamentali risultano doppi per la curva e si è condotti alla seguente equazione:

$$(2) \quad a(z^4 + x^2y^2) + z(z^2 + xy)(bx + cy) + z^2(dx^2 + exy + fy^2) = 0.$$

Sorge così la questione di sapere se questa quartica sia la più generale possibile fra quelle dotate di due punti doppi. La risposta, che è affermativa, sarà data nel capitolo II.

(1) Cfr. ad es. la mia Memoria: *I varii tipi possibili di quartiche piane più volte omologico-armoniche*. Rend. del Circ. matem. di Palermo. T. XIII. 1899.

(2) Per maggiori particolari intorno a questa conica cf. la mia Nota già citata: *Alcune costruzioni ecc. ecc.*

Scrivendo l'equazione precedente nelle due forme

$$x^2 (ay^2 + byz + dz^2) + xz (cy^2 + eyz + bz^2) + z^2 (fy^2 + cyz + az^2) = 0$$

$$y^2 (ax^2 + cxz + fz^2) + yz (bx^2 + exz^2 + cz^2) + z^2 (dx^2 + xz^2 + az^2) = 0$$

si vede che le due coppie di tangenti nodali sono

$$ay^2 + byz + dz^2 + 0 \quad , \quad ax^2 + cxz + fz^2 = 0.$$

Si noti bene che esse non si corrispondono nella proiettività che la inversione, spettante alla quartica, subordinata fra i fasci di raggi che hanno i centri nei due punti doppi. Accade invece che alle tangenti nodali in (100) corrispondono le due rette che da (010) proiettano i due rimanenti punti dove $y = 0$ incontra la quartica fuori di (100), e alle tangenti nodali in (010) le altre due rette che da (100) proiettano le due rimanenti intersezioni di $x = 0$ con la curva medesima [fuori di (010)].

4. Passiamo al caso (b) suddividendolo, come il precedente, in due a seconda che il centro d'inversione esiste, o no, sulla quartica. Nel primo sottocaso esso sarà doppio per la curva la quale è costretta a passare (semplicemente) per il residuo punto fondamentale (100) dell'inversione.

Dopo di che, esigendo il possesso dell'inversione stessa, da parte della curva, si perviene alla equazione:

$$(3) \quad (z^2 + y^2)ax^2 + bxy + cy^2 + z(dx^3 + ex^2y + fxy^2 + gy^3) = 0.$$

Le tangenti nodali sono:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0.$$

La $z = 0$, corda dei tangenziali del nodo, tocca ulteriormente la curva in (010) che è il punto doppio della conica fondamentale dell'inversione.

Il sotto-caso attuale può dunque riguardarsi come un caso limite di quello considerato al N. 2: basta perciò supporre, ivi, che la corda dei tangenziali del nodo sia tangente altrove alla curva, e allora nel punto di contatto convergono le due rette che compongono la conica fondamentale dell'inversione.

5. La inversione sia ancora quella del N. precedente, ma il centro sia esterno alla curva. Ordinando l'equazione della quartica in z e osservando che, per le ipotesi fatte, il coefficiente di z^4 non può esser nullo, si vede che, dalla equazione trasformata deve anzitutto staccarsi il fattore esterno y^4 e si è così condotti alla equazione:

$$(4) \quad a(z^4 + y^4) + z(z^2 + y^2)(bx + cy) + z^2(dx^2 + exy + fy^2) = 0$$

da cui risulta che (100) è un tac-nodo, con $z = 0$ tangente tac-nodale, o un punto triplo (se $d = 0$) con $z^2y = 0$ tangenti relative.

6. Rimane da discutere il caso (c) del N. 1. Se non che la suddivisione fatta, per i casi antecedenti, non ha ragione d'essere per questo, perchè il centro d'inversione deve appartenere alla quartica: infatti se si conduce una retta per il centro C suddetto e si indica con D il suo secondo punto d'intersezione con la conica fondamentale, si vede che due delle quattro intersezioni di tal retta con la quartica sono interne al segmento finito \overline{CD} e due esterne e ciò per quanto D possa avvicinarsi indefinitamente a C nella rotazione della retta CD attorno a C nel piano della quartica. Dunque C appartiene alla quartica e quindi è doppio per essa.

Allora, esigendo che C sia doppio per la curva ed esigendo poi la invarianza rispetto all'inversione si trova l'equazione:

$$(5) \quad axz(xz - 2y^2) + by^4 + cy^3z + dy^2z^2 + eyz^3 + fz^4 = 0$$

e di nuovo si vede che (100) è un tac-nodo con $z = 0$ tangente tac-nodale. Abbiamo così trovato due forme di equazione per la quartica tac-nodale: la (4) e la (5). Ma nel capitolo IV vedremo che sono distinti soltanto apparentemente e che possono riguardarsi come pertinenti alla stessa curva (N. 35) e, ciò che più importa, alla quartica tac-nodale generica.

CAPITOLO II.

La quartica binodale.

7. Ci proponiamo adesso di esaminare, con qualche dettaglio, i casi del capitolo precedente in riguardo specialmente al numero e alle varie specie di inversioni spettanti alla medesima quartica e agli eventuali gruppi che esse generano. Tralascieremo però le quartiche rappresentate dalle equazioni (1) e (3) nei quali la curva ha un solo punto doppio rimandando il lettore, desideroso di maggiori particolari, alla mia Nota più volte citata « *Alcune costruzioni ecc. ecc.* ».

Passiamo quindi alla curva (2) ponendo il problema di sapere se essa rappresenti, o no, il caso generico della quartica binodale.

8. È perciò necessario premettere alcune osservazioni intorno alle reti di coniche passanti per due punti fissi e alle serie quadratiche in esse contenute. Assumendo come punti fondamentali (100), (010), i due punti suddetti, la rete potrà rappresentarsi con

$$z^2(a_1 + \lambda a_2 + \mu a_3) + xy(b_1 + \lambda b_2 + \mu b_3) + \\ + yz(c_1 + \lambda c_2 + \mu c_3) + zx(d_1 + \lambda d_2 + \mu d_3) = 0$$

dove λ e μ sono i parametri della rete. Per semplificare la rappresentazione, scegliamo, per individuare la rete, le tre coniche determinate dalle coppie di valori di λ e μ soddisfacenti alle seguenti condizioni

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 + \lambda b_2 + \mu b_3 = 0 \\ d_1 + \lambda d_2 + \mu d_3 = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1 + \lambda b_2 + \mu b_3 = 0 \\ c_1 + \lambda c_2 + \mu c_3 = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 + \lambda c_2 + \mu c_3 = 0 \\ d_1 + \lambda d_2 + \mu d_3 = 0 \end{array} \right. .$$

Tali coniche saranno rappresentate rispettivamente da equazioni del seguente tipo :

$$z(my + nz) = 0 \quad ; \quad z(px + qz) = 0 \quad ; \quad rz^2 + sxy = 0 .$$

Assumendo poi per rette $y = 0$, $x = 0$ le

$$my + nz = 0 \quad , \quad px + qz = 0$$

e disponendo dal punto unità per modo che sia $r = s$, le tre coniche in parola saranno

$$zy = 0 \quad , \quad zx = 0 \quad , \quad z^2 + xy = 0$$

e quindi la rete, che esse individuano, potrà rappresentarsi con :

$$z^2 + xy + \lambda zy + \mu zx = 0$$

dopo di che si vede che la Jacobiana della rete è costituita da $z = 0$ e dalla conica

$$z^2 - xy = 0 .$$

È ovvio adesso riconoscere che la inversione del N. 1 (a) cioè :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} xz & yz & xy \\ x & y & z \end{array} \right\}$$

trasforma in se stessa ogni conica della rete. Tale inversione è collegata alla rete in guisa che la conica fondamentale dell'inversione è conica Jacobiana della rete e il centro d'inversione è polo, rispetto a tal conica, della retta che congiunge i punti base della rete.

9. Ricorderemo adesso che una bitangente di una quartica individua sempre una serie quadratica di coniche inviluppanti di cui la bitangente suddetta, insieme ad altra (ben determinata) fa parte.

Questa proposizione, dimostrata nei trattati per una quartica generica e per una bitangente propria, ha bisogno di conferma quando la quartica sia binodale e la bitangente in parola sia una tangente tirata da uno dei punti doppi della curva. La conferma si può ottenere nel seguente modo. Assumendo (100) e (010) nei due punti doppi, l'equazione della quartica può scriversi nelle due forme equivalenti :

$$x^2(ay^2 + byz + cz^2) + xz(dy^2 + eyz + fz^2) + z^2(my^2 + nyz + pz^2) = 0 ,$$

$$y^2(ax^2 + dxz + mz^2) + yz(bx^2 + exz + nz^2) + z^2(cx^2 + fxz + pz^2) = 0$$

dalle quali si desume che le equazioni delle due quaterne di tangenti tirate dai punti doppi sono :

$$(dy^2 + eyz + fz^2)^2 - 4(ay^2 + byz + cz^2)(my^2 + nyz + pz^2) = 0$$

$$(bx^2 + exz + nz^2)^2 - 4(ax^2 + dxz + mz^2)(cx^2 + fxz + pz^2) = 0.$$

Cioè :

$$y^4(d^2 - 4am) + y^3z(2ed - 4an - 4bm) +$$

$$+ y^2z^2(e^2 + 2df - 4ap - 4cm - 4bn) +$$

$$+ yz^3(2ef - 4bp - 4cn) + z^4(f^2 - 4pe) = 0,$$

$$z^4(n^2 - 4pm) + z^3x(2en - 4pd - 4fm) +$$

$$+ z^2x^2(e^2 + 2bn - 4ap - 4cm - 4df) +$$

$$+ zx^3(2eb - 4af - 4cd) + x^4(b^2 - 4ac) = 0.$$

Escludiamo che i punti doppi sieno due cuspidi (caso che verrà trattato a parte nel Capitolo III°) il che significa :

$$b^2 - 4ac \neq 0 \quad , \quad d^2 - 4am \neq 0$$

e, conseguentemente, che è impossibile il distacco del fattore z dalle due precedenti quaterne. Osserviamo, poi, che possiamo ancora disporre del punto (001) collocandolo nel punto d'incontro di una retta della 1^a quaterna con una retta della seconda. Ne segue che è adesso lecito supporre il distacco di un fattore y dalla 1^a e di un fattore x dalla 2^a, il che esige che sia

$$f^2 - 4pe = 0 \quad , \quad n^2 - 4pm = 0$$

con $p \neq 0$ altrimenti ne seguirebbe $f = n = 0$ e la quartica avrebbe un terzo punto doppio in (001), il qual caso sarà considerato a parte (nel Capitolo V°). Si può dunque prendere

$$c = \frac{f^2}{4p} \quad , \quad m = \frac{n^2}{4p}$$

e allora si vede che l'equazione della quartica può acquistare la seguente forma :

$$\{fzx + nyz + 2pz^2\}^2 - 2xy \{z^2(fn - 2ep) - 2apxy - bpxz - 2pdyz\} = 0$$

ciò che dimostra come la curva si possa riguardare come l'involuppo della seguente serie quadratica di coniche :

$$\lambda^2 xy + 2\lambda \{fzx + nyz + 2pz^2\} +$$

$$+ 2 \{z^2(fn - 2ep) - 2apxy - 2bpxz - 2pdyz\} = 0.$$

Così la conferma invocata al principio di questo n.° è conseguita.

10. — La serie precedente è contenuta nella rete

$$\lambda xy + 2\mu \{ faxz + nyz + 2pz^2 \} + \\ + 2 \{ z^2 (fn - 2ep) - 2apxy - 2bpzx - 2pdyz \} = 0$$

che ha due punti base in (100), (010) e quindi appartiene alla specie descritta al n.º 8. Ne segue che la inversione, ivi individuata, trasforma in se stessa ogni conica della serie e quindi anche la quartica. Ecco dunque trovata, intanto, una inversione spettante alla nostra curva. In modo analogo, ne troviamo altre tre come questa. Infatti, osserviamo che per $\lambda = \pm 2 \sqrt{ap}$ si ottengono due coniche degeneri, della serie in parola, da cui si stacca $z = 0$. Le due rette rimanenti saranno quindi due bitangenti proprie convergenti nel centro d'inversione. Avanzano dunque, nella serie, quattro coniche degeneri costituite, ciascuna, da una tangente tirata alla curva da (100) e da una tangente tirata da (010). Per $\lambda = \infty$ (nella serie) si trova così la coppia xy . Indicando con uh , vk , wl le tre rimanenti coppie in modo che le due quaterne di tangenti tirate dai punti suddetti sieno:

$$x u v w \quad , \quad y h k l$$

si potrà dire che tali quaterne saranno corrispondenti nella inversione in discorso e quindi proiettive (1) nella proiettività che tale inversione subordina fra i fasci di centri (100) e (010). Ora dalla proiettività

$$x u v w \overline{\wedge} y h k l$$

seguono le altre tre:

$$x u v w \overline{\wedge} h y l k$$

$$x u v w \overline{\wedge} k l y h$$

$$x u v w \overline{\wedge} l k h y$$

Come dunque associando la x alla y si è trovata la serie cui appartengono le coppie:

$$x y \quad , \quad u h \quad , \quad v k \quad , \quad w l \quad ,$$

così, associando successivamente la x alla h , alla k , alla l , si troveranno altre tre serie a cui appartengono ordinatamente

$$x h \quad , \quad u y \quad , \quad v k \quad , \quad w l$$

$$x k \quad , \quad u l \quad , \quad v y \quad , \quad w h$$

$$x l \quad , \quad u k \quad , \quad v h \quad , \quad w y \quad ,$$

(1) Cfr. SALMON, loc. cit. pag. 340.

e saremo pervenuti alle altre tre serie di coniche involuppati cercate e conseguentemente alle altre tre relative inversioni spettanti alla quartica.

Queste quattro inversioni subordinano, fra i fasci di centri (100), (010), le quattro proiettività precedenti. Le relative coniche fondamentali, piuttosto che riguardarle come Jacobiane delle reti contenenti le serie (alla maniera del n.^o 8), si possono, più semplicemente, ritenere come generate dalle proiettività in parola e allora i relativi centri d'inversione non sono altro che i centri di collineazione delle proiettività medesime. Per ognuno di essi passano due bitangenti della curva.

Risulta così dimostrato che la (2) del n.^o 3 rappresenta effettivamente la quartica binodale generica.

11. Alle quattro inversioni precedenti, spettanti alla quartica, si aggiungono poi le altre due che hanno i centri nei punti doppi e per coniche fondamentali le rispettive coniche di BERTINI secondo le considerazioni del n.^o 2. Vediamo adesso come si possano stabilire le rappresentazioni analitiche inerenti. Riprendiamo quindi l'equazione (2) del n.^o 3 (che ora sappiamo spettare alla binodale generica) e cerchiamo la inversione della curva che ha il centro nel nodo (100) cominciando dal cercare la relativa conica fondamentale (conica di BERTINI secondo il n.^o 2). Ne indicheremo con m_{ik} i coefficienti incogniti e ne scriveremo l'equazione, ordinandola in x , nel seguente modo:

$$x^2 m_{11} + 2x(m_{12}y + m_{13}z) + (m_{22}y^2 + 2m_{23}yz + m_{33}z^2) = 0.$$

Ordinando ugualmente la (2) del N. 3 si ha:

$$x^2(a y^2 + b y z + d z^2) + x(c y^2 z + e y z^2 + b z^3) + f y^2 z^2 + c y z^3 + a z^4 = 0.$$

Sia ora $y = \lambda z$ una retta per (100) così che un suo punto generico possa rappresentarsi con $(\mu, \lambda, 1)$ ove μ varia al variare del punto sulla retta. Le sue intersezioni con la conica e con la quartica sono dunque date da:

$$\mu^2 m_{11} + 2\mu(m_{12}\lambda + m_{13}) + (m_{22}\lambda^2 + 2m_{23}\lambda + m_{33}) = 0$$

$$\mu^2(a\lambda^2 + b\lambda + d) + \mu(c\lambda^2 + e\lambda + b) + (f\lambda^2 + c\lambda + a) = 0.$$

Perchè la conica $m_x^2 = 0$ sia fondamentale per l'inversione che ha il centro in (100) e appartiene alla quartica, bisogna e basta che l'armonizzante delle due precedenti equazioni in μ , cioè l'espressione

$$m_{11}(f\lambda^2 + c\lambda + a) + (m_{22}\lambda^2 + 2m_{23}\lambda + m_{33})(a\lambda^2 + b\lambda + d) - \\ - (m_{12}\lambda + m_{13})(c\lambda^2 + e\lambda + b)$$

sia nulla indipendentemente da λ . Si trovano così le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned}
 m_{22} &= 0 \\
 2a m_{23} - c m_{12} &= 0 \\
 a m_{33} + 2b m_{23} + f m_{11} - c m_{13} - e m_{12} &= 0 \\
 b m_{33} + 2d m_{23} + c m_{11} - e m_{13} - b m_{12} &= 0 \\
 d m_{33} + a m_{11} - b m_{13} &= 0
 \end{aligned}$$

le quali servono a individuare la conica cercata.

Per dedurne i valori delle m_{ik} , si può ad es. ricavare dalla 2^a e dalla 5^a:

$$2 m_{23} = \frac{c m_{12}}{a}, \quad m_{11} = \frac{b m_{13} - d m_{33}}{a}.$$

Sostituendo nella 3^a e nella 4^a si trova:

$$\begin{aligned}
 m_{12}(bc - ae) + m_{13}(bf - ac) + m_{33}(a^2 - df) &= 0 \\
 m_{12}(cd - ab) + m_{13}(bc - ae) + m_{33}(ab - cd) &= 0.
 \end{aligned}$$

Si può dunque prendere:

$$\begin{aligned}
 m_{12} &= 2a \begin{vmatrix} bf - ac & a^2 - df \\ bc - ae & ab - cd \end{vmatrix}; \quad m_{13} = 2a \begin{vmatrix} a^2 - df & bc - ae \\ ab - cd & cd - ab \end{vmatrix}, \\
 m_{33} &= 2a \begin{vmatrix} bc - ae & bf - ac \\ cd - ab & bc - ae \end{vmatrix}; \quad m_{23} = c \begin{vmatrix} bf - ac & a^2 - df \\ bc - ae & ab - cd \end{vmatrix}, \\
 m_{11} &= 2 \left\{ b \begin{vmatrix} a^2 - df & bc - ae \\ ab - cd & cd - ab \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} bc - ae & bf - ac \\ cd - ab & bc - ae \end{vmatrix} \right\}, \\
 m_{22} &= 0
 \end{aligned}$$

e la conica $m_x^2 = 0$ è così determinata.

12. Non manca altro che trovare le formole dell'inversione il cui centro è (100) e la cui conica fondamentale è quella dianzi determinata. A tale scopo si osservi che, dato un punto $P \equiv (xyz)$, le coordinate di un altro punto allineato con P e col centro d'inversione (100), possono rappresentarsi con $(x + \lambda, y, z)$: le intersezioni della retta che contiene questi punti con la conica $m_x^2 = 0$ sono date da:

$$m_{11}(x^2 + 2\lambda x + \lambda^2) + 2(x + \lambda)(m_{12}y + m_{13}z) + m_{22}y^2 + 2m_{23}yz + m_{23}z^2 = 0,$$

ovvero ponendo $m_x^2 = f(xyz)$:

$$\lambda^2 m_{11} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + f(xyz) = 0.$$

Indicando con $\lambda_1 \lambda_2$ le radici di questa equazione, il valore di λ che serve

a individuare il corrispondente $P' \equiv (x' y' z')$ di P , nella inversione in parola, è dato dalla condizione:

$$(\lambda_1 \lambda_2 \text{ o } \lambda) = -1$$

cioè da

$$\lambda = 2 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = -2 \frac{f(xyz)}{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

Avremo dunque:

$$x' = x - 2 \frac{f(xyz)}{\frac{\partial f}{\partial x}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

Tenendo dunque presente che

$$f(xyz) = \frac{1}{2} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

si può rappresentare la inversione cercata mediante la sostituzione:

$$\left\{ - \left(y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right), y \frac{\partial f}{\partial x}, z \frac{\partial f}{\partial x} \right\}$$

In ugual modo si procederebbe per ottenere le formole dell'inversione (spettante alla curva) avente il centro (010) e per conica fondamentale la relativa conica di BERTINI.

13. In conclusione, la quartica binodale possiede sei inversioni. Sorge dunque la questione di identificare il gruppo che esse generano. Come già si è dichiarato nell'introduzione, non si è in grado, per ora, di risolvere la questione. Si può soltanto affermare che, se si escludono le due inversioni che hanno i centri nei punti doppi, le quattro rimanenti generano un notevole gruppo di 8° ordine la cui esistenza e rappresentazione analitica può ottenersi, indipendentemente dalla quartica, collegandola alla figura nucleo invariante che è formata da due quaterne proiettive di raggi in due fasci e per la quale rappresentazione analitica mi riferisco alla mia Nota già citata del Circolo Matematico di Palermo. Per collegare il gruppo in parola alla quartica, basta supporre che le due quaterne suddette siano quelle delle tangenti condotte alla curva dai suoi punti doppi.

Rimane poi a vedere se, aggiungendo a tal gruppo le due inversioni escluse, si generi un gruppo discreto, o continuo, nel quale ultimo caso potrebbe anche essere l'intero gruppo ∞' delle trasformazioni birazionali spettanti a ogni curva ellittica.

14. In ogni modo i risultati conseguiti si possono riassumere nel seguente enunciato :

« *La quartica binodale possiede sei inversioni. Due hanno per centri i nodi e per coniche fondamentali le relative coniche di BERTINI. Le quattro rimanenti hanno per coniche fondamentali quelle generate dalle quattro proiettività che intercedono fra le due quaterne di tangenti tirate dai nodi : i relativi centri d'inversione sono i centri di collineazione di tali proiettività. Per ogni centro passano due bitangenti proprie della curva. Queste quattro inversioni sono, a due, a due, permutabili : il prodotto di due qualunque di esse equivale al prodotto delle due rimanenti, come il prodotto di tre qualsiasi equivale alla quarta. Da tali prodotti, a due, a due, si ottengono quindi tre sole nuove trasformazioni che sono ancora quadratiche e involutorie (ma non inversioni). Esse, insieme alle quattro inversioni in discorso e all'identità, costituiscono un gruppo G_8 di ottavo ordine rispetto al quale la quartica e la configurazione formata dalle due quaterne di tangenti sopra indicate sono invarianti (1).*

15. Nel caso in cui tali due quaterne siano armoniche, od equianarmoniche, esistono altre inversioni spettanti alla configurazione delle due quaterne e generanti gruppi più ampi, ma sempre discreti, di trasformazioni quadratiche che possiedono naturalmente come sottogruppo il G_8 del caso generico. Questi gruppi più ampi sono di ordine 32 nel caso armonico, di ordine 96 nel caso equianarmonico (2). Nasce dunque la questione di sapere se tali G_{32} , o G_{96} , possano spettare non solo alla configurazione composta dalle due quaterne di tangenti tirate dai nodi, ma all'intera quartica nei rispettivi casi armonico, od equianarmonico. La questione si risolve negativamente nel seguente modo. Riprendendo le notazioni della mia Nota, si indichino con $abcd$, $a'b'c'd'$ le due quaterne in pa-

(1) Questo gruppo è isomorfo oloedrico con quello costituito dalle 4 omologie armoniche che hanno per centri e piani fondamentali i vertici e le facce opposte di uno stesso tetraedro, dalle involuzioni gobbe che sono i prodotti, a due, a due, di tali omologie e dall'identità. Le collineazioni di un tal gruppo possono rappresentarsi mediante le sostituzioni :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \pm x_1 & \pm x_2 & \pm x_3 & \pm x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \right\}$$

dove le x_i sono coordinate omogenee di un punto generico dello spazio e venga stabilito che a ciascuna della linea inferiore si sostituisca la corrispondente della linea superiore combinando i segni in tutti i modi possibili. È poi ovvio che questo gruppo spaziale spetti alla quartica gobba di 1^a specie essendo il tetraedro suddetto quello autopolare rispetto a tutte le quadriche del fascio di cui la quartica è curva base.

(2) Cfr. i N. 18 e 24 della mia Nota, più volte citata, del Circ. matem. di Palermo.

rola e si ricordi che ogni inversione del G_8 individua una serie di coniche involuppati la curva e invarianti ciascuna rispetto all' inversione (n. 10). Così la inversione

$$T_1 = (a a') (b b') (c c') (d d')$$

individua una serie a cui appartengono, come coniche degeneri, le coppie $(a a') (b b')$, $(c c') (d d')$. Ora si osservi che una coppia di bitangenti, anche improprie come $(a a')$, individua una sola serie di coniche involuppati. Infatti per ottenere la conica generica di tal serie basta segare la quartica con una conica qualunque del fascio che ha per base i punti di contatto di a e a' : allora i 4 rimanenti punti d' intersezione di tal conica con la quartica sono i 4 punti di contatto della conica suddetta (1).

Ebbene, nel caso armonico (secondo il n. 10 della mia Nota), la inversione

$$T_5 = (a a') (b b') (c d') (d c')$$

non può spettare alla quartica, altrimenti la coppia $(a a')$ appartenerrebbe alle due serie involuppati relative a T_1 ed a T_5 .

Uguualmente, nel caso equianarmonico, la coppia $(a a')$ appartenerrebbe (secondo il n. 19 della mia Nota) oltre che alla serie già indicata

$$(a a') (b b') (c c') (d d')$$

anche all'altra

$$(a a') (b c') (c d') (d b')$$

il che è impossibile. In conclusione dunque:

« *I casi in cui le due quaterne di tangenti, condotte dai nodi, sieno armoniche, od equianarmoniche, non conducono a nuove inversioni spettanti alla quartica* ».

16. Si può infine domandare che cosa accada se uno dei punti doppi della quartica diviene una cuspid e l'altro rimane nodo. Si vedrebbe facilmente allora che una delle quattro tangenti tirate dal nodo verrebbe assorbita dalla retta che lo unisce alla cuspid. Seguitando a indicare con z tal retta, con $xuvw$ le quattro tangenti tirate dalla cuspid, con hkl quelle condotte dal nodo, le quattro proiettività del n. 10 vengono ad essere, ora, le seguenti:

$$xuvw \overline{\wedge} z hkl \overline{\wedge} h z l k \overline{\wedge} k l z h \overline{\wedge} l k h z$$

e quindi, dal confronto della prima quaterna con le rimanenti, risulta la generazione delle quattro coniche fondamentali relative alle inversioni del

(1) Cfr. ad es. ENRIQUES-CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni*, Volume I, pag. 302 (Bologna, N. Zanichelli, 1919).

n. 10. Si vede dunque che ciascuna di tali coniche riesce tangente a una delle quattro rette $xuvw$ e che quindi, sopra queste rette, si trovano (uno su ciascuna) i quattro centri d'inversione, ecc. ecc.

CAPITOLO III.

La quartica bicuspidale.

17. Per trattare il caso della quartica bicuspidale riprendiamo l'equazione (2) del n. 3 che ora sappiamo spettare al caso generico della quartica con due punti doppi (n. 10). Imitando il procedimento del n. 9, scriveremo l'equazione in parola nelle due forme equivalenti:

$$xz^2(dz^2 + bzy + ay^2) + xz(bz^2 + ezy + cy^2) + z^2(az^2 + czy + fy^2) = 0$$

$$y^2(fz^2 + czx + ax^2) + yz(cz^2 + ezx + bx^2) + z^2(az^2 + bzx + dx^2) = 0$$

allo scopo di dedurne le equazioni delle due quaterne di tangenti tirate dai due punti doppi sotto la forma:

$$(6), \quad y^4(e^2 - 4af) + 2y^3z(ec - 2ac - 2bf) + y^2z^2(e^2 - 2bc - 4df - 4a^2) + \\ + 2yz^3(eb - 2ab - 2cd) + z^4(b^2 - 4ad) = 0$$

$$(7), \quad z^4(e^2 - 4af) + 2z^3x(ec - 2ac - 2bf) + z^2x^2(e^2 - 2bc - 4df - 4a^2) + \\ + 2zx^3(eb - 2ab - 2cd) + x^4(b^2 - 4ad) = 0.$$

Introduciamo adesso l'ipotesi che (100) e (010) sieno due cuspidi, cioè che si abbia:

$$b^2 - 4ad = e^2 - 4af = 0.$$

Allora da ciascuna delle quaterne precedenti si stacca $z = 0$ (la retta che unisce le due cuspidi). Rimangono dunque tre tangenti tirate da ciascuna cuspidale. Inoltre, dalla (6) si stacca anche $y = 0$ e $x = 0$ dalla (7), il che significa che convergono nel centro d'inversione (001) una delle tangenti tirate dall'una cuspidale e una tirata dall'altra. Dopo di che la (6) e (7) si riducono alle due coppie di rette:

$$2y^2(ec - 2ac - 2bf) + yz(e^2 - 2bc - 4df - 4a^2) + 2z^2(eb - 2ab - 2cd) = 0$$

$$2z^2(ec - 2ac - 2bf) + zx(e^2 - 2bc - 4df - 4a^2) + 2x^2(eb - 2ab - 2cd) = 0$$

le quali sono tagliate negli stessi punti dalla retta:

$$(8) \quad x(eb - 2ab - 2cd) = y(ec - 2ac - 2bf)$$

come è facile verificare osservando che tali punti hanno le medesime due prime coordinate

$$x = ec - 2ac - 2bf, \quad y = eb - 2ab - 2cd$$

e per terze coordinate z le radici della equazione:

$$2z^2 + z(e^2 - 2bc - 4df - 4a^2) + \\ + 2(ec - 2ac - 2bf)(eb - 2ab - 2cd) = 0.$$

Osservando adesso che la retta (8) passa per (001) si trova la nota proposizione:

« Tre dei nove punti d'incontro delle due terne di tangenti, tirate dalle due cuspidi, sono allineati e quindi i sei rimanenti appartengono ad una stessa conica ».

18. Indichiamo con mnp , $m'n'p'$ le due terne di tangenti in discorso in guisa che sieno allineati i punti mm' , nn' , pp' . Essendo z la congiungente delle due cuspidi, le due quaterne $mnpz$, $m'n'p'z$ sono prospettive e ne segue:

$$mnpz \overline{\wedge} n'm'z p' \overline{\wedge} p'z m'n' \overline{\wedge} z p'n'm'.$$

Si trae dunque:

« Nel caso della quartica bicuspidale, le inversioni che hanno i centri esterni alle cuspidi si riducono a tre (da quattro che erano per la binodale). I centri sono i punti mm' , nn' , pp' , e quindi sono allineati ».

Le coniche fondamentali sono quelle generate dalle tre proiettività sopra indicate. Così ad es. la conica fondamentale dell'inversione che ha il centro in mm' , passa per i punti mn' , nm' , per le cuspidi ed ivi tocca le rette m , m' e così via per le rimanenti.

19. Per veder meglio le modificazioni che avvengono nel passaggio dalla binodale alla bicuspidale, adottiamo la seguente disposizione degli elementi di riferimento che serve anche a distaccare dalla quartica la configurazione formata dalle due terne mnp , $m'n'p'$ rendendola affatto indipendente dalla curva. Mantenendo (100), (010) nei centri dei fasci mnp , $m'n'p'$, collochiamo (001) nel punto mm' , e (1, 1, 1) in nn' . Così la retta $x - y = 0$ è quella che contiene i punti mm' , nn' , pp' . Non manca che di fissare le equazioni di p , p' , il che faremo indicando con (1, 1, λ) il loro punto d'incontro (sopra $x - y = 0$). Avremo dunque:

$$m \equiv \{y = 0\} \quad ; \quad n \equiv \{y - z = 0\} \quad ; \quad p \equiv \{\lambda y - z = 0\} \\ m' \equiv \{x = 0\} \quad ; \quad n' \equiv \{x - z = 0\} \quad ; \quad p' \equiv \{\lambda x - z = 0\}$$

Allora la inversione che ha il centro in $mm' \equiv (001)$ subordina fra i fasci di centri (100), (010) la proiettività

$$mnpz \overline{\wedge} zp'n'm'$$

e quindi la conica fondamentale passa per i punti np' , pn' , per le cuspidi (100), (010), toccando ivi m ed m' . Essa è dunque:

$$z^2 - \lambda xy = 0$$

e, per conseguenza, tale inversione può rappresentarsi con

$$I_1 \equiv \begin{Bmatrix} xz & yz & \lambda xy \\ x & y & z \end{Bmatrix}.$$

Analogamente, quella che ha per centro $nn' \equiv (1, 1, 1)$ subordina fra i fasci di centri (100), (010), la proiettività

$$mnpz \overline{\wedge} p'zm'n'$$

e, per conseguenza, la relativa conica fondamentale passa per i punti mp' , pm' , per le cuspidi (100), (010) toccando ivi n ed n' . Essa è quindi:

$$z^2(1 - \lambda) + \lambda(x - z)(y - z) = 0.$$

Dunque la relativa inversione è:

$$I_2 \equiv \begin{Bmatrix} (x - z)(\lambda y - z) & (y - z)(\lambda x - z) & \lambda(x - z)(y - z) \\ x & y & z \end{Bmatrix}.$$

Finalmente, quella che ha per centro $pp' \equiv (1, 1, \lambda)$ subordina, fra i fasci di centri (100), (010), la proiettività:

$$mnpz \overline{\wedge} n'm'zp'.$$

La relativa conica fondamentale passa per mn' , nm' , per (100), (010) toccando ivi p e p' : essa è dunque:

$$z^2(\lambda - 1) + (\lambda y - z)(\lambda x - z) = 0$$

e quindi le relativa inversione sarà:

$$I_3 \equiv \begin{Bmatrix} (\lambda x - z)(y - z) & (\lambda y - z)(x - z) & (\lambda x - z)(\lambda y - z) \\ x & y & z \end{Bmatrix}.$$

Scrivendo la ultime due inversioni trovate sotto la forma:

$$I_2 \equiv \begin{Bmatrix} pn' & np' & \lambda nn' \\ x & y & z \end{Bmatrix}; \quad I_3 \equiv \begin{Bmatrix} np' & pn' & pp' \\ x & y & z \end{Bmatrix}$$

si vede subito che:

$$I_2 I_3 = I_3 I_2 = \begin{Bmatrix} yz & xz & \lambda xy \\ x & y & z \end{Bmatrix}.$$

Da cui si ha:

$$I_3 I_2 I_1 = \begin{Bmatrix} y & x & z \\ x & y & z \end{Bmatrix}$$

che è l'omologia armonica di centro (1 - 1 0) e di asse $x - y = 0$. Dunque intanto:

« Il prodotto delle tre inversioni che hanno i centri allineati è l'omologia armonica che ha per asse la retta dei centri e per centro d'omologia quel punto della retta delle cuspidi che è coniugato armonico della intersezione con l'asse, rispetto alla coppia delle cuspidi medesime ».

20. Chiamando con I_4 l'omologia precedente, si potrà dunque scrivere:

$$I_2 I_3 I_1 = I_4$$

da cui $I_2 I_3 = I_4 I_1$. Si vede poi direttamente che

$$I_4 I_1 = I_1 I_4.$$

Quindi :

$$I_2 I_3 = I_3 I_2 = I_1 I_4 = I_4 I_1$$

e analogamente:

$$I_1 I_2 = I_2 I_1 = I_3 I_4 = I_4 I_3$$

$$I_1 I_3 = I_3 I_1 = I_2 I_4 = I_4 I_2$$

da cui ne viene che il prodotto (in qualsiasi ordine) di tre delle quattro trasformazioni

$$I_1, I_2, I_3, I_4$$

equivale alla quarta. Si può dunque dire che:

« Il gruppo G_8 , di ottavo ordine, di trasformazioni quadratiche involutorie spettante alla quartica binodale generica (n. 14), si modifica, nel caso speciale in cui i nodi siano sostituiti da cuspidi, sostituendo a una delle quattro inversioni una omologia armonica: ma la struttura del gruppo rimane la medesima. »

21. Non manca che di adattare l'equazione della quartica bicuspidale alle esigenze volute dalla speciale disposizione acquisita, nel n. 19, dagli elementi di riferimento. Allo scopo, riprendiamo l'equazione della binodale generica del n. 9 ed esigiamo, anzitutto, il possesso della omologia armonica I_4 del n. precedente, il che significa la simmetria in x e y . Ne segue

$$d = b, \quad m = c, \quad n = f.$$

Dopo di che si ha una sola condizione da adempiere perchè i punti doppi sieno cuspidi ed è

$$b^2 - 4ac = 0.$$

Introdotte queste condizioni, nelle equazioni delle due quaterne di tangenti tirate da (100) e (010) calcolate in quel n. 9, si verificherà il distacco, da entrambe, del fattore z e basterà dopo esigere che le due terne rimanenti siano identiche con

$$y(y-z)(\lambda y-z) = 0$$

$$x(x-z)(\lambda x-z) = 0.$$

Si otterranno così le ulteriori condizioni:

$$2(eb - 2af - 2bc) : (e^2 - 2bf - 4ap - 4c^2) : 2(ef - 2bp - 2fc) = \\ = \lambda : -(\lambda + 1) : 1$$

le quali, con le precedenti, serviranno a dare, alla equazione della bicuspidale, la forma cercata.

CAPITOLO IV.

La quartica tac-nodale.

22. È indispensabile premettere alcune considerazioni sopra le reti di coniche tutte tangenti a una stessa retta in un medesimo punto. Assumendo questa retta come $z = 0$ e (100) come punto di contatto, l'equazione della rete sarà del tipo:

$$y^2(a_1\lambda + a_2\mu + a_3) + z^2(b_1\lambda + b_2\mu + b_3) + \\ + yz(c_1\lambda + c_2\mu + c_3) + zx(d_1\lambda + d_2\mu + d_3) = 0$$

dove λ e μ sono i parametri della rete. Ebbene, per individuarla, possiamo scegliere le tre coniche determinate da quelle coppie di valori λ e μ le quali soddisfano alle seguenti condizioni;

$$\begin{cases} a_1\lambda + a_2\mu + a_3 = 0 ; b_1\lambda + b_2\mu + b_3 = 0 ; c_1\lambda + c_2\mu + c_3 = 0 \\ b_1\lambda + b_2\mu + b_3 = 0 ; d_1\lambda + d_2\mu + d_3 = 0 ; d_1\lambda + d_2\mu + d_3 = 0. \end{cases}$$

Tali coniche saranno quindi del tipo:

$$z(my + nx) = 0 ; y(py + qz) = 0 ; ry^2 + sz^2 = 0$$

e l'equazione della rete potrà scriversi sotto la forma

$$\lambda z(my + nx) + \mu y(py + qz) + ry^2 + sz^2 = 0.$$

Si vede allora che la Jacobiana della rete si compone di $z = 0$ e delle altre due rette:

$$(9) \quad qs z^2 + 2psyz - qr y^2 = 0$$

passanti per (100).

23. Osserviamo adesso che il fascio:

$$(10) \quad (\mu p + r)y^2 + yz\mu q + sz^2 = 0$$

appartiene alla rete (per $\lambda = 0$). Esso è costituito da infinite coppie di rette formanti una involuzione intorno a (100) e di cui i raggi doppi, dovendo appartenere alla Jacobiana, non possono essere altro che le due rette (9) del n. precedente. Questo si può confermare analiticamente notando che i raggi doppi in parola si ottengono per quei valori di μ che sono radici dell'equazione

$$\mu^2 q^2 - 4ps\mu - 4rs = 0.$$

Indicandoli con $\mu_1 \mu_2$ si avranno per s i due valori

$$s = \frac{q^2 \mu_1^2}{4(p\mu_1 + r)}; \quad s = \frac{q^2 \mu_2^2}{4(p\mu_2 + r)}.$$

Sostituendo questi valori di s nella (10) si trovano i raggi doppi rappresentati da

$$\begin{aligned} 2y(\mu_1 p + r) + q\mu_1 z &= 0 \\ 2y(\mu_2 p + r) + q\mu_2 z &= 0. \end{aligned}$$

Formandone l'equazione complessiva e tenendo presente che

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{4ps}{q^2}, \quad \mu_1 \mu_2 = -\frac{4rs}{q^2}$$

si cade nella (9) del n. precedente e così la desiderata conferma è ottenuta.

24. I raggi doppi del n. precedente possono essere utilizzati per semplificare ulteriormente la rappresentazione analitica della rete. Nulla vieta di assumere come equazione complessiva di tali raggi

$$y^2 - z^2 = 0$$

di guisa che il fascio del n. precedente può rappresentarsi con

$$y^2 + z^2 + \lambda yz = 0.$$

Aggiungendo quindi una conica tangente a $z = 0$ in (100), noi scriveremo l'equazione della rete nella forma:

$$y^2 + z^2 + \lambda yz + \mu(ay^2 + bz^2 + cyz + dx) = 0.$$

Risulta di qui che tutte le coniche della rete, dalle quali si stacca z , si ottengono per $1 + \mu a = 0$ e sono rappresentate da:

$$z\{ -dx + y(a\lambda - c) + z(a - b) \} = 0$$

Esiste dunque nella rete un fascio di coniche da ciascuna delle quali si stacca $z = 0$. Le rette rimanenti compongono a loro volta il fascio

$$-dx + y(a\lambda - c) + z(a - b) = 0$$

a cui appartiene $y = 0$. Segue che il centro del fascio precedente è sulla coniugata armonica di $z = 0$ rispetto alla coppia $y^2 - z^2 = 0$ formata dai raggi doppi del n. precedente. Le coordinate di un tal centro sono $(a - b, 0, d)$. È dunque lecito assumerlo come (001), il che significa supporre $a = b$. Con ciò l'equazione della rete diviene

$$y^2 + z^2 + yz \frac{\lambda + \mu c}{1 + \mu a} + xz \cdot \frac{\mu d}{1 + \mu a} = 0$$

e cambiando i parametri:

$$y^2 + z^2 + \lambda'yz + \mu'xz = 0.$$

Allora è ovvio constatare che la inversione

$$\begin{cases} xz & yz & y^2 \\ x & y & z \end{cases}$$

del n. 1(b) trasforma in se stessa ogni conica delle rete.

25. Riunendo i risultati delle osservazioni fatte nei precedenti N. 22, 23, 24, si può dire che:

In una rete di coniche tangenti a una stessa retta, in un medesimo punio, esiste una involuzione di coppie di rette intorno al punto, i cui raggi doppi, insieme alla tangente comune suddetta, formano la Jacobiana della rete. L'altro fascio di coppie di rette, esistente nella rete, è formato dalla tangente comune (riguardata come parte fissa) e da un'altra retta variabile intorno a un punto situato sulla coniugata armonica della tangente comune rispetto alle due rimanenti rette Jacobiane. L'inversione che ha per centro tal punto e, per conica fondamentale, quella costituita dalle due rimanenti rette Jacobiane suddette trasforma, in se stessa, ogni conica della rete.

26. Applicheremo adesso le osservazioni precedenti alla quartica tac-nodale nel modo che segue.

Ponendo (100) nel tac-nodo e assumendo $z = 0$ come tangente tac-nodale, l'equazione della curva potrà scriversi:

$$x^2 z^2 + 2xzu + v = 0$$

dove u e v sono binarie in y e z dei gradi rispettivi 2 e 4. Escludiamo per ora il caso in cui u sia nullo identicamente (sarà questo un caso da considerarsi a parte nel n. 37). L'equazione complessiva delle tangenti tirate alla curva dal tac-nodo è

$$u^2 - v = 0.$$

Indicando con $abcd$ i quattro fattori lineari in y e z in cui si decompone il primo membro di questa equazione in guisa che si abbia identicamente

$$abcd = u^2 - v$$

saranno $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$, le equazioni delle quattro tangenti tirate dal tac-nodo.

Si vede allora che le tre serie quadratiche di coniche

$$\begin{aligned} \lambda^2 ab + 2\lambda(xz + u) + cd &= 0 & (1) \\ \lambda^2 ac + 2\lambda(xz + u) + bd &= 0 \\ \lambda^2 ad + 2\lambda(xz + u) + bc &= 0 \end{aligned}$$

involuppano la quartica perchè si ha identicamente

$$(xz + u)^2 - abcd = x^2 z^2 + 2uxz + v.$$

Ora, ciascuna di queste tre serie è contenuta in una rete della specie descritta nel n. precedente e quindi le tre inversioni, spettanti alle tre reti e ivi descritte, spetteranno, alle tre serie e per conseguenza anche alla quartica tac-nodale. In relazione alla quale si può aggiungere, evidentemente, che i centri d'inversione saranno i punti diagonali del quadrangolo completo formato dai 4 punti di contatto delle tangenti tirate dal tac-nodo e le tre coniche fondamentali saranno costituite dalle tre coppie di rette componenti il covariante sestico della binaria $abcd = 0$.

27. È poi notevole il fatto che il prodotto delle tre precedenti inversioni equivalga ad una quarta inversione e precisamente a quella che ha il centro nel tac nodo. Per dimostrare questa affermazione andremo per gradi. E' prima necessario particolarizzare ulteriormente la posizione degli elementi di riferimento rispetto alla quartica. Mantenendo (100) nel tac-nodo e $z = 0$ per tangente tac-nodale, assumiamo come (001) uno dei tre centri d'inversione la cui esistenza è già stabilita dal n. precedente. La relativa conica d'inversione è composta da una coppia di rette passanti per (100', d'altra parte si noti che la tangente tac-nodale deve rimanere invariata per opera di tale inversione: dunque disponendo opportunamente anche del punto unità, sarà lecito rappresentare tale conica con

$$y^2 - z^2 = 0$$

e quindi l'inversione in parola sarà quella del n. 1 (b) cioè

$$\begin{Bmatrix} xz & yz & y^2 \\ x & y & z \end{Bmatrix}$$

e l'equazione della quartica assumerà la forma (4) del n. 5, che noi scriveremo ora più opportunamente così:

$$\begin{aligned} x^2 z^2 + 2xz \{ m(y^2 + z^2) + 2nyz \} + \\ + p(y^4 + z^4) + 4qyz(y^2 + z^2) + 6ry^2 z^2 = 0 \end{aligned}$$

e si può intanto concludere che tale equazione rappresenta effettivamente la tac-nodale generica.

(1) Segue che i punti di contatto di a, b, c, d , con la quarta esistono sulla conica $xz + u = 0$, ma 4 [di questi sono nel tac-nodo, dunque $xz + u = 0$ deve essere la conica d'inversione del n. 32.

28. La posizione di $x = 0$ non è ancora completamente fissata essendo, per ora, sottoposta alla sola condizione di passare per il centro d'inversione $M \equiv (001)$. Ebbene esigiamone il passaggio per il centro N di una altra delle tre inversioni trovate nel n. 27. Indichiamo poi con A, B, C, D le intersezioni della retta MN con la quartica, con hh', kk' le due coppie di rette componenti le coniche fondamentali inerenti ai centri M, N , con ll' la coppia armonica a hh', kk' , in guisa che hh', kk', ll' , costituiscano il covariante sestico di $abcd = 0$, (N. 26), Sieno infine HH', KK', LL' le tre coppie d'intersezione delle hh', kk', ll' con la retta MN (cioè con $x = 0$). Allora se AB, CD e AC, BD sono le coppie di punti corrispondenti, nelle due inversioni in discorso di centri M ed N , segue che sono armonici i gruppi:

$$ABHH' , CDHH' , ACKK' , BDKK'$$

il che significa che HH', KK' sono due coppie del covariante sestico di $ABCD$. Dunque, necessariamente la 3^a coppia è LL' . In conclusione, per la disposizione data agli elementi di riferimento, deve accadere che le due biquadratiche

$$u^2 - v = 0 \quad , \quad v = 0 ,$$

rappresentanti rispettivamente le 4 tangenti tirate dal tac-nodo e le 4 proiet-tanti da (100) i punti d'incontro di MN con la quartica, debbono avere il medesimo covariante sestico.

29. Per calcolare questo covariante si osservi che una coppia è già conosciuta: è $y^2 - z^2 = 0$ (n. 27).

Quanto alle altre, è da notare che le due biquadratiche in discorso individuano il fascio

$$u^2 + \lambda v = 0$$

di binarie biquadratiche aventi tutte in comune il covariante in parola. E siccome u^2 è un quadrato perfetto così segue che una seconda coppia sarà $u = 0$, ossia:

$$m(y^2 + z^2) + 2nyz = 0$$

dopo di che la terza coppia, dovendo essere armonica a entrambe le due coppie già conosciute, sarà necessariamente:

$$n(y^2 + z^2) + 2myz = 0.$$

Dunque il covariante sestico cercato è:

$$\{m(y^2 + z^2) + 2nyz\} \{n(y^2 + z^2) + 2myz\} \{y^2 - z^2\} = 0.$$

Ora il calcolo diretto del covariante sestico di $v = 0$ conduce alla seguente forma:

$[p^2 - 3pr + 2q^2] [q(y^4 + z^4 + 6y^2z^2) + (p + 3r)yz(y^2 + z^2)] [y^2 - z^2] = 0$
 e siccome fra i coefficienti p, q, r non si suppone alcuna relazione, così sarà in generale:

$$p^2 - 3pr + 2q^2 \neq 0$$

e quindi, la condizione espressa alla fine del n. precedente, si ottiene esigendo che le due binarie

$$\begin{aligned} \{m(y^2 + z^2) + 2nyz\} \{n(y^2 + z^2) + 2myz\} &= 0 \\ q(y^4 + z^4 + 6y^2z^2) + (p + 3r)yz(y^2 + z^2) &= 0 \end{aligned}$$

rappresentino lo stesso gruppo di quattro punti.

Si perviene così alla condizione

$$(11) \quad 2q(m^2 + n^2) = (p + 3r)mn$$

adempita la quale, si può ritenere che l'equazione

$$(12) \quad \begin{aligned} x^2z^2 + 2xz\{m(y^2 + z^2) + 2nyz\} + \\ + p(y^4 + z^4) + 4qyz(y^2 + z^2) + 6ry^2z^2 = 0 \end{aligned}$$

rappresenti la quartica tac-nodale con gli elementi di riferimento nella posizione voluta.

30. Siamo ora in grado di rappresentare analiticamente le tre inversioni spettanti alla curva e la cui esistenza è già stata dimostrata al n. 26.

Abbiamo già constatato l'appartenenza alla curva (n. 27) della

$$I_1 \equiv \begin{Bmatrix} xz & yz & y^2 \\ x & y & z \end{Bmatrix}$$

col centro (001) e con la conica fondamentale $y^2 - z^2 = 0$. Le due rimanenti hanno per conica fondamentale le altre due coppie del covariante sestico del n. precedente, cioè:

$$\begin{aligned} n(y^2 + z^2) + 2myz &= 0 \\ m(y^2 + z^2) + 2nyz &= 0. \end{aligned}$$

Il centro N della prima deve esistere sopra $x = 0$, e sulla coniugata armonica di $z = 0$ rispetto alla coppia fondamentale e quindi:

$$N \equiv (0, m, -n).$$

Quanto al centro della seconda, avendo presente che deve esistere sulla coniugata armonica di $z = 0$ rispetto alla coppia fondamentale ed esigendo poi la invarianza della quartica, si trovano le sue coordinate nella forma:

$$\{2(m^2 - n^2), n, -m\}.$$

Così le due rimanenti inversioni si potranno rappresentare con

$$I_2 \equiv \begin{Bmatrix} xz(m^2 - n^2) & , & -tw & w^2 \\ x & & y & z \end{Bmatrix} .$$

$$I_3 \equiv \begin{Bmatrix} (m^2 - n^2)[2m(y^2 + z^2) + 4nyz + xz] & , & tw & , & -t^2 \\ x & & y & & z \end{Bmatrix}$$

dove

$$t = my + nz \quad ; \quad w = ny + mz .$$

31. Si può desiderare una conferma diretta della spettanza di I_2 e I_3 alla nostra quartica (quanto a I_1 la conferma è ovvia). Essa può essere guidata così: cominciando da I_2 , si osservi che, attuandola sulla equazione della curva nella forma (12) del N. 29, si trova, a meno del fattore w^4 ,

$$\begin{aligned} & x^2 z^2 (m^2 - n^2)^2 + 2xz(m^2 - n^2)\{m(t^2 + w^2) - 2ntw\} + \\ & + p(t^4 + w^4) - 4qtw(t^2 + w^2) + 6rt^2 w^2 = \\ & = (m^2 - n^2)^2 [x^2 z^2 + 2xz\{m(y^2 + z^2) + 2nyz\}] + \\ & + (y^4 + z^4)[p(m^4 + n^4) - 4qmn(m^2 + n^2) + 6rm^2 n^2] + \\ & + 4yz(y^2 + z^2)[mn(m^2 + n^2)(p + 3r) - q(m^4 + n^4 + 6m^2 n^2)] + \\ & + 6y^2 z^2 [2pm^2 n^2 - 4qmn(m^2 + n^2) + r(m^4 + n^4 + 4m^2 n^2)] . \end{aligned}$$

La conferma desiderata è dunque realizzata se valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} p(m^4 + n^4) - 4qmn(m^2 + n^2) + 6rm^2 n^2 &= p(m^2 - n^2)^2, \\ mn(m^2 + n^2)(p + 3r) - 9(m^4 + n^4 + 6m^2 n^2) &= q(m^2 - n^2)^2, \\ 2pm^2 n^2 - 4qmn(m^2 + n^2) + r(m^4 + n^4) + 4m^2 n^2 &= r(m^2 - n^2)^2, \end{aligned}$$

che si trasformano tutte facilmente nella seguente

$$(p + 3r)mn = 2q(m^2 + n^2)$$

che è la (11) del N. 29 (la quale è vera per ipotesi).

Passando poi a I_2 e attuandola sopra l'equazione della quartica, si trova, a meno del fattore t^4 ,

$$\begin{aligned} & (m^2 - n^2)^2 \{2m(y^2 + z^2) + 4nyz + xz\}^2 + \\ & + 2(m^2 - n^2)\{2m(y^2 + z^2) + 4nyz + xz\}\{-m(w^2 + t^2) + 2ntw\} + \\ & + p(t^4 + w^4) - 4qtw(t^2 + w^2) + 6rt^2 w^2 = \\ & = (m^2 - n^2)^2 [x^2 z^2 + 2xz\{m(y^2 + z^2) + 2nyz\}] + \\ & + (y^4 + z^4)[p(m^4 + n^4) - 4qmn(m^2 + n^2) + 6rm^2 n^2] + \end{aligned}$$

$$+ 4yz(y^2 + z^2)[mn(m^2 + n^2)(p + 3r) - q(m^4 + n^4 + 6m^2n^2)] + \\ + 6y^2z^2[2pm^2n^2 - 4qmn(m^2 + n^2) + r(m^4 + n^4 + 4m^2n^2)] = 0$$

dopo di che la verifica rientra in quella precedente.

32. Dalle rappresentazioni analitiche di $I_1 I_2 I_3$ del N. 30 risulta :

$$I_1 I_2 = I_2 I_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} xz(m^2 - n^2) & , & -tw & , & t^2 \\ x & & y & & z \end{array} \right\}$$

e quindi :

$$I_1 I_2 I_3 \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} 2m(y^2 + z^2) + 4nyz + xz & , & -yz & , & -z^2 \\ x & & y & & z \end{array} \right\}$$

che è una nuova inversione (spettante naturalmente alla quartica) col centro nel tac-nodo (100) e avente per conica fondamentale :

$$m(y^2 + z^2) + 2nyz + xz = 0.$$

L'affermazione fatta al principio del N. 27 è dunque dimostrata. La conica precedente può ritenersi caratterizzata dal passaggio pel tac-nodo (toccando ivi la tangente tac-nodale) e per i quattro punti di contatto delle tangenti condotte dal tac-nodo medesimo. Questa nuova inversione è dunque del tipo (c) del N. 1 e quindi si può dire che le due forme (4), (5) trovate nei N. 5 e 6, per l'equazione della tac-nodale, rappresentano la stessa curva che è la tac-nodale generica.

33. Indicando con I_4 l'ultima inversione trovata nel n. precedente, risulta :

$$I_1 I_2 I_3 = I_4 ; I_1 I_2 = I_2 I_1 ; I_1^2 = I_2^2 = I_3^2 = I_4^2 = \text{identità.}$$

Ne segue :

$$I_1 = I_4 I_3 I_2 ; I_2 = I_1 I_4 I_3 ; I_3 = I_2 I_1 I_4.$$

Cioè ciascuna delle quattro inversioni in parola può riguardarsi come il prodotto delle tre rimanenti. Inoltre, dalle precedenti relazioni risulta anche:

$$I_1 I_2 = I_2 I_1 = I_3 I_4 = I_4 I_3$$

e analogamente (o direttamente) si verifica pure :

$$I_2 I_3 = I_3 I_2 = I_1 I_4 = I_4 I_1$$

e infine :

$$I_1 I_3 = I_3 I_1 = I_2 I_4 = I_4 I_2$$

e si conclude che il gruppo generato dalle attuali inversioni è isomorfo oloedrico (ma proiettivamente diverso) col G_8 del n. 14 spettante alla binodale generica.

34. I risultati acquisiti fin qui, in questo Capitolo, possono riassumersi nel seguente enunciato:

« *La quartica tac-nodale possiede quattro inversioni. Tre di esse hanno per centri i punti diagonali del quadrangolo formato dai quattro punti di contatto delle quattro tangenti tirate dal tac-nodo alla curva. Le coniche fondamentali relative sono costituite dalle tre coppie di rette che compongono il covariante sestico della quaterna di tangenti suddette. La quarta inversione è il prodotto delle prime tre, ha il centro nel tac-nodo: la relativa conica fondamentale passa per questo punto medesimo, tocca ivi la tangente tac-nodale e taglia ulteriormente la quartica nei quattro punti di contatto delle nominate tangenti condotte dal tac-nodo* ».

« *Queste quattro inversioni sono, a due, a due, permutabili, il prodotto di due qualunque equivale al prodotto delle due rimanenti, come il prodotto di tre qualsiasi equivale alla quarta* ».

« *In conclusione il gruppo che esse generano, dell'ottavo ordine, è isomorfo oloedrico (benchè proiettivamente distinto) a quello relativo alla binodale del n. 15* ».

I casi di quartiche tac-nodali incontrati mediante le equazioni (4) e (5) dei n. 5 e 6 non sono distinti: spettano a una medesima curva: alla tac-nodale generica.

35. Passeremo infine a considerare qualche caso speciale di quartiche tac-nodali. Vediamo, ad esempio, che cosa accade quando la curva viene a possedere un ulteriore punto doppio (oltre il tac-nodo).

Riprendiamo perciò l'equazione della tac-nodale nella forma del n. 27:

$$x^2z^2 + 2xz^2 \{ m(y^2 + z^2) + 2nyz \} + p(y^4 + z^4) + 4qyz(y^2 + z^2) + 6ry^2z^2 = 0$$

dove (100) è il tac-nodo, con $z = 0$ tangente tac-nodale.

Una delle tre inversioni possedute dalla curva e aventi il centro esterno alla curva medesima è

$$\begin{Bmatrix} xz & yz & y^2 \\ x & y & z \end{Bmatrix}$$

col centro in (001) e $y^2 - z^2 = 0$ per conica fondamentale.

Introduciamo adesso l'ipotesi di un altro punto doppio: esso dovrà essere unito, per l'inversione precedente, altrimenti la curva si spezza e quindi dovrà esistere sulla conica precedente. Assumendo per $x = 0$ la congiungente di (001) con questo punto doppio, potremo scriverne le coordinate nella forma (011). La nostra equazione sarà quindi adattata a queste nuove esigenze di riferimento se saranno soddisfatte le condizioni

$$\begin{aligned} m + n &= 0 \\ p + 4q + 3r &= 0 \end{aligned}$$

le quali esprimono che le coordinate del nuovo punto doppio annullano le tre derivate parziali rispetto a x, y, z . Dopo di che l'equazione può scriversi:

$$x^2 z^2 + (y - z)^2 \{ 2m x z + p (y + z)^2 + 4q y z \} = 0$$

e quindi si vede che, dal tac-nodo, si possono tirare le sole due tangenti (proprie)

$$(y^2 + z^2)(m^2 - p) - 2 y z (m^2 + p + 2 q) = 0$$

le quali vengono permutate l'una nell'altra dalla sopra indicata inversione che, nel caso attuale, è quindi l'unica che permane delle tre (con i centri esterni alla curva) esistenti nel caso generico (n. 34).

36. Quanto infine alla inversione avente il centro nel tac-nodo, le formole del n. 28 e seguenti non valgono adesso perchè la disposizione allora adottata degli elementi di riferimento è adesso inattuabile. Però, imitando il procedimento dei n. 11 e 12, si trova facilmente che tale inversione di centro (100) ha per conica fondamentale

$$m(y - z)^2 + x z = 0,$$

e può rappresentarsi con

$$J \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} 2m(y - z)^2 + xz & , & -yz & , & -z^2 \\ x & & y & & z \end{array} \right\}$$

Ponendo poi

$$I \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} xz & yz & y^2 \\ x & y & z \end{array} \right\}$$

si vede subito che

$$IJ = JI = \left\{ \begin{array}{ccc} 2m(y - z)^2 + z & , & -yz & , & y^2 \\ x & & y & & z \end{array} \right\}$$

e riflettendo che:

$$I^2 = J^2 = (IJ)^2 = \text{identità},$$

segue che $I, J, IJ, 1$, compongono un gruppo quadrinomio. Si conclude quindi:

« Se al tac-nodo si viene ad aggiungere un punto doppio, le tre inversioni che hanno il centro esterno alla curva (n. 34) si riducono ad una sola la cui conica fondamentale è costituita dalle due tangenti tirate dal tac-nodo: il centro relativo è sulla corda di contatto di tali tangenti. Permane poi l'inversione che ha il centro nel tac-nodo (N. 34).

« Queste due inversioni sono permutabili. Esse, insieme al loro prodotto e all'identità, compongono un gruppo quadrinomio ».

Alle due precedenti inversioni spettanti, alla curva, viene naturalmente ad aggiungersi una terza: quella che ha il centro nel punto doppio aggiunto, e per conica fondamentale la relativa conica di BERTINI secondo le considerazioni del n. 2 (4).

37. Un altro caso particolare notevole accade allorchè nella equazione della tac-nodale del n. 36:

$$x^2z^2 + 2xzu + v = 0$$

la forma u è nulla identicamente e l'equazione si riduce a

$$x^2z^2 + v = 0.$$

Allora, le quattro tangenti condotte dal tac-nodo sono rappresentate da $v = 0$ ed hanno i loro punti di contatto sopra $x = 0$. Cadono dunque le formole del n. 30 essendo $m = n = 0$ e bisogna ricorrere a un altro triangolo fondamentale per rappresentare le tre inversioni che hanno i centri esterni alla curva. È però notevole che il loro prodotto equivalga alla omologia armonica:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} -x & y & z \\ x & y & z \end{array} \right\}$$

manifestamente spettante alla curva. Per dimostrarlo, e insieme, per rappresentare nel modo più opportuno le inversioni in parola, assumiamo v sotto la forma canonica scrivendo:

$$v = y^4 + z^4 + 6py^2z^2$$

se non che non è più lecito assumere $z = 0$ come tangente tac-nodale (a meno di una ulteriore specializzazione che vogliamo evitare). Scriveremo dunque l'equazione della quartica nella forma:

$$x^2(ay + bz)^2 + y^4 + z^4 + 6py^2z^2 = 0$$

dove la tangente tac-nodale è adesso $ay + bz = 0$.

(1) Nel caso speciale del « *Cappa proiettivo* » [RETALI], « *Sopra una corrispondenza (m, n)* », (Istit. Lomb. s. II. Vol. XXXII), il punto doppio ulteriore è un nodo inflessionale.

L'equazione della curva può scriversi sotto la forma

$$ax^2z^2 = (x^2 + y^2)y^2;$$

(cf. ad es. LORIA, « *Specielle algebraischen und transzendentem ebene kurven* », pag. 196. (Teubner, Lipsia, 1910). Ma in questo caso particolare le tre inversioni degenerano nelle tre omologie armoniche che hanno per centri e assi i vertici e i lati opposti del triangolo mediante il quale l'equazione della curva assume la forma precedente.

Si trova allora che le tre inversioni che hanno i centri esterni alla curva sono le seguenti :

$$I_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} -x(ay + bz) & , & y(-ay + bz) & , & z(ay - bz) \\ x & & y & & z \end{array} \right\}$$

col centro $(0, b, a)$ e con la conica fondamentale

$$xz = 0 ;$$

$$I_2 \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} x(ay + bz) & , & z(by + az) & , & y(by + az) \\ x & & y & & z \end{array} \right\}$$

col centro in $(0, a, -b)$ e con la conica fondamentale

$$y^2 - z^2 = 0 ;$$

$$I_3 \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} x(ay + bz) & & z(by - az) & & y(az - by) \\ x & & y & & z \end{array} \right\}$$

col centro in $(0, a, b)$ e con la conica fondamentale

$$y^2 + z^2 = 0.$$

I centri sono dunque allineati sopra $x = 0$ ed è facile riconoscere che :

$$I_1 I_2 I_3 \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} -x & y & z \\ x & y & z \end{array} \right\}.$$

Indicando con I_4 questa omologia, si riconosce facilmente che :

$$I_1 I_2 = I_2 I_1 = I_3 I_4 = I_4 I_3 = \left\{ \begin{array}{ccc} -x(ay + bz) & , & z(by - az) & , & y(az - by) \\ x & & y & & z \end{array} \right\} ;$$

$$I_1 I_3 = I_3 I_1 = I_1 I_4 = I_4 I_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} -x(ay + bz) & , & z(by + az) & , & y(by + az) \\ x & & y & & z \end{array} \right\} ;$$

$$I_2 I_3 = I_3 I_2 = I_1 I_4 = I_4 I_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} x(ay + bz) & , & y(-ay + bz) & , & z(ay - bz) \\ x & & y & & z \end{array} \right\} ;$$

e risulta anche come il prodotto di tre qualunque delle $I_1 I_2 I_3 I_4$ equivalga alla rimanente.

Si conclude dunque :

« Il caso attuale si può far discendere dalla tac-nodale generica del N. 34, supponendo che i centri d'inversione, esterni alla curva, sieno allineati e che la rimanente inversione (che ha il centro nel tac-nodo) degeneri nella omologia armonica col centro nello stesso punto e con l'asse sulla retta d'allineamento suddetta. Questa omologia prende il posto della nominata rimanente inversione anche nel gruppo G_8 il quale però mantiene l'isomorfismo oloedrico primitivo ».

CAPITOLO V.

La quartica trinodale

38. Scegliendo per punti fondamentali i punti doppi e disponendo opportunamente del punto unità, noi scriveremo l'equazione della curva sotto la forma

$$Q \equiv a^2 y^2 z^2 + b^2 z^2 x^2 + c^2 x^2 y^2 + 2xyz(x + y + z) = 0.$$

Per ogni coppia di punti doppi esistono due serie quadratiche di coniche inviluppanti. Ad es. per (100), (010) passano tutte le coniche delle due serie

$$\lambda^2 c^2 xy + 2\lambda cz (bx \pm ay) - \{ c^2 xy + 2(1 \mp ab) z^2 + 2(z + y) \} = 0;$$

infatti l'equazione della quartica può scriversi:

$$cz (bx \pm ay)^2 + c^2 xy \{ c^2 xy + 2(1 \mp ab) z^2 + 2z(x + y) \} = 0.$$

Dunque (N. 8) esisteranno, corrispondentemente, due inversioni spettanti alla quartica le cui coniche fondamentali saranno Jacobiane delle reti contenenti le serie alla maniera del N. 10. I relativi centri d'inversione si potrebbero determinare riguardandoli come poli di $z = 0$, rispetto alle coniche Jacobiane suddette (N. 8), ma, nel caso attuale, giova meglio osservare che per $\lambda = \pm 1$ (in entrambe le serie precedenti) si ottengono due coniche degeneri di ciascuna delle quali fa parte $x = 0$: dunque le due rimanenti rette, in ogni serie, saranno due bitangenti secantesi nel centro cercato (N. 10). Si trovano così le equazioni delle 4 bitangenti di Q nella seguente forma (1):

$$t_1 \equiv \{ x(bc - 1) + y(ca - 1) + z(ab - 1) = 0 \};$$

$$t_2 \equiv \{ x(bc - 1) - y(ca + 1) - z(ab + 1) = 0 \};$$

$$t_3 \equiv \{ -x(bc + 1) + y(ca - 1) - z(ab + 1) = 0 \};$$

$$t_4 \equiv \{ -x(bc + 1) - y(ca + 1) + z(ab - 1) = 0 \},$$

(1) DE VRIES, « *La quartique trinodale* », pag. 31. (Archives Teyler, Série II, T. VII Première partie). Con i simboli attuali la conica che passa per gli otto punti di contatto delle 4 bitangenti è:

$$C \equiv \{ x^2(1 - b^2c^2) + y^2(1 - c^2a^2) + z^2(1 - a^2b^2) + 2xy + 2yz + 2zx = 0 \}$$

ed è facile riconoscere che si ha identicamente:

$$C^2 \equiv -t_1 t_2 t_3 t_4 = 4 a^2 b^2 c^2 Q.$$

e si vede che i centri delle due inversioni in parola sono i punti $t_1 t_4$, $t_2 t_3$ e le coniche fondamentali rispettivamente :

$$b(ab - 1)zx - (b - a)xy + a(1 - ab)zy = 0$$

$$b(ab + 1)zx - (b + a)xy + a(1 + ab)zy = 0.$$

Queste possono anche ritenersi caratterizzate mediante le coppie di tangenti che si possono condurre, alla curva, dai due punti doppi (100), (010), secondo le considerazioni del N. 11. Considerando il quadrilatero completo formato con tali coppie, si vede che due vertici opposti sono in (100), (010): ebbene le due coniche in parola possono ritenersi individuate dal passaggio di entrambe per i tre punti doppi della quartica, e di ciascuna per una delle rimanenti coppie di vertici opposti del nominato quadrilatero.

39. Ripetendo le considerazioni del N. precedente, per le residue coppie dei punti doppi della curva, si verranno a individuare, in tutto, sei inversioni, spettanti alla curva medesima, con i centri nei vertici del quadrilatero $t_1 t_2 t_3 t_4$ formato con le bitangenti. Per rappresentare analiticamente queste inversioni e renderne più facilmente maneggiabili le formole relative, faremo le seguenti posizioni :

$$c - b = m_a \quad ; \quad b(1 - bc) = n_a \quad ; \quad c(bc - 1) = p_a \quad ;$$

$$a - c = n_b \quad ; \quad c(1 - ca) = p_b \quad ; \quad a(ca - 1) = m_b \quad ;$$

$$b - a = p_c \quad ; \quad a(1 - ab) = m_c \quad ; \quad b(ab - 1) = n_c \quad ;$$

$$-(c + b) = m'_a \quad ; \quad b(1 + bc) = n'_a \quad ; \quad c(bc + 1) = p'_a \quad ;$$

$$-(a + c) = n'_b \quad ; \quad c(1 + ca) = p'_b \quad ; \quad a(ca + 1) = m'_b \quad ;$$

$$-(b + a) = p'_c \quad ; \quad a(1 + ab) = m'_c \quad ; \quad b(ab + 1) = n'_c \quad ;$$

$$ym_a - xn_a = u_a \quad ; \quad zm_a - xp_a = v_a \quad ;$$

$$zn_b - yp_b = u_b \quad ; \quad xn_b - ym_b = v_b \quad ;$$

$$xp_c - zm_c = u_c \quad ; \quad yp_c - zn_c = v_c \quad ;$$

$$ym'_a - xn'_a = u'_a \quad ; \quad zm'_a - xp'_a = v'_a \quad ;$$

$$zn'_b - yp'_b = u'_b \quad ; \quad xn'_b - ym'_b = v'_b \quad ;$$

$$xp'_c - zm'_c = u'_c \quad ; \quad xp'_c - zn'_c = v'_c \quad .$$

Allora le sei inversioni in discorso possono rappresentarsi come segue:

$$I_{12} \equiv \begin{Bmatrix} u_a v_a & n_a u_a z & p_a v_a y \\ x & y & z \end{Bmatrix}$$

Il centro è il punto $t_1 t_2 \equiv (m_a n_a p_a)$ e la conica fondamentale è

$$p_a xy - m_a yz + n_a zx = 0.$$

$$I_{34} \equiv \begin{Bmatrix} u'_a v'_a & n'_a u'_a z & p'_a v'_a y \\ v & y & z \end{Bmatrix}$$

Il centro è $t_3 t_4 \equiv (m'_a n'_a p'_a)$ e la conica fondamentale è

$$p'_a xy - m'_a yz + n'_a zx = 0.$$

$$I_{13} \equiv \begin{Bmatrix} m_b v_b z & u_b v_b & p_b u_b x \\ x & y & z \end{Bmatrix}$$

Il centro è $t_1 t_3 \equiv (m_b n_b p_b)$ e la conica fondamentale è

$$m_b yz - n_b zx + p_b xy = 0$$

$$I_{24} \equiv \begin{Bmatrix} m'_b v'_b z & u'_b v'_b & p'_b u'_b x \\ x & y & z \end{Bmatrix}$$

Il centro è $t_2 t_4 \equiv (m'_b n'_b p'_b)$ e la conica fondamentale è

$$m'_b yz - n'_b zx + p'_b xy = 0.$$

$$I_{14} \equiv \begin{Bmatrix} m_c u_c y & n_c v_c x & u_c v_c \\ x & y & z \end{Bmatrix}$$

Il centro è $t_1 t_4 \equiv (m_c n_c p_c)$ e la conica fondamentale è

$$n_c zx - p_c xy + m_c yz = 0.$$

$$I_{23} \equiv \begin{Bmatrix} m'_c u'_c y & n'_c v'_c x & u'_c v'_c \\ x & y & z \end{Bmatrix}$$

Il centro è $t_2 t_3 \equiv (m'_c n'_c p'_c)$ e la conica fondamentale è

$$n'_c zx - p'_c xy + m'_c yz = 0.$$

Per la maggiore chiarezza di queste formole si tenga presente che i tre gruppi contenuti nelle parentesi grandi si deducono successivamente l'uno dall'altro con le permutazioni circolari:

$$(abc) , (mnp) , (xyz).$$

Invece i due gruppi contenuti in una medesima parentesi grande si ottengono l'uno dall'altro con le trasposizioni:

$$(mm') , (nn') , (pp') , (vv').$$

Le tre parentesi grandi sono inerenti alle tre diagonali del quadrilatero completo formato con le quattro bitangenti $t_1 t_2 t_3 t_4$.

Effettuando, sopra la quartica Q , le inversioni ora rappresentate, si vedrebbe facilmente che la equazione di Q si riproduce moltiplicata per certi fattori esterni che debbono quindi esser supposti diversi da zero. Si vengono così a escludere (oltre i valori nulli di abc) anche alcuni di quelli per i quali si abbia:

$$a^2 b^2 = b^2 c^2 = c^2 a^2 = 1.$$

40. A questo punto si presenterebbe naturalmente il problema di caratterizzare il gruppo generato dalle sei precedenti inversioni. Ma il risolvere la questione non pare tanto semplice quanto il proporla (come già abbiamo dichiarato nella introduzione). Non si può nemmeno affermare che il gruppo generato sia discreto (o continuo).

Quel che si può dire soltanto è che formano coppie di inversioni permutabili le seguenti

$$(I_{12} I_{34}) , (I_{13} I_{24}) , (I_{14} I_{23})$$

di guisa che nascono i seguenti tre gruppi quadrinomi:

$$I_{12} , I_{34} , I_{12} I_{34} , \text{identità};$$

$$I_{13} , I_{24} , I_{13} I_{24} , \text{identità};$$

$$I_{14} , I_{23} , I_{14} I_{23} , \text{identità};$$

i quali saranno a loro volta sottogruppi dell'intero gruppo generato.

Con le sei nominate inversioni non si possono formare altre coppie permutabili, il che naturalmente contribuisce a fare elevare l'ordine del gruppo generato nella ipotesi non affatto provata (e nemmeno forse probabile!) che tale ordine sia finito e quindi il gruppo sia discreto.

41. Alle sei inversioni precedenti spettanti alla trinodale generica, si aggiungono poi quelle tre che hanno i centri nei tre punti doppi e per coniche fondamentali le rispettive coniche di BERTINI (1). Seguendo il metodo dei N. 11, 12 e ponendo per brevità:

$$2x(b^2 + c^2 - 2) + a^2(c^2 y + b^2 z) = u_1$$

$$2y(c^2 + a^2 - 2) + b^2(a^2 z + c^2 x) = u_2$$

$$2z(a^2 + b^2 - 2) + c^2(b^2 x + a^2 y) = u_3$$

(1) DE VRIES: cfr. l'ultima Memoria citata.

tali tre inversioni possono rappresentarsi come segue :

$$\begin{aligned}
 J_1 &\equiv \left\{ \begin{array}{l} -a^2(c^2xy + b^2xz + 2xz) \\ x \end{array} \right. , \quad \left. \begin{array}{l} u_1y \\ y \end{array} \right. , \quad \left. \begin{array}{l} u_1z \\ z \end{array} \right\} \\
 J_2 &\equiv \left\{ \begin{array}{l} u_2x \\ x \end{array} \right. , \quad \left. \begin{array}{l} -b^2(a^2xy + c^2yz + 2zx) \\ y \end{array} \right. , \quad \left. \begin{array}{l} u_2z \\ z \end{array} \right\} \\
 J_3 &\equiv \left\{ \begin{array}{l} u_3x \\ x \end{array} \right. , \quad \left. \begin{array}{l} u_3y \\ y \end{array} \right. , \quad \left. \begin{array}{l} -c^2(b^2yz + a^2zx + 2xy) \\ z \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

I centri sono rispettivamente in (100), (010), (001) e le coniche fondamentali sono ordinatamente :

$$\begin{aligned}
 x^2(b^2 + c^2 - 2) + a^2(c^2xy + b^2xz + yz) &= 0 \\
 y^2(c^2 + a^2 - 2) + b^2(a^2yz + c^2yx + zx) &= 0 \\
 z^2(a^2 + b^2 - 2) + c^2(b^2zx + a^2zy + xy) &= 0.
 \end{aligned}$$

Le J_1, J_2, J_3 non sono a due a due permutabili.

42. I risultati conseguiti in questo capitolo possono riassumersi così :

« *La quartica trinodale possiede nove inversioni. Sei di esse hanno i centri nei vertici del quadrilatero completo formato dalle quattro bitangenti della curva. Le relative coniche fondamentali passano tutte per i tre nodi, e, ciascuna, per una delle rimanenti coppie di vertici opposti dei tre quadrilateri formati associando le due tangenti tirate da un nodo con le altre due tirate da un altro nodo nelle tre maniere possibili* ».

« *Le rimanenti tre inversioni spettanti alla quartica hanno i centri nei tre nodi e per coniche fondamentali le rispettive coniche di Bertini* ».

Nella citata Nota di RICHARDS (pag. 240, cor. 7) vengono attribuite alla trinodale, oltre le precedenti, altre sei inversioni che però non le spettano. Infatti ciascuna di esse avrebbe per conica fondamentale una coppia di lati del triangolo nodale: quanto al centro d'inversione relativo (di cui il RICHARDS non parla) si può dire che dovrebbe essere esterno alla curva altrimenti, se le appartenesse, sarebbe doppio e la curva, possedendo quattro punti doppi, si spezzerebbe. Ebbene, se la quartica deve possedere una inversione, a conica fondamentale degenerare, col centro esterno alla curva, valgono le considerazioni del N. 5 che conducono alla tacnodale e non alla trinodale.

43. Chiuderemo il capitolo con l'esame di qualche caso speciale. Supponiamo che uno dei tre punti doppi della quartica Q (ad es. (001)) sia una cuspidale.

Scrivendo la Q del N. 38 nella forma :

$$z^2(a^2y^2 + 2yx + b^2x^2) + 2zxy(x + y) + cx^2y^2 = 0$$

si vede che si è condotti alla condizione

$$a^2 b^2 = 1.$$

Prendendo $ab = 1$, si vede che le quattro bitangenti della trinodale generica (N. 38) si riducono a due e precisamente a t_2 e t_3 : le rimanenti t_1 t_4 divengono le due tangenti tirate dalla cuspidale.

Delle sei inversioni i cui centri sono esterni alla curva, si perde la I_{14} a causa di $m_c = n_c = 0$, le altre 5 permangono ed hanno i centri in quei cinque vertici del quadrilatero formato dalle due bitangenti e dalle due tangenti condotte dalla cuspidale che sono esterni alla curva. Rimangono poi naturalmente le tre inversioni che hanno i centri nei tre punti doppi. In tutto dunque la curva possiede 8 inversioni.

44. — Più interessante è il caso in cui due dei punti doppi sono cuspidi e il terzo è un nodo, onde la curva potrebbe chiamarsi la « *lumaca proiettiva* » (1). Riprendendo l'equazione della trinodale generica (n. 38), si vede che (100), (010) saranno due cuspidi quando

$$b^2 c^2 = a^2 c^2 = 1$$

da cui

$$a^2 = b^2, c^2 = \frac{1}{a^2},$$

dopo di che l'equazione può scriversi :

$$a^2 z^2 (x^2 + y^2) + \frac{x^2 y^2}{a^2} \pm 2 x y z (x + y + z) = 0.$$

Così le tangenti cuspidali sono :

$$a^2 z + y = 0, \quad a^2 z + x = 0$$

e le tangenti nodali :

$$a^2 (x^2 + y^2) + 2 x y = 0.$$

Se dunque si vuole che il terzo punto doppio (001) sia un nodo (e non una cuspidale anch'esso) bisogna escludere per a^2 i valori ± 1 .

Dopo di che si vede che le quattro bitangenti t_1 t_2 t_3 t_4 della trinodale generica, si riducono alle seguenti (n. 38) per $bc = ca = 1$

(1) Giacchè se le due cuspidi sono nei punti ciclici la curva è la « *Lumaca di Pascal* » cf. ad es. LORIA (loc. cit. pag. 177) e SALMON id. pag. 355.

$t_1 \equiv \{z = 0\}$ congiungente le due cuspidi,

$t_2 \equiv \{2y + z(a^2 + 1) = 0\}$ tangente tirata dalla cuspidale (100),

$t_3 \equiv \{2x + z(a^2 + 1) = 0\}$ tangente tirata dalla cuspidale (010),

$t_4 \equiv \{2(x + y) + z(1 - a^2) = 0\}$ unica bitangente propria.

Le formule inerenti a questo caso non possono farsi discendere specializzando quelle del n. 19 inerenti alla quartica bicuspidale, perchè la disposizione ivi adottata degli elementi di riferimento esclude la presenza di un ulteriore punto doppio della curva.

45. Continuando invece a servirsi delle formule inerenti alla trinodale (n. 29) si vede che si ha

$$n_a = p_b = p_a = m_b = p_c = 0.$$

Dunque si perdono le I_{12} , I_{13} . La I_{14} si riduce alla omologia armonica:

$$I_{14} \equiv \begin{Bmatrix} y & x & z \\ x & y & z \end{Bmatrix}$$

che ha per asse $x = y$ e per centro $(1, -1, 0)$. Le tre I_{23} , I_{24} , I_{34} hanno i centri nei vertici del trilatero $t_2 t_3 t_4$.

In conclusione « *La Lumaca proiettiva possiede sei inversioni: tre sono quelle della trinodale generica che hanno i centri nei tre punti doppi: le altre tre hanno i centri nei vertici del trilatero formato dalla bitangente e dalle tangenti tirate dalle cuspidi. Nel passaggio dalla trinodale alla curva attuale, si perdono dunque due inversioni e la terza degenera nella omologia armonica che ha per centro il punto d'incontro della bitangente con la retta che congiunge le cuspidi e per asse la retta che passa per il nodo e per il punto d'incontro delle tangenti cuspidali* ».

46. Se poi anche il terzo punto doppio è una cuspidale la quartica è tricuspide (ipocieloide proiettiva). L'equazione può scriversi sotto la forma (1):

$$x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 + 2 x y z (x + y + z) = 0$$

che proviene dalla trinodale generica Q del N. 39 per

$$a^2 = b^2 = c^2 = -1.$$

(1) Ad es. SALMON, loc. cit. pag. 363. È ivi da notare un errore di stampa. L'equazione dover essere $x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}} = 0$ e con $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}} = 0$.

Le tre cuspidi sono nei vertici del triangolo fondamentale. Le tre tangenti cuspidali convergono nel punto unità. La bitangente è la retta unità.

Facendo $ab = bc = ca = -1$ nelle formule del N. 39 si vede che si perdono le inversioni I_{34} , I_{23} , I_{24} e le rimanenti I_{12} , I_{13} , I_{14} si riducono rispettivamente alle omologie armoniche

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x & z & y \\ x & y & z \end{array} \right\} ; \left\{ \begin{array}{ccc} z & y & x \\ x & y & z \end{array} \right\} ; \left\{ \begin{array}{ccc} y & x & z \\ x & y & z \end{array} \right\} ;$$

i cui assi sono ordinatamente:

$$y = z , z = x , x = y$$

convergenti in (1, 1, 1) e di cui i centri sono:

$$(0, 1, -1) , (1, 0, -1) , (1, -1, 0)$$

situati sopra $x + y + z = 0$. Permangono le tre inversioni $J_1 J_2 J_3$ soltanto. Dunque:

« *La quartica tricuspidale possiede solamente le tre inversioni che hanno i centri nelle cuspidi e per coniche fondamentali le relative coniche di Bertini. Delle sei rimanenti inversioni, spettanti alla trinodale generica, tre si perdono, le altre tre degenerano nelle tre omologie armoniche i cui centri sono nei punti d'incontro della bitangente con i lati del triangolo formato dalle tre cuspidi e di cui gli assi sono le tangenti cuspidali* ».

Si può aggiungere, ovviamente, che queste tre omologie generano il gruppo di collineazioni di 6° ordine rappresentato dal gruppo totale di sostituzioni sopra xyz . Le due rimanenti collineazioni del gruppo (a prescindere dall'identità) sono a periodo tre (ciascuna è il quadrato dell'altra) e hanno per punti uniti quello dove convergono le tre tangenti cuspidali e i punti di contatto della bitangente con la quartica.

47. Infine, come esempio di quartica trinodale in cui tutte le nove inversioni del caso generico (N. 42) degenerano in altrettante omologie armoniche si può citare la Lemniscata proiettiva (1) la cui equazione può scriversi:

$$x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 = 0 .$$

Le quattro bitangenti sono:

$$x + y + z = 0 , -x + y + z = 0 , x - y + z = 0 , x + y - z = 0$$

(1) BERZOLARI. « *Sulla Lemniscata proiettiva* ». Rend. Istit. Lomb. s. II, Vol. XXXVII 1904.

I centri delle suddette omologie costituiscono i vertici del quadrilatero delle bitangenti e quelli del relativo triangolo diagonale (i quali ultimi sono i tre nodi della curva); gli assi relativi sono i lati del quadrangolo associato e quelli del nominato triangolo diagonale. Queste nove omologie fanno parte dell'intero gruppo di collineazioni spettanti alla curva. Il gruppo è ottaedrico e permuta in tutti i modi possibili i lati del quadrilatero sopra indicato (1).

(1) CIANI, « *Contributo alla teoria del gruppo di 168 collineazioni piane* ». Ann. di matematica, t. V. serie III.

INTORNO AD ALCUNI COVARIANTI DI CURVE ALGEBRICHE PIANE

[Rendic. Istit. Lomb. 1920]

1. — Data una curva algebrica piana C_n , di ordine n , il modo più semplice per ottenere dei covarianti di C_n , dipendenti da un punto qualsiasi P del piano della curva, è di costruire le $n - 1$ polari di P rispetto a C_n .

Lo scopo di questo breve scritto è di richiamare un altro metodo, ugualmente semplice, per ottenere altri covarianti della stessa specie cioè dipendenti dalla posizione di P . DICO « di richiamare » perchè l'idea che sto per sottoporre al giudizio del Lettore è così ovvia che appare inverosimile come ad altri non si sia presentata. In ogni caso (senza discutere affatto su priorità di sorta, chè proprio non ne vale la pena) io confido che un qualche interesse possa essere riconosciuto in una applicazione che ne farò al caso più elementare in cui C_n sia una cubica.

2. — Ecco dunque di che si tratta. Consideriamo le infinite trasversali tirate per il punto F a incontrare la curva C_n ognuna in n punti e, sopra ciascuna di esse, consideriamo lo stesso covariante rispetto al gruppo delle n intersezioni suddette. Se questo covariante (binario) è rappresentato da m punti, si viene così ad individuare un luogo geometrico che costituisce manifestamente un covariante (ternario) di C_n dipendente da P .

Per fissare le idee collochiamo (001) in P e scriviamo la equazione della curva C_n in coordinate omogenee x, y, z , nella consueta forma:

$$C_n \equiv \{ a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z a_n = 0 \}$$

dove le a_i sono binarie in x, y , di grado uguale al loro indice (e quindi a_0 è una costante). Una retta passante per (001) può rappresentarsi con $x = k y$ e quindi un punto mobile su di essa avrà per coordinate $(k, 1, \lambda)$.

Le n intersezioni di questa retta con C_n sono dunque date dalla seguente equazione in λ :

$$a'_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a'_{n-1} \lambda + a'_n = 0$$

dove a'_i è ciò che diviene a_i per $x=k, y=1$). Ebbene consideriamo adesso un covariante (binario) del gruppo di queste n intersezioni e siano m, p , rispettivamente l'ordine e il grado di tale covariante per modo che esso potrà rappresentarsi nella seguente forma:

$$b_0 \lambda^m + b_1 \lambda_1^{m-1} + \dots + b_{m-1} \lambda + b_m = 0$$

dove le b_i sono funzioni razionali, intere, omogenee di grado p nelle a'_i .

Sostituendo ora, nell'ultima equazione, le a_i alle a'_i e z a λ si otterrà l'equazione del luogo cercato per il quale si potrà dunque dire che:

« Se il covariante binario considerato, sopra ogni trasversale di C_n passante per P , è di ordine m e di grado p , il covariante ternario corrispondente di P rispetto a C_n è una curva di ordine $m+p$ con un punto p^{plo} in P .

3. — L'esempio più semplice è fornito dal caso in cui C_n sia una cubica e il covariante binario, sopra ogni trasversale passante per P , sia rappresentato dal gruppo Hessiano delle tre intersezioni con la cubica. Secondo le considerazioni del N. precedente viene così a generarsi una quartica che ha in P un punto doppio e che chiameremo « Hessiana di P rispetto a C_3 » e indicheremo brevemente col simbolo C_4 .

È da osservare che se due delle tre intersezioni suddette coincidono, il relativo gruppo Hessiano si riduce al punto di coincidenza contato due volte; se poi coincidono tutt'e tre il gruppo Hessiano è indeterminato. Ne segue che ogni tangente condotta da P a C_3 è tale anche per C_4 , non solo, ma anche i relativi punti di contatto coincidono. Dunque la conica polare di P rispetto a C_3 non è altro che la conica di BERTINI rispetto a C_4 (1). Se infine P esiste sopra qualche tangente di flesso di C_3 , questa tangente si stacca da C_4 .

4. — Per calcolare l'equazione di C_4 non c'è che da particolarizzare il processo indicato al N. 2 scrivendo quella di C_3 nella forma:

$$C_3 \equiv \{ a_0 z^3 + 3 a_1 z^2 + 3 a_2 z + a_3 = 0 \}$$

dove le a_i sono binarie in x, y , di grado uguale all'indice (e quindi a_0 è una costante).

Si trova così:

$$C_4 \equiv \{ (a_0 a_2 - a_1^2) z^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) z + a_1 a_3 - a_2^2 = 0 \}$$

(1) Cf. ad es, il n. 29 della mia monografia « Le curve piane di 4 ordine ». Giorn. di Matem.: Vol. XLVIII.

cioè C_4 è una quartica con un punto doppio in $P \equiv (001)$ come abbiamo già veduto nel N. precedente.

Disponendo (come è lecito) dei rimanenti elementi di riferimento in guisa che la conica polare C_2 di P rispetto a C_3 possa rappresentarsi con:

$$C_2 \equiv \{ z^2 - xy = 0 \}.$$

si trova:

$$C_3 \equiv \{ z^3 - 3zxy + a_3 = 0 \}$$

e quindi:

$$C_4 \equiv \{ xy(z^2 + xy) - za = 0 \}$$

da cui identicamente: $C = C_2^2 - zC_3$, il che conferma che le 6 tangenti tirate da P a C_3 e relativi punti di contatto spettano anche a C_4 .

Dunque:

« L'Hessiana di un punto P (in posizione generica rispetto a C_3) è una quartica che ha in P un punto doppio le cui tangenti nodali sono tangenti alla conica polare di P rispetto a C_3 . La retta che unisce i tangenziali di P è bitangente in essi alla quartica. Le sei tangenti tirate da P a C_3 e relativi punti di contatto sono tali anche rispetto all'Hessiana in parola.

5. — Viceversa: una quartica nodale sottoposta alla condizione che la retta congiungente i tangenziali del nodo sia bitangente ivi alla curva, potrà essa considerarsi come Hessiana del nodo rispetto a una qualche cubica C_3 ? La risposta è affermativa e può desumersi dalle seguenti osservazioni. Prima di tutto si può dichiarare che la soluzione del problema, se c'è, deve essere unica, perchè se esistessero due tali C_3 esse avrebbero in comune le sei tangenti tirate dal nodo della quartica e i relativi punti di contatto (N. 3) i quali verrebbero così ad assorbire più dei nove punti che le due C_3 avrebbero in comune qualora fossero effettivamente distinte.

Ciò premesso si osservi che l'equazione di una quartica nodale può scriversi sotto forma:

$$C_4 \equiv \{ (xy + z^2) a_2 + z a_3 = 0 \}$$

dove a_2 e a_3 sono binarie in x, y , dei gradi 2 e 3. Con ciò il nodo è in (001) , $z = 0$ è la congiungente i tangenziali del nodo e i due rimanenti punti fondamentali sono gli ulteriori punti comuni a tale congiungente e a C_4 (1).

Se ora si esige, in più, che $z = 0$ sia bitangente nei tangenziali del nodo, bisogna che sia

(1) Cfr. la mia nota « Alcune costruzioni inerenti alla quartica piana dotata d'un punto doppio ». Giorn. di Matem. Vol. LIII.

$$a_2 = xy$$

e quindi :

$$C_4 \equiv \{ (xy + z^2)xy + za_3 = 0 \}$$

d'onde si ricava (N. 4) per la cercata C_3 :

$$C_3 \equiv \{ z^3 - 3zxy - a_3 - 0 \}.$$

Quindi : « ogni quartica nodale cosiffatta che la congiungente i tangenziali del nodo sia bitangente, in essi, alla curva, si può riguardare come Hessiana del nodo rispetto a una cubica la quale può ritenersi pienamente determinata dall'averne in comune, con la quartica, le sei tangenti tirate dal nodo e i relativi punti di contatto ».

6. — Specializzando la posizione del punto P rispetto a C_3 si ottengono casi particolari notevoli di cui adesso vogliamo considerare i principali.

Cominciamo dal supporre che P appartenga a C_3 (pur essendo un punto generico della curva).

Collochiamo in P , come al solito, il punto fondamentale (001), assumendo poi per $x=0$ la tangente ivi a C_3 . Dopo di che si vede facilmente che è lecito disporre dei rimanenti elementi di riferimento in guisa che la conica polare di P rispetto a C_3 sia :

$$C_2 \equiv \{ xz - y^2 = 0 \}.$$

Allora per l'equazione di C_3 si ha la seguente forma :

$$C_3 \equiv \{ 3xz^2 - 6y^2z + a_3 = 0 \}.$$

dove a_3 è una binaria cubica in x, y . Ne risulta per C_4 , Hessiana di P rispetto a C_3 :

$$C_4 \equiv \{ x^2z^2 - 2xy^2z + 4y - xa_3 = 0 \}$$

ovvero

$$C_4 \equiv \{ C_2^2 + T = 0 \}$$

dove

$$T \equiv \{ 3y^4 - xa_3 = 0 \}$$

rappresenta le quattro tangenti condotte da P a C_3 .

Queste equazioni dimostrano che :

« Le Hessiana di un punto generico P di C_3 , rispetto a C_3 medesima, è una quartica sottoposta alle seguenti condizioni :

ha un tac-nodo in P ,

la relativa tangente tac-nodale è la tangente in P a C_3 ,

le quattro tangenti tirate da P a C_3 e relativi punti di contatto sono tali anche per l'Hessiana in parola ».

È però da osservare che queste proprietà non sono sufficienti a caratterizzare tale Hessiana, giacchè è facile riconoscere che esse spettano a tutte le quartiche del fascio :

$$C_2^2 + \lambda T = 0$$

mentre una sola di esse è la Hessiana suddetta ($\lambda = 1$).

7. — L'ultima osservazione del N. precedente dimostra che non è lecito rispondere affermativamente alla seguente questione: una quartica tac-nodale potrà sempre riguardarsi come Hessiana del tac-nodo rispetto ad una qualche C_3 ? Infatti una tale quartica basta a individuare il fascio di cui è parola nel N. precedente e d'altra parte si può osservare che, se il problema ammette soluzione, questa non può essere che unica, giacchè se le C_3 risolventi fossero due, esse dovrebbero avere in comune il punto P e la relativa tangente ivi e inoltre le quattro tangenti condotte da P e i rispettivi punti di contatto (cioè più di quanto comporta il numero dei loro punti comuni).

8. — Il seguente calcolo conferma la previsione del N. precedente.

Si osservi che collocando (001) nel tac-nodo e assumendo $x = 0$ come tangente tac-nodale l'equazione di una quartica tac-nodale può scriversi nella forma

$$C_4 \equiv \{ x^2 z^2 + 2 z x a_2 + a_4 = 0 \}$$

dove a_2 e a_4 sono binarie in x, y , dei gradi due e quattro (1). Le quattro tangenti tirate da (001) a C_4 sono rappresentate da :

$$T \equiv \{ a_4 - a_2^2 = 0 \}.$$

La conica :

$$C_2 \equiv \{ x z + a_2 = 0 \}$$

passa per il tac-nodo di C_4 , è tangente ivi alla tangente tac-nodale e passa per i punti di contatto di $T = 0$ con C_4 , giacchè si ha identicamente :

$$C_4 = C_2^2 + T.$$

Per maggior semplicità osserveremo che si può disporre dei rimanenti elementi di riferimento in guisa che l'equazione di C_2 assuma la forma :

$$z x - y^2 = 0$$

e quindi

$$C_4 \equiv \{ x^2 z^2 - 2 z x y^2 + a_4 = 0 \} ; \quad T \equiv \{ a_4 - y^4 = 0 \}.$$

(1) Cfr. ad es. il mio lavoro « *Sopra le quartiche piane invertibili* » ora in corso di stampa nel Giorn. di Mat. Vol. LVII.

Cerchiamo adesso C_3 sottoponendola, anzitutto, (N. 6) a passare per (001), a toccare ivi $x = 0$ e ad avere per conica polare di (001) la

$$C_2 \equiv \{z x - y^2 = 0\}$$

il che conduce alla seguente forma:

$$C_3 \equiv 3 z^2 x - 6 z y^2 + a_3 = 0$$

dove a_3 è una binaria cubica in x, y , che ora determineremo esigendo che le tangenti tirate da (001) a C_3 sieno rappresentate da $T = 0$. Allo scopo, scriviamo per disteso

$$a_3 = m x^3 + n x^2 y + p x y^2 + q y^3,$$

$$a_4 = a x^4 + b x^3 y + c x^2 y^2 + d x y^3 + e y^4$$

dove è da intendere a_4 come conosciuta e a_3 come funzione incognita. Ma le tangenti condotte da (001) a C_3 sono:

$$a_3 x - 3 y^4 = 0$$

e quelle condotte dallo stesso punto a C_4 :

$$T \equiv a_4 - y^4 = 0.$$

Bisogna dunque che i coefficienti di queste due ultime equazioni sieno proporzionali, il che serve a trovare i coefficienti m, n, p, q e quindi conduce alla seguente equazione:

$$C_3 \equiv \{z^2 x - 2 y^2 z + \frac{1}{1-e} (a x^3 + b x^2 y + c x y^2 + d y^3) + 0\}$$

che si può anche scrivere così:

$$C_3 \equiv z^2 x - 2 y^2 z + \frac{1}{1-e} \left(\frac{a_4 - e y^4}{x} \right) = 0.$$

Con questo la C_3 è determinata, ma l'Hessiana di (001) rispetto a C_3 non si può dire che sia la C_4 data. Per ora questa Hessiana non è sottoposta ad altra condizione che di appartenere al fascio

$$C_2^2 + \lambda T = 0.$$

Calcolando direttamente questa Hessiana, servendosi della C_3 precedente, si trova

$$C'_3 \equiv \{C_2^2 + \frac{3}{e-1} T = 0\}$$

mentre per la C_4 data avevamo:

$$C_4 \equiv \{C_2^2 + T = 0\}.$$

Perchè dunque C'_3 e C_4 coincidano bisogna che:

$$\frac{3}{e-1} = 1$$

ossia $e = 4$ che è la condizione cercata affinchè (nel sistema di riferimento adottato) la domanda posta al principio del N. 7 abbia risposta affermativa.

9. — In conclusione dunque, data una C_4 tac-nodale, non si può dire altro che essa individua una C_3 tale che l'Hessiana del tac-nodo, rispetto alla C_3 medesima, appartiene al fascio:

$$C_4 + \lambda T = 0$$

dove $T = 0$ rappresenta le 4 tangenti tirate dal tac-nodo a C_4 . Si può anche aggiungere che la C_3 , insieme alla tangente tac-nodale di C_4 , appartiene al fascio precedente.

10. — Abbiamo già osservato, al N. 3, che se per il punto P passa una tangente di flesso di C_3 questa deve staccarsi dall'Hessiana C_4 di P rispetto a C_3 e che ogni punto comune a C_3 e C_4 deve esser punto di contatto fra le due curve.

Si può dunque facilmente prevedere che:

« L'Hessiana di un flesso di C_3 , rispetto a C_3 , medesima, si compone della tangente di flesso e di un'altra cubica la quale ha in comune con C_3 il flesso suddetto e la rispettiva tangente. Le due cubiche si toccano, inoltre, nei tre punti d'incontro con la comune polare armonica di flesso medesimo ».

Assumendo (001) nel flesso di C_3 e $x = 0$ $z = 0$ per tangente e polare armonica relativa si vede che, per l'equazione di C_3 , si ha:

$$C_3 \equiv \{3z^2x + a_3 = 0\}$$

dove a_3 è una binaria in x, y . E allora si trova subito (N. 4) che la Hessiana di (001), rispetto a C_3 , si compone di $x = 0$ e della cubica

$$z^2x - a_3 = 0$$

il che conferma il precedente enunciato.

11. — Analogamente si può prevedere che, collocando P nel punto d'incontro di due tangenti di flesso di C_3 , queste due tangenti si staccheranno dalla Hessiana di P e ne residuerà una conica che chiameremo « la conica Hessiana di P rispetto a C_3 ». Si può ottenerne la equazione collocando, come al solito, (001) in P e assumendo, per $x = 0$, le tangenti di flesso di C_3 che per ipotesi convergono in P . È quindi lecito collocare (010), (100) nei due flessi relativi, di guisa che (disponendo opportunamente del punto unità) l'equazione di C_3 potrà scriversi nella forma:

$$C_3 \equiv \{z^3 + xy(x+y+z) = 0\}$$

Dopo di che, il calcolo del N. 4 conduce alla seguente equazione:

$$C_2 \equiv \{3z^2 - xy + 9z(x+y) = 0\}$$

rappresentante la conica Hessiana di (001).

Dalle precedenti equazioni, per eliminazione di $x+y$, si trova;

$$(xy + 3z^2)^2 = 0$$

il che significa che C_3 e C_2 sono fra loro bitangenti (fuori dei flessi (100), (010)).

Dalla equazione di C_3 si desume pure che $(1, -1, 0)$ è il terzo flesso situato sopra $z=0$, che $x=y$ è la polare armonica relativa e quindi l'omologia armonica

$$\begin{pmatrix} y & x & z \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

è quella che ha il centro in $(1, -1, 0)$ e per asse $x=y$ e trasforma C_3 in se stessa. Ma anche C_2 gode della stessa proprietà il che significa che la corda di contatto fra C_2 e C_3 passa per il flesso $(1, -1, 0)$.

Riassumendo abbiamo quindi:

« La conica Hessiana del punto d'incontro di due tangenti di flesso di C_3 , taglia C_3 nei due flessi rispettivi e le è bitangente altrove: la relativa corda di contatto passa per il terzo flesso di C_3 che è allineato con i primi due ».

12. — Un ultimo caso particolare notevole lo si ha collocando P in un punto generico della Hessiana di C_3 . Assumendo, come al solito, (001) in P e (010) nel punto d'incontro delle due rette (che compongono la conica polare di (001) rispetto a C_3), si vede che può scriversi:

$$C_3 \equiv \{az^3 + 3bz^2x + 3czx^2 + a_3 = 0\}$$

dove a, b, c , sono costanti e a_3 è una binaria cubica in x, y . Mediante il solito calcolo del N. 4 si trova per la C_4 (Hessiana di P rispetto a C_3):

$$C_4 \equiv \{(ac - b^2)z^2x^2 + (aa_3 - bcx^3)z + x(ba_3 - c^2x^3) = 0\}$$

da cui risulta che (001) è una cuspidale di C_4 con $x=0$ tangente cuspidale e con (010) tangenziale di (100).

Quindi si può dire che:

« L'Hessiana di una cubica piana è contemporaneamente il luogo dei punti le cui Hessiane, rispetto alla cubica, sono cuspidate, il luogo di tali cuspidi e anche il luogo dei rispettivi tangenziali. L'involuppo delle tangenti cuspidali relative è la Cayleyana della cubica medesima ».

INTORNO AD ALCUNI COVARIANTI DI SUPERFICIE CUBICHE

[*Rendic. Istit. Lomb. 1921*]

Il metodo esposto nell'ultima mia Nota (di titolo analogo alla presente) pubblicata in questa autorevole raccolta scientifica (1), viene applicato, nel presente scritto, ad una superficie cubica ricavandone alcuni covarianti che mi sembrano degni di un qualche interesse.

1. Sia dunque data una superficie cubica S , tutt'affatto generica, e per un punto P qualunque dello spazio, e, sopra ogni retta passante per P , immaginiamo di costruire i due punti componenti il gruppo Hessiano rispetto alle tre intersezioni di tale retta con S . Si otterrà così una superficie, covariante di P rispetto ad S , la quale costituirà la immediata estensione allo spazio di quanto si contiene nella mia citata Nota. Insieme al caso generico sembrano interessanti i casi particolari che si ottengono specializzando la posizione di P rispetto ad S .

2. Quanto al caso generico, la relativa equazione si desume subito, per estensione allo spazio, dai N. 2 e 3 della mia Nota. Indicando con v, x, y, z le coordinate omogenee di un punto dello spazio, scriveremo l'equazione di S nella consueta forma

$$S \equiv \{ a_0 v^3 + 3 a_1 v^2 + 3 a_2 v + a_3 = 0 \} \dots (1)$$

dove le a_i sono ternarie in x, y, z di grado uguale all'indice (e quindi a_0 è una costante). Collocando (1000) nel punto P e tenendo presente l'equazione dell'Hessiano della (1), riguardata come una equazione in v , si trova che il luogo geometrico cercato è rappresentato da

$$(a_0 a_2 - a_1^2) v^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) v + a_1 a_3 - a_2^2 = 0.$$

(1) CIANI, *Intorno ad alcuni covarianti di curve algebriche piane*. Questi Rendiconti: Vol. LIII: fasc. 2-4.

Esso è dunque una superficie di 4^o ordine con un punto doppio in P . Noi la chiameremo « la Hessiana di P rispetto ad S » e la indicheremo con H .

3. Nell'ipotesi che P abbia posizione generica, rispetto ad S , noi semplificheremo la equazione di H assumendo gli elementi di riferimento in guisa che la quadrica polare di P rispetto ad S sia rappresentata da

$$Q \equiv \{ v^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0 \}$$

e quindi

$$S \equiv \{ v^3 + 3v(x^2 + y^2 + z^2) + a_3 = 0 \}$$

e per conseguenza:

$$H \equiv \{ (x^2 + y^2 + z^2)v^2 + a_3v - (x^2 + y^2 - z^2)^2 = 0 \}.$$

Si osservi adesso che se una binaria cubica è costituita da un punto doppio e uno semplice, il relativo gruppo Hessiano si riduce al punto doppio contato due volte e che se la binaria in parola è costituita da un punto triplo, il gruppo Hessiano è indeterminato. Ne segue che il cono circoscritto da P ad S è tale anche per H e che le sei rette osculatrici di S passanti per P appartengono per intero ad H . Esse sono quelle comuni ai due coni:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, a_3 = 0.$$

Il cono circoscritto da P , tanto ad S quanto ad H , è

$$a_3^2 + 4(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 0$$

ed è ovvio che passa per le sei rette precedenti. Queste, insieme alla sestica gobba intersezione di S con Q , costituiscono la curva di contatto del cono suddetto con H , mentre soltanto la sestica suddetta è di contatto per lo stesso cono con S . Ciò risulta analiticamente anche dalla identità

$$H = vS - Q^2.$$

L'equazioni trovate dimostrano pure come il cono

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

osculatore di H in P seghi H (oltre che lungo le sei rette in parola) anche secondo quella conica di tal cono che è situata in $v = 0$. Infine il piano di quest'ultima tocca H lungo la conica medesima.

Raccogliendo, si ha dunque:

« L'Hessiana di un punto P rispetto a una superficie cubica S (non passante per P) è una superficie H di quarto ordine che ha un punto doppio in P e che passa per le sei rette osculatrici di S che si possono condurre

da P . Il cono osculatore della superficie H in P , il quale passa evidentemente per le sei rette precedenti, incontra poi ulteriormente H secondo una conica il cui piano tocca (lungo di essa) H ed è il piano polare di P rispetto ad S . Inoltre le superficie H ed S hanno in comune il cono circoscritto da P . La sestica gobba intersezione di S con la quadrica polare di P , rispetto ad S , è curva di contatto dello stesso cono per entrambe le superficie. (Evidentemente per completare poi la curva di contatto con H bisogna aggiungere le sei rette più volte ricordate).

4. Consideriamo adesso qualche caso speciale. Se

$$a_0 a_2 - a_1^2$$

è nullo identicamente, si osserverà che, in generale, tale espressione uguagliata a zero rappresenta il cono circoscritto alla quadrica

$$a_0 v^2 + 2 a_1 v + a_2 = 0$$

dal punto (1000). Nel caso quindi in cui l'espressione in parola sia nulla identicamente, tale cono sarà indeterminato e quindi la quadrica suddetta sarà costituita da un piano doppio: ma essa è la polare di $P \equiv (1000)$ rispetto ad S . Assumendo tale piano come $v = 0$ sarà dunque lecito supporre a_1, a_2 nulli identicamente, dopo di che

$$S \equiv \{a_0 v^3 + a_3 = 0\}$$

e quindi

$$H \equiv \{a_0 a_3 v = 0\}.$$

Si può dunque dire che

« Se la superficie cubica S è cosiffatta che esista un punto la cui quadrica polare sia un piano doppio (non passante pel punto), l'Hessiana del punto, rispetto ad S , si compone di tale piano e del cono cubico che si ottiene proiettando, dal punto suddetto, la sezione del piano in parola con la superficie S . Le generatrici di questo cono sono osculatrici di S nei punti in cui essa è segata dal piano in discorso.

5. Facciamo poi il caso in cui P appartenga ad S . Possiamo allora disporre degli elementi di riferimento in guisa che la quadrica polare Q di P rispetto ad S sia

$$Q \equiv \{v x - y z = 0\}$$

e quindi

$$S \equiv \{3 v^2 x - 6 y z v + a = 0\}$$

Allora, mediante il calcolo del N. 2, si trova:

$$H \equiv \{x^2 v^2 - 2 v x y z + 4 y^2 z^2 - x a_3 = 0\}.$$

ciò che dimostra che :

« Se P appartiene ad S , la Hessiana H , relativa, ha un tac-nodo in P . Il piano tangente ad S in P è anche il piano tangente singolare di H relativo al tac-nodo e tocca H lungo le due rette osculatrici di S in P (1) ».

6. Se P trovasi sopra una delle 27 rette di S , questa retta è doppia per la superficie H . Infatti, in questa ipotesi, la quadrica polare di P rispetto ad S passa per tale retta. È dunque lecito, nella rappresentazione del N . precedente, scegliere questa retta per $x = 0$, $y = 0$ e inoltre esigere che nella ternaria cubica a_3 manchi il termine in z^3 , dopo di che l'equazione di H dimostra subito che la retta in parola è doppia per H . « Ne segue che se P trovasi nel punto d'incontro di due rette di S , la superficie H le possiede come rette doppie » e quindi rientra nella categoria delle superficie di quart'ordine a conica doppia (2).

7. Più interessante è il caso in cui la superficie cubica S possieda tre rette concorrenti in un punto e situate in un piano (tangente ad S nel punto). Allora essa prende il nome da Eckardt (che è stato il primo a considerarla) e « punto di Eckardt » si chiama il punto in cui convergono tali tre rette (3).

L'equazione di una tale superficie si potrà scrivere nella forma :

$$S \equiv \{3v^2 x + 3v x a_1 + a_3 = 0\}$$

Il punto di Eckardt è $P \equiv (1000)$ e le tre rette di S , che ivi convergono stanno sul piano $x = 0$ (che è tangente ad S in P) e sul cono cubico $a_3 = 0$.

Calcolando allora l'Hessiana H di P rispetto ad S , secondo il N. 2, si trova che H si compone di

$$x = 0$$

e della superficie S' seguente :

$$S \equiv \{v^2 x + v x a_1 + x a_1^2 - a_3 = 0\}$$

da cui si vede che S' è nuovamente una superficie di Eckardt relativa al punto P . Le due superficie S ed S' si tagliano lungo le tre rette che convergono in P e si toccano lungo la sezione col piano

$$a_1 + 2v = 0$$

(1) Questa superficie è rappresentabile sul piano e appartiene alla specie studiata da NOETHER in « Ueber rationalen Flächen vierter Ordnung ». Math. Annal. Bd. 33.

(2) Per queste superficie e specialmente per i loro molti e svariati casi particolari veggasi la memoria di SEGRE : « Surfaces du 4e ordre à conique double » Math. Annal. Bd. 24.

(3) ECKARDT. Ueber diejenigen Flächen dritten Grades auf denen sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden. Math. Annal. Bd. 10.

CIANI. Sulle superficie algebriche simmetriche. Rendic. Acc. Lincei 1890.

che è il polare armonico di P rispetto ad entrambe. Dunque :

« Se P è un punto di Eckardt, per la superficie cubica S , la Hessiana di P rispetto ad S , si compone del piano tangente in P ad S e di un'altra superficie cubica S' per la quale P è nuovamente un punto di Eckardt. Le due superficie si tagliano lungo tre rette convergenti in P , situate nel comune piano tangente, ivi, e si toccano lungo la cubica sezione del piano polare armonico di P (che è il medesimo rispetto ad entrambe le superficie).

Ecco dunque come da una superficie di Eckardt se ne possano ottenere infinite altre costruendo le successive Hessiane del punto di Eckardt relativo. E dall'esame delle rispettive equazioni è facile desumere che dopo un numero finito di tali costruzioni è impossibile ricadere nella superficie primitiva di guisa che, in niun caso, può accadere di ottenere un ciclo finito, chiuso (per così dire) di tali superficie.

8. Consideriamo finalmente il caso in cui P esista sopra l'Hessiana di S il che significa che la quadrica polare di P rispetto ad S sia un cono. Riprendendo l'equazione di S del N. 2, si osservi che questa quadrica è :

$$a_0 v^3 + 2 a_1 v + a_2 = 0$$

Se questa deve essere un cono, assumendone il vertice P' come punto (0001), ne segue che a_1 e a_2 , le quali non contenevano la coordinata v , non contengono adesso nemmeno la z . Dunque, nella equazione di H del N. 2 il coefficiente di v^2 non contiene altro che x e y e quindi tal coefficiente, uguagliato a zero, rappresenta una coppia di piani passanti per la retta PP' . Segue quindi che P è punto doppio biplanare per H e la retta intersezione dei piani, che compongono il cono osculatore di H in P , è la retta PP' .

Se inoltre P è uno dei 10 punti doppi della Hessiana di S (cioè uno dei vertici del pentaedro di Sylvester) è noto che la quadrica polare di P rispetto ad S è una coppia di piani. Assumendo la retta comune a tali piani come

$$v = 0 \quad , \quad z = 0$$

ne segue che

$$a_0 v^2 + 2 a_1 v + a_2$$

deve essere una binaria quadratica in v e z il che significa che

$$a_0 a_2 - a_1^2 = 0$$

rappresenta il piano $z = 0$ contato due volte. Dunque P è punto doppio uniplanare per la propria Hessiana H rispetto ad S .

9. Viceversa : ammettiamo che l'Hessiana H di P rispetto ad S abbia in P un punto doppio biplanare. Riprendendo la solita equazione di

S del N. 2, specifichiamo le notazioni ponendo:

$$a_0 = a, \quad a_1 = b x + c y + d z,$$

$$a_2 = e x^2 + f y^2 + g z^2 + 2 h x y + 2 k y z + 2 l z x$$

e quindi

$$a_0 a_2 - a_1^2 =$$

$$= x^2 (a e - b^2) + y^2 (a f - c^2) + z^2 (a g - d^2 +$$

$$+ 2 x y (a h - b c) + 2 y z (a k - c d) + 2 z x (a l - d b).$$

Allora, tenendo presente l'equazione di H del N. 2, si vede che la condizione perchè P sia punto doppio biplanare per H è:

$$\begin{vmatrix} a e - b^2 & a h - b c & a l - d b \\ a h - b c & a f - c^2 & a k - c d \\ a l - d b & a k - c d & a g - d^2 \end{vmatrix} = 0$$

ossia:

$$a^2 \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & e & h & l \\ c & h & f & k \\ d & l & k & g \end{vmatrix} = 0$$

e quindi

$$a = 0$$

oppure

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & e & h & l \\ c & h & f & k \\ d & l & k & g \end{vmatrix} = 0$$

Nel 1° caso P appartiene ad S ed è punto doppio uniplanare per H (perchè è tac-nodo, secondo il N. 5). Nel 2° caso si vede che la quadrica polare di P , rispetto ad S , è un cono, cioè P appartiene all'Hessiana.

10. Possono questi due casi riunirsi in un solo allorchè P trovasi sulla linea parabolica di S . Piuttosto che servirsi dei calcoli del N. precedente, giovano allora le seguenti osservazioni.

Anzitutto, la presenza di P sopra S esige $a_0 = 0$ nella (1) del N. 2, per cui si ha

$$S \equiv \{3 a_1 v^2 + 3 a_2 v + a_3 = 0\}$$

e quindi

$$H \equiv \{ a_1^2 v^2 + a_1 a_2 v - a_1 a_3 + a_2^2 = \},$$

La quadrica polare di $P \equiv (1000)$ rispetto ad S è

$$2 a_1 v + a_2 = 0$$

Se P deve essere sulla linea parabolica, tal quadrica deve essere un cono. Ma $a_1 = 0$ è il piano tangente alla quadrica in P , dunque $a_1 = 0$ sarà adesso tangente anche al cono $a_2 = 0$ (che ha il vertice in P). Ne segue, dall'ultima equazione di H , che la sezione di $a_1 = 0$, con H , è costituita dalla generatrice lungo la quale $a_1 = 0$ tocca il cono $a_2 = 0$ contata 4 volte. Il che è in pieno accordo con la conclusione del N. 5 perchè quando P è un punto parabolico di S le due rette osculatrici di S in P debbono ben coincidere. Dunque:

« Se P è un punto parabolico di S , la specializzazione ulteriore, che acquista perciò il tac-nodo di H in P , è che il piano tangente singolare relativo non ha altra linea in comune con H all'infuori della retta osculatrice di S in P (la quale perciò deve esser contata quattro volte per costituire per intero la linea suddetta).

11. Come conclusione finale si può dunque affermare che:

« Mentre l'Hessiana di un punto P . rispetto a una superficie cubica S , ha ivi un punto doppio conico se P ha posizione generica relativamente a S , questo punto diviene biplanare se P appartiene alla Hessiana di S , diviene uniplanare se P è uno dei vertici del pentaedro di Sylvester, diviene tac-nodo se P appartiene ad S ».

In altre parole:

« Il luogo geometrico di un punto la cui Hessiana rispetto a una superficie cubica S ha nel punto medesimo un punto doppio (a cono osculatore degenere in una coppia di piani) è costituito dalla superficie stessa S e dalla sua Hessiana ».

SOPRA LE INVOLUZIONI SIZIGETICHE DI FORME BINARIE BIQUADRATICHE

[Atti Società Ligustica 1925]

1. — È noto che si chiama fascio sizigetico di cubiche piane quello individuato da una cubica piana e dalla sua Hessiana. Si ottiene così un fascio di curve che hanno tutte in comune i flessi che sono i nove punti-base. Siccome la forma Hessiana di una binaria biquadratica è ancora una binaria biquadratica così, per ovvia estensione di linguaggio, si può chiamare sizigetico il fascio che esse individuano e poichè infine questo fascio (nella rappresentazione geometrica consueta su di una retta) individua, a sua volta, una involuzione di punti (che è di 4^o ordine), per tal modo è venuto il nome di involuzione sizigetica al fascio suddetto (determinato dunque da una binaria biquadratica e della sua Hessiana) (1).

Da una memoria che sto elaborando sopra la quartica gobba di 2^a specie, nella quale ha importanza fondamentale la involuzione in parola, stralcio le seguenti semplici osservazioni intorno alle involuzioni sizigetiche suddette completando quanto già si conosce su di esse dalle ormai classiche lezioni di Clensch-Lindeman (2).

2. — Adottando la forma canonica, rappresenteremo una tale involuzione mediante la equazione ben conosciuta

$$x_1^4 + 6\lambda x_1^2 x_2^2 + x_2^4 = 0$$

dove λ è il parametro delle involuzione ogni valore del quale individua un gruppo della involuzione medesima che, per brevità chiameremo sizigetico.

(1) Vedi ad es. BERZOLARI: « Sui combinanti dei sistemi di forme binarie annessi alle quartiche gobbe ». Annali di mat. Serie II. T. XX.

(2) Vedi ad es. La traduzione Francese di A. Benoist. T. I pag. 284. Gauthier-Villars. Parigi 1903.

Per $\lambda = \infty$; $\pm \frac{1}{3}$ si hanno i tre quadrati perfetti sizigetici che chiameremo i tre gruppi doppi. Le basi relative sono

$$x_1 x_2 = 0 \quad , \quad x_1^2 \pm x_2^2 = 0$$

e costituiscono tre coppie armoniche, a due, a due, formati il covariante sestico di ogni gruppo sizigetico.

Per $\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$ si hanno i 3 gruppi armonici.

Per $3\lambda^2 + 1 = 0$ si hanno i due gruppi equianarmonici.

3. — Indicando con λ_1 il valore del parametro che individua l'Hessiano del gruppo λ si trova subito

$$3\lambda^2 + 6\lambda\lambda_1 - 1 = 0 \dots \quad (1)$$

e quindi:

« Ogni gruppo sizigetico è Hessiano di altri due gruppi sizigetici ».

Annullando il discriminante della precedente equazione (in λ) si trova

$$3\lambda_1^2 + 1 = 0.$$

Cioè:

« I due gruppi suddetti coincidono se il gruppo considerato è equianarmonico ».

Dividendo la (1) per $(\lambda\lambda_1)^2$ e dopo passando al limite, per $\lambda = \infty$, si trova che anche $\lambda_1 = \infty$: risolvendola per λ_1 si ha

$$\lambda_1 = \frac{1 - 3\lambda^2}{6\lambda} \dots \quad (2)$$

e si ottengono gli altri due valori per cui $\lambda = \lambda_1$ e sono $\pm \frac{1}{3}$. Quindi si può dire che:

« I soli gruppi doppi sizigetici sono quelli capaci di coincidere, ciascuno, col proprio Hessiano ».

4. — Indicando con λ_2 il valore del parametro λ corrispondente all'Hessiano di λ_1 , si ha dalla (2) del N. prec.:

$$\lambda_2 = \frac{1 - 3\left(\frac{1 - 3\lambda^2}{6\lambda}\right)^2}{6\left(\frac{1 - 3\lambda^2}{6\lambda}\right)} = \frac{9\lambda^4 + 18\lambda^2 - 1}{12\lambda(1 - 3\lambda^2)}.$$

(1) Clebsch-Lindemann. loc. cit. pag. 297.

Esigendo che sia $\lambda_2 = \lambda$, si trova

$$\frac{-9\lambda^4 + 18\lambda^2 - 1}{12\lambda(1 - 3\lambda^2)} = \lambda$$

cioè $27\lambda^4 + 6\lambda^2 - 1 = 0 \dots$ (1)

ovvero $(3\lambda^2 + 1)(9\lambda^2 - 1) = 0$

ma per $9\lambda^2 - 1 = 0$ si ritrovano i gruppi doppi (N. 2) e rimane

$$3\lambda^2 + 1 = 0$$

ossia i gruppi equianarmonici (N. 2).

Dunque:

« I due gruppi equianarmonici sizigetici sono, ciascuno, l'Hessiano dell'altro (1). Non esiste altra coppia di gruppi sizigetici dotati di tale proprietà ».

5. — Lo Steineriano del gruppo λ è dato da

$$\lambda' = \frac{3\lambda^4 - 6\lambda^2 + 1}{24\lambda^3} \dots$$
 (1)

quindi intanto:

« Lo Steineriano di un gruppo sizigetico è ancora sizigetico.

Se si esige che sia $\lambda' = \lambda$ si cade nella (1) del N. 4, il che esprime come:

« I soli gruppi sizigetici capaci di coincidere con i propri Steineriani sono i gruppi doppi e quelli equianarmonici ».

Se invece si vuole che sia $\lambda_1 = \lambda'$ si è condotti alla equazione

$$\frac{1 - 3\lambda^2}{\lambda} = \frac{-3\lambda^4 - 6\lambda^2 + 1}{4\lambda^3}$$

alla quale soddisfano i gruppi doppi e quelli armonici. Ora è ovvio che un gruppo doppio abbia Hessiano e Steineriano coincidenti perchè tal gruppo è Hessiano e Steineriano di se stesso. All'infuori di questo caso ovvio, non vi sono che i gruppi armonici che adempiano alla condizione imposta. Si conclude che:

« Ciascuno dei tre gruppi armonici ha Hessiane e Steineriano coincidenti.

Questi relativi gruppi coincidenti sono quelli doppi ». Più precisamente:

$$x_1^4 + x_2^4 = 0 \dots (\lambda = 0) \text{ ha per Hessiano-Steineriano } (x_1 x_2)^2 = 0 (\lambda = \infty)$$

$$x_1^4 + 6x_1^2 x_2^2 + x_2^4 = 0 \dots (\lambda = 1) \quad \gg \quad (x_1^2 - x_2^2)^2 = 0 \dots \left(\lambda = \frac{1}{3}\right)$$

$$x_1^4 - 6x_1^2 x_2^2 + x_2^4 = 0 \dots (\lambda = -1) \quad \gg \quad (x_1^2 + x_2^2)^2 = 0 \dots \left(\lambda = -\frac{1}{3}\right)$$

In tal guisa ogni gruppo armonico viene riferito a un gruppo doppio che è il proprio Hessiano-Steineriano.

6. — La (1) del N. precedente può scriversi

$$3\lambda^4 + 24\lambda^3\lambda' + 6\lambda^2 - 1 = 0$$

dalla quale risulta che:

« Ogni gruppo sizigetico è steineriano di altri quattro ».

Ora è notevole che la binaria biquadratica che si ottiene dalla precedente rendendola omogenea rispetto a λ , sia equianarmonica sempre (cioè indipendentemente da λ'). Nasce così, al variare di λ' , un fascio di binarie biquadratiche tutte equianarmoniche. Si può dunque aggiungere la osservazione seguente:

« I quattro valori del parametro λ che individuano quattro gruppi sizigetici dotati di un medesimo Steineriano, formano (a loro volta e sempre) un gruppo equianarmonico ».

7. — Rappresentiamo su di una retta i gruppi della involuzione sizigetica in discorso, riferendo ogni punto della retta e il corrispondente gruppo, allo stesso valore del parametro λ . In tal guisa, al gruppo sizigetico

$$x_1^4 + 6\lambda x_1^2 x_2^2 + x_2^4 = 0$$

corrisponde, sulla retta, il punto le cui coordinate omogenee sono date da

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda.$$

Or bene, i gruppi sizigetici armonici ed equianarmonici sono individuati rispettivamente da (N. 2):

$$\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$$

$$3\lambda^2 + 1 = 0$$

mentre i gruppi doppi si hanno per $\lambda = \infty, \pm \frac{1}{3}$. I punti corrispondenti di questi gruppi sono dunque rappresentati, sopra la retta in parola, dalle seguenti binarie:

$$A \equiv (\lambda_1^3 - \lambda_1 \lambda_2^2 = 0) \quad \text{per i gruppi armonici}$$

$$D \equiv (9\lambda_1^2 \lambda_2 - \lambda_2^3 = 0) \quad \text{» » » doppi}$$

$$E \equiv (3\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 0) \quad \text{» » » equianarmonici}$$

dalle quali risulta che le prime due sono ciascuna la forma Q dell'altra (1) mentre la terza è l'Hessiana di entrambe.

(1) Clebsch-Lindemann, loc. cit. pag. 272.

Si ha dunque:

« Nel riferimento precedente, le due binarie cubiche rappresentanti l'una i gruppi sizigetici armonici e l'altra i gruppi doppi, sono l'una la forma Q dell'altra, mentre la binaria quadratica rappresentante i due gruppi equianarmonici è la comune Hessiana delle prime due ».

8. — Abbiamo già osservato, al N. 3, che un gruppo sizigetico è Hessiano di altri due. Indicando con λ e λ_1 i due valori del parametro caratterizzanti due gruppi dotati dallo stesso Hessiano, dovremo avere (N. 3)

$$\frac{1 - 3\lambda^2}{\lambda} = \frac{1 - 3\lambda_1^2}{\lambda_1}$$

da cui

$$(\lambda_1 - \lambda)(1 + 3\lambda\lambda_1) = 0$$

ed essendo $\lambda_1 \neq \lambda$ rimane

$$3\lambda\lambda_1 + 1 = 0.$$

Quindi:

« Nel solito riferimento del N. precedente, le infinite coppie di punti che rappresentano, sulla retta, le infinite coppie di gruppi che hanno l'Hessiano in comune, costituiscono una involuzione, la quale ha per punti doppi i rappresentanti dei due gruppi equianarmonici (N. 3) ».

9. — Quel che si è fatto precedentemente riguardo all'Hessiano può farsi anche per lo Steineriano. Se due gruppi sizigetici λ , λ_1 debbono avere lo stesso Steineriano, sarà (N. 5)

$$\frac{-3\lambda^4 - 6\lambda^2 + 1}{\lambda^3} = \frac{-3\lambda_1^4 - 6\lambda_1^2 + 1}{\lambda_1^3}$$

da cui escludendo $\lambda = \lambda_1$ si ricava

$$3(\lambda\lambda_1)^3 - 6(\lambda\lambda_1)^2 + \lambda\lambda_1 + \lambda^2 + \lambda_1^2 = 0 \dots \quad (1)$$

Dunque:

« Alla osservazione già fatta al N. 6, dalla quale risulta che un gruppo sizigetico ne individua altri tre che con esso hanno in comune lo Steineriano, si può aggiungere, adesso, che fra i valori del parametro λ caratterizzanti due gruppi dotati dallo stesso Steineriano passa la relazione (1) precedente che è un sistema simmetrico di 3° grado ».

RICERCHE SOPRA LE QUARTICHE RAZIONALI GOBBE.

Estratto dal tomo LII (1928) dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*.

Stralcio dalle mie lezioni di Geometria superiore, tenute l'anno scorso nell'Università di Firenze, le seguenti considerazioni, intorno alle quartiche razionali gobbe, le quali non solo confermano proprietà già conosciute, ma altre ne aggiungono (a guisa di complemento) che mi sembrano degne di un qualche interesse. Nella larga bibliografia, intorno a queste curve mi valgo specialmente di due belle memorie [una di BERZOLARI (1) e una di GERBALDI (2)] alle quali spesso si collega questo mio studio e alle quali rimando il lettore desideroso di maggiori dettagli bibliografici.

CAPITOLO I.

Osservazioni sopra la superficie di Steiner.

1. La quartica razionale gobba è talmente collegata alla superficie di STEINER che è indispensabile di richiamare, anzitutto, quelle sue proprietà fondamentali che più si adattano al nostro scopo.

Cominciamo dalle due forme più notevoli della sua equazione. La prima si ottiene riferendo la superficie al « *tetraedro doppio* » (ossia a quello formato dai suoi piani doppi) ed è (3):

$$(1) \quad \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4} = 0$$

ovvero, in forma razionale:

$$(2) \quad \sum x_i^4 - 4 \sum x_i^3 x_k + 6 \sum x_i^2 x_h^2 + 4 \sum x_i^2 x_h x_k - 40 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0.$$

(1) L. BERZOLARI, *Sui combinanti dei sistemi di forme binarie annessi alle curve gobbe razionali del 4° ordine* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, t. XX (1892), pp. 101-162]

(2) F. GERBALDI, *La superficie di STEINER studiata nella sua rappresentazione analitica mediante le forme ternarie quadratiche* (Stamperia Reale di Torino di I. Vigliardi, 1881).

(3) F. GERBALDI, loc. cit. (2), pag. 45.

La seconda si ottiene invece riferendo la superficie alle tre facce y_1 , y_2 , y_3 del triedro individuato dalle tre rette doppie e al piano y_4 determinato dai tre coniugati armonici del punto triplo (sopra ogni retta doppia) rispetto alla coppia di punti uniplanari della superficie situati su tale retta. Per brevità chiameremo « *tetraedro singolare* » della superficie un tal tetraedro e allora la relativa equazione è (1):

$$(3) \quad y_1^2 y_2^2 + y_2^2 y_3^2 + y_3^2 y_1^2 - 2 y_1 y_2 y_3 y_4 = 0$$

2. Il modo più semplice per passare dalla (2) alla (3) del N. precedente consiste nell'osservare che la (2) può scriversi così:

$$\begin{aligned} & (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 + (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 \\ & (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 + (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 - \\ & - 2(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0 \end{aligned}$$

dopo di che si vede che la cercata trasformazione è:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4, & y_2 &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4, \\ y_3 &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4, & y_4 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \end{aligned}$$

da cui segue che i piani doppi, riferiti al tetraedro singolare, sono:

$$(1) \quad \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0, & y_1 - y_2 - y_3 + y_4 = 0, \\ -y_1 + y_2 - y_3 + y_4 = 0, & -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 = 0. \end{cases}$$

Sulla (3) del N. precedente si verifica facilmente che la quadrica polare, rispetto alla superficie, di un punto generico, situato su di una retta doppia, per esempio $(0, 0, 1, \lambda)$ è $y_1^2 + y_2^2 - 2\lambda y_1 y_2 = 0$, il che significa che si compone di due piani passanti per tale retta (i quali coincidono, quando sia $\lambda = \pm 1$, in quelli rappresentati rispettivamente da $y_1 \pm y_2 = 0$). Questo conferma che tutti i punti di una retta doppia sono biplanari ad eccezione del punto triplo e di due che sono uniplanari (2). Se inoltre, sopra ciascuna retta doppia, si costruisce il coniugato armonico del punto triplo rispetto alla coppia dei punti uniplanari, ivi esistenti, si ottengono i tre vertici del tetraedro singolare giacenti sulla faccia opposta al punto triplo (come abbiamo già osservato nel N. 1).

3. Il cono osculatore alla superficie, in un punto uniplanare, si ri-

(1) F. GERBALDI, loc. cit. (2), pag. 44.

(2) Mi pare che questa denominazione sia da preferire a quella di punti cuspidali (GERBALDI, loc. cit. (2), pag. 44), perchè più consona a quella Cremoniana della teoria generale delle superficie.

duce ad un piano che, contato due volte, costituisce la quadrica polare del punto. I sei punti uniplanari individuano così i seguenti sei piani:

$$y_1 \pm y_2 = 0, \quad y_2 \pm y_3 = 0, \quad y_3 \pm y_1 = 0,$$

che chiameremo « *piani osculanti* ». È ovvio constatare che le loro traccie, sopra $y_4 = 0$, sono lati di un quadrangolo completo i cui vertici (in quel piano) hanno per coordinate:

$$(1, 1, 1); \quad (-1, 1, 1); \quad (1, -1, 1); \quad (1, 1, -1).$$

Il relativo triangolo diagonale è il fondamentale (in $y_4 = 0$). Le rette che proiettano da $(0, 0, 0, 1)$ i vertici di tale quadrangolo possono intendersi rappresentate parametricamente da $(1, 1, 1, \lambda)$; $(-1, 1, 1, \lambda)$; $(1, -1, 1, \lambda)$; $(1, 1, -1, \lambda)$. Per $\lambda = 1$, nelle prima parentesi, e $\lambda = -1$ nelle rimanenti si ottengono i vertici del tetraedro doppio (N. 2). Dunque:

« *I sei piani osculanti costituiscono le facce del quadrispigolo completo individuato dalle quattro rette che dal punto triplo proiettano i vertici del tetraedro doppio. Il trispigolo diagonale è quello formato dalle tre rette doppie* ».

4. Ogni piano osculante, passando per una retta doppia, sega ulteriormente la superficie in una conica la quale, per ragioni che dichiareremo in seguito al N. 33, chiameremo « *conica complementare* ». Si hanno dunque sei coniche complementari. Esse passano tutte pel punto triplo.

Ad esempio, quella situata in $y_1 - y_2 = 0$ può essere rappresentata parametricamente da $(2\lambda, 2\lambda, 2\lambda^2, 1 + 2\lambda^2)$ e per $\lambda = 0$ si ha $(0, 0, 0, 1)$. È anche facile constatare il loro passaggio, a tre, a tre, per i seguenti punti:

$$(2, 2, 2, 3); \quad (2, -2, -2, 3); \quad (-2, 2, -2, 3); \quad (-2, -2, 2, 3).$$

Così, ad esempio, passano per $(2, 2, 2, 3)$ quelle situate in $y_1 - y_2 = 0$, $y_2 - y_3 = 0$, $y_3 - y_1 = 0$ ecc. ecc. Dunque:

« *Le sei coniche complementari passano tutte pel punto triplo e, a tre, a tre, per altri quattro punti della superficie* » (vertici di un tetraedro che chiameremo « *complementare* »). Si può aggiungere che dalle relative coordinate risulta:

« *Il tetraedro complementare è omologico di quello doppio, essendo centro di omologia il punto triplo, piano fondamentale, la faccia opposta al punto suddetto (nel tetraedro singolare) e $\frac{3}{2}$ l'invariante assoluto* » (quando il relativo birapporto sia valutato nel seguente ordine: un vertice del doppio, il corrispondente del complementare, il centro d'omologia, e il punto d'incontro della retta che contiene questi tre punti col piano di omologia).

Sarebbe anche ovvio, con le formole ora introdotte, di confermare i noti vincoli di posizione fra il tetraedro doppio e il singolare (1).

5. Finalmente è indispensabile di metter bene in evidenza il gruppo di collineazioni spaziali rispetto al quale la superficie di STEINER è invariante.

Riferendo la superficie al suo tetraedro doppio mediante la equazione :

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4} = 0$$

(già segnalata al N. 1), è ovvio che le collineazioni in parola possono essere rappresentate dalle sostituzioni :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x_i & x_h & x_k & x_l \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \right\}$$

dove i, h, k, l è una qualunque permutazione di 1, 2, 3, 4.

Dunque queste collineazioni sono 24 (compresa l'identità) e permutano in tutti i modi possibili i piani doppi tenendo fissi inoltre punto e piano unità, cioè il punto triplo e la faccia opposta nel tetraedro singolare. Esse compongono uno dei cinque gruppi quaternari ottaedrici possibili (2).

Se invece si ricorre al riferimento della superficie di STEINER al suo tetraedro singolare mediante l'equazione :

$$y_1^2 y_2^2 + y_2^2 y_3^2 + y_3^2 y_1^2 - 2 y_1 y_2 y_3 y_4 = 0$$

[già segnalata (3) del N. 1] si vede subito che le collineazioni in parola possono rappresentarsi con le sostituzioni

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \pm y_i & \pm y_h & \pm y_k & y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \right\}$$

dove i, h, k è una qualsiasi permutazione di 1, 2, 3, e la scelta dei segni sia fatta in guisa che il prodotto $y_1 y_2 y_3$, nella sostituzione, non cambi segno. Adesso il punto invariante è (0001) e il piano invariante è $y_4 = 0$ (punto triplo della superficie e faccia opposta nel tetraedro singolare). Quest'ultimo modo di rappresentazione del gruppo quaternario in parola, ha il vantaggio di mettere subito in evidenza il gruppo ternario (piano) che esso subordina sopra $y_4 = 0$ e che costituisce il gruppo ottaedrico piano (3).

(1) GERBALDI, loc. cit. (2), pag. 44.

(2) E' il G_{24}^{II} . Vedi la mia Memoria, *Sopra i gruppi finiti di collineazioni quaternarie oloedricamente isomorfi con quelli dei poliedri regolari* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, t. VIII (1903), pp. 1-37].

(3) Vedi l'altra mia Memoria, *Contributo alla teoria del gruppo di 168 collineazioni piane* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, t. V. (1901) pp. 33-55].

6. Per la maggiore semplicità di descrivere le collineazioni del gruppo quaternario in discorso conviene servirsi di quest'ultimo riferimento.

Cominciamo dalle tre involuzioni gobbe che hanno per assi le tre coppie di spigoli opposti del tetraedro singolare.

$$\left\{ \begin{array}{cccc} y_1 & -y_2 & -y_3 & y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{cccc} -y_1 & y_2 & -y_3 & y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{cccc} -y_1 & -y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \right\}.$$

Vengono poi sei omologie armoniche che hanno per piani fondamentali i sei piani osculanti (N. 3) e per centri i punti dove questi piani tagliano quegli spigoli del tetraedro singolare esistenti sulla faccia opposta al punto triplo. Però è indispensabile por mente al modo col quale i piani fondamentali suddetti debbono essere associati ai relativi centri. Ciò risulta dai due seguenti esempi :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} y_1 & y_3 & y_2 & y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \right\} \text{ che ha il centro in } (0, 1, -1, 0) \text{ e per piano fondamentale } y_2 + y_3 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} y_1 & -y_3 & -y_2 & y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \right\} \text{ che ha il centro in } (0, 1, 1, 0) \text{ e per piano fondamentale } y_2 + y_3 = 0.$$

Per tal guisa dunque il centro dell'una giace sul piano fondamentale dell'altra.

Dopo, sono da segnalare otto collineazioni assiali a periodo tre divise in quattro coppie così che quelle di una coppia sono ciascuna il quadrato (o l'inversa dell'altra) e hanno in comune gli elementi uniti. Gli assi di punti uniti relativi sono le rette che dal punto triplo proiettano i vertici del tetraedro doppio, gli assi di piani uniti sono le intersezioni della faccia del tetraedro singolare, che si oppone al punto triplo, con le facce del tetraedro doppio suddetto.

Eccone un esempio :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} y_2 & y_3 & y_1 & y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \right\}^r; \quad r = 1, 2.$$

Le rappresentazioni parametriche dell'asse di punti uniti e dell'asse di piani uniti sono rispettivamente

$$(1, 1, 1, \lambda); \quad y_1 + y_2 + y_3 + \lambda y_4 = 0.$$

Infine si hanno sei collineazioni a periodo quattro con quattro punti e quattro piani uniti, per ciascuna, che si possono distribuire in tre coppie.

Ecco una di tali coppie

$$\left\{ \begin{array}{cccc} -y_1, & -y_3, & y_2, & y_4 \\ y_3 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{cccc} -y_1, & y_3, & -y_2, & y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \right\}.$$

Ciascuna è il cubo (o l'inversa) dell'altra. Il quadrato di una qualunque di esse è una delle tre involuzioni gobbe segnalate e precisamente la

$$\left\{ \begin{array}{cccc} y_1 & -y_2 & -y_3 & y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \right\}.$$

I punti uniti (comuni) sono i seguenti:

$$(1\ 0\ 0\ 0), \quad (0\ 0\ 0\ 1), \quad (0\ 1\ i\ 0), \quad (0\ 1\ -i\ 0)$$

di cui i primi due costituiscono il punto triplo e un altro vertice del tetraedro singolare. I due rimanenti esistono sullo spigolo del tetraedro suddetto opposto a quello che contiene i primi due e compongono, su tale spigolo, la coppia armonica a quella formata dai vertici del tetraedro e a quella dei centri delle omologie già segnalate.

Si hanno così 23 collineazioni quaternarie aggiungendo alle quali l'identità si ottiene il gruppo cercato.

7. Nel sistema di coordinate x_i , mentre la descrizione geometrica non è così espressiva come col sistema y_i , per contro la rappresentazione analitica si può notevolmente semplificare decomponendo ciascuna sostituzione nei suoi cicli.

Per tal guisa le tre involuzioni gobbe possono rappresentarsi così

$$(x_1\ x_2)(x_3\ x_4), \quad (x_1\ x_3)(x_2\ x_4), \quad (x_1\ x_4)(x_2\ x_3);$$

le sei omologie armoniche sono le seguenti:

$$(x_1\ x_2), \quad (x_1\ x_3), \quad (x_1\ x_4), \quad (x_2\ x_3), \quad (x_2\ x_4), \quad (x_3\ x_4);$$

le quattro coppie di collineazioni assiali, a periodo tre, possono scriversi così:

$$(x_2\ x_3\ x_4)^r, \quad (x_3\ x_4\ x_1)^r, \quad (x_4\ x_1\ x_2)^r, \quad (x_1\ x_2\ x_3)^r, \quad \text{con } r = 1, 2,$$

e infine, per le tre coppie di collineazioni cicliche, a periodo quattro, si ha:

$$(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^r, \quad (x_1\ x_2\ x_4\ x_3)^r, \quad (x_1\ x_3\ x_2\ x_4)^r, \quad \text{con } r = 1, 3.$$

Fra i sottogruppi sono specialmente da segnalare il quadrimio che è costituito dalle tre involuzioni gobbe e dall'identità il quale spetta alla quartica gobba generica (N. 10), l'alterno (tetraedrico) che spetta alla quartica equianarmonica (N. 49) e uno di ottavo ordine che si può generare aggiungendo una delle sei omologie precedenti al sottogruppo quadrimio e che spetta alla quartica armonica (N. 40).

CAPITOLO II.

La involuzione sizigetica sopra una quartica razionale gobba.

8. Il punto di partenza è una mia Nota intitolata *Sopra alcuni gruppi lineari quaternari dotati di quartica, o di quintiche gobba razionale invariante* (1). Sia dunque C_4 una quartica gobba razionale generica. Le coordinate di un suo punto qualsiasi si esprimeranno mediante forme binarie biquadratiche che si potranno sempre riguardare quali quarte potenze di forme lineari. Basta, a tale scopo, riferire C_4 al tetraedro dei suoi quattro piani stazionari.

Queste coordinate potranno dunque assumersi così:

$$x_1 = M^4, \quad x_2 = N^4, \quad x_3 = P^4, \quad x_4 = Q^4$$

dove M, N, P, Q sono forme lineari binarie e la biquadratica binaria

$$MNPQ = 0$$

rappresenterà complessivamente i quattro punti di contatto dei piani stazionari. Inoltre, scegliendo, sopra C_4 , come coppia di riferimento quella armonica ad MN, PQ si vede che si potrà scrivere

$$M = a\lambda + b\mu, \quad N = a\lambda - b\mu, \quad P = b\lambda + a\mu, \quad Q = b\lambda - a\mu,$$

dove a, b sono costanti e λ, μ le variabili delle binarie in parola, di guisa che $\frac{\lambda}{\mu}$ sarà il parametro disteso sopra C_4 .

In conclusione dunque noi assumeremo, come rappresentazione parametrica della nostra curva C_4 , la seguente:

$$x_1 = (a\lambda + b\mu)^4, \quad x_2 = (a\lambda - b\mu)^4, \quad x_3 = (b\lambda + a\mu)^4, \quad x_4 = (b\lambda - a\mu)^4.$$

Con denominazione più consona chiameremo « *piani iperosculanti* » i piani stazionari e « *punti iperosculati* » i relativi punti di contatto. La binaria che rappresenta questi ultimi è

$$f \equiv \lambda^4 + \mu^4 - h\lambda^2\mu^2 = 0 \quad \text{con} \quad h = \frac{a^4 + b^4}{a^2b^2}$$

dove è da intendere che i valori $h = \pm 2$ sono da escludere in quanto che i punti iperosculati e quindi i piani iperosculanti, non essendo allora più distinti, non possono assumersi questi ultimi, come facce del tetraedro fondamentale. Per il birapporto dei punti iperosculati si ha poi:

(1) Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere serie II, vol. XXXVII (1904), pp. 341-353.

$$(MNPQ) \equiv \frac{h-3}{h+2}.$$

9. La binaria biquadratica f dei quattro punti iperosculati e la sua Hessiana individuano un fascio che si chiama sizigetico per ovvia estensione di linguaggio (dalle cubiche piane) e siccome i relativi gruppi, di quattro punti ciascuno, rappresentanti le forme del fascio, costituiscono una involuzione, così, in definitiva, tali gruppi si sono chiamati « *sizigetici* » e « *involuzione sizigetica* » la involuzione in parola (1). Essa può rappresentarsi con:

$$\lambda^4 + \mu^4 + 6t\lambda^2\mu^2 = 0$$

dove t è il parametro ogni valore del quale individua una forma del fascio e quindi un gruppo sizigetico.

In particolare per $t = -\frac{h}{6}$ si ottiene il gruppo dei punti iperosculati, per $t(t^2 - 1) = 0$ si hanno i tre gruppi armonici, per $3t^2 + 1 = 0$ si hanno i due equianarmonici, per $t = \infty, \pm \frac{1}{3}$ si hanno i tre gruppi doppi (cioè i tre quadrati perfetti). Le tre coppie relative compongono il covariante sestico comune a tutti i gruppi sizigetici (2).

10. Ciò premesso è ovvio constatare che le tre involuzioni binarie:

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

generano rispettivamente le seguenti involuzioni gobbe:

$$(2) \quad (x_1 x_2)(x_3 x_4), \quad (x_1 x_3)(x_2 x_4), \quad (x_1 x_4)(x_2 x_3)$$

ognuna delle quali trasforma C_4 in se stessa. Insieme all'identità esse compongono il gruppo quadrimio quaternario (già segnalato al n° 7) rispetto al quale la C_4 generica è invariante ²⁾. È uno dei tre gruppi quadrimoni quaternari possibili ³⁾ e lo indicheremo con G_4^I .

Mediante queste formole è facile riconoscere le seguenti circostanze geometriche.

Gli assi delle tre involuzioni gobbe sono gli spigoli opposti del tetraedro che ha per vertici i punti

$$A \equiv (1, 1, 1, 1); \quad B \equiv (1, 1, -1, -1); \quad C \equiv (1, -1, -1, 1); \quad D \equiv (1, -1, 1, -1).$$

(1) Vedi la mia Nota *Sopra le involuzioni sizigetiche di forme binarie biquadratiche* [Atti della Società Ligustica di Scienze e Lettere, Vol. IV, pag. 243].

(2) Vedi la mia Nota citata precedentemente (1).

I tre spigoli AB , AC , AD , sono le tre corde principali di C_4 i cui punti di appoggio sono rappresentati da:

$$\lambda \mu (\lambda^4 - \mu^4) = 0.$$

Più particolarmente, lo spigolo AB è intersezione dei piani:

$$a^2 (x_1 - x_2) + b^2 (x_4 - x_3) = 0,$$

$$b^2 (x_1 - x_2) + a^2 (x_4 - x_3) = 0$$

osculatori di C_4 rispettivamente in $\lambda = 0$, $\mu = 0$.

Lo spigolo AC è intersezione dei piani:

$$(a - ib)^2 (x_1 - x_4) + (a + ib)^2 (x_3 - x_2) = 0,$$

$$(a + ib)^2 (x_1 - x_4) + (a - ib)^2 (x_3 - x_2) = 0$$

osculatori di C_4 in $\lambda = 1$, $\mu = \pm i$.

Lo spigolo AD è intersezione dei piani:

$$(a - b)^2 (x_1 - x_3) + (a + b)^2 (x_4 - x_2) = 0,$$

$$(a + b)^2 (x_1 - x_3) + (a - b)^2 (x_4 - x_2) = 0$$

osculatori di C_4 in $\lambda = \mu = 1$; $\lambda = -\mu = 1$.

Dunque: « La curva C_4 è invariante rispetto a tre involuzioni gobbe i cui assi sono le tre coppie di spigoli opposti del tetraedro formato dalle facce del triedro principale della curva e, come quarta faccia, dal piano che contiene i tre coniugati armonici del vertice del triedro suddetto rispetto ai punti di appoggio della curva con le tre corde principali. Tali punti di appoggio sono rappresentati analiticamente dalle tre coppie del covariante sestico dell'involuzione sizigetica (n° 9) ». Aggiungendo, a tali tre involuzioni gobbe l'identità, si ottiene il gruppo quadrinomio quaternario G_4^I già indicato (n° 7 e 10) rispetto a cui C_4 è invariante. Il tetraedro suddetto sarà chiamato brevemente « il tetraedro principale di C_4 ». A suo tempo, quando metteremo in relazione la C_4 con la superficie di STEINER, di cui C_4 è una asintotica, vedremo che il tetraedro principale e l'iperosculante di C_4 non sono altro che il tetraedro singolare e quello doppio della superficie suddetta.

11. Con le denominazioni introdotte nei n° precedenti ne segue che « Ogni gruppo sizigetico, sopra C_4 , è invariante rispetto al gruppo G_4^I e, viceversa, ogni quaterna di punti di C_4 , invariante rispetto a G_4^I , costituisce un gruppo sizigetico ».

Ogni gruppo sizigetico individua un tetraedro al quale daremo l'appellativo di sizigetico. Si hanno così ∞^1 tetraedri sizigetici. Il luogo dei vertici è, ovviamente, C_4 .

Al n° 24 sarà considerato l'involuppo delle facce.

Le quadriche invarianti, rispetto a G^I_4 , formano il sistema lineare ∞^3 seguente

$$\Sigma x^2_i + \lambda (x_1 x_2 + x_3 x_4) + \mu (x_1 x_3 + x_2 x_4) + \nu (x_1 x_4 + x_2 x_3) = 0$$

da cui risulta facilmente che una quaterna generica di rette invariante appartiene a una serie rigata sopra una quadrica del sistema. In particolare dunque:

« Le quattro tangenti a C_4 nei quattro punti di un gruppo sizigetico appartengono a una stessa serie rigata (1) ».

12. Tagliando la curva C_4 con un piano $u_x = 0$ si trova una binaria biquadratica in λ e μ che scriveremo così:

$$(1) \quad m \lambda^4 + n \lambda^3 \mu + p \lambda^2 \mu^2 + q \lambda \mu^3 + r \mu^4 = 0$$

dove

$$(2) \quad \begin{cases} m = a^4 (u_1 + u_2) + b^4 (u_3 + u_4), \\ n = 4 a b [a^2 (u_1 - u_2) + b^2 (u_3 - u_4)], \\ p = 6 a^2 b^2 \Sigma u_i, \\ q = 4 a b [b^3 (u_1 - u_2) + a^2 (u_3 - u_4)], \\ r = b^4 (u_1 + u_2) + a^4 (u_3 + u_4). \end{cases}$$

Ne segue

$$(3) \quad 6 (m + r) - h p = 0$$

dove $h = \frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2}$ come nel n° 8. Dividendo la (1) per μ^4 e ponendo

$\frac{\lambda}{\mu} = \alpha$, noi la scriveremo nella forma:

$$(4) \quad m \alpha^4 + n \alpha^3 + p \alpha^2 + q \alpha + r = 0$$

e la (2) così:

$$6 \left(\frac{r}{m} + 1 \right) - h \frac{p}{m} = 0.$$

Se dunque si indicano con $a_1 a_2 a_3 a_4$ le radici della (4) si avrà

$$(5) \quad 6 (a_1 a_2 a_3 a_4 + 1) - h \Sigma a_i a_k = 0$$

la quale apparisce quindi come la condizione necessaria affinchè 4 punti di C_4 individuati dai valori:

$$a_1 a_2 a_3 a_4$$

(1) BERZOLARI, loc. cit. pag. 160.

del parametro $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ siano in uno stesso piano (1).

13. La condizione è anche sufficiente. Abbiansi infatti quattro numeri $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ collegati dalla relazione (5) del N. precedente e dimostriamo che essi si possono riguardare come quattro valori del parametro α , disteso su C_4 , individuanti quattro punti situati in un piano. Tutto si riduce a cercare le coordinate u_i di questo piano espresse per le α_i .

A tale scopo sia:

$$m \alpha^4 + n \alpha^3 + p \alpha^2 + q \alpha + r = 0$$

la equazione in α avente per radici $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ vincolate dalla relazione (5) del N. precedente. Ne segue:

$$6 \left(\frac{r}{m} + 1 \right) - h \frac{p}{m} = 0$$

ossia:

$$6(r + m) - hp = 0$$

che è la (3) del N. precedente. D'altra parte la 1^a e 3^a delle (2) e la 2^a e 4^a pure delle (2) dello stesso N. precedente danno:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= \frac{m a^4 - r b^4}{a^8 - b^8}, & u_3 + u_4 &= \frac{r a^4 - m b^4}{a^8 - b^8}, \\ u_1 - u_2 &= \frac{n a^2 - q b^2}{4 a b (a^4 - b^4)}, & u_3 - u_4 &= \frac{q a^2 - n b^2}{4 a b (a^4 - b^4)} \end{aligned}$$

e con ciò anche le (2) del N. precedente sono soddisfatte.

Non manca che di risolvere le precedenti rispetto alle u_i . Nelle formule che per tal guisa si ottengono, si moltiplichino poi, nei secondi membri, pel fattore di proporzionalità $\frac{2(a^4 - b^4)}{m}$ e si osservi che:

$$\frac{n}{m} = -\sum \alpha_i, \quad \frac{p}{m} = \sum \alpha_i \alpha_k, \quad \frac{q}{m} = -\sum \alpha_i \alpha_h \alpha_k, \quad \frac{r}{m} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4.$$

Si vedrà così che, per le u_i , coordinate cercate, si possono prendere le seguenti:

(1) ARMENANTE, *Sulle curve gobbe razionali del 4° ordine* [Giornale di Matematiche, 1^a Serie, Vol. 11 e 12 (1873-74)], Sono due memorie che saranno citate anche in seguito. Qui ci si riferisce alla 1^a, pag. 221. Vedi anche BERZOLARI, loc. cit., pag. 116.

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{a^4 - b^4 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}{a^4 + b^4} + \frac{b^2 \sum \alpha_i \alpha_h \alpha_k - a^2 \sum \alpha_i}{4 a b} \\ u_2 = \frac{a^4 - b^4 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}{a^4 + b^4} - \frac{b^2 \sum \alpha_i \alpha_h \alpha_k - a^2 \sum \alpha_i}{4 a b} \\ u_3 = \frac{a^4 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 - b^4}{a^4 + b^4} + \frac{b^2 \sum \alpha_i - a^2 \sum \alpha_i \alpha_h \alpha_k}{4 a b} \\ u_4 = \frac{a^4 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 - b^4}{a^4 + b^4} - \frac{b^2 \sum \alpha_i - a^2 \sum \alpha_i \alpha_h \alpha_k}{4 a b} \end{array} \right.$$

dove è da tener presente che fra le α_i passa la relazione :

$$6(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 + 1) - h \sum \alpha_i \alpha_k = 0.$$

Così lo scopo è raggiunto. Il risultato di ARMENANTE-BERZOLARI si completa quindi mediante le (1) precedenti che danno le coordinate u_i del piano contenente quei quattro punti di C_4 che sono individuati dai valori α_i soddisfacenti all'ultima sopra indicata relazione.

14. È da notare il caso particolare in cui essa sia soddisfatta indipendentemente da h . Scrivendola nuovamente :

$$(1) \quad 6(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 + 1) - h \sum \alpha_i \alpha_k = 0$$

si vede che ciò accade quando :

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 + 1 = 0, \quad \sum \alpha_i \alpha_k = 0.$$

Allora, ricordando che si ha (N. 13) :

$$\frac{p}{m} = \sum \alpha_i \alpha^k, \quad \frac{r}{m} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$$

segue $p = 0$, $r + m = 0$ e quindi dalla (2) del N. 12 si ha $\sum u_i = 0$ il che significa che il piano $u_x = 0$ passa pel punto $A \equiv (1, 1, 1, 1)$ vertice del triedro principale di C_4 (N. 10). Viceversa, se questo accade $\sum u_i = 0$ e quindi $p = 0$, dopo di che $m + r = 0$ (N. 12) e quindi

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 + 1 = 0, \quad \sum \alpha_i \alpha_k = 0.$$

Dunque: « *I piani passanti pel vertice del triedro principale di C_4 (e soltanto essi) segano la curva in quattro punti i cui valori del parametro soddisfano la relazione fondamentale (1) precedente indipendentemente h* ».

15. Tale relazione serve a confermare rapidamente risultati già noti. Ad esempio esisteranno gruppi sizigetici piani ?

Per un gruppo sizigetico si deve avere, partendo dal valore α :

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = -\alpha, \quad \alpha_3 = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha_4 = -\frac{1}{\alpha}.$$

Ponendo questi valori nella relazione fondamentale (5) del N. 12 si trova :

$$12 \alpha^2 + h (\alpha^4 + 1) = 0$$

e ricostituendo la omogeneità :

$$\lambda^4 + \mu^4 + \frac{12}{h} \lambda^2 \mu^2 = 0.$$

Cioè « esiste un solo gruppo piano sizigetico ». Lo individua il valore $t = \frac{2}{h}$ nella rappresentazione dei gruppi sizigetici adottata nel N. 9. Siccome poi ogni gruppo sizigetico è invariante rispetto a G_4^I (N. 11) così può aggiungersi che *esso esiste nell'unico piano invariante, cioè in $\Sigma x_i = 0$.*

Se nella medesima relazione si fa $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ essa diviene :

$$6 (\alpha^2 \beta^2 + 1) - h (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha \beta) = 0$$

e collega i due valori del parametro individuanti i punti di contatto di un piano bitangente a C_4 . La dipendenza fra α e β è un sistema simmetrico di 2° grado il che conferma che una tangente di C_4 si appoggia ad altre due.

16. Cerchiamo le condizioni perchè tre punti di C_4 siano allineati. A tale scopo, ordinando in α_1 la solita relazione fondamentale (5) del N. 12 la scriveremo così :

$$\alpha_1 \{6 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - h (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\} + \{6 - h (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1)\} = 0.$$

Ora se $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ individuano tre punti allineati di C_4 , questi, insieme a un altro punto qualsiasi α_4 di C_4 , debbono individuare quattro punti complanari.

Bisogna dunque e basta che la precedente relazione sia soddisfatta indipendentemente da α_4 . Si trova dunque :

$$(1) \quad \begin{cases} 6 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - h (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0, \\ 6 - h (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1) = 0, \end{cases}$$

che sono le condizioni cercate. Discuteremo a suo tempo l'ipotesi $h = 0$. (Cap. V). Essendo dunque $h \neq 0$ si elimini h e si troverà :

$$(2) \quad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0$$

che si può assumere come prima condizione d'allineamento dei tre punti $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$. Soddisfatta questa (che è indipendente da h) bisogna poi aggiungere una qualsiasi delle (1) (che la rimanente risulterà di conseguenza).

17. Si osservi adesso che si soddisfa alle (1) del n° precedente prendendo :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\beta, \quad \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 = \frac{6}{h}, \quad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -\frac{\beta h}{6}.$$

Dunque $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ si possono riguardare come radici della seguente equazione in z

$$6 h z^3 + 6 h \beta z^2 + 36 z + \beta h^2 = 0$$

e così al variare del parametro β si otterranno le ∞^1 terne di punti allineati di C_4 , cioè le ∞^1 trisecanti, di C_4 costituenti, com'è ben noto, le generatrici di una serie rigata sopra la quadrica che passa per C_4 (n° 26).

18. Sempre nell'ipotesi $h \neq 0$ noteremo anche come le (1) del n° 16 possano scriversi così:

$$\alpha_2 + \alpha_3 = \frac{\alpha_1}{h} \cdot \frac{36 - h^2}{6 \alpha_1^2 + h}; \quad \alpha_2 \alpha_3 = \frac{h \alpha_1^2 + 6}{6 \alpha_1^2 + h}.$$

Dunque se a individua un punto P generico di C_4 , gli altri due valori del parametro che individuano i due punti C_4 allineati con P , sono le radici della seguente equazione in z :

$$(1) \quad z^2 h (6 \alpha^2 + h) - z a (36 - h^2) + h (h \alpha^2 + 6) = 0$$

Se in questa si fa $z = a$ si trova:

$$(2) \quad a^4 + 1 + \frac{h^2 - 13}{2h} a^2 = 0$$

che è del 4° grado in a . Ecco la conferma della esistenza di quattro tangenti-secanti di C_4 e la (2) fornirà i quattro valori di a inerenti ai relativi punti di contatto. Se invece si vogliono i punti di secanza dovremo annullare il discriminante della (1) rispetto alla z . Si trova così:

$$(3) \quad a^4 + 1 + \frac{h^4 + 72 h^2 - 432}{8 h^3} a^2 = 0.$$

Rendendo omogenee le (2) e (3) esse divengono rispettivamente:

$$\lambda^4 + \mu^4 + \frac{h^2 - 12}{2h} \lambda^2 \mu^2 = 0,$$

$$\lambda^4 + \mu^4 + \frac{h^4 + 72 h^2 - 432}{8 h^3} \lambda^2 \mu^2 = 0,$$

e in relazione al parametro t (n° 9) si può dire che i gruppi sizigetici dei punti di contatto e di secanza delle quattro tangenti-secanti di C_4 si ottengono rispettivamente per:

$$t = \frac{h^2 - 12}{12 h}, \quad t = \frac{h^4 + 72 h^2 - 432}{48 h^3}$$

e quindi costituiscono l'Hessiano e lo Steineriano del gruppo individuato da $t = -\frac{h}{6}$ che è quello dei punti iperosculati (n° 9). Onde la nota proprietà:

« Il gruppo sizigetico dei punti iperosculati ha per Hessiano e Steineriano rispettivamente quello dei punti di contatto e di secanza delle quattro tangenti-secanti (1) ».

Ricordando che il gruppo sizigetico piano è individuato da $t = \frac{2}{h}$ (n° 15), si trova facilmente che il suo gruppo Hessiano è anche quello dei punti di contatto suddetti (il che non è da meravigliare perchè ogni gruppo sizigetico è Hessiano di altri due (2)). Si può dunque aggiungere:

« I due gruppi sizigetici che hanno per Hessiano quello dei punti di contatto delle tangenti-secanti sono il gruppo piano e quello dei punti iperosculati ».

19. Riprendiamo la relazione fondamentale (5) del n° 12 esprimente la condizione di complanarità dei quattro punti $a_1 a_2 a_3 a_4$ di C_4 . Facendovi $a_1 = a_2 = a_3 = a$, $a_4 = a'$ essa diviene

$$1) \quad 2(\alpha^3 a' + 1) - h a (a + a') = 0$$

e collega i valori del parametro di due punti $A \equiv (a)$, $A' \equiv (a')$ tali che il piano osculatore in A sega ulteriormente la curva C_4 in a' . Diremo che A' è « osculante » di A e « osculato » di A' . La relazione (3) individua sopra C_4 una g^1_3 che ha per punti uniti, ovviamente, i punti iperosculati.

Essa pone in evidenza che mentre un punto di C_4 ha un solo osculante, ha invece tre osculati. Ordinandola in a essa può scriversi così:

$$a^3 - \frac{h}{2a'} a^2 - \frac{b}{2} a + \frac{1}{a'} = 0.$$

Indicandone le radici con $a_1 a_2 a_3$, avremo dunque:

$$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{h}{2a'}, \quad a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 = -\frac{b}{2}, \quad a_1 a_2 a_3 = -\frac{1}{a'}.$$

Ne segue:

$$a'(a_1 + a_2 + a_3) + a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 = 0, \quad a_1 a_2 a_3 a' + 1 = 0$$

il che dimostra che quattro punti $a_1 a_2 a_3 a'$ esistono in un piano passante per A (n° 14). Onde il teorema noto:

(1) ARMENANTE, loc. cit. (13), 1ª Memoria, pag. 229, BERZOLARI, loc. cit. (1) pag. 116.

(2) CIANI, loc. cit. (10), pag. 244.

(3) ARMENANTE, loc. cit. (13), 1ª Memoria, pp. 223-232.

« *I tre punti osculati di un medesimo osculante giacciono in un piano passante per l'osculante e pel vertice del triedro principale della curva C_4 2) ».*

20. Mentre dunque un punto percorre C_4 , il piano che passa per esso e per i suoi tre osculati ruota intorno al vertice del triedro principale. Cerchiamo l'inviluppo di un tal piano mobile. A tale scopo osserviamo che si ha (n° 19)

$$a_1 + a_2 + a_3 + a' = \frac{h}{2a'} + a' = \frac{2a'^2 + h}{2a'}, \quad a_1 a_2 a_3 a' = -1$$

$$a_1 a_2 a_3 + a' (a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1) = -\frac{1}{a'} - \frac{h a'}{2} = -\frac{h a'^2 + 2}{2 a'}$$

dopo di che le (1) del n° 13 divengono

$$u_1 = -a'^2 (2a^2 + h b^2) + 8 a b a' - (b a^2 + 2 b^2),$$

$$u_2 = a'^2 (2a^2 + h b^2) + 8 a b a' + (h a^2 + 2 b^2),$$

$$u_3 = a'^2 (h a^2 + 2 b^2) - 8 a b a' + (2 a^2 + h b^2),$$

$$u_4 = a'^2 (h a^2 + 2 b^2) - 8 a b a' - (2 a^2 + h b^2).$$

Si ottengono così le u_i come funzioni quadratiche, non omogenee, di un parametro a' , il che dimostra che questo inviluppo è un cono quadrico (1). Esso ha il vertice in quello del triedro principale di C_4 (perchè dalle precedenti segue $\sum u_i = 0$).

21. Il valore a' che individua l'osculante di $A \equiv (a)$ si ottiene risolvendo rispetto ad a' la (1) del n° 19. Si trova così:

$$(1) \quad a' = \frac{h a^2 - 2}{2 a^3 - h a}.$$

Indicando quindi con a'' il valore che individua l'osculante dell'osculante di A avremo:

$$(2) \quad a'' = \frac{h \left(\frac{h a^2 - 2}{2 a^3 - h a} \right) - 2}{2 \left(\frac{h a^2 - 2}{2 a^3 - h a} \right)^3 - h \left(\frac{h a^2 - 2}{2 a^3 - h a} \right)}.$$

Può accadere che sia $a = a''$? Una soluzione ovvia è fornita da un punto iperosculato chè per un tal punto si ha manifestamente $a = a' = a''$. All'infuori di queste soluzioni si presentano i punti di appoggio di una corda principale. Dunque il problema proposto è quello di cercare le corde principali di C_4 . Tre le conosciamo di già. Ne esisteranno altre? Scriviamo perciò il 2° membro della (2) precedente nel seguente modo:

(1) ARMENANTE, loc. cit. 13), 1ª Memoria, pp. 223-232.

$$\alpha \cdot \frac{-16 \alpha^8 + 2 \alpha^6 h (12 + h^2) - \alpha^4 h^2 (20 + h^2) + 2 \alpha^2 h (4 + 3 h^2) - 4 h^2}{-4 h^2 \alpha^8 + 2 \alpha^6 h (4 + 3 h^2) - \alpha^4 h^2 (20 + h^2) + 2 \alpha^2 h (12 + h^2) - 16}.$$

Uguagliandolo ad α , si presenta per prima soluzione $\alpha = 0$ e quindi dalla (1) $\alpha' = \infty$. Si ottiene così la corda principale AB i cui punti di appoggio sono dati da $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 0$, $\alpha + \frac{\lambda}{\mu} = \infty$ (n° 10). Esclusa questa soluzione, non rimane altro che uguagliare numeratore e denominatore della precedente frazione. Si è così condotti a:

$$(\alpha^4 - 1)(\alpha^4 + 1 - h \alpha^2) = 0$$

e quindi:

$$\alpha^4 - 1 = 0, \quad \alpha^4 + 1 - h \alpha^2 = 0$$

che, rese omogenee, divengono rispettivamente:

$$\lambda^4 - \mu^4 = 0, \quad \lambda^4 + \mu^4 - h \lambda^2 \mu^2 = 0.$$

La prima conduce alle due rimanenti corde principali già note (n° 10), la seconda ai punti iperosculati (n° 8).

Dunque, in conclusione:

« La curva C_4 non possiede altre corde principali oltre quelle già conosciute ».

32. I quattro osculanti di un gruppo sizigetico formano a loro volta, evidentemente, un altro gruppo sizigetico. Indicando con t e t' i valori del parametro che individuano i due gruppi (n° 9) si cerca la relazione che vincola t e t' .

A tale scopo basta osservare che i gruppi in parola possono intendersi rappresentati da:

$$\alpha^4 + 1 + 6 t \alpha^2 = 0, \quad \alpha'^4 + 1 + 6 t' \alpha'^2 = 0$$

purchè fra α e α' passi la (1) del n° 19. Avremo dunque:

$$t' = - \frac{1}{6} \left(\frac{\alpha'^4 + 1}{\alpha'^2} \right)$$

dove α' è dato dalla (1) del n° 21. A calcoli fatti ecco la relazione cercata $3 t' (h^2 + 12 h t + 4)^2 - 3 t (h^4 + 24 h^2 + 576 t^2 - 48) - 8 h (h^2 + 72 t^2 - 4) = 0$

23. Faremo un'applicazione della relazione ora trovata alla ricerca dei punti osculati (n° 19) del punto di secanza P di una tangente-secante r di C_4 . Uno è, manifestamente, il punto di contatto di r perchè il piano osculatore a C_4 in tal punto passa per r e quindi per P . Anzi

questo punto di contatto va contato due volte, quale osculato di P , giacchè essendo la sviluppabile osculatrice di C_4 l'involuppo dei suoi piani osculatori, per ogni punto di essa, e quindi per P , passano due piani osculatori infinitamente vicini. Dunque dei tre punti osculati di P (n° 19) due sono riuniti nel punto di contatto di r e uno è da determinare. Segue che anche il gruppo sizigetico al quale P appartiene (cioè quello dei punti di secanza delle tangenti secanti) ammette due gruppi sizigetici osculati: uno è il gruppo dei punti di contatto delle tangenti-secanti suddette e uno è da determinare. A tale scopo ricorderemo (n° 18) che tal gruppo dei punti di secanza è individuato dal seguente valore del parametro:

$$\frac{h^4 + 72 h^2 - 432}{48 h^3}$$

Basterà dunque sostituire questo valore a t' nella relazione del n° precedente. Si ottiene così:

$$(h^2 - 12 h t - 12)^2 (h^4 - 24 h^2 - 192 h t - 48) = 0$$

la quale conduce al gruppo:

$$h^2 - 12 h t - 12 = 0 \quad (\text{contato due volte})$$

e all'altro:

$$h^4 - 24 h^2 - 192 h t - 48 = 0 \quad (\text{contato una volta}).$$

La prima ci dà il seguente valore di t :

$$t = \frac{h^2 - 12}{12 h}$$

che individua il gruppo dei punti di contatto delle tangenti-secanti (n° 18) e conferma la previsione geometrica dianzi fatta.

La seconda dà:

$$t = \frac{h^4 - 24 h^2 - 48}{192 h}$$

e individua il 2° gruppo cercato. Un facile calcolo prova che esso è lo Steineriano del gruppo sizigetico piano $\left(t = \frac{2}{h} \text{ (n° 15)}\right)$. In conclusione:

« Il gruppo sizigetico dei punti di secanza delle tangenti-secanti ha per gruppi sizigetici osculati quello dei relativi punti di contatto (valutato due volte) e lo Steineriano del gruppo piano ».

Riunendo questo risultato a quello della fine del n° 18 si può aggiungere ora che:

« Il gruppo sizigetico piano ha per Hessiano e Steineriano i due gruppi osculati di quello formato dai punti di secanza delle tangenti-secanti ».

24. Sia $MNPQ$ un tetraedro sizigetico generico e quindi per i relativi valori del parametro, disteso su C_4 , si avrà:

$$M \equiv (\alpha), \quad N \equiv (-\alpha), \quad P \equiv \left(\frac{1}{\alpha}\right), \quad Q \equiv \left(-\frac{1}{\alpha}\right).$$

La faccia NPQ , opposta ad M , incontrerà ulteriormente C_4 in un altro punto $M' \equiv (\alpha')$ che chiameremo « il residuo » di M . I quattro punti $NPQM'$ essendo in un piano avremo, per la (5) del n° 12,

$$6(\alpha\alpha' + \alpha^2) + h(\alpha^3\alpha' + 1) = 0$$

da cui

$$(1) \quad \alpha' = -\frac{6\alpha^2 + h}{\alpha(h\alpha^2 + 6)}.$$

Questo può servire a trovare l'inviluppo delle facce dei tetraedri sizigetici a cui accennammo nel n° 11. Infatti, in accordo con le notazioni del n° 12, facciamo:

$$\alpha_1 = -\alpha, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{\alpha}, \quad \alpha_3 = -\frac{1}{\alpha}, \quad \alpha_4 = \alpha'$$

e troveremo:

$$\Sigma \alpha_i = -\frac{h\alpha^4 + 12\alpha^2 + h}{\alpha(h\alpha^2 + 6)}, \quad \Sigma \alpha_i \alpha_h \alpha_k = \frac{h\alpha^4 + 12\alpha^2 + h}{\alpha^3(h\alpha^2 + 6)}, \quad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = -\frac{6\alpha^2 + h}{\alpha^2(h\alpha^2 + 6)}.$$

Sostituendo questi valori, nella (1) del n° 13, si otterranno le u_i espresse come funzioni razionali, intere, non omogenee, di un parametro e poichè il grado è sei, così si conclude che si tratta di una sviluppabile di sesta classe.

25. Per il punto $M'' \equiv (\alpha'')$, residuo di $M' \equiv (\alpha')$, avremo dunque secondo la (1) del n° precedente:

$$\alpha'' = -\frac{6\alpha'^2 + h}{\alpha'(h\alpha'^2 + 6)} = \frac{\{6(6\alpha^2 + h)^2 + h\alpha^2(h\alpha^2 + 6)^2\}(h\alpha^2 + 6)\alpha}{h(6\alpha^2 + h)^3 + 6(6\alpha^2 + h)(h\alpha^2 + 6)^2\alpha^2}.$$

Potrà M'' coincidere con M ? Avremmo così due punti M ed M' residui uno dell'altro. Facendo $\alpha'' = \alpha$ si trova la condizione:

$$\alpha = \alpha \frac{\{6(6\alpha^2 + h) + h\alpha^2(h\alpha^2 + 6)^2\}(h\alpha^2 + 6)}{h(6\alpha^2 + h)^3 + 6(6\alpha^2 + h)(h\alpha^2 + 6)^2\alpha^2}$$

dalla quale segue subito $\alpha = 0$ e quindi dalla (1) del n° precedente $\alpha' = \infty$, il che conduce ai punti di appoggio della corda principale AB

con C_4 (n° 10). Ma allora non si può più parlare di tetraedro sizigetico e la soluzione è da scartare. Rimane dunque da uguagliare numeratore e denominatore della precedente frazione, il che conduce a:

$$h(h^2 - 36) [(\alpha^4 + 1)h + 12\alpha^2](\alpha^4 - 1) = 0.$$

Ora la soluzione $\alpha^4 - 1 = 0$ è da escludere perchè relativa alle altre due corde principali di C_4 e quanto all'altra:

$$(\alpha^4 + 1)h + 12\alpha^2 = 0,$$

resa omogenea, diviene $\lambda^4 + \mu^4 + \frac{12}{h}\alpha^2 = 0$. Essa è anche da scartare perchè conduce al gruppo piano (n° 15) e quindi, anche in questo caso, non si può parlare di tetraedro sizigetico. Non rimane quindi altro che:

$$h(h^2 - 36) = 0$$

ma in tal caso la C_4 è armonica e sarà considerata a parte (Cap. V°). La discussione è quindi esaurita.

CAPITOLO III.

Quadriche notevoli individuate da C_4 .

26. Esistono alcune quadriche collegate alla curva C_4 da notevoli proprietà che ci proponiamo adesso di esaminare.

La più importante è quella che passa per C_4 . Per trovarne la equazione, il modo più semplice è di riguardarla come generata dalle trisecanti di C_4 (n° 17).

Consideriamo perciò tre punti di C_4 allineati corrispondenti ai valori di $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ del parametro α disteso sulla curva. Avremo dunque (n° 16):

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = \frac{h}{6} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \quad \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 = \frac{6}{h}.$$

Poniamo adesso $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta$ e indichiamo con γ il valore del parametro inerente a un punto qualsiasi di C_4 . Potremo quindi scrivere

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \gamma = \beta + \gamma. \quad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \gamma = \frac{h \beta \gamma}{6},$$

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \gamma (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1) = \frac{h \beta}{6} + \frac{6 \gamma}{h} = \frac{h^2 \beta + 36 \gamma}{6 h}$$

Ora $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma$, sono i valori del parametro inerenti a quattro punti di C_4 in un piano (perchè i primi tre sono allineati). Quindi le

coordinate u_i di tale piano si otterranno dalle (1) del n° 13 (e mediante le precedenti formule) nel seguente modo:

$$\begin{aligned} u_1 &= 4 a b \{ 6 h a^4 - b^4 h^2 \beta \gamma \} + \{ b^2 (h^2 \beta + 36 \gamma) - 6 h a^2 (\beta + \gamma) \} (a^4 + b^4), \\ u_2 &= 4 a b \{ 6 h a^4 - b^4 h^2 \beta \gamma \} - \{ b^2 (h^2 \beta + 36 \gamma) - 6 h a^2 (\beta + \gamma) \} (a^4 + b^4), \\ u_3 &= 4 a b \{ a^4 h^2 \beta \gamma - 6 h b^4 \} + \{ 6 h b^2 (\beta + \gamma) - a^2 (h^2 \beta + 36 \gamma) \} (a^4 + b^4), \\ u_4 &= 4 a b \{ a^4 h^2 \beta \gamma - 6 h b^4 \} - \{ 6 h b^2 (\beta + \gamma) - a^2 (h^2 \beta + 36 \gamma) \} (a^4 + b^4). \end{aligned}$$

Esse dunque dànno le coordinate di un piano passante per una trisecante generica di C_4 espresse in funzioni razionali intere di 2° grado (non omogenee) nei due parametri β e γ e quindi costituiscono una rappresentazione parametrica, quale involuppo, della quadrica cercata. In coordinate di punto essa è:

$$H \equiv \{ 5 (h^2 - 4) \Sigma x_i^2 + 2 (52 - 5 h^2) (x_1 x_2 + x_3 x_4) + (h - 2) (h^2 + 14 h - 16) (x_1 x_3 + x_2 x_4) + (h + 2) (-h^2 - 14 h - 16) (x_1 x_4 + x_2 x_3) = 0 \}$$

e rappresenta la quadrica passante per C_4 . Una delle sue serie rigate è formata da trisecanti e l'altra da unisecanti della curva (1).

27. Riprendiamo adesso la (1) del n° 12 che ci dà le intersezioni del piano $u_x = 0$ con C_4 , cioè:

$$(1) \quad m \lambda^4 + n \lambda^3 \mu + p \lambda^2 \mu^2 + q \lambda \mu^3 + r \mu^4 = 0$$

dove i coefficienti sono indicati dalle (2) di quel medesimo n° con la condizione:

$$(2) \quad 6(m + r) - h p = 0.$$

Calcolando la Hessiana della (1) precedente e indicando con m' , r' , p' , i coefficienti relativi corrispondenti ad m , r , p della (1) si trova:

$$m' = 3(8 m p - 3 n^2), \quad r' = 3(8 r p - 3 q^2), \quad p' = 6(24 m r + 3 n q - 2 p^2).$$

Ebbene, si domanda che cosa accade se anche, per questa Hessiana, è soddisfatta la relazione analoga alle (2) ossia:

$$6(m' + r') - h p' = 0.$$

Sostituendo i valori trovati dianzi e notando che $m + r = \frac{h p}{6}$ si ottiene:

$$2 p^2 h - 3(n + q)^2 - 8 h m r + n q(6 - h) = 0.$$

In questa poniamo i valori di m , n , p , q , r , dati dalle (2) del n° 12 e osserviamo che si ha:

(1) GERBALDI, loc. cit. 3), pag. 52.

$$\frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} = h, \quad \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}\right)^2 = h + 2, \quad \frac{a^8 + b^8}{a^4 b^3} = h^2 - 2.$$

Si trova così:

$$32h(u_1 u_2 + u_3 u_4) + (h-2)^2(h+6)(u_1 u_3 + u_2 u_4) + (h+2)^2(h-6)(u_2 u_3 + u_1 u_4) = 0$$

che rappresenta una quadrica involuppo iscritta nel tetraedro iperosculante. In coordinate di punto la sua equazione diviene:

$$M \equiv \{4(4-h^2) \sum x_i^2 + 8(h^2+4)(x_1 x_2 + x_3 x_4) + (h-2)(h^2+4h+20)(x_1 x_3 + x_2 x_4) + (h+2)(-h^2+4h-20)(x_1 x_4 + x_2 x_3) = 0\}$$

Per dichiararne la proprietà caratteristica chiameremo (brevemente) Hessiano di un piano, il gruppo Hessiano del gruppo dei quattro punti in cui il piano taglia C_4 .

Allora, dallo sviluppo precedente e dal n° 12 risulta che:

« *L'involuppo dei piani il cui Hessiano è piano è la precedente quadrica M. Essa è iscritta nel tetraedro iperosculante e anche nella sviluppabile bitangente di C_4* » (perchè l'Hessiano di un gruppo doppio è se stesso). Riguardata come luogo di punti, si vede pure che « *contiene le quattro tangenti a C_4 nei quattro punti iperosculati* ». Infatti, per ciascuna, passano tre piani dell'involuppo dianzi considerato e cioè il piano iperosculante e i due individuati dalle due tangenti di C_4 che si appoggiano alla tangente in parola (n° 15).

Siccome l'involuppo è una quadrica, così per tale retta passeranno infiniti piani dell'involuppo medesimo, cioè la retta in discorso apparterrà alla quadrica. « *Essa è dunque la M di BERZOLARI (1)* ».

28. Dalla stessa equazione (1) del n° precedente hanno origine i due problemi (già notoriamente risolti) inerenti agli involuppi dei piani che segano C_4 in gruppi armonici, od equianarmenici. Cominciando da quest'ultimo, per risolverlo, basterà annullare l'invariante i (2) della equazione sopra-indicata pervenendo così alla seguente quadrica involuppo (iscritta anche questa nel tetraedro iperosculante):

$$(u_1 u_3 + u_2 u_4)(h-2)^2 + (u_1 u_4 + u_2 u_3)(h+2)^2 + 16(u_1 u_2 + u_3 u_4) = 0.$$

Qualunque piano passante per una generatrice di questa quadrica, appartenendo all'involuppo, taglia C_4 secondo un gruppo di punti per i quali è nullo l'invariante i : dunque fra questi infiniti piani ve ne saranno tre per cui è nullo anche l'invariante cubico j (3).

(1) BERZOLARI, loc. cit. 1), pag. 127.

(2) Vedi ad es. CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorlesungen über Geometrie* (Leipzig, Teubner), T. I, pp. 284-297.

(3) Vedi ad es. CLEBSCH-LINDEMANN, l. c. 20), pp. 285-297-299.

Ma se una binaria biquadratica ha nulli contemporaneamente i due invarianti i e j essa ha un punto triplo (1) cioè i tre piani suddetti sono osculatori di C_4 , Quindi « la quadrica precedente è anche il luogo delle rette per ciascuna delle quali si possono condurre tre piani osculatori alla curva C_4 (ossia è la E di BERZOLARI) (2) ».

In coordinate di punto l'equazione è :

$$E \equiv \{(h^2 - 4) \sum x_i^2 - 2(h^2 + 28)(x_1 x_2 + x_3 x_4) + (2-h)(h^2 - 2h + 8)(x_1 x_3 + x_2 x_4) + (h+2)(h^2 + 2h + 8)(x_1 x_4 + x_2 x_3) = 0\}.$$

Quanto ai piani seganti C_4 in gruppi armonici, è ben noto che essi involuppano la superficie di STEINER (3).

La conferma si ottiene molto semplicemente annullando l'invariante j della solita equazione (1) del n° 27 e pervenendo così alla $\sum u_i u_h u_k = 0$ che rappresenta la superficie di STEINER in coordinate di piani.

Dalla circostanza dianzi ricordata che cioè una binaria biquadratica che ha nulli gli invarianti i e j possiede un punto triplo, ne segue che:

« La sviluppabile osculatrice di C_4 (che come si sa è di 6^a classe) è quella comune alla quadrica E e alla superficie di STEINER ».

29. Le altre due quadriche da segnalare sono le seguenti.

Una è il cono (già incontrato al n° 20) involuppo del piano che passa per un punto generico di C_4 e per i suoi tre osculati. Il suo vertice coincide con quello del triedro principale di C_4 e, in coordinate di punto, la sua equazione è la seguente :

$$Q \equiv \{3(h^2 - 4) \sum x_i^2 - 2(20 + 3h^2)(x_1 x_2 + x_3 x_4) + (2-h)(h^2 + 2h + 16)(x_1 x_3 + x_2 x_4) + (h+2)(h^2 - 2h + 16)(x_1 x_4 + x_2 x_3) = 0\}.$$

È il cono Q di BERZOLARI (4).

L'esistenza dell'altra dipende dalle seguenti considerazioni. Le formole del n° 8 rappresentano, al variare di h , $\infty^1 C_4$ che sono tutte iperoscolate dai quattro piani fondamentali. Ebbene: « in ciascuno di essi il luogo dei punti iperoscolati è una conica. Le quattro coniche che così si ottengono appartengono ad una stessa quadrica che è quella di cui si tratta ». Infatti, dalle indicate formole del n° 8, si vede che il punto C_4 iperoscolato da $x_4 = 0$, si ottiene per $\lambda = a$, $\mu = b$ e quindi le sue coordinate, in $x_4 = 0$, sono :

$$(a^2 + b^2)^4, \quad (a^2 - b^2)^4, \quad 16 a^4 b^4.$$

(1) Loc. cit. 21).

(2) BERZOLARI, loc. cit. 1), pag. 127.

(3) E. BERTINI, *Dimostrazione di un teorema relativo alla quartica gobba di 2^a specie* [Bollettino della Unione Matematica Italiana, Febbraio 1923, pag. 1].

(4) BERZOLARI, loc. cit. 1), pag. 127.

Dividendo tutto per $a^4 b^4$ e osservando che si ha:

$$\frac{(a^2 + b^2)^4}{a^4 b^4} = (h + 2)^2, \quad \frac{(a^2 - b^2)^4}{a^4 b^4} = (h - 2)^2,$$

si vede che, per le coordinate in parola, si può prendere:

$$(h + 2)^2, \quad (h - 2)^2, \quad 16$$

e allora è ovvio constatare che esse soddisfano la equazione:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1 = 0$$

che è indipendente da h e rappresenta una conica in $x_4 = 0$. Analogamente si trovano le altre tre coniche negli altri tre piani fondamentali. Allora la quadrica che contiene tali quattro coniche è manifestamente la seguente:

$$T \equiv |\sum x_i^2 - 2 \sum x_i x_k = 0|, \quad i, k = 1, 2, 3, 4$$

ed è quella cercata [la T di BERZOLARI (1)].

30. Ricorrendo alla trasformazione di coordinate, indicata nel n° 2, l'equazioni dianzi trovate si semplificano così:

$$H \equiv |16h^2 y_1^2 - (h+2)(h-6)^2 y_2^2 + (h-2)(h+6)^2 y_3^2 + 16(4-h^2) y_4^2 = 0|,$$

$$M \equiv |2(36-h^2) y_1^2 - h(h+6)(h+2) y_2^2 + h(h-6)(h-2) y_3^2 + 2(h^2-4) y_4^2 = 0|,$$

$$E \equiv |(h^2+12)[-4y_1^2 + (h+2)y_2^2 + (2-h)y_3^2] + 4(h^2-4)y_4^2 = 0|,$$

$$Q \equiv |-64y_1^2 + (h+2)^3 y_2^2 + (2-h)^3 y_3^2 = 0|,$$

$$T \equiv |y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 = 0|.$$

Ora esse sono riferite al tetraedro principale comune a tutte le $\infty^1 C_4$ che si ottengono al variare del parametro h (n° 8).

Questo tetraedro è autoconiugato rispetto a tutte [ad eccezione, a rigor di termini, per Q che, essendo un cono col vertice in (0001), ha indeterminato il piano polare del vertice].

È anche facile constatare le seguenti identità:

$$H - M = 18(h^2 - 4)T,$$

$$H + E = 12(h^2 - 4)T,$$

$$H + Q = 16(h^2 - 4)T.$$

In conclusione dunque:

(1) BERZOLARI, loc. cit. (1), pag. 27.

(2) BERZOLARI, loc. cit. (1), pp. 26-27.

« Le cinque quadriche, H , M , E , Q , T , appartengono ad un medesimo fascio (2) di superficie autoconiugate rispetto al tetraedro principale della curva C_4 la quale viene così a individuare la quartica di prima specie base del fascio ».

È da notare che, variando il parametro h , varia C_4 , ma non il tetraedro principale, variano anche le prime quattro delle quadriche sopra indicate e descrivono ciascuna una serie cubica. Invece non varia la rimanente quadrica T (che è indipendente da h) e che si può quindi riguardare come il luogo geometrico delle infinite quartiche di 1^a specie basi degli infiniti fasci suddetti (variabili anche questi al variare di h).

CAPITOLO IV.

La C_4 in relazione alla superficie di STEINER.

31. Riprendiamo la rappresentazione parametrica della nostra curva C_4 mediante le formole del n.º 8 :

$$(1) \quad x_1 = (a\lambda + b\mu)^4, \quad x_2 = (a\lambda - b\mu)^4, \quad x_3 = (b\lambda + a\mu)^4, \quad x_4 = (b\lambda - a\mu)^4.$$

È ovvio adesso verificare che la C_4 esiste sulla superficie di STEINER rappresentata dalla (1) del n. 1 cioè da :

$$(2) \quad \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4} = 0$$

purchè i segni dei radicali vengano presi in modo opportuno (ad es. positivi il 1º e il 4º e negativi il 2º e il 3º).

Dopo di che si può intendere che la verifica sia anche fatta sulla equivalente della (2) precedente data in forma razionale che è la (2) del n.º 2.

Ora si tenga presente che il parametro disteso sopra C^4 è $\frac{\lambda}{\mu}$.

Quindi, per ogni valore di $\frac{a}{b}$ si ottiene una C_4 esistente sopra la stessa superficie di STEINER (giacchè la (2) è indipendente da $\frac{a}{b}$).

« Ciascuna di tali C_4 è asintotica per la superficie di STEINER ». Infatti il piano tangente, in un punto P generico della superficie, la taglia in due coniche passanti per P ed in P deve essere osculatore alle due asintotiche della superficie che s'incrociano ivi. Ora la conica osculante, in un punto di una curva gobba, è contenuta nel piano osculatore ivi alla curva (1): quindi le due coniche dianzi indicate saranno le osculanti

(1) BERZOLARI, loc. cit., pag. 134.

in P alle due asintotiche uscenti da P . Dunque per dimostrare che C_4 è asintotica, basterà prendere la conica osculante di C_4 in un suo punto generico P e far vedere che essa appartiene alla superficie. Tale conica si può rappresentare parametricamente così (1):

$$\begin{aligned} x_1 &= (a\lambda_1 + b\mu_1)^2 (a\lambda + b\mu)^2, & x_2 &= (a\lambda_1 - b\mu_1)^2 (a\lambda - b\mu)^2, \\ x_3 &= (b\lambda_1 + a\mu_1)^2 (b\lambda + a\mu)^2, & x_4 &= (b\lambda_1 - a\mu_1)^2 (b\lambda - a\mu)^2, \end{aligned}$$

dove è da ricordare che $\frac{\lambda}{\mu}$ è il parametro disteso sulla curva C_4 e

$\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ è quel valore di esso che individua il punto P di tal curva. Ebbene

sostituendo questi valori di x_i , nella (2) precedente, si vede subito che essa è soddisfatta indipendentemente da $\frac{\lambda}{\mu}$, $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ purchè i segni dei radicali sieno presi in modo opportuno (ad es. come dianzi, positivi il 1° e il 4° e negativi il 2° e il 3°), dopo di che la verifica può intendersi fatta anche sopra la equivalente (2) del n° 2 che ha forma razionale.

« Tutte queste ∞' C_4 hanno in comune il tetraedro iperosculante e il tetraedro principale che sono rispettivamente il tetraedro doppio e quello singolare della superficie di STEINER di cui le ∞' C_4 sono asintotiche ».

32. Abbiamo già osservato che H è la quadrica passante per C_4 (n° 26). In tal guisa H e la superficie di STEINER (avendo in comune la C_4) si taglieranno, ulteriormente, in un'altra curva di 4° ordine C'_4 che adesso vogliamo rappresentare parametricamente. Anzitutto anche C'_4 sarà razionale (2), inoltre, esistendo sopra la superficie di STEINER, sarà bitangente ai suoi piani doppi, di guisa che la sua rappresentazione parametrica sarà del tipo:

$$x_i = (m\lambda^2 + n\lambda\mu + p\mu^2)^2,$$

Inoltre, siccome le tre involuzioni gobbe (2) del n° 10 trasformano in se stesse la superficie di STEINER, la quadrica H e la curva C_4 , così trasformeranno in se stessa anche C'_4 subordinando, sopra di essa, tre involuzioni binarie che sarà sempre lecito rappresentare con le (1) del n° 10. E così la rappresentazione parametrica di C'_4 potrà assumersi nel seguente modo:

$$\begin{aligned} x_1 &= (m\lambda_2 + n\lambda\mu + p\mu^2)^2, & x_2 &= (m\lambda^2 - n\lambda\mu + p\mu^2)^2, \\ x_3 &= (p\lambda^2 + n\lambda\mu + m\mu^2)^2, & x_4 &= (p\lambda^2 - n\lambda\mu + m\mu^2)^2. \end{aligned}$$

(1) BERZOLARI, loc. cit. p. 134.

(2) L. CREMONA, *Intorno alla curva gobba del quart'ordine per la quale passa una sola superficie di secondo grado* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, t. IV, pp. 71-101].

È ovvio adesso constatare che i valori precedenti delle x_i verificano la equazione della superficie di STEINER nella solita forma (1) del n° 1 (purchè si scelgano i segni dei radicali nel solito modo: positivi il 1° e il 4°, negativi i due rimanenti). Dopo di ciò, per determinare i valori ancora sconosciuti di m, n, p , basta esigere che le x_i precedenti soddisfino all'equazione della quadrica H del n° 26 indipendentemente da λ e μ .

Scartando alcune soluzioni che saranno considerate a parte (Cap. V° e VI°), dopo un calcolo alquanto laborioso, ma non difficile, si trova:

$$m = 2 a^3 b, \quad n = a^4 - b^4, \quad p = -2 a b^3.$$

Si ha quindi per C'_4 la seguente e definitiva rappresentazione parametrica:

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = \{2 a^3 b \lambda^2 + (a^4 - b^4) \lambda \mu - 2 a b^3 \mu^2\}^2, \\ x_2 = \{2 a^3 b \lambda^2 - (a^4 - b^4) \lambda \mu - 2 a b^3 \mu^2\}^2, \\ x_3 = \{2 a^3 b \mu^2 + (a^4 - b^4) \lambda \mu - 2 a b^3 \lambda^2\}^2, \\ x_4 = \{2 a^3 b \mu^2 - (a^4 - b^4) \lambda \mu - 2 a b^3 \lambda^2\}^2, \end{cases}$$

Noi chiameremo la C'_4 (così individuata) la « *complementare di C_4* ». Riguardo alla superficie di STEINER, C'_4 non è asintotica perchè i piani doppi della superficie (che sono adesso i piani di riferimento) non sono iperosculanti della curva ma soltanto bitangenti.

In conclusione :

« *L'equazione $H = 0$ del n° 26 (o la sua equivalente del n° 30) rappresenta, al variare del parametro h , una serie ∞^1 (cubica) di quadriche ciascuna delle quali taglia la superficie di STEINER secondo due quartiche di cui una è asintotica della superficie e l'altra no. Le infinite quartiche a cui così si perviene hanno in comune il tetraedro principale che è il tetraedro singolare della superficie di STEINER* ».

33. Vogliamo adesso considerare alcuni casi particolari notevoli che possono presentare le asintotiche suddette. Ricordando (n° 8) che la binaria biquadratica che rappresenta i quattro punti iperosculati di C_4 è:

$$\lambda^4 + \mu^4 - h \lambda^2 \mu^2 = 0$$

si vede che essa è armonica quando $h(h^2 - 36) = 0$ e che è equianarmonica per $h^2 + 12 = 0$ (1). Dunque se si chiama armonica, od equianarmonica, una C_4 quando tale sia la quaterna dei punti iperosculati si può dire che:

« *Fra le asintotiche della superficie di STEINER ve ne sono tre armoniche e due equianarmoniche* ».

(1) CLEBSCH-LINDEMANN, loc. cit. (20), pp. 297-298.

Questi casi speciali saranno studiati a parte nei Cap. V° e VI°).

Vediamo se, fra le asintotiche suddette, ve ne siano di riduttibili. È intanto evidente che se di una tale C_4 fa parte una conica, la C'_4 complementare è la conica stessa ossia C_4 è costituito da una delle quattro coniche di contatto dei piani doppi (contata due volte).

Se invece di C_4 fa parte una retta, questa sarà necessariamente una delle tre rette doppie della superficie. Allora esigendo che la quadrica H passi per una tal retta si vede, dalla relativa equazione del n° 30, che si è condotti ai seguenti casi:

per $h = 2$,	H si riduce alla coppia di piani	$y_1^2 - y_2^2 = 0$
» $h = -2$,	» » » » » » »	$y_1^2 - y_3^2 = 0$
» $h = \infty$	» » » » » » »	$y_2^2 - y_3^2 = 0.$

In ciascuno di questi casi la nostra C_4 si compone di una retta doppia della superficie (che deve esser contata quattro volte perchè doppia per H e per la superficie di STEINER). La C'_4 complementare, allora, viene quindi a essere costituita dalle « due coniche complementari » appoggiate a tale retta (e questo giustifica la relativa denominazione introdotta nel n° 4).

34. L'equazione della quadrica, data nel n° 30, dimostra facilmente il passaggio di tale superficie (indipendentemente dal parametra h) per gli otto punti seguenti (1)

$$(2, 2, 2, 3); \quad (2, -2, -2, 3); \quad (-2, 2 - 2, 3); \quad (-2, -2, 2, 3)$$

$$(2, 2, 2, -3); \quad (2, -2, -2, -3); \quad (-2, 2, -2, -3); \quad (-2, -2, 2, -3)$$

I primi quattro sono i vertici del tetraedro complementare (n° 4), i secondi corrispondono ai primi nella omologia armonica che ha per centro il punto triplo e per piano fondamentale la faccia opposta nel tetraedro, singolare della superficie di STEINER (n° 1).

Si può dunque presumere che tutte le C'_4 complementari passino per i vertici del tetraedro suddetto.

La conferma di questa presunzione si raggiunge osservando che se, nella rappresentazione della C'_4 mediante le (1) del n° 32, si fa $\lambda = a$, $\mu = b$, si trova il punto (9, 1, 1, 1) dopo di che le tre involuzioni gobbe del n° 10, spettanti anche alle C'_4 , provano il passaggio anche per gli altre tre punti:

$$(1, 9, 1, 1); \quad (1, 1, 9, 1); \quad (1, 1, 1, 9);$$

i quali, insieme al primo, non sono altro che i vertici del tetraedro com-

(1) GERBALDI, loc. cit. (2), pag. 54.

plementare nel sistema di coordinate x_i del n° 1. Dunque:

« *Sopra la superficie di STEINER tutte le quartiche complementari delle asintotiche passano per quattro punti che sono i vertici del tetraedro complementare* » (onde il nome n° 4).

35. Se si assume come tetraedro fondamentale il tetraedro singolare della superficie di STEINER (passando dalle x_i alle y_i come nel n° 2) le rappresentazioni parametriche di C_4 e C'_4 divengono rispettivamente le seguenti:

$$(1) \quad \begin{cases} y_1 = (a^4 - b^4)(\lambda^4 - \mu^4), \\ y_2 = 4 a b (a^2 - b^2) \lambda \mu (\lambda^2 - \mu^2), \\ y_3 = 4 a b (a^2 + b^2) \lambda \mu (\lambda^2 + \mu^2), \\ y_4 = (a^4 + b^4)(\lambda^4 + \mu^4) + 12 a^2 b^2 \lambda^2 \mu^2. \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} y_1 = (m^2 - p^2)(\lambda^4 - \mu^4), \\ y_2 = 2n(m - p) \lambda \mu (\lambda^2 - \mu^2), \\ y_3 = 2n(m + p) \lambda \mu (\lambda^2 + \mu^2), \\ y_4 = (m^2 + p) (\lambda^4 + \mu^4) + 2(n^2 + mp) \lambda^2 \mu^2, \end{cases}$$

dove $m = 2 a^3 b$, $n = a^4 - b^4$, $p = -2 a b^3$ come nel n° 32.

Da queste risulta che C_4 e C'_4 hanno in comune il tetraedro principale e i punti di appoggio con le corde principali.

36. Tutte le superficie di STEINER aventi per tetraedro singolare l'attuale tetraedro fondamentale formano il sistema lineare ∞^3 seguente:

$$(1) \quad \alpha y_2^2 y_3^2 + \beta y_3^2 y_1^2 + \gamma y_1^2 y_2^2 + 2 y_1 y_2 y_3 y_4 = 0$$

per $\alpha = \beta = \gamma = -1$ si ottiene quella di esse sulla quale la C_4 rappresentata dalle (1) del n° precedente è asintotica. Se si esige soltanto che C_4 appartenga alla (1) precedente (senza esigere che sia anche asintotica) si trovano le condizioni:

$$\beta = -\frac{4\alpha + h + 6}{h + 2}, \quad \gamma = \frac{4\alpha - h + 6}{h - 2}.$$

In particolare, per $\alpha = 0$, e quindi:

$$\beta = -\frac{h + 6}{h + 2}, \quad \gamma = \frac{6 - h}{h - 2},$$

risulta che, dalla superficie corrispondente, si stacca y_1 e rimane la superficie cubica:

$$K \equiv \{ (2-h)(h+6)y_3^2 y_1 + (6-h)(h+2)y_2^2 y_1 + 2(h^2 - 4)y_2 y_3 y_4 = 0 \}$$

che è una rigata avente per direttrice doppia la $y_2 = 0, y_3 = 0$ e per direttrice semplice la $y_1 = 0, y_4 = 0$.

Essa può essere generata mediante il movimento della retta che unisce il punto $(1, 0, 0, p)$, della direttrice doppia, col punto $(0, 1, q, 0)$ della semplice purchè i due parametri p e q sieno vincolati dalla relazione:

$$(2 - h)(h + 6)q^2 + (6 - h)(h + 2) + 2(h^2 - 4)pq = 0.$$

In tal caso la quadrica H (n. 30) e la rigata cubica K si tagliano lungo la C_4 e residualmente secondo due rette (1) le quali possono rappresentarsi in forma parametrica (λ) così:

$$\left\{ \pm \lambda (h + 6) \sqrt{h^2 - 4}, \quad \pm (h + 6) \sqrt{h^2 - 4}, \quad (h - 6)(h + 2), \quad \lambda h (h + 6) \right\}.$$

37. Cerchiamo infine la binaria biquadratica che rappresenta i quattro punti iperosculati di C'_4 .

A tale scopo riprendiamo le (1) del n° 32 rappresentanti C'_4 e osserviamo che la binaria biquadratica dei quattro punti d'intersezione di C'_4 con un piano generico $u_x = 0$ è:

$$\begin{aligned} \lambda_4 \{ m^2 (u_1 + u_2) + p^2 (u_3 + u_4) \} + \lambda^3 \mu \cdot 2n \{ m (u_1 - u_2^2) + p (u_3 - u_4) \} + \\ + \lambda^2 \mu^2 \{ n^2 + 2 p m \} \Sigma u_i + \lambda \mu^3 \cdot 2n \{ p (u_1 - u_2) + m (u_3 - u_4) \} + \\ + \mu^4 \{ p^2 (u_1 + u_2) + m^2 (u_3 + u_4) \} = 0 \end{aligned}$$

dove m, n, p hanno i valori indicati al n° 32.

Ora, indicando con m', n', p', q', r' , ordinatamente i coefficienti della precedente binaria, risulta che si ha:

$$(m' + r')(n^2 + 2mp) - p'(m^2 + p^2) = 0.$$

Sostituendo per m, n, p , i valori suddetti (n° 32) e dividendo per m' si trova

$$\left(1 + \frac{r'}{m} \right) (12 - h^2) + 4h \frac{p'}{m'} = 0.$$

Se dunque si indicano con $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4$ i valori del parametro $\frac{\lambda}{\mu}$ (disteso su C'_4) individuanti i quattro punti in cui C'_4 incontra il piano $u_x = 0$, si ottiene:

$$(1 + \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4) (12 - h^2) + 4h \Sigma \beta_i \beta_k = 0$$

che apparisce quindi quale condizione necessaria affinchè quattro punti di

(1) CREMONA, loc. cit. (29), pp. 293-294.

C_4 siano complanari. Dopo di che un ragionamento analogo a quello del n° 13, dimostra che essa è anche sufficiente.

Per $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$ si ha la condizione affinchè il piano sia iperosculante. Ripassando a forma omogenea si trae che:

$$\lambda^4 + \mu^4 + \frac{24h}{12 - h^2} \lambda^2 \mu^2 = 0$$

è la binaria biquadratica che individua i quattro punti iperosculati di C'_4 (cioè la forma cercata (1)).

CAPITOLO V.

Il caso armonico.

38. Molte delle proprietà segnalate finora, per una C_4 generica, acquistano particolare interesse se la C_4 è armonica, se cioè è armonica la binaria biquadratica che rappresenta i quattro punti iperosculati, in guisa che essi si distribuiscono in due coppie armoniche fra loro. La condizione analitica corrispondente (già indicata al n° 33) è $h(h^2 - 36) = 0$ e quindi, $h = 0$, oppure $h = \pm 6$. Ora, scegliere la soluzione $b = 0$ (piuttosto che le altre due), non vuol dire altro che assumere come coppia fondamentale $\lambda\mu = 0$ (sopra C_4) la coppia armonica alle due sopra indicate.

Avremo dunque la solita rappresentazione parametrica del n° 8:

$x_1 = (a\lambda + b\mu)^4$, $x_2 = (a\lambda - b\mu)^4$, $x_3 = (b\lambda + a\mu)^4$, $x_4 = (b\lambda - a\mu)^4$
con $h = 0$, cioè $a^4 + b^4 = 0$. Segue subito che, in questa ipotesi, i due punti

$$P \equiv (b^4, b^4, a^4, a^4), \quad P' \equiv (a^4, a^4, b^4, b^4),$$

individuati da $\lambda = 0$, e da $\mu = 0$ coincidono in uno solo le cui coordinate assumeremo così:

$$(1, 1, -1, -1).$$

Dunque questo punto è doppio per C_4 e (più precisamente) è un nodo essendo $\lambda = 0$, $\mu = 0$, i valori che individuano i due rami della C_4 che s'incrociano nel nodo.

Viceversa: se si esige che C_4 abbia un nodo ne segue che essa è armonica. (Se mai l'unica condizione restrittiva è che i quattro piani iperosculanti sieno distinti). Infatti le tre involuzioni binarie, su di essa,

(1) ARMENANTE, loc. cit. (13), I^a Memoria, pag. 221.

subordinate alle tre involuzioni gobbe possedute da C_4 (n° 10), debbono trasformare in se stessa la coppia dei valori del parametro (disteso su C_4) che individua i due rami passanti pel supposto nodo. Dunque la coppia in parola sarà una di quelle che compongono il covariante sestico della forma rappresentante i quattro punti iperosculati. Assumendo questa coppia come $\lambda\mu = 0$, i punti di C_4 che essa individua (nella solita rappresentazione parametrica del n° 8) saranno quindi:

$$P \equiv (b^4, b^4, a^4, a^4), \quad P' \equiv (a^4, a^4, b^4, b^4).$$

Se dunque si esige che P e P' coincidano, secondo la ipotesi fatta, occorre che si abbia:

$$\frac{b^4}{a^4} = \frac{a^4}{b^4}, \quad \text{cioè} \quad (a^4 - b^4)(a^4 + b^4) = 0$$

ma per $a^4 = b^4$ si ha $h = 2$, caso escluso al n° 8, rimane $a^4 + b^4 = 0$, ossia $h = 0$, il che significa che C_4 è armonica (n° 33).

Dunque: « Per una C_4 irriducibile le due condizioni di avere un punto doppio (nodo), o di essere armonica sono equivalenti. La coppia dei valori del parametro individuante i due rami passanti pel nodo, è quella armonica alle due coppie (a loro volta armoniche fra di loro) costituenti i quattro punti iperosculati ».

39. Nel caso attuale, conviene spesso sostituire alla considerazione dell'involuzione sizigetica (n° 9) l'altra più semplice dell'involuzione quadrica ordinaria costituita dalle infinite coppie di punti armoniche rispetto a quella che individua i due rami di C_4 passanti pel nodo.

Essa può rappresentarsi con la sostituzione:

$$\begin{Bmatrix} \lambda & -\mu \\ \lambda & \mu \end{Bmatrix}$$

essendo $\lambda = 0$, $\mu = 0$, la coppia nodale. È anche da osservare che questa coppia $\lambda\mu = 0$ del covariante sestico:

$$\lambda\mu(\lambda^4 - \mu^4) = 0$$

è in condizioni dissimmetriche rispetto alle altre due $\lambda^2 \pm \mu^2 = 0$, giacchè essa separa armonicamente le due copie (armoniche a loro volta) di punti iperosculati, il che non può dirsi per alcuna delle altre due rimanenti. Noi chiameremo « fondamentale » la involuzione quadrica in discorso.

È poi manifesto che ogni gruppo sizigetico (n° 9) è formato da due coppie dell'involuzione fondamentale. Però, non viceversa. Affinchè due coppie dell'involuzione fondamentale formino un gruppo sizigetico è ne-

cessaria una condizione che, nella sua forma più espressiva sarà indicata, al n° 46.

40. Poichè la quaterna dei punti iperosculati (sopra C_4) è armonica, il gruppo di proiettività binarie, rispetto al quale essa è invariante, è dell'8° ordine (1) e si può ottenere aggiungendo al gruppo quadrinomio G_4^I del n° 10 le seguenti proiettività:

$$\left\{ \begin{array}{cc} \pm i\lambda & \mu \\ & \lambda \mu \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{cc} \pm i\mu & \lambda \\ & \lambda \mu \end{array} \right\}.$$

Naturalmente la involuzione fondamentale è invariante rispetto al gruppo così ottenuto.

Per determinare le collineazioni quaternarie, generate dalle (1) precedenti, si osservi che valendosi della solita rappresentazione parametrica del n° 8, si può prendere, nel caso attuale:

$$a = 1 + i, \quad b = \sqrt{2},$$

dopo di che è facile constatare che la

$$\left\{ \begin{array}{cc} i\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{array} \right\} \quad \text{genera la} \quad (x_1 x_4 x_2 x_3)$$

da cui segue che l'altra:

$$\left\{ \begin{array}{cc} -i\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} i\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{array} \right\}^3 \quad \text{genera la} \quad (x_1 x_3 x_2 x_4)$$

e analogamente:

$$\left\{ \begin{array}{cc} i\lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} i\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cc} \mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{array} \right\} \quad \text{genera la} \quad (x_1 x_4 x_2 x_3) (x_1 x_3) (x_2 x_4) = (x_1 x_2)$$

$$\left\{ \begin{array}{cc} -i\mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} -i\lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cc} \mu & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{array} \right\} \quad \text{genera la} \quad (x_1 x_3 x_2 x_4) (x_1 x_3) (x_2 x_4) = (x_3 x_4).$$

Vengono così ad aggiungersi al G_4^I , del caso generico, dianzi ricordato, queste quattro nuove collineazioni e in tal guisa si perviene al gruppo quaternario di ottavo ordine G_8^I spettante alla C_4 armonica. Esso appartiene, come sottogruppo, ad uno dei cinque gruppi ottaedrici (proiettivamente distinti) di collineazione spaziali (2).

41. Ecco le proprietà caratteristiche che lo collegano alla C_4 armonica.

(1) Vedi ad es. F. ENRIQUES - O. CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni algebriche*, Bologna Zanichelli, T. I, pag. 25.

(2) Vedi la mia memoria già citata (7).

Anzitutto acquista adesso particolare interesse una delle tre involuzioni gobbe del sottogruppo quadrimio (n° 10).

È la $(x_1 x_2) (x_3 x_4)$ che subordina, sopra C_4 , la involuzione fondamentale ed è quindi invariante rispetto al G_8^I attuale.

Ricorrendo alle notazioni del n° 10 con le quali si indicarono con A, B, C, D , i vertici del tetraedro principale della curva, si vede che il nodo è in B e che gli assi della involuzione in parola sono AB e CD . Ma la retta AB non può chiamarsi corda di C_4 perchè i suoi estremi coincidono, ma può ancora riguardarsi come intersezione dei piani osculatori in essi (ai due rami di C_4 che s'incrociano nel modo). Dunque:

« Nel caso attuale, le corde principali vere e proprie si riducono a due (1); la terza è sostituita dalla retta che unisce il nodo della curva al punto comune alle prime due ed è la intersezione dei piani osculatori, ai due rami di C_4 , passanti pel nodo ».

Le collineazioni quaternarie che vengono ad aggiungersi in questo caso al G_4^I sono dunque le seguenti (n° precedente):

$$(a_1 x_2), \quad (x_3 x_4), \quad (x_1 x_4 x_2 x_3), \quad (x_1 x_3 x_2 x_4).$$

Le prime due sono omologie armoniche con i centri rispettivi:

$$H \equiv (1, -1, 0, 0); \quad K \equiv (0, 0, 1, -1)$$

e con i piani fondamentali:

$$x_1 - x_2 = 0; \quad x_3 - x_4 = 0.$$

Le due rimanenti sono inverse l'una dell'altra, hanno il periodo quattro, hanno per comune quadrato la involuzione gobba invariante $(x_1 x_2) (x_3 x_4)$ e hanno anche in comune i quattro punti uniti seguenti:

$$(1, 1, 1, 1); \quad (1, 1, -1, -1); \quad (i, -i, -1, 1); \quad (-i, i, -1, 1)$$

Ecco come si collegano questi elementi uniti col tetraedro principale $ABCD$. I centri di omologia H e K sono i punti di appoggio dello spigolo CD con gli spigoli opposti $(x_1 = 0, x_2 = 0)$, $(x_3 = 0, x_4 = 0)$ del tetraedro iperosculante, i piani fondamentali sono quelli dei triangoli ABK , ABH in guisa dunque che il piano fondamentale dell'una omologia passa per il centro dell'altra. I quattro punti delle due rimanenti collineazioni sono costituiti dal vertice A del triedro principale, dal nodo B e da quella coppia, sopra lo spigolo CD , che è armonica alla CD e alla HK .

(1) G. LORIA, *Curve sghembe speciali algebriche e trascendenti*. Bologna Zanichelli, Vol. I, pag. 303.

Mettendo tutto questo in relazione con la superficie di STEINER (n° 5, 6, 7) si può dire che:

« Le tre asintotiche armoniche di una superficie di STEINER (n° 33) hanno i nodi in quei tre vertici del tetraedro singolare della superficie che giacciono sulla faccia opposta al punto triplo. Fra le collineazioni che trasformano in se ciascuna di tali asintotiche sono specialmente da notare due omologie armoniche. Si ottengono così le sei omologie armoniche spettanti alla superficie in parola (e già segnalate al n° 6) ».

42. L'esistenza delle due omologie, dianzi indicate, mette in evidenza i due coni quadrici che proiettano la C_4 attuale dai centri d'omologia relativi. Un terzo cono quadrico è, ovviamente, quello che la proietta dal punto doppio. Dunque per C_4 passeranno ∞^1 quadriche. Per trovarle giova valersi dalle (1) del n° 35. Tenendo presente (n° 40) che $a = 1 + i, b = \sqrt{2}$, tali formule divengono:

$$\begin{aligned} y_1 &= \mu^4 - \lambda^4, \\ y_2 &= 2\sqrt{2} \lambda \mu (\mu^2 - \lambda^2), \\ y_3 &= 2i\sqrt{2} \lambda \mu (\mu^2 + \lambda^2), \\ y_4 &= 6i\lambda^2 \mu^2. \end{aligned}$$

Adesso il nodo è in (1000) e i centri di omologia in (0, 1, 1, 0) e (0, 1, -1, 0). Mediante le precedenti è facile vedere che la C_4 è la curva base del fascio di quadriche seguente

$$\alpha \{ 9(y_2^2 + y_3^2) - 8y_4^2 \} + \beta \{ 3y_2y_3 - 4y_1y_4 \} = 0$$

le quali si toccano tutte in (1000) avendo ivi per piano tangente comune $y_4 = 0$. I tre coni del fascio di cui sopra è parola sono i seguenti

$$9(y_2 - y_3)^2 - 8y_4^2 + 24y_1y_4 = 0, \quad (\text{per } \alpha = 1, \beta = -6)$$

$$9(y_2 + y_3)^2 - 8y_4^2 - 24y_1y_4 = 0, \quad (\text{per } \alpha = 1, \beta = 6)$$

$$9(y_2^2 + y_3^2) - 8y_4^2 = 0 \quad (\text{per } \beta = 0).$$

I primi due sono quelli che proiettano C_4 dai centri delle due omologie sopra indicate, il terzo è quello che la proietta dal suo punto doppio e rappresenta adesso la quadrica H del caso generico (n° 30), cioè il luogo delle trisecanti intendendo che ciascuna di esse ha due punti di secanza riuniti nel punto doppio della curva. Le tangenti nodali (contate ciascuna due volte) stanno a rappresentare le quattro tangenti-secanti del caso generico, così come il piano di queste due (che è $y_4 = 0$) contiene l'unico gruppo sizigetico piano (n° 18 e 15).

In conclusione dunque:

« La C_4 armonica è curva-base di un fascio di quadriche che si toccano in un punto (nodo di C_4). Quindi se si chiama, secondo l'uso, quartica di seconda specie quella per la quale passa una sola quadrica, questa qualifica è impropria per una C_4 armonica (pure trattandosi sempre di una curva razionale) ».

43. Quanto alla quadrica M del caso generico, conviene ricorrere alla sua equazione come involuppo (n° 27), la quale nel caso presente di $h = 0$ si riduce a:

$$(u_1 - u_2)(u_3 - u_4) = 0$$

cioè si spezza nei due punti $(1, -1, 0, 0)$; $(0, 0, 1, -1)$ che sono i centri delle due omologie spettanti a C_4 (n° 41).

Quindi la sviluppabile bitangente (che come è noto è di 4ª classe) si spezza nei due coni quadrici che dai centri suddetti proiettano C_4 (n° 27) e così anche le quattro tangenti nei punti iperosculati passano, a due, a due, per tali centri.

Abbiamo esaminato così le particolarità più notevoli delle due quadriche H ed M ; le altre E , Q , T non presentano interesse speciale per la C_4 armonica.

44. Conviene piuttosto osservare come si specializza la condizione affinché quattro punti $a_1 a_2 a_3 a_4$ della curva siano in un piano, cioè la (5) del n° 12. Facendovi $h = 0$ essa diviene:

$$a_1 a_2 a_3 a_4 = -1.$$

Da questa per $a_1 = a_2 = a_3 = a$, $a_4 = a'$ si trova

$$a^3 a' + 1 = 0$$

che vincola il valore a inerente a un punto generico di C_4 a quello a' del suo osculante (n° 19). Ne segue che i quattro osculanti di a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , sono rispettivamente

$$-\frac{1}{a_1^3}, \quad -\frac{1}{a_2^3}, \quad -\frac{1}{a_3^3}, \quad -\frac{1}{a_4^3}.$$

Se quindi:

$$a_1 a_2 a_3 a_4 + 1 = 0$$

sarà anche:

$$\left(-\frac{1}{a_1^3}\right) \left(-\frac{1}{a_2^3}\right) \left(-\frac{1}{a_3^3}\right) \left(-\frac{1}{a_4^3}\right) + 1 = 0.$$

E quindi: « I quattro punti osculanti di quattro punti complanari di una C_4 armonica, sono a loro volta complanari (1) ».

(1) LORIA, loc. cit. (36), Vol. I, pag. 304.

45. Anche la relazione del n° 24 che collega i punti $M \equiv (\alpha)$, $M' (\alpha')$, di cui il secondo è residuo del primo, si semplifica notevolmente riducendosi alla :

$$\alpha + \alpha' = 0$$

il che significa che la coppia MM' , nel caso attuale, appartiene alla involuzione fondamentale e i punti M ed M' sono l'uno il residuo dell'altro. Viceversa, se questa condizione è soddisfatta la C_4 è armonica (n° 25)

Dunque, nel caso attuale, se MM' , NN' , sono due coppie della involuzione fondamentale appartenenti a un medesimo gruppo sizigetico, riprendendo le considerazioni del n° 24, ne viene che il piano dei tre punti $NN'M'$ è tangente in M' a C_4 e il piano $NN'M$ è tangente in M , come anche i piani $MM'N$ $MM'N'$ sono tangenti rispettivamente in N ed N' . Quindi :

« Ogni tetraedro sizigetico di una C_4 armonica è tale che ciascuna faccia è tangente alla curva in un vertice e secante nei tre rimanenti, in guisa che tutte le intersezioni delle facce con la curva sono assorbite dai vertici. Gli spigoli sono altrettante corde, ma nessuno di essi è tangente [perchè le tangenti-secanti sono tutte assorbite dalle tangenti nodali (n° 42)]. Accade dunque che « le tangenti in M ed M' si appoggiano alla retta NN' e viceversa le tangenti in N ed N' si appoggiano alla MM' ».

46. Ora è notevole che basti la esistenza di un tetraedro sizigetico così fatto per affermare che la C_4 è armonica.

Abbiasi infatti un tetraedro sizigetico $MNPQ$ tale che la faccia opposta ad M sia tangente in uno dei tre vertici rimanenti. Sia dunque (n° 24):

$$M \equiv (\alpha), \quad N \equiv (-\alpha), \quad P \equiv \left(\frac{1}{\alpha}\right), \quad Q \equiv \left(-\frac{1}{\alpha}\right)$$

e riprendiamo la (5) del n. 12:

$$(1) \quad 2(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 + 1) - h \sum \alpha_i \alpha_h = 0$$

esprimente la condizione di complanarità per i quattro punti $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$. Se il piano NPQ deve essere tangente a C_4 in N , essa deve essere soddisfatta da :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\alpha, \quad \alpha_3 = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha_4 = -\frac{1}{\alpha}$$

e quindi diviene:

$$h(\alpha^4 - 1) = 0$$

ma per $\alpha^4 - 1 = 0$ si hanno coppie di punti di appoggio di corde principali (n. 10), il che deve escludersi perchè $MNPQ$ vuole essere un vero

e proprio tetraedro (non ridotto a una coppia di punti). Dunque $h = 0$ e C_4 è armonica (n. 48).

Se il piano NPQ deve essere tangente in P , la (1) precedente deve soddisfarsi con:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha_3 = -\alpha, \quad \alpha_4 = -\frac{1}{\alpha},$$

e si trova $h = -6$. Se finalmente il piano in parola deve essere tangente in Q , la (1) medesima deve soddisfarsi con:

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha_3 = -\alpha, \quad \alpha_4 = -\frac{1}{\alpha},$$

e si trova $h = 6$. Ma con $h = \pm 6$ di nuovo C_4 è armonica (n. 38).

La nostra affermazione è così dimostrata. Si può dunque concludere (avendo presente anche la fine del n. 45) che:

« *Sopra una C_4 armonica la condizione necessaria e sufficiente perchè due coppie di punti della involuzione fondamentale compongano un gruppo sizigetico, è che la corda individuata dai punti dell'una coppia si appoggi alle tangenti nei punti individuati dall'altra coppia.* »

47. Passiamo infine a considerare la C'_4 complementare di una C_4 armonica. Si osservi perciò che in generale si ha (n. 32):

$$m^2 + p^2 = 4 a^2 b^2 (a^4 + b^4) = 4 h a^4 b^4.$$

Dunque nel caso attuale, essendo $h = 0$ (n. 38), risulterà

$$m^2 + p^2 = 0.$$

Allora le (2) del n. 35 dimostrano che C'_4 passa due volte per (1000) corrispondentemente ai due valori $\lambda = 0$, $\mu = 0$, cioè (1000) è un nodo anche per C_4 la quale quindi è armonica (n. 38), ma non è asintotica per la superficie di STEINER. Infatti, se lo fosse, le x_i date dalle (1) del n. 32 e che riferiscono C'_4 ai piani doppi della superficie suddetta dovrebbero essere delle quarte potenze. Occorrerebbe dunque che fosse:

$$(a^4 - b^4)^2 + 16 a^4 b^4 = 0$$

cioè:

$$\frac{a^8 + b^8}{a^4 b^4} + 14 = 0$$

ed avendosi:

$$\frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} = h, \quad \frac{a^8 + b^8}{a^4 b^4} = h^2 - 2$$

ne seguirebbe:

$$h^2 + 12 = 0$$

e saremmo condotti al caso equianarmonico (n. 48) e non all'armonico. In conclusione dunque:

« *La quartica complementare, sulla superficie di STEINER, di una sua asintotica armonica, è anch'essa armonica, ma non asintotica, e le due curve hanno il nodo in comune* ».

CAPITOLO VI.

Il caso equianarmonico.

48. Esso si realizza con $h^2 + 12 = 0$ (n. 33). Segue che i due gruppi sizigetici « piano » e « iperoscolato » coincidono. Infatti la relazione precedente può scriversi $\frac{2}{h} = -\frac{h}{6}$ e sotto questa forma esprime la coincidenza suddetta (nn. 15 e 9). Viceversa, dalla $\frac{2}{h} = -\frac{h}{6}$ si risale alla $h^2 + 12 = 0$.

Dunque si può dire che:

« *La condizione necessaria è sufficiente perchè la curva C_4 sia equianarmonica, è che i quattro punti iperoscolati siano in un medesimo piano* ».

49. Analogamente a quanto si fece al n. 40, per la C'_4 armonica, osserveremo che, nel caso attuale, la quaterna dei punti iperoscolati, essendo equianarmonica, sarà invariante rispetto a un gruppo di proiettività binarie che è di 12° ordine [gruppo tetraedrico (1)]. Per ottenerlo basta, ad esempio, aggiungere alle sostituzioni (1) del n. 10, la sostituzione seguente a periodo tre:

$$S \equiv \begin{Bmatrix} i(\lambda + \mu) & \lambda - \mu \\ \lambda & \mu \end{Bmatrix}.$$

Costruito così il gruppo binario tetraedrico suddetto, per ottenere il G_{12} quaternario rispetto al quale C_4 è invariante, si osservi che, nella consueta rappresentazione parametrica di C_4 (n° 8), si può prendere adesso:

$$a \equiv (1 + i)(-1 + \sqrt{3}), \quad b = 2.$$

Dopo di che si vede che la S precedente

(1) ENRIQUES-CHISINI, loc. cit. (34), T. I, pag. 26.

$$\begin{aligned}
 \text{trasporta } M \text{ in} & \quad \left\{ \frac{1+i+(1-i)\sqrt{3}}{2} \right\} N, \\
 \text{» } N \text{ »} & \quad - \left\{ \frac{1+i+(1-i)\sqrt{3}}{2} \right\} Q, \\
 \text{» } Q \text{ »} & \quad \left\{ \frac{-1+i+(1+i)\sqrt{3}}{2} \right\} M, \\
 \text{» } P \text{ »} & \quad \left\{ \frac{-1+i+\sqrt{3}(1+i)}{2} \right\} P,
 \end{aligned}$$

e quindi risulterà che la S genera la collineazione quaternaria:

$$(x_1 x_2 x_4)$$

che trasformerà C_4 in se stessa. Aggiungendo questa collineazione al gruppo quadrimo G_4^I del n° 10, si ottiene il gruppo quaternario di 12° ordine rispetto al quale la C_4 attuale è invariante. Esso è uno dei tre possibili gruppi tetraedrici dello spazio a tre dimensioni ed è non soltanto isomorfo oloedrico, ma anche proiettivamente identico al gruppo di rotazione del tetraedro regolare (1).

50 Riprendiamo là (1) del n° 19 che collega il valore α , del parametro di un punto generico di C_4 , a quello α' del suo osculante. Risolvendola rispetto ad α' si trova:

$$\alpha' = \frac{h\alpha^2 - 2}{2\alpha^3 - h\alpha}.$$

Ora il residuo α'' di α è dato dalla (1) del n° 24, cioè da:

$$\alpha'' = -\frac{6\alpha^2 + h}{h\alpha^3 + 6\alpha}.$$

Se si esige $\alpha' = \alpha''$ (qualunque sia α) si trova $h^2 + 12 = 0$ che esprime la equianarmonia di C_4 (n° 48). Dunque:

« Il residuo e l'osculante di un punto qualunque di una C_4 equianarmonica coincidono. Viceversa, questa condizione caratterizza la C_4 equianarmonica ».

51. Fra le quadriche considerate nel capitolo III la più interessante, nel caso attuale, è la E riguarda come involuppo (n° 28). Dalla relativa equazione, ivi riferita al tetraedro iperosculante di C_4 , si ottiene la seguente che è riferita invece al tetraedro principale (mediante la trasformazione di coordinate del n° 2):

(1) Vedi la mia Memoria più volte citata (7).

$$E \equiv \{(4 - h^2) u_1^2 + 4(h - 2) u_2^2 - 4(h + 2) u_3^2 + (h^2 + 12) u_4^2 = 0\}$$

Nel caso attuale essendo $h^2 + 12 = 0$ la E diviene:

$$E \equiv \{4 u_1^2 + (h - 2) u_2^2 - (h + 2) u_3^2 = 0\}, \quad (\text{con } h^2 + 12 = 0)$$

che rappresenta una conica in coordinate di piani giacente in $x_4 = 0$.
Dunque

« Nel caso attuale l'inviluppo E , cioè quello dei piani seganti C_4 in gruppi equiarmonici, è formato da ∞^1 fasci di piani i cui assi sono le tangenti della conica suddetta. Esse costituiscono anche la totalità delle rette per ciascuna delle quali passano tre piani osculatori della curva » (n° 28).

52. Considerando finalmente la C'_4 complementare si vede che, nel caso attuale, è anch'essa equianarmonica. Infatti la binaria biquadratica rappresentante i punti iperosculati di G'_4 è, nel caso generico, (n° 37):

$$\lambda^4 + \mu^4 + \frac{24h}{12 - h^2} \lambda^2 \mu^2 = 0.$$

Ora la condizione perchè questa sia equianarmonica è (n° 9):

$$3 \cdot \left(\frac{4h}{12 - h^2} \right)^2 + 1 = 0$$

ossia $h^2 + 12 = 0$ che è soddisfatta per ipotesi. Dal n° 47 risulta poi che C'_4 è anche asintotica della superficie di STEINER.

Dunque « nel caso attuale la quadrica H (n° 30) taglia la superficie di STEINER secondo due quartiche entrambe equianarmoniche ed entrambe asintotiche della superficie ».

ALCUNE OSSERVAZIONI SOPRA LA SUPERFICIE DI STEINER

[Rendic. Istit. Lomb 1930]

SUNTO. — Una notevole corrispondenza biunivoca, fra i punti della superficie di Steiner, stabilita mediante una costruzione dovuta al Sig. « Olafur Danielsson », viene ottenuta, dall'A. della seguente Nota, in modo più diretto e più semplice, mediante proiezione, sulla superficie, dal suo punto triplo, di una particolare corrispondenza quadratica piana.

1. — Le seguenti osservazioni, intorno alla superficie di STEINER, mi vengono suggerite dalla lettura di un interessante articolo comparso recentemente sopra i « *Mathematischen Annalen* » (1).

Il Lettore voglia scusarmi se, per uniformità di linguaggio, io mi riferisco a notazioni e nomenclature che ho già adoperato in riguardo alla superficie di STEINER (in un mio precedente lavoro dedicato alle quartiche razionali gobbe (2)). Ivi denotai col nome di tetraedro singolare della superficie, quello che ha per facce i piani delle rette doppie (a due, a due), e per 4^a faccia il piano individuato dai tre punti, sopra tali rette, che sono i coniugati armonici del punto triplo rispetto alle 3 coppie di punti uniplanari della superficie situati sopra le rette medesime.

Riferendo la superficie a questo tetraedro, la equazione assume la nota forma classica

$$x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 - 2 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$$

e siccome la sezione piana in $x_4 = 0$ è la « *Lemniscata proiettiva* »

$$x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 = 0$$

(1) OLAFUR DANIELSSON, « *Ueber Korrespondierende Punkte der Steinerschen Fläche vierter Ordnung und die Hauptpunkte derselben* ». Math: Aonal. Bd. 102.

(2) E. CIANI, « *Ricerche sopra le quartiche razionali gobbe* ». Rendic. Circ. Matematico di Palermo. T. LII.

dalla quale vengono a dipendere le osservazioni che mi propongo di fare, così è indispensabile premettere alcuni particolari, inerenti a tale curva, richiamandoli da un ben noto lavoro di BERZOLARI sull'argomento (1).

2. Ricorderò dunque che la curva L in parola è una particolare quartica piana trinodale di cui le sei tangenti nodali sono anche tangenti inflessionali di guisa che, in ciascun nodo, vengono assorbite tutte e 4 le intersezioni delle relative tangenti con la curva, la cui equazione riferita al triangolo nodale può scriversi nella forma già indicata nel numero precedente

$$L \equiv |x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 = 0|.$$

Le tangenti nodali suddette possono rappresentarsi, a coppie, mediante le equazioni

$$x_1^2 + x_2^2 = 0, \quad x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad x_3^2 + x_1^2 = 0$$

da cui risulta subito che esse involuppano la conica

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

La curva L possiede le seguenti 4 bitangenti

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

le quali compongono un quadrilatero la cui « conica dei 14 punti » è la conica precedente. Rispetto a questa, i poli delle 4 bitangenti suddette sono

$$(1, 1, 1); \quad (-1, 1, 1); \quad (1, -1, 1); \quad (1, 1, -1)$$

e il fascio delle coniche passanti per questi 4 punti può rappresentarsi mediante la equazione

$$x_1^2 + \lambda x_2^2 - (\lambda + 1) x_3^2 = 0.$$

Ciò posto è facile constatare che la ben nota involuzione piana rappresentata da

$$y_1 = x_2 x_3, \quad y_2 = x_3 x_1, \quad y_3 = x_1 x_2$$

può intendersi che sia quella dei punti coniugati rispetto a tutte le coniche del fascio precedente e quindi può ritenersi determinata esclusivamente dalla curva L mediante la seguente proposizione:

« Ogni lemniscata proiettiva individua una involuzione piana costituita dalle coppie di punti coniugati rispetto al fascio di coniche i cui punti base sono i poli delle 4 bitangenti della curva rispetto alla conica involupata

(1) L. BERZOLARI, « Sulla lemniscata proiettiva ». Questi Rendic. Serie II. Vol. XXXVII.

dalle 6 tangenti nodali della curva medesima. Essa è quella indicata con J nella citata memoria di BERZOLARI (n. 2). Analiticamente essa può farsi dipendere dalla L con le formole

$$y_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad y_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}, \quad y_3 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$$

dove f è il 1° membro della equazione di L .

È dunque lecito parlare (senza possibilità di equivoci) della involuzione piana individuata dalla curva L (rispetto alla quale però si noti bene, L non è invariante, ma viene cambiata nella conica delle sei tangenti nodali).

3. Venendo adesso alla superficie S di STEINER, è utile anche di osservare come l'unica sezione piana che sia una lemniscata proiettiva, è quella prodotta da $x_4 = 0$. Infatti, preso un punto M qualsiasi sopra una delle rette doppie, si cerchino le rette passanti per M e tali che (per ciascuna) M assorba le 4 intersezioni con la superficie S . A tale scopo sia M sulla retta doppia

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

e quindi abbiasi

$$M \equiv (0, 0, y_3, y_4).$$

Congiungiamolo con un punto N che potremo sempre supporre esistente in $x_3 = 0$ e quindi così che si abbia

$$N \equiv (z_1, z_2, 0, z_4).$$

Allora, la retta MN sarà rappresentata parametricamente da

$$x_1 = \lambda z_1, \quad x_2 = \lambda z_2, \quad x_3 = \mu z_3, \quad x_4 = \lambda z_4 + \mu y_4$$

e le sue intersezioni con S saranno date dalla equazione

$$\lambda^4 z_1^2 z_2^2 - 2 \lambda^3 \mu z_1 z_2 z_4 y_3 + \\ + \lambda^2 \mu^2 [y_3^2 (z_1^2 + z_2^2) - 2 z_1 z_2 y_3 y_4] = 0.$$

Perchè dunque le intersezioni della retta MN con S , siano tutte assorbite da M , occorre che sia

$$z_1 z_2 z_4 y_3 = 0, \quad y_3^2 (z_1^2 + z_2^2) - 2 z_1 z_2 y_3 y_4 = 0$$

escludendo ovviamente $y_1 = 0, z_2 = 0, y_3 = 0$, rimane

$$z_4 = 0 \text{ e } y_3^2 (z_1^2 + z_2^2) - 2 z_1 z_2 y_3 y_4 = 0$$

il che dà due valori per $\frac{z_1}{z_2}$. Dunque le rette cercate sono due e si appoggiano allo spigolo $(x_3 = 0, x_4 = 0)$ del tetraedro fondamentale. Se dunque si vuol tagliare la superficie S con un piano passante per M , in guisa

che M sia, per la quartica sezione, un nodo inflessionale, il piano deve esser quello delle due rette dianzi trovate, ma allora esso passa per lo spigolo ($x_3 = 0, x_4 = 0$) e quindi è facile constatare che l'unico piano passante per tale retta (in guisa che anche i punti d'intersezione con le rimanenti 2 rette doppie di S siano anch'essi 2 nodi-inflessionali) è il piano $x_4 = 0$. L'affermazione fatta al principio di questo numero è dunque dimostrata.

4. Prima di procedere oltre è naturale di domandarsi di quale natura sia il luogo generato da tutte le coppie di rette MN della specie descritta nel numero precedente (si potrebbero opportunamente chiamare « *rette iperosculatrici* »). Quale sarà dunque il luogo delle infinite coppie di rette iperosculatrici nei punti della retta doppia $x_1 = 0, x_2 = 0$? La risposta è facile.

Riprendendo perciò l'equazione del numero precedente

$$y_3^2 (z_1^2 + z_2^2) - 2 z_1 z_2 y_3 y_4 = 0,$$

resulta subito che i due punti di appoggio con ($x_3 = 0, x_4 = 0$) delle due rette iperosculatrici passanti per M , compongono una coppia armonica con quella formata dai punti d'incontro della retta medesima ($x_3 = 0, x_4 = 0$) con i piani osculanti

$$x_1 \pm x_2 = 0.$$

passanti per la retta doppia suddetta (vedi il numero 3 della citata mia Nota). Dunque il luogo cercato è una superficie cubica rigata gobba che ha per direttrice doppia ($x_1 = 0, x_2 = 0$) e per direttrice semplice ($x_3 = 0, x_4 = 0$). L'equazione della superficie è

$$x_3 (x_1^2 + x_2^2) - 2 x_1 x_2 x_4 = 0 \dots \quad (1)$$

Infatti siano $M \equiv (0, 0, \lambda, 1)$; $N \equiv (1, \mu, 0, 0)$, l'uno sulla prima direttrice e l'altro sulla seconda e quindi la retta MN sia rappresentata parametricamente da

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \alpha \mu, \quad x_3 = \lambda, \quad x_4 = 1 \dots \quad (2)$$

Le sue intersezioni con la superficie S sono date da

$$\alpha^4 \mu^2 + \alpha^2 [\lambda^2 (1 + \mu^2) - 2 \lambda \mu] = 0.$$

Se la retta MN in parola deve essere iperosculatrice in M , occorre che sia

$$\lambda (1 + \mu^2 - \mu^2) = 0$$

ma allora risulta immediatamente che le (2) soddisfano la (1) indipendentemente da α .

Riassumendo si ha dunque:

« Il luogo delle rette iperosculatrici della superficie di STEINER, nei punti di una sua retta doppia, è una superficie cubica rigata gobba che ha per direttrice doppia la retta suddetta e per direttrice semplice lo spigolo opposto nel tetraedro singolare delle superficie di Steiner. La involuzione che le generatrici della rigata cubica suddetta segnano, sopra lo spigolo in parola, ha, per punti doppi, quelli d'incontro con i piani osculanti che passano per la retta doppia in discorso ».

5. Siamo ora in grado di applicare le considerazioni svolte sin qui, all'argomento che è oggetto principale della Nota del Sig. O. DANIELSSON già citata in principio. Egli stabilisce, fra i punti della superficie di STEINER, la seguente corrispondenza biunivoca. Preso un punto generico $P \equiv (y_1 y_2 y_3 y_4)$ sopra la superficie, egli considera i tre piani che lo proiettano dalle 3 rette doppie della superficie che sono i seguenti

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0, \quad x_2 y_3 - x_3 y_2 = 0, \quad x_3 y_1 - x_1 y_3 = 0 \dots (3)$$

e che si tagliano quindi lungo la retta TP che proietta P dal punto triplo T della superficie. Poi osserva che le 3 coppie di piani osculanti passanti per le 3 rette doppie sono i seguenti

$$x_1 \pm x_2 = 0, \quad x_2 \pm x_3 = 0, \quad x_3 \pm x_1 = 0 \dots (4)$$

Ebbene i tre piani coniugati armonici dei tre piani (3), rispetto alle tre coppie precedenti, risultano questi

$$x_1 y_1 - x_2 y_2 = 0, \quad x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0, \quad x_3 y_3 - x_1 y_1 = 0$$

e quindi si tagliano lungo una retta che passa per il punto triplo T e incontra ulteriormente la superficie di STEINER, in un punto P' che è il corrispondente di P secondo la costruzione del Sig. DANIELSSON.

Ora è facile vedere che se si rappresenta la superficie di STEINER sul piano $x_4 = 0$, mediante proiezione dal punto triplo T , le immagini di P e P' hanno per coordinate

$$(y_1, y_2, y_3, 0); \quad (y_2, y_3, y_1, y_1 y_2, 0)$$

cioè sono corrispondenti nella involuzione piana stabilita dalla « Lemniscata proiettiva » della superficie di STEINER, secondo le considerazioni del numero 2 di questa Nota. E' poi manifesto che le coordinate di P e P' possono assumersi così

$$P \equiv \left(y_1, y_2, y_3, \frac{y_1^2 y_2^2 + y_2^2 y_3^2 + y_3^2 y_1^2}{2 y_1 y_2 y_3} \right)$$

$$P' \equiv \left(y_2 y_3, y_3 y_1, y_1 y_2, \frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{2} \right);$$

Resulta dunque (giacchè è lecito parlare della Lemniscata proiettiva sulla superficie di STEINER quale unica curva di tale specie ivi esistente n. 3)) la seguente proposizione:

« La corrispondenza stabilita fra i punti della superficie di STEINER, mediante la costruzione del Sig. DANIELSSON, si può ottenere proiettando, sopra la superficie, dal suo punto triplo, la involuzione piana individuata dalla Lemniscata proiettiva esistente sopra la superficie medesima ».

In altre parole, la corrispondenza di DANIELSSON si specchia, per proiezione dal punto triplo, sopra la involuzione piana della Lemniscata proiettiva.

LA CONFIGURAZIONE COSTITUITA DA DUE CONICHE CIASCUNA DELLE QUALI E' INVERSA DI SE STESSA RISPETTO ALL'ALTRA

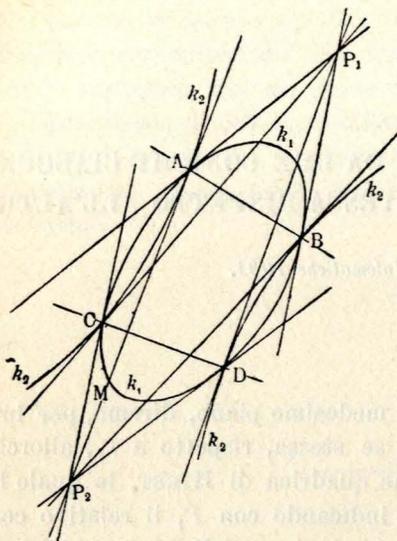
Estratto dal *Periodo di Matematiche* 1931.

1. Date due coniche k_1 e k_2 , in un medesimo piano, diremo, per brevità di linguaggio, che k_2 è inversa di se stessa, rispetto a k_1 , allorchè k_2 è invariante, rispetto a una inversione quadrica di HIRST, la quale ha per conica fondamentale k_1 . In tal caso, indicando con P_1 il relativo centro d'inversione, ogni trasversale per P_1 , nel piano delle due coniche, le taglia in un gruppo armonico di punti e quindi il contravariante armonico di k_1 e k_2 (inviluppo delle rette seganti armonicamente k_1 e k_2) e che è della 2^a classe, si spezza in due punti di cui uno è P_1 . Indicando con P_2 l'altro punto, ne segue che anche ogni retta passante per P_2 , nel piano suddetto, taglierà le due coniche in un gruppo armonico di punti e quindi P_2 e k_2 potranno riguardarsi quali centro e conica fondamentale di una nuova inversione quadrica di HIRST, rispetto alla quale la conica k_1 sarà invariante. Dunque intanto si può dire che

« La condizione perchè la conica k_1 sia fondamentale, per una inversione quadrica di HIRST, rispetto alla quale la conica k_2 sia invariante, è identica con quella che si richiede perchè k_2 sia fondamentale per una inversione rispetto a cui k_1 sia invariante. Essa può esprimersi esigendo che il contravariante armonico delle due coniche, riguardato quale inviluppo di 2^a classe, si spezzi in due punti (i quali vengono ad essere i centri delle due inversioni).

La posizione dunque delle due coniche è mutua e, col linguaggio dianzi adottato, si può dire che ciascuna è inversa di se stessa rispetto all'altra. Alla configurazione, che esse vengono così a comporre, sono destinate le seguenti elementari considerazioni le quali non hanno pretesa alcuna di originalità, ma mirano soltanto a collegare, in modo semplice, il linguaggio geometrico con l'algoritmo algebrico (in ciò che riguarda lo studio della configurazione in parola).

2. Indicando con A, B, C, D i 4 punti comuni alle 2 coniche k_1 e k_2 (nell'ipotesi che essi siano tutti reali e distinti) e tenendo presente che il contravariante armonico di k_1 e k_2 è tangente alle 8 tangenti in A, B, C, D a k_1 e k_2 , ne segue che tali 8 tangenti si distribuiranno in due quaterne di rette convergenti nei centri d'inversione P_1 e P_2 (secondo la quì annessa figura) in modo dunque che AB sia corda di contatto per le tangenti tirate da P_1 a k_1 e per quelle tirate da P_2 a k_2 e analogamente CD sia corda di contatto per le tangenti tirate da P_2 a k_1 e per quelle tirate da P_1 a k_2 .



Così P_1 ha per polare AB rispetto a k_1 e CD rispetto a k_2 , come P_2 ha per polare AB rispetto a k_2 e CD rispetto a k_1 . Segue che le rette CD e AP_2 sono coniugate rispetto a k_1 e quindi (indicando con M il 2° punto d'intersezione di AP_2 con k_1) ne viene

che il gruppo $CDA M$, sopra k , è armonico e quindi lo è anche $A(CDP_1 M)$ il quale risulta formato dalle due rette che da A proiettano CD e dalle due tangenti in A alle coniche k_1 e k_2 .

Si conclude dunque che « data la conica k_1 , si possono scegliere arbitrariamente le corde AB, CD , dopo di che la 2ª conica k_2 riesce completamente determinata dal passare per i punti A, B, C, D e dall'essere tangente, in A , alla coniugata armonica della tangente, ivi, a k_1 , rispetto alla coppia di rette AC, AD . Siccome poi le rette AC, BD si tagliano in un punto della congiungente di P_1 con P_2 e altrettanto accade di AD, BC , così ne segue $A(P_1 P_2 C D) \pi B(P_1 P_2 D C)$. Ma il gruppo $A(P_1 P_2 C D)$ è armonico, come dianzi abbiamo osservato, dunque è armonico anche $B(P_1 P_2 D C)$ cioè le tangenti a k_1 e k_2 (in B) formano un gruppo armonico con BD, BC . Analogamente si vede che sono armonici i 2 gruppi $C(P_1 P_2 A B), D(P_1 P_2 B A)$ e la configurazione attuale si può completare a partire dalla conica k_1 e dalle due corde arbitrarie AB, CD .

Si può aggiungere che se C, D sono i punti ciclici del piano delle due coniche, esse divengono due cerchi ortogonali, di guisa che tutta la configurazione attuale è identica (proiettivamente) a quella individuata da due di tali cerchi.

3. Cerchiamo adesso la condizione analitica esprime il vincolo geometrico che collega le due coniche k_1 e k_2 . A tale scopo conviene riferi-

re le due coniche al triangolo diagonale del quadrangolo $ABCD$, il quale triangolo è autoconiugato rispetto ad entrambe. Le loro equazioni saranno dunque del tipo seguente (in coordinate di punto)

$$lx^2 + my^2 + nz^2 = 0, \quad px^2 + qy^2 + rz^2 = 0$$

e in coordinate di retta

$$mnu^2 + nlv^2 + lmw^2 = 0, \quad qru^2 + rpv^2 + pqw^2 = 0$$

dove x, y, z sono coordinate di punto e u, v, w quelle di retta.

Vengono così a individuarsi (secondo le mie notazioni (1)) i seguenti invarianti

$$\begin{aligned} \Delta_{aaa} &= lmn, & \Delta_{bbb} &= pqr \\ \Delta_{abb} &= lqr + mrp + npq, & \Delta_{aab} &= pmn + qnl + rlm \end{aligned}$$

di cui i primi due sono discriminanti e gli ultimi due sono gli armonizzanti (1).

Ora, con questo riferimento, il controvariante armonico è (1)

$$u_1^2 (mr + nq) + u_2^2 (np + lr) + u_3^2 (lq + mn) = 0$$

e quindi il suo discriminante risulta

$$(mr + nq)(np + lr)(lq + mp)$$

che equivale a

$$\Delta_{abb} \Delta_{aab} - \Delta_{aaa} \Delta_{bbb}.$$

Se dunque questo contravariante deve essere degenere (n. 1), si trova la condizione

$$\Delta_{abb} \Delta_{aab} = \Delta_{aaa} \Delta_{bbb}.$$

Quindi « *La condizione algebrica affinché due coniche siano ciascuna inversa di se stessa, rispetto all'altra, può esprimersi esigendo che il prodotto dei due discriminanti delle due coniche sia uguale a quello dei loro armonizzanti* (4).

(1) CIANI: *Il metodo delle coordinate proiettive omogenee*, pag. 86, 2ª ed., « Stein ».

(2) Fra le varie denominazioni che ha ricevuto l'invariante simultaneo α_a^2 delle due coniche $\alpha_x = 0, \alpha_u^2 = 0$, la più propria sembra quella di « armonizzante » in analogia all'invariante di tale nome inerente a due binarie quadratiche. Se $\alpha_a^2 = 0$, è dunque naturale di chiamare « armoniche » le due coniche piuttosto che « apolari ». Siccome poi le veci delle due coniche possono essere scambiate, riguardando la 1ª come inviluppo e la 2ª come luogo, così due coniche individuano 2 armonizzanti.

(3) CIANI, loc. cit. pp. 89-95.

(4) Veggasi anche SALMON: *Sezioni coniche*. Traduz. DINO, p. 336.

4. Ci proponiamo infine di rappresentare analiticamente le due inversioni inerenti a k_1 e k_2 e di cui è parola nel n. 1. Ma prima è opportuno cambiare il sistema di riferimento, di cui si è fatto uso nel N. precedente, assumendo per la conica k_1 l'equazione

$$k_1 \equiv \{xy - z^2 = 0\}$$

dopo di che l'inversione I_1 , rispetto alla quale k_1 è fondamentale, si può rappresentare, assai semplicemente, mediante la sostituzione

$$I_1 \equiv \begin{cases} xz & yz & xy \\ x & y & z \end{cases}.$$

Il centro d'inversione è in (001) la cui polare è $z = 0$. Per scrivere adesso l'equazione di k_2 , si assume per retta AB della nostra figura la $z = 0$ e si osserva che k_2 è obbligata a passare per (1, 0, 0); (0, 1, 0) e ad essere invariante rispetto a I_1 . Si trova così per k_2 una equazione della forma

$$k_2 \equiv \{z^2 + xy + ayx + bzx = 0\}.$$

Il contravariante armonico di k_1 e k_2 è quindi (vedi la citazione (1) del N. precedente)

$$u_3(au_1 + bu_2 - u_3) = 0$$

cioè si spezza nei due punti (1)

$$(0, 0, 1); (a, b, -1)$$

e quindi, secondo le notazioni del n. 2, si ha

$$P_1 \equiv (0, 0, 1); P_2 \equiv (a, b, -1).$$

Quanto infine alle due rette AB , CD della figura esse sono rappresentate da

$$z = 0 \text{ polare di } P_1 \text{ rispetto a } k_1 \text{ e di } P_2 \text{ rispetto a } k_2$$

$$bx + ay + 2z = 0 \quad \gg \quad \gg \quad P_2 \quad \gg \quad \gg \quad k_1 \quad \gg \quad P_1 \quad \gg \quad \gg \quad k_2.$$

5. La 2^a inversione I_2 ha il centro in $P_2 \equiv (a, b, -1)$ come abbiamo visto nel N. precedente. Per rappresentarla analiticamente, si osservi che, dato il punto $M \equiv (x, y, z)$, per trovare il corrispondente M^1 , si può con-

(1) Anche il covariante armonico si spezza e precisamente nelle due rette $bx + ay + 2(1 \pm \sqrt{ab-1})z = 0$ (vedi pag. 91 del mio citato libro). Queste due rette convergono nel punto d'incontro di AB con CD e naturalmente poi (com'è ben noto) debbono contenere gli 8 punti di contatto delle 4 tangenti comuni a k_1 e k_2 .

giungere M con P_2 e prendere poi la intersezione di questa congiungente con la polare di M rispetto a k_2 . Facendo le seguenti posizioni

$$u = x + az, \quad v = y + bz, \quad t = ay + bz, \quad w = bx + z$$

si trova così che I_2 può rappresentarsi mediante la seguente sostituzione

$$I_2 \equiv \begin{Bmatrix} ut & vw & -uv \\ x & y & z \end{Bmatrix}$$

ed è facile verificare che $I^2 = \text{identità}$, come del resto risulta immediatamente dalla sopra indicata costruzione geometrica.

Dalle espressioni trovate per I_1 e I_2 risulta subito

$$I_1 I_2 = I_2 I_1 = \begin{Bmatrix} ut & vw & -wt \\ x & y & z \end{Bmatrix}$$

cioè I_1 e I_2 sono due operazioni permutabili e il loro prodotto è la nuova trasformazione (che indicheremo con I_3) rappresentabile con la sostituzione

$$I_3 \equiv \begin{Bmatrix} ut & vw & -wt \\ x & y & z \end{Bmatrix}.$$

6. Questa I_3 è dunque ancora una trasformazione quadratica ed è anche involutoria, giacchè si ha

$$I_3^2 = (I_1 I_2)^2 = I_1 I_2 I_1 I_2 = I_1 I_2 I_2 I_1 = I_1 I_2^2 I_1 = I_1^2 = \text{identità},$$

ma non è una inversione. Essa può riguardarsi costituita dalle infinite coppie di punti coniugati rispetto al fascio di coniche individuato dalle due seguenti

$$f \equiv \{b^2 x^2 - a^2 y^2 + 2bxz - 2ayz = 0\}$$

$$\varphi \equiv \{b^2 x^2 + az^2 + 2xz = 0\}.$$

Infatti, dato il punto (x, y, z) , il suo coniugato rispetto a tutte le coniche del fascio suddetto, ha per coordinate (ordinatamente) i minori tratti della matrice

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

ossia, con le notazioni del N. 5,

$$\begin{vmatrix} bw & -at & bx - ay \\ w & 0 & u \end{vmatrix}.$$

Queste coordinate risultano dunque proporzionali a

$$\{-aut, w(bx - ay - bu), atw\}$$

ovvero a

$$\{-aut, -avw, atw\}$$

e, in definitiva, esse possono prendersi nel modo seguente

$$\{ut, vw, -tw\}$$

e l'asserto è provato. Si può aggiungere che i tre punti fondamentali di I_3 sono

$$(1, 0, 0); (0, 1, 0); (a, b, -ab)$$

e i punti uniti

$$(ab, bh - ab); (ak, bk, -ab); (ah, bk, -ab); (ak, bh, -ab)$$

con

$$h = 1 + \sqrt{1 - ab}, \quad k = 1 - \sqrt{1 - ab}.$$

7. Le trasformazioni quadratiche I_1, I_2, I_3 dei N. precedenti soddisfano dunque alle seguenti condizioni:

$$I_1^2 = I_2^2 = I_3^2 = \text{identità}, \quad I_1 I_2 = I_2 I_1 = I_3.$$

Si può aggiungere adssso

$$I_1 I_3 = I_1 I_1 I_2 = I_1^2 I_2 = I_2$$

$$I_1 I_3 = I_1 I_2 I_1 = I_3 I_1$$

e analogamente

$$I_2 I_3 = I_1, \quad I_2 I_3 = I_3 I_2.$$

Si conclude quindi che

« Le quattro operazioni

$$I_1, I_2, I_3, \text{identità},$$

compongono un gruppo quadrinomio rispetto al quale tutta la configurazione è invariante ».

INTORNO ALLA TERZA FORMULA DI PLÜCKER

[Giorn. di Mat. : 1932]

1. — La lusinghiera recensione della mia « *Introduzione alla Geometria algebrica* » (1) comparsa nel fascicolo del 1° luglio decorso del *Periodico di Matematica*, per opera dell'amico e collega Prof. F. ENRIQUES (e della quale gli rendo adesso pubbliche grazie), mi ha indotto a pensare ad un'altra dimostrazione della 3^a formula di PLÜCKER (che collega le note caratteristiche di una curva algebrica piana) diversa da quella esposta nella « *Introduzione* » suddetta e che fida semplicemente (alla maniera di CREMONA) sopra un computo di costanti le quali, implicitamente, vengono ammesse indipendenti fra di loro (ed è ben noto che questa ipotesi, pure corrispondente al vero, non è di facile accertamento).

In questo proposito, ricorrerò adesso alla enumerazione dei flessi, come nel trattato ENRIQUES-CHISINI, (2) ma seguendo però tutt'altra via di quella percorsa dai Ch.^{mi} Autori suddetti e, mi sembra, in modo molto più semplice. Essa si fonda sopra alcuni importanti risultati dovuti al compianto Prof. C. SEGRE e pubblicati in una memoria che è stampata in questo medesimo Giornale (3),

2. — È però indispensabile premettere alcune osservazioni.

La prima è la seguente:

« *In un flesso ordinario della curva fondamentale $f = 0$, essa e la sua Hessiana $H = 0$, hanno bensì un punto in comune, ma non la medesima tangente* ».

Infatti, assumendo (001) nel flesso e $x_1 = 0$ come tangente relativa, la equazione $f = 0$, ordinata in x_3 , sarà del tipo seguente

(1) « *Cedam* » Autografie - Padova, 1931.

(2) *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni algebriche*. Vol. I. p. 263. - Zanichelli, Bologna.

(3) « *Le molteplicità nelle intersezioni delle curve algebriche* ». Giorn. di mat. BATTAGLINI, Vol. XXXVI, 1898.

$$f = x_1 x_3^{n-1} + (ax_1^2 + bx_1 x_2) x_3^{n-2} + (cx_1^3 + dx_1^2 x_2 + ex_1 x_2^2 + gx_2^3) x_3^{n-3} + \dots = 0$$

dove a, b, c, d, e, g sono costanti.

Calcolando l'Hessiana si trova

$$H = \begin{vmatrix} 2ax_3^{n-2} + \dots & bx_3^{n-2} + \dots & (n-1)x_3^{n-2} + \dots \\ bx_3^{n-2} + \dots & (2ex_1 + 6gx_2)x_3^{n-3} + \dots & b(n-2)x_1 x_3^{n-3} + \dots \\ (n-1)x_3^{n-2} + \dots & b(n-2)x_1 x_3^{n-3} + \dots & (n-1)(n-2)x_1 x_3^{n-3} + \dots \end{vmatrix} = 0$$

dove, in ogni termine del determinante, si sono tralasciati quelli di grado inferiore ad $n-3$. Sviluppando e ordinando in x_3 , si vede che il termine di grado più elevato in x_3 è

$$x_3^{3n-7}(n-1) \{ b^2(n-2)x_1 - 2(n-1)(ex_1 + 3gx_2) \}.$$

Questo conferma il passaggio di $H = 0$ per il flesso (001), ma esclude anche che le due curve $f = 0$, $H = 0$ ivi si tocchino, perchè altrimenti sarebbe $g = 0$, nel quale caso (001) sarebbe un punto di ondulazione e non un flesso ordinario.

3. — Vediamo poi che cosa accade se $f = 0$ ha un punto doppio a tangenti distinte (nodo). Allora, collocando (001) nel nodo e assumendo $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ quali tangenti nodali, avremo

$$f = x_1 x_2 x_3^{n-2} + a_3 x_3^{n-3} + \dots = 0$$

dove a_3 è una binaria cubica in $x_1 x_2$ ecc. L'Hessiana è

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 a_3}{\partial x_1^2} x_3^{n-3} + \dots & x_3^{n-2} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial x_1 x_2} x_3^{n-3} + \dots & (n-2)x_2 x_3^{n-3} + \dots \\ x_3^{n-2} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial x_1 \partial x_2} x_3^{n-3} + \dots & \frac{\partial^2 a_3}{\partial x_2^2} x_3^{n-3} + \dots & (n-2)x_1 x_3^{n-3} + \dots \\ (n-2)x_2 x_3^{n-3} + \dots & (n-2)x_1 x_3^{n-3} + \dots & 0 + \dots \end{vmatrix} = 0$$

dove, come prima, si sono tralasciati i termini in x_3 di grado inferiore ad $n-3$. Sviluppando, si trova che il termine di grado più elevato in x_3 è

$$(n-2)^2 x_1 x_2 x_3^{3n-8}$$

Dunque: « Un nodo ordinario di $f = 0$, è tale che anche per $H = 0$ e le tangenti nodali delle due curve coincidono.

4. — Se invece si tratta di una cuspidale si potrà scrivere

$$f = x_1^2 x_3^{n-2} + a_3 x_3^{n-3} + \dots = 0$$

dove (001) è la cuspidale e $x_1 = 0$ la relativa tangente cuspidale.

Il calcolo della Hessiana reca

$$H = \begin{vmatrix} 2x_3^{n-2} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial x_1^2} x_3^{n-3} + \dots & \frac{\partial^2 a_3}{\partial x_1 \partial x_2} x_3^{n-3} + \dots & 2(n-2)x_1 x_3^{n-3} + \dots \\ \frac{\partial^2 a_3}{\partial x_1 \partial x_2} x_3^{n-3} + \dots & \frac{\partial^2 a_3}{\partial x_2^2} x_3^{n-3} + \dots & 0 + \dots \\ 2(n-2)x_1 x_3^{n-3} + \dots & 0 + \dots & 0 + \dots \end{vmatrix} = 0$$

da cui risulta che il termine di grado più elevato in x_3 è

$$- 4(n-2)^2 x_3^{3n-9} x_1^2 \frac{\partial^2 a_3}{\partial x_2^2}.$$

Ora, è da osservare che, essendo la cuspidale ordinaria, la binaria a_3 contiene anche x_2 e quindi segue che « una cuspidale ordinaria di $f=0$, è un punto triplo, per $H=0$ e due tangenti, in questo punto triplo, coincidono con la tangente cuspidale di $f=0$ ».

5. — Ciò premesso, basta applicare, ai casi dianzi considerati i risultati contenuti nella citata memoria di C. SEGRE, intorno al numero delle intersezioni assorbite da un punto comune a due curve algebriche piane allorchè sieno noti gli ordini di molteplicità di tale punto, rispetto a ciascuna curva, anche quando ci sieno, ivi, più tangenti comuni e comunque riunite (1). Allora, risulta che ogni nodo e ogni cuspidale assorbono, rispettivamente, sei, oppure otto intersezioni della curva con la propria Hessiana nella ipotesi che si tratti di nodi e cuspidi ordinari (cioè non di specie superiore).

Dunque, in conclusione, se la curva è di ordine n e possiede d nodi e k cuspidi (ordinari) il numero i dei flessi (ordinari) è dato da

$$(1) \quad i = 3n(n-2) - 6d - 8k \dots$$

6. — Da questa è facile risalire alla 3ª formula di PLÜCKER (nella forma Cremoniana). Infatti, l'ultima relazione si può scrivere

$$i = 3[n(n-1) - 2d - 3k] - 3n + k.$$

Ma la parentesi quadra vale la classe m (per la 1ª formula di PLÜCKER) e quindi

$$i = 3m - 3n + k$$

che scriveremo così

$$(2) \quad k - i = 3(n - m)$$

(1) Per applicazione di questi risultati, ai casi sopra considerati, si può utilmente vedere anche: BERTINI - *Complementi di Geometria proiettiva* - Bologna, Zanichelli 1928. In questo bel libro a pp. 135, 136, il giovane Lettore troverà, nella sua forma la più espressiva, l'enunciato che riassume i risultati di C. SEGRE.

Ora dalle prime due formule di PLÜCKER si ricava

$$2(d-t) + 3(k-i) = (n-m)(n+m)$$

dove t è il numero delle bitangenti. Sostituendo, in questa, per $k-i$ il valore dato dalla (2) risulta

$$(3) \quad d-t = \frac{(n-m)(n+m-9)}{2}$$

Adesso dalle (2) e (3) si ricava

$$d-t + 2(k-i) = \frac{n(n+3)}{2} - \frac{m(m+3)}{2}$$

la quale si può anche scrivere così

$$\frac{n(n+3)}{2} - d - 2k = \frac{m(m+3)}{2} - t - 2i$$

che è la 3^a formula di PLÜCKER nella forma richiesta. Essa dunque può essere sostituita dalla (1) del num. precedente che serve ad enumerare i flessi.

UNA NUOVA FORMA CANONICA DELLA TERNARIA CUBICA

[Ann. e R. Scuola Normale Supre. di Pisa. 1932]

... « non v'è campo sì bene mietuto che nulla offra all'opera delle spigolatrici, non v'è argomento così trito che non permetta, a chi lo riconsulti con sguardo fresco ed acuto, di arricchirlo di qualche ulteriore osservazione » ... G. SCORZA: *La matematica come arte*. Congresso delle Scienze. Trento, Settembre 1930.

1. — Chiamerò brevemente « *triangolo tangenziale* » di una cubica piana, ogni triangolo che si possa ordinare in guisa che ciascun vertice sia il tangenziale di quello che lo precede. Ammessa la esistenza di un tal triangolo e assumendolo come fondamentale, è ovvio che, disponendo opportunamente del punto unità, l'equazione della curva possa scriversi nella forma seguente

$$(1) \quad x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + 2t x_1 x_2 x_3 = 0$$

dove le x_i sono coordinate omogenee di punto e t è una costante. « È questa la forma canonica alla quale allude il titolo di questo modesto scritto. Per stabilirla, tutto si riduce a dimostrare che qualsiasi cubica generica possiede almeno un triangolo tangenziale. Intanto, la invarianza della (1) rispetto alla collineazione $(x_1 x_2 x_3)$ che permuta circolarmente $x_1 x_2 x_3$, dice che se un triangolo tangenziale esiste, i suoi vertici debbono essere permutati circolarmente da una delle collineazioni a periodo 3 spettanti alla cubica.

2. — Ciò premesso, si osservi che la Hessiana della (1) è la seguente

$$(2) \quad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - t^2(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1) - 2(t^3 + 3)x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Dalla coesistenza della (1) e della (2) si rivela così che i flessi della (1) esistono anche sulla

$$(3) \quad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = 0$$

la quale si spezza nelle 3 rette

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + x_3 = 0, \\ \alpha^2 x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{con } \alpha^3 = 1$$

che sono i lati (uniti) del triangolo i cui vertici sono i punti uniti della collineazione a periodo 3

$$(x_1 x_2 x_3)$$

già segnalata alla fine del numero precedente. Questo triangolo è dunque un triangolo inflessionale della cubica fondamentale (1). Si è dunque indotti a ritenere che, mediante una trasformazione del tipo seguente

$$(5) \quad \begin{cases} y_1 = a(ax_1 + \alpha^2 x_2 + x_3) \\ y_2 = b(\alpha^2 x_1 + \alpha x_2 + x_3) \\ y_3 = c(x_1 + x_2 + x_3) \end{cases}$$

si possa passare dalla forma (1) alla forma canonica consueta

$$(6) \quad y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6\lambda y_1 y_2 y_3 = 0.$$

Per comodità di calcolo è più semplice tentare il passaggio inverso dalla (6) alla (1) mediante le (5). Si trova allora, con tutta facilità, che lo scopo è raggiunto se le a , b , c vengono sottoposte alle seguenti condizioni

$$(7) \quad \begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 + 6\lambda abc = 0 \\ a^3 a^2 + b^3 a + c^3 = 0 \end{cases}$$

adempite le quali, la (6) si trasforma nella (1) con

$$t = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3\lambda abc}{a^3 a + b^3 a^2 + c^3}.$$

3. — In questo modo, la possibilità della trasformazione in parola dipende da quella di 3 valori per a , b , c (nessuno dei quali sia nullo) capaci di soddisfare le (7). Ora, se si riguardano le a , b , c suddette quali coordinate omogenee di punto, in un piano, si vede che le (7) rappresentano due cubiche (una generica e una equianarmonica) dotate di un medesimo triangolo inflessionale (il fondamentale), ma non dei medesimi flessi. Così, ad esempio, quelli della 1^a situati sopra $c = 0$ sono rappresentate da $a^3 + b^3 = 0$ e quelli della 2^a da $a^3 a + b^3 = 0$. Non sono dunque due cubiche sizigetiche, che allora si potrebbe senz'altro affermare la esistenza di 9 punti comuni ad entrambe *tutti distinti*. In ogni modo si potrà asserire che questi punti comuni effettivamente distinti, sono in numero

finito non superiore a nove, il che assicura che *una almeno* delle trasformazioni (5) esiste e quindi esiste almeno un triangolo tangenziale capace di fare assumere alla equazione della cubica fondamentale la forma (1) che può quindi assumersi, manifestamente, quale una nuova equazione canonica (l'invariante assoluto venendo così a dipendere dall'unico parametro t). Quanti sieno poi questi triangoli tangenziali vedremo in seguito (n. 7 e seguenti).

4. — Ma prima di procedere oltre è indispensabile eliminare un paradosso sul quale potrebbe fermarsi l'attenzione di chi osservasse che dal fascio sizigetico

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6\lambda y_1 y_2 y_3 = 0$$

siamo passati, mediante la trasformazione (5), al fascio

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + 2t x_1 x_2 x_3 = 0$$

che evidentemente non è più sizigetico avendo raccolto i suoi punti base nei tre nuovi punti fondamentali. La contraddizione si toglie subito considerando che i coefficienti a , b , c che figurano nella trasformazione suddetta dipendono da λ mediante le equazioni (7) alle quali debbono soddisfare, e quindi variano al variare di λ . Non esiste dunque una trasformazione « *unica* » che faccia passare contemporaneamente da tutte le curve dell'un fascio a quelle dell'altro e quindi non accade che i punti-base del 1° si trasformino in quelli del 2°.

5. — Occorre anche ricordare rapidamente quali e quante sieno le collineazioni spettanti a una cubica piana (rispetto alle quali essa è invariante), allo scopo di rappresentarle analiticamente nel modo il più adatto per stabilire, anche nei casi particolare più consueti, il numero dei triangoli tangenziali.

Dunque, nel caso generico, assumendo la consueta forma canonica

$$(8) \quad y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6\lambda y_1 y_2 y_3 = 0$$

si può osservare che le collineazioni che la lasciano invariata si ottengono sostituendo successivamente a

$$y_1, y_2, y_3;$$

$$(y_i, y_h, y_k); \quad (\alpha y_i, \alpha^2 y_h, y_k); \quad (\alpha^2 y_i, \alpha y_h, y_k)$$

dove i, h, k è una qualunque permutazione di 1, 2, 3 (identità compresa) e $\alpha^3 = 1$. Siccome tali permutazioni sono 6, si ottengono in tal guisa le 18 collineazioni del caso generico.

Nel caso equianarmonico è noto che si può fare $\lambda = 0$ e vengono così ad aggiungersi le altre 36 seguenti

Adesso, nel caso della cubica generica, applicando a (A_1) le collineazioni del n° 5 si trovano i seguenti nuovi triangoli inflessionali

$$(A_2) \quad b^3 c^3 y_1^3 + c^3 a^3 y_3^3 + a^3 b^3 y_2^3 - 3a^2 b^2 c^2 y_1 y_2 y_3 = 0,$$

$$(A_3) \quad b^3 c^3 y_3^3 + c^3 a^3 y_1^3 + a^3 b^3 y_2^3 - 3a^2 b^2 c^2 y_1 y_2 y_3 = 0,$$

$$(A_4) \quad b^3 c^3 y_2^3 + c^3 a^3 y_1^3 + a^3 b^3 y_3^3 - 3a^2 b^2 c^2 y_1 y_2 y_3 = 0,$$

$$(A_5) \quad b^3 c^3 y_2^3 + c^3 a^3 y_3^3 + a^3 b^3 y_1^3 - 3a^2 b^2 c^2 y_1 y_2 y_3 = 0,$$

$$(A_6) \quad b^3 c^3 y_3^3 + c^3 a^3 y_1^3 + a^3 b^3 y_2^3 - 3a^2 b^2 c^2 y_1 y_2 y_3 = 0.$$

Due qualunque di questi sei triangoli A_i non possono coincidere, altrimenti bisognerebbe che due dei tre cubi

$$a^3, b^3, c^3$$

fossero uguali. Ma, ad esempio, per $a^3 = a^3$, la 2^a delle (7) dà anche $a^3 = c^3$ e quindi ponendo $a^3 = b^3 = c^3 = m$ e osservando che la 1^a delle (7) puo scriversi

$$(a^3 + b^3 + c^3)^3 = -216\lambda^3 a^3 b^3 c^3$$

ne seguirebbe (essendo $m \neq 0$)

$$8\lambda^3 + 1 = 0$$

ma allora la cubica fondamentale si spezzerebbe in 3 rette (1) e il problema dei triangoli tangenziali non avrebbe più senso. Dunque

« Ogni triangolo inflessionale, come $y_1 y_2 y_3 = 0$, individua sei triangoli tangenziali ».

8. — Osserveremo adesso che i triangoli A_1 e A_2 sono corrispondenti nelle 3 omologie armoniche seguenti

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1, y_3, y_2 \\ y_1, y_2, y_3 \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1, ay_3, a^2y_2 \\ y_1, y_2, y_3 \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1, a^2y_2, ay_3 \\ y_1, y_3, y_2 \end{array} \right\}$$

che spettano alla cubica fondamentale, che hanno i centri nei tre flessi

$$(0, 1, -1); \quad (0, a, -1) \quad (0, a^2, -1)$$

situati sopra la retta inflessionale $y_1 = 0$ e che hanno per assi le tre polari armoniche relative

$$y_2 - y_3 = 0, \quad a^2y_2 - y_3 = 0, \quad ay_2 - y_3 = 0$$

convergenti in $(1, 0, 0)$. Dunque questi due triangoli sono iscritti in una

(1) CIANI: loc. cit., n° 126.

medesima conica, formano un esagono di STEINER e sulla conica si distribuiscono in tre involuzioni costituendo, ivi, una configurazione proiettivamente identica a quella dei 6 punti doppi in un piano doppio di una superficie di KUMMER tre volte tetraedroidale (1). Due tali triangoli tangenziali li chiameremo « coniugati ».

9. — Un facile calcolo conduce a trovare le seguenti espressioni per i vertici dei triangoli tangenziali Δ_i del n° 7

- (Δ_1) $(a, b, c); \quad (aa, \alpha^2b, c); \quad (\alpha^2a, ab, c);$
- (Δ_2) $(a, c, b); \quad (aa, c, \alpha^2b); \quad (\alpha^2a, c, ab);$
- (Δ_3) $(c, b, a); \quad (c, \alpha^2b, aa); \quad (c, ab, \alpha^2a);$
- (Δ_4) $(b, a, c); \quad (\alpha^2b, aa, c); \quad (ab, \alpha^2a, c);$
- (Δ_5) $(b, c, a); \quad (\alpha^2b, c, aa); \quad (ab, c, \alpha^2a);$
- (Δ_6) $(c, a, b); \quad (c, aa, \alpha^2b); \quad (c, \alpha^2a, ab)$

ed è ovvio constatare la esistenza delle seguenti 9 coppie di triangoli tangenziali coniugati :

- Δ_1 e Δ_2 iscritti entrambi nella conica $a^2 y_2 y_3 - bc y_1^2 = 0$;
- Δ_1 e Δ_3 » » » » $b^2 y_3 y_1 - cay_2^2 = 0$;
- Δ_1 e Δ_4 iscritti entrambi nella conica $c^2 y_1 y_2 - ab y_3^2 = 0$;
- Δ_2 e Δ_5 » » » » $c^2 y_1 y_3 - ab y_2^2 = 0$;
- Δ_2 e Δ_6 » » » » $b^2 y_1 y_2 - ac y_2^2 = 0$;
- Δ_3 e Δ_5 » » » » $a^2 y_1 y_2 - bc y_3^2 = 0$;
- Δ_3 e Δ_6 » » » » $c^2 y_2 y_3 - ab y_1^2 = 0$;
- Δ_4 e Δ_5 » » » » $b^2 y_2 y_3 - ac y_1^2 = 0$;
- Δ_4 e Δ_6 » » » » $a^2 y_1 y_3 - bc y_2^2 = 0$.

Si conclude dunque:

« I sei triangoli tangenziali, individuati da un medesimo triangolo inflessionale si distribuiscono in nove coppie di triangoli coniugati, in guisa che quelli di ogni coppia sono iscritti in una medesima conica sulla quale i sei vertici si corrispondono secondo tre involuzioni, componendo così una configurazione proiettivamente identica a quella di sei punti doppi in un piano doppio di una superficie di Kummer tre volte tetraedroidale.

(2) Veggasi ad es. CIANI: *Alcune osservazioni sopra la configurazione di Kummer*, Giorn. di Matematica, vol. XXXVI.

10. — Circa alle nove coniche del numero precedente, si può osservare che esse appartengono, a tre, a tre, ad altrettanti fasci-schiera nel seguente modo

$$\left. \begin{aligned} a^2 y_2 y_3 - b c y_1^2 &= 0 \\ b^2 y_2 y_3 - c a y_1^2 &= 0 \\ c^2 y_2 y_3 - a b y_1^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{del fascio-schiera } y_2 y_3 + h y_1^2 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 y_3 y_1 - b c y_2^2 &= 0 \\ b^2 y_3 y_1 - c a y_2^2 &= 0 \\ c^2 y_3 y_1 - a b y_2^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{del fascio-schiera } y_3 y_1 + h y_2^2 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 y_1 y_2 - b c y_3^2 &= 0 \\ b^2 y_1 y_2 - c a y_3^2 &= 0 \\ c^2 y_1 y_2 - a b y_3^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{del fascio-schiera } y_1 y_2 + h y_3^2 = 0.$$

È poi manifesto che ciascuna di queste coniche, di ognuno di questi fasci-schiera, taglia la cubica fondamentale secondo un esagono di Steiner (n. 8), ma soltanto per tre di esse (in ciascun fascio-schiera) accade che l'esagono suddetto sia costituito da una coppia di triangoli tangenziali coniugati nel senso stabilito nel n. 8.

Si può anche aggiungere che le coniche in parola possono distribuirsi nei seguenti sistemi, invarianti ciascuno, rispetto al G_{18} di colli-neazioni spettanti alla cubica generica

$$\left\{ \begin{aligned} a^2 y_2 y_3 - b c y_1^2 &= 0 \\ a^2 y_3 y_1 - b c y_2^2 &= 0 \\ a^2 y_1 y_2 - b c y_3^2 &= 0 \end{aligned} \right. ; \quad \left\{ \begin{aligned} b^2 y_2 y_3 - c a y_1^2 &= 0 \\ b^2 y_3 y_1 - c a y_2^2 &= 0 \\ b^2 y_1 y_2 - c a y_3^2 &= 0 \end{aligned} \right. ; \quad \left\{ \begin{aligned} c^2 y_2 y_3 - a b y_1^2 &= 0 \\ c^2 y_3 y_1 - a b y_2^2 &= 0 \\ c^2 y_1 y_2 - a b y_3^2 &= 0 \end{aligned} \right. .$$

11. — Siamo così pervenuti alle nove coniche precedenti partendo dal triangolo inflessivale $y_1 y_2 y_3 = 0$. Ebbene, partendo da un altro dei tre rimanenti triangoli inflessionali della cubica generica e ripetendo lo stesso procedimento, si troveranno altre nove coniche. Osserveremo adesso che nessuna delle prime può coincidere con alcuna delle seconde. Infatti, nella ipotesi contraria, dovrebbe una delle prime passare per due vertici del secondo triangolo inflessionale suddetto e non per il terzo vertice. Questo è impossibile: giacchè i vertici dei tre rimanenti triangoli inflessionali hanno per coordinate

$$\begin{array}{lll} (1, 1, 1); & (\alpha, \alpha^2, 1); & (\alpha^2, \alpha, 1) \\ (\alpha, 1, 1); & (1, \alpha, 1); & (1, 1, \alpha) \\ (\alpha^2, 1, 1); & (1, \alpha^2, 1); & (1, 1, \alpha^2) \end{array}$$

e se si impone il passaggio di una delle prime 9 coniche suddette, ad esempio della

$$a^2 y_2 y_3 - b c y_1^2 = 0$$

per uno solo dei vertici suddetti, si vede subito che ne consegue il passaggio per i due rimanenti

Dunque si conclude che le coniche circoscritte a coppie di triangoli tangenziali coniugati, sono nove per ogni triangolo inflessionale e quindi, in totale, 36 « *tutte distinte* ». Ne segue che due qualunque di queste coniche, provenienti da due diversi triangoli inflessionali, non possono essere circoscritte ad un medesimo triangolo tangenziale, giacchè se questo fosse, per esempio, Δ_1 del n. 9, applicando a Δ_1 una qualunque delle omologie armoniche rispetto a cui la cubica fondamentale è invariante, il triangolo Δ_1 si trasformerebbe in Δ_2 , o Δ_3 , o Δ_4 (n. 9) e quindi le due coniche suddette, dovendo contenere i vertici di Δ_1 e Δ_2 , o di Δ_1 e Δ_3 , o finalmente di Δ_1 e Δ_4 , dovrebbero coincidere il che abbiamo visto dianzi essere impossibile. Quindi niuno dei 6 triangoli tangenziali provenienti dal triangolo inflessionale $y_1 y_2 y_3 = 0$ secondo il n. 7, può coincidere con alcun dei triangoli di uguale specie provenienti da uno dei tre rimanenti triangoli inflessionali. Si conclude dunque che

« *La cubica generica possiede 24 triangoli tangenziali* ».

E come ciascuno appartiene a 3 coppie di triangoli coniugati (n. 9), così ne viene che tali coppie sono $\frac{24 \cdot 3}{2} = 36$, cioè tante quante le coniche prima considerate. Si può dunque aggiungere che

« *I 24 triangoli suddetti si distribuiscono in 36 coppie di triangoli coniugati (e quelli di ogni coppia sono iscritti in una medesima conica)* ».

12. — Passiamo alle cubiche dotate di un punto doppio. Riprendiamo perciò la (1)

$$(12) \quad x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + 2t x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Al variare del parametro t si ha un fascio di cubiche i cui punti-base son tutti assorbiti dai vertici del triangolo fondamentale che è tangenziale per ogni cubica del fascio. Ne segue dunque che nel fascio non esiste alcuna cubica costituita da una retta e da una conica propria chè, evidentemente, una tal curva così composta non può ammettere triangoli tangenziali. L'unica curva riduttibile del fascio è il triangolo fondamentale ($t = \infty$) giacchè, dal calcolo della Hessiana, risulta (n° 2) che essa è l'unica curva del fascio capace di coincidere con la propria Hessiana. Ciò premesso, siccome ogni cubica del fascio è invariante rispetto alla collineazione, a periodo 3, che produce il ciclo $(x_1 x_2 x_3)$, così ne segue che se esiste nel fascio una cubica irriduttibile dotata di un punto doppio, questo (dovendo essere unico per tal curva) dovrà coincidere con uno dei tre

punti uniti della collineazione suddetta, cioè con uno dei tre punti seguenti

$$(13) \quad (1, 1, 1); \quad (a, a^2, 1); \quad (a^2, a, 1).$$

Allora, annullando le 3 derivate prime del 1° membro della (12) precedente si trova

$$2x_1 x_2 + x_3^2 + 2tx_2 x_3 = 0$$

$$2x_2 x_3 + x_1^2 + 2tx_3 x_1 = 0$$

$$2x_3 x_1 + x_2^2 + 2tx_1 x_2 = 0$$

e sostituendo in questi valori dati dalle (13) si trova

$$t = -\frac{3}{2}, \quad t = -\frac{3}{2}a, \quad t = -\frac{3}{2}a^2$$

che individuano così le seguenti tre cubiche del fascio

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 - 3x_1 x_2 x_3 = 0$$

che ha un punto doppio in $(1, 1, 1)$;

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 - 3ax_1 x_2 x_3 = 0$$

che ha un punto doppio in $(a, a^2, 1)$;

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 - 3a^2 x_1 x_2 x_3 = 0$$

con un punto doppio in $(a^2, a, 1)$.

Le coniche polari di ciascuno di questi punti doppi sono, rispettivamente

$$(ax_1 + a^2x_2 + x_3)(a^2x_1 + ax_2 + x_3) = 0$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)(ax_1 + a^2x_2 + x_3) = 0$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)(a^2x_1 + ax_2 + x_3) = 0$$

cioè sono le congiungenti del punto doppio con i 2 rimanenti punti uniti della collineazione in discorso. Dunque ciascuna di tali coppie di rette, costituenti le tangenti nodali, è formata da due rette, distinte. Quindi niuno di tali punti doppi è cuspidale, ossia

« *La cubica cuspidale non possiede triangoli tangenziali* ».

13. — Per vedere poi quanti sieno questi triangoli (nel caso della cubica nodale) ripeteremo il procedimento del n° 2 che consiste nel partire dalla nota e consueta forma canonica

$$y_1^3 + y_2^3 + 6y_1 y_2 y_3 = 0$$

e nel cercare di portarla alla forma

$$x_2^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 - 3x_1 x_2 x_3 = 0$$

mediante una trasformazione del tipo (5). Si è così condotti alle seguenti condizioni

$$(12) \quad \begin{cases} a^3 + b^3 + 6abc = 0 \\ a^3 a + b^3 = 0 \\ 2(a^3 + b^3 - 3abc) + a(a^3 + b^3 a) = 0 \end{cases}$$

che però si riducono a due sole indipendenti, giacchè dalla prima si ricava

$$3abc = -\frac{a^3 + b^3}{2},$$

il qual valore, sostituito nella terza, la rende identica alla seconda.

Anche adesso, come nel caso generico, il triangolo tangenziale

$$x_1 x_2 x_3 = 0$$

viene trasformato, mediante le (11), nel triangolo Δ_1 del n° 7 cioè

$$(15) \quad b^3 c^3 y_1^3 + c^3 a^3 y_2^3 + a^3 b^3 y_3^3 - 3a^2 b^2 c^2 y_1 y_2 y_3 = 0$$

dove però le a , b , c debbono soddisfare le (14) precedenti e le collineazioni spettanti alla cubica nodale sono quelle descritte alla fine del n° 5. Si osservi adesso che $a^3 \neq b^3$ in forza della seconda delle (14). Dunque il triangolo

$$(16) \quad b^3 c^3 y_2^3 + c^3 a^3 y_1^3 + a^3 b^3 y_3^3 - 3a^2 b^2 c^2 y_1 y_2 y_3 = 0$$

è diverso da (10) e allora è manifesto che le collineazioni spettanti alla cubica nodale, dianzi indicate, o lasciano invariati ciascuno dei triangoli (15) e (16) o li permutano l'uno nell'altro. Si hanno dunque così due triangoli tangenziali e precisamente, con le notazioni del n° 7, essi sono Δ_1 e Δ_4 circoscritti alla conica

$$c^2 y_1 y_2 - a b y_3^2 = 0$$

e siccome adesso la cubica non possiede altri triangoli come $y_1 y_2 y_3 = 0$, così si conclude che

« *La cubica nodale possiede due soli triangoli tangenziali* (che sono coniugati nel senso stabilito nel n° 8) ».

14. — Così la ricerca inerente alla posizione e al numero dei triangoli tangenziali è esaurita in tutti i casi possibili. Ma però non posso chiudere questa breve esposizione, senza prevenire una osservazione che si presenterà spontanea al lettore e che si compendia nella seguente domanda: perchè non servirsi, nella ricerca attuale, della rappresentazione

parametrica della cubica? Ecco la risposta. Dalle considerazioni svolte, apparisce quale intimo legame vincoli i triangoli tangenziali ai triangoli inflessionali. Ebbene, nel caso della cubica ellittica, la rappresentazione parametrica, mediante funzioni ellittiche, si ottiene riferendosi ad un triangolo che ha troppo scarsa attinenza a qualsiasi triangolo inflessionale (1) ed è quindi naturale il prevedere che la ricerca, tentata per questa via, si presenti meno semplice di quella dianzi esposta. È diverso il caso delle cubiche razionali: in queste sì, la rappresentazione parametrica risolve rapidamente il problema confermando subito i risultati dei n° 12 e 13.

Infatti la forma canonica consueta della cubica nodale

$$y_1^3 + y_2^3 + y_1 y_2 y_3 = 0$$

consente di assumere la seguente rappresentazione parametrica

$$y_1 = \lambda^2, \quad y_2 = \lambda, \quad y_3 = -(\lambda^3 + 1)$$

di guisa che la tangente del punto $P_1 \equiv (\lambda_1)$ è

$$y_1 (2\lambda_1^3 - 1) + y_2 (2\lambda_1 - \lambda_1^4) + y_3^2 = 0.$$

Cercando le intersezioni di questa retta con la cubica si trova

$$(\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda \lambda_1^2 + 1) = 0.$$

Dunque il tangenziale P_2 di P_1 è individuato del valore del parametro λ pel quale si ha

$$\lambda \lambda_1^2 + 1 = 0$$

cioè da

$$-\frac{1}{\lambda_1^2}.$$

Ciò premesso, ecco i successivi tangenziali a cominciare da P_1

$$P_1 \equiv (\lambda_1), \quad P_2 \equiv \left(-\frac{1}{\lambda_1^2}\right), \quad P_3 \equiv (-\lambda_1^4), \quad P_4 \equiv \left(-\frac{1}{\lambda_1^8}\right).$$

Per ottenere un triangolo tangenziale bisogna che P_4 coincida con P_1 ossia bisogna che sia

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\lambda_1^8}$$

(1) Veggasi ad esempio BIANCHI: *Funzioni di variabile complessa*, 1ª edizione, p. 371. (Pisa, Spoerri, 1901).

cioè

$$\lambda_1^2 + 1 = 0$$

che equivale a

$$(\lambda_1^3 + 1)(\lambda_1^6 - \lambda_1^3 + 1) = 0,$$

ma per

$$\lambda_1^3 + 1 = 0$$

si trovano i 3 flessi della cubica i quali costituiscono tre soluzioni da escludere. Rimane dunque

$$\lambda_1^6 - \lambda_1^3 + 1 = 0$$

la quale serve a individuare i due triangoli tangenziali del n. 16.

Per la cubica cuspidale la forma canonica è

$$y_3 y_1^2 - y_2^3 = 0$$

con la rappresentazione parametrica

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \lambda, \quad y_3 = \lambda^3.$$

Ebbene, la tangente in $P_1 \equiv (\lambda_1)$ è

$$y_1 \cdot 2\lambda_1^3 - y_2 \cdot 3\lambda_1^2 + y_3 = 0$$

e quindi le sue intersezioni con la cubica sono date da

$$(\lambda_1 - \lambda)^2 (\lambda + 2\lambda_1) = 0$$

e per conseguenza il tangenziale P_2 di P_1 è individuato da

$$\lambda + 2\lambda_1 = 0$$

e quindi

$$P_2 \equiv -2\lambda_1.$$

Ecco quindi i successivi tangenziali a partire da P_1

$$P \equiv (\lambda_1), \quad P_2 \equiv (-2\lambda_1), \quad P_3 \equiv 4\lambda_1, \quad P_4 \equiv -8\lambda_1.$$

Come dianzi, occorre che si abbia $\lambda_1 = -8\lambda_1$, ossia $\lambda_1 = 0$ che fornisce la sola soluzione possibile che è il flesso della cubica (la quale però è da scartare). Dunque la cubica cuspidale non possiede triangoli tangenziali (n. 15).

15. — Riunendo varie osservazioni fatte precedentemente quà e là in varii punti della presente nota intorno al fascio

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + 2tx_1 x_2 x_3 = 0$$

(dove t è il parametro del fascio), si può dire che i 9 punti-base sono tutti assorbiti dai tre punti fondamentali di guisa che ognuno di essi conta per tre e quindi due cubiche qualunque del fascio si osculano nei punti suddetti. Se vale la pena di proporre un nome, si può dunque chiamarlo un fascio di cubiche osculanti: brevemente « *fascio osculante* » (da contrapporre al « *fascio sizigetico* »). Esso possiede un solo triangolo che è il fondamentale (n. 15) il quale costituisce la sola cubica riduttibile del fascio. Vi sono tre cubiche irriduttibili con un nodo, per ciascuna, nei tre punti uniti della collineazione a periodo tre rispetto alla quale è invariante ogni curva del fascio (n. 15). Non vi sono cubiche cuspidali ecc. ecc.

INTORNO ALLE BIQUINTUPLE DI RETTE.

[Rendic. Acc: Lincei 1933]

1. Il prof. B. Segre, in una elaborata e interessante Memoria pubblicata negli « Atti » di questa Illustre Accademia (1), chiama *quintupla di rette* un aggruppamento costituito da 5 rette (dello spazio ordinario) tali che, a 4, a 4, in tutti i 5 modi possibili, abbiano una sola trasversale comune. Si perviene così a 5 trasversali le quali compongono, a loro volta, una nuova quintupla e le due quintuple sono in mutua dipendenza (cioè si trovano in condizione simmetrica l'una rispetto all'altra). Ciò significa che 4 rette qualsiasi della 2^a quintupla posseggono una sola trasversale comune che è una delle 5 rette della prima quintupla, onde il nome di *biquintupla* dato all'insieme delle due quintuple. Indicando quindi con

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5$$

$$b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5$$

le 10 rette delle due quintuple così rappresentate, si può dire che ciascuna retta è incidente alle 4 rette d'indice differente dal suo che appartengono alla quintupla a cui essa non appartiene, ed è sghemba con le rimanenti. L'analogia con una « bissestupla » di rette di una superficie cubica generica è manifesta e spiega l'origine della denominazione *biquintupla*.

Ebbene il prof. B. Segre, in una Nota recentemente pubblicata nei

(1) Nella seduta del 5 febbraio 1933.

(2) B. SEGRE, *Le piramidi inscritte e circoscritte alle quadriche di S_4 e una notevole configurazione di rette dello spazio ordinario* (« Memorie della R. accademia dei Lincei », Serie IV, vol. II, fasc. VIII, 1927)

Rendiconti di questa Illustre Accademia (1), rivendica a sè stesso e giustamente, in confronto di vari Autori stranieri, la priorità di quanto riguarda la esistenza e lo studio di queste biquintuple, ma io mi permetto di fare osservare, a mia volta, che la esistenza e lo studio suddetto (a parte il nome di biquintuple) trovasi già in una mia Memoria, molto anteriore, la cui pubblicazione risale al 1902 (2). In questo lavoro, i due raggruppamenti costituiti da due quintuple hanno origine dallo studio di un particolare gruppo icosaedrico di collineazioni spaziale e le 10 rette delle 2 biquintuple nascono dai cinque sottogruppi tetraedrici relativi (due da ciascuno). Con le notazioni del prof. B. Segre, le coppie che così hanno origine sono $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$, $(a_5 b_5)$, ciascuna essendo invariante rispetto ad uno dei suddetti sottogruppi. (Vedi pp. 2, 13, 20, 21 della mia citata Memoria).

(1) B. SEGRE, *Revendicazione di priorità* « Rendiconti Acc. Lincei », fasc. 9, 1932.

(2) E. CIANI *Sopra i gruppi finiti di collineazioni quaternarie oloedricamente isomorfi con quelli dei poliedri regolari.* « Annali di Matematica », t. VII, Serie III, Milano 1902.

OSSERVAZIONI SOPRA ALCUNE QUARTICHE PIANE

studiate nei fascicoli 4° e 5° (1934) di queste

« Esercitazioni matematiche »

[Circ. Mat.^{oo} di Catania 1934]

1. — A p. 41 del fascicolo 4° suddetto, è proposto e sviluppato lo studio della quartica piana rappresentata dalla equazione cartesiana

$$x^4 - xy + y^4 = 0$$

Lo studio (molto ben condotto) è del prof. C. Carcaterra e mette in rilievo le proprietà metriche della curva quali risultano dalla precedente equazione. Ma essa possiede anche qualche notevole proprietà proiettiva che vale la pena di rilevare.

2. — Intanto, si può osservare che, in coordinate omogenee x, y, z , essa è proiettivamente identica con

$$x^4 + xyz^2 + y^4 = 0 \tag{1}$$

e sotto questa forma trovasi già considerata in una mia pubblicazione (1) (di molti anni indietro).

La curva può essere caratterizzata proiettivamente dalle seguenti condizioni:

(a) *Possiede un nodo inflessionale* (in $(0,0,1)$, con $x = 0$, $y = 0$ relative tangenti nodali-inflessionali);

(b) *Il gruppo delle 4 tangenti tirate, dal nodo suddetto, a toccare altrove la curva, è armonico e le due coppie armoniche, che esse compongono,*

(1) CIANI, *Le quartiche piene proiettive a se stesse*. Rendic. Circ. Mat. di Palermo. T. XXVIII, 1909, pp. 225-229.

hanno per coppia armonica ad entrambe quella costita dalle tangente nodali in parola.

La condizione (a) si soddisfa scrivendo la equazione nella forma

$$xyz^2 + \varphi = 0$$

dove $\varphi = 0$ è una binaria quartica in x, y , che rappresenta il gruppo delle 4 tangenti tirate dal nodo a toccare altrove la curva. I 4 punti di contatto esistono sopra $z = 0$.

Dall'adempimento di questa condizione (a), consegue la invarianza della curva rispetto alla omologia armonica rappresentata dalla sostituzione

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x & y & -z \\ x & y & z \end{array} \right\} \quad (2)$$

Questa omologia ha per centro il nodo inflessionale e per asse la retta $z = 0$ suddetta, sulla quale sono allineati i punti di contatto delle 4 tangenti dinanzi indicate. La cubica polare del nodo inflessionale si compone di tale asse e delle due tangenti nodali-inflessionali.

La condizione (b) si realizza con

$$\varphi = x^4 + y^4.$$

Si può inoltre disporre del punto unità per rendere uguali i tre coefficienti che figurano nella equazione, in guisa così che essa assuma la forma definitiva (1).

La quartica è di genere due (iperellittica).

3. -- Il fatto più saliente che la riguarda è la invarianza, non solo rispetto alla omologia (2), ma rispetto a tutto un gruppo G_{16} di 16 collineazioni piane che può intendersi generato dalle due sostituzioni

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \alpha x & \alpha^3 y & z \\ x & y & z \end{array} \right\} ; \left\{ \begin{array}{ccc} y & x & z \\ x & y & z \end{array} \right\} \quad (3)$$

con $\alpha^8 = 1$ (α rad. primit.)

Il gruppo è manifestamente oloedrico isomorfo a quello della doppia piramide ottagonale.

Esso contiene i due sottogruppi quadrimoni seguenti

$$\left. \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ccc} x & y & -z \\ x & y & z \end{array} \right\} ; \left\{ \begin{array}{ccc} y & x & z \\ x & y & z \end{array} \right\} ; \left\{ \begin{array}{ccc} y & x & -z \\ x & y & z \end{array} \right\} ; \text{identità} \\ \left\{ \begin{array}{ccc} x & y & -z \\ x & y & z \end{array} \right\} ; \left\{ \begin{array}{ccc} -y & x & iz \\ x & y & z \end{array} \right\} ; \left\{ \begin{array}{ccc} y & -x & iz \\ x & y & z \end{array} \right\} ; \text{identità} \end{array} \right\} \quad (4)$$

Ciascuno di questi gruppi è costituito dall'identità e da 3 omologie

armoniche i cui centri ed assi sono vertici e lati di uno stesso triangolo in guisa che ciascuna omologia ha per centro un vertice e per asse il lato opposto. Tali triangoli sono

$$z(x^2 - y^2) = 0 \quad , \quad z(x^2 + y^2) = 0.$$

Essi vengono permutati fra loro per opera della prima delle sostituzioni (3) e quindi altrettanto accade dei due sottogruppi suddetti.

Essi hanno in comune la omologia (2) e quindi sono cinque le omologie armoniche rispetto alle quali la curva è invariante. Chiamando « *o. omologico-armonica* » ogni quartica piana che goda invarianza rispetto ad una omologia armonica, si può dunque dire che:

La nostra quartica è cinque volte omologico-armonica (1).

Quattro centri di omologia e cioè

$$(1, 1, 0) ; (1, -1, 0) ; (1, i, 0) ; (1, -i, 0)$$

sono allineati sopra $z = 0$ e i 4 assi relativi

$$x \pm y = 0 \quad , \quad x \pm iy = 0$$

passano per (0,0,1) in guisa dunque che questo punto (0,0,1) e $z = 0$ sono centro e asse della quinta omologia spettante alla curva e la cui rappresentazione analitica è data dalla (2). Quest'ultima omologia è la più notevole, fra le 5 suddette, spettanti alla curva, perchè invariante rispetto al G_{16} totale e quindi, nel gruppo di doppia piramide a cui G_{16} è isomorfo oloedrico, viene a rappresentare la simmetria rispetto alla base comune delle due piramidi. Chiameremo dunque tale omologia col nome di « *omologia principale* » spettante alla curva e le 4 rimanenti con quello di « *omologie secondarie* ».

4. — È particolarmente importante, rispetto alla nostra quartica, il fascio-schiera di coniche rappresentato da

$$xy + \lambda z^2 = 0 \dots \quad (5)$$

e ogni conica del quale è ovviamente invariante rispetto alla omologia principale dianzi descritta.

La importanza si può desumere dalle seguenti considerazioni:

Un facile calcolo (2) porta alla seguente equazione per il contravariante equianarmonico della nostra quartica (cioè involuppo delle rette che la segano equianarmonicamente)

(1) Veggasi anche: CIANI, *I vari tipi possibili di quartiche più volte omologico-armoniche*. Rendic. Circ. Mat. di Palermo. T. XIII, 1899, p. 347.

(2) Veggasi ad es. SALMON: *Curve piane*, p. 371.

$$u^2 v^2 + 12w^4 = 0$$

dove u, v, w sono coordinate omogenee di retta.

Tale involuppo si spezza manifestamente nelle due coniche

$$uv \pm 2i\sqrt{3} w^2 = 0$$

e in coordinate di punto

$$8\sqrt{3} xy \pm iz^2 = 0$$

le quali ultime appartengono al fascio-schiera (5).

Accade altrettanto del covariante S (luogo di un punto la cui cubica polare è equianarmonica, o ciò che è lo stesso, la cui polohessiana è un triangolo (1). Per trovarne la equazione basta scrivere la cubica polare di un punto (x_1, y_1, z_1) che è

$$x_1(4x^3 + yz^2) + y_1(4y^3 + xz^2) + z_1 2xyz = 0$$

e dopo annullare l'invariante S che esprime la condizione perchè tale cubica sia equianarmonica (il che significa che la sua Hessiana è un triangolo). Si trova così una condizione in x_1, y_1, z_1 che dà la equazione cercata (2). Sostituendo a x_1, y_1, z_1 le coordinate correnti xyz , si trova

$$144x^2 y^2 + z^4 = 0$$

che si spezza nelle due coniche

$$12xy \pm iz^2 = 0$$

appartenenti nuovamente al fascio schiera (5).

Finalmente, si può aggiungere che l'invariantè cubico della nostra quartica è nullo (3) il che significa che essa è armonica col proprio contravariante equianarmonico. (4)

5. Per cercare i flessi della nostra quartica (che cadono fuori del nodo inflessionale) basta calcolare l'Hessiana che è

$$48x^3 y^3 + xyz^4 - 8z^2(x^4 + y^4) = 0$$

Combinando questa con la (1), si vede che i flessi cercati esistono sopra

$$16x^2 y^2 + 3z^4 = 0$$

e quindi sono i 16 punti comuni alla quartica e alle due coniche

(1) CIANI, *Monografie sulle quartiche piane*, Giorn. di Mat. che Vol. XLVIII.

(2) SALMON: l. c. p. 273.

(3) SALMON: l. c. p. 371.

(4) CIANI: Veggasi la citata « Monografia » (n. 9).

$$4xy \pm i\sqrt{3}z^2 = 0$$

le quali appartengono ancora al fascio schiera (5) Dunque *I flessi propri (cioè fuori del nodo inflessionale) sono 16 e giacciono, a 8, a 8, sopra due coniche bitangenti fra di loro.*

6 Finalmente cerchiamo le bitangenti proprie escludendo quindi le 4 rette che, uscendo dal nodo, vanno a toccare altrove la curva. A tale scopo basterà combinare la sua equazione (1) con quella di una retta

$$z = ax + by$$

non passante per (001). Un facile calcolo conduce a stabilire la esistenza delle 4 seguenti quaterne di bitangenti

$z = \pm \sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}} (x + y)$	passanti per (1, -1, 0)
$z = \pm \sqrt{-4 \pm 2\sqrt{2}} (x - y)$	» » (1, 1, 0)
$z = \pm \sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}} (\alpha x + \alpha^3 y)$	» » (1, i, 0)
$z = \pm \sqrt{-4 \pm 2\sqrt{2}} (\alpha x - \alpha^3 y)$	» » (1, -i, 0)

Si conclude dunque

Le bitangenti proprie sono 16 e, a 4, a 4, passano per i 4 centri delle omologie secondarie spettanti alla curva (i quali centri poi sono allineati sull'asse $z = 0$ della omologia principale).

Si può anche osservare che la cubica polare di (1, 1, 0) è costituita da $x+y=0$ [che è l'asse della omologia secondaria di cui (1, 1, 0) è centro] e dalla conica non degenera

$$4(x^2 - xy + y^2) + z^2 = 0$$

e quindi:

Gli 8 punti di contatto di ciascuna delle quaterne di bitangenti dianzi indicate, appartengono ad una stessa conica (pervenendo così a 4 di tali coniche).

7. Le altre due quartiche che vogliamo segnalare, sono quelle rappresentate dalle due seguenti equazioni cartesiane

$$x^4 + x^2 y^2 - a^2 y^2 = 0 \dots \quad (\text{Fasc. 5}^\circ \text{ Marzo 1934 p. 84})$$

$$4x^4 - 4R^2 x^2 + R^2 y^2 = 0 \dots \quad (\text{Fasc. 5}^\circ \text{ Marzo 1934 p. 87})$$

In coordinate omogenee xyz (e disponendo del punto unità) queste sono proiettivamente identiche alla

$$x^4 + x^2 y^2 + y^2 z^2 = 0$$

Essa possiede un tac-nodo in (001) con $y = 0$ tangente tac-nodale e

un nodo inflessionale in (010) con $x^2 + z^2 = 0$ relative tangenti nodali-inflessionali.

La retta $x = 0$ è la congiungente i due punti singolari suddetti e la $z = 0$ è la coniugata armonica di $x=0$ rispetto alla coppia delle tangenti nodali-inflessionali suddette.

8. L'osservazione principale è che la *quartica (supposta irriducibile)* è individuata dal possesso dei due punti singolari della specie descritta e cioè *tac-nodo e nodo inflessionale*.

Infatti, cominciamo dall'esigere la presenza del tac-nodo assumendolo come (001) e con $y = 0$ tangente tac-nodale e perciò esigiamo prima la presenza di una cuspidale in (001) con $y = 0$ tangente cuspidale. Si è così condotti alla forma

$$kz^2 y^2 + z\varphi + \psi = 0$$

dove k è una costante e φ, ψ sono binarie dei gradi rispettivi 3 e 4 in x, y e quindi del tipo

$$\varphi = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

$$\psi = mx^4 + nx^3y + px^2y^2 + qxy^3 + ry^4$$

Se adesso (001) deve essere tac-nodo, bisogna che le intersezioni della tangente cuspidale con la quartica sieno tutte assorbite dal tac-nodo, il che porta $a = 0$.

Aggiungiamo adesso la esistenza di un nodo che potrà assumersi come (010) il che porta

$$d = q = r = 0$$

Ordinando in y , la equazione della nostra curva diverrà

$$y^2(kz^2 + cxz + px^2) + y(bx^2z + nx^3) + mx^4 = 0$$

dove dunque

$$kz^2 + cxz + px^2 = 0$$

sarà la equazione complessiva delle tangenti nodali in (010). Se, inoltre, quest'ultimo deve essere un nodo-inflessionale bisogna che le intersezioni delle tangenti nodali suddette siano tutte assorbite dal nodo (010) il che esige $b = n = 0$ altrimenti, scrivendo l'ultima equazione della quartica nel modo seguente

$$y^2(kz^2 + cxz + px^2) + x^2(byz + nxy + mx^2) = 0$$

si vedrebbe che le due rette

$$kz^2 + cxz + px^2 = 0$$

e la conica

$$byz + nxy + mx^2 = 0$$

s'incontrerebbero in punti esterni a (010) e appartenenti alla quartica.

Rimane dunque per la equazione di quest'ultima,

$$y^2(kz^2 + cz + px^2) + mx^4 = 0$$

È ancora disponibile $z = 0$ sottoposta, per adesso, alla sola condizione di passare per (010). Ebbene, collochiamola sopra la coniugata armonica di $x = 0$ (la congiungente dei punti singolari) rispetto alla coppia delle tangenti inflessionali suddette, il che porta $c = 0$.

Dopo di che, disponendo del punto unità, si perviene alla equazione definitiva

$$x^4 + x^2 y^2 + y^2 z^2 = 0 \dots \quad (6)$$

che può ritenersi *la forma canonica della equazione della quartica piana dotata di un tac-nodo e di un nodo inflessionale.*

9. — Siccome il tac-nodo conta come due punti doppi, nella valutazione del genere, così la presenza ulteriore nel nodo inflessionale riduce il genere a zero. *La quartica è dunque razionale* e la rappresentazione parametrica è la seguente (in forma omogenea)

$$x = 2\lambda\mu(\lambda^2 + \mu^2) \quad ; \quad y = 4i\lambda^2\mu^2 \quad ; \quad z = \lambda^4 - \mu^4$$

Per $\lambda\mu = 0$ si ha il tac-nodo, per $\lambda^2 + \mu^2 = 0$ si ha il nodo inflessionale.

La curva è invariante rispetto al gruppo quadrimomia di collineazioni individuato dal triangolo fondamentale (n. 3).

L'Hessiana si compone della tangente tac-nodale contata due volte e della quartica

$$x^2 y^2 + 6x^2 z^2 + y^2 z^2 - x^4 = 0$$

Questa, combinata con quella della quartica fondamentale, cioè con la (6), conduce alla seguente

$$(x^2 - 2z^2) = 0.$$

Dunque i flessi esterni ai punti doppi sono i 4 punti d'incontro della curva con le due rette

$$x^2 - 2z^2 = 0$$

Quindi: *la nostra quartica possiede i 4 flessi propri*

$$\pm\sqrt{6} \quad , \quad \pm 2i \quad , \quad \sqrt{3}.$$

10. — Quanto alle bitangenti proprie (cioè non passanti per alcuno dei punti singolari della curva) si può osservare che se

$$z = ax + by$$

deve essere una bitangente, combinando questa equazione con quella della curva, si trova che deve essere un quadrato perfetto il primo membro della seguente equazione

$$x^4 + x^2 y^2 (1 + a^2) + 2abxy^3 + b^2 y^4 = 0$$

Sviluppando e confrontando risulta

$$m = 0 \quad , \quad bm = ab$$

Ma $b \neq 0$ altrimenti la bitangente supposta passa per (010) che è il nodo inflessionale e quindi non è bitangente propria. Dunque $a = 0$, dopo di che si è condotti alle due rette $y \pm 2z = 0$.

Quindi la curva possiede due bitangenti proprie passanti per (100).

QUADRANGOLI E QUADRILATERI COLLEGATI ALLE CUBICHE ELLITTICHE PIANE

[Circ. Mat.^{co} di Catania 1935]

1. **Quadrangoli.** — Il Prof. P. Cattaneo, in una elegante Nota pubblicata in queste medesime *Esercitazioni matematiche* (1), chiama « *quadrangolo diagonale* » ogni quadrangolo iscritto in una cubica piana C_3 (di genere 1) il cui triangolo diagonale sia pure esso iscritto in C_3 . La esistenza di questi quadrangoli si trova già affermata in Salmon (2) (come, del resto, avverte anche il Cattaneo). Basta condurre da un punto di C_3 le tangenti (altrove) a C_3 medesima perchè i 4 relativi punti di contatto formino un quadrangolo della specie descritta. Però il Cattaneo dimostra anche il teorema reciproco. Se, cioè, 4 punti di C_3 sono vertici di un quadrangolo diagonale, essi si possono riguardare come punti di contatto di 4 tangenti a C_3 condotte da un suo punto. Considerando una tangente t qualunque di C_3 di cui P sia il punto di contatto, è noto che si chiama « *tangenziale* » di P l'ulteriore punto P' in cui la t incontra C_3 . Ebbene l'A. suddetto chiama P « *antitangenziale* » di P' , di guisa che mentre un punto generico di C_3 ha un solo tangenziale, esso ha 4 antitangenziali. Usando questo linguaggio l'A. può dunque enunciare il teorema reciproco suddetto, affermando che i vertici di un quadrangolo diagonale di C_3 sono gli antitangenziali di un altro punto di C_3 medesima. È dunque lecito assumere come fondamentale il triangolo diagonale del suddetto quadrangolo e collocare i vertici di quest'ultimo in

$$(1, 1, 1) ; (-1, 1, 1) ; (1, -1, 1) ; (1, 1, -1),$$

(1) P. CATTANEO, *Sulle cubiche piane ellittiche*, *Esercitazioni matematiche*, (Circolo matematico di Catania), Vol. VII. Fasc. 6, 7, 8.

(2) SALMON, *Curve piane*, Traduzione francese di Chemin, p. 190.

di guisa che l'A. trova, per C_3 , la seguente equazione (salvo le diverse notazioni):

$$C_3 \equiv |ax(y^2 - z^2) + \beta y(z^2 - x^2) + \gamma z(x^2 - y^2) = 0|. \quad (1)$$

In questa rappresentazione i vertici suddetti sono gli antitangenziali del punto $P \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$ che appartiene a C_3 , come è ovvio verificare. È poi notevole, come osserva l'A., che il triangolo diagonale in parola, insieme a P , componga un nuovo quadrangolo diagonale che Egli chiama « derivato » del primo e i vertici di questo derivato sono gli antitangenziali di $P' \equiv (\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta)$ ecc. ecc.

2. Mi permetto di aggiungere le seguenti considerazioni.

La (1), al variare di α, β, γ , rappresenta una rete di cubiche i cui 7 punti base sono costituiti dai 4 vertici del quadrangolo e dai 3 del suo triangolo diagonale, cosicchè si può dire che il passaggio di una C_3 per questi 7 punti, impone 7 condizioni, tutte indipendenti, alla C_3 medesima. È poi ovvio accertare che tutte le C_3 della rete che passano per $P \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$, passano anche per $P' \equiv (\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta)$. Se dunque si osserva che P' è il tangenziale di P rispetto alla C_3 (individuata da α, β, γ) e che $P P'$ sono anche coniugati nella polarità rispetto alle coniche del fascio i cui punti base sono

$$(1, 1, 1) ; (-1, 1, 1) ; (1, -1, 1) ; (1, 1, -1),$$

si conclude che:

Il tangenziale di un punto P di una C_3 ellittica si può anche riguardare come il coniugato P' di P nella polarità individuata dal fascio di coniche i cui punti base sono i 4 antitangenziali di P rispetto a C_3 .

Si può dunque dire che P e P' si corrispondono tanto nella involuzione individuata dalla rete di cubiche in parola, quanto nella involuzione quadratica stabilita dalla polarità suddetta. Si realizza così un esempio (che mi sembra interessante) e che può esprimersi nel seguente modo:

La involuzione piana individuata mediante una rete di cubiche dotata di 7 punti base, segnalata (com'è ben noto) per primo da Geiser, coincide, nell'esempio attuale, con quella quadratica individuata dalle coppie di punti coniugati, nella polarità, rispetto alle coniche di un fascio, in quanto, nel caso particolare suddetto, esse hanno lo stesso effetto.

Esse però, nella ben nota classificazione delle involuzioni piane dovuta a BERTINI, appartengono a due tipi birazionalmente distinti (1).

(1) Precisamente ai tipi (a) e (c) considerati dall'Autore suddetto nelle sue *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano*, Ann. di Matematica S. II, T. VIII, pp. 244-45.

Nella Memoria (dello stesso Autore) che ha per titolo *Sopra una classe di trasfor-*

3. Riprendendo la equazione (1) della C_3 si trova che i rimanenti punti d'incontro della curva con i lati del triangolo fondamentale sono

$$(0, \beta, \gamma) ; (\alpha, 0, \gamma) ; (\alpha, \beta, 0)$$

e quindi le relative tangenti, ivi, a C_3 sono

$$\begin{aligned} \alpha(\beta^2 - \gamma^2)x - \beta\gamma^2y + \beta^2\gamma z &= 0; \\ \gamma^2\alpha x + \beta(\gamma^2 - \alpha^2)y - \gamma\alpha^2z &= 0; \\ -\alpha\beta^2x + \alpha^2\beta y + \gamma(\alpha^2 - \beta^2)z &= 0. \end{aligned}$$

Ebbene, si può osservare che queste tre rette convergono nel punto P'' di coordinate

$$\beta\gamma[\alpha^2(\beta^2 + \gamma^2) - \beta^2\gamma^2], \gamma\alpha[\beta^2(\gamma^2 + \alpha^2) - \gamma^2\alpha^2], \alpha\beta[\gamma^2(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha^2\beta^2],$$

che appartiene a C_3 ed è anzi il tangenziale del punto P' del n. 2 (in guisa che mentre P' è tangenziale di P , P'' lo è di P'). Il modo più semplice di verificare tutto questo è di scrivere l'equazione di C_3 nel seguente modo

$$\alpha x(y+z)(y-z) + \beta y(z+x)(z-x) + \gamma z(x+y)(x-y) = 0$$

e quella della tangente a C_3 in P' così

$$\alpha^3(\gamma^2 - \beta^2)x + \beta^3(\alpha^2 - \gamma^2)y + \gamma^3(\beta^2 - \alpha^2)z = 0,$$

dopo di che è facile osservare che le coordinate di P'' soddisfano entrambe queste ultime equazioni. Si può dunque dire che:

Dal triangolo fondamentale attuale se ne deduce subito un altro iscritto nel primo e in C_3 che gode della stessa proprietà del primo, in quanto le tangenti a C_3 , nei suoi tre vertici, concorrono in un punto nuovamente appartenente a C_3 .

4. La rete di cubiche (1) merita qualche altra osservazione. La disposizione dei punti base indica che la rete contiene le seguenti terne di rette. Quattro di esse sono costituite (ciascuna) da tre lati del quadrangolo diagonale concorrenti in uno stesso vertice del quadrangolo medesimo [per i seguenti valori]

mazioni univoche involutorie, id, id, id, a p. 19, si dimostra che la involuzione quadratica in discorso si può ridurre, mediante una trasformazione birazionale, all'omologia armonica, cioè al tipo (a) dianzi indicato. D'altra parte, il Prof. BERZOLARI, mi fa osservare che l'esempio attuale trovasi già descritto da E. WEIR in « Sitzungsber. Ak. Wien 58 (1868) », senza, naturalmente, che ivi venga segnalata la coincidenza dell'effetto di due tali involuzioni, giacchè la classificazione « Bertiniana » (dal punto di vista delle trasformazioni birazionali) allora non era nemmeno all'orizzonte!...

$$(\alpha = \beta = \gamma), (\alpha = \beta = -\gamma), (\beta = \gamma = -\alpha), (\gamma = \alpha = -\beta)].$$

Le tre rimanenti sono formate (ciascuna) da un lato del triangolo diagonale e dai due lati del quadrangolo che passano per il vertice opposto al lato suddetto

$$[\text{per } \beta = \gamma = 0, \gamma = \alpha = 0, \alpha = \beta = 0].$$

La Hessiana della C_3 generica della rete è

$$\begin{aligned} & \alpha(\gamma^2 - \beta^2)x^3 + \beta(\alpha^2 - \gamma^2)y^3 + \gamma(\beta^2 - \alpha^2)z^3 + \\ & + (\alpha^2 + \beta^2 - 2\gamma^2)(\beta x - \alpha y)xy + (\beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha^2)(\gamma y - \beta z)yz + \\ & + (\gamma^2 + \alpha^2 - 2\beta^2)(\alpha z - \gamma x)zx = 0 \end{aligned}$$

la quale conferma la esistenza delle terne di rette dianzi constatata (si noti che l'Hessiana di 3 rette convergenti in un punto è indeterminata).

Quanto ai noti invarianti S e T della C_3 medesima, si potrebbe dar loro una interpretazione geometrica anche più significativa della consueta, riguardando α, β, γ come coordinate omogenee di un punto, in un piano e quindi riferendo ogni tal punto a quella C_3 della rete che è individuata dai medesimi valori di α, β, γ (o ad essi proporzionali). Nascerebbe così una corrispondenza biunivoca fra i punti del piano suddetto e le cubiche della rete. Allora le equazioni

$$S = 0, T = 0$$

rappresenterebbero, sempre nel piano in parola, due curve, l'una del 4° e l'altra del 6° ordine, luogo geometrico dei punti le cui C_3 corrispondenti sono equianarmoniche, od armoniche.

5. Quadrilateri. — Diremo che un quadrilatero completo è iscritto in una C_3 , quando essa passi per tutti i suoi vertici. La esistenza di questi quadrilateri può farsi dipendere, molto semplicemente, da quella ben nota (1) delle coniche tritangenti a C_3 mediante la semplice osservazione seguente:

Considerando un triangolo iscritto in una C_3 , si può dimostrare come, esigere che siano allineati i tre rimanenti punti d'incontro dei lati con C_3 (fuori dei vertici), ovvero esigere che i vertici del triangolo siano i punti di contatto di una conica tritangente, ivi, a C_3 sono condizioni equivalenti.

Infatti, assumendo come fondamentale un triangolo iscritto in C_3 , la sua equazione potrà scriversi così

(1) Veggasi ad es. PASCAL, *Repertorio di Matematiche Superiori*, 1ª edizione, Vol. II pag. 252.

$$my^2z + m'yz^2 + nz^2x + n'zx^2 + px^2y + p'xy^2 + qxyz = 0, \quad (2)$$

dopo di che i rimanenti punti d'incontro dei lati del triangolo suddetto con C_3 (fuori dei vertici) sono

$$(0, m', -m) ; (n, 0, -n') ; (p', -p, 0).$$

Esigiamo adesso che questi tre punti sieno allineati e assumiamo questa retta come retta unita il che significa fare

$$m = m', n = n', p = p'$$

e allora l'equazione di C_3 diviene

$$C_3 \equiv \{ (x + y + z) (myz + nzx + pxy) + kxyz = 0 \} \quad (3)$$

dove

$$k = q - (m + n + p).$$

Resulta allora che la conica

$$C_2^I \equiv \{ myz + nzx + pxy = 0 \}$$

non ha altri punti comuni con C_3 che i fondamentali e che quindi è tritangente, ivi, a C_3 essendo

$$py + nz = 0, mz + px = 0, nx + my = 0 \quad (4)$$

le tre tangenti relative.

Viceversa, prendiamo una conica circoscritta al triangolo fondamentale quale la C_2^I , e consideriamo una C_3^I circoscritta pure allo stesso triangolo quale la seguente

$$m_1y^2z + m'_1yz^2 + n_1z^2x + n'_1zx^2 + p_1x^2y + p'_1xy^2 + q'xyz = 0.$$

Allora le tangenti a C_2^I , nei punti fondamentali, sono le (4), quelle tangenti a C_3^I negli stessi punti sono

$$p_1y + n'_1x = 0 ; m_1z + p'_1x = 0 ; n_1x + m'_1y = 0 \quad (4)$$

Se la C_2^I deve essere tritangente a C_3^I occorre che le (4) e le (5) rappresentino le stesse rette, ossia occorre che

$$\frac{p}{p_1} = \frac{n}{n'_1} ; \frac{m}{m_1} = \frac{p}{p'_1} ; \frac{n}{n_1} = \frac{m}{m'_1}$$

da cui

$$m'_1 = \frac{mn_1}{n}, n'_1 = \frac{np_1}{p} ; p'_1 = \frac{pm_1}{m}$$

e quindi

$$m_1 n_1 p_1 - m'_1 n'_1 p'_1 = 0,$$

che è la condizione perchè i rimanenti punti comuni a C_2 e a C_3^I e ai lati del triangolo fondamentale (fuori dei vertici) sieno allineati. *c. d. d.*

6. Ciò premesso, è ovvio che ogni conica tritangente a C_3 individua un quadrilatero iscritto nella curva medesima. I suoi lati sono quelli del triangolo dei punti di contatto e la retta sulla quale sono allineati i rimanenti punti d'incontro di C_3 dei tre lati suddetti. Viceversa: *un quadrilatero iscritto in C_3 individua 4 coniche tritangenti*: una per ciascuno dei 4 triangoli che si ottengono scegliendo, in tutti i modi possibili, tre dei quattro lati del quadrilatero. Ora bisogna osservare che, (con ragionamento analogo a quello pel quale ad una retta generica del piano di C_3 si associa la sua « satellite ») si può associare anche ad ogni conica tritangente una retta satellite. Infatti, indicando con C_2 la supposta conica tritangente, con A, B, C i punti di contatto e con a, b, c le rispettive tangenti comuni a C_2 e C_3 , le due cubiche costituite da C_3 e dall'insieme delle tre rette a, b, c , hanno sei punti comuni assorbiti in A, B, C (ciascuno contato due volte) e quindi i rimanenti tre punti comuni saranno in linea retta, il che vuol dire che su questa retta giaceranno i tangenziali dei tre punti suddetti (1). È dunque naturale di chiamare questa retta la « satellite » della conica C_2 .

7. Ebbene vale adesso il seguente teorema :

Le satelliti delle quattro coniche tritangenti a C_3 , individuate da un quadrilatero iscritto, secondo il n. precedente, coincidono in una sola e stessa retta la quale è anche satellite dei quattro lati del quadrilatero medesimo.

Si può verificare tutto questo riprendendo la equazione della C_3 nella forma già adottata nel n. 5, cioè

$$C_3 \equiv \{myz(y+z) + nzx(z+x) + pxy(x+y) + pxyz = 0\}$$

e dopo scrivendo le equazioni delle quattro coniche tritangenti nel modo seguente :

$$C_2^I \equiv \{myz + nzx + pxy = 0\};$$

$$C_2^{II} \equiv \{py(x+y) + n(z+x) + (q-m)yz = 0\};$$

$$C_2^{III} \equiv \{mz(y+z) + px(x+y) + (q-n)zx = 0\};$$

$$C_2^{IV} \equiv \{nx(z+x) + my(y+z) + (q-p)xy = 0\}.$$

(1) Veggasi ad es. anche PASCAL, *loc. cit.*

Con questa disposizione degli elementi di riferimento, il quadrilatero iscritto è rappresentato da

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 0$$

e le coppie di vertici opposti sono le seguenti

$$\{A \equiv (1, 0, 0); \quad A' \equiv (0, 1, -1) \quad ; \quad \{B \equiv (0, 1, 0); \quad B' \equiv (1, 0, -1)\}; \\ \{C \equiv (0, 0, 1); \quad C' \equiv (1, -1, 0)\}.$$

Ciò premesso, scriviamo adesso le equazioni delle seguenti tre coppie di rette

$$a \equiv [py + nz = 0], \quad a' \equiv [(n + p - q)x - m(y + z) = 0]; \\ b \equiv [mz + px = 0], \quad b' \equiv [p + m - q]y - n(z + x) = 0]; \\ c \equiv [nx + my = 0], \quad c' \equiv [(m + n - q)z - p(x + y) = 0]$$

che sono tangenti alla C_3 ordinatamente nelle coppie dei vertici opposti dianzi indicati con

$$(A, A') \quad ; \quad (B, B') \quad ; \quad (C, C').$$

Ebbene è facile allora constatare che

la C_2^I	passa per i punti	A, B, C	e che è ivi tangente ad	a, b, c
» C_2^{II}	»	»	»	a, b', c'
» C_2^{III}	»	»	»	a', b, c'
» C_2^{IV}	»	»	»	$a', b', c.$

Dopo di che basta osservare che i punti d'incontro di a con a' di b con b' , di c con c' sono ordinatamente i seguenti

$$A'' \equiv [m(n - p), n(n + p - q), -p(n + p - q)]; \\ B'' \equiv [-m(p + m - q), n(p - m), p(p + m - q)]; \\ C'' \equiv [m(m + n - q), -n(m + n - q), p(m - n)]$$

e infine che A'', B'', C'' appartengono a C_3 e sono allineati sulla retta

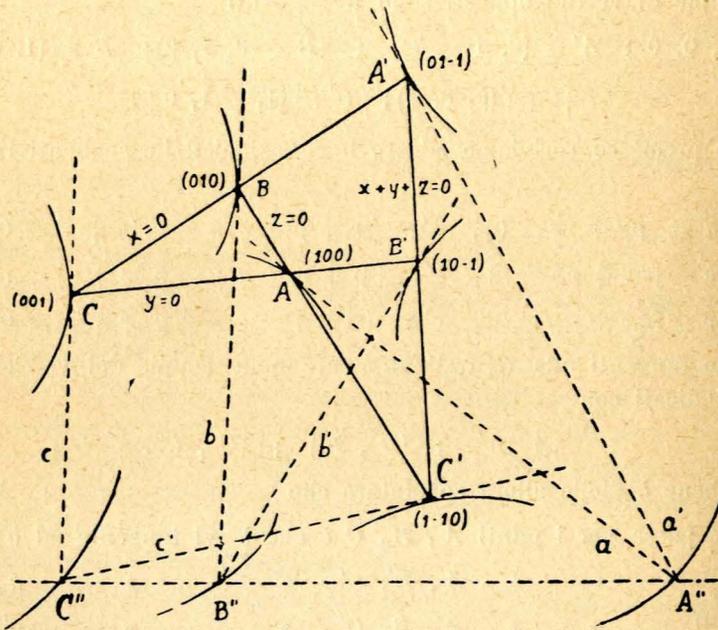
$$mnp(x + y + z) + (q - m - n - p)(npx + pmy + mnz) = 0$$

che è la satellite richiesta e così il teorema è dimostrato. Esso può anche esprimersi affermando che

I vertici opposti di un quadrilatero iscritto in una C_3 (ellittica) hanno lo stesso tangenziale.

I tre tangenziali che così si ottengono, dalle tre coppie di vertici opposti suddetti, sono allineati sulla retta satellite dei 4 lati e delle 4 coniche tritangenti individuate dal quadrilatero medesimo (n. 6).

8. Per mettere meglio in vista le considerazioni del n. precedente vale la qui annessa figura. Le rette *a tratto pieno* sono i lati del quadrilatero, quelle *punteggiate* sono le tangenti e la retta *a tratto e punto* è la satellite.



9. È da notare infine che si può dare una forma alla equazione di C_3 che è simmetrica rispetto ai quattro lati del quadrilatero iscritto, assumendo, come trilatero fondamentale, non quello costituito da tre qualsiasi dei lati suddetti, come nel n. 5, ma invece il trilatero diagonale del quadrilatero suddetto, dopo di che, con evidente e opportuna scelta dell'elemento unità questi lati possono rappresentarsi con

$x + y + z = 0$, $-x + y + z = 0$, $x - y + z = 0$, $x + y - z = 0$
e i vertici con

$(0, 1, 1)$; $(0, 1, -1)$; $(1, 0, 1)$; $(1, 0, -1)$; $(1, 1, 0)$; $(1, -1, 0)$.

Con questa notazione il quadrilatero attuale è il polare del quadrangolo del n. 2 rispetto alla conica covariante $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ che è la cosiddetta conica dei 14 punti di tutta la configurazione (1).

(1) Vedi ad es. CIANI, *Alcune osservazioni sopra la configurazione di Kummer*, *Giornale di Matematiche* Vol. XXXVI (5^o della 2^a serie) (n. 11).

Esigendo il passaggio di una C_3 per i vertici suddetti, si trova la equazione

$$mx(z^2 + y^2 - x^2) + ny(x^2 + z^2 - y^2) + pz(y^2 + x^2 - z^2) + q_3yz = 0$$

dove però, naturalmente, m, n, p, q sono diverse dalle m, n, p, q dei nn. 5, 6, 7. Questo conferma che il passaggio per i 6 punti in parola impone alla C_3 sei condizioni linearmente indipendenti (e al variare di m, n, p, q si trova un sistema lineare ∞^3 di cubiche).

SOPRA UN FASCIO SIZIGETICO DI SUPERFICIE CUBICHE

[Rendic. Acc. : Lincei 1935]

1. In evidente analogia col noto fascio sizigetico di cubiche piane, chiamerò, con uguale denominazione, il seguente fascio di superficie cubiche

$$\sum_1^4 x_i^3 + 6\lambda (x_2 x_3 x_4 + x_3 x_4 x_1 + x_1 x_3 x_2 + x_1 x_2 x_3) = 0$$

dove le x_i sono coordinate omogenee di punto nello spazio e λ è il parametro del fascio. Le sezioni piane delle facce del tetraedro fondamentale sono costituite da altrettanti fasci sizigetici di cubiche piane.

2. Prima di procedere nello studio proposto, credo utile qui richiamare le seguenti nozioni riguardanti alcune classi di superficie cubiche.

Se accade che per un punto P di una superficie cubica S_3 , passino 3 rette di S_3 , esistenti in un piano π , il punto P si chiama di Eckardt (dal nome del primo autore che considerò questo caso particolare): anche il piano π prende ugual nome e così pure la superficie S_3 .

Escludendo il caso che P sia doppio per S_3 , si vede facilmente che la quadrica polare di P si spezza in due piani di cui uno è π e l'altro π' che non passa per P e si suol chiamare il piano polare armonico di P . Questo punto P è doppio per Hessiana e quindi è un vertice del pentaedro di Sylvester. La superficie S_3 è invariante rispetto alla omologia armonica che ha il centro in P e per piano fondamentale π' (polare armonico di P) (1).

(2) Vedi ad es. la mia Nota, *Sulle superficie algebriche simmetriche*, in « Rendiconti R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. IV, 1890. — De Paolis chiama flesso di S_3 un punto P di Eckardt, perchè ogni sezione piana di S_3 per tale punto ha ivi un flesso e quindi, in analogia con le cubiche piane, è naturale di chiamare piano polare armonico di P quello sopra indicato con π' (che cioè fa parte della quadrica polare di P senza passare per P). Veggasi, DE PAOLIS, *Ricerche sulle superficie di 3° ordine*, Nota II. « Atti R. Acc. Lincei », 1880, p. 10.

Viceversa se S_3 è invariante, rispetto a una omologia armonica, risulta facilmente che il centro è un punto di Eckardt e il piano fondamentale è il piano polare armonico relativo. Una S_3 può contenere tutti i 10 vertici del pentaedro di Sylvester (realizzando così il caso massimo). Si ottiene allora la *superficie diagonale di Clebsch* (1).

3. Considero adesso il caso in cui la S_3 (supposta non rigata) sia invariante rispetto ad una involuzione gobba di assi r ed s . Pensando alle rette unite della involuzione (che sono appoggiate ad r ed s) risulta facilmente che uno degli assi suddetti appartiene a S_3 : sia r .

Assumendo questa retta come $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ la involuzione gobba in parola si può rappresentare con la sostituzione

$$I \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

dopo di che, esigendo la invarianza di S_3 , rispetto a I , si trova per la sua equazione la seguente forma

$$ax_1^3 + bx_1^2 x_2 + cx_1 x_2^2 + dx_2^3 + ex_1 x_3^2 + fx_1 x_4^2 + gx_2 x_3^2 + hx_2 x_4^2 + \\ + kx_1 x_3 x_4 + lx_2 x_3 x_4 = 0.$$

Allora la quadrica polare di un punto $(0, 0, \lambda, 1)$ generico di r , si può rappresentare così

$$x_1 [x_3 (2e\lambda + k) + x_4 (k\lambda + 2f)] + x_2 [x_3 g\lambda + l] + x_4 (l\lambda + 2b) = 0$$

la quale si spezzerà in due piani se accadrà che le due parentesi quadre annullate rappresentino lo stesso piano per la qual cosa occorre che sia

$$\begin{vmatrix} 2e\lambda + k & k\lambda + 2f \\ 2g\lambda + l & l\lambda + 2b \end{vmatrix} = 0$$

la quale, essendo di 2° grado in λ , dimostra che sopra r ci sono due punti di Eckardt. Si conclude dunque:

Se una S_3 , priva di punti doppi, è invariante rispetto a una involuzione gobba, uno degli assi della involuzione appartiene ad S_3 e sopra tale asse ci sono due punti di Eckardt. Ne consegue la invarianza di S_3 rispetto anche alle due omologie armoniche individuate (nel modo scritto nel n. 2) dai due punti suddetti. Il prodotto di queste omologie è la involuzione in parola. Se si aggiunge la identità si perviene così ad uno dei tre gruppi quadrinomi possibili di collineazioni spaziali e precisamente al G_4'' descritto

(1) Vedi ad es. l'altra mia Nota: *Sulla superficie diagonale di Clebsch*. • Rendiconti R. Acc. Lincei», vol. VII. 1931.

in un altro mio lavoro (1). La S_3 è quindi invariante rispetto a tale G_4'' .

4. Finalmente, prima ancora di passare allo studio, oggetto principale del presente scritto, occorre considerare il caso di una S_3 invariante rispetto a una omologia spaziale a periodo 3. Assumendo il centro di questa supposta omologia quale punto $(0\ 0\ 0\ 1)$ e il piano fondamentale quale $x_4 = 0$, essa potrà rappresentarsi con la sostituzione

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \alpha x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \right\} \text{ con } \alpha^3 = 1 \text{ (} \alpha \text{ rad. primit.).}$$

Esigendo adesso la invarianza di S_3 , rispetto a questa omologia, si trova per S_3 la equazione seguente

$$ax_4^3 + u_3 = 0$$

dove a è una costante e u_3 una ternaria in $x_1 x_2 x_3$.

Segue che la quadrica polare di $(0\ 0\ 0\ 1)$ è il piano doppio $x_4^2 = 0$.

Viceversa: suppongo la esistenza di un punto la cui quadrica polare sia un piano doppio non passante per il punto.

Scrivo la equazione di S_3 nella consueta forma

$$u_0 x_4^3 + u_1 x_4^2 + u_2 x_4 + u_3 = 0$$

dove le u_i sono ternarie in $x_1 x_2 x_3$ di grado pari all'indice (e quindi u_0 è una costante). Assumendo il punto suddetto quale $(0\ 0\ 0\ 1)$ e il piano doppio quale $x_4 = 0$, la condizione supposta trae che u_1, u_2 siano identicamente nulle, dopo di che risulta la invarianza di S_3 rispetto alla omologia cubica dianzi rappresentata. Calcolando poi l'Hessiana di S_3 si vede facilmente che essa si compone di $x_4 = 0$ e del cono cubico che da $(0\ 0\ 0\ 1)$ proietta l'Hessiana di $u_3 = 0$. Dunque:

Per una superficie cubica S_3 sono condizioni equivalenti le seguenti:

a) *Esistenza di un punto la cui quadrica polare sia un piano doppio non passante per il punto;*

b) *Invarianza rispetto ad una omologia a periodo tre che ha per centro e piano fondamentale il punto e il piano suddetti.*

Siccome poi l'Hessiana di S_3 si compone del piano in parola e del cono cubico che dal punto suddetto proietta la Hessiana della sezione di S_3 col piano medesimo, così ne viene che i nove flessi di tale sezione sono altrettanti punti doppi della superficie Hessiana nominata e quindi al-

(1) CIANI, *Sopra i gruppi finiti di collineazioni quaternarie oloedricamente isomorfi con quelli dei poliedri regolari*. « Annali di Matematica », to. VIII, ser. III, p. 4, 1902.

trettanti punti di Eckardt di S_3 . La conferma analitica di questo si consegue scrivendo la equazione di S_3 così

$$ax_4^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6bx_1x_2x_3 = 0$$

e osservando che ad es. la quadrica polare del punto $P \equiv (1, -1, 0, 0)$ si compone dei due piani

$$x_1 + x_2 - 2bx_3 = 0 \quad , \quad x_1 - x_2 = 0$$

di cui il 1° tangente a S_3 in P e quindi la taglia in tre rette ivi convergenti e il 2° è piano polare armonico relativo (n. 2).

Ecco dunque realizzato un esempio di superficie cubica dotata di nove punti di Eckardt (nei nove flessi suddetti). Le 27 rette della superficie si distribuiscono in nove terne di Eckardt, i cui piani passano tutti per il punto la cui quadrica polare è il piano doppio più volte nominato.

5. Prendiamo ora in esame il fascio sizigetico

$$(1) \quad \sum_1^4 x_i^3 + 6\lambda(x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 + x_1x_2x_3) = 0.$$

Cominceremo dall'osservare che tutte le S_3 del fascio passano per i 6 seguenti punti

$$\begin{aligned} A &\equiv (1, -1, 0, 0) \quad ; \quad B \equiv (0, 1, -1, 0) \quad ; \quad C \equiv (0, 1, 0, -1) \\ A' &\equiv (0, 0, 1, -1) \quad ; \quad B' \equiv (1, 0, 0, -1) \quad ; \quad C' \equiv (1, 0, -1, 0) \end{aligned}$$

i quali esistono sul piano $\sum_1^4 x_i = 0$ e costituiscono i vertici del quadrilatero secondo il quale tale piano sega le 4 facce del tetraedro fondamentale. Ciascuno di tali punti è di Eckardt per ciascuno S_3 . Ad es. la quadrica polare di A si compone dei due piani

$$x_1 + x_2 - 2\lambda(x_3 + x_4) = 0 \quad , \quad x_1 - x_2 = 0$$

il primo dei quali è tangente ad S_3 in A e il secondo è il piano polare armonico relativo (n. 2). L'omologia armonica che ha il centro in A e per piano fondamentale il polare armonico suddetto, trasforma ogni S_3 in se stessa e può rappresentarsi con la sostituzione

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Dunque intanto:

Tutte le superficie del fascio posseggono sei punti di Eckardt nei sei punti AA' , BB' , CC' sopra indicati. Essi costituiscono le 3 coppie di vertici opposti del quadrilatero secondo il quale il piano unità taglia i 4 piani fondamentali $x_i = 0$.

Sono dunque da riguardarsi come punti-base del fascio e costituiscono quindi 6 vertici del pentaedro di SYLVESTER comuni a tutte le S_3 del fascio.

6. Per trovare, per ogni S_3 del fascio, i rimanenti 4 vertici di tale pentaedro, si osservi che la quadrica polare del punto $(1 - \lambda, \lambda, \lambda, \lambda)$ può rappresentarsi così $\lambda(x_2 + x_3 + x_4)^2 + 4\lambda^2 x_1(x_2 + x_3 + x_4) + (1 - \lambda)x_1^2 = 0$ il che dimostra che essa si spezza nei due piani

$$\begin{aligned} \lambda(x_2 + x_3 + x_4) + \alpha x_1 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + \frac{1 - \lambda}{\alpha} x_1 &= 0 \end{aligned}$$

dove α soddisfa alla condizione

$$\frac{\lambda(1 - \lambda)}{\alpha} + \alpha = 4\lambda^2$$

e quindi è radice della equazione di 2° grado in α

$$\alpha^2 - 4\lambda^2 \alpha + \lambda - \lambda^3 = 0.$$

Ecco dunque trovati i vertici richiesti che indicheremo come segue

$$\begin{aligned} M &\equiv (1 - \lambda, \lambda, \lambda, \lambda) & ; & & N &\equiv (\lambda, 1 - \lambda, \lambda, \lambda); \\ P &\equiv (\lambda, \lambda, 1 - \lambda, \lambda) & ; & & Q &\equiv (\lambda, \lambda, \lambda, 1 - \lambda). \end{aligned}$$

Le facce del pentaedro saranno dunque le seguenti

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 & \text{contenente } AA' BB' CC' \\ -(\lambda + 1)x_1 + \lambda(x_2 + x_3 + x_4) = 0 & \text{» } NPQBCA' \\ -(\lambda + 1)x_2 + \lambda(x_3 + x_4 + x_1) = 0 & \text{» } PQMC' A' B' \\ -(\lambda + 1)x_3 + \lambda(x_4 + x_1 + x_2) = 0 & \text{» } QMNAB' C \\ -(\lambda + 1)x_4 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3) = 0 & \text{» } MNPBC' A \end{array}$$

La conseguente rappresentazione analitica della S_3 generica del fascio sarà dunque del tipo seguente

$$\begin{aligned} k \left(\sum_1^4 x_i \right)^3 + [-(\lambda + 1)x_1 + \lambda(x_2 + x_3 + x_4)]^3 + \\ + [-(\lambda + 1)x_2 + \lambda(x_3 + x_4 + x_1)]^3 + [(\lambda + 1)x_3 + \lambda(x_4 + x_1 + x_2)]^3 + \\ + [-(\lambda + 1)x_4 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3)]^3 = 0. \end{aligned}$$

dove k dovrà essere determinato in modo che si annulli il coefficiente di $x_i^2 x_k$ e che il rapporto fra il coefficiente di $x_i x_h x_l$ a quello di x_i^3 sia uguale a $6h$ (e ciò dal confronto dell'ultima equazione con la (1) del n. 5).

Si trova così che queste due condizioni equivalgono all'unica per cui $k = -\lambda(2\lambda^2 + \lambda + 1)$.

Finalmente il calcolo della Hessiana conduce alle due forme equivalenti

$$4\lambda^4 \sum x_i^2 x_h x_k - 2\lambda^3 [\sum x_i^4 + \sum x_i^3 x_h + \sum x_i^2 x_h x_k + 4x_1 x_2 x_3 x_4] + \\ + \lambda^2 [\sum x_i^3 x_h + 2\sum x_i^2 x_h^2] - x_1 x_2 x_3 x_4 = 0; \\ 2\lambda^3 \sum x_i^4 + \lambda^2 (2\lambda - 1) \sum x_i^3 x_k - 2\lambda^2 \sum x_i^2 x_h^2 + \\ + 2\lambda^3 (1 - 2\lambda) \sum x_i^2 x_h x_k + (1 + 8\lambda^3) x_1 x_2 x_3 x_4 = 0.$$

7. Ogni S_3 del fascio è manifestamente invariante rispetto a tutte le collineazioni spaziali rappresentabili mediante la sostituzione

$$\begin{pmatrix} x_i & x_h & x_k & x \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

dove i, h, k, l è una permutazione qualsiasi di 1, 2, 3, 4. Esse tengono fissi il punto e il piano unità.

Dunque queste collineazioni compongono un gruppo di 24° ordine sottogruppo di quello totale sopra 5 elementi. Precisamente quello dotato di un punto e un piano invarianti (che nella rappresentazione analitica attuale costituiscono il punto e il piano unità). Esso è dunque il G_{24}^{II} della mia Memoria già citata sopra i gruppi finiti di collineazioni ecc. (n. 5). È però da avvertire che gli elementi di riferimento adottati ivi sono diversi dagli attuali. Questo G_{24}^{II} è dunque un gruppo ottaedrico, ma proiettivamente distinto da quello costituito dalle rotazioni in sè dell'ottaedro regolare.

Questo G_{24}^{II} contiene le seguenti 6 omologie armoniche

$$\begin{array}{llll} (x_1 x_2) & \text{che ha per centro } A \equiv (1, -1, 0, 0) & \text{e per piano fond.}^{10} & x_1 - x_2 = 0 \\ (x_3 x_4) & \gg & A' \equiv (0, 0, 1, -1) & \gg \gg x_3 - x_4 = 0 \\ (x_2 x_3) & \gg & B \equiv (0, 1, -1, 0) & \gg \gg x_2 - x_3 = 0 \\ (x_1 x_4) & \gg & B' \equiv (1, 0, 0, -1) & \gg \gg x_1 - x_4 = 0 \\ (x_2 x_4) & \gg & C \equiv (0, 1, 0, -1) & \gg \gg x_2 - x_4 = 0 \\ (x_1 x_3) & \gg & C' \equiv (0, 1, 0, -1) & \gg \gg x_1 - x_3 = 0. \end{array}$$

Contiene poi le seguenti tre involuzioni gobbe

$$(x_1 x_2) (x_3 x_4) \quad , \quad (x_2 x_3) (x_1 x_4) \quad ; \quad (x_3 x_1) (x_2 x_4)$$

di cui gli assi sono le tre coppie di spigoli opposti del tetraedro fondamentale. Le collineazioni a periodo tre come (x_1, x_2, x_3) sono assiali: esiste cioè un asse di punti uniti $(1, 1, 1, \lambda)$ e uno di piani uniti chè è quello del fascio $x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 0$, ma il primo non è involuppo dei piani uniti, come il secondo non è luogo di punti uniti.

Finalmente le collineazioni a periodo 4, come $(x_1 x_2 x_3 x_4)$, hanno i 4 punti uniti

$$(1, 1, 1, 1) ; (1, -1, 1, -1) ; (1, i, -1, -i) ; (1, -i, -1, i)$$

formanti un tetraedro le cui facce sono i 4 piani uniti.

Quanto ai sottogruppi, è da notare il quadriminomio invariante costituito dalle tre involuzioni gobbe suddette e dalla identità (è il G_4^I della mia Memoria più volte citata).

Vi sono naturalmente altri tre sottogruppi quadriminomi, ma nessuno è invariante. Essi sono del seguente tipo: $[(x_1 x_2) ; (x_3 x_4) ; (x_1, x_2) (x_3, x_4) ; \text{identità}]$ e appartengono alla specie G_4^{III} già descritta al n. 3.

La descrizione dei rimanenti sottogruppi si farebbe poi facilmente valendosi per la loro struttura del simbolismo adottato in un altro mio lavoro (1).

8. — Consideriamo alcune particolari superficie del fascio. Ad es. si potrebbe domandare se, nel fascio, ci sono superficie diagonali di Clebsch (n. 2). Siccome tutte passano per i 6 vertici AA', BB', CC' del pentaedro di SYLVESTER (n. 5), così basterà esigere il passaggio per i 4 rimanenti $MNPQ$ (n. 6). Si è così condotti alla seguente equazione in λ

$$12 \lambda^4 - 20 \lambda^3 - 3 \lambda^2 + 3 \lambda - 1 = 0$$

cioè

$$(2 \lambda + 1) (6 \lambda^3 - 13 \lambda^2 + 5 \lambda - 1) = 0$$

quindi

$$2 \lambda + 1 = 0$$

oppure

$$6 \lambda^3 - 13 \lambda^2 + 5 \lambda - 1 = 0.$$

Ma per $\lambda = -\frac{1}{2}$ si ha

$$S_3 \equiv \left\{ \sum x_i^3 - 3(x_2 x_3 x_4 + x_3 x_4 x_1 + x_4 x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3) = 0 \right\}$$

cioè

$$\sum_1^4 x_i \left(\sum_1^4 x_i^2 - \sum_1^4 x_i x_k \right) = 0$$

e allora S_3 si spezza nel piano $\sum x_i = 0$ e nella quadrica propria

(1) CIANI, *Contributo alla teoria del gruppo di 168 collineazioni piane*. « Ann. di Matematica », to. V, ser. III, pp. 8-9, 1900.

$$\sum x_i^2 - \sum_1^4 x_i x_h = 0.$$

Rimane quindi l'equazione di 3° grado

$$6\lambda^3 - 13\lambda^2 + 5\lambda - 1 = 0$$

il cui discriminante non è nullo. Dunque *Le superficie diagonali irriducibili del fascio sono 3.*

9. — Si cercano adesso le superficie del fascio che hanno per Hessiana un tetraedro (per analogia di linguaggio con le cubiche piane equianarmoniche, si potrebbero chiamare le S_3 equianarmoniche). Un caso ovvio lo si consegue per $\lambda = 0$ (n. 6). Altri due casi sono dati $2\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ che allora è $k = 0$ (n. 6) e nuovamente l'equazione di S_3 si riduce alla somma di 4 cubi (n. 6).

Dunque *le S_3 equianarmoniche del fascio sono tre.*

10. — Altri casi particolari degni di osservazione si hanno per $\lambda = \infty$, o per $\lambda = \frac{1}{2}$. Nel primo caso

$$S_3 \equiv \{x_2 x_3 x_4 + x_3 x_4 x_1 + x_4 x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3 = 0\}$$

e si trova la superficie cubica con 4 punti doppi conici (nei vertici del tetraedro fondamentale) che è la duale della superficie di STEINER (1).

Per $\lambda = \frac{1}{2}$ si ha

$$S_3 \equiv \left\{ \sum_1^4 x_i^3 + 3 \sum_1^4 x_i x_h x_k = 0 \right\}$$

e accade che il punto $(1, 1, 1, 1)$ ha per quadrica polare il piano $\sum_1^4 x_i = 0$ contato due volte. Esso è una faccia del pentaedro di SYLVESTER. Le altre quattro sono

$$-3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad ; \quad x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 :$$

$$x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \quad ; \quad x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$$

e passano tutte per $(1, 1, 1, 1)$. Si realizza così la superficie studiata nel n. 4 (nei suoi dettagli particolari più interessanti).

11. — Merita qualche osservazione anche la curva base del fascio che manifestamente è del 9° grado. Ma, se ne distaccano le tre rette rappresentate parametricamente (al variare di μ) da

(1) Vedi ad es., CIANI, *Introduzione alla Geometria algebrica*, p. 325. (Cedam, 1931).

$$(1, -1, \mu, -\mu) ; (1, \mu, -\mu, -1) ; (1, \mu, -1, -\mu)$$

tutte esistenti nel piano $\sum_1^4 x_i = 0$ e formati un triangolo che ha per vertici $(1, -1, 1, -1) ; (1, 1, -1, -1) ; (1, -1, 1, -1)$.

La parte residua è dunque una sestica gobba. Ogni spigolo del tetraedro fondamentale è una sua corda.

Infatti, ad es., lo spigolo $x_3 = 0, x_4 = 0$, taglia tutte le superficie del fascio nei tre punti $(1, \alpha, 0, 0)$ dove α è radice cubica dell'unità negativa. Ma per $\alpha = 1$ si trova uno dei vertici dianzi nominati: dunque i due rimanenti appartengono alla sestica suddetta.

Dal momento che nel fascio c'è una S_3 composta del piano $\sum_1^4 x_i = 0$ e della quadrica $\sum_1^4 x_i^2 - \sum_1^4 x_i x_k = 0$ (n. 8) e che le tre rette facenti parte della base del fascio esistono in $\sum_1^4 x_i = 0$, segue che la sestica in discorso può riguardarsi come intersezione completa della quadrica suddetta e di una qualunque altra S_3 del fascio, per esempio $\sum_1^4 x_i^3 = 0$ (il che può facilitare l'ulteriore studio della curva).

12. — *Essa è irriduttibile.* Infatti si esclude facilmente che possa comporsi di 6 rette, giacchè esse dovrebbero appartenere (per $\lambda = \infty$) alla $S_3 \equiv \{x_2 x_3 x_4 + x_3 x_4 x_1 + x_4 x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3\}$. Ora, le rette di quest'ultima si conoscono (vedi il n. 204 della mia citata « Introduzione ») e niuna appartiene alla quartica $\sum_1^4 x_i^2 - \sum_1^4 x_i x_k = 0$. È anche da escludere che la sestica in parola sia composta di due cubiche gobbe, giacchè bisogna tener presente che essa deve essere invariante rispetto al G_{24}^{II} già notato nel n. 6. Ora, in questo, ci sono delle omologie armoniche e poichè non c'è niuna cubica gobba irriduttibile invariante rispetto a una tale omologia, bisognerebbe che le due supposte cubiche gobbe fossero trasformate l'una nell'altra da ciascuna delle omologie suddette e per conseguenza dovrebbe, ognuna di tali cubiche, essere invariante rispetto alle tre involuzioni gobbe prodotto delle omologie nominate (a due, a due). Ma il G_4^I che tali involuzioni generano (n. 7) non è quello spettante ad una cubica gobba (1). Finalmente si esclude che la sestica si componga di tre co-

(1) Vedi la mia nota *Sopra i gruppi di collineazioni spaziali dotati di cubica gobba invariante*. « Circ. Matematico di Palermo », to. XVI, 1903 (n. 3).

niche perchè i loro tre piani dovrebbero comporre un triedro invariante rispetto a G_{24}^{II} .

13. — Chiuderò queste poche osservazioni facendo rilevare che l'equazione del fascio sizigetico, sin qui studiato, è caso particolare della seguente

$$c_1 x_2 x_3 x_4 + c_2 x_3 x_4 x_1 + c_3 x_4 x_1 x_2 + c_4 x_1 x_2 x_3 + \\ + c_5 (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3) = 0$$

(dove le c_i sono costanti). Quest'ultima è stata assegnata da A. EMCH quale nuova forma canonica rappresentante una superficie cubica generica (1). L'A. la ottiene mediante considerazioni iperspaziali (che però non sembrano inevitabili). Ma, in ogni caso, è indubbio che questa nuova forma, per una quaternaria cubica, è particolarmente interessante giacchè le sezioni delle facce e spigoli del tetraedro fondamentale danno le ben note forme canoniche della ternaria e binaria cubica. È anche probabile che il tetraedro fondamentale attuale abbia relazioni geometriche interessanti col pentaedro di SYLVESTER. Nè di queste relazioni è traccia nella citata pubblicazione. Così non vi risulta che questo tetraedro sia *unico*. Se ne esistessero varii, è certo che la loro configurazione dovrebbe riuscire interessante anche indipendentemente dalle sue eventuali relazioni col pentaedro in parola.

Mi permetto di osservare che ebbi già a proporre il piano di queste ricerche in forma di « Domanda » nel « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana » (anno XII, n. 3, giugno 1933) senza che finora sia pervenuta alcuna risposta.

(1) A. EMCH, *On a new form of the general cubic surface*. « American Journal of Mathematics », vo. LIII, n. 4, october 1931.

Prezzo dei due volumi L. 100