no
TICA

CORSI DEL REALE ISTITUTO NAZIONALE DI ALTA MATEMATICA

Politecnico di Torino
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Biblioteca
53
1941
1

ENEA BORTOLOTTI

Spazi a connessione proiettiva

Dono Famiglia LONGO

Politecnico di Torino
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Biblioteca
N. di Inventario 1372 M

ROMA
Stab. Edit. Tipo-Litografico V. Ferri
Via delle Coppelle, 15-16-a
1941-XIX

SPAZI A CONNESSIONE PROIETTIVA

I n t r o d u z i o n e

1. Generalità. Cenno storico: geometria proiettiva in uno spazio o connessione affine.

La "Geometria differenziale proiettiva", quale studio delle proprietà differenziali degli enti(curve,superficie, varietà) di uno spazio ambiente proiettivo, invarianti per trasformazioni proiettive dell'ambiente si è sviluppata a partire dagli ultimi decenni del secolo scorso e particolarmente nei primi tre decenni del presente secolo, soprattutto in Italia. Se la confrontiamo con la geometria differenziale classica cioè metrica, che studia le proprietà invarianti pei movimenti (o anche per le similitudini) entro uno spazio dotato di una metrica euclidea, notiamo una differenza sostanziale: fra le proprietà metriche di una varietà in ambiente euclideo un gruppo particolare, bene individuato, si stacca e costituisce una teoria autonoma, che può svolgersi indipendentemente dalla considerazione dell'ambiente euclideo cioè dalla particolare configurazione che l'ente studiato ha nell'ambiente: ed è lo studio delle proprietà legate soltanto all'espressione del ds^2 (quadrato dell'elemento lineare). Cioè: è lo studio delle proprietà che l'ente supposto ha quale varietà riemanniana, in cui la geometria è appunto definita mediante l'assegnazione del ds^2 : il che dà luogo, come è ben noto,alla determinazione non solo delle lunghezze ma anche degli angoli , aree,volumi, .,. e di tutto il complesso delle proprietà invarianti per le eventuali "flessioni" delle varietà nell'ambiente. Ebbene: nulla di analogo a questa "geometria riemanniana" si presenta nello studio differenziale delle varietà di uno spazio proiettivo

(s'intende: in relazione al gruppo delle trasformazioni proiettive); come pure nello studio differenziale degli enti nello spazio affine o in quello conforme (di Möbius). Più esattamente: perde significato, se passiamo alla geometria dei gruppi proiettivo, affine, conforme (se vogliamo limitarci qui ad accennare alle più semplici e note geometrie "a gruppo fondamentale" secondo Klein, all'infuori di quello ordinario od euclideo) la costruzione intrinseca di una geometria nello spazio curvo a sè considerato, secondo Riemann. Una possibilità di costruire anche una geometria proiettiva curva (come una geometria affine o conforme curva) su uno spazio qualunque considerato a sè, anzichè indotta dalla geometria di un ambiente proiettivo, si è presentata mediante l'introduzione delle "connessioni" in uno spazio curvo, secondo WEYL e CARTAN; originate alla loro volta dall'introduzione del "parallelismo" negli spazi riemanniani, secondo LEVI-CIVITA.

Rammento, per cominciare dal caso più semplice, che d'altra parte sta anche a base di una parte degli sviluppi che seguiranno, la definizione di uno spazio o connessione affine secondo WEYL; esso è uno spazio, a un numero qualunque n di dimensioni, in cui è assegnata una legge di trasporto dei vettori, mediante un sistema differenziale della forma

$$d\xi^{\tau} + L^{\tau}_{\sigma t}\,\xi^{\sigma}\,du^{t} = 0 \qquad (1.1)$$

ove le u^{τ} ($\tau, \sigma, t, p, q = 1,2,\dots,n$) sono coordinate curvilinee nello spazio supposto e le $L^{\tau}_{\sigma t}$ (parametri o componenti della connessione) sono funzioni assegnate delle u^{t}. Per definizione sono vettori "paralleli" o meglio "equipollenti" due vettori appartenenti a una serie integrale del sistema (1.1), uscenti da una linea assegnata ad arbitrio. La nozione usuale di parallelismo è fondamentale per la costruzione della ordinaria geometria affine: la nuova nozione di "parallelismo" assegnata mediante un sistema (1.1) sta a base della costruzione di una sorta di geometria affine nello spazio curvo, la geometria dello spazio " a connessione affine". Differen-

za sostanziale è questa: che nello spazio a connessione affine generalmente il trasporto per parallelismo non è integrabile, cioè è legato alla linea di trasporto.

L'analogo delle "linee rette", che nello spazio affine possono caratterizzarsi quali linee "autoparallele", è costituito dalle linee autoparallele o geodetiche dello spazio a connessione affine: rappresentabili, con scelta conveniente del parametro s cui i punti di ciascuna di esse sono riferiti, mediante un sistema differenziale:

$$\frac{d^2u^i}{ds^2} + L^i_{pq}\frac{du^p}{ds}\frac{du^q}{ds} = 0. \qquad (1.2)$$

Il passaggio dalla geometria affine curva (o a connessione affine) a quella proiettiva non è affatto immediato o banale: la definizione del WEYL perde significato perchè nello spazio proiettivo manca la nozione di "vettore". Due processi sostanzialmente distinti, dovuti al WEYL al CARTAN, conducono però in modo più o meno diretto a introdurre anche nei quadri della geometria proiettiva una nozione di "connessione"; le due generalizzazioni che, dell'ordinaria geometria proiettiva, vengono così costruite sono d'altra parte fra loro collegate e anzi una - quella del WEYL - rientra nell'altra quale aspetto particolare.

Cominciamo appunto dalle vedute del WEYL, da lui esposte in un lavoro del 1921.

L'ordinaria geometria proiettiva in uno spazio piano, o lineare, è in sostanza legata alla nozione di linea retta, o di allineamento: in quanto le trasformazioni omografiche, almeno nel campo reale, sono semplicemente le trasformazioni puntuali dello spazio che mutano rette in rette; e la geometria proiettiva, in senso esteso, è appunto lo studio delle proprietà invarianti per omografie. (In senso stretto sono proprietà proiettive quelle invarianti anche per correlazioni). Ora in uno spazio a connessione affine il ruolo della linea retta è tenuto dalle linee geodetiche, od autoparallele, come ho già accennato: appare dunque natura

le definire, secondo il WEYL, "proprietà proiettive" o "nozioni proiettive" entro uno spazio a connessione affine le proprietà e le nozioni che hanno carattere invariante per tutte le trasformazioni della connessione che conservano le geodetiche, cioè per le trasformazioni puntuali che mutano geodetiche in geodetiche. Da un punto di vista analitico: mentre le proprietà "affini" di uno spazio a connessione affine sono tutte quelle esprimibili mediante i parametri $L^{\tau}_{\sigma\iota}$ della connessione, quelle "proiettive" dovranno essere legate solo al sistema delle autoparallele; ora questa è determinata dalle $L^{\tau}_{(\sigma\iota)}$ ma non viceversa. Infatti: anzitutto le autoparallele dipendono soltanto dai coefficienti $\Gamma^{\tau}_{\sigma\iota} = L^{\tau}_{(\sigma\iota)}$ della "connessione simmetrica associata" alla connessione affine $L^{\tau}_{\sigma\iota}$ e non dal "tensore di torsione" $S''^{\tau}_{\sigma\iota} = L^{\tau}_{[\sigma\iota]}$ di questa. Nelle (1.2) in luogo delle $L^{\tau}_{\sigma\iota}$ possiamo anche intendere poste le $\Gamma^{\tau}_{\sigma\iota}$. Ancora: i valori di questi coefficienti sono legati alla parametrizzazione delle linee integrali, cioè alla scelta dei parametri cui i loro punti son riferiti; a un cambiamento della parametrizzazione corrisponde un cambiamento delle $\Gamma^{\tau}_{\sigma\iota}$, della forma

$$\bar{\Gamma}^{\tau}_{\sigma\iota} = \Gamma^{\tau}_{\sigma\iota} + \delta^{\tau}_{\sigma}\varphi_{\iota} + \delta^{\tau}_{\iota}\varphi_{\sigma} \tag{1.3}$$

(ove φ_{σ} è un qualunque vettore covariante). Le proprietà proiettive della connessione affine $L^{\tau}_{\sigma\iota}$ secondo WEYL sono le proprietà legate alle $\Gamma^{\tau}_{\sigma\iota} = L^{\tau}_{(\sigma\iota)}$ in modo invariante per tutte le trasformazioni (1.3). Due spazi a connessione affine, che qui non è restrittivo supporre simmetrica, cioè senza torsione $(L^{\tau}_{\sigma\iota} = L^{\tau}_{(\sigma\iota)} = \Gamma^{\tau}_{\sigma\iota};\ S''^{\tau}_{\sigma\iota} = 0)$ sono proiettivamente equivalenti se rappresentabili l'uno sull'altro punto a punto con conservazione delle geodetiche, cioè se con un'opportuna trasformazione (1.3) combinata con un opportuno cambiamento delle variabili i rispettivi parametri $\Gamma^{\tau}_{\sigma\iota}$, $\bar{\Gamma}^{\tau'}_{\sigma'\iota'}$ possono identificarsi. In particolare uno spazio a connessione affine si dirà proiettivamente piano se è proiettivamente equivalente a uno spazio affine, il che permetterà d'istituirvi una geometria proiettiva.

Siamo qui naturalmente condotti a una digressione,

Nel caso particolare delle varietà riemanniane e più specialmente delle superficie riemanniane il problema della rappresentazione geodetica, o proiettiva e in particolare della rappresentazione geodetica nel piano o in uno spazio euclideo (di dimensione eguale a quella della varietà) era stata già ampiamente studiato e anche proprio nelle sue relazioni con la geometria proiettiva. Il BELTRAMI nel 1865 ha dimostrato che tutte e sole le superficie a curvatura (totale) costante sono almeno localmente rappresentabili con conservazione delle geodetiche sul piano ; dei risultati ottenuti si è valso poi (nel 1868) per dare una elegante interpretazione della geometria piana non euclidea iperbolica su una superficie pseudosferica dello spazio euclideo ordinario. Pure nel 1868 nella sua "teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante" il BELTRAMI estendeva, in parte, il suo teorema al caso delle varietà riemanniane (V_n) a più dimensioni, mostrando che, tra esse, le V_n a curvatura costante secondo RIEMANN sono proiettivamente piane. L'estensione è stata completata da SCHLÄFLI (1871): questi ha mostrato che anche inversamente, una V_n rappresentabile con conservazione delle geodetiche su uno spazio euclideo R_n è di necessità una V_n a curvatura costante.

Risultava così stabilita la possibilità di subordinare le geometrie riemanniane a curvatura costante alla geometria proiettiva: il KLEIN ha mostrato che tale subordinazione può sempre farsi al modo di CAYLEY cioè in relazione a una quadrica assunta, nello spazio proiettivo, come assoluto di una geometria metrica.

Il KLEIN (1873) si basa sulla proprietà degli spazi riemanniani a curvatura costante di ammettere l'assioma del piano, secondo il quale una superficie, geodetica in un punto cioè contenente tutte le geodetiche uscenti da questo secondo una giacitura piana è totalmente geodetica, cioè contiene interamente ogni geodetica dello spazio che abbia in comune con essa due punti, o le sia tangente. Dimostrazioni dirette della possibilità di costruire una geometria proiet-

tiva in uno spazio riemanniano ove valga l'assioma del piano sono state date da SCHUR (1886) e da CARTAN (1926).

Tornando al caso generale: già il WEYL ha costruito gli elementi fondamentali per lo studio proiettivo degli spazi a connessione affine: particolarmente un tensore $W_{ijp}^{\dots q}$ (tensore di WEYL o di curvatura proiettiva) il cui annullarsi in uno spazio di dimensioni $n \geq 3$ è la condizione necessaria e sufficiente perchè lo spazio sia proiettivamente piano. (Per $n=2$ tale tensore è sempre nullo: ma il suo ruolo nel teorema ora accennato è allora preso da un secondo tensore V_{ijk} , che per $n \geq 3$ si annulla quando si annulla $W_{ijp}^{\dots q}$).

Nello stesso indirizzo del WEYL, se pure in un primo tempo costruite in modo indipendente, si svolgono le ricerche della scuola americana di Princeton (L.P. Eisenhart, O.Veblen; J.M. Thomas e T.Y Thomas) sulla "geometria proiettiva dei cammini" (projective geometry of paths)."Cammini" of"paths" vengono detti (in senso ristretto: un caso più generale è stato studiato da J.DOUGLAS) appunto le geodetiche di una connessione affine, cioè le linee integrali di un sistema differenziale della forma (1,2); geometria affine dei cammini lo studio della corrispondente connessione affine; geometria proiettiva (secondo DOUGLAS, descrittiva) dei cammini lo studio delle proprietà legate soltanto al sistema delle curve integrali cioè appunto delle proprietà "proiettive" della connessione secondo WEYL. Un elemento fondamentale per quest'ultima geometria è stato indicato nel 1925 da T.Y.THOMAS: egli ha notato che l'ente rappresentato dalle componenti

$$\pi_{ij}^{h} = \Gamma_{ij}^{h} - \frac{1}{n+1}\left(\delta_i^h \Gamma_{tp}^{p} + \delta_j^h \Gamma_{ip}^{p}\right) \qquad (1.4)$$

è invariante per le trasformazioni (1,3) che conservano le geodetiche. Anzi, due connessioni affini sono proiettivamente equivalenti proprio a condizione che siano (o possano rendersi) eguali le corrispondenti π_{ij}^{h} ; le quali non sono le componenti di una connessione affine, nel senso che esse hanno pei cambia-

menti di coordinate , una diversa legge di trasfor_ mazione. Ma mediante tali quantità (che il THOMAS ha chiamato "componenti della connessione proiettiva" legata ai supposti "cammini" ; forse intuendo la relazione con l'ente già introdotto per via assai diversa, come accennerò, con la medesima denominazione del CARTAN) si esprimono tutti gli invarianti proiettivi della connessione affine, e in particolare (come è stato mostrato nel 1926 da VEBLEN e J.M. THOMAS) le condizioni per l'equivalenza proiettiva di due connessioni affini (simmetriche).

Lo stesso T.Y.THOMAS (nel 1926) ha completato il sistema $\Pi^{i}_{jk}\ (i,j,k = 1,2,\dots,n)$ con l'introduzione di altre componenti in un sistema ${}^{*}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\ (\alpha,\beta,\gamma = 0,1,\dots,n)$ che egli ha interpretato quali parametri di una connessione affine entro uno spazio ad $n+1$ dimensioni, ove $u^1, u^2, \dots, u^n$ e un nuovo parametro u^0 si pensano quali coordinate curvilinee. Le proprietà di questa connessione affine $(n+1)$-dimensionale sono tutte e sole le proprietà proiettive della connessione affine (n-dimensionale) di partenza, va detto però che ci si riferisce qui alle proprietà invarianti in relazione alle trasformazioni

$$(1,5)\qquad \begin{aligned} u^{i} &= u^{i'}(u^{1'}, u^{2'}, \dots, u^{n'}) \\ u^{0} &= u^{0'} + \log\left|\frac{\partial(u^{1}, \dots, u^{n})}{\partial(u^{1'}, \dots, u^{n'})}\right| \end{aligned}$$

sulle u^{α}, insomma in relazione a un gruppo limitato mediante condizioni che almeno in parte non hanno un evidente significato geometrico.

In particolare il tensore di curvatura della connessione ${}^{*}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ di T.Y.THOMAS congloba gli invarianti fondamentali di WEYL, il suo annullamento è la condizione perchè lo spazio assegnato sia proiettivamente piano.

Accanto all'interpretazione $(n+1)$-dimensionale un'altra è possibile: le ${}^{*}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ possono pensarsi come componenti di una vera e propria connessione proiettiva, nel senso che ora preciseremo, secondo CARTAN; di quella che il CARTAN chiamò connessione proiettiva normale , legata appunto a un sistema di "cammini".

2. Connnessione proiettiva secondo CARTAN; cenno su alcuni ulteriori sviluppi della teoria.

Veniamo appunto all'introduzione di queste nozioni. Premettiamo un cenno sulle vedute del CARTAN nei riguardi degli spazi a connessione affine; le quali appunto hanno permesso una generalizzazione quale non poteva presentarsi nell'ordine d'idee del WEYL.

La rappresentazione (1.1) o più esattamente

$$(2.1) \qquad {}^{*}\xi^{i} = \xi^{i} - L^{i}_{jt}\,\xi^{j}\,du^{t}$$

che viene determinata, data una connessione affine L^{i}_{jt}, fra le totalità dei vettori uscenti da due punti infinitamente vicini u^{i}, ${}^{*}u^{i} = u^{i} + du^{i}$ dello spazio è una affinità, od omografia vettoriale. E' una rappresentazione affine fra gli spazi affini costituiti dalle totalità di vettori ora dette. Si noti che, indipendentemente dall'esistenza di una connessione o di una metrica, i vettori di una qualunque varietà n-dimensionale X_n, uscenti da un punto, formano sempre uno spazio affine, (cioè lineare) vettoriale: questa è l'espressione geometrica del fatto analitico, secondo cui una sua qualunque trasformazione sulle coordinate curvilinee.

$$(2.2) \qquad u^{i'} = u^{i'}(u^{1}, u^{2}, \ldots, u^{n})$$

(salve le usuali condizioni di continuità o derivabilità dei secondi membri) induce una trasformazione lineare sui differenziali

$$(2.3) \qquad du^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^{i}}\,du^{i}.$$

Ora: i vettori (controvarianti) di uno spazio affine vettoriale possono pensarsi realizzati quali i vettori di uno spazio affine puntuale, cioè rappresentati mediante le coppie ordinate di punti, date a meno di un'arbitraria traslazione, in un tale spazio. Possiamo dunque pensare i vettori di una X_u in un punto u^{i} quali i vettori di uno spazio affine, lo "spazio affine tangente", che

deve concepirsi contenente il punto u^2 (suo "punto di contatto") e insieme ad esso anche tutti i punti infinitamente vicini ad u^2 sulla X_n nell'intorno del 1° ordine: questo perchè fra i vettori di X_n uscenti dal punto considerati vi sono anche i vettori infinitesimi (elementi lineari) du^2. Si badi però che, in quanto la X_n viene considerata a sè, indipendentemente dalla esistenza di uno spazio affine che la contenga, quello spazio affine tangente E_n è un ente soltanto pensato: non ha una sua posizione, e neppure ha senso il parlare di una sua posizione. In realtà noi lo possiamo pensare dovunque situato: mediante l'assegnazione arbitraria su di esso, di un punto O e di n vettori indipendenti $\bar{u}$ quali immagini del punto u^2 e dei vettori controvarianti di componenti 10...0, 01...0 ,...,00 ...1 della X_n nel punto medesimo, noi veniamo a precisare quale sarà, geometricamente, in tale spazio E_n il vettore $Q-O$ immagine di un vettore di componenti assegnate ξ^2 della X_n nel supposto punto. Ogni vettore così ottenuto su E_n si potrà poi pensare identificato col vettore della X_n che esso rappresenta , il punto O col punto u^2 ,l'arbitrarietà di questa rappresentazione va tenuta presente ma non porta inconvenienti. (Si potrebbe anche aggiungere, ma su questo converrà piuttosto tornare nel seguito, come lo spazio tangente vada realmente pensato quale uno spazio proiettivo in cui noi arbitrariamente assegniamo l'iperpiano improprio facendone uno spazio affine).

La rappresentazione (2,1) fra gli spazi dei vettori tangenti determina senz'altro anche una rappresentazione affine fra gli spazi affini tangenti nel senso ora precisato (spazi puntuali) quando soltanto si assegni una coppia $O\,{}^*O$ di punti omologhi. (Per ogni altro punto P, il punto analogo ${}^*P$ sarà tale che $P-O$, ${}^*P-{}^*O$ risultino vettori omologhi).

Secondo il CARTAN si pone questa condizione: che il punto u^2 cioè O pensato nello spazio π ivi tangente ad X_n abbia quale omologo il punto medesimo pensato nello spazio ${}^*\pi$ tangente in ${}^*O$ cioè in ${}^*u^2 = u^2 + du^2$. La rappresentazione analitica della legge di trasporto

dei punti degli spazi tangenti così determinata è data dal sistema differenziale

$$dx^r + du^r + \Gamma^r_{st}\, x^s du^t = 0 \qquad (2.4)$$

ove le x^r sono coordinate cartesiane, nello spazio affine tangente generico, rispetto al "riferimento naturale" che ha O come origine e i vettori $\vec{u}_r$, detti poco sopra, quali vettori unità degli assi.

Introdotti gli spazi affini tangenti - da pensare quale un prolungamento lineare degli intorni del primo ordine dei singoli punti - e la legge di trasporto dei punti, ecco l'aspetto che assume, secondo il CARTAN, la nozione di spazio a connessione affine: esso è uno spazio avente, nell'intorno infinitesimo di ciascun suo punto, i caratteri di uno spazio affine, e dotato inoltre di una legge di raccordo o di rappresentazione affine fra gli intorni di due suoi punti infinitamente vicini (o, fa lo stesso, fra gli spazi affini di cui essi fanno parte). Bisogna in realtà aggiungere che la legge osservata deve essere tale da potersi rappresentare con un sistema della forma (2.4) giacchè quanto precede non dà in modo necessario la forma lineare dell'espressione di dx^r anche rispetto alle du^t.

La veduta del CARTAN, che se anche si presenta con un certo aspetto di indeterminazione, ha un evidente interesse concettuale, si presta a una naturale estensione alla geometria di altri gruppi: ad es. di quelli proiettivo e conforme. Uno spazio a connessione proiettiva, secondo la definizione che ne ha dato il CARTAN nel 1924, è uno spazio avente nell'intorno infinitesimo di ciascun suo punto i caratteri di uno spazio proiettivo, e dotato inoltre di una legge di rappresentazione proiettiva (omografica) fra gli intorni di due suoi punti infinitamente vicini. Precisiamo: a ciascun punto u^r dello spazio pensiamo associato uno spazio proiettivo e su questo diamo ad arbitrio un punto O quale imagine del punto u^r ed n rette che ne escono secondo direzioni indipendenti quali immagini delle tangenti nel punto u^r alle linee coordinate che ne escono: ci converrà anzi

pensare identificati il punto O e le rette ora dette con gli enti di cui sono immagini. In relazione a sistemi proiettivi di riferimento comunque presi sugli spazi tangenti (ad es. si potrà supporre che il relativo vertice A_0 sia il punto di contatto O : in generale intenderemo soddisfatta questa condizione) siano x^λ coordinate proiettive omogenee dei punti $(\lambda,\mu,\nu,\tau,\omega = 0,1,\dots,n)$; intenderemo che la legge di trasporto dei punti sia rappresentabile mediante un sistema differenziale della forma

$$dx^\alpha + \Lambda^\alpha_{\beta\tau}\, x^\beta du^\tau = 0 \qquad (2,5)$$

o anche, secondo CARTAN, $du^\alpha + \omega^\alpha_\beta x^\beta = 0$ ove le $\omega^\alpha_\beta = \Lambda^\alpha_{\beta\tau} du^\tau$ sono forme pfaffiane assegnate.

Secondo la legge di trasporto dei punti rappresentata dalla (2,5) si possono portare in uno stesso spazio tangente tutti i punti di una linea Γ, ottenendo così una linea nello spazio proiettivo tangente, "immagine tangenziale" della linea Γ ; se l'immagine tangenziale è una linea retta la linea Γ è, secondo CARTAN, una geodetica della connessione proiettiva. (Non presenta difficoltà il sostituire a quella ora detta una caratterizzazione differenziale delle linee geodetiche).

Il CARTAN ha, fra l'altro, dimostrato che fra le infinite connessioni proiettive aventi le medesime geodetiche - le quali sono sempre anche geodetiche di connessioni affini - ve ne è una privilegiata determinata dalle supposte geodetiche: che egli chiama connessione proiettiva normale (nozione geometricamente non ancora chiarita in modo soddisfacente).

Si può facilmente stabilire una identificazione fra questa connessione e l'ente, rappresentato dai parametri ${}^*\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ (n. 1) che si è presentato a T.Y.THOMAS, di cui ho accennato.

Naturalmente il ragguaglio tra i risultati del CARTAN e quelli della scuola di Princeton richiede un preventivo ragguaglio del simbolismo e delle vedute, sostanzialmente dissimili: un tale processo di unificazione, e insieme, di ulteriore sviluppo della teoria si è svolto at-

traverso a un grande numero di lavori sia della stessa scuola americana (VEBLEN) come di SCHOTEN e suoi collaboratori (GOLAB, poi v. DANTZIG ed HAANTJES di WEYL , di HLAVATY' e miei di BERWALD, uno studio recente di K.YANO conclude, pel momento, la vasta bibliografia dell'argomento.

In questa figurano già anche svariate applicazioni geometriche (ad es. in lavori di CARTAN di HLAVATY e miei) e fisiche (alla teoria della Relatività; VEBLEN ed HOFFMANN, SCHOUTEN e v. DANTZIG). In molti dei lavori ora accennati si è cercato di precisare e legare in qualche modo allo spazio curvo la nozione di "spazi tangenti",che per la teoria del CARTAN è essenziale e d'altra parte presenta una larga arbitrarietà. Ma questa appare sia proprio nella natura delle cose; l'unico risultato conclusivo se pure analitico in questi riguardi è già nel primo lavoro del CARTAN (1924) ove si mostra come un ben determinato riferimento proiettivo in ciascuno spazio tangente venga subordinato dalla assegnazione di un riferimento curvilineo nello spazio e di una connessione proiettiva.

Un argomento molto e assai variamente discusso, su cui avremo occasione di soffermarci, è quello dell'$(n+1)$-parametro u° o più in generale della forma pfaffiana du° (non necessariamente differenziale esatto) che si è obbligati a introdurre perchè abbia senso l'uso di "parametri proiettivi" $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ (come per la prima volta ha fatto T.Y.Thomas , e poi per le connessioni proiettive più generali, VEBLEN) per la connessione. E' necessaria l'introduzione di un sistema di parametri così fatti (ove, a differenza delle $\Lambda^\alpha_{\beta\varepsilon}$ cui dà luogo la teoria del CARTAN, anche il 2° indice inferiore può prendere il valore zero) perchè si possa collegare alla connessione proiettiva una derivazione covariante con le stesse proprietà fondamentali di quella del RICCI, o del WEYL per gli spazi a connessione affine. D'altra parte il significato dei differenziali assoluti pei tensori risulta generalmente legato alla scelta di du° che è a priori arbitraria e conviene, almeno in generale, lasciare arbitraria, o tutt'al più collegare alla scelta dei

riferimenti proiettivi locali sugli spazi tangenti. Si presentano dunque, insieme, difficoltà concettuali e difficoltà algoritmiche che in parte soltanto sono superate, sino ad ora, e in parte sono probabilmente nella natura delle cose. Nello sviluppo che ora esporrò della teoria avrò occasione di precisare queste difficoltà e raffrontare i procedimenti, di maggiore interesse concettuale, proposti sino ad ora per superarle.

P A R T E I°

GEOMETRIA PROIETTIVA IN UNO SPAZIO A CONNESSIONE AFFINE

---

§. 1 - PREMESSE: RICHIAMI FORMALI SUI TENSORI E LE CONNESSIONI AFFINI.

3.- Algebra ed analisi tensoriale in uno spazio a connessione affine: nozioni e risultati più notevoli.

Rammento che tensore in uno spazio affine E_n, o più in generale in una qualunque varietà curva X_n, è un ente (operatore lineare fra sistemi di vettori e vettori) rappresentabile in relazione a ciascuna scelta delle coordinate curvilinee u^i $(i,j,h,k,l,f,g = 1,2,\dots,n)$ mediante un sistema di componenti, ad es. A_i, B^i_j, C^h_{ij}, $\dots$, $M^{i_1 i_2 \dots i_s}_{j_1 j_2 \dots j_r}$ le quali per un cambiamento delle coordinate curvilinee

(3,1) $$u^i = u^i(u^{1'}, u^{2'}, \dots, u^{n'})$$

abbiano la legge di trasformazione lineare:

(3.2)
$$A_{i'} = \vartheta^{i}_{i'} A_i \ , \quad B^{j'} = \vartheta^{j'}_{j} B^j$$
$$C^{\cdots k'}_{i'j'} = \vartheta^{i}_{i'} \vartheta^{j}_{j'} \vartheta^{k'}_{k} C^{\cdots k}_{ij}$$
$$\mathcal{M}^{\cdots j'_1 \cdots j'_s}_{i'_1 \cdots i'_r} = \vartheta^{i_1}_{i'_1} \cdots \vartheta^{i_r}_{i'_r} \vartheta^{j'_1}_{j_1} \cdots \vartheta^{j'_s}_{j_s} \mathcal{M}^{\cdots j_1 \cdots j_s}_{i_1 \cdots i_r} \ ;$$

ove abbiamo posto

(3.3)
$$\vartheta^{i}_{i'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} , \qquad \vartheta^{j'}_{j} = \frac{\partial u^{j'}}{\partial u^j} .$$

Se l'ambiente è uno spazio affine ed in esso le u^i, $u^{i'}$ sono coordinate cartesiane, le $\vartheta^{i}_{i'}$ e $\vartheta^{j'}_{j}$ saranno semplicemente i coefficienti delle coordinate nella trasformazione d'assi cartesiani:

(3.4)
$$u^i = \vartheta^{i'}_{i} u^{i'} + \psi^i , \qquad u^{i'} = \vartheta^{i'}_{i} u^i + \chi^{i'}$$

Nelle (3.2) A_i è un tensore del 1° ordine (vettore) covariante, B^j è un tensore del 1° ordine (o vettore) controvariante: $C^{\cdots k}_{ij}$ è un tensore del 3° ordine misto, con gli indici di covarianza i,j e di controvarianza k; $\mathcal{M}^{\cdots j_1 \cdots j_s}_{i_1 \cdots i_r}$ è di ordine $r+s$. Uno scalare può riguardarsi come tensore d'ordine zero se è invariante cioè si trasforma per invarianza.

Un tensore $A_{\cdots ij \cdots}$, o $B^{\cdots hk}_{\cdots}$ (ove al luogo dei puntini potranno esservi altri indici in numero qualunque) è simmetrico - emisimmetrico-rispetto ad i,j, o od h,k, se

(3.5)
$$A_{\cdots ji \cdots} = \pm A_{\cdots ij \cdots} \ ; \qquad B^{\cdots kh}_{\cdots} = \pm B^{\cdots hk}_{\cdots}$$

rispettivamente. Rispetto a più indici (dicovarianza oppure di controvarianza) un tensore è (ad es.) simmetrico, se è tale rispetto a due qualunque di essi. Un tensore covariante o controvariante (non misto) si dirà simmetrico od emisimmetrico se è tale rispetto al gruppo formato da tutti i suoi indici. I tensori di cui si è

detto sinora sono i tensori (affini) assoluti, o di peso zero; una generalizzazione è costituita dai tensori relativi o densità tensoriali, di peso p qualunque; dotati della legge di trasformazione

$$(3.6)\qquad \mathcal{M}_{i'_1 \dots i'_2}^{\dots j'_1 \dots j'_3} = \Delta^p \vartheta_{i'_1}^{i_1} \dots \vartheta_{i'_2}^{i_2} \vartheta_{j'_1}^{j_1} \dots \vartheta_{j'_3}^{j_3} \mathcal{M}_{i_1 \dots i_2}^{\dots j_1 \dots j_3}$$

ove Δ^p è la potenza p-esima del determinante funzionale

$$(3.7)\qquad \Delta = \frac{\partial(u^1, \dots, u^n)}{\partial(u^{1'}, \dots, u^{n'})}$$

salvo avviso contrario ci riferiremo sempre a tensori assoluti o di peso zero.

Richiamo sommariamente le operazioni dell'algebra tensoriale:

1) addizione e sottrazione di due tensori cogredienti, cioè dotati di eguali varianze e per di più essendo fissata una corrispondenza fra gli indici dei due tensori, in modo che abbia senso parlare di componenti omologhe:

$$(3.8)\qquad B_{ij}^{\dots l} = A_{i \dots j}^{\quad l} \pm C_{ij}^{\dots l} \quad ;$$

2) moltiplicazione esterna di due tensori qualunque: ad es.

$$(3.9)\qquad H_{ijk}^{\dots l} = A_{i \dots} B_{jk}^{\dots l}$$

3) contrazione (o saturazione) rispetto a due indici uno di covarianza, uno di controvarianza (o analogamente, rispetto a due o più tali coppie di indici).

$$(3.10)\qquad A_i = H_{ij}^{\dots j} \quad , \quad B = M_{i \dots j}^{\dots ji} \quad , \quad C_i^{\dots l} = N_{ih}^{\dots hl}$$

(usiamo qui e costantemente nel seguito, come già nelle (3.2),(3.4),(3.6)la convenzione di sommazione);

4) moltiplicazione interna di due tensori : moltiplicazione esterna seguita da una o più contrazioni rispetto a coppie d'indici che appartengono uno all'uno uno all'altro tensore:

(3.11) $$A = B_j \cdot C^j \quad , \quad M_\ell = A_{\ell i}^{\cdot\cdot h} \, B^h_{\cdot i}$$

5) Le operazioni dell'alternare e del mischiare rispetto a due o più indici di covarianza o di controvarianza :

(3.12) $$A_{[ij]} = \frac{1}{2}\left(A_{ij} - A_{ji}\right),$$
$$B^{[ijh]}_{\cdots\cdot\ell} = \frac{1}{3!}\left(B^{ijh}_{\cdots\ell} + B^{jhi}_{\cdots\ell} + B^{hij}_{\cdots\ell} - B^{hji}_{\cdots\ell} - B^{jih}_{\cdots\ell} - B^{ihj}_{\cdots\ell}\right)$$

(3.13) $$A_{(ij)} = \frac{1}{2}\left(A_{ij} + A_{ji}\right)$$
$$H^{\cdot\cdot\ell}_{(ij\cdot h)} = \frac{1}{3}\left(H^{\cdot\cdot\ell}_{ij\cdot h} + H^{\cdot\cdot\ell}_{jh\cdot i} + H^{\cdot\cdot\ell}_{hi\cdot j} + H^{\cdot\cdot\ell}_{hj\cdot i} + H^{\cdot\cdot\ell}_{ji\cdot h} + H^{\cdot\cdot\ell}_{ih\cdot j}\right)$$

$\frac{1}{3!}$?

La proprietà seguente va notata:

(3.14) $$A_{[ij[h\ell]]} = A_{[ijh\ell]} \, , \quad B_{(i(j\ell))} = B_{(ij\ell)} \, , \text{ ecc.}$$

6) La moltiplicazione alternata o simmetrica di due o più tensori covarianti o controvarianti è moltiplicazione esterna seguita dall'alternare o mischiare rispetto a tutti gli indici del tensore prodotto:

(3.15) $$A_{[i} B_{j]} = \frac{1}{2}\left(A_i B_j - A_j B_i\right)$$
$$A_{[i} B_j C_{\ell]} = \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} A_i & A_j & A_\ell \\ B_i & B_j & B_\ell \\ C_i & C_j & C_\ell \end{vmatrix}$$

(3.16) $$A_{(ij} B_{\ell)} = \frac{1}{3!}\left(A_{ij} B_\ell + A_{j\ell} B_i + A_{\ell i} B_j + A_{\ell j} B_i + A_{ji} B_\ell + A_{i\ell} B_j\right) \text{ ecc.}$$

Tensori particolari, di uso frequente, sono il tensore δ^i_j di KRONECKER e le generalizzazioni δ^{ij}_{hk}, $\delta^{ijh}_{k\ell f}$..... le cui componenti valgono in relazione a qualunque riferimento sempre 1 o -1 oppure 0:

(3.17) $$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{pei valori } i = j \\ 0 & \text{" " } i \neq j' \end{cases}$$

(3.18) $$\delta^{ij}_{hk} = \delta^i_h \delta^j_k - \delta^i_k \delta^j_h = 2\,\delta^{[i}_h \delta^{j]}_k = 2\,\delta^i_{[h} \delta^j_{k]}$$

(3.19) $$\delta^{ijh}_{klf} = \begin{vmatrix} \delta^i_k & \delta^i_l & \delta^i_f \\ \delta^j_k & \delta^j_l & \delta^j_f \\ \delta^h_k & \delta^h_l & \delta^h_f \end{vmatrix} = \frac{1}{3!}\,\delta^{[i}_k \delta^j_l \delta^{h]}_f = \frac{1}{3!}\,\delta^i_{[h} \delta^j_l \delta^{h]}_{f]}$$

Ad es. δ^{ijh}_{klf} vale ± 1 se ijh, klf contengono gli stessi indici e se costituiscono permutazioni entrambe di classe pari o dispari - o di diversa parità; vale 0 in ogni altro caso.

Si osservi che:

(3.20) $$\delta^i_j A_i = A_j \;,\quad \delta^{ij}_{hk} A_{ij} = 2\,A_{[hk]},$$
$$\delta^{ijh}_{klf} A_{ijh} = 3!\,A_{[klf]}, \ldots$$

cosicchè la moltiplicazione interna per un conveniente tensore δ può tener luogo di una alternazione.

Veniamo a qualche richiamo di analisi tensoriale: la derivata covariante per un tensore A_i, o B^j od $M^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}$ è il nuovo tensore

(3.21) $$\nabla_h A_i = \partial_h A_i - L^j_{ih} A_j \qquad (\partial_h = \frac{\partial}{\partial u^h})$$

$$\nabla_h B^j = \partial_h B^j + L^j_{ih} B^i$$

$$\nabla_h M^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} = \partial_h M^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} - \sum_{1}^{r} {}_p\, L^{l}_{i_p h} M^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_{p-1} l i_{p+1} \ldots i_r} + \sum_{1}^{s} {}_q\, L^{j_q}_{lh} M^{j_1 \ldots j_{q-1} l j_{q+1} \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}$$

Alla derivata covariante di un tensore si collega il differenziale assoluto di questo: ad es.

(3.22) $\delta A_i = \nabla_h A_i \cdot du^h$, $\delta B_i^j = \nabla_h B_i^j \cdot du^h$, ecc...
$= dA_i - L^{\ell}_{ih} A_\ell \, du^h$

Per uno scalare (invariante assoluto) la derivata covariante e il differenziale assoluto si riducono alla derivata parziale e al differenziale totale del calcolo ordinario.

Valgano per le operazioni differenziali del calcolo assoluto le solite leggi formali relative alla derivazione o differenziazione di una somma, di un prodotto (che potrà essere esterno od interno, alternato, simmetrico).

La derivazione covariante si estende anche ai tensori relativi: ad es. se $\mathcal{H}$ è uno scalare relativo (o densità scalare) di peso p, cioè per un cambiamento delle coordinate curvilinee si ha:

(3,23) $$'\mathcal{H} = \Delta^p \cdot \mathcal{H}$$

possiamo definire la derivata covariante (nuovo scalare di peso p):

(3.24) $$\nabla_i \mathcal{H} = \partial_i \mathcal{H} - p L^j_{ji} \mathcal{H}$$

Analogamente per un tensore, ad es. A_j, B^h_j di peso p abbiamo le derivate covarianti (nuovi tensori di peso p)

(3.25) $$\nabla_i A_j = \partial_i A_j - L^{\ell}_{ji} A_\ell - p L^{\ell}_{\ell i} A_j ,$$
$$\nabla_i B^h_j = \partial_i B^h_j - L^{\ell}_{ji} B^h_\ell + L^h_{\ell i} B^\ell_j - p L^{\ell}_{\ell i} B^h_j ,$$

Per le derivate seconde covarianti non sussiste in generale la commutabilità dei due indici di derivazione; si hanno invece formule di commutazione:

(3.26) $$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) A_\ell = L_{ij\ell}^{\ \ \ h} A_h + 2 S_{ij}^{\ \ h} \nabla_h A_\ell$$

ove $L_{ij\ell}^{\ \ \ h}$, $S_{ij}^{\ \ h}$ sono il tensore di curvatura e il tensore di torsione della connessione affine:

(3.27) $$L_{ij\cdot\cdot\cdot\ell}^{\cdot\cdot\cdot h} = \partial_j L_{\ell i}^{h} - \partial_i L_{\ell j}^{h} + L_{\ell i}^{k} L_{kj}^{h} - L_{\ell j}^{k} L_{ki}^{h}$$

(3.28) $$S_{ij}^{\cdot\cdot h} = L_{[ij]}^{h} = \frac{1}{2}\left(L_{ij}^{h} - L_{ji}^{h}\right).$$

Ancora:

(3.29 $$\left(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i\right) B^{\ell} = - L_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot\ell} B^{k} + 2 S_{ij}^{\cdot\cdot h} \nabla_h B^{\ell};$$

poi, ad es.

(3.30) $$\left(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i\right) H_{\ell}^{\cdot g} = L_{ij\ell}^{\cdot\cdot\cdot h} H_{h}^{\cdot g} - L_{ijh}^{\cdot\cdot\cdot g} H_{\ell}^{\cdot h} + 2 S_{ij}^{\cdot\cdot h} \nabla_h H_{\ell}^{\cdot g}, \ldots \text{ecc.}$$

Risultato particolare notevole: i <u>tensori derivati</u> dei tensori δ di KRONECKER (e generalizzati), <u>sono tutti nulli</u>:

(3.31) $$\nabla_i \delta_g^{\ell} = 0 \quad , \quad \nabla_i \delta_{hg}^{\ell f} = 0 \, , \ldots .$$

Ricordo le proprietà fondamentali del tensore di curvatura:

(3.31) $$L_{(ij)h}^{\cdot\cdot\cdot k} = 0 \qquad \left(\text{come pure } S_{(ij)}^{\cdot\cdot h} = 0\right)$$

cioè il tensore di curvatura è <u>emisimmetrico</u> rispetto ai primi due indici (e così quello di torsione); e se la connessione è simmetrica , o senza torsione (ved. N. 1), onde:

(3.32) $$L_{[ijh]}^{\cdot\cdot\cdot k} = 0 \qquad \text{cioè} \quad L_{ijh}^{\cdot\cdot\cdot k} + L_{jhi}^{\cdot\cdot\cdot k} + L_{hij}^{\cdot\cdot\cdot k} = 0$$

e

(3.33) $$\nabla_{[\ell} L_{ij]h}^{\cdot\cdot\cdot k} = 0 \qquad \text{cioè} \quad \nabla_{\ell} L_{ijh}^{\cdot\cdot\cdot k} + \nabla_i L_{jlh}^{\cdot\cdot\cdot k} + \nabla_j L_{li k}^{\cdot\cdot\cdot k} = 0$$

(<u>identità di Bianchi</u>). Per una connessione <u>asimmetrica</u> al luogo di queste due ultime identità si ha:

(3.34) $$L_{[ijh]}^{\cdot\cdot\cdot k} = 4 S_{[ij}^{\cdot\cdot\cdot \ell} S_{h]\ell}^{\cdot\cdot\cdot k} + 2 \nabla_{[i} S_{jh]}^{\cdot\cdot k}$$

$$(3.35)\qquad \nabla_{[l} L^{\cdots k}_{ij]h} + 2\, S^{\cdots f}_{[ij} L^{\cdots k}_{l]fh} = 0 .$$

Le (3.31),(3.32) hanno questa notevole conseguenza: per una connessione affine simmetrica si ha:

$$(3.36)\qquad L^{\cdots i}_{jhi} = L^{\cdots i}_{ihj} - L^{\cdots i}_{ijh} .$$

4. Tensori a più serie di indici.- Formule di CHRISTOFFEL; equivalenza di due connessioni affini.

Accenniamo ancora a una estensione dell' usuale algebra e analisi tensoriale. Si presentano esempi di tensori aventi indici di differenti serie, relativi a differenti serie di variabili (coordinate in una stessa o anche in due distinte varietà). Limitiamoci qui al caso di due serie di variabili u^i, v^ϱ $\begin{matrix}(i=1,2,\dots n)\\(\varrho=1,2,\dots m)\end{matrix}$ coordinate dei punti entro uno stesso spazio o in due spazi l'uno all'altro biunivocamente riferibili e quindi esprimibili le une per le altre. Ad es. $A^{\cdot\varrho}_{i}$ sarà un tensore se, per cambiamento (indipendente) delle u^i, v^ϱ in $u^{i'}, v^{\varrho'}$ si ha:

$$(4.1)\qquad A^{\cdot\varrho'}_{i'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \frac{\partial v^{\varrho'}}{\partial v^\varrho} A^{\cdot\varrho}_{i} .$$

La derivata covariante di $A^{\cdot\varrho}_{i}$, sia rispetto alla u^j che alla v^t generica (per la quale useremo il simbolo D_j o D_t) si costruisce nel modo seguente, utilizzando i parametri di due connessioni affini L^i_{jh}, R^ϱ_{st} che possono supporsi del tutto distinte e indipendenti l'una dall'altra, anche se nello stesso spazio:

$$(4.2)\qquad \begin{cases} D_j A^{\cdot\varrho}_{i} = \partial_j A^{\cdot\varrho}_{i} - L^h_{ij} A^{\cdot\varrho}_{h} + R^\varrho_{st} A^{\cdot s}_{h} \dfrac{\partial v^t}{\partial u^j} \\ D_t A^{\cdot\varrho}_{i} = \partial_t A^{\cdot\varrho}_{i} - L^h_{ij} A^{\cdot\varrho}_{h} \dfrac{\partial u^j}{\partial v^t} + R^\varrho_{st} A^{\cdot s}_{h} = \dfrac{\partial u^j}{\partial v^t} D_j A^{\cdot\varrho}_{i} . \end{cases}$$

Anche qui valgono senz'altro le solite formule di commutazione per le derivate seconde covarianti: ove figurano le componenti dei tensori di curvatura di entrambe le connessioni e del tensore di torsione dell'una o dell'altra.

Caso particolare notevole è quello in cui i due spazi (o le due connessioni coincidono: indichiamo allora con $u^i, u^{i'}$

due sistemi di variabili, cui corrisponderanno i parametri $L^{i}_{jh}, L^{i'}_{j'h'}$ per la connessione. Un esempio molto semplice di tensori con le due serie d'indici è costituita dagli stessi sistemi (fra loro reciproci)

$$\vartheta^{i}_{i'} = \frac{\partial u^{i}}{\partial u^{i'}} \quad , \quad \vartheta_{i}^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^{i}} \, . \tag{4.3}$$

Le relative derivate covarianti son nulle: ad es:

$$D_{j'} \vartheta^{\ell}_{i'} = \frac{\partial^2 u^{i}}{\partial u^{i'} \partial u^{j'}} - L^{\ell'}_{i'j'} \vartheta^{\ell}_{\ell'} + L^{\ell}_{ij} \vartheta^{i}_{i'} \vartheta^{j}_{j'} = 0 \, , \tag{4.4}$$

per le formule di CHRISTOFFEL esprimenti la legge di trasformazione delle L^{ℓ}_{ij} :

$$L^{\ell'}_{i'j'} = L^{\ell}_{ij} \vartheta^{i}_{i'} \vartheta^{j}_{j'} \vartheta_{\ell}^{\ell'} + \vartheta_{j'} \vartheta^{\ell}_{i'} \cdot \vartheta_{\ell}^{\ell'} \, . \tag{4.5}$$

Anzi è manifesto che le (4.4) sono proprio equivalenti alle formule (4.5) di CHRISTOFFEL. Ne risulta in modo evidente il ruolo fondamentale delle formule di CHRISTOFFEL per determinare il carattere covariante delle derivate fatte coi supposti parametri: se ad es. A_i è un tensore, cosicchè

$$A_{i'} = \vartheta^{i}_{i'} A_i \tag{4.6}$$

si vede bene che appunto in quanto si ha $D_{\ell} \vartheta^{i}_{i'} = 0$ dalla (4.6) segue, per derivazione col simbolo $D_{\ell'} = \vartheta^{\ell}_{\ell'} D_{\ell}$, che nei riguardi dei tensori a una sola serie d'indici potrà sostituirsi con $\nabla_{\ell'} = \vartheta^{\ell}_{\ell'} \nabla_{\ell}$:

$$\nabla_{\ell'} A_{i'} = \vartheta^{i}_{i'} \vartheta^{\ell}_{\ell'} \nabla_{\ell} A_i \quad ; \tag{4.7}$$

il che esprime il carattere di covarianza della derivata.

Indichiamo un'applicazione più notevole: stabilendo le condizioni per l'equivalenza di due connessioni affini $\Gamma^{i}_{j\ell}, \Gamma^{i'}_{j'\ell'}$. Intendiamo che siano assegnate le $\Gamma^{i}_{j\ell}$ in funzione delle u^{i}, le $\Gamma^{i'}_{j'\ell'}$ in funzione delle $u^{i'}$, si tratta di vedere sotto quali condizioni esisteranno funzioni

(4.8) $$u^i = u^i(u^{1'}, u^{2'}, \ldots, u^{n'})$$

tali che, essendo al solito $\vartheta^i_{i'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}$, $\vartheta^{i'}_i = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}$, valgono le (4.5) cioè le (4.4); ossia con la trasformazione (4.8) i due sistemi di parametri vadano ad identificarsi. Abbiamo, per le funzioni incognite u^i e $\vartheta^i_{i'}$, il sistema differenziale

(4.9) $$\frac{\partial u^i}{\partial u^{j'}} = \vartheta^i_{j'}, \qquad D_{\ell'} \vartheta^i_{j'} = 0 .$$

Condizioni d'integrabilità delle prime equazioni sono

(4.10) $$\partial_{\ell'} \vartheta^i_{j'} = \partial_{j'} \vartheta^i_{\ell'} ,$$

che tenute presenti le seconde equazioni (4.9) con ovvie trasformazioni si portano alla forma

(4.11) $$S^{\cdots i'}_{j'\ell'} \vartheta^i_{i'} = S^{\cdots i}_{j\ell} \vartheta^j_{j'} \vartheta^\ell_{\ell'} .$$

Le condizioni d'integrabilità delle seconde equazioni (4.9) sono

(4.12) $$\partial_{h'}(D_{\ell'} \vartheta^i_{j'}) - \partial_{\ell'}(D_{h'} \vartheta^i_{j'}) = 0$$

e anche, in forza delle equazioni medesime

(4.13) $$(D_{h'} D_{\ell'} - D_{\ell'} D_{h'}) \vartheta^i_{j'} = 0 ;$$

cioè per le formule di commutazione, tenute ancora presenti le (4.9)

(4.14) $$R^{\cdots i'}_{h'\ell'j'} \vartheta^i_{i'} = R^{\cdots i}_{h\ell j} \vartheta^h_{h'} \vartheta^\ell_{\ell'} \vartheta^j_{j'} .$$

Le (4.11), (4.14) in sostanza esprimono che per le due connessioni debbono potersi identificare i tensori di torsione e quelli di curvatura. Per le funzioni incognite $\vartheta^i_{i'}$ le (4.11), (4.14), che insieme indicheremo con F, sono equazioni in termini finiti. Abbiamo dunque un sistema misto alle derivate parziali: dovremo aggiun-

gere le conseguenze differenziali delle equazioni in termini finiti al sistema medesimo, e poi ripetere la stessa cosa per le nuove equazioni in termini finiti che si ottengono. Fa lo stesso naturalmente (trattandosi di aggiungere le nuove equazioni che si ottengono al sistema) applicare la derivazione covariante $\mathcal{D}_{k'}$. Dalle (4.11) e (4.14) in forza delle (4.9) otteniamo

$$(4.15)\qquad \nabla_{k'} S_{j'l'}^{\cdots i'} \vartheta_{i'}^{i} = \nabla_k S_{jl}^{\cdots i} \vartheta_{j'}^{j} \vartheta_{l'}^{l} \vartheta_{k'}^{k}$$

$$(4.16)\qquad \nabla_{k'} R_{k'l'j'}^{\cdots i'} \vartheta_{i'}^{i} = \nabla_k R_{klj}^{\cdots i} \vartheta_{k'}^{k} \vartheta_{l'}^{l} \vartheta_{j'}^{j} \vartheta_{k'}^{k}$$

e così si può seguitare. Indichiamo con F_1 complessivamente le nuove equazioni ora ottenute, con F_2 quelle che se ne ottengono con una ulteriore derivazione; e così via. Se esiste un intero N tale che le $F, F_1, F_2, \ldots, F_N$ quali equazioni nelle $\vartheta_{i'}^{i}$ e nelle ω^i (contenute nelle $R_{klj}^{\cdots i}$) siano algebricamente compatibili e le F_{N+1} siano anch'esse soddisfatte in forza delle precedenti (o identicamente) le due connessioni proposte sono effettivamente equivalenti; in caso contrario non lo sono. (Appare manifesto che un numero finito di derivazioni basterà sempre per decidere dell'equivalenza).

In particolare troviamo che le connessioni equivalenti a quella dello spazio affine ordinario sono caratterizzate dalle condizioni

$$(4.1)\qquad R_{klj}^{\cdots i} = 0 \qquad S_{jl}^{\cdots i} = 0 .$$

Altra conseguenza: in quanto le condizioni per l'equivalenza vengono ad esprimersi mediante i tensori di torsione e di curvatura e le loro derivate covarianti successive ne possiamo trarre che questi tensori costituiscono un sistema completo d'invarianti per la connessione affine.

Considerazioni analoghe nella sostanza, formalmente un po' meno semplici ci serviranno fra non molto per la equivalenza proiettiva delle connessioni affini.

§.2 - Trasformazioni proiettive di una connessione affine.

5. Trasformazione proiettiva della connessione affine; parametri Π^i_{jk} di T.Y.THOMAS.

Svolgeremo ora gli elementi di una geometria proiettiva degli spazi a connessione affine; cioè lo studio delle nozioni e proprietà collegate a una connessione affine in modo invariante per le trasformazioni di questa che conservano le geodetiche.

Due sistemi differenziali

$$\frac{d^2u^i}{ds^2} + L^i_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds} = 0, \tag{5.1}$$

$$\frac{d^2u^i}{d\bar{s}^2} + \bar{L}^i_{jk}\frac{du^j}{d\bar{s}}\frac{du^k}{d\bar{s}} = 0 \tag{5.2}$$

possono rappresentare, riferite a due differenti scelte dei "parametri affini" s ed $\bar{s}$ sulle singole linee, le geodetiche di una stessa connessione affine. Condizione perchè questo fatto si presenti è che si possa determinare una tale funzione

$$s = s(\bar{s}) \tag{5.3}$$

che, in forza della relazione (5.3), il sistema (5.2) risulti equivalente a (5.1). Ora si ha

$$\frac{du^i}{d\bar{s}} = \frac{du^i}{ds}\frac{ds}{d\bar{s}}, \qquad \frac{d^2u^i}{d\bar{s}^2} = \frac{d^2u}{ds^2}\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 + \frac{du^i}{ds}\frac{d^2s}{d\bar{s}^2}; \tag{5.4}$$

sostituendo nella (5.2) questa prende la forma

$$\frac{d^2u^i}{ds^2} + \bar{L}^i_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds} + \frac{\frac{d^2s}{d\bar{s}^2}}{\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2}\frac{du^i}{ds} = 0. \tag{5.5}$$

Dovrà dunque potersi determinare, lungo ciascuna geodetica, la funzione $s(\bar{s})$ in modo tale che risulti

$$L^i_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds} = \bar{L}^i_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds} + \frac{\frac{d^2s}{d\bar{s}^2}}{\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2}\frac{du^i}{ds}. \tag{5.6}$$

Una condizione necessaria per questo (che sia anche sufficiente apparrà fra poco) si ha dalla (5.6) mediante moltiplicazione alternata per $\frac{du^k}{ds}$:

$$(5.7)\qquad \bar{L}^{[i}_{jh}\frac{du^{k]}}{ds}\frac{du^j}{ds}\frac{du^h}{ds} = L^{[i}_{jh}\frac{du^{k]}}{ds}\frac{du^j}{ds}\frac{du^h}{ds},$$

cioè

$$(5.8)\qquad \delta^{ik}_{gl}\bar{L}^{g}_{jh}\frac{du^l}{ds}\frac{du^j}{ds}\frac{du^h}{ds} = \delta^{ik}_{gl}L^{g}_{jh}\frac{du^l}{ds}\frac{du^j}{ds}\frac{du^h}{ds}.$$

Queste debbono valere lungo tutte le geodetiche e dunque debbono essere identicamente eguali le due forme cubiche nelle $\frac{du^i}{ds}$ contenute nei due membri. Questo ci dà infine:

$$(5.9)\qquad \delta^{ik}_{g(l}\bar{L}^{g}_{jh)} = \delta^{ik}_{g(l}L^{g}_{jh)}.$$

Tenuto presente che ad es. $S_{(jh)}{}^{g}=0$, indicando al solito con Γ^{g}_{ih}, $\bar{\Gamma}^{g}_{ih}$ le connessioni simmetriche associate ad L^{g}_{ih}, $\bar{L}^{g}_{ih}$ le (5.9) possono anche scriversi

$$(5.10)\qquad \delta^{ik}_{g(l}\bar{\Gamma}^{g}_{jh)} = \delta^{ik}_{g(l}\Gamma^{g}_{jh)}.$$

Cioè sviluppando, tenendo presente che ad es. $\Gamma^{g}_{(jk)}=\Gamma^{g}_{jk}$ (e rammentando le (3.18)):

$$(5.11)\qquad \begin{aligned}&\left(\delta^i_g\delta^k_l-\delta^i_l\delta^k_g\right)\bar{\Gamma}^{g}_{jh}+\left(\delta^i_g\delta^k_j-\delta^i_j\delta^k_g\right)\bar{\Gamma}^{g}_{hl}+\\&+\left(\delta^i_g\delta^k_h-\delta^i_h\delta^k_g\right)\bar{\Gamma}^{g}_{lj}=\left(\delta^i_g\delta^k_l-\delta^i_l\delta^k_g\right)\Gamma^{g}_{jh}+\\&+\left(\delta^i_g\delta^k_j-\delta^i_j\delta^k_g\right)\Gamma^{g}_{hl}-\left(\delta^i_g\delta^k_h-\delta^i_h\delta^k_g\right)\Gamma^{g}_{lj}.\end{aligned}$$

Poniamo ora $k=l$ e sommiamo ; risulta subito

$$(5.12)\qquad \begin{aligned}&(n+1)\,\bar{\Gamma}^{i}_{jh}-\delta^i_j\bar{\Gamma}^{k}_{kh}-\delta^i_h\bar{\Gamma}^{k}_{kj}=\\&=(n+1)\,\Gamma^{i}_{jh}-\delta^i_j\Gamma^{k}_{kh}-\delta^i_h\Gamma^{k}_{kj}.\end{aligned}$$

Cioè, posto secondo T.Y.THOMAS

$$(5.13)\qquad \Pi^{i}_{jh} = \Gamma^{i}_{jh} - \frac{1}{n+1}\left(\delta^{i}_{j}\Gamma^{k}_{kh} + \delta^{i}_{h}\Gamma^{k}_{kj}\right),$$

otteniamo la condizione:

$$(5.14)\qquad \overline{\Pi}^{i}_{jh} = \Pi^{i}_{jh}.$$

Per le Π^{i}_{jh}, che T.Y.THOMAS chiama "componenti della connessione proiettiva" (legata alla supposta connessione affine, o meglio alle geodetiche di questa) risulta dunque il carattere <u>d'invarianza</u> per tutte le trasformazioni che conservano le geodetiche.

Di più: le (5.12) ci danno anche

$$(5.15)\qquad \overline{\Gamma}^{i}_{jh} = \Gamma^{i}_{jh} + \delta^{i}_{j}\varphi_{h} + \delta^{i}_{h}\varphi_{j},$$

ove abbiamo posto

$$(5.16)\qquad \varphi_{h} = \frac{1}{n+1}\left(\overline{\Gamma}^{k}_{kh} - \Gamma^{k}_{kh}\right).$$

Tenuto presente che in forza delle formule (4.4) o(4.5) di CHRISTOFFEL $\overline{\Gamma}^{i}_{jh} - \Gamma^{i}_{jh}$ <u>è un tensore</u>, <u>ne viene che</u> φ_{h} <u>è un vettore</u> (affine) <u>covariante</u>.

<u>Viceversa</u>: se <u>sussistono</u> fra le due connessioni simmetriche Γ^{i}_{jh}, $\overline{\Gamma}^{i}_{jh}$ le relazioni (5.15), cioè anche se sussistono fra le due connessioni asimmetriche L^{i}_{jh}, $\overline{L}^{i}_{jh}$, cui esse sono associate, le seguenti relazioni

$$(5.17)\qquad \overline{L}^{i}_{jh} = L^{i}_{jh} + \delta^{i}_{j}\varphi_{h} + \delta^{i}_{h}\varphi_{j} + T^{\cdot\cdot i}_{jh}$$

ove $T^{\cdot\cdot i}_{jh}$ è un arbitrario tensore (del 3° ordine con le varianze indicate) <u>emisimmetrico</u> rispetto agli indici j, h, le due connessioni considerate danno luogo alle stesse Π^{i}_{jh}, ed hanno le stesse geodetiche. Infatti anzitutto dalle (5.15) contraendo rispetto ad i, j senz'altro ne risultano le (5.16); sostituendo nelle (5.15) ne vengono le (5.12) e (5.14). E d'altra parte sostituendo le espressioni delle $\overline{L}^{i}_{jh}$ date dalle (5.17) (le quali contengono le (5.15), cui si riducono mischian-

do rispetto ad j, h) nelle (5.6), ne abbiamo con ovvie semplificazioni

$$(5.18) \qquad 2\varphi_h \frac{du^h}{ds} \cdot \frac{du^i}{ds} = -\frac{\frac{d^2 s}{d\bar{s}^2}}{\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2} \cdot \frac{du^i}{ds}$$

onde

$$(5.19) \qquad \frac{d^2 s}{d\bar{s}^2} = -2\varphi_h \frac{du^h}{d\bar{s}} \frac{ds}{d\bar{s}} .$$

Questa s'integra a vista con due quadrature:

$$(5.20) \qquad \frac{ds}{d\bar{s}} = A e^{-2\int \varphi_h du^h}, \quad s = A\int e^{-2\int \varphi_h du^h} d\bar{s} + B$$

o anche

$$(5.21) \qquad \bar{s} = \alpha \int e^{2\int \varphi_h du^h} ds + \beta ,$$

ove A, B od α, β sono costanti arbitrarie; e gli integrali s'intendono fatti lungo le singole geodetiche che si considerano. Risulta dunque infine che le (5.14) , o anche le (5.15), ove φ_k indica un qualunque vettore covariante, o le equivalenti (5.17) ove il tensore $T_{jh}^{\cdot\cdot i}$ è qualunque purchè emisimmetrico rispetto ad j, h, sono condizioni anche sufficienti perchè le connessioni $\Gamma^i_{jk}, \bar{\Gamma}^i_{jk}$ abbiano le medesime geodetiche (cioè : perchè due spazi che siano dotati di queste connessioni siano rappresentati l'uno nell'altro con conservazione delle geodetiche). La (5.15), o (5.17), è insomma la più generale trasformazione proiettiva della connessione affine.

Le Π^i_{jk} per un cambiamento delle coordinate curvilinee hanno una legge di trasformazione che non è quella dei parametri di una connessione affine. Le formule relative si ricavano subito dalle (5.13) e (4.5): in conseguenza di queste, tenuto presente che se $a^i_{\cdot k}$ sono gli elementi di un determinante A ed $a_i^{\cdot k}$ i rispettivi elementi reciproci si ha

$$(5.22) \qquad \partial_l a^i_{\cdot k} \cdot a_i^{\cdot k} = \partial_l \log A \qquad (A = |a^i_{\cdot k}|).$$

si ha subito

$$(5.23) \qquad L^{h'}_{h'k'} = L^h_{hk} \vartheta^k_{k'} + \partial_{k'} \log \Delta , \qquad (*)$$

(*) Se Δ è negativo [illegible] (5.23) [illegible] $|\Delta|$.

Δ essendo dati dalle (3.7). Sotto altra forma, posto

$$(5.24)\qquad \vartheta = \frac{1}{n+1}\log\Delta = \log\left(\frac{\partial(u^1,\dots,u^n)}{\partial(u^{1'},\dots,u^{n'})}\right)^{\frac{1}{n+1}},$$

$$(5.25)\qquad \vartheta_{i'} = \partial_{i'}\vartheta = \frac{1}{n+1}\partial_{i'}\vartheta^{j}_{j'}\cdot\vartheta^{j'}_{j} = \frac{1}{n+1}\partial_{i'}\log\Delta$$

abbiamo :

$$(5.26)\qquad L^{h'}_{h'k'} = L^{h}_{hk}\vartheta^{k}_{k'} + (n+1)\vartheta_{k'}.$$

La stessa legge di trasformazione varrà in particolare per Γ^{h}_{hk}. Ne ricaviamo:

$$(5.27)\qquad \Pi^{i'}_{j'k'} = \Pi^{i}_{jk}\vartheta^{j}_{j'}\vartheta^{k}_{k'}\vartheta^{i'}_{i} + \left(\partial_{k'}\vartheta^{i}_{j'} - \vartheta^{i}_{j_1}\vartheta^{j_1}_{k'} - \vartheta^{i}_{k_1}\vartheta^{k_1}_{j'}\right)\vartheta^{i'}_{i}$$

cioè

$$(5.28)\qquad \Pi^{i'}_{j'k'}\vartheta^{i}_{i'} = \Pi^{i}_{jk}\vartheta^{j}_{j'}\vartheta^{k}_{k'} + \partial_{k'}\vartheta^{i}_{j'} - \vartheta_{k_1}\vartheta^{i}_{j'}\vartheta^{k_1}_{k'} - \vartheta_{j_1}\vartheta^{i}_{k'}$$

Queste possono anche scriversi analogamente alle (4.5) nel modo seguente, ove con $\overset{(p)}{\nabla}\overset{(p)}{D}$ si designa la derivazione formalmente eseguita coi parametri Π^{i}_{jk} e $\Pi^{i'}_{j'k'}$ al luogo delle Γ^{i}_{jk} e $\Gamma^{i'}_{j'k'}$ (od L^{i}_{jk} ed $L^{i'}_{j'k'}$) come se fossero parametri di una connessione affine:

$$(5.29)\qquad \overset{(p)}{D}_{k'}\vartheta^{i}_{j'} = \vartheta_{k'}\vartheta^{i}_{j'} + \vartheta_{j'}\vartheta^{i}_{k'}.$$

Si badi che i primi membri non sono effettive derivate covarianti: pure la loro considerazione potrà riuscirci utile.

Notiamo, confrontando le (5.13) con le (5.15), che le prime possono riguardarsi quale un caso particolare delle seconde, ove si ponga

$$(5.30)\qquad \varphi_j = -\frac{1}{n+1}\Gamma^{h}_{hj}.$$

Il secondo membro non è un vettore covariante: questo è in relazione col fatto già notato che Π^{i}_{jh} non è una con-

nessione affine. La costruzione, espressa dalle (5.20) o (5.21), con cui si ottiene per la geodetica generica il parametro affine $\bar{s}$, corrispondente alle espressioni $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ od $\bar{L}^i_{jk}$ dei parametri - è manifesto che finchè si tratti delle geodetiche è sempre lecito riferirci anzichè alla connessione asimmetrica considerata a quella simmetrica associata - può anch'esso applicarsi al caso attuale, e ci dà il parametro affine invariante p di T.Y.THOMAS; da lui veramente chiamato "parametro proiettivo", ma tale denominazione (come vedremo) non appare giustificata. Abbiamo subito

$$p = a \int e^{-\frac{2}{n+1}\int \Gamma^i_{ih}\, du^h}\, ds + b \,, \tag{5.31}$$

ove a, b sono costanti arbitrarie. Si vede bene trattarsi ancora di un parametro affine come s; determinato a meno di una trasformazione lineare intera. In relazione al parametro p le equazioni (5.1) o (5.2) delle geodetiche - ove naturalmente al luogo di $L^i_{jk}, \bar{L}^i_{jk}$ è lecito intendere poste le $\Gamma^i_{jk}, \bar{\Gamma}^i_{jk}$ - prendono la forma

$$\frac{d^2u^i}{dp^2} + \Pi^i_{jk}\,\frac{du^j}{dp}\,\frac{du^k}{dp} = 0. \tag{5.32}$$

Per un cambiamento (5.17) della connessione - o (5.15) di quella simmetrica associata - p si trasforma in

$$\bar{p} = \bar{a} \int e^{-\frac{2}{n+1}\int (\Gamma^i_{ih} + (n+1)\varphi_h)\, du^h}\, \frac{1}{A}\, e^{2\int \varphi_h\, du^h}\, ds + \bar{b} \tag{5.33}$$

$$= \frac{\bar{a}}{aA}\, p + \bar{b} - \frac{\bar{a}b}{aA} \,,$$

cioè subisce una trasformazione lineare intera: possiamo anche dire che esso è invariante per le (5.15) in quanto esso è sempre determinato, come già osservavo, appunto a meno di una trasformazione lineare intera. Però - e anche questo è conseguenza assai naturale di quanto precede - il parametro p di T.Y.THOMAS non ha significato invariante per trasformazioni delle coordinate curvilinee, e quindi anche, non ha

significato geometrico; ciò diminuisce assai il suo interesse. Mi limito nei riguardi di questo parametro ad aggiungere che esso è tale da rendere i vettori $\frac{d u^i}{d p}$, tangenti alla geodetica che si considera, relativi e di peso $\frac{2}{n+1}$;

i primi membri delle (5.32) sono secondo le (3.25) proprio le derivate assolute $\nabla_j \frac{du^i}{dp} \cdot \frac{du^i}{dp}$ dei vettori relativi ora detti. La verifica è facile, su questo non occorre fermarci.

Aggiungiamo un'osservazione molto semplice, nei riguardi di Π^i_{jk}: si ha manifestamente, in conseguenza delle (5.13),

$$\Pi^i_{jk} = \Pi^i_{kj} \; ; \quad \Pi^i_{ik} = 0 . \tag{5.34}$$

6.- Il tensore di WEYL, di curvatura proiettiva, e il covariante proiettivo; equivalenza proiettiva fra due connessioni affini.

Veniamo (cfr. n.4) al problema dell'equivalenza proiettiva di due connessioni affini: L^i_{jk}, $\bar{L}^i_{jk}$; il che porterà anche ad introdurre gli elementi fondamentali della teoria, cioè il tensore di WEYL o di curvatura proiettiva, W^i_{jkh} e il "covariante proiettivo" z_{ijk} di O.VEBLEN e J.M.THOMAS.

Diremo proiettivamente equivalenti due connessioni affini se è possibile porre fra due spazi che abbiano tali connessioni una corrispondenza che conservi le geodetiche. Per questo è necessario e sufficiente che esistano tali funzioni

$$u^i = u^i(u^1, u^2, \ldots, u^n) \tag{6.1}$$

che in forza di queste relazioni i parametri Π^i_{jk}, $\bar{\Pi}^i_{jk}$ relativi alle due connessioni siano legati dalle formule di trasformazione (5.28) o (5.29), col significato già precisato pei simboli. Accanto alle u^i introduciamo quali

funzioni incognite le $\vartheta^i_{i'}, \vartheta, \vartheta_{j'}$; per ora abbiamo per queste incognite il sistema differenziale

$$\frac{\partial u^i}{\partial u^{j'}} = \vartheta^i_{j'} \tag{6.2}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial u^{j'}} = \vartheta_{j'} \tag{6.3}$$

$$\overset{(h)}{\Pi}_{k'} \vartheta^i_{j'} = \vartheta_{k'} \vartheta^i_{j'} + \vartheta_{j'} \vartheta^i_{k'} . \tag{6.4}$$

Le condizioni d'integrabilità ci daranno fra l'altro anche equazioni esprimenti, per le funzioni incognite (e le variabili indipendenti $u^{i'}$), le derivate $\frac{\partial \vartheta^i_{j'}}{\partial u^{k'}}$.

Le condizioni d'integrabilità delle (6.2)

$$\partial_{h'} \vartheta^i_{j'} = \partial_{j'} \vartheta^i_{h'} \tag{6.5}$$

sono senz'altro soddisfatte, per le prime (5.34), in forza delle (6.4). Per le (6.3) abbiamo

$$\partial_{h'} \vartheta_{j'} = \partial_{j'} \vartheta_{h'} \quad \text{o anche} \quad \overset{(h)}{\Pi}_{h'} \vartheta_{j'} = \overset{(h)}{\Pi}_{j'} \vartheta_{h'} . \tag{6.6}$$

Su queste torneremo. Passiamo intanto alle condizioni d'integrabilità delle (6.4): per considerazioni analoghe a quelle svolte al n.4 - ved. le (4.12) - che non occorre ripetere, in forza del sistema esse possono scriversi

$$\overset{(h)}{D}_{h'} (\vartheta_{k'} \vartheta^i_{j'} + \vartheta_{j'} \vartheta^i_{k'}) - \overset{(h)}{D}_{k'} (\vartheta_{h'} \vartheta^i_{j'} + \vartheta_{j'} \vartheta^i_{h'}) = \Pi^{\cdots i}_{h'k'j'} \vartheta^i_{i'} - \Pi^{\cdots i}_{hkj} \vartheta^h_{h'} \vartheta^k_{k'} \vartheta^j_{j'} \tag{6.7}$$

ove abbiamo posto

$$\Pi^{\cdots i}_{hkj} = \partial_k \Pi^i_{jh} - \partial_h \Pi^i_{jk} + \Pi^l_{jh} \Pi^i_{lk} - \Pi^l_{jk} \Pi^i_{lh} , \tag{6.8}$$

e analogamente per $\Pi^{\cdots i'}_{h'k'j'}$: enti <u>formalmente</u> costruiti a partire dalle Π^i_{hk} o $\Pi^{i'}_{h'k'}$ come il tensore di curvatura per una connessione affine. Veramente essi <u>non sono tensori</u>, come già a priori si prevede e come ci risulterà fra poco in modo preciso: questo però non to-

affatto che valgano in relazione alla derivazione $\overset{(p)}{\nabla} \circ \overset{(n)}{D}$ le solite formule di commutazione delle derivate seconde, in cui appunto figura questo ente $\Pi_{hkj}^{\cdots i}$. Ciò è dovuto al fatto che non interviene nella dimostrazione di quelle formule di commutazione l'ipotesi che i parametri di derivazione abbiano quella certa legge di trasformazione di CHRISTOFFEL, che assicura la covarianza delle derivate. Allo stesso modo si ha che per $\Pi_{hkj}^{\cdots i}$ valgono le solite proprietà formali del tensore di curvatura di una connessione affine simmetrica:

$$\Pi_{(hk)j}^{\cdots i} = 0 \,, \quad \Pi_{[hkj]}^{\cdots i} = 0 \,, \quad \nabla_{[l} \Pi_{hk]j}^{\cdots i} = 0 \,. \tag{6.9}$$

Questa osservazione ci sarà utile fra non molto. E anzi ci conviene completarla notando che, in forza delle seconde formule (5.34), si ha

$$\Pi_{lki}^{\cdots i} = \Pi_{ih}^{l} \Pi_{lk}^{ih} - \Pi_{ik}^{l} \Pi_{lh}^{ih} = 0 \,, \tag{6.10}$$

onde anche (cfr. con le (3.36)

$$\Pi_{ihj}^{\cdots i} - \Pi_{ijh}^{\cdots i} = \Pi_{jhi}^{\cdots i} = 0. \tag{6.11}$$

Riprendiamo le (6.7). Da queste dobbiamo ancora eliminare, mediante le (6.4), le derivate delle $\vartheta_{j'}^{i}$: abbiamo, tenute presenti le (6.6):

$$\begin{aligned} \Pi_{h'k'j'}^{\cdots i} \vartheta_{i}^{i'} = {} & \Pi_{hkj}^{\cdots i} \vartheta_{h'}^{h} \vartheta_{k'}^{k} \vartheta_{j'}^{j} + \\ & + \overset{(n)}{D}_{h'} \vartheta_{j'}^{\cdot} \cdot \vartheta_{k'}^{i} - \overset{(n)}{D}_{k'} \vartheta_{j'}^{\cdot} \cdot \vartheta_{h'}^{i} + \\ & + \vartheta_{k'} \left(\vartheta_{h'} \vartheta_{j'}^{i} + \vartheta_{j'} \vartheta_{h'}^{i} \right) + \vartheta_{j'} \left(\vartheta_{h'} \vartheta_{k'}^{i} + \vartheta_{k'} \vartheta_{h'}^{i} \right) - \\ & - \vartheta_{h'} \left(\vartheta_{k'} \vartheta_{j'}^{i} + \vartheta_{j'} \vartheta_{k'}^{i} \right) - \vartheta_{j'} \left(\vartheta_{k'} \vartheta_{h'}^{i} + \vartheta_{h'} \vartheta_{k'}^{i} \right). \end{aligned} \tag{6.12}$$

Con ovvie semplificazioni ricaviamo

$$\begin{aligned} \Pi_{h'k'j'}^{\cdots i'} \vartheta_{i}^{i} = {} & \Pi_{hkj}^{\cdots i} \vartheta_{h'}^{h} \vartheta_{k'}^{k} \vartheta_{j'}^{j} + \overset{(n)}{D}_{h'} \vartheta_{j'}^{\cdot} \cdot \vartheta_{k'}^{i} - \\ & - \overset{(n)}{D}_{k'} \vartheta_{j'}^{\cdot} \cdot \vartheta_{h'}^{i} + \vartheta_{j'} \left(\vartheta_{k'} \vartheta_{h'}^{i} - \vartheta_{h'} \vartheta_{k'}^{i} \right). \end{aligned} \tag{6.13}$$

Moltiplichiamo per $\vartheta_{i'}^{h'}$ e sommiamo:

$$(6.14)\qquad \Pi_{i'k'j'}^{\cdots\cdots i'} = \Pi_{ikj}^{\cdots\cdots i}\vartheta_{h'}^{k}\vartheta_{j'}^{j} + (1-n)\overset{(h)}{\Pi}_{k'}\vartheta_{j'} + (n-1)\vartheta_{k'}\vartheta_{j'} ;$$

di qui ricaviamo per le derivate $\overset{(h)}{\Pi}_{k'}\vartheta_{j'}$ espressioni

$$(6.15)\qquad \overset{(h)}{\Pi}_{k'}\vartheta_{j'} = \vartheta_{k'}\vartheta_{j'} - z_{k'j'} + z_{kj}\vartheta_{k'}^{k}\vartheta_{j}^{i} ,$$

ove per brevità abbiamo posto:

$$(6.16)\qquad z_{kj} = \frac{1}{n-1}\Pi_{ikj}^{\cdots\cdots i} \quad \left(= z_{jk} \text{ per le (6.11)}\right) .$$

Le espressioni trovate per le (6.15) soddisfano anche alle (6.6). Abbiamo dunque completato il sistema delle (6.2), (6.3), (6.4) mediante le (6.15): di queste dovremo ricavare le condizioni d'integrabilità. Ma prima vogliamo emilinare, mediante le (6.15), le derivate $\overset{(h)}{\Pi}_{k'}\vartheta_{j'}$ dalle (6.13). Otteniamo, con un'agevole semplificazione:

$$(6.17)\qquad \left(\Pi_{h'k'j'}^{\cdots\cdots i'} + \delta_{k'}^{i'}z_{h'j'} - \delta_{h'}^{i'}z_{k'j'}\right)\vartheta_{i'}^{i} = \left(\Pi_{hkj}^{\cdots\cdots i} + \delta_{k}^{i}z_{hj} - \vartheta_{h}^{i}z_{kj}\right)\vartheta_{h'}^{h}\vartheta_{k'}^{k}\vartheta_{j'}^{j} .$$

Queste esprimono il carattere tensoriale di

$$(6.18)\qquad W_{hkj}^{\cdots\cdots i} = \Pi_{hkj}^{\cdots\cdots i} + \delta_{k}^{i}z_{hj} - \delta_{h}^{i}z_{kj} = \Pi_{hkj}^{\cdots\cdots i} + \frac{1}{n-1}\left(\delta_{k}^{i}\Pi_{lhj}^{\cdots\cdots l} - \delta_{h}^{i}\Pi_{lkj}^{\cdots\cdots l}\right) .$$

E' appunto $W_{hkj}^{\cdots\cdots i}$ quello che vien detto tensore di curvatura proiettiva, o di Weyl: ne vedremo il ruolo fondamentale nella teoria. Incidentalmente notiamo che anche $W_{hkj}^{\cdots\cdots i}$ è emisimmetrico rispetto ad h, k e che i tensori contratti $W_{hki}^{\cdots\cdots i}$, $W_{ikj}^{\cdots\cdots i}$ sono nulli:

$$(6.19)\qquad W_{(hk)j}^{\cdots\cdots i} = 0 , \quad W_{hki}^{\cdots\cdots i} = 0 , \quad W_{ikj}^{\cdots\cdots i} = 0 .$$

La verifica è immediata: tenute presenti le (6.11). Passiamo infine al calcolo delle condizioni d'integrabilità delle (6.15). In forza delle (6.15) medesime e delle (6.4) esse si scrivono, con alcune semplificazioni:

$$(6.20)\quad \Pi_{h'k'j'}^{\cdots\, i'}\vartheta_{i'} = \overset{(r)}{D}_{h'}(\vartheta_{k'}\vartheta_{j'}) - \overset{(r)}{D}_{k'}(\vartheta_{h'}\vartheta_{j'}) - \overset{(r)}{D}_{h'} z_{k'j'} + \overset{(r)}{D}_{k'} z_{h'j'} +$$
$$+ \left(\overset{(r)}{D}_{h} z_{kj} - \overset{(r)}{D}_{k} z_{hj}\right)\vartheta_{h'}^{h}\vartheta_{k'}^{k}\vartheta_{j'}^{j} +$$
$$+ z_{kj}\overset{(r)}{D}_{h'}(\vartheta_{k'}^{k}\vartheta_{j'}^{j}) - z_{hj}\overset{(r)}{D}_{k'}(\vartheta_{h'}^{h}\vartheta_{j'}^{j}) =$$
$$= -\vartheta_{k'} z_{h'j'} + \vartheta_{h'} z_{k'j'} - \overset{(r)}{D}_{h'} z_{kj'} + \overset{(r)}{D}_{k'} z_{hj'} +$$
$$+ \left(\overset{(r)}{D}_{h} z_{kj} - \overset{(r)}{D}_{k} z_{hj}\right)\vartheta_{h'}^{h}\vartheta_{k'}^{k}\vartheta_{j'}^{j};$$

o infine, tenute presenti le (6.18):

$$(6.21)\quad \overset{(r)}{D}_{h'} z_{k'j'} - \overset{(r)}{D}_{k'} z_{h'j'} = \left(\overset{(r)}{D}_{h} z_{kj} - \overset{(r)}{D}_{k} z_{hi}\right)\vartheta_{h'}^{h}\vartheta_{k'}^{k}\vartheta_{j'}^{j} -$$
$$- W_{h'k'j'}^{\cdots\, i'}\vartheta_{i'}.$$

Queste, posto

$$(6.22)\quad z_{hkj} = \overset{(r)}{D}_{h} z_{kj} - \overset{(r)}{D}_{k} z_{hj} =$$
$$= \vartheta_{h} z_{kj} - \vartheta_{k} z_{hj} + \Pi_{jk}^{l} z_{hl} - \Pi_{jh}^{l} z_{kl}$$

possono anche scriversi così:

$$(6.23)\quad z_{h'k'j'} = z_{hkj}\vartheta_{h'}^{h}\vartheta_{k'}^{k}\vartheta_{j'}^{j} - W_{h'k'j'}^{\cdots\, i'}\vartheta_{i'}.$$

Le z_{hkj} $(=-z_{kkj})$ sono le componenti di un ente che O.VEBLEN e J.M.THOMAS hanno chiamato "<u>covariante proiettivo</u>" della connessione affine supposta.

Esso è ovviamente, come il tensore di WEYL, invariante per le trasformazioni proiettive della connessione: ma non è un tensore se non nel caso in cui il tensore di WEYL si annulli. A questo punto abbiamo riportato il problema dell'equivalenza proiettiva di due connessioni affini a un sistema misto nelle funzioni incognite $u^i, \vartheta^i_{i'}, \vartheta, \vartheta_{i'}$ delle $u^{i'}$; formato dalle equazioni differenziali (6.2),(6.3), (6.4), (6.15) e dalle equazioni in termini finiti (6.17) cioè

$$W_{h'k'j'}^{\cdots i'}\vartheta^i_{i'} = W_{hkj}^{\cdots i}\vartheta^h_{h'}\vartheta^k_{k'}\vartheta^j_{j'}, \tag{6.24}$$

e (6.23). Non resta che esporre considerazioni del tutto analoghe a quelle svolte al n.4: dette complessivamente F le equazioni (6.23) ,(6.24)in termini finiti ora dette, dovremo aggiungere ad esse le loro conseguenze differenziali. Con una prima derivazione, che si potrà eseguire col simbolo $D_{h'}$, eliminate le derivate delle $\vartheta^i_{i'}$ e delle $\vartheta_{j'}$ mediante le (6.4) e (6.15) otteniamo in generale un nuovo gruppo di equazioni in termini finiti F_1 ; e così si può seguitare. Detti $F_2, F_3, \ldots\ldots$ i successivi gruppi di equazioni in termini finiti che così si ottengono, se esiste un intero N tale che le $F, F_1, F_2, \ldots, F_N$ siano algebricamente compatibili e le soluzioni che esse ammettono (rispetto alle incognite $u^i, \vartheta^i_{i'}, \vartheta, \vartheta_{j'}$) soddisfino anche alle F_{N+1} le due connessioni supposte sono proiettivamente equivalenti; in caso contrario non lo sono. (Notiamo che i valori iniziali delle funzioni incognite dovranno intendersi anche soddisfacenti alla relazione (5.24): le cui conseguenze differenziali rientrano nel sistema (6.2),(6.3), (6.4)).

In particolare risultano "proiettivamente piane" cioè proiettivamente equivalenti alla connessione (integrabile e simmetrica) dell'ordinario spazio affine (E_n), tutte e sole le connessioni affini per le quali il tensore di WEYL e il covariante proiettivo si annullino. L'annullarsi di $W_{ihk}^{\cdots e}$ ed z_{ihk} è dunque, in altre parole, la condizione necessaria e sufficiente perchè lo spazio a connessione affine considerato sia rappresentabile su di uno spazio affine d'egual numero di dimensioni, in mo-

do che ogni punto abbia per immagine un punto e ogni geodetica una linea retta. Sotto aspetto analitico: tali spazi proiettivamente piani sono caratterizzati dalla possibilità di sceglierv le coordinate curvilinee in modo tale che le geodetiche vengano rappresentate in termini finiti, con equazioni lineari. O ancora: in modo tale da rendere eguali a zero i valori delle Π^{i}_{hk} .

Le condizioni analitiche perchè uno spazio a connessione affine sia proiettivamente piana, o anche più in generale perchè due tali spazi siano proiettivamente equivalenti, possono mettersi sotto una forma più semplice separando i casi in cui la dimensione n dello spazio sia 2, oppure > 2.

Infatti: per n = 2 il tensore di WEYL è sempre identicamente nullo, e il covariante proiettivo è(per conseguenza, come abbiamo già notato) un tensore; per n > 2 l'annullarsi del tensore di WEYL porta per conseguenza anche l'annullarsi del covariante proiettivo.

Questo si verifica facilmente. Per n = 2 le componenti di $W^{\cdots\ell}_{ijk}$ a meno del segno si riducono a $W^{\cdots\ell}_{12k} = -W^{\cdots\ell}_{21k}$; essendo $W^{\cdots i}_{i1k} = W^{\cdots 2}_{21k} = 0$, $W^{\cdots i}_{i2k} = W^{\cdots 1}_{12k} = 0$ anche le componenti ora dette sono nulle. Del resto il solo fatto che si abbia, secondo le (6.18)

$$(6.25)\qquad W^{\cdots\ell}_{ijk} = \Pi^{\cdots\ell}_{ijk} + \frac{1}{n-1}\left(\delta^{\ell}_{j}\Pi^{\cdots h}_{hik} - \delta^{\ell}_{i}\Pi^{\cdots h}_{hjk}\right),$$

indipendentemente dal significato e dalle proprietà di $\Pi^{\cdots\ell}_{ijk}$ porta che per n =2 è identicamente $W^{\cdots\ell}_{ijk} = 0$ e infatti la (6.25) per n = 2 dà

$$(6.26)\qquad W^{\cdots\ell}_{12k} = \Pi^{\cdots\ell}_{12k} + \delta^{\ell}_{2}\Pi^{\cdots 2}_{21k} - \delta^{\ell}_{1}\Pi^{\cdots 1}_{12k}$$

e si vede bene che, sia per $\ell = 1$, che per $\ell = 2$, il secondo membro è nullo.

Notiamo qui incidentalmente una proprietà assai più generale, comprendente quella ora notata: per n qualunque la condizione che sia

$$(5.27)\qquad A^{\cdots\ell}_{ijk} = \delta^{\ell}_{i}B_{jk} - \delta^{\ell}_{j}B_{ik},$$

ove non importa supporre che $A_{ijk}^{\cdots l}$ abbia carattere di tensore, è necessario e sufficiente perchè, ξ^i, η^i, ζ^i, essendo tre vettori controvarianti qualunque, il vettore $A_{ijk}^{\cdots l}\,\xi^i \eta^j \zeta^k$ sia complanare con ξ^l ed η^l. (Dunque : se $n = 2$ la condizione (6.27), che equivale

$$6.28) \qquad A_{ijk}^{\cdots l} - \frac{1}{n-1}\delta_i^l A_{hjk}^{\cdots h} + \frac{1}{n-1}\delta_j^l A_{hik}^{\cdots h} = 0,$$

è sempre soddisfatta). La verifica è facile; basta scrivere che

$$(6.29) \qquad \xi^{[f} \eta^g A_{ijk}^{\cdots l]} \xi^i \eta^j \zeta^k = 0$$

qualunque siano i tre vettori ξ^i, η^i, ζ^i; cioè che i coefficienti della forma che è a primo membro (quadratica rispetto alle ξ^i e rispetto alle η^i, lineare rispetto alle ζ^i) sono nulli; con opportune contrazioni ne risulteranno le (6.28).

Torniamo al teorema enunciato sopra : ci resta a dimostrarne la seconda parte. Per questo riprendiamo la (6.18) ;per derivazione col simbolo $D_l^{(k)}$ ne ricaviamo

$$(6.30) \qquad D_l^{(k)} W_{hkj}^{\cdots i} = D_l^{(k)} \Pi_{hkj}^{\cdots i} + \delta_k^i D_l^{(k)} z_{hi} - \delta_h^i D_l^{(k)} z_{ki} .$$

Alterniamo rispetto ad l, h, k, tenendo presenti le ultime (6.9), cioè le identità di Bianchi per $\Pi_{hkj}^{\cdots i}$. Avremo:

$$(6.31) \qquad D_{[l}^{(k)} W_{hk]j}^{\cdots i} = \delta_{[k}^i D_l^{(k)} z_{h]i} - \delta_{[h}^i D_l^{(k)} z_{k]i} ,$$

ossia tenuta presente l'emisimmetria rispetto ad h, k;

$$(6.32) \qquad D_l^{(k)} W_{hkj}^{\cdots i} + D_h^{(k)} W_{klj}^{\cdots i} + D_k^{(k)} W_{lhj}^{\cdots i} =$$

$$= \delta_k^i D_l^{(k)} z_{hi} + \delta_l^i D_h^{(k)} z_{ki} + \delta_h^i D_k^{(k)} z_{li} -$$

$$- \delta_h^i D_l^{(k)} z_{ki} - \delta_l^i D_k^{(k)} z_{hi} - \delta_k^i D_h^{(k)} z_{li} .$$

Contraendo rispetto ad i, l, tenendo presenti le (6.19) e (6.22):

$$\overset{(n)}{D}_i W_{hkj}^{\cdots\cdots i} = (n-2)\, \tau_{hkj} \,. \tag{6.33}$$

Questo ci dà senz'altro quanto volevamo.
Potremo dunque concludere che semplicemente le condizioni $W_{hkj}^{\cdots\cdots i} = 0$ per $n > 2$, $\tau_{hkj} = 0$ per $n = 2$ caratterizzano gli spazi a connessione affine proiettivamente piani. Anche nell'enunciato della proposizione stabilita nei riguardi dell'equivalenza proiettiva sarà manifestamente lecito intendere che il sistema F sia formato dalle sole (6.24) per $n > 2$, dalle sole (6.23), ove sia posto $W_{hkj}^{\cdots\cdots i} = 0$, per $n = 2$: analogamente per le conseguenze differenziali $F_1, F_2, \ldots$.

Notiamo che il risultato ottenuto nei riguardi della equivalenza proiettiva ci dà anche la formazione di un sistema completo d'invarianti proiettivi per la supposta connessione affine. Esso è costituito dal tensore di WEYL con le sue successive derivate, col simbolo $\overset{(n)}{D}$, se $n \geq 3$; dal covariante proiettivo, con le sue successive derivate fatte con questo simbolo di derivazione, se $n = 2$. Ma va notato un inconveniente non lieve: le derivate ora dette non sono derivate covarianti, insomma non sono tensori. Si vede come sia un po' sforzato il voler costruire questa teoria proiettiva nei quadri e con gli algoritmi della geometria affine curva una formulazione soddisfacente si avrà poi nei quadri della teoria delle connessioni proiettive. Ancora una osservazione: il WEYL è giunto al tensore $W_{ijk}^{\cdots\cdots l}$ per altra via e al posto del "covariante proiettivo ha introdotto un effettivo tensore: il quale però solo per $n = 2$ ha significato invariante per le trasformazioni proiettive della connessione affine. Lo ricaviamo direttamente riprendendo le (6.23) ed eliminando da queste $\vartheta_{i'}$, mediante le (5.26), scritte per le $\Gamma_{h'}^{\cdots}$, cioè:

$$\Gamma_{h'i'}^{k'} = \Gamma_{hi}^{h}\, \vartheta_{i'}^{i} + (n+1)\, \vartheta_{i'} \,. \tag{6.34}$$

Otteniamo subito

(6.35) $$c_{h'k'j'} + \frac{1}{n+1} W_{h'k'j''}^{\cdots\cdots i''} \Gamma_{i''i'}^{l'} = \left(c_{hkj} + \frac{1}{n+1} W_{hkj}^{\cdots\cdots i} \Gamma_{li}^{l}\right) \vartheta_{h'}^{h} \vartheta_{k'}^{k} \vartheta_{j'}^{j}$$

il che mostra che

(6.36) $$V_{hkj} = (n^2-1) c_{khj} + (n-1) W_{khj}^{\cdots\cdots i} \Gamma_{li}^{l}$$

è un tensore, appunto il secondo tensore di WEYL .

S'intende bene che V_{hkj} e $W_{hkj}^{\cdots\cdots i}$ possono esprimersi direttamente mediante il tensore di curvatura della connessione simmetrica associata alla connessione affine di partenza (cui potrà sostituirsi uno qualunque altra connessione affine simmetrica che abbia le stesse geodetiche): si trova

(6.37) $$W_{hkj}^{\cdots\cdots i} = \Gamma_{hkj}^{\cdots\cdots i} + \frac{1}{n+1} \delta_j^i \left(\Gamma_{lkh}^{\cdots\cdots l} - \Gamma_{lhk}^{\cdots\cdots l}\right) +$$

$$+ \frac{1}{n^2-1} \left[\delta_h^i \left(n \Gamma_{lkj}^{\cdots\cdots l} + \Gamma_{ljk}^{\cdots\cdots l}\right) - \delta_k^i \left(n \Gamma_{lhj}^{\cdots\cdots l} + \Gamma_{ljh}^{\cdots\cdots l}\right)\right] ,$$

(6.38) $$V_{hkj} = V_k \left(n \Gamma_{lhj}^{\cdots\cdots l} + \Gamma_{ljh}^{\cdots\cdots l}\right) - V_h \left(n \Gamma_{lkj}^{\cdots\cdots l} + \Gamma_{ljk}^{\cdots\cdots l}\right) .$$

Sono queste(o a queste equivalenti) le espressioni date per questi tensori dal WEYL .

Riprendiamo per un momento gli spazi a connessione affine proiettivamente piani (su cui anche nel seguito torneremo dandone la costruzione più generale).

Essi sono dunque caratterizzati dalla possibilità di farvi una trasformazione di coordinate

(6.39) $$u^i = u^i(z^{1'}, \ldots, z^{n'})$$

tale che in relazione alle nuove coordinate $z^{i'}$ le geodetiche siano rappresentate da equazioni lineari, o le $\Pi_{j'k'}^{i'}$ si annullino in ogni punto. Le (6.39) si potranno pensare come formule di rappresentazione dello spazio supposto in un ordinario spazio proiettivo, ove le $z^{i'}$ sono coordinate proiettive non omogenee: rappresentazione che muta le geodetiche in linee rette. Le $z^{i'}$ dovranno essere

determinate a meno di una trasformazione lineare fratta, cioè a meno di un arbitrario cambiamento di coordinate proiettive nello spazio proiettivo: o anche, a meno di una qualunque trasformazione omografica di questo. Dunque a priori è prevedibile che se in un sistema coordinato u^i le Π^i_{jk} si annullano, la più generale trasformazione delle coordinate per la quale la condizione $\Pi^i_{jk}=0$ si conserva sarà lineare fratta. La verifica analitica è agevole: più in generale possiamo provare che Π^i_{jk} è un tensore per tutte e sole le trasformazioni lineari fratte nelle coordinate curvilinee.

E infatti; per le (5.28) Π^i_{jk} si comporta per una trasformazione delle u^i nelle $u^{i'}$ come un tensore condizione che si abbia

$$\partial_{k'}\vartheta_{j'} = \vartheta_{k'}\vartheta^i_{j'} + \vartheta_{j'}\vartheta^i_{k'} \,, \tag{6.40}$$

col solito significato dei simboli. Le condizioni di integrabilità si ricavano subito direttamente (o anche quale caso particolare per $\Pi^i_{jk} = \Pi^{i'}_{j'k'}=0$ degli sviluppi che precedono); otteniamo

$$\partial_{k'}\vartheta_{j'} = \vartheta_{j'}\vartheta_{k'} \,, \quad \text{cioè} \quad \frac{\partial^2\vartheta}{\partial u^{k'}\partial u^{j'}} = \frac{\partial\vartheta}{\partial u^{k'}}\frac{\partial\vartheta}{\partial u^{j'}} \,, \tag{6.41}$$

o ancora

$$\frac{\partial^2 e^{-\vartheta}}{\partial u^{k'}\partial u^{j'}} = 0 \,, \tag{6.42}$$

che dà , $a_{k'}$ e c essendo costanti arbitrarie:

$$e^{-\vartheta} = a_{k'}u^{k'} + c \,; \tag{6.43}$$

sostituendo nelle (6.40)

$$\partial_{k'}(e^{-\vartheta}\vartheta^i_{j'}) = -a_{j'}\vartheta^i_{k'} \,, \tag{6.44}$$

onde con una nuova quadratura , e tenendo presente la (6.43) :

$$(a_{k'}u^{k'}+c)\vartheta^i_{j'} + a_{j'}u^i = b^i_{j'} \,, \tag{6.45}$$

le $b^i_{j'}$ essendo costanti arbitrarie. Queste possono scriversi

$$(6.46)\qquad \partial_{j'}\left[(a_{h'}u^{h'}+c)u^i - b^i_{h'}u^{h'}\right] = 0$$

dunque infine otteniamo

$$(6.47)\qquad (a_{h'}u^{h'}+c)u^i - b^i_{h'}u^{h'} = d^i\,,$$

le d^i essendo nuove costanti arbitrarie.
Ora le (6.47) si possono scrivere

$$(6.48)\qquad u^i = \frac{b^i_{h'}u^{h'}+d^i}{a_{h'}u^{h'}+c}\,;$$

ne segue quanto volevamo. (Si noti però che la condizione (6.43) in forza di queste risulta soddisfatta per $u^i=0$ - e quindi anche identicamente - a condizione che s'intenda $\vartheta = \frac{1}{n+1}\log\left(m\frac{\partial(u^1,\dots,u^n)}{\partial(u'^1,\dots,u'^n)}\right)$, ove m è una opportuna costante, in generale $\neq 1$. Ma le (6.40) valgono anche se al posto di Δ si sostituisce $m\Delta$). Risulta agevole la verifica che, inversamente, le (6.48) per derivazione ed eliminazione di tutti i coefficienti dànno proprio le (6.40). Si deve però intendere - come è sempre inteso sino ad ora - $n>1$: per $n=1$ le cose cambiano profondamente, come vedremo al n.8.

§.3 - Parametro proiettivo. Derivazione proiettiva.

7. Coordinate proiettive normali (non omogenee) e parametro proiettivo normale legati a un sistema di geodetiche.

Riprendiamo le equazioni differenziali delle geodetiche di una connessione affine, data a meno di una trasformazione (5.17), nella forma (5.32), ove figura il parametro affine invariante p di T.Y THOMAS. Ne ricaviamo subito col noto procedimento (dovuto a VEBLEN, a parte alcune semplificazioni posteriori) una rappresentazione delle geodetiche in termini finiti e anche la costruzione di sistemi coordinati in cui per le geodetiche uscenti da un determinato punto tale rappresentazione è lineare. Ci ponia-

mo qui per semplicità (se pure per una parte di ciò che segue ciò non è essenziale) nell'ipotesi dell'analiticità delle funzioni che trattiamo; particolarmente, delle L^i_{hk} e quindi delle Π^i_{hk}. Dalle (5.32), cioè

$$\frac{d^2u^i}{dp^2} = -\Pi^i_{hk}\frac{du^h}{dp}\frac{du^k}{dp}, \tag{7.1}$$

e ancora, con $\delta^{(p)} = dx^j \nabla^{(p)}_j$ designandosi la differenziazione eseguita coi parametri Π^i_{jk}:

$$\frac{\delta^2 u^i}{dp^2} = \left(\frac{\delta}{dp}\frac{du^i}{dp}\right) = 0. \tag{7.2}$$

Derivando nuovamente otteniamo, in forza delle (7.2)

$$\frac{d^3u^i}{dp^2} = -\nabla^{(p)}_j \Pi^{(i)}_{hk}\frac{du^h}{dp}\frac{du^k}{dp}\frac{du^j}{dp}, \tag{7.3}$$

ove l'indice posto singolarmente entro parentesi non va considerato, nella costruzione della derivata col simbolo $\nabla^{(p)}_j$; indi con ulteriori derivazioni

$$\frac{d^4u^i}{dp^4} = -\nabla^{(p)}_l \nabla^{(p)}_j \Pi^{(i)}_{hk}\frac{du^h}{dp}\frac{du^k}{dp}\frac{du^j}{dp}\frac{du^l}{dp}, \tag{7.4}$$

. . . . . .

. . . . . .

Ne risulta per la soluzione delle (7.1) o (7.2) che soddisfa alle condizioni iniziali

$$u^i = u^i_o, \quad \frac{du^i}{dp} = a^i \quad \text{per } p = 0 \tag{7.5}$$

lo sviluppo:

$$u^i = u^i_o + a^i p - \frac{1}{2}\left(\Pi^i_{hk}\right)_o a^h a^k p^2 - \frac{1}{3!}\left(\nabla^{(p)}_j \Pi^{(i)}_{hk}\right)_o a^h a^k a^j p^3 - \tag{7.6}$$

$$- \frac{1}{4!}\left(\nabla^{(p)}_l \nabla^{(p)}_j \Pi^{(i)}_{hk}\right)_o a^h a^k a^j a^l p^4 - \ldots\ldots$$

ove con l'indice $_o$ indichiamo i valori calcolati per $u^i = u^i_o$. Risulta immediato che le geodetiche uscenti da questo punto $u^i = u^i_o$, che indicheremo con O, sono rappresentate

in termini finiti dalle equazioni lineari

$$(7.7) \qquad y^i = a^i p = \left(\frac{du^i}{dp}\right)_0 p$$

in relazione a un nuovo sistema coordinato y^i legato al primitivo u^i dalle formule

$$(7.8) \qquad u^i = u^i_0 + y^i - \frac{1}{2}\left(\Pi^i_{hk}\right)_0 y^h y^k - \frac{1}{3!}\left(\overset{(h)}{\nabla}_j \Pi^{(i)}_{hk}\right)_0 y^h y^k y^j - \dots$$

Le (7.7) indicano in modo evidente ed espressivo il significato delle nuove coordinate y^i: per ciascun punto P sufficientemente prossimo ad O, in modo che sia determinato (nell'intorno di O che si considera) l'arco di geodetica congiungente, le y^i si ottengono moltiplicando i valori $\left(\frac{du^i}{dp}\right)_0$ calcolati lungo tale geodetica in O pel valore relativo a P del parametro p (di T.Y.THOMAS) contato da O. Se cambia la connessione conservando le stesse geodetiche, le y^i -che L.P.EISENHART non molto propriamente chiama "coordinate proiettive" di origine O - subiscono una trasformazione lineare intera (e anche di tipo particolare): ma hanno un comportamento più complicato, non lineare, quando cambino le coordinate curvilinee. D'altra parte in relazione alle coordinate y^i il parametro p non ha più quel ruolo di parametro affine invariante che aveva in relazione alle u^i: cioè indicando con $\bar{\Pi}^i_{hk}$ i valori delle Π^i_{hk} in coordinate y^i (giacchè qui fa comodo non alterare gli indici nel passaggio dall'uno all'altro sistema coordinato) le equazioni delle geodetiche in coordinate y^i e con riferimento al parametro p si scriveranno nella forma

$$(7.9) \qquad \frac{d^2 y^i}{dp^2} + \bar{\Pi}^i_{hk} \frac{dy^h}{dp}\frac{dy^k}{dp} = F(p) \frac{dy^i}{dp}$$

ove $F(p)$ lungo ciascuna geodetica è una conveniente funzione di p (Precisamente, $F(p) = -\dfrac{\frac{d^2 p}{d\bar{p}^2}}{\left(\frac{dp}{d\bar{p}}\right)^2}$, ove $\bar{p}$ è in relazione alle y^i parametro affine invariante). In particolare lungo le geodetiche uscenti da O, avendosi

(7.10) $$y^i = a^i p\,, \qquad \frac{dy^i}{dp} = a^i = \frac{y^i}{p}\,, \qquad \frac{d^2y^i}{dp^2} = 0\,,$$

dovrà risultare in ciascun punto

(7.11) $$\bar{\Pi}^i_{hk}\, y^h y^k = p F(p)\, y^i = \Phi(y)\cdot y^i$$

(giacchè il primo membro è funzione del posto, e quindi lo è anche il secondo membro); onde anche, eliminando $\Phi($

(7.12) $$\left(\bar{\Pi}^i_{hk}\, y^l - \bar{\Pi}^l_{hk}\, y^i\right) y^h y^k = 0.$$

Queste relazioni dovranno essere soddisfatte identicamente rispetto alle y^i (di cui, s'intende, anche le Π^i_{hk} sono funzioni).

Notiamo ora che la forma (7.7) per le equazioni delle geodetiche uscenti da O si conserva se alteriamo le y^i e p per un comune fattore (funzione del posto: cioè delle u^i o delle y^i) ponendo:

(7.13) $$z^i = \delta^i_{i'}\cdot z^{i'} = \varphi(y)\cdot y^i\,, \qquad q = \varphi(y)\cdot p.$$

(ove $\delta^i_{i'} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ secondo che i ed i' prendono, nelle due serie di contrassegni $12\ldots n$, $1'2'\ldots n'$, valori d'egual posto o di posto differente).

Ci proponiamo di cercare se è possibile determinare tale fattore $\varphi(y)$ in modo tale che in relazione alle nuove coordinate $z^{i'}$ precisamente q sia parametro affine invariante (di T.Y.THOMAS): cioè si abbia identicamente, indicando con ${}^*\Pi^{i'}_{j'k'}$ i valori delle Π^i_{jk} in relazione a tali nuove coordinate $z^{i'}$,

(7.14) $${}^*\Pi^{i'}_{j'k'}\, z^{j'} z^{k'} = 0.$$

Tenute presenti le (5.28) potremo scrivere le (7.14) nella forma seguente:

(7.15) $$\left(\bar{\Pi}^i_{jk}\,\partial^j_{j'}\partial^k_{k'} + \partial_{k'}\partial^i_{j'} - \partial_{k'}\partial^i_{j'} - \partial_{j'}\partial^i_{k'}\right) z^{j'} z^{k'} = 0,$$

ove ora intendiamo che sia

$$\vartheta^{i}_{j'} = \frac{\partial y^{i}}{\partial z^{j'}} = \frac{1}{\varphi}\,\delta^{i}_{j'} - \frac{1}{\varphi^{2}}\,\frac{\partial \varphi}{\partial z^{j'}}\,\delta^{i}_{i'}\,z^{i'}; \tag{7.16}$$

$$\vartheta_{k'} = \frac{\partial \vartheta}{\partial z^{k'}}, \qquad \vartheta = \log \Delta^{\frac{1}{n+1}}, \qquad \Delta = \left|\frac{\partial y^{i}}{\partial z^{j'}}\right|. \tag{7.17}$$

Tenute presenti le (7.12) riduciamo ora le (7.15) a una unica equazione a derivate parziali in $\varphi(z)$.
Per questo calcoliamo successivamente:

$$\vartheta^{i}_{j'}\,z^{j'} = \delta^{i}_{i'}\left(\frac{z^{i'}}{\varphi} - \frac{1}{\varphi^{2}}\,\frac{\partial \varphi}{\partial z^{j'}}\,z^{i'}z^{j'}\right) \tag{7.18}$$

$$= y^{i}\left(1 - \frac{1}{\varphi}\,\frac{\partial \varphi}{\partial z^{j'}}\,z^{j'}\right);$$

$$\partial_{k'}\vartheta^{i}_{j'} = -\frac{1}{\varphi^{2}}\left(\delta^{i}_{j'}\,\frac{\partial \varphi}{\partial z^{k'}} + \delta^{i}_{k'}\,\frac{\partial \varphi}{\partial z^{j'}} - \right. \tag{7.19}$$

$$\left. - \frac{1}{\varphi^{2}}\,\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial z^{j'}\partial z^{k'}}\,\delta^{i}_{i'}z^{i'} + \frac{2}{\varphi^{3}}\,\frac{\partial \varphi}{\partial z^{i'}}\,\frac{\partial \varphi}{\partial z^{k'}}\,\delta^{i}_{i'}z^{i'}\right)$$

onde

$$\partial_{k'}\vartheta^{i}_{j'}\cdot z^{j'}z^{k'} = -2\,\frac{y^{i}}{\varphi}\,\frac{\partial \varphi}{\partial z^{j'}}\,z^{j'} - \frac{y^{i}}{\varphi}\,\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial z^{j'}\partial z^{k'}}\,z^{j'}z^{k'} + \tag{7.20}$$

$$+ \frac{2y^{i}}{\varphi^{2}}\,\frac{\partial \varphi}{\partial z^{j'}}\,\frac{\partial \varphi}{\partial z^{k'}}\,z^{j'}z^{k'};$$

indi, con agevole calcolo

$$\Delta = \left|\frac{\partial y^{i}}{\partial z^{j'}}\right| = \varphi^{-(n+1)}\left(\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial z^{i'}}\,z^{i'}\right); \tag{7.21}$$

$$\vartheta = \log \Delta^{\frac{1}{n+1}} = -\log \varphi + \frac{1}{n+1}\log\left(\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial z^{i'}}\,z^{i'}\right), \tag{7.22}$$

$$(7.23)\qquad \vartheta_{k'} = \frac{\partial \vartheta}{\partial z^{k'}} = -\frac{1}{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial z^{k'}} + \frac{1}{n+1}\;\frac{-\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^{j'}\partial z^{k'}} z^{j'}}{\varphi - \dfrac{\partial \varphi}{\partial z^{i'}} z^{i'}}$$

infine

$$(7.24)\qquad \vartheta_{k'} z^{k'} = -\frac{1}{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial z^{k'}} z^{k'} - \frac{1}{n+1}\;\frac{\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^{j'}\partial z^{k'}} z^{j'} z^{k'}}{\varphi - \dfrac{\partial \varphi}{\partial z^{i'}} z^{i'}}.$$

Sostituendo nelle (7.15) queste danno

$$(7.25)\qquad \bar{\Pi}^{i}_{jk} y^j y^k \left(\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial z^{j'}} z^{j'}\right)^2 + \frac{1-n}{1+n}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^{j'}\partial z^{k'}} z^{j'} z^{k'} y^i = 0;$$

cioè, per le (7.11) :

$$(7.26)\qquad \Phi\left(\frac{z}{\varphi}\right)\left[\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial z^{i'}} z^{i'}\right]^2 + \frac{1-n}{1+n}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^{j'}\partial z^{k'}} z^{j'} z^{k'} = 0.$$

A questa equazione potremo soddisfare in infiniti modi con una funzione $\varphi(z^{1'} \ldots\ldots, z^{n'})$ regolare in O ; ad es. imponendo che sia

$$(7.27)\qquad \varphi = 1\,, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z^{i'}} = 0 \qquad \text{per } z^{i'} = 0$$

(e dando anche ulteriori condizioni). Ottenuta la φ quale funzione delle $z^{i'}$ e quindi le espressioni $y^i = \dfrac{z^{i'}}{\varphi(z')}$, ne potremo ricavare le $z^{i'}$ e infine anche φ espresse per le y^i.

Il nuovo sistema condizionato $z^{i'}$, per quale valgono identicamente le (7.14) e le geodetiche uscenti dal punto (origine) O sono rappresentate in termini finiti dalle equazioni lineari

$$(7.28)\qquad z^{i'} = a^{i'} \cdot q = \left(\frac{dz^{i'}}{dq}\right)_0 q = \delta^{i'}_{i}\left(\frac{du^i}{dp}\right)_0 q$$

viene detto, secondo VEBLEN e J.M.THOMAS, un sistema di coordinate proiettive normali.(La costruzione che ne abbiamo indicato non è la primitiva di VEBLEN e J.M.THOMAS (1925): è data da EISENHART(1927)).

La denominazione è giustificata dal fatto che tali coordinate, per una qualunque trasformazione sulle primitive

coordinate curvilinee u^i subiscono una trasformazione lineare fratta (del tipo più generale); cosicchè le equazioni

$$u^i = u^i(z^{1'}, z^{2'}, \ldots, z^{n'}) \tag{7.29}$$

che esprimono il passaggio dalle coordinate u^i alle coordinate proiettive normali $z^{i'}$ si possono interpretare quali formule di una rappresentazione della varietà (o di una sua conveniente regione contenente il punto O) su di uno spazio proiettivo n-dimensionale, ove le $z^{i'}$ si pensino quali coordinate proiettive non omogenee. Di più, anche il parametro q varia per una trasformazione lineare fratta, cosicchè potremo dirlo un parametro proiettivo per le geodetiche della connessione.

La dimostrazione di quanto abbiamo ora enunciato può svolgersi (secondo EISENHART) nel modo seguente: fissato il punto O (origine delle coordinate proiettive normali) siano ora z^i, $z^{i'}$ coordinate proiettive normali di un generico punto P, corrispondenti ai sistemi curvilinei u^i, $u^{i'}$ (e a scelta di soluzioni della (7.26) scritta per le z^i o le $z^{i'}$).

Dovremo avere, in relazione alla geodetica congiungente

$$z^{i'} = \left(\frac{dz^{i'}}{dq'}\right)_o q' = \left(\frac{\partial z^{i'}}{\partial z^i}\frac{dz^i}{dq}\frac{dq}{dq'}\right)_o q' \,;\; z^i = \left(\frac{\partial z^i}{dq}\right)_o q, \tag{7.30}$$

cioè, essendo in conseguenza delle (7.8), (7.27)

$$\left(\frac{\partial z^i}{\partial u^j}\right)_o = \delta^i_j \,,\; \left(\frac{\partial z^{i'}}{\partial u^{j'}}\right)_o = \delta^{i'}_{j'} \,,\; \left(\frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}}\right)_o = \left(\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\right)_o = \left(\partial^i_{i'}\right)_o \tag{7.31}$$

e d'altra parte secondo le (5.20), (5.31)

$$\frac{dq}{dq'} = \left|\frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}}\right|^{\frac{2}{n+1}} \,,\; \left(\frac{dq}{dq'}\right)_o = \Delta_o^{\frac{2}{n+1}} \,,\; \left(\Delta = \left|\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\right|\right) \tag{7.32}$$

dovremo avere

$$(7.33)\qquad z^{i'} = \left(\vartheta^{i'}_{i}\right)_0 \frac{z^i}{q}\,\Delta_0^{\frac{2}{n+1}} q = z^i \frac{q'}{q}\cdot\left(\vartheta^{i'}_{i}\right)_0 \Delta_0^{\frac{2}{n+1}}.$$

Ma è evidente che il rapporto $\frac{q'}{q}$, q e q' riferendosi al medesimo arco geodetico (*), deve essere una funzione del posto: poniamo

$$(7.34)\qquad \frac{q'}{q}\,\Delta_0^{\frac{2}{n+1}} = \psi(z),$$

onde sostituendo, posto per brevità

$$(7.35)\qquad \left(\vartheta^{i}_{i'}\right)_0 = \lambda^{i}_{i'}$$

avremo dalla (7.33);

$$(7.36)\qquad z^i = \lambda^{i}_{i'}\,\frac{z^{i'}}{\psi}.$$

Tutto si riduce a dimostrare che ψ quale funzione delle $z^{i'}$ è necessariamente lineare intera.

Dalla (7.34) abbiamo per derivazione:

$$(7.37)\qquad \frac{dq}{dq'} = \frac{\Delta_0^{\frac{2}{n+1}}}{\psi} - \frac{\Delta_0^{\frac{2}{n+1}}}{\psi^2}\,\frac{\partial\psi}{\partial z^{i'}}\,z^{i'}$$

cioè, per le (7.32)

$$(7.38)\qquad \left|\frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}}\right|^{\frac{2}{n+1}} = \frac{\Delta_0^{\frac{2}{n+1}}}{\psi^2}\left(\psi - \frac{\partial\psi}{\partial z^{i'}}\,z^{i'}\right).$$

D'altra parte la (7.36) derivando dà:

$$(7.39)\qquad \frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}} = \frac{\lambda^{i}_{i'}}{\psi} - \lambda^{i}_{j'}\,\frac{z^{j'}}{\psi^2}\,\frac{\partial\psi}{\partial z^{i'}} = \lambda^{i}_{j'}\,\psi^{-2}\left(\delta^{j'}_{i'}\psi - z^{j'}\frac{\partial}{\partial z}\right.$$

(*)Si noti che dobbiamo qui intendere di limitare le nostre considerazioni a una regione convessa della varietà, ove ogni punto sia raggiunto da una sola geodetica uscente da O .

onde subito si ricava:

$$(7.40)\qquad \left|\frac{\partial z^{i'}}{\partial z^{j'}}\right| = \Delta\,\psi^{-(n+1)}\left(\psi - \frac{\partial \psi}{\partial z^{j'}} z^{j'}\right).$$

Il confronto delle (7.38), (7.40) dà

$$(7.41)\qquad \left(\psi - \frac{\partial \psi}{\partial z^{j'}} z^{j'}\right)^{\frac{n-1}{n+1}} = 1\,;$$

d'altra parte nelle nostre ipotesi la trasformazione delle z^i nelle $z^{i'}$ è certamente regolare in O, inteso soltanto che lo sia quella delle u^i nelle $u^{i'}$; e precisamente le $\frac{\partial z^{i'}}{\partial z^{j}}$ in O debbono ridursi alle costanti $\alpha^{i'}_{j}$. Dunque la funzione $\psi(z^1,\dots,z^n)$ in O deve ridursi ad 1 e anche le sue derivate $\frac{\partial \psi}{\partial z^{j'}}$ debbono essere in O determinate e finite. La (7.41) anzitutto potrà scriversi

$$(7.42)\qquad \psi - \frac{\partial \psi}{\partial z^{j'}} z^{j'} = 1\,;$$

in questa forma esse esprime che $\psi - 1$ è funzione omogenea di grado 1 delle $z^1, z^2, \dots, z^n$; onde le $\frac{\partial \psi}{\partial z^{j'}}$ sono omogenee di grado zero. Ma per una funzione omogenea di grado zero $f(z^1,\dots,z^n)$ l'origine è punto di regolarità soltanto se la funzione si riduce ad una costante, infatti la condizione

$$(7.43)\qquad F(\lambda z) = F(z)$$

per $\lambda = 0$ e inteso che $F(0)$ sia una quantità determinata e finita dà

$$(7.44)\qquad F(z) = F(0).$$

Si conclude che

$$(7.45)\qquad \frac{\partial \psi}{\partial z^{j'}} = \alpha_{j'}\,, \qquad \psi = 1 + a_{j'} z^{j'}.$$

le $a_{j'}$ essendo costanti. Questo prova quanto volevamo; ci dà per le (7.37) la forma definitiva

$$z^i = \frac{k^i_{i'}\, z^{i'}}{1 + a_{j'}\, z^{j'}} \tag{7.46}$$

e lungo ciascuna geodetica, posto per semplicità

$$\Delta_0^{\frac{2}{n+1}} = a \quad , \quad a_{j'}\left(\frac{dz^{j'}}{dq'}\right)_0 = b \tag{7.47}$$

ci dà la seguente formula di trasformazione del parametro q :

$$q = \frac{aq'}{1+bq'} \, . \tag{7.48}$$

Tenuto conto che abbiamo imposto noi (ed è inessenziale) che si avesse per $z^{i'} = 0$, anche $z^i = 0$, o per $q' = 0$, $q = 0$, possiamo concludere che le coordinate proiettive normali $z^{i'}$, e così pure il parametro q - in quanto vi si riflette l'arbitrarietà delle primitive coordinate curvilinee u^i, e anche della scelta della soluzione φ dell'equazione (7.26) e del parametro p , noto a meno di una trasformazione lineare intera - sono determinati appunto a meno della più generale trasformazione lineare fratta. Il che vale a dire che le formule di passaggio

$$u^i = u^i(z^{1'}, \ldots, z^{n'}) \tag{7.49}$$

definiscono una rappresentazione dello spazio a connessione affine su di uno spazio proiettivo; nella quale le geodetiche uscenti dal punto O si rappresentano mediante le linee rette uscenti da un punto, e il parametro q , riportato su queste rette, è proprio una coordinata proiettiva non omogenea nell'usuale significato.

Ora nello spazio proiettivo vi è già una connessione affine data a meno di una trasformazione che ne conserva le geodetiche, o per meglio dire, una totalità di connessioni affini aventi uno stesso sistema di geodetiche: quello delle linee rette. I parametri $\Pi^i_{0\,j'k'}$ di queste connessioni in relazione alle coordinate proiet-

tive $z^{i'}$ sono tutti nulli; ma le formule di rappresentazione (7.49) ne danno i valori Π^{i}_{jk} in relazione al (qualunque) riferimento curvilineo iniziale. Abbiamo dunque in realtà nello spazio considerato (una volta fissato il punto O) due famiglie di connessioni affini con eguali geodetiche (entro ciascuna), o, come possiamo cominciare a dire, due connessioni proiettive. Però non è senz'altro lecito trarne le conseguenze che l'analogo risultato dà nella ordinaria teoria delle connessioni affini (*): in quanto le $z^{i'}$ sono determinate a meno di una trasformazione lineare fratta e le Π^{i}_{jk} come le Π^{i}_{jk} non sono connessioni affini, dunque non danno luogo a derivate covarianti. Su questo conviene tornare più tardi quando avremo introdotto una $(n+1)$-esima coordinata riportandoci a trasformazioni lineari intere.

8.-La più generale costruzione di un parametro proiettivo secondo L.BERWALD. Prima introduzione di du.

Alla fine del n.6 abbiamo visto che il più generale sistema di n funzioni (indipendenti) lineari fratte di n variabili per $n>1$ può caratterizzarsi quale sistema d'integrali di un sistema d'equazioni alle derivate parziali del 2° ordine: le (6.40). le cose vanno diversamente per $n=1$: la più generale funzione lineare fratta di una variabile s si ha come integrale di un'equazione differenziale del 3° ordine in s, e precisamente, di un'equazione di SCHWARZ.

Costruiamo tale equazione direttamente: supposto

$$\hat{s} = \frac{as+b}{cs+d} \qquad (a,b,c,d \text{ costanti}; ad-bc\neq 0) \tag{8.1}$$

ricaviamo successivamente:

(*) quali sono sviluppate in un mio lavoro recente, e poi più ampiamente in un lavoro in corso del BOMPIANI e già nei suoi Corsi presso il Reale Istituto di Alta Matematica. Nel prossimo indice bibliografico darà le citazioni.

(8.2) $$\frac{d\hat{s}}{ds} = \frac{ad-bc}{(cs+d)^2}, \qquad \frac{d^2\hat{s}}{ds^2} = -2c\frac{ad-bc}{(cs+d)^3};$$

(8.3) $$\frac{\frac{d^2\hat{s}}{ds^2}}{\frac{d\hat{s}}{ds}} = \frac{-2c}{cs+d}, \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{\frac{d^2\hat{s}}{ds^2}}{\frac{d\hat{s}}{ds}}\right) = \frac{2c^2}{(cs+d)^2};$$

si vede bene di qui come si eliminano insieme, infine, c e d sottraendo dall'ultima derivata la metà del quadrato dell'espressione precedente: posto appunto

(8.4) $$\left\{\hat{s}, s\right\} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\frac{d^2\hat{s}}{ds^2}}{\frac{d\hat{s}}{ds}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{d^2\hat{s}}{ds^2}}{\frac{d\hat{s}}{ds}}\right)^2 = \frac{\frac{d^3\hat{s}}{ds^3}\frac{d\hat{s}}{ds} - \frac{3}{2}\left(\frac{d^2\hat{s}}{ds^2}\right)^2}{\left(\frac{d\hat{s}}{ds}\right)^2}$$

otteniamo

(8.5) $$\left\{\hat{s}, s\right\} = 0.$$

VICEVERSA: contenendo il 2° membro della (8.1) appunto tre parametri essenziali, la (8.1) darà certamente l'integrale generale dell'equazione del 3° ordine (8.5); ma lo vediamo direttamente; supposta soddisfatta la (8.5), posto

(8.6) $$f(s) = \frac{\frac{d^2\hat{s}}{ds^2}}{\frac{d\hat{s}}{ds}}$$

abbiamo per $f(s)$ l'equazione del 1° ordine

(8.7) $$f' - \frac{1}{2}f^2 = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{2df}{f^2} = ds$$

che integrata dà

(8.8) $$f = \frac{-2}{s+\alpha}, \qquad \alpha = \text{cost.};$$

sostituendo nella (8.6) la possiamo scrivere

(8.9) $$d\log\left(\frac{d\hat{s}}{ds}\right) = f\,ds = -2\,d\log(s+\alpha)$$

onde con una nuova quadratura

$$\frac{d\hat{s}}{ds} = \beta(s+\alpha)^{-2} \qquad \beta = cost. \tag{8.10}$$

Infine un'ultima quadratura dà

$$\hat{s} = \frac{-\beta}{s+\alpha} - \gamma = \frac{\gamma s + (\alpha\gamma - \beta)}{s+\alpha}, \quad \gamma = cost. \tag{8.11}$$

e questo prova quanto volevamo.

Prima di venire all'applicazione che abbiamo in vista, e cioè alla costruzione, secondo le vedute di BERWALD, del più generale parametro proiettivo sulle geodetiche di una connessione affine, premettiamo un'osservazione relativa al cambiamento della variabile nell'equazione di SCHWARZ (8.5).

Sia $\bar{t}$ la nuova variabile: abbiamo:

$$\frac{d\hat{s}}{d\bar{t}} = \frac{d\hat{s}}{ds}\frac{ds}{d\bar{t}}, \qquad \frac{d^2\hat{s}}{d\bar{t}^2} = \frac{d^2\hat{s}}{ds^2}\left(\frac{ds}{d\bar{t}}\right)^2 + \frac{d\hat{s}}{ds}\frac{d^2s}{d\bar{t}^2}; \tag{8.12}$$

onde

$$\frac{\dfrac{d^2\hat{s}}{d\bar{t}^2}}{\dfrac{d\hat{s}}{d\bar{t}}} = \frac{\dfrac{d^2\hat{s}}{ds^2}}{\dfrac{d\hat{s}}{ds}}\cdot\frac{ds}{d\bar{t}} + \frac{\dfrac{d^2s}{d\bar{t}^2}}{\dfrac{ds}{d\bar{t}}}; \tag{8.13}$$

un'ulteriore derivazione ci dà

$$\frac{d}{d\bar{t}}\left(\frac{\dfrac{d^2\hat{s}}{d\bar{t}^2}}{\dfrac{d\hat{s}}{d\bar{t}}}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\dfrac{d^2\hat{s}}{ds^2}}{\dfrac{d\hat{s}}{ds}}\right)\left(\frac{ds}{d\bar{t}}\right)^2 + \frac{d}{d\bar{t}}\left(\frac{\dfrac{d^2s}{d\bar{t}^2}}{\dfrac{ds}{d\bar{t}}}\right) + \frac{\dfrac{d^2\hat{s}}{ds^2}}{\dfrac{d\hat{s}}{ds}}\frac{d^2s}{d\bar{t}^2}; \tag{8.14}$$

infine risulta:

$$\left\{\hat{s}, \bar{t}\right\} = \left\{\hat{s}, s\right\}\left(\frac{ds}{d\bar{t}}\right)^2 + \left\{s, \bar{t}\right\}. \tag{8.15}$$

Questa è la formula voluta, relativa al cambiamento di variabile. Essendo naturalmente, per una qualunque variabile

$$\{p, p\} = 0 \tag{8.16}$$

si ha dalla (8.15) in particolare

$$\{\hat{s}, s\} + \{s, \hat{s}\}\left(\frac{d\hat{s}}{ds}\right)^2 = 0. \tag{8.17}$$

Notiamo che la (8.15) si può anche scrivere

$$\{\hat{s}, s\} = \left(\frac{d\bar{t}}{ds}\right)^2\left(\{\hat{s}, \bar{t}\} - \{s, \bar{t}\}\right). \tag{8.18}$$

Quanto precede dà subito che per l'equazione di SCHWARZ più generale

$$\{\hat{s}, s\} = \varphi(s), \tag{8.19}$$

ove $\varphi(s)$ è una funzione assegnata della s (che si riduce a zero nel caso già trattato, dell'equazione (8.5)) noto un integrale $p(s)$, la soluzione più generale si ha effettuando su $p(s)$ una qualunque sostituzione lineare fratta:

$$\hat{s} = \frac{a\,p(s) + b}{c\,p(s) + d}, \tag{8.20}$$

E infatti: essendo $\hat{s}(s)$ una qualunque soluzione della (8.19), in quanto si ha

$$\{\hat{s}, p\} = \frac{\{\hat{s}, s\}}{\left(\frac{dp}{ds}\right)^2} + \{s, p\} = \frac{\{\hat{s}, s\} - \{p, s\}}{\left(\frac{dp}{ds}\right)^2} = \frac{\varphi(s) - \{p, s\}}{\left(\frac{dp}{ds}\right)^2} \tag{9.21}$$

le due condizioni

$$\{\hat{s}, p\} = 0 \quad ; \quad \{p, s\} = \varphi(s) \tag{8.22}$$

sono fra loro equivalenti; ora la prima di esse esprime appunto che $\bar{s}$ può ottenersi da s con la (8.20).

Notiamo questa conseguenza particolare: il birapporto dei valori che una qualunque soluzione dell'equazione di SCHWARZ (8.19) assume in quattro punti s_1, s_2, s_3, s_4 è sempre il medesimo qualunque sia la soluzione scelta.

Veniamo all'applicazione che ci siamo proposti. Inteso che venga detto ora "parametro proiettivo", su una geodetica di una connessione affine (e in genere su una qualunque linea, od ente ∞^1) un parametro pei suoi punti, che sia determinato a meno di una trasformazione lineare fratta, avremo che il più generale parametro proiettivo π su una geodetica si potrà definire mediante un'equazione di SCHWARZ:

$$\{\pi, s\} = \psi(s) \tag{8.23}$$

ove s è un parametro affine e $\psi(s)$ è una funzione che in un primo tempo possiamo pensare del tutto arbitraria. Ma vediamo subito come sia conveniente introdurre restrizioni, perchè il parametro π non risulti legato alla particolare connessione affine scelta fra le infinite che hanno le stesse geodetiche. Rammentiamo che per un cambiamento (5.17) della connesssione affine il parametro affine s subisce la trasformazione(5.21) o (5.20) cioè

$$\frac{d\hat{s}}{ds} = A e^{2\int \varphi_h du^h} ; \tag{8.24}$$

ove A è una costante arbitraria $\neq 0$ e l'integrale s'intende calcolato lungo la supposta geodetica.

La (8.24) dà (ved. la (5.19)):

$$\frac{d^2\hat{s}}{ds^2} = 2\varphi_h \frac{du^h}{ds} \cdot \frac{d\hat{s}}{ds} \tag{8.25}$$

onde

$$\{\hat{s}, s\} = 2\partial_j \varphi_h \frac{du^h}{ds}\frac{du^j}{ds} + 2\varphi_h \frac{d^2u^h}{ds^2} - 2\varphi_j \varphi_h \frac{du^j}{ds}\frac{du^h}{ds} ; \tag{8.26}$$

tenuto presente che $\frac{d^2u^h}{ds^2}$ va calcolato lungo la geodetica considerata e che s è su questa parametro affine possiamo scrivere la (8.26) così:

$$(8.27)\qquad \{\hat{s}, s\} = -2\left[\varphi_\ell \Gamma^\ell_{jk} + \varphi_j \varphi_h - \partial_j \varphi_h\right] \frac{du^j}{ds}\frac{du^h}{ds}.$$

Tenuto presente che, per le (8.15), (8.17), si ha

$$(8.28)\qquad \{\pi, \hat{s}\} = \left(\{\pi, s\} - \{\hat{s}, s\}\right)\left(\frac{ds}{d\hat{s}}\right)^2$$

otteniamo, sostituendo:

$$(8.29)\qquad \{\pi, \hat{s}\} = \left(\frac{ds}{d\hat{s}}\right)^2\left[\{\pi, s\} - 2\left(\partial_j \varphi_h - \varphi_j \varphi_h - \varphi_\ell \Gamma^\ell_{jh}\right)\frac{du^j}{ds}\frac{du^h}{ds}\right];$$

cioè

$$(8.30)\qquad \{\pi, \hat{s}\}\, d\hat{s}^2 = \{\pi, s\}\, ds^2 - 2\left[\partial_j \varphi_h - \varphi_j \varphi_h - \varphi_\ell \Gamma^\ell_{jh}\right] du^j du^h.$$

Insomma: per una trasformazione proiettiva (5.17) della connessione affine l'espressione $\{\pi, s\}ds^2$ deve variare per una forma differenziale quadratica additiva nelle du^i, a coefficienti funzioni del posto. Siamo dunque condotti a precisare nel modo seguente la definizione (8.23) del più generale parametro proiettivo sulle geodetiche della connessione: intenderemo che esso sia definito da una equazione di SCHWARZ

$$(8.31)\qquad \{\pi, s\} = -2M\Gamma^\circ_{jh}\frac{du^j}{ds}\frac{du^h}{ds}$$

ove M è una costante numerica, che per ora non conviene precisare: e le Γ°_{jh} sono funzioni del posto nello spazio considerato, le quali per una trasformazione proiettiva (5.17) della connessione affine dello spazio hanno la legge di trasformazione

$$(8.32)\qquad \hat{\Gamma}^\circ_{jh} = \Gamma^\circ_{jh} + \frac{1}{M}\left(\partial_h \varphi_j - \varphi_j \varphi_h - \varphi_\ell \Gamma^\ell_{jh}\right).$$

Per un cambiamento delle coordinate curvilinee la

forma quadratica $\Gamma^{\circ}_{jh}\, du^j du^h$ dovrà supporsi invariante; è naturale (se pure un po' più restrittivo) intendere che Γ°_{jh} sia, pei suoi due indici inferiori, un tensore(affine) , ossia

$$\Gamma^{\circ}_{j'h'} = \Gamma^{\circ}_{jh}\, \vartheta^{j}_{j'}\, \vartheta^{h}_{h'} . \tag{8.33}$$

Possiamo conglobare le (8.32) ed (8.33) in un'unica formula, relativa a una trasformazione simultanea delle coordinate curvilinee e, secondo le (5.15), della connessione affine di partenza Γ^{i}_{jh}.

Per questo anzitutto, posto

$$\vartheta^{\circ\prime}_{i} = -\frac{1}{\mathcal{M}}\varphi_i , \tag{8.34}$$

poniamo le (8.32) nella forma seguente:

$$\Gamma^{\circ\prime}_{jh} = \Gamma^{\circ}_{jh} - \partial_h \vartheta^{\circ}_{j} - \mathcal{M}\vartheta^{\circ}_{j}\vartheta^{\circ\prime}_{h} + \vartheta^{\circ\prime}_{l}\Gamma^{l}_{jh} ; \tag{8.35}$$

ove abbiamo scritto $\Gamma^{\circ\prime}_{jh}$ al luogo di $\hat{\Gamma}^{\circ}_{jh}$; ne seguono subito le formule cercate, per la trasformazione complessiva:

$$\Gamma^{\circ\prime}_{j'h'} = \left(\Gamma^{\circ}_{jh} - \partial_h \vartheta^{\circ\prime}_{j} - \mathcal{M}\vartheta^{\circ}_{j}\vartheta^{\circ\prime}_{h} + \vartheta^{\circ\prime}_{l}\Gamma^{l}_{jh}\right)\vartheta^{j}_{j'}\vartheta^{h}_{h'} . \tag{8.36}$$

D'altra parte riprendiamo le (5.15) e le (4.5) che dànno pei parametri Γ^{i}_{jh} , in relazione alle trasformazioni della connessione affine (con conservazione delle geodetiche) e delle coordinate curvilinee, le formule di trasformazione

$$\hat{\Gamma}^{i}_{jh} = \Gamma^{i}_{jh} - \mathcal{M}\left(\delta^{i}_{j}\vartheta^{\circ\prime}_{h} + \delta^{i}_{h}\vartheta^{\circ\prime}_{j}\right) \tag{8.37}$$

e

$$\hat{\Gamma}^{i'}_{j'h'} = \vartheta^{i'}_{i}\left(\Gamma^{i}_{jh}\,\vartheta^{j}_{j'}\,\vartheta^{h}_{h'} + \partial_{h'}\vartheta^{i}_{j'}\right) . \tag{8.38}$$

Per un cambiamento simultaneo delle coordinate curvilinee e della connessione avremo:

$$(8.39)\qquad \Gamma^{i'}_{j'h'} = \Gamma^{i}_{jh}\,\vartheta^{i'}_{i}\vartheta^{j}_{j'}\vartheta^{h}_{h'} + \vartheta^{i'}_{i}\partial_{h'}\vartheta^{i}_{j'} - \mathcal{M}\left(\delta^{i'}_{j'}\vartheta^{o'}_{h}\vartheta^{h}_{h'} + \delta^{i'}_{h'}\vartheta^{o'}_{j}\vartheta^{j}_{j'}\right).$$

Le (8.36) e (8.39) possono alla loro volta riunirsi in un unico gruppo di formule. Poniamo

$$(8.40)\qquad \Gamma^{\lambda}_{\mu o} = \Gamma^{\lambda}_{o\mu} = \mathcal{M}\delta^{\lambda}_{\mu}$$

ove intendiamo - e così sempre d'ora in poi - che gli indici greci $\lambda, \mu, \nu, \tau, \omega, \varkappa, \sigma, \varrho$ prendano i valori 0,1,2, ...,n ; e ancora

$$(8.41)\qquad \vartheta^{i}_{o'} = 0\,,\quad \vartheta^{o}_{o'} = 1\,,\quad \vartheta^{o}_{i'} = -\vartheta^{i}_{i'}\vartheta^{o'}_{i} = \frac{1}{\mathcal{M}}\vartheta^{i}_{i'}\varphi_{i}\,;$$

allora acquisteranno significato i simboli $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ e $\vartheta^{\lambda}_{\lambda'}$ per ogni valore degli indici λ,μ,ν e di λ' (inteso naturalmente che $\lambda', \mu', \nu', \tau', \ldots = 0', 1', \ldots, n'$). Indichiamo con $\vartheta^{\lambda'}_{\lambda}$ gli elementi reciproci delle $\vartheta^{\lambda}_{\lambda'}$ nel determinante $\left|\vartheta^{\lambda}_{\lambda'}\right|$, il che equivale a dire che

$$(8.42)\qquad \vartheta^{\lambda}_{\lambda'}\vartheta^{\lambda'}_{\mu} = \delta^{\lambda}_{\mu}\,,\quad \vartheta^{\lambda}_{\lambda'}\vartheta^{\mu'}_{\lambda} = \delta^{\mu'}_{\lambda'}\,;$$

o svolgendo, e tenute presenti le (8.41):

$$\vartheta^{o}_{i'}\vartheta^{i'}_{o} + \vartheta^{o}_{o'}\vartheta^{o'}_{o} = \vartheta^{o}_{o'}\vartheta^{o'}_{o} = 1\,,\text{ cioè anche } \vartheta^{o'}_{o} = 1\,;$$

$$(8.43)\qquad \vartheta^{o}_{i'}\vartheta^{i'}_{j} + \vartheta^{o}_{o'}\vartheta^{o'}_{j} = 0 \qquad \text{cioè } \vartheta^{o'}_{j} = -\vartheta^{o}_{j'}\vartheta^{j'}_{j}\,,$$

d'accordo con l'ultima delle (8.41); e ancora

(8.44) $$\vartheta^{i}_{i'}\,\vartheta^{i'}_{j} = \delta^{i}_{j}\,;$$

il che mostra che le $\vartheta^{i'}_{j}$, quali particolari componenti di $\vartheta^{\lambda'}_{\lambda}$, hanno il solito significato $\left(\vartheta^{i'}_{j} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^{i}}\right)$.
Tenuto presente che, in forza delle (8.40),

(8.45) $$\Gamma^{\lambda'}_{\mu'o'} = \vartheta^{\lambda'}_{\lambda}\vartheta^{\mu}_{\mu'}\Gamma^{\lambda}_{\mu o}\,,\qquad \Gamma^{\lambda'}_{o\mu'} = \vartheta^{\lambda'}_{\lambda}\vartheta^{\mu}_{\mu'}\Gamma^{\lambda}_{o\mu}$$

possiamo infine riassumere le (8.36), (8.39) e anche le (8.45) medesime nell'unico gruppo di formule

(8.46) $$\Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'} = \vartheta^{\lambda'}_{\lambda}\left(\vartheta^{\mu}_{\mu'}\vartheta^{\nu}_{\nu'}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \partial_{\nu'}\vartheta^{\lambda}_{\mu'}\right),$$

ove intendiamo

(8.47) $$\partial_{\nu'} = \delta^{\nu}_{\nu'}\partial_{\nu}\,,\qquad \text{cioè}\quad \partial_{o'}A = o$$

qualunque sia l'ente (scalare, tensore, ...) A.
(Analogamente: $\partial_{\nu} = \delta^{\nu}_{\nu'}\partial_{\nu'}$ cioè $\partial_{o}A = o$ sempre).
Notiamo che le (8.46) dànno in particolare, quando uno degli indici μ', ν' si riduca a o', le (8.45); se invece $\mu' = j'$, $\nu' = h'$ per $\lambda' = i'$ esse dànno

(8.48) $$\Gamma^{i'}_{j'h'} = \vartheta^{i'}_{\lambda}\vartheta^{\mu}_{j'}\vartheta^{\nu}_{h'}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \vartheta^{i'}_{\lambda}\partial_{h'}\vartheta^{\lambda}_{j'}$$

$$= \vartheta^{i'}_{i}\vartheta^{\mu}_{j'}\vartheta^{\nu}_{h'}\Gamma^{i}_{\mu\nu} + \vartheta^{i'}_{i}\partial_{h'}\vartheta^{i}_{j'}$$

$$= \vartheta^{i'}_{i}\left(\vartheta^{j}_{j'}\vartheta^{h}_{h'}\Gamma^{i}_{jh} + \vartheta^{o}_{j'}\vartheta^{h}_{h'}M\delta^{i}_{h} + \vartheta^{j}_{j'}\vartheta^{o}_{h'}M\delta^{i}_{j} + \partial_{h'}\vartheta^{i}_{j'}\right)$$

cioè

(8.49) $$\Gamma^{i'}_{j'h'} = \vartheta^{i'}_{i}\left(\vartheta^{j}_{j'}\vartheta^{h}_{h'}\Gamma^{i}_{jh} + \partial_{h'}\vartheta^{i}_{j'}\right) + M\left(\vartheta^{o}_{j'}\delta^{i'}_{h'} + \vartheta^{o}_{h'}\delta^{i'}_{j'}\right);$$

questa non coincide proprio con la (8.39) ma equivale

a questa in base alle ultime (8.41).
Analogamente: per $\mu' = j'$, $\nu' = h'$, $\lambda' = o'$ le (8.46) dànno

$$(8.50)\quad \begin{cases} \Gamma^{o'}_{j'h'} = \vartheta^{o'}_{\lambda}\vartheta^{\mu}_{j'}\vartheta^{\nu}_{h'}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \vartheta^{o'}_{\lambda}\partial_{h'}\vartheta^{\lambda}_{j'} \\ \quad = \vartheta^{j}_{j'}\vartheta^{h}_{h'}\Gamma^{o}_{jh} + \vartheta^{o}_{i}\vartheta^{j}_{j'}\vartheta^{h}_{h'}\Gamma^{i}_{jh} + M\vartheta^{o}_{j'}\vartheta^{o}_{h'} + \\ \quad + \vartheta^{o}_{i}\left(\vartheta^{o}_{j'}\vartheta^{h}_{h'}M\delta^{i}_{h} + \vartheta^{j}_{j'}\vartheta^{o}_{h'}M\delta^{i}_{j} + \partial_{h'}\vartheta^{i}_{j'}\right) + \partial_{h'}\vartheta^{o}_{j'} \end{cases}$$

cioè

$$(8.51)\quad \begin{cases} \Gamma^{o'}_{j'h'} = \vartheta^{j}_{j'}\vartheta^{h}_{h'}\Gamma^{o}_{jh} + \partial_{h'}\vartheta^{o}_{j'} + M\vartheta^{o}_{j'}\vartheta^{o}_{h'} + \\ \quad + \vartheta^{o}_{i}\vartheta^{j}_{j'}\vartheta^{h}_{h'}\Gamma^{i}_{jh} - 2M\vartheta^{o}_{j'}\vartheta^{o}_{h'} + \vartheta^{o}_{i}\partial_{h'}\vartheta^{i}_{j'}. \end{cases}$$

Questa non coincide con la (8.36); ma tenuto presente che

$$(8.52)\quad \vartheta^{o'}_{i}\vartheta^{i}_{j'} = -\vartheta^{o}_{j'},\ \vartheta^{o'}_{i}\partial_{h'}\vartheta^{i}_{j'} = -\vartheta^{j}_{j'}\vartheta^{h}_{h'}\partial_{h}\vartheta^{o'}_{j} - \partial_{h'}\vartheta^{o}_{j'}$$

sostituendo ne ricaviamo appunto le (8.36).

Riassumendo; le $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, che conglobano i parametri Γ^{i}_{jh} di una qualunque connessione affine simmetrica avente le supposte geodetiche, le $\Gamma^{\lambda}_{\mu o} = \Gamma^{\lambda}_{o\mu} = M\delta^{\lambda}_{\mu}$ e le Γ^{o}_{jh}, onde in particolare risulta anche fissato su ciascuna delle supposte geodetiche (a meno di una trasformazione lineare fratta) un parametro proiettivo, hanno per un cambiamento delle coordinate curvilinee e, insieme, della connessione affine Γ^{i}_{jh} (in altra pure simmetrica e con le stesse geodetiche) una legge di trasformazione, la (8.46), che formalmente non differisce da quella dei parametri di una connessione affine $(n+1)$-dimensionale. Su questo torneremo fra poco.

Riprendiamo il sistema differenziale delle linee geodetiche della connessione affine Γ^i_{jh}. Detto s un parametro affine tale sistema ha la forma

$$(8.53)\qquad \frac{d^2u^i}{ds^2} + \Gamma^i_{hl}\,\frac{du^h}{ds}\,\frac{du^l}{ds} = 0\,;$$

ma possiamo farvi figurare, anzichè s, un parametro proiettivo π; otteniamo:

$$(8.54)\qquad \frac{d^2u^i}{d\pi^2} + \Gamma^i_{hl}\,\frac{du^h}{d\pi}\,\frac{du^l}{d\pi} + \frac{\dfrac{d^2\pi}{ds^2}}{\left(\dfrac{d\pi}{ds}\right)^2}\,\frac{du^i}{d\pi} = 0.$$

Queste possono scriversi nella forma

$$(8.55)\qquad \frac{d^2u^i}{d\pi^2} + \Gamma^i_{\lambda\mu}\,\frac{du^\lambda}{d\pi}\,\frac{du^\mu}{d\pi} = 0,$$

inteso che si ponga, lungo ciascuna geodetica,

$$(8.56)\qquad \frac{du^\circ}{ds} = \frac{1}{2M}\,\frac{d}{ds}\,\log\frac{d\pi}{ds}$$

onde anche (a meno di una costante additiva)

$$(8.57)\qquad u^\circ = \frac{1}{2M}\,\log\frac{ds}{d\pi}\,.$$

Dalla (8.56), che può anche scriversi

$$(8.58)\qquad \frac{du^\circ}{d\pi} = -\frac{1}{2M}\,\frac{d}{d\pi}\,\log\frac{ds}{d\pi}$$

ricaviamo derivando:

$$(8.59\qquad \frac{d^2u^\circ}{d\pi^2} = -\frac{1}{2M}\,\frac{d}{d\pi}\left(\frac{\dfrac{d^2s}{d\pi^2}}{\dfrac{ds}{d\pi}}\right) = -\frac{1}{2M}\left(\{s,\pi\} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dfrac{d^2s}{d\pi^2}}{\dfrac{ds}{d\pi}}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2M}\{\pi, s\}\left(\frac{ds}{d\pi}\right)^2 - M\left(\frac{du^\circ}{d\pi}\right)^2.$$

Cioè, ricordando le (8.31), (8.40)

$$\frac{d^2u^\circ}{d\pi^2} + \Gamma^\circ_{\lambda\mu}\frac{du^\lambda}{d\pi}\frac{du^\mu}{d\pi} = 0. \tag{8.60}$$

Dunque: l'assegnazione, accanto alle geodetiche di una connessione affine, anche di una parametrizzazione proiettiva per esse (cioè: di un parametro proiettivo, a meno di una trasformazione lineare fratta) dà luogo anche all'associazione di un ulteriore parametro u° ai punti di ciascuna geodetica. Tale parametro u°, che diremo "parametro anolonomo" secondo K.YANO ("gauge variable" secondo L.BERWALD) è definito dalla (8.56) od (8.57); esso insieme alle coordinate curvilinee dei punti delle geodetiche soddisfa al sistema (8.55), (8.60), che può anche così riassumersi:

$$\frac{d^2u^\nu}{d\pi^2} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\frac{du^\lambda}{d\pi}\frac{du^\mu}{d\pi} = 0. \tag{8.61}$$

Viceversa: dati i parametri $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, quali funzioni delle u^i (per ora sotto la condizione che sia $\Gamma^i_{jh} = \Gamma^i_{hj}$ e valgano le (8.40)) se π, u° sono parametri in relazione ai quali le equazioni differenziali delle geodetiche possono scriversi nella forma (8.55), e valga anche la (8.60), π è un parametro proiettivo (e corrisponde alle assegnate Γ^i_{jh}) ed u° soddisfa alla (8.56). E infatti; il confronto delle (8.55) con le (8.53) scritte in relazione a un parametro affine s ci dà subito le (8.56) e quindi la (8.59), il confronto di questa con la (8.60) dà che $\{\pi, s\}$ si esprime precisamente mediante la (8.31).

Vediamo come si comporterà u°, o du°, per una trasformazione (5.15) od (8.37) della connessione affine. Il parametro affine s mutandosi in $\bar{s}$ secondo le (5.20 cioè

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = Ae^{2\int \varphi_h\, du^h} = Ae^{-2M\int \vartheta^\circ_h\, du^h} \tag{8.62}$$

avremo

$$\frac{d\pi}{d\bar{s}} = \frac{d\pi}{ds}\cdot\frac{1}{A}\,e^{2M\int \vartheta_h^{o'}\,du^h}, \tag{8.63}$$

onde, indicando con $\frac{du^\circ}{d\pi}$ la determinazione di $\frac{du^\circ}{d\pi}$ che corrisponde ad $\bar{s}$:

$$\frac{du^{\circ'}}{d\pi} = \frac{du^\circ}{d\pi} + \vartheta_h^{o'}\,\frac{du^h}{d\pi}. \tag{8.64}$$

Onde anche, conglobando le formule di trasformazione di $\frac{du^i}{d\pi}$:

$$\frac{du^{\lambda'}}{d\pi} = \vartheta_\lambda^{\lambda'}\,\frac{du^\lambda}{d\pi}. \tag{8.65}$$

Insomma: la legge di trasformazione (8.64) di $\frac{du^\circ}{d\pi}$ è precisamente quella che occorreva fissare perchè associato $\frac{du^\circ}{d\pi}$ alle $\frac{du^i}{d\pi}$ ne risultasse un ente dotato della legge di trasformazione (8.65), che è precisamente la stessa di $\frac{du^i}{d\pi}$ (vettore controvariante) in relazione ai nuovi indici(greci) che prendono un valore di più.

Conviene dare a du° ,che lungo una singola geodetica equivale a $\frac{du^\circ}{d\pi}\cdot d\pi$ e quindi dipende, oltrechè dal punto e dalla direzione che consideriamo, generalmente anche dalla scelta dei parametri s e π sulla geodetica, un significato un po' più generale: intenderemo che du° designi <u>una espressione differenziale, omogenea di grado 1 (non a priori lineare) nelle du^i ;dipendente inoltre dalle u^i e (in generale) anche da altri parametri</u>: tale che per una trasformazione (3.1) delle coordinate curvilinee e (5.15) od (8.37) della connessione affine Γ_{jh}^i (entro la totalità delle connessioni affini simmetriche che hanno le stesse geodetiche) l'ente costituito dalle du° e du^i , cioè du^λ abbia la legge di trasformazione

$$du^{\lambda'} = \vartheta_\lambda^{\lambda'}\,du^\lambda; \tag{8.66}$$

il che equivale a dire che du°, invariante per le (3.1), per le (5.15) dovrà mutarsi in

$$du^{\circ'} = du^\circ + \vartheta_i^{\circ'} du^i . \tag{8.67}$$

S'intende bene che questo ente du°, introdotto in sostanza quale elemento accessorio, per comodità di sviluppi, quando non sia (volta a volta: come ad es. lungo le geodetiche) ulteriormente precisato non ha e non può avere una essenza geometrica, e nella costruzione di enti geometrici se pure interviene dovrà poi scomparire o comunque non influire sul risultato finale: che ad ogni modo la sua introduzione sia utile risulterà da quanto segue (e del resto, se non di du°, una interpretazione geometrica di du^λ, se pure riflettente l'indeterminazione di du°, verrà a suo tempo precisata).

9. Tensori proiettivi e derivazione proiettiva: tensore di curvatura relativo. La connessione proiettiva normale. Parametri ${}^*\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ di T.Y. THOMAS.

Quanto abbiamo ora esposto ci conduce naturalmente all'introduzione di enti che per ora ci apparranno in un aspetto soltanto formale; dei quali però nel seguito verrà chiarita la ragione d'essere geometrica. In relazione alle trasformazioni (3.1) e (5.15) cioè alle trasformazioni lineari

$$du^\lambda = \vartheta^\lambda_{\lambda'} du^{\lambda'} \qquad (\text{o} \quad du^{\lambda'} = \vartheta^{\lambda}_{\lambda'} du^\lambda) \tag{9.1}$$

sulle du^λ, ove intendiamo che sia

$$\vartheta^\lambda_{\lambda'} \vartheta^{\mu'}_{\lambda} = \delta^{\mu'}_{\lambda'} \; ; \quad \vartheta^\circ_{\circ'} = \vartheta^{\circ'}_{\circ} = 1, \quad \vartheta^i_\circ = \vartheta^{i'}_\circ = 0 , \quad \vartheta^i_{i'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \tag{9.2}$$

diremo <u>tensore proiettivo</u> un ente che sia rappresentato da componenti $N^{\cdots\mu_1\cdots\mu_s}_{\lambda_1\cdots\lambda_r}$ dotate della legge di trasformazione

$$N^{\cdots\mu'_1\cdots\mu'_s}_{\lambda'_1\cdots\lambda'_r} = \vartheta^{\lambda_1}_{\lambda'_1} \cdots \vartheta^{\lambda_r}_{\lambda'_r} \vartheta^{\mu'_1}_{\mu_1} \cdots \vartheta^{\mu'_s}_{\mu_s} N^{\cdots\mu_1\cdots\mu_s}_{\lambda_1\cdots\lambda_r} . \tag{9.3}$$

diremo tensori affini (ove la distinzione occorra) gli usuali tensori, i cui indici prendono i valori 12..... n; le cui componenti si trasformano secondo le (3.2).

S'intende bene che un tensore proiettivo sarà assegnato quando siano date le sue componenti in relazione a un sistema di coordinate curvilinee e a una scelta di du^0, cioè, di una connessione affine simmetrica Γ^i_{jh} : le (9.3) varranno a determinare le componenti del tensore anche in relazione a ogni altra scelta del riferimento curvilineo e della connessione affine (fra quelle simmetriche che hanno le supposte geodetiche).

Per un campo di tensori (le cui componenti siano funzioni note delle u^i) un sistema di quantità $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ che abbiano in relazione alle (3.1) e (5.15), cioè alle (9.1) la legge di trasformazione (8.46) dà luogo a una derivazione covariante: se ad es. A_λ, B^λ sono tensori proiettivi del 1° ordine (che diremo anche: vettori proiettivi),

$$\nabla_\mu A_\lambda = \partial_\mu A_\lambda - \Gamma^\nu_{\lambda\mu} A_\nu , \tag{9.4}$$

$$\nabla_\mu B^\lambda = \partial_\mu B^\lambda + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} B^\nu$$

(ove al solito $\partial_\mu = \delta^i_\mu \partial_i$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$) sono pure tensori proiettivi, del 2° ordine; derivate covarianti di A_λ o, rispettivamente, di B^λ.

Fino ad ora non è intervenuta alcuna particolare ipotesi nei riguardi delle $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, tranne la legge di trasformazione (8.46). Ma intendendo che valgano le (8.40), ove M è al solito una costante numerica $\neq 0$, ne risulta subito una conseguenza interessante: fra le componenti del nuovo tensore proiettivo $\nabla_\mu A_\lambda$ (o di $\nabla_\mu B^\lambda$), le $\nabla_0 A^\lambda$ (o rispettivamente le $\nabla_0 B^\lambda$) a meno di un fattore numerico riproducono le componenti A_λ (o B^λ) del tensore primitivo.

E infatti

$$\nabla_0 A_\lambda = -M A_\lambda \quad , \quad \nabla B^\lambda = M B^\lambda \tag{9.5}$$

e in generale, per un tensore proiettivo d'ordine $r+s$ (con r indici di covarianza, s di controvarianza):

$$\nabla_o N^{\cdots\mu_1\cdots\mu_s}_{\lambda_1\cdots\lambda_r} = (s-r) N^{\cdots\mu_1\cdots\mu_s}_{\lambda_1\cdots\lambda_r} \tag{9.6}$$

L'altra ipotesi particolare, ammessa sino ad ora, che sia

$$\Gamma^{i}_{jh} = \Gamma^{i}_{hj} \tag{9.7}$$

non ha, nei riguardi della formazione delle derivate covarianti, alcuna importanza: si riflette solo sulle formule di commutazione di cui ora diremo (ma è ben semplice anche qui vedere come i risultati si modifichino, facendone astrazione). Per un tensore proiettivo qualunque, ad es. per A_λ, calcoliamo ora le differenze $\nabla_\nu \nabla_\mu A_\lambda - \nabla_\mu \nabla_\nu A_\lambda$: troviamo (in forza delle (9.5), (9.7

$$\left(\nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu\right) A_\lambda = \Gamma^{\cdots\ r}_{\nu\mu\lambda} A_r , \tag{9.8}$$

ove abbiamo posto

$$\Gamma^{\cdots\ r}_{\nu\mu\lambda} = \partial_\mu \Gamma^{r}_{\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma^{r}_{\lambda\mu} + \Gamma^{\omega}_{\lambda\nu}\Gamma^{r}_{\omega\mu} - \Gamma^{\omega}_{\lambda\mu}\Gamma^{r}_{\omega\nu} - M(\Gamma^{\circ}_{\nu\mu} - \Gamma^{\circ}_{\mu\nu}) \tag{9.9}$$

L'ente rappresentato da queste componenti è un tensore proiettivo che verrà detto tensore di curvatura della derivazione proiettiva di parametri $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. Come vedremo tali parametri oltre al ruolo formale, di parametri di derivazione, si possono riguardare quali componenti di un effettivo ente geometrico, che diremo una connessione proiettiva: ma il tensore $\Gamma^{\cdots\ r}_{\nu\mu\lambda}$ non ha in relazione a questa un ruolo comparabile con quello del tensore di curvatura di una connessione affine: come vedremo tale ruolo è invece tenuto dal tensore

$$R^{\cdots\ r}_{\nu\mu\lambda} = \Gamma^{\cdots\ r}_{\nu\mu\lambda} - \frac{1}{n+1}\delta^{r}_{\lambda}\Gamma^{\cdots\ \omega}_{\nu\mu\omega} . \tag{9.10}$$

(Appunto questo verrà detto tensore di curvatura della connessione proiettiva).

Sui tensori $\Gamma^{\cdots\ r}_{\nu\mu\lambda}$ ed $R^{\cdots\ r}_{\nu\mu\lambda}$ e anche sui tensori

proiettivi in generale è opportuna qualche osservazione. Anzitutto: come $\Gamma_{\nu\mu\lambda}^{\cdots\tau}$, così anche $\Gamma_{\nu\mu\lambda}^{\cdots h}$ ha carattere di tensore: proiettivo pei primi tre indici, affine pel quarto. E infatti

$$\Gamma_{\nu'\mu\lambda'}^{\cdots h'} = \vartheta_{\nu'}^{\nu}\vartheta_{\mu'}^{\mu}\vartheta_{\lambda'}^{\lambda}\vartheta_{\tau}^{h'}\Gamma_{\nu\mu\lambda}^{\cdots\tau} = \vartheta_{\nu'}^{\nu}\vartheta_{\mu'}^{\mu}\vartheta_{\lambda'}^{\lambda}\vartheta_{h}^{h'}\Gamma_{\nu\mu\lambda}^{\cdots h} \tag{9.11}$$

in quanto $\vartheta_{o}^{h'} = 0$. In generale: se un tensore proiettivo ha indici di controvarianza, le sue componenti per le quali uno o più di questi indici prendono valori $\neq 0$ formano pure un tensore, che rispetto a tali indici è affine. Analogamente risulta che ad es. $\Gamma_{\nu\mu 0}^{\cdots\tau}$ è un tensore proiettivo del 3° ordine:

$$\Gamma_{\nu'\mu'o'}^{\cdots\tau'} = \vartheta_{\nu'}^{\nu}\vartheta_{\mu'}^{\mu}\vartheta_{o'}^{\lambda}\vartheta_{\tau}^{\tau'}\Gamma_{\nu\mu\lambda}^{\cdots\tau} = \vartheta_{\nu'}^{\nu}\vartheta_{\mu'}^{\mu}\vartheta_{\tau}^{\tau'}\Gamma_{\nu\mu o}^{\cdots\tau}; \tag{9.12}$$

in generale: se un tensore proiettivo ha indici di covarianza, le sue componenti per le quali uno o più di questi indici prendono il valore 0 formano pure un tensore, che ha altrettanti indici di covarianza in meno.

Anche $\Gamma_{o\mu\lambda}^{\cdots\tau}$ e $\Gamma_{\nu o\lambda}^{\cdots\tau}$ sono dunque tensori proiettivi, però essi sono identicamente nulli. In quanto $\Gamma_{\nu\mu\lambda}^{\cdots\tau}$ è ovviamente emisimmetrico rispetto ai primi due indici, basta verificare il fatto ora enunciato ad es. per $\Gamma_{o\mu\lambda}^{\cdots\tau}$:

$$\Gamma_{o\mu\lambda}^{\cdots\tau} = \partial_{\mu}\Gamma_{\lambda o}^{\tau} - \partial_{o}\Gamma_{\lambda\mu}^{\tau} + \Gamma_{\lambda o}^{\omega}\Gamma_{\omega\mu}^{\tau} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\omega}\Gamma_{\omega o}^{\tau} = M\Gamma_{\lambda\mu}^{\tau} - M\Gamma_{\lambda\mu}^{\tau} = 0. \tag{9.13}$$

Ecco una immediata conseguenza: $\Gamma_{ij\lambda}^{\cdots\tau}$ è un tensore, affine pei primi due indici, proiettivo per gli altri due. E infatti

$$\Gamma_{i'j'\lambda'}^{\cdots\tau'} = \vartheta_{i'}^{\nu}\vartheta_{j'}^{\mu}\vartheta_{\lambda'}^{\lambda}\vartheta_{\tau}^{\tau'}\Gamma_{\nu\mu\lambda}^{\cdots\tau} = \vartheta_{i'}^{i}\vartheta_{j'}^{j}\vartheta_{\lambda'}^{\lambda}\vartheta_{\tau}^{\tau'}\Gamma_{ij\lambda}^{\cdots\tau}. \tag{9.14}$$

In generale: se un tensore proiettivo ha (almeno) un indice di covarianza, e le sue componenti per le quali tale indice prende il valore 0 sono tutte nulle, le com-

ponenti rimanenti formano un tensore che per tale indice è affine.

Nel nostro caso in quanto

$$\Gamma_{\nu\mu\lambda}^{\cdots\tau} = \delta_\nu^i \delta_\mu^j \Gamma_{ij\lambda}^{\cdots\tau} \tag{9.10}$$

il tensore $\Gamma_{ij\lambda}^{\cdots\tau}$ può identificarsi con $\Gamma_{\nu\mu\lambda}^{\cdots\tau}$ e chiamarsi esso stesso tensore di curvatura della derivazione proiettiva. Analogamente si ha

$$R_{\nu\mu\lambda}^{\cdots\tau} = \delta_\nu^i \delta_\mu^j R_{ij\lambda}^{\cdots\tau}. \tag{9.16}$$

Alle proprietà sinora elencate può aggiungersene un'altra: se τ è un indice di controvarianza di un tensore proiettivo, e tutte le componenti di queste per le quali τ prende un valore $\neq 0$ si annullano, le rimanenti formano un nuovo tensore proiettivo, che ha un indice di controvarianza di meno. Un esempio che si riferisce ancora al tensore di curvatura, verrà indicato fra poco: notiamo intanto che se A^λ è tensore proiettivo, A^τ è un tensore affine, e se $A^\tau = 0$ A_o è uno scalare (invariante); se B_λ è un tensore proiettivo, B_o è uno scalare e se $B_o = 0$, B_τ è un tensore affine.

Tornando al tensore $\Gamma_{ij\lambda}^{\cdots\tau}$: applicazione replicata di quanto ora s'è esposto ci dà che $\Gamma_{ijo}^{\cdots h}$ è un tensore affine: il quale però nelle nostre ipotesi è nullo:

$$\Gamma_{ijo}^{\cdots h} = \partial_j \Gamma_{oi}^h - \partial_i \Gamma_{oj}^h + \Gamma_{oi}^\lambda \Gamma_{\lambda j}^h - \Gamma_{oj}^\lambda \Gamma_{\lambda i}^h \tag{9.17}$$

$$= M\left(\Gamma_{ij}^h - \Gamma_{ji}^h\right) = 0 .$$

È nullo però solo in quanto si presuppongono valide le (9.7). (In caso contrario esso ci darà quello che diremo il tensore di torsione della connessione proiettiva : notiamo che esso coincide con $R_{ijo}^{\cdots h}$).

In quanto valgono le (9.17) in forza di quanto poco sopra si è avvertito anche $\Gamma_{ijo}^{\cdots\rho}$ sarà un tensore (affine) il quale però è nullo:

$$(9.18)\qquad \Gamma_{ijo}^{\cdots o} = \partial_j \Gamma_{oi}^{o} - \partial_i \Gamma_{oj}^{o} + \Gamma_{oi}^{\lambda}\Gamma_{\lambda j}^{o} - \Gamma_{oj}^{\lambda}\Gamma_{\lambda i}^{o} - M(\Gamma_{ij}^{o} - \Gamma_{ji}^{o})$$
$$= M(\Gamma_{ij}^{o} - \Gamma_{ji}^{o}) - M(\Gamma_{ij}^{o} - \Gamma_{ji}^{o}) = 0.$$

Le componenti (eventualmente) non nulle di $\Gamma_{\nu\mu\lambda}^{\cdots z}$ si riducono insomma, nelle nostre ipotesi, alle sole $\Gamma_{ij\ell}^{\cdots z}$; cosicchè $\Gamma_{ij\ell}^{\cdots h}$ è un tensore affine.

Un altro tensore affine, che si ricava da $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdots z}$ in forza delle (9.17), è $R_{ijh}^{\cdots z}$ .Infatti: anzitutto da $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdots z}$ si ha per contrazione $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdots\nu}$;ma in quanto tutte le componenti $R_{o\mu\lambda}^{\cdots z}$ sono nulle la somma ora indicata si riduce ad $R_{i\mu\lambda}^{\cdots i}$ .Le componenti $R_{i\sigma\lambda}^{\cdots i}$ sono nulle, dunque $R_{ij\lambda}^{\cdots i}$ è un tensore; anche le componenti $R_{ijo}^{\cdots i}$ sono nulle per le (9.17), dunque $R_{ijh}^{\cdots z}$ è un tensore affine del 2° ordine. Si può, secondo il CARTAN (che veramente fa uso di un assai diverso simbolismo) porre la condizione invariante che valgano insieme alle (9.7) o (9.17) le condizioni seguenti:

$$(9.19)\qquad R_{ijh}^{\cdots i} = \Gamma_{ijh}^{\cdots i} - \frac{1}{n+1}\Gamma_{hj\omega}^{\cdots\omega} = 0 :$$

verifichiamo subito come questo valga a <u>determinare le Γ_{jh}^{o} in funzione delle Γ_{jh}^{i}</u> e quindi ad associare alla connessione affine (simmetrica) Γ_{jh}^{i} (in modo invariante per le trasformazioni proiettive di questa) una derivazione proiettiva, o anche una <u>connessione proiettiva</u> : quella che CARTAN dice <u>connessione proiettiva normale</u>, la quale ha indubbiamente un ruolo sostanziale nella teoria se pure la sua costruzione non è geometricamente espressiva.

Infatti le (9.19) si possono scrivere

$$(9.20)\qquad \partial_j \Gamma_{hi}^{i} - \partial_i \Gamma_{hj}^{i} + \Gamma_{hi}^{\tau}\Gamma_{\tau j}^{i} - \Gamma_{hj}^{\tau}\Gamma_{\tau i}^{i} -$$
$$- \frac{1}{n+1}\left(\partial_j \Gamma_{\omega h}^{\omega} - \partial_h \Gamma_{\omega j}^{\omega}\right) = 0$$

cioè

$$(9.21)\qquad \partial_j \Gamma_{hi}^{i} - \partial_i \Gamma_{hj}^{i} + \Gamma_{hi}^{\ell}\Gamma_{\ell j}^{i} - \Gamma_{hj}^{\ell}\Gamma_{\ell j}^{i} + M(1-n)\Gamma_{hj}^{o} -$$
$$- \frac{1}{n+1}\left(\partial_j \Gamma_{\ell h}^{\ell} - \partial_h \Gamma_{\ell j}^{\ell}\right) = 0.$$

Questo dà appunto

$$(9.22)\qquad \Gamma^{0}_{hj} = \frac{1}{M(n-1)}\left\{\partial_j \Gamma^{i}_{hi} - \partial_i \Gamma^{i}_{hj} + \Gamma^{l}_{hi}\Gamma^{i}_{lj} - \Gamma^{l}_{hj}\Gamma^{i}_{li} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{n+1}\left(\partial_j \Gamma^{l}_{lh} - \partial_h \Gamma^{l}_{lj}\right)\right\}.$$

Conviene trasformare le espressioni ora ottenute in modo da farvi figurare soltanto i parametri Π^{i}_{hj} di T.Y.THOMAS e le $\Gamma^{i}_{ih} = \Gamma^{i}_{hi}$. Tenute presenti le (5.13) abbiamo sostituendo, con agevoli sviluppi:

$$(9.23)\qquad \Gamma^{\circ}_{hj} = \frac{1}{M(n-1)}\left(-\partial_i \Pi^{i}_{hj} + \Pi^{l}_{hi}\,\Pi^{i}_{lj}\right) +$$
$$+ \frac{1}{M(n+1)}\left(\partial_j \Gamma^{i}_{ih} + \frac{1}{n+1}\Gamma^{l}_{lj}\Gamma^{k}_{kh} - \Gamma^{i}_{hj}\Gamma^{k}_{ki}\right).$$

Cioè anche, ricordando le (5.34), (6.8):

$$(9.24)\qquad \Gamma^{\circ}_{hj} = \frac{1}{M(n-1)}\Pi^{\cdots i}_{ijh} + \frac{1}{M(n+1)}\left(\partial_j \Gamma^{i}_{ih} + \frac{1}{n+1}\Gamma^{l}_{lj}\Gamma^{k}_{kh} - \Gamma^{i}_{hj}\Gamma^{k}_{ki}\right).$$

Risulta dunque provato quanto volevamo. Di più: in relazione a ciascun riferimento coordinato curvilineo possiamo scegliere, fra le infinite connessioni affini simmetriche aventi le stesse geodetiche, quella i cui parametri ${}^{*}\Gamma^{i}_{hj}$ si riducono proprio ai parametri Π^{i}_{hj} di T.Y.THOMAS: verifichiamo subito che, corrispondentemente, le ${}^{*}\Gamma^{\circ}_{hj}$ si riducono ai primi termini delle espressioni (9.24), cioè ad $\frac{1}{M(n-1)}\Pi^{\cdots i}_{ijh}$.

E infatti: basterà, secondo le (5.30), porre

$$(9.25)\qquad \varphi_j = -\frac{1}{n+1}\Gamma^{h}_{hj},$$

cioè

$$(9.26)\qquad \vartheta^{\circ}_{j} = \frac{1}{M(n+1)}\Gamma^{h}_{hj};$$

(intendiamo: identificare φ_j con quel vettore covariante che in relazione al presupposto riferimento curvili-

neo ha quali componenti le quantità $-\frac{1}{n+1}\Gamma^{h}_{hj}$).

Tenute presenti le (8.32) ed (8.35) e d'altra parte le (5.15) od (8.37) e le (8.40) abbiamo appunto:

$$(9.27)\qquad {}^{*}\Gamma^{i}_{hj} = \Pi^{i}_{hj}\,,\quad {}^{*}\Gamma^{\circ}_{hj} = \frac{1}{\mathcal{M}(n-1)}\,\Pi^{\cdots i}_{ijh}\,,$$

$$ {}^{*}\Gamma^{\lambda}_{\mu o} = {}^{*}\Gamma^{\lambda}_{o\mu} = \mathcal{M}\delta^{\lambda}_{\mu}\,.$$

Per ciascuna scelta del riferimento curvilineo abbiamo così un corrispondente sistema di parametri della connessione proiettiva normale (o, se si vuole, di una derivazione proiettiva): i quali dipendono soltanto dalle Π^{i}_{hj} e loro derivate (oltre che dall'assegnazione della costante numerica $\mathcal{M}$). Tali parametri per

$$(9.28)\qquad \mathcal{M} = -\frac{1}{n+1}$$

sono stati dati nel 1926 da T.Y.THOMAS: introdotti da lui in modo diretto e puramente formale, ma applicati per una interpretazione $(n+1)$ – dimensionale di cui dirò in seguito.

Le (9.27) sono state ottenute associando opportunamente al riferimento curvilineo una scelta della connessione affine. E' ovvio che esse non potranno avere significato invariante quando indipendentemente le coordinate curvilinee e la connessione affine vengano trasformati. Ma è facile precisare il gruppo di trasformazioni in relazione al quale le (9.27) hanno significato invariante. Rammentiamo che per le (3.1) i parametri Π^{i}_{hj} hanno la legge di trasformazione (5.27); perchè si mantengano valide le (9.27) dovremo dunque avere

$$(9.29)\qquad {}^{*}\Gamma^{i'}_{h'j'} = \Gamma^{i}_{hj}\,\vartheta^{h}_{h'}\vartheta^{j}_{j'}\vartheta^{i'}_{i} + \partial_{j'}\vartheta^{i}_{h'}\,\vartheta^{i'}_{i} - \vartheta^{h}_{h'}\delta^{i'}_{j'} - \vartheta^{i}_{j'}\delta^{i'}_{h'}$$

ove $\vartheta^{i}_{j'}$ è dato dalle (5.24) ,(5.25) .Ma le ${}^{*}\Gamma^{i'}_{h'j'}$ sono i parametri di una nuova connessione affine: di quella che in relazione al nuovo sistema coordinato ha i parametri eguali alle $\Pi^{i'}_{h'j'}$ .Confrontando con le (8.49) ricaviamo che tale trasformazione della connessione è legata alla

trasformazione delle coordinate dalle condizioni

$$(9.30)\qquad \vartheta^{\circ}_{j'} = -\frac{1}{M}\vartheta_{j'} = -\frac{1}{M(n+1)}\partial_{j'}\log\frac{\partial(u',\dots,u^n)}{\partial(u'',\dots,u^{n'})}$$

cioè

$$(9.31)\qquad \varphi_i = M\vartheta^{\circ}_{j'}\vartheta^{j'}_{i} = -\vartheta_{j'}\vartheta^{j'}_{i} = \frac{1}{n+1}\partial_i\log\frac{\partial(u',\dots,u^n)}{\partial(u'',\dots,u^n)}$$

Dunque il gruppo di trasformazioni in relazione al quale le (9.27) sono invarianti è caratterizzato dai seguenti valori delle $\vartheta^{\lambda}_{\lambda'}$:

$$(9.32)\qquad \vartheta^{i}_{i'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}},\quad \vartheta^{i}_{o'} = 0,\quad \vartheta^{\circ}_{o'} = 1,\quad \vartheta^{\circ}_{i'} = -\frac{1}{M(n+1)}\partial_{i'}$$

ove Δ è il determinante funzionale delle u^i rispetto alle $u^{i'}$. Tali trasformazioni, del tutto determinate (assegnato M) dalla trasformazione sulle coordinate curvilinee, per la prima volta si sono presentate (per $M=-\frac{1}{n+1}$) nel lavoro già accennato di T.Y.THOMAS; per altra via vi giunto (ed è stato condotto a porre $M=1$) nel 1928 il BLEN; ma sostanzialmente, esse già sono implicite anche nella memoria del CARTAN (1924) di cui diremo estesamente fra non molto: giacchè, come accenneremo, il CARTAN fa uso di certi "riferimenti" che solo per le (9.32) sono invarianti.

Torniamo alle ${}^*\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ di T.Y.THOMAS. Dà un risultato molto interessante il calcolo del relativo tensore di curvatura: il quale, in quanto ${}^*\Gamma^{i}_{ih}=0$, potrà designarsi indifferentemente con ${}^*R^{\cdots\tau}_{ij\lambda}$ o anche con ${}^*\Gamma^{\cdots\tau}_{ij\lambda}$. Notiamo che si ha manifestamente

$$(9.33)\qquad {}^*\Gamma^{\circ}_{hj} = {}^*\Gamma^{\circ}_{jh},$$

il che per le (9.32) ha carattere d'invarianza. Ciò posto abbiamo subito:

$$(9.34)\qquad {}^*\Gamma^{\cdots l}_{ijh} = \partial_j\Pi^{l}_{hi} - \partial_i\Pi^{l}_{hj} + \Pi^{k}_{hi}\Pi^{l}_{kj} - \Pi^{k}_{hj}\Pi^{l}_{ki} + M\left(\delta^{l}_{j}\,{}^*\Gamma^{\circ}_{hi} - \delta^{l}_{i}\,{}^*\Gamma^{\circ}_{hj}\right.$$

cioè, tenute presenti le (9.27) e le (6.8),(6.16),(6.18):

$$(9.35)\qquad {}^{*}\Gamma_{ijh}^{\cdots l} = \Pi_{ijh}^{\cdots l} + \delta_j^l z_{ih} - \delta_i^l z_{jh} = W_{ijh}^{\cdots l};$$

poi

$$(9.36)\qquad {}^{*}\Gamma_{ij\circ}^{\cdots z} = 0,$$

infine, rammentando le (6.22):

$$(9.37)\qquad {}^{*}\Gamma_{ijh}^{\cdots \circ} = \partial_j {}^{*}\Gamma_{hi}^{\circ} - \partial_i {}^{*}\Gamma_{hj}^{\circ} + {}^{*}\Gamma_{hi}^{\lambda}\,{}^{*}\Gamma_{\lambda j}^{\circ} - {}^{*}\Gamma_{hj}^{\lambda}\,{}^{*}\Gamma_{\lambda i}^{\circ} =$$

$$= \frac{1}{M}\left(\partial_j z_{ih} - \partial_i z_{jh} + \Pi_{hi}^{l} z_{jl} - \Pi_{hj}^{l} z_{il}\right)$$

$$= \frac{1}{M} z_{jih}.$$

Dunque il tensore di curvatura della connessione proiettiva normale, rappresentata coi parametri ${}^{*}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ di T.Y. THOMAS, ha componenti ${}^{*}\Gamma_{ijh}^{\cdots l}$ che s'identificano con quelle del tensore di curvatura proiettiva di WEYL, W_{ijh}^{l}; ha componenti ${}^{*}\Gamma_{ijh}^{\cdots \circ}$ che a meno di un fattore numerico $\left(\frac{1}{M}\right)$ si identificano con quelle del covariante proiettivo di VEBLEN e di THOMAS, z_{jih}; ha le altre componenti tutte nulle.

Conseguenza particolare: l'annullarsi del tensore di curvatura della connessione proiettiva normale ${}^{*}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ legata a una connessione affine Γ_{jh}^{i} è condizione necessaria e sufficiente perchè tale connessione affine sia proiettivamente piana.

Più in generale: risulta pressochè manifesto, in base a quanto dicemmo al n.6, che lo studio degli invarianti proiettivi di una connessione affine si potrà ricondurre a quello della corrispondente connessione proiettiva normale. E infatti questa è determinata-nella sua rappresentazione (9.27) - dalle Π_{jh}^{i}, e inversamente le determina. La derivazione proiettiva collegata alla connessione proiettiva normale fornisce l'algoritmo adatto per una costruzione degli invarianti proiet-

tivi legati a una connessione affine: quale nei quadri della teoria delle connessioni affini non si poteva trovare.(Cfr. n.6) .Su questo torneremo parlando(nella parte II) delle connessioni proiettive in generale.

In relazione alla connessione proiettiva normale, e più esattamente alla sua rappresentazione (9.27) ,risulta lecito assumere quale espressione differenziale du dotata dalla legge di trasformazione (8.67), il differenziale esatto di una $(n+1)$ -esima variabile u°, soggetta a trasformarsi nel seguente modo:

$$(9.38) \qquad u^\circ = u^{\circ\prime} + \frac{1}{M(n+1)} \log \Delta \qquad \left(\Delta = \frac{\partial(u^1,\dots,u^n)}{\partial(u^{1\prime},\dots,u^{n\prime})}\right)$$

Introdotta accanto alle u^i la variabile u° (da cui però si intenderanno sempre indipendenti le componenti dei tensori e di tutti gli enti che consideriamo: in modo che sia sempre $\partial_\circ A = 0$ per ogni A)le (9.32) possono più semplicemente scriversi:

$$(9.39) \qquad \vartheta^\lambda_{\lambda'} = \frac{\partial u^\lambda}{\partial u^{\lambda'}} \qquad \left(e\ \vartheta^{\lambda'}_{\lambda} = \frac{\partial u^{\lambda'}}{\partial u^\lambda}\right).$$

Le u^λ, cioè u° ed u^i , possono pensarsi quali coordinate dei punti in una varietà ad n+1 dimensioni; nella quale le $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ o in particolare le ${}^*\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$) in forza delle (8.46) possono interpretarsi come parametri di una connessione affine.

Questa interpretazione è stata utilizzata da T.Y. THOMAS (1926), che ne ha tratto interessanti applicazioni, ad es. dando la costruzione di coordinate normali (che potremmo dire omogenee, mentre quelle di cui s'è detto al n.7 sono non omogenee), e quindi di "estensioni proiettive" dei tensori (proiettivi) e di "tensori proiettivi normali", con processo del tutto analogo a quello che si segue, secondo VEBLEN e T.Y.THOMAS, nell'usuale teoria delle connessioni affini. Anche su questi ci conviene tornare nel seguito, con vedute più generali. Notiamo intanto che il gruppo di trasformazioni sulle u^λ non è qui quello di tutte le possibili trasformazioni. Ciò formalmente ha conseguenze di cui è agevole rendersi conto; ma non è affatto chiaro quali circosta

ze geometriche siano riflesse da quel fatto analitico .

Termino accennando ad altre questioni tuttora aperte, che si riferiscono alla connessione proiettiva normale e d'altra parte a quelle coordinate proiettive normali (non omogenee) di cui s'è detto al n.7 .

Secondo la (8.31) alla connessione proiettiva normale, cioè al corrispondente sistema di parametri Γ°_{hj} dati dalle (9.24) (che potremo intendere portati alla forma ${}^{*}\Gamma^{\circ}_{hj}$, indicata dalle (9.27) ; ma questa è una condizione accessoria) corrisponde un ben determinato parametro proiettivo ${}^{*}\pi$, che potremo dire "parametro proiettivo normale". Determinato, s'intende, a meno di trasformazioni lineari fratte (su ciascuna geodetica). Dato il sistema delle geodetiche, risulta dunque determinato su ciascuna di queste linee un parametro proiettivo, quello normale ora detto. Quale è il suo significato geometrico ? La questione non è stata ancora affrontata: converrà cominciare da casi semplici, ad es. da quello in cui le geodetiche supposte sono le linee di un sistema 3-assiale , secondo il Bompiani, su di una superficie di S_5 proiettivo.

Un'altra questione che si presenta naturale è quella del ragguaglio fra i parametri proiettivi costruiti al modo del BERWALD, mediante una equazione schwarziana (8.31) - in particolare, fra il parametro proiettivo normale detto ora - e l'altro parametro q di cui si è detto al n.7 , collegato alla costruzione delle coordinate proiettive normali fatta la modo di EISENHART. Anche q , come si è visto, risulta un parametro proiettivo.

Potrà esso costruirsi mediante una equazione (8.31) corrispondente a una determinata connessione proiettiva ? la quale dovrebbe essere determinata, come lo è il parametro q (quale parametro proiettivo), al pari della connessione proiettiva normale, dall'assegnazione delle geodetiche.

Un primo passo potrebbe essere l'osservare che dalla (8.27), ove si ponga $\varphi_i = -\frac{1}{n+1}\Gamma^{h}_{hi}$, si ricava (naturalmente: quale conseguenza differenziale dell'equazione del 2° ordine cui q soddisfa, di cui la (5.31) è l'in

tegrale generale):

$$(9.40)\qquad \left\{\vartheta,s\right\} = -\frac{2}{n+1}\left(\partial_j \Gamma^i_{ih} + \frac{1}{n+1}\Gamma^l_{lj}\Gamma^k_{kh} - \Gamma^i_{hj}\Gamma^k_{ki}\right)\frac{du^j}{ds}\,\frac{du^h}{ds}$$

(cfr. con la (9.23)): ove ϑ è il parametro affine invariante di T.Y.THOMAS relativo al supposto riferimento curvilineo: il quale si riduce a φ se le coordinate sono quelle proiettive normali. Un sistema di parametri $\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{hj}$, in relazione al quale il parametro φ soddisfi alla (8.31), dovrebbe avere relativamente a ciascun sistema di coordinate proiettive normali, quali componenti, a meno del fattore $\frac{1}{M(n+1)}$ le quantità entro parentesi nel secondo membro della (9.40).

§.4 - BIBLIOGRAFIA E ANNOTAZIONI

10.- Primo elenco bibliografico.

L'elenco che segue si riferisce agli argomenti trattati o accennati nella Parte I; esso verrà completato da un secondo elenco, che seguirà l'esposizione della Parte II di queste Lezioni.

1865 - 1. E.BELTRAMI : Risoluzione del problema: riportare i punti di una superficie sopra un piano, in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette. "Annali di Matematica" (1) 7, 1865, 185 - 204. Opere ,I, 262 - 280.

1868 - 2 : E. BELTRAMI : Saggio di interpretazione della geometria non euclidea."Giornale di Matematiche" 6, 1868 , 284 - 312. Opere, I, 374 - 405.

3 . E. BELTRAMI: Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante."Annali di Matematica" (2) 2, 1868 - 69 , 232 - 255 . Opere, I, 406 - 429.

1869 - 4. U.DINI: Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un'altra . "Annali di Matematica" (2) 3 , 1869-70 , 269-293.

1871 - 5. L. SCHLÄFLI : Nota alla Memoria del sig. Beltrami, "Sugli spazi di curvatura costante". Ibid. (2) 5,1871 - 73 , 178 - 193.

1871 - 6. F.KLEIN : Ueber die sogenannte nicht - euklidische Geometrie. "Mathem. Annalen " 4,1871, 573 - 625 ; 6, 1873, 112 - 145 : Gesammelte mathem. Abhandlungen , Berlin,1921,I,254 -305, 311-343.

1872 - 7 - F.KLEIN : Ueber einen Satz aus der Analysis situs ." Göttinger Nachrichten" Nr.14, 1872; Gesamm. Mathem. Abhandlungen I, 306 - 310.

1886 - 8 . F. SCHUR : Ueber den Zusammenhang der Räume constanten Riemann' schen Krümmungsmasses mit den projektinen Räumen."Mathem. Annalen " 27,1886, 537 - 567.

1921 - 9 - H.WEYL : Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung. "Göttinger Nachrichten", 1921, 99-112.

10 - G. HERGLOTZ : Zur Riemannschen Metrik. "Leipziger Berichte" 73, 1921, 215 - 225.

1922 - 11 - L.P.EISENHART, O.VEBLEN: The Riemann geometry and its generalization. " Proceedings National Acad. of Sciences of the U.S.A." 8,1922, 19-23.

12 - O.VEBLEN: Normal coördinates for the geometry of paths. Ibid. 192-197.

13 - L.P. EISENHART: Spaces with corresponding paths. Ibid. 233 - 238.

14 - O.VEBLEN: Projective and affine geometry of paths. Ibid. 347 - 350.

1923 - 15 - O.VEBLEN , T.Y.THOMAS: The geometry of paths. "Transactions Amer. Mathem. Society", 25, 1923, 551 - 608.

16 - H.WEYL : Mathematische Analyse des Raumproblems. Berlin, Springer 1923.

1924 - 17 - É.CARTAN : Sur les variétés à connexion projective , "Bulletin Soc. Mathém. de France" 52,1924, 205-241; o "Selecta", Paris 1939, 165-201.

1924 - 18 - J.A.SCHOUTEN : Der Ricci-Kalkül. Berlin Springer 1924.

19 - L.P. EISENHART : Geometries of paths for which the equations of the paths admit a quadratic first integral. " Transactions Amer. Mathem. Society " 26,1924, 378 - 384.

1925 - 20 .T.Y.THOMAS: On the projective and equiprojective geometries of paths. " Proceedings Nation. Acad." 11, 1925, 199 - 203.

21. O.VEBLEN. J.M.THOMAS: Projective normal coördinates for the geometry of paths. Ibid. 204 - 207.

22. J.M.THOMAS: Note on the projective geometry of paths. Ibid. 207 - 209.

23. T.Y. THOMAS : Note on the projective geometry of paths. "Bulletin Amer. Mathem.Society" 31,1925, 318 - 322.

1925 . 24 - T.Y.THOMAS : Announcement of a projective theory of affinely connected manifolds. "Proceedings Nation. Acad." 11,1925 , 588-589.

1926 . 25 - J.M.THOMAS : On normal coördinates in the geometry of paths. Ibid.12,1926, 58 - 63.

26 - J.M. THOMAS : First integrals in the geometry of paths. Ibid. 117 - 124.

27 - O. VEBLEN. J.M.THOMAS . Projective invariants of affine geometry of paths."Annals of Mathematics " (2) 27, 1926 , 279 - 296.

28 - É.CARTAN : L'axiome du plan et la géométrie différentielle métrique. " In memoriam N.J. Lobačevski " II, 1926, Kasan, 9 p.

29 - L.P. EISENHART: Geometries of paths for which the equations of the paths admit n(n+1)/2 independent linear first integrals."Transactions Amer. Math. Soc." 28,1926 , 330 - 338.

30 - T.Y. THOMAS : A projective theory of affinely connected manipolds. "Mathem. Zeitschrift" 25, 1926, 723 - 733.

1927 - 31 - T.Y.THOMAS : The replacement theorem and related questions in the projective geometry of paths. " Annals of Mathem." (2) 28, 1927, 549-561.

1927 - 32 - L.P.EISENHART , M.S.KNEBELMAN: Displacements in a geometry of paths which carry paths into paths."Procedings Nation. Acad." 13,1927, 38 - 42.

33 - M.S. KNEBELMAN : Groups of collineations in a space of paths. Ibid. 396 - 400.

34 - L.P. EISENHART : Non-Riemannian Geometry. "Amer. Mathem. Society Colloquium Publications " VIII, New York, 1927.

35 - E.BOMPIANI: L'intorno del 2° ordine e i sistemi pluriassiali di una superficie qualsiasi. "Memorie R.Accad. Bologna ". (8) 4, 1926-27 , 15-19.

36 - E.BOMPIANI : Alcune idee generali per lo studio differenziale delle varietà:"Rendiconti R.Accad. Lincei" (6) 5, 1927 - 383-389.

37 - E.BORTOLOTTI : Sistemi assiali e connessioni nelle V_n. Ibid. 390 - 395.

38 - V.HLAVATY; Sur les déplacements isohodoïques ."L'Enseignement Mathématique " 26,1927 , 84 - 97.

1928 - 39 - V.HLAVATY : Bemerkung zur Arbeit von Herrn T.Y. Thomas: A projective theory of affinely connected manifolds. "Mathem.Zeitschrift" 28,1928, 142-146.

40 - O. VEBLEN: Projective tensors and connections."Proced. Nation. Acad." 14,1928, 154-166.

41 - H.P.ROBERTSON: Note on projective coördinates. Ibid. 153 - 154.

42 - J.DOUGLAS : The general geometry of paths. "Annals of Mathematics" (2) 29,1928,143-168.

43 - M.S.KNEBELMEN: Collineations of projectinely related affine connections. Ibid. 389-394.

44 - T.Y.THOMAS :Concerning the $^{*}G$ group of transformations."Proceedings Nation Acad." 14, 1928, 728 - 734.

1929 - 45 - G.GOLAB : Einige projektive Eigenschaften der affinen Geometrie. "Comptes Rendus du premier Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves", Warszawa 1929, 339-340.

1930 - 46 - L.P. EISENHART: Projective normal coördinates. " Proceedings Nation . Acad." 16,1930, 731 - 740.

1930 - 47 - H.LEVY : Normal coördinates in the geometry of paths. Ibid. 492 - 496.

48 - E.BORTOLOTTI : Sulla geometria delle varietà a connessione affine. Teoria invariantiva delle trasformazioni che conservano il parallelismo "Annali di Matematica" (4),8,1930, 53 - 101.

49 - E.BORTOLOTTI : Connessioni proiettive. "Bollettino Unione Matem. Italiana" (1) 9,1930, 228 - 294 ; 10 ,1931, 28 - 34 e 83 - 90.

1931 - 50 - J.H.C.WHITEHEAD : The representation of of projective spaces. " Annals of Mathem." (2) 32, 1931,327 - 360.

1932 - 51 E.BORTOLOTTI: Sulle connessioni proiettive. "Rendiconti Circolo Matematico di Palermo" 56, 1932, 1-57.

52- E.BORTOLOTTI : Spazi proiettivamente piani. "Annali di Matematica" (4) 11, 1932, 111 - 134

1934 - 53 - D.J. STRUIK : Theory of linear connections. "Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete" III,2, Berlin, Springer 1934.

1935 - 54 - J.A.SCHOUTEN , D.J. STRUIK : Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie (2ª Ediz.), P.Noordhoff, Groningen - Batavia, B.I. (Algebra und Uebertragungslehre) 1935; B.II (Geometrie) 1938.

55- T.Y.THOMAS: The differential invariants of generalized spaces. Cambridge, at the University Press,1935.

1936 - 56 - L.BERWALD : On the projective geometry of paths. "Annals of Mathem." (2) 37,1936, 879 - 898.

19 7 - 57 - J.HAANTJES: On the projective geometry of paths."Proceedings of the Edinburgh Mathem. Societ (2) 5, 1937, 103 - 115.

1938 - 58 - K.YANO : Les espaces à connexion projective et la géometrie projective des "paths"."Annales Scientifiques de l'Univers. de Jassy" 24, 1938, 395 - 464.

59 - SHIING - SHEN CHERN: On projective normal coordinates. "Annals of Mathem." (2) 39,1938, 165-171.

1940 -60- W.BLASCHKE : Ein Satz von Herglotz zur Geometrie Riemanns."Annali di Matematica"(4) 19, 1940 , 251 - 256.

61 - E.BORTOLOTTI : Coordinate normali ed "estensioni" nella geometria degli spazi a connessione lineare."Rendiconti R. Accad. d'Italia" (7) 2,1940 - 41 , 106 - 116.

11. NOTE ALLA I° PARTE (*)

(1.a) - Indicazioni più ampie circa i precedenti storici della teoria "proiettiva" degli spazi a connessione affine si troveranno in 52, pp. 111 - 118. I lavori di BELTRAMI, SCHLÄFLI , KLEIN, SCHUR, CARTAN menzionati nel testo sono: 1,2,3;5;6,7;8;28. Ulteriori indicazioni bibliografiche ho dato nel lav. 52 ; qui mi limito ad aggiungere che nel campo della geometria differenziale classica (metrica) delle superficie il risultato fondamentale del BELTRAMI è stato completato da U.DINI(4 ;1869) il quale ha determinato tutte le superficie suscettibili di rappresentazioni geodetiche (tali cioè da conservare le geodetiche, nel significato ordinario) le une sulle altre; esse appartengono alla classe di LIOUVILLE.(Naturalmente s'intende escluso il caso banale, che la rappresentazione si riduca a una isometria, anche a meno d'una similitudine nello spazio). Nell'ordine d'idee dello SCHUR - il quale nel lav. già citato (8 ; 1886) ha considerato gli eventuali punti P di uno spazio riemanniano tali che per tutte le superficie geodetiche in P valga l'assioma del piano; e ha dimostrato che se nello spazio supposto esistono due tali punti, lo spazio è a curvatura costante, quindi proiettivamente piano — G.HERGLOTZ ha dimo-

---

(*) Ciascuna nota porta il n. del testo, cui si riferisce. I numeri sottolineati si riferiscono al precedente elenco bibliografico.

strato (10,1921) che l'esistenza di un punto P come quello ora detto porta la libera mobilità delle figure attorno a P. Questo teorema, del quale ha dato recentemente una dimostrazione molto semplice W.BLASCHKE (60 ;1940) si riconnette alla caratterizzazione degli spazi di curvatura costante quali spazi ove sussiste (attorno a ciascun punto) la libera mobilità delle figure. Ved. a questo proposito É.CARTAN: Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann; Paris, Gauthier - Villars 1928, pp.123 - 132.

(1.b) - Il lavoro di WEYL ampiamente accennato nel testo è 9 (1921). A questo hanno fatto seguito, a breve distanza, una nota di EISENHART e VEBLEN (11 ;1922) ove si dà inizio alla "geometria dei cammini" e poi altre due note di Eisenhart e di VEBLEN (13,14;1922)ove la questione delle proprietà "proiettive" dei cammini viene impostata, con alcuni primi risultati.

I lavori di T.Y.THOMAS di cui si fa cenno sono specialmente : 20 (1925) ove s'introducono i parametri Π^i_{jh} e 30 (1926; ved. anche 24 e 44) ove sono introdotte le $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ e se ne dà l'interpretazione in n+1 dimensioni.Sullo svolgimento storico(sino al 1930) della geometria proiettiva dei cammini ha dato ampie indicazioni nel lav. 49.

(2.a) - Circa la nozione di "spazio tangente" e a proposito delle (2.4) ved. É.CARTAN, Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée,"Annales de l'Ecole Norm. Superieure", Paris,(3) 40, 1923, 325-412; 41, 1924 , 1-25; 42,1925, 17-88 (spec. 40 ,pp. 361-362), e anche il libro del CARTAN cit.nella nota (1.a).

(2.b) - Il lav. del CARTAN ove è introdotto e sviluppata la teoria generale delle varietà a connessione proiettiva è 17 (1924); molte altre ricerche del CARTAN e di altri su questo argomento saranno indicate nel secondo elenco bibliografico.

(3.a) - Circa l'algebra e l'analisi tensoriale per spazi a connessione affine mi attengo in gran parte

al simbolismo adottato dallo SCHOUTEN: ved.spec.18, 1924; 54,1935, B.I. Sugli spazi a connessione affine ved. anche il lav. di CARTAN cit. in (2.a),la mia memoria 48 (1930) e i libri di EISENHART (34; 1927), di STRUIK (53; 1934) e di T.Y.THOMAS (55; 1935).

(4.a) - La derivazione covariante per tensori a più serie d'indici è stata introdotta sotto aspetti particolari da R.LAGRANGE (1922) e poi da B.L. van der WAERDEN (1927); nella sua accezione più generale (cui s'accenna nel testo) da me (ved. la nota:Spazi subordinati; equazioni di Gauss e Codazzi,"Bollettino Unione Matem. Italiana" (1) 6,1927,134-137; e anche per la bibliografia, la mia mem. Sulle varietà subordinate,"Rendiconti R.Istit. Lombardo" 65,1931, 441 - 463). Ved. anche 54 , ove la "D-Symbolik", cioè in sostanza l'operazione D in parola, è introdotta sotto aspetto particolare e per via assai differente (I, p.95).

(5.a) - Circa l'argomento esposto nel testo si vedano il lav. 20 (di T.Y.THOMAS, 1925; ove sono introdotte le Π^i_{jh} e viene definito il "parametro proiettivo" p, che nel testo è chiamato "parametro affine invariante) e i libri dello stesso T.Y.THOMAS (55) e di EISENHART (34; p.87 e seg.). Le vedute di WEYL sono esposte in 9 (1921) e anche in un'opera posteriore (16 ; 1923) dello stesso autore. Ved. anche 18 (Schouten) pp. 129-133; 53 (Struik) pp.25-26, 54,II, pp.176-199.

(6.a) - La via seguita per trovare le condizioni d'equivalenza proiettiva di due connessioni affini è sostanzialmente (a parte l'uso del simbolo $D_{h'}$)quella di VEBLEN e J.M.THOMAS in 27 (1926).L'espressione (6.18) pel tensore di Weyl è stata trovata da J.M.THOMAS (22,1925). Ved. anche 34 ,pp.100 e seg.

(6.b) - A proposito delle condizioni (6.28) o (6.27) perchè valgano per tre qualunque vettori ξ , η , ζ le (6.29), ved. 48 ,nota (^{64}) a pp.80-81 (ove è da correggere, nella terzultima riga di p.80, un evidente errore

di stampa: deve leggersi "Ponendo $\kappa = \mu$, $\sigma = \tau$ ").

(6.c) - Nei riguardi delle trasformazioni per le quali Π^i_{jh} è un tensore , ved. 27 ,pp. 283-284; e 34, p.109.

(7.a) - Le coordinate proiettive normali sono state introdotte da VEBLEN e J.M.THOMAS (21,1925); lo svolgimento seguito nel testo, a parte alcuni chiarimenti che mi sembrano abbastanza sostanziali, è quello dato nel libro di EISENHART (34 ,pp.110-116).L'osservazione che anche il parametro q è soggetto a trasformarsi mediante una trasformazione lineare fratta, la (7.4 non è fatta da EISENHART. Ved. anche la sua nota 46 (1930). Lo svolgimento rapido con cui sono ottenuti gli sviluppi (7.6) è quello introdotto nel mio lav. 48 (1930 : p.68) ove si costruiscono le coordinate affini normali per una connessione (generalmente) asimmetrica. Per una connessione simmetrica la costruzione era stata data dal VEBLEN ; 12, 1922. Ved. anche 15,1923, ove si introducono le "estensioni" di un tensore e i tensori normali affini; e 34 ,pp. 58-74, e 91-94, ove l'EISENHART espone i risultati di J.M.THOMAS(25,1926) circa una questione proposta dal VEBLEN (nel suo "Presidential Address": Remarks on the Fondations of Geometry ,"Bulletin Amer.Mathem. Society" 31,1925, 121-141;ved.p.131): cioè, sotto quali particolari condizioni per la connessione affine le coordinate normali affini subiscano, per effetto di un cambiamento proiettivo della connessione, una trasformazione lineare fratta.

Nei riguardi delle coordinate normali cito ancora il mio lavoro recente 61, 1940 :ove è data, ritengo, infine in modo geometrico del tutto chiaro ragion d'essere sia di queste coordinate che delle "estensioni" e dei tensori normali: se pure con riferimento a una definizione di queste ultime nozioni,che è differente da quella della Scuola americana. Un lavoro del BOMPIANI, tuttora in corso di pubblicazione (nei Rendiconti della R.Accademia d'Italia) svolge analoghe considerazioni nei riguardi delle estensioni e dei ten-

sori normali secondo VEBLEN e T.Y.THOMAS, e contiene molte nuove vedute e risultati notevoli.

(8.a) L'idea di un "parametro proiettivo" è dapprima esposta, ma senza effettivi sviluppi, da DOUGLAS (42,1928, pag.147); poi da WHITEHEAD (50,pp.338-341). A WHITEHEAD è dovuta l'osservazione che il sussistere delle (8.61),quali equazioni differenziali per le geodetiche e pel parametro u°, porta di necessità che π è sulle geodetiche parametro proiettivo.
Il BERWALD (56,1936,p.882) introduce l'equazione schwarziana (8.31) per la costruzione di π ; va però osservato (cfr. YANO, 58,1938, p.431) che il Berwald suppone senz'altro le Γ°_{jk} simmetriche rispetto ad j, k, il che dà luogo, al posto delle (8.32), alle formule di trasformazione

$$(8.32^*) \qquad \hat{\Gamma}^\circ_{jk} = \Gamma^\circ_{jk} + \frac{1}{\mathcal{M}}\left(\frac{1}{2}(\partial_k\varphi_j + \partial_j\varphi_k) - \varphi_j\varphi_k - \pi^2\Gamma^\ell_{jk}\right).$$

Ma queste, a differenza delle (8.32), non possono, almeno nelle ipotesi più generali circa le φ_j ,farsi rientrare in formule del tipo (8.46),come è necessario se si vuole poter identificare l'ente rappresentato dalle $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ con una "connessione proiettiva" nel senso di Cartan. Per questo ho modificato la costruzione di Berwald, sostanzialmente dello stesso modo seguito, pure partendo da assai diverse considerazioni, da K.YANO nel lavoro già citato (58): interessante studio comparativo sulle vedute e i risultati di CARTAN, di T.Y. THOMAS, di BERWALD di altri sulle connessioni proiettive.

(8.b) - L'introduzione del parametro u° sulle geodetiche mediante la (8.56) od (8.57) è dovuta a BERWALD (56 ,p. 883); l'equazione differenziale del 2° ordine (8.60) che risulta per u° con l'eliminazione di σ si era però già presentata naturalmente per altra via, ad es. a WHITEHEAD (50 ,p.335) e a me (51 ,p. 31). Noterò incidentalmente che il BERWALD, a proposito del suo parametro proiettivo π ,dice (56 ,p. 879): "An analogous parameter on the geodesics....was used by Bortolotti ". In realtà il parametro τ da me introdotto è

proprio - a parte soltanto la diversa introduzione delle Γ^i_{jk} -la stessa cosa che π ,come ovviamente risulta da quanto ho esposto nel testo.

(9.a) - Nei riguardi dei tensori proiettivi ved. 40,1928 (VEBLEN); ove veramente il gruppo di trasformazioni lineari che sta a base della nozione è particolare, è quello che a noi risulta con le (9.32), con la condizione ulteriore $\mathcal{M} = 1$. E' interessante, se pure un po' artificioso, il procedimento seguito dal VEBLEN per arrivare a tale determinazione del gruppo, cioè delle $\vartheta^\lambda_{\lambda'}$. Egli osserva che, per ciascun valore della costante numerica N , le formule della più generale trasformazione delle coordinate curvilinee

$$(11.1) \qquad u^{i'} - u^i_o = f^{i'}(u^1 - u^1_o, \ldots, u^n - u^n_o)$$

si possono anche scrivere

$$(11.2) \qquad u^{i'} - u^i_o = \frac{f^{i'}\left(\frac{\Delta}{\Delta_o}\right)^N}{\left(\frac{\Delta}{\Delta_o}\right)^N}$$

col solito significato per Δ .Svolgendo in serie i due termini di questa frazione e limitando gli sviluppi ai termini di primo grado nelle $u^{i'} - u^{i'}_o$ si hanno formule di trasformazione lineare fratta

$$(11.3) \qquad u^{i'} - u^i_o = \frac{(\vartheta^{i'}_i)_o (u^i - u^i_o)}{\vartheta^{i'}_o + (\vartheta^{i'}_i)_o (u^i - u^i_o)} ,$$

ove le $\vartheta^\lambda_{\lambda'}$ sono proprio date dalle (9.32):ove sia posto $N = -\frac{1}{\mathcal{M}(n+1)}$. La condizione ulteriore, che quando la stessa trasformazione (11.1) sia lineare fratta la (11.3) coincida con essa, dà per $\mathcal{M}$ il valore $-\frac{1}{n+1}$,ci per $\mathcal{M}$ il valore 1.

La nozione generale di tensori proiettivi quale ne testo è accennata, è svolta ad es. in 51 ,pp. 11.12; ov

però, stando nell'ordine d'idee del Cartan, mi è possibile illustrarne già l'aspetto geometrico, che qui verrà chiarito nella Parte II.

(9.b) - La nozione di connessione proiettiva normale è introdotto dal CARTAN (17, pp.17-21) in modo non sostanzialmente diverso da quello qui seguito. La teoria di T.Y.THOMAS che vi si collega è svolta in 30,1926, con ulteriori sviluppi in 31, 1927 e in 44, 1928. (Un primo cenno è nel lav. 24, 1925). Vi si collegano molte altre ricerche (alcune delle quali occasionalmente indicherò nella II Parte): ved. ad es. HLAVATÝ, 39; WHITEHEAD, 50; HAANTJES, 57; YANO, lav. 58 già citato. Ved. anche EISENHART, 34, p. 103.

(9.c) - I sistemi 3-assiali introdotti dal BOMPIANI in 35, 1927; ved. anche 36, 1927 e la mia nota 37 dello stesso anno) sono così definiti: a ciascun punto della superficie σ viene associato un S_3 ("d'appoggio") non incidente lungo una retta al piano ivi tangente a σ; le linee del sistema 3-assiale hanno i piani osculatori incidenti lungo rette agli S_3 d'appoggio.

(9.d) - Alla geometria proiettiva degli spazi a connessione affine più o meno direttamente si riferiscono svariati lavori non menzionati sino ad ora: ad es. 23, 19, 26, 29; 32, 33, 43 (il contenuto di questi lavori, escluso l'ultimo, è illustrato nel libro 34 di Eisenhart), e ancora, 38, 45, 59: l'ultimo istituisce un raffronto fra le coordinate proiettive normali di VEBLEN e J.M.THOMAS, di cui si è detto al n.7, e quelle introdotte dal CARTAN, di cui avremo occasione di parlare.

PARTE II°

+.+.+.+.+.+.+.+.+.+.+.+.

GLI SPAZI A CONNESSIONE PROIETTIVA, SECONDO IL CARTAN

— . —

§.1

GENERALITA' . RIFERIMENTI, RAPPRESENTAZIONE ANALITICA DELLA CONNESSIONE PROIETTIVA

12.- Varietà in ambiente proiettivo; costruzione di una connessione proiettiva su di essa, passaggio al caso generale.

Prima di venire alla nozione più generale di spazio a connessione proiettiva (quale è stata sino ad ora soltanto accennata nell'Introduzione, n.2) premettiamo una particolare ma espressiva costruzione di connessioni proiettive su di una varietà X_n situata entro un ambiente proiettivo S_N a un numero opportunamente grande N di dimensioni.

Siano $z^\alpha (\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots = 0,1,\ldots,N)$ coordinate proiettive omogenee dei punti in S_N ; la varietà X_n sia definita entro S_N mediante le equazioni parametriche

$$z^\alpha = \overset{0}{z}{}^\alpha(u^1,\ldots,u^n) \tag{12.1}$$

ove $u^i (i,j,h,k,l = 1,2,\ldots,n)$ sono n parametri essenziali. In ciascun punto $\overset{0}{z}{}^\alpha$ della X_n lo spazio S_n tangente ad essa è determinato dal contenere il punto $\overset{0}{z}{}^\alpha$ insieme coi punti di coordinate

$$\overset{0}{B}{}^\alpha_i = \frac{\partial z^\alpha}{\partial u^i} , \tag{12.2}$$

le derivate intendendosi calcolate nel supposto punto. Posto per uniformità

$$\underset{0}{B}^{\alpha} = \underset{0}{z}^{\alpha} \tag{12.3}$$

potremo indicare insieme gli n+1 punti che determinano l' S_n tangente con la notazione $\underset{\lambda}{B}^{\alpha}$, ove $\lambda,\mu,\nu,\tau,\omega,\sigma = 0,1,\ldots,n$. Tali punti definiscono sull' S_n tangente un riferimento proiettivo locale, del quale essi sono i punti fondamentali : ogni punto dell' S_n medesimo ha in relazione al riferimento proiettivo dell'ambiente, quali coordinate, combinazioni lineari $B^{\alpha}x^{\lambda}$; i fattori x^{λ} sono le sue coordinate proiettive omogenee in relazione al riferimento locale. Questo naturalmente cambia sia per una trasformazione delle coordinate curvilinee u^{i} nella X_n ,

$$u^{i} = u^{i}(u^{1'}, u^{2'}, \ldots u^{n'}) \tag{12.4}$$

sia quando, come naturalmente è lecito, si alterino sulla X_n le coordinate $\underset{0}{z}^{\alpha}$ dei suoi punti per un comune fattore $\neq 0$, in generale funzione delle u^{i} :

$$\underset{0}{'z}^{\alpha} = \rho(u^{1} \ldots u^{n}) \cdot \underset{0}{z}^{\alpha}. \tag{12.5}$$

Supponiamo che insieme si eseguano le trasformazioni (12.4) e (12.5) .Le coordinate $\underset{\lambda'}{B}^{\alpha}$ dei nuovi punti fondamentali pel riferimento locale risultano

$$\underset{0'}{'B}^{\alpha} = \rho \underset{0}{B}^{\alpha}, \quad \underset{i'}{'B}^{\alpha} = \rho\left(\vartheta^{i}_{i'} \underset{i}{B}^{\alpha} + \vartheta^{0}_{i'} \underset{0}{B}^{\alpha}\right) \tag{12.6}$$

cioè anche

$$\underset{\lambda'}{'B}^{\alpha} = \rho \cdot \vartheta^{\lambda}_{\lambda'} \underset{\lambda}{B}^{\alpha} \tag{12.7}$$

ove abbiamo posto

$$\vartheta^{i}_{i'} = \frac{\partial u^{i}}{\partial u^{i'}}, \quad \vartheta^{0}_{i'} = \frac{\partial \log \rho}{\partial u^{i'}}; \quad \vartheta^{0}_{0'} = 1, \quad \vartheta^{i}_{0'} = 0 \tag{12.8}$$

(cfr. con le (8.41) e (9.32)). Se, in corrispondenza alla (12.5), anche pel punto generico $B^{\alpha}_{\lambda} x^{\lambda}$ dell' S_n tangente assumiamo quali nuovi valori delle sue coordinate in relazione al sistema di riferimento proiettivo dell'ambiente i prodotti $\varrho B^{\alpha}_{\lambda} x^{\lambda}$, potendosi d'altra parte le coordinate del medesimo punto esprimere anche quali combinazioni lineari $'B^{\alpha}_{\lambda'} x^{\lambda'}$, dovremo avere

$$(12.9) \qquad 'B^{\alpha}_{\lambda'} x^{\lambda'} = \varrho B^{\alpha}_{\lambda} x^{\lambda} ;$$

onde, tenute presenti le (12.7), risultano per le x^{λ} le formule di trasformazione

$$(12.10) \qquad x^{\lambda} = \vartheta^{\lambda}_{\lambda'} x^{\lambda'} \qquad \text{cioè} \quad x^{\lambda'} = \vartheta^{\lambda'}_{\lambda} x^{\lambda}$$

(indicandosi al solito con $\vartheta^{\lambda'}_{\lambda}$ gli elementi reciproci delle $\vartheta^{\lambda}_{\lambda'}$ nel loro determinante, che è $\neq 0$). S'intende bene che vi è nella (12.9) e quindi nelle (12.16) dell'arbitrario: in quanto le coordinate proiettive omogenee di un punto sono sempre determinate a meno d'un fattore $\neq 0$. Vorrà dire che le x^{λ}, oltrechè variabili secondo le (12.10) in conseguenza delle (12.4) e (12.5), dovranno sempre considerarsi definite a meno di un'arbitraria moltiplicazione per un fattore $\neq 0$:

$$(12.11) \qquad \bar{x}^{\lambda} = \sigma(u^1 \dots u^n) \cdot x^{\lambda} .$$

Questo andrà sempre tenuto presente.

Ciò premesso, definiamo una legge di rappresentazione proiettiva dello spazio π, tangente nel punto generico $P(u^i)$ alla X_n sullo spazio tangente π^* alla X_n nel punto infinitamente vicino $P^*(u^i + du^i)$, nel seguente modo: a ciascun punto P associamo uno spazio S_{N-n-1} non incidente al rispettivo spazio tangente, e intendiamo che la rappresentazione consista nella proiezione dei punti di π su π^* fatta da questo spazio S_{N-n-1}. Vogliamo ottenere la rappresentazione analitica di questa prospettività; per questo introduciamo $N-n$ punti indipendenti C^{α}_{z}, ove $z, s, t, p, q = 1, 2, \dots N-n$, situati nello spazio S_{N-n-1} e tali quindi da determinarlo. Al variare di P cioè delle u^i le C^{α}_{z} saranno da intendersi

funzioni delle ω^i ; tali che il determinante Δ delle B^α_λ, C^α_ξ si mantenga sempre $\neq 0$. Naturalmente le C^α_ξ potranno variare senza che gli spazi S_{N-p-1} cambino; la più generale di queste trasformazioni sarà:

$$C'^\alpha_{\xi'} = h^\xi_{\xi'}\, C^\alpha_\xi \,, \tag{12.12}$$

ove le $h^\xi_{\xi'}$ potranno supporsi, in generale, funzioni delle ω^i, tali soltanto che sia $|h^\xi_{\xi'}| \neq 0$. Le (12.12) comprendono in particolare i mutamenti delle coordinate dei singoli punti C^α_ξ per un comune fattore.

Indichiamo con B^λ_α, C^λ_α gli elementi reciproci delle B^α_λ, C^α_ξ nel determinante Δ formato dalle coordinate (in S_N) di questi N + 1 punti; avendosi, naturalmente

$$B^\lambda_\alpha B^\alpha_\mu = \delta^\lambda_\mu,\ B^\lambda_\alpha C^\alpha_\xi = 0\ ;\quad C^\xi_\alpha B^\alpha_\mu = 0,\ C^\xi_\alpha C^\alpha_\eta = \delta^\xi_\eta \tag{12.13}$$

per ciascun valore di λ le B^λ_α sono in S_N coordinate dell'iperpiano che contiene tutti i punti C^α_ξ e tutti i punti B^α_μ per $\mu \neq \lambda$;le C^ξ_α sono coordinate dell'iperpiano che contiene tutti i punti B^α_μ e tutti i punti C^α_ξ per $\xi \neq \eta$.

E' immediata l'osservazione che per le trasformazioni (12.7),(12.12) si ha

$$B'^{\lambda'}_\alpha = \varrho^{-1} \vartheta^{\lambda'}_\lambda B^\lambda_\alpha \,, \tag{12.14}$$

$$C'^{\xi'}_\alpha = h^{\xi'}_\xi C^\xi_\alpha \,, \tag{12.15}$$

ove $h^{\xi'}_\xi$ sono gli elementi reciproci delle $h^\xi_{\xi'}$ in $|h^\xi_{\xi'}|$.

Secondo la nostra legge di rappresentazione i punti $B^\alpha_\lambda x^\lambda$ e $B^\alpha_\lambda x^\lambda + d(B^\alpha_\lambda x^\lambda)$, situati negli S_p π e π^*, debbono appartenere a uno stesso S_{N-1} insieme ai punti C^α_ξ : per questo occorre e basta che una conveniente combinazione lineare dei punti $B^\alpha_\lambda x^\lambda$ e $d(B^\alpha_\lambda x^\lambda)$ dia un punto che giace in ciascuno degli iperpiani B^λ_α, i quali determinano quale loro comune intersezione lo

spazio S_{N-n-1} dei punti C_2^α. Dunque ψ indicando un conveniente fattore:

$$(12.16) \qquad \left(\psi B_\lambda^\alpha x^\lambda + d\left(B_\lambda^\alpha x^\lambda\right)\right) \dot{B}_\alpha^\mu = 0$$

cioè

$$(12.17) \qquad \psi x^\mu + d\dot{B}_\lambda^\alpha \cdot \dot{B}_\alpha^\mu x^\lambda + dx^\mu = 0 .$$

Posto

$$(12.18) \qquad \Gamma_{\lambda i}^\mu = \partial_i B_\lambda^\alpha \cdot \dot{B}_\alpha^\mu$$

le (12.17) possono scriversi:

$$(12.19) \qquad dx^\mu + \Gamma_{\lambda i}^\mu x^\lambda du^i = -\psi x^\mu .$$

Questa è la rappresentazione analitica cercata; vi figura un elemento arbitrario ψ, ma in quanto le coordinate x^λ sono sempre determinate a meno della trasformazione (12.11) tale arbitrarietà è proprio nella natura delle cose. Se mediante le (12.11) nelle (12.19) vogliamo far figurare le $\bar{x}^\mu$ otteniamo

$$(12.20) \qquad d\bar{x}^\mu + \bar{\Gamma}_{\lambda i}^\mu \bar{x}^\lambda du^i = -\bar{\psi}\bar{x}^\mu$$

ove

$$(12.21) \qquad \bar{\psi} = \psi - d\log\sigma ;$$

cosicchè disponendo di σ potremo fare assumere alla quantità (infinitesimale) $\bar{\psi}$, nel punto e nella direzione supposti, un qualunque valore prefissato, ad es. lo zero.

La rappresentazione che abbiamo assegnato, analiticamente espressa dalle (12.19), definisce nella X_n, secondo Cartan, una connessione proiettiva: più in generale, su una X_n di S_N proiettivo si dà una connessione proiettiva, secondo Cartan, assegnando una legge di rappresentazione proiettiva (omografia) fra gli spazi tangen-

ti in due qualunque punti infinitamente vicini: tale che possa analiticamente esprimersi con formule del tipo (12.19), ove ψ è una quantità infinitesimale arbitraria, ad es. uno pfaffiano a coefficienti funzioni delle u^α ed eventualmente anche di altri parametri.

Vediamo come si comportano, nel nostro caso, le $\Gamma^{\mu}_{\lambda i}$ per effetto di trasformazioni (12.4), (12.5) delle coordinate curvilinee e del fattore d'omogeneità delle z^α_o: inteso che alle x^λ non venga data altra variazione che quella, (12.10), che ad esse compete in conseguenza delle (12.4) e (12.5) medesime.

Abbiamo in forza delle (12.18):

$$\Gamma^{\mu'}_{\lambda' i'} = B^{\mu'}_{\alpha} \partial_{i'} B^{\alpha}_{\lambda'} = \Gamma^{\mu}_{\lambda i} \vartheta^{\lambda}_{\lambda'} \vartheta^{\mu'}_{\mu} \vartheta^{i}_{i'} + \partial_{i'} \vartheta^{\lambda}_{\lambda'} \cdot \vartheta^{\mu'}_{\lambda} + \delta^{\mu'}_{\lambda'} \partial_{i'} \log \varrho \; ; \tag{12.22}$$

cioè, tenute presenti le (12.8) e posto

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda o} = \delta^{\mu}_{\lambda} , \qquad \Gamma^{\mu'}_{\lambda' o'} = \delta^{\mu'}_{\lambda'} , \tag{12.23}$$

abbiamo:

$$\Gamma^{\mu'}_{\lambda' i'} = \Gamma^{\mu}_{\lambda \nu} \vartheta^{\lambda}_{\lambda'} \vartheta^{\nu}_{\nu'} \vartheta^{\mu'}_{\mu} + \partial_{i'} \vartheta^{\lambda}_{\lambda'} \cdot \vartheta^{\mu'}_{\lambda} \; ; \tag{12.24}$$

o ancora, tenendo conto che per le (12.23) $\Gamma^{\mu}_{\lambda o}$ è un tensore:

$$\Gamma^{\mu'}_{\lambda' \nu'} = \Gamma^{\mu}_{\lambda \nu} \vartheta^{\lambda}_{\lambda'} \vartheta^{\nu}_{\nu'} \vartheta^{\mu'}_{\mu} + \partial_{\nu'} \vartheta^{\lambda}_{\lambda'} \cdot \vartheta^{\mu'}_{\lambda} , \tag{12.25}$$

ove al solito (cfr. n.8 form. (8.47)) $\partial_{\nu'} = \delta^{i}_{\nu'} \partial_{i}$.

Ritroviamo dunque pei parametri $\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}$ della connessione proiettiva proprio le (8.46); nei confronti degli sviluppi esposti al n.8 va notato soltanto che ora ci risulta necessariamente eguale ad 1 il valore della costante $\mathcal{M}$ che con le (8.31) avevamo introdotto.

Effettivamente le (12.18) dànno anche, tenuto conto che $\partial_i B^{\alpha}_{o} = B^{\alpha}_{i}$:

$$\Gamma^{\mu}_{o i} = \partial_i B^{\alpha}_{o} \cdot B^{\mu}_{\alpha} = B^{\alpha}_{i} B^{\mu}_{\alpha} = \delta^{\mu}_{i} , \tag{12.26}$$

(Cfr. con le (8.40)).

Nelle formule (12.19), che rappresentano la legge di trasporto o di rappresentazione proiettiva della connessione, possiamo far figurare anche le $\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}$ anzichè le le $\Gamma^{\mu}_{\lambda i}$: per questo bisogna introdurre du° (cfr. n.8). Manifestamente potremo disporne arbitrariamente, e scrivere le (12.19) nella forma

$$dx^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}\, x^{\lambda} du^{\nu} = \Phi x^{\mu}, \tag{12.27}$$

ove abbiamo posto

$$\Phi = -\psi + du^{\circ} \; ; \tag{12.28}$$

l'arbitrarietà di Φ e di du° non avrà effetto nella rappresentazione dei punti ma soltanto sul fattore di proporzionalità delle loro coordinate omogenee x^{λ}. Anzi: non sarà restrittivo fissare a piacere nelle (12.27) il valore di Φ , porre ad es. $\Phi = 0$: e vediamo subito che, a condizione che per le (12.4) ,(12.5) du° s'intenda variare secondo la (8.67), cioè

$$du^{\circ} = du^{\circ\prime} + \vartheta^{\circ}_{i'} \cdot du^{i'}, \tag{12.29}$$

ove $\vartheta^{\circ}_{i'}$ è dato dalla seconda delle (12.8), scritte le formule della rappresentazione proiettiva infinitesimale data dalla connessione nella forma (12.27), Φ risulta invariante per le (12.4) e (12.5), o più esattamente per le (12.11). In forza di queste infatti le equazioni variate

$$dx^{\mu'} + \Gamma^{\mu'}_{\lambda' i'}\, x^{\lambda'} du^{i'} = \Phi' x^{\mu'} \tag{12.30}$$

si scrivono:

$$d(\vartheta^{\mu'}_{\mu} x^{\mu}) + \left(\Gamma^{\mu}_{\lambda i} x^{\lambda} \vartheta^{\mu'}_{\mu} \vartheta^{i}_{i'} du^{i'} + \Gamma^{\mu}_{\lambda 0} x^{\lambda} \vartheta^{\mu'}_{\mu} \vartheta^{i}_{i'} du^{i'}\right.$$
$$\left. + \Gamma^{\mu}_{\lambda 0} x^{\lambda} \vartheta^{\mu'}_{\mu} du^{\circ} + d\vartheta^{\mu}_{\lambda'} \cdot \vartheta^{\mu'}_{\mu} x^{\lambda'} = \Phi' \vartheta^{\mu'}_{\mu} x^{\mu} \; ; \right. \tag{12.31}$$

cioè moltiplicando per $\vartheta^{\nu}_{\mu'}$ e sommando, e tenendo presenti le (12.23):

(12.32) $$dx^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda_i} x^\lambda du^i + x^\nu\left(\vartheta^\circ_i du^i + du^\circ\right) = \Phi' x^\nu$$

o ancora

(12.33) $$dx^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\varrho} x^\lambda du^\varrho = x^\nu\left(\Phi' + du^\circ - du^{\circ\prime} - \vartheta^\circ_i du^{i'}\right)$$

Questo prova quanto volevamo: cioè che, a condizione che valgano le (12.29), si ha $\Phi' = \Phi$.
Ponendo $\Phi = 0$ non si fissa (nel punto variato, in relazione alla scelta fatta nel punto iniziale) la normalizzazione delle x^λ: ma la si subordina alla scelta di du°.

A proposito di du°: un'effettiva determinazione di questa espressione differenziale e anzi quale differenziale esatto (come qui risulta lecito) è la seguente: detta φ una qualunque funzione omogenea di grado 1 nelle coordinate $\overset{\circ}{x}{}^\alpha$ del punto che descrive la X_n basta porre

(12.34) $$u^\circ = -\log\varphi .$$

Che in effetto valga la (12.29) si verifica subito.

Lungo una qualunque curva della X_n, riferita a un parametro t, avremo la legge di trasporto dei punti definita dal sistema differenziale

(12.35) $$\frac{dx^\nu}{dt} + \Gamma^\nu_{\lambda\varrho} x^\lambda \frac{du^\varrho}{dt} = \chi x^\nu .$$

ove $\frac{du^\circ}{dt}$, χ sono funzioni di t, la seconda del tutto arbitraria (ad es. $\chi = 0$); la prima si potrà dare arbitrariamente in relazione a una scelta della normalizzazione delle $\overset{\circ}{x}{}^\alpha$, cioè dei sistemi proiettivi locali; ad es. mediante la (12.34).

Notiamo qui che i sistemi proiettivi locali $\overset{\circ}{B}{}^\alpha_\lambda$ sinora utilizzati hanno su ciascun spazio tangente, π, il vertice $\overset{\circ}{B}{}^\alpha$ nel punto di contatto rispettivo P; i vertici $\overset{\circ}{B}{}^\alpha_i$ sulle tangenti in P alle n linee coordinate del sistema curvilineo su X_n, mentre l'iperpiano fondamentale $x^\circ = 0$ non è legato al sistema curvilineo, va-

ria in corrispondenza alle trasformazioni (12.5) o, se si vuole, in relazione alla scelta di du°.

Possiamo naturalmente al luogo di un riferimento "olonomo" come quello ora detto valerci invece di riferimenti "anolonomi", così ottenuti: sui singoli spazi tangenti alla X_n prendendo in modo arbitrario sistemi di n+1 punti indipendenti D_λ^α come punti fondamentali. Si dovranno avere naturalmente formule di trasformazione lineare

$$\xi^\lambda = m^\lambda_{.\nu}\, x^\nu ; \quad x^\nu = m^{.\nu}_{\lambda}\, \xi^\lambda \tag{12.36}$$

se ξ^λ sono le corrispondenti coordinate proiettive locali dei punti negli spazi tangenti. Tenuto presente questo abbiamo subito per la legge di trasporto dei punti ancora formule del tipo (12.19); non conviene però (senza opportuna restrizione nella scelta dei riferimenti) scrivere formule del tipo (12.27), perchè non vi si potrebbe dare significato invariante.
Infatti la trasformazione sulle D_λ^α, e quindi sulle ξ^λ,

$$'D_{\lambda'}^{\alpha} = q^{\lambda}_{\lambda'} D_\lambda^\alpha \quad , \quad \xi^\lambda = q^\lambda_{\lambda'} \xi^{\lambda'} \tag{12.37}$$

ora non è comunque soggetta a restrizioni (salvo $|q^\lambda_{\lambda'}| \neq 0$): e in particolare non è legata al cambiamento delle coordinate curvilinee.

Diremo ove occorra A - riferimento l'insieme del riferimento curvilineo e dei sistemi D_λ^α negli spazi tangenti. La condizione, che il vertice D_o^α di ciascun sistema locale coincida col relativo punto di contatto dello spazio tangente dà luogo in particolare a quelli che diremo A_o - riferimenti. Le trasformazioni (12.27) corrispondenti dovranno naturalmente sottostare alla condizione

$$q^{i}_{o'} = 0 \qquad (\text{onde anche } q^{i'}_{o} = \tag{12.38}$$

Un'ulteriore restrizione che, come quella ora detta, intenderemo, salvo avviso contrario, sempre verificata nel seguito, è la seguente: che un'omografia, di significato

invariante pei cambiamenti delle coordinate curvilinee, faccia corrispondere le tangenti alle n linee coordinate $u^1, u^2, \ldots, u^n$ nel punto generico P, e la retta definita ponendo $du^1 = du^2 = \cdots = du^n$, alle rette che da $P \equiv D^\circ$ proiettano, ordinatamente, i punti fondamentali $D_1^\alpha, \ldots, D_n^\alpha$ del sistema proiettivo locale e il punto unità.

Tale omografia potrà rappresentarsi scrivendo

$$D_i^{[\alpha} D_o^{\beta]} = h_i^{\ j} B_j^{[\alpha} B_o^{\beta]} ; \tag{12.39}$$

ora se si cambiano, secondo le (12.37) i punti D_i^α, e insieme le coordinate curvilinee, le (12.39) divengono

$$D_{i'}^{[\alpha} D_{o'}^{\beta]} = h_{i'}^{\ j'} B_{j'}^{[\alpha} B_{o'}^{\beta]} ; \tag{12.40}$$

onde, per le (12.7) e (12.37)

$$q_{i'}^{i} q_{o'}^{o} h_i^{\ j} = \rho^2 h_{i'}^{\ j'} \vartheta_{j'}^{j} \tag{12.41}$$

e infine

$$\rho^2 h_{i'}^{\ j'} = h_i^{\ j} q_{i'}^{i} q_{o'}^{o} \vartheta_j^{j'} . \tag{12.42}$$

Ma noi vogliamo che l'omografia di coefficienti $h_i^{\ j}$ coincida con quella di coefficienti $h_{i'}^{\ j'}$: questo richiede che sia

$$q_{i'}^{i} = \tau \vartheta_{i'}^{i} , \tag{12.43}$$

ove τ è uno scalare $\neq 0$, funzione in generale delle u^i. Sostituendo nelle (12.37) abbiamo per queste - scrivendo, come ormai risulta lecito, λ, λ' anzichè $\underline{\lambda}$ e $\underline{\lambda'}$:

$$D_{o'}^{\alpha} = q_{o'}^{o} D_o^{\alpha}, \quad D_{i'}^{\alpha} = q_{i'}^{o} D_o^{\alpha} + \tau \vartheta_{i'}^{i} D_i^{\alpha} . \tag{12.44}$$

La condizione ulteriore che quando non cambi il riferimento curvilineo, cioè sia $\vartheta_{i'}^{i} = \delta_{i'}^{i}$, la (12.44) si riduca a una omologia speciale porta infine anche

$$q_{o'}^{o} = \tau , \tag{12.45}$$

cosicchè, scrivendo anche $\tau\,\vartheta_i^{\circ}$ al posto di g_{ii}°, potremo porre le (12.37) nella forma

$$(12.46)\qquad D_{\lambda}^{\alpha} = \tau\,\vartheta_{\lambda}^{\lambda'} D_{\lambda}^{\alpha}, \quad \xi^{\lambda} = \tau\,\vartheta_{\lambda'}^{\lambda}\,\xi^{\lambda'}.$$

Notiamo che l'ultima condizione vale a fissare il punto unità di ciascun riferimento locale in relazione a ciascuna scelta (compatibile con la condizione precedente) dei punti fondamentali: quando però in relazione a una determinata di queste scelte lo si sia preso ad arbitrio.

Diremo ove occorra B-riferimenti (o riferimenti semi-olonomi) quelli soddisfacenti alle condizioni ora dette, e B-trasformazioni le corrispondenti trasformazioni (12.46): notiamo che per $\tau = 1$ si hanno precisamente quelle trasformazioni che al n.8 si sono presentate e che al n.9 abbiamo poste a base della nozione di tensori proiettivi: su cui torneremo fra non molto.

Un caso particolare di B-riferimento si ha quando quella omografia di cui sopra ho accennato si riduce all'identità; cioè i punti fondamentali D^{α} sono presi proprio sulle tangenti alle n linee coordinate del sistema curvilineo e il punto unità sulla retta $du^1 = du^2 = \dots = du^n$. Potremo parlare allora di un $\mathcal{B}_1$-riferimento.

Con una ulteriore restrizione, di cui però non è agevole l'interpretazione geometrica, potremo passare dal B-riferimento D_{λ}^{α} al riferimento olonomo, o C-riferimento, $\mathcal{B}_{\lambda}^{\alpha}$. Questo è anzitutto, nel senso ora precisato un B-riferimento: pel quale però gli iperpiani fondamentali opposti ai vertici D_0^{α}, che indichiamo ora con $\mathcal{B}_0^{\alpha}$, degli (n+1)-edri di riferimento locali sono presi in modo opportuno. La loro costruzione, pel caso di cui ci occupiamo (di una $\mathcal{X}_n$ in $\mathcal{S}_N$ proiettivo) è questa: essi sono gli iperpiani di appartenenza dei punti derivati $\frac{\partial(\psi z^{\alpha})}{\partial u^{\circ}}$ in relazione a una qualunque scelta dello scalare $\psi(u^1, u^2, \dots, u^n)$ (non nullo). La costruzione non ha quell'aspetto geometrico che sarebbe desiderabile: un'avviamento a una interpretazione geometrica si può cercare utilizzando elementi introdotti da WHITEHEAD (1929) e da ČECH (1930); sui quali (se pure del tutto inessenziali pel seguito) non è forse inutile - in quanto vi è ancora qualche cosa di sostanziale da chiarire - richiamare

qui l'attenzione.

Sia, nell' S_n, $\Psi(z^0, z', \ldots, z^N)$ una funzione omogenea di grado 1 delle coordinate proiettive omogenee z^α del punto variabile. Essa determina una ipersuperficie

$$\Psi(z^0, z', \ldots, z^N) = 0 \tag{12.47}$$

in S_n (ma non viceversa, perchè data la ipersuperficie, la funzione Ψ naturalmente è determinata solo a meno di un fattore $\neq 0$, che potrà anche essere funzione delle z^α, omogeneo di grado zero).

Secondo ČECH (che ha usato l'ente che ora diremo, con questa denominazione, pel caso $N=2$) e WHITEHEAD (che se n'è valso(*) pel caso in cui N è qualunque) si dice iperpiano polare di un punto z^α rispetto alla (12.47) - e sarebbe più esatto dire: rispetto alla Ψ - l'iperpiano di equazione

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z^\alpha} z^\alpha = 0, \tag{12.48}$$

ove intendiamo che le derivate siano calcolate nel punto z^α. Si estende insomma la nozione di iperpiano polare di un punto rispetto ad una ipersuperficie algebrica al caso generale, ma in certo senso l'estensione è illusoria, in quanto la definizione non ha carattere invariante per le trasformazioni

$$\hat{\Psi} = \varphi(z^0, \ldots, z^N)\Psi, \tag{12.49}$$

ove $\varphi(z^0, \ldots, z^N)$ sia omogenea di grado zero.

Una costruzione effettiva, ma naturalmente legata ad elementi analitici e non geometrici, per quegli iperpiani polari, è stata indicata dal ČECH: possiamo considerare la (12.47) come la sezione con l' S_N $z^{N+1} = 0$ di una varietà X_N di S_{N+1}, ove le $z^0, z', \ldots z^N, z^{N+1}$ siano coordinate proiettive omogenee dei punti: data dall'equazione

$$\Psi(z^0, z', \ldots, z^N) = h z^{N+1} \qquad h \neq 0. \tag{12.50}$$

Questa è in S_{N+1} una ipersuperficie che in ciascun punto

(*) senza far uso di speciale denominazione

della (12.47) è tangente alla generatrice del cono, proiettante tale varietà dal punto O, di coordinate 00...01 (Ma, s'intende bene, tale condizione non la determina).

Congiungendo ciascun punto $(x_0^\alpha, 0)$ della (12.47) con O si ha una retta che incontra l'ipersuperficie (12.50) in un punto ben determinato, di coordinate z_0^α e $z_0^{N+1} = \frac{1}{h} \psi(z_0^0, \dots, z_0^N)$.

L' S_N tangente in questo punto alla X_n detta sopra è rappresentato dall'equazione

$$\frac{\partial \psi}{\partial z_0^\alpha} z^\alpha = h z^{N+1} \quad ; \tag{12.51}$$

la sua sezione con l' S_N $z^{N+1} = 0$ è proprio l' S_{N-1} dato dalla (12.48). Ecco dunque la costruzione dell'iperpiano polare del punto z_0^α di S_N rispetto alla (12.47): esso è l'intersezione con l' S_N $z^{N+1} = 0$ dell' S_N tangente alla X_n di equazione (12.50) nel punto di questa che è allineato col punto supposto e col punto fisso O.

Si vede bene come manchi, per fare di questa costruzione analitica un vero e proprio processo geometrico, qualche cosa di sostanziale; pure, malgrado l'indeterminatezza insita nella costruzione di quegli "iperpiani polari" e l'arbitrarietà nel formare l'equazione (12.50), facilmente ne possiamo ricavare la più generale costruzione degli iperpiani $x^0 = 0$ per un C-riferimento. Basterà prendere $\psi(z^0; z', \dots, z^N)$ omogenea di grado 1 e tale che per $z^\alpha = z_0^\alpha(u', \dots, u^n)$ si riduca a $\frac{1}{\psi}$. La sezione dell'iperpiano polare (nel senso sopra precisato) di un qualunque punto z_0^α della X_n rispetto alla corrispondente ipersuperficie (12.47) con l' S_n tangente in z_0^α alla X_n è l' S_{n-1} rappresentato nell' S_n dall'equazione

$$\frac{\partial \psi}{\partial z_0^\alpha} D_\lambda^\alpha x^\lambda = 0 \quad , \text{ cioè } \frac{\partial \psi}{\partial u^i} x^i + \psi x^0 = 0, \tag{12.52}$$

o ancora, sulla X_n ψ riducendosi ad $\frac{1}{\psi}$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u^i} x^i - \psi x^0 = 0. \tag{12.53}$$

Ora questo è precisamente l' S_{n-1} di appartenenza dei punti $\frac{\partial(\psi \xi^{\alpha})}{\partial u^i}$. Dunque: gli iperpiani $x^0 = 0$ di un C-riferimento su una X_n di S_N sono le intersezioni degli S_n tangenti alla X_n con gli S_{N-1} polari dei rispettivi punti di contatto rispetto a una conveniente ipersuperficie (12.47).

A parte questa costruzione: caratteristica fondamentale per un C-riferimento è la corrispondente trasformazione delle coordinate proiettive locali (C-trasformazione): per la quale i coefficienti $\vartheta^{\lambda}_{\lambda'}$ sono dati dalle (12.8); e quindi sono le derivate di certe n+1 variabili u^{λ} rispetto ad n+1 nuove variabili $u^{\lambda'}$.

Un sottotipo del riferimento olonomo, (o C-riferimento), è il D-riferimento, la cui caratteristica fondamentale è la seguente: mentre per un C-riferimento il modo di variare dell'iperpiano fondamentale $\overset{\circ}{B}_{\alpha}$ ($x^0 = 0$) è in generale del tutto indipendente dal variare delle coordinate curvilinee, per un D-riferimento esso è legato alla trasformazione sulle coordinate curvilinee: le corrispondenti trasformazioni (D-trasformazioni) sono proprio quelle che abbiamo incontrato al n.9, caratterizzate dalle (9.30); a meno d'un fattore numerico le $\vartheta^{\circ}_{i'}$ sono le derivate di $\log \Delta$, ove al solito è $\Delta = \frac{\partial(u^1, \ldots, u^n)}{\partial(u^{1'}, \ldots, u^{n'})}$.

Come vedremo si presenta un D-riferimento nella trattazione generale delle connessioni proiettive, secondo il CARTAN.

13.- Spazi proiettivi tangenti a una X_n, a sè considerata. Tensori proiettivi; connessione proiettiva in generale, derivazione proiettiva.

Fino ad ora ci riferivamo al caso di una varietà considerata entro un ambiente proiettivo S_n: caso su cui avremo occasione di tornare.

Ma non è questo il caso più interessante, nei riguardi della teoria delle connessioni proiettive: il vero scopo della teoria, come ho già accennato (n.2) non è infatti lo studio delle varietà in ambiente proiettivo, che può svolgersi ed è stato già tanto am-

piamente svolto senza alcun bisogno della nozione di "connessione". Si tratta piuttosto, dicevamo, di costruire una "geometria proiettiva curva" in una varietà a sè considerata; la quale, dunque, costituirà essa stessa l'ambiente della geometria.

Prima osservazione è che, in quanto una trasformazione qualunque

$$u^{i} = u^{i}(u^{1'}, u^{2'}, \ldots, u^{n'}) \tag{13.1}$$

sulle coordinate curvilinee in una X_n induce una trasformazione lineare sui differenziali,

$$du^{i} = \vartheta^{i}_{i'} du^{i'} \qquad \left(\vartheta^{i'}_{i'} = \frac{\partial u^{i}}{\partial u^{i'}}\right) \tag{13.2}$$

lo spazio delle direzioni di una X_n in un suo qualunque punto (regolare) va riguardato come uno spazio proiettivo, nel quale le du^i sono coordinate omogenee. Ma quelle direzioni possono bene pensarsi come le direzioni uscenti da un punto P di un effettivo spazio puntuale proiettivo ad n dimensioni (S_n). Più concretamente: possiamo porre una corrispondenza omografica fra le direzioni di una X_n in un punto u^i e le direzioni (o, fa lo stesso, le rette) di un S_n che escono da un punto P: e pensare poi identificati il punto (u^i) col punto P, e ciascuna direzione della X_n in (u^i) con la corrispondente direzione dell' S_n uscente da P.

S'intende bene che, inquanto la X_n viene considerata in sè e non pensata entro un ambiente proiettivo più esteso, lo spazio S_n così associato a ciascun punto nella X_n non ha una posizione: è un ente soltanto pensato. Ma ad ogni modo, visto che lo riguardiamo come contenente tutte le direzioni della X_n in (u^i), cioè l'intorno del 1° ordine di questo punto sulla X_n, appare naturale chiamarlo "spazio proiettivo tangente" alla X_n nel supposto punto; questo se ne dirà, ove occorra, il punto di contatto.

L'ente che viene preso in considerazione è dunque un X_n ai cui punti sono associati degli spazi proiettivi, che interpretiamo come spazi tangenti; cosicchè avrà un

significato il localizzare, su ciascuno di questi spazi, tangente in un punto P, gli elementi lineari (del 1°ordine) della X_n uscenti da P.

Fissiamo per l'ente ora detto, che per brevità di linguaggio indicheremo, ove occorra, con $\underset{p}{X}_n$, un riferimento (anolonomo) del tipo più generale (o A-riferimento) assegnando sulla varietà un sistema di coordinate curvilinee u^i e sui singoli spazi tangenti, dei sistemi di riferimento proiettivi: indichiamo ancora con x^λ le coordinate proiettive omogenee dei punti degli spazi tangenti rispetto ai sistemi ora detti. In particolare il riferimento potrà ridursi ad uno dei tipi particolari di cui si è detto al n.prec.: la cui caratterizzazione conserva significato anche per una X_n a sè considerata, a parte quanto s'è accennato pei riferimenti olonomi (C-riferimenti), che ora intenderemo soggetti soltanto a trasformarsi con quelle particolari trasformazioni già precisate (C-trasformazioni)

$$(13.3)\qquad x^\lambda = \vartheta^\lambda_{\lambda'} x^{\lambda'}, \text{ con } \vartheta^{i}_{i'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}},\ \vartheta^{\circ}_{i'} = \frac{\partial \log \varrho}{\partial u^{i'}};\ \vartheta^{i}_{o'} = 0,\ \vartheta^{\circ}_{o'} = 1.$$

Assegniamo, secondo il CARTAN, alla $\underset{p}{X}_n$ una connessione proiettiva dando una legge di rappresentazione proiettiva (omografica) dello spazio tangente in un punto qualunque u^i su ciascuno degli spazi tangenti nei punti infinitamente vicini $u^i + du^i$ della varietà: legge che potremo sempre rappresentare con formule del tipo

$$(13.4)\qquad dx^\lambda + \omega^\lambda_\mu x^\mu = 0$$

ove le ω^λ_μ sono quantità, funzioni delle u^i e du^i, infinitesime con le du^i; poniamo però la condizione ulteriore che i coefficienti dell'omografia rispetto alle du^i siano lineari, cioè che le ω^λ_μ siano forme pfaffiane nelle du^i:

$$(13.5)\qquad \omega^\lambda_\mu = \Lambda^\lambda_{\mu i}\, du^i.$$

La definizione può porsi, ovviamente, anche sotto una forma finita, dicendo che è data alla $\underset{p}{X}_n$ una connessione proiettiva quando è assegnata, fra gli spazi proiettivi tangenti in due punti qualunque di una linea Γ, $u^i = u^i(t)$,

della varietà una rappresentazione proiettiva, ottenibile mediante integrazione, lungo la linea Γ, di un sistema differenziale del tipo

$$\frac{dx^\lambda}{dt} + \Lambda^\lambda_{\mu i}\, x^\mu \frac{du^i}{dt} = 0, \tag{13.6}$$

le $\Lambda^\lambda_{\mu i}$ essendo funzioni qualunque del posto in X_n cioè delle u^i.

Le $\Lambda^\lambda_{\mu i}$, che diremo parametri misti della connessione proiettiva (in quanto hanno indici di due serie distinte) determinano la connessione, ma non ne vengono determinate infatti le x^λ sono coordinate omogenee, e quindi, posto

$$\hat{x}^\lambda = \rho x^\lambda \tag{13.7}$$

ove ρ è una funzione di t arbitrariamente presa sulla supposta linea (purchè sempre $\neq 0$), le x^λ e $\hat{x}^\lambda$ sono coordinate dello stesso punto. Ora: cerchiamo sotto quali condizioni un secondo sistema differenziale della forma (13.6)

$$\frac{d\hat{x}^\lambda}{dt} + \hat{\Lambda}^\lambda_{\mu i}\, \hat{x}^\mu du^i = 0 \tag{13.8}$$

potrà, mediante una conveniente trasformazione (13.7), venire identificato col sistema (13.6). Tenuta presente la (13.7), il confronto delle (13.6) e (13.8) ci dà subito

$$\hat{\Lambda}^\lambda_{\mu i}\, du^i = \Lambda^\lambda_{\mu i}\, du^i - \delta^\lambda_\mu\, d\log\rho; \tag{13.9}$$

di qui ricaviamo subito

$$d\log\rho = -\frac{1}{n+1}\left(\hat{\Lambda}^\nu_{\nu i} - \Lambda^\nu_{\nu i}\right) du^i, \tag{13.10}$$

e sostituendo nella (13.9) otteniamo che dovrà essere

$$\hat{\Lambda}^\lambda_{\mu i} - \frac{1}{n+1}\delta^\lambda_\mu \hat{\Lambda}^\nu_{\nu i} = \Lambda^\lambda_{\mu i} - \frac{1}{n+1}\delta^\lambda_\mu \Lambda^\nu_{\nu i} \tag{13.11}$$

o anche

$$\hat{\Lambda}^\lambda_{\mu i} = \Lambda^\lambda_{\mu i} + \delta^\lambda_\mu \psi_i \tag{13.12}$$

ove abbiamo posto

$$\varphi_i = \frac{1}{n+1}\left(\hat{\Lambda}^{\nu}_{\nu i} - \Lambda^{\nu}_{\nu i}\right). \tag{13.13}$$

E' immediata d'altra parte l'osservazione che le (13.12), in cui le φ_i siano date ad arbitrio (in relazione al presupposto riferimento: componenti di un vettore affine covariante in relazione alle trasformazioni del riferimento, come vedremo fra poco) portano come conseguenza le (13.13) e quindi le (13.11). Dunque sono le (13.12), o le equivalenti (13.11), le condizioni necessarie e sufficienti perchè i parametri $\Lambda^{\lambda}_{\mu i}$, $\hat{\Lambda}^{\lambda}_{\mu i}$ diano luogo alla medesima connessione; il valore del fattore ρ da porre nelle (13.7) per ottenere la trasformazione che muta l'uno nell'altra i corrispondenti sistemi (13.6) e (13.8) risulta per le (13.10) e (13.13) dato da

$$\rho = c\, e^{-\int_{\Gamma} \varphi_i\, du^i} \tag{13.14}$$

ove c è una costante $\neq 0$ e l'integrale s'intende calcolato lungo la supposta linea Γ da un punto fissato su questa sino al punto che si considera.

Era a priori ben prevedibile che le quantità

$$L^{\lambda}_{\mu i} = \Lambda^{\lambda}_{\mu i} - \frac{1}{n+1}\delta^{\lambda}_{\mu}\Lambda^{\nu}_{\nu i} \tag{13.15}$$

fossero, a differenza delle $\Lambda^{\lambda}_{\mu i}$, (come mostrano le (13.11) determinate dalla connessione, in relazione a ciascun riferimento. E infatti se scriviamo le formule effettive della rappresentazione omografica (13.6) fra due spazi tangenti infinitamente vicini,

$$^{*}x^{\lambda} \equiv x^{\lambda} - \Lambda^{\lambda}_{\mu i}\, x^{\mu} du^i \tag{13.16}$$

vediamo che il determinante D di questa trasformazione vale, a meno di quantità infinitesime d'ordine superiore al primo

$$D = 1 - \Lambda^{\nu}_{\nu i}\, du^i ; \tag{13.17}$$

e dunque, sempre trascurando gli infinitesimi d'ordine

superiore al primo

$$D^{\frac{1}{n+1}} = 1 - \frac{1}{n+1} \Lambda^{\nu}_{\nu i} du^i \tag{13.18}$$

cosicchè infine normalizzando, come è lecito, i coefficienti $\delta^{\lambda}_{\mu} - \Lambda^{\lambda}_{\mu i} du^i$ delle omografie (13.16) col dividerli per $D^{\frac{1}{n+1}}$ si ha precisamente, sempre nello stesso ordine di approssimazione

$$\frac{\delta^{\lambda}_{\mu} - \Lambda^{\nu}_{\nu j} du^i}{1 - \frac{1}{n+1} \Lambda^{\nu}_{\nu j} du^i} = \delta^{\lambda}_{\mu} - L^{\lambda}_{\mu i} du^i. \tag{13.19}$$

Le $L^{\lambda}_{\mu i}$ sono dunque una sorta di parametri "normalizzati "della connessione proiettiva: però riserberemo tale denominazione a un'altra specie di parametri che introdurremo più innanzi.

Torniamo a quanto abbiamo stabilito poco sopra nei riguardi delle $\Lambda^{\lambda}_{\mu i}$.

Il risultato ottenuto si può manifestamente enunciare anche sotto quest'altra forma: il sistema differenziale

$$\frac{dx^{\lambda}}{dt} + \Lambda^{\lambda}_{\mu i} x^{\mu} \frac{du^i}{dt} = \Phi(t)\, x^{\lambda} \tag{13.20}$$

rappresenta, alla stessa stregua del sistema(13.6) che se ne ha ponendo $\Phi(t) = 0$ - mentre nelle (13.20) $\Phi(t)$ sarà una funzione scelta su ciascuna linea in modo arbitrario - sempre la legge di trasporto dei punti della connessione $\Lambda^{\lambda}_{\mu i}$. E infatti basta porre nelle (13.7)

$$\varrho = k\, e^{-\int_{t_0}^{t} \Phi(t)\, dt} \qquad (k \text{ cost.} \neq 0) \tag{13.21}$$

perchè, corrispondentemente, le (13.20) si mutino in

$$\frac{d\hat{x}^{\lambda}}{dt} + \Lambda^{\lambda}_{\mu i} \hat{x}^{\mu} \frac{du^i}{dt} = 0. \tag{13.22}$$

Vediamo ora come dovranno comportarsi per un mutamento qualunque del riferimento, cioè per trasformazioni indipendenti

$$u^i = u^i(u^{1'}, u^{2'}, \ldots, u^{n'}) \tag{13.23}$$

e

$$x^{\lambda} = q^{\lambda}_{\lambda'} x^{\lambda'} \tag{13.24}$$

delle coordinate curvilinee nella X_n e delle coordinate proiettive sugli spazi tangenti, i parametri $\Lambda^{\lambda}_{\mu i}$ perchè le (13.6) abbiano significato invariante.

In forza delle (13.23) e (13.24), inteso al solito che sia $\partial^{i}_{i'} = \frac{\partial u^{i}}{\partial u^{i'}}$ e $q^{\lambda}_{\lambda'} q^{\mu'}_{\lambda} = \delta^{\mu'}_{\lambda'}$ le (13.6) divengono

$$q^{\lambda}_{\lambda'} \frac{dx^{\lambda'}}{dt} + \partial_{i'} q^{\lambda}_{\lambda'} \cdot x^{\lambda'} \frac{du^{i'}}{dt} + \Lambda^{\lambda}_{\mu i} q^{\mu}_{\mu'} \partial^{i}_{i'} x^{\mu'} \frac{du^{i'}}{dt} = 0 ; \tag{13.25}$$

onde moltiplicando per $q^{\nu'}_{\lambda}$ e sommando

$$\frac{dx^{\nu'}}{dt} + \left(\Lambda^{\nu}_{\mu i} q^{\mu}_{\mu'} q^{\nu'}_{\nu} \partial^{i}_{i'} + \partial_{i'} q^{\lambda}_{\mu'} \cdot q^{\nu'}_{\lambda} \right) x^{\mu'} \frac{du^{i'}}{dt} = 0. \tag{13.26}$$

Queste potranno scriversi nella forma

$$\frac{du^{\nu'}}{dt} + \Lambda^{\nu'}_{\mu' i'} x^{\mu'} \frac{du^{i'}}{dt} = 0 \tag{13.27}$$

a condizione che si ponga

$$\Lambda^{\nu'}_{\mu' i'} = \Lambda^{\nu}_{\mu i} q^{\mu}_{\mu'} q^{\nu'}_{\nu} \partial^{i}_{i'} + \partial_{i'} q^{\lambda}_{\mu'} \cdot q^{\nu'}_{\lambda} \tag{13.28}$$

Questa è dunque la legge di trasformazione delle $\Lambda^{\nu}_{\mu i}$: è evidente l'analogia con le solite formule di CHRISTOFFEL (4.5). (Notiamo una conseguenza particolare: ricaviamo subito che ψ_i, dato dalle (13.13), è effettivamente vettore affine covariante). Ma di più: oltre al carattere d'invarianza del sistema (13.6), le (13.28) assicurano per

$$\frac{\delta x^{\nu}}{dt} = \frac{dx^{\nu}}{dt} + \Lambda^{\nu}_{\mu i} x^{\mu} \frac{du^{i}}{dt} \tag{13.29}$$

(indipendentemente dall'eventuale annullarsi dei secondi membri) il carattere di cogredienza alle x^{ν}: cioè, a condizione che valgano le (13.28), allo stesso modo che

(13.30) $$x^{\nu} = q^{\nu}_{\nu'} x^{\nu'}$$

si ha anche

(13.31) $$\frac{\delta x^{\nu}}{dt} = q^{\nu}_{\nu'} \frac{\delta x^{\nu'}}{dt}$$

Le coordinate omogenee x^{ν} di un punto possono riguardarsi come le componenti di un tensore proiettivo del 1° ordine controvariante, inteso che in relazione ad un A-riferimento, con ovvia generalizzazione di quanto si è detto al n.9 - che vale per un B-riferimento - si dica tensore proiettivo di ordine r+s, con gli indici $\lambda_1 \dots \lambda_r$ di covarianza, $\mu_1 \dots \mu_s$ di controvarianza, un ente rappresentabile mediante componenti $N^{\dots\mu_1\dots\mu_s}_{\lambda_1\dots\lambda_r}$ che per le (13.30) si trasformino in

(13.32) $$N^{\dots\mu'_1\dots\mu'_s}_{\lambda'_1\dots\lambda'_r} = q^{\lambda_1}_{\lambda'_1} \dots q^{\lambda_r}_{\lambda'_r} q^{\mu'_1}_{\mu_1} \dots q^{\mu'_s}_{\mu_s} N^{\dots\mu_1\dots\mu_s}_{\lambda_1\dots\lambda_r}$$

Un punto (sullo spazio tangente alla X_n nel punto che se ne considera) può dunque identificarsi con un tensore proiettivo del 1° ordine (vettore proiettivo) controvariante, il quale però potrà intendersi dato a meno di un fattore: come diremo, il punto è un vettore proiettivo geometrico controvariante; analogamente un vettore proiettivo covariante geometrico, dato cioè a meno di un fattore ($\neq 0$) si identifica con un iperpiano (S_{n-1}) dello spazio tangente. Un bivettore (tensore emisimmetrico del 2° ordine) geometrico controvariante $p^{\lambda\mu}$ se è semplice, cioè esprimibile con un prodotto alternato

(13.33) $$p^{\lambda\mu} = x^{[\lambda} y^{\mu]}$$

si identifica con la retta congiungente i due punti a meno che non sia nullo il che vorrà dire che i due punti coincidono. Il prodotto alternato di tre punti, o di un punto e una retta :

(13.34) $$q^{\lambda\mu\nu} = x^{[\lambda} y^{\mu} z^{\nu]}, \quad z^{\lambda\mu\nu} = p^{[\lambda\mu} z^{\nu]}$$

è un tensore emisimmetrico (trivettore) proiettivo con-

Politecnico di Torino
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Corso Duca degli Abruzzi, 24
10129 TORINO (ITALIA)

trovariante (geometrico) che si identifica col piano che contiene i tre punti o il punto e la retta supposti, se è nullo vuol dire che tale piano è indeterminato (ad es. che quei tre punti sono allineati). E così via; altri esempi di tensori proiettivi geometrici sono il tensore controvariante o covariante simmetrico $A_{\lambda\mu}$ o $B^{\lambda\mu}$, che definisce una quadrica dello spazio tangente, come luogo di punti o come inviluppo di iperpiani :

$$A_{\lambda\mu}\, x^\lambda x^\mu = 0 \,; \qquad B^{\lambda\mu}\, \xi_\lambda \xi_\mu = 0 \,; \tag{13.35}$$

poi il tensore misto $C_\lambda^{\ \mu}$, che definisce una omografia:

$$\bar{x}^\mu = C_\lambda^{\ \mu} x^\lambda \,; \tag{13.36}$$

mentre un qualunque tensore proiettivo geometrico $N_{\lambda_1 \dots \lambda_r}^{\mu_1 \dots \mu_s}$ definisce un'operazione lineare che applicata a un sistema ordinato di r punti e di $s-1$ iperpiani determina un punto:

$$\bar{x}^{\mu_s} = N_{\lambda_1 \dots \lambda_r}^{\mu_1 \dots \mu_{s-1} \mu_s}\, v_1^{\lambda_1} \dots v_r^{\lambda_r}\, w_{\mu_1}^1 \dots w_{\mu_{s-1}}^{s-1} \,. \tag{13.37}$$

Fra le trasformazioni (13.30) si possono comprendere anche i mutamenti delle x^ν per un comune fattore ϱ, che non alterano il punto geometrico; per una tale trasformazione (cioè quando $\varphi_{\nu'}^{\nu} = \delta_{\nu'}^{\nu}\, \varrho$) ciascun tensore proiettivo analitico (intendiamo: le cui componenti siano numericamente assegnate, e non solo date a meno d'un fattore) viene moltiplicato per ϱ^{r-s}, r ed s essendo i numeri d'indici di covarianza e di controvarianza del supposto tensore.
Notiamo incidentalmente che le (13.9) ove s'intenda ϱ funzione delle ω^i, cioè le (13.12) ove $\psi_i = \partial_i \log \varrho$ sono appunto caso particolare, per $\varphi_{\nu'}^{\nu} = \delta_{\nu'}^{\nu}\, \varrho$, $\partial_{i'}^{i} = \delta_{i'}^{i}$, delle (13.28).

L'assegnazione di una connessione proiettiva, o più esattamente di un sistema di parametri misti $\Lambda_{\mu i}^{\lambda}$, dà luogo a un processo di derivazione covariante dei tensori proiettivi, e quindi anche di derivazione assoluta

lungo una curva, di cui un esempio è offerto dalla (13.29); ad es. per un tensore proiettivo $A_\lambda^{\cdot\mu\nu}$ la derivata covariante è

$$(13.38)\qquad \nabla_i A_\lambda^{\cdot\mu\nu} = \partial_i A_\lambda^{\cdot\mu\nu} - \Lambda_{\lambda i}^{\tau} A_\tau^{\cdot\mu\nu} + \Lambda_{i}^{\mu} A_\lambda^{\cdot\tau\nu} + \Lambda_{\tau i}^{\nu} A_\lambda^{\cdot\mu\tau}$$

e la derivata assoluta rispetto a t, lungo la linea $u^i = u^i(\tau)$, è

$$(13.39)\qquad \frac{\delta A_\lambda^{\cdot\mu\nu}}{d\tau} = \nabla_i A_\lambda^{\cdot\mu\nu} \frac{du^i}{d\tau}.$$

Analogamente si costruirà la derivata covariante di ogni altro tensore proiettivo: la quale è un nuovo tensore, ma avente insieme agli indici proiettivi un nuovo indice, quello di derivazione, rispetto al quale è tensore affine: ad es. $\nabla_i A_\lambda^{\cdot\mu\nu}$ per un cambiamento (13.23) (13.24) delle coordinate curvilinee e dei sistemi proiettivi locali si muterà in

$$(13.40)\qquad \nabla_{i'} A_{\lambda'\mu'}^{\cdot\cdot\nu'} = \vartheta_{i'}^{i} q_{\lambda'}^{\lambda} q_{\mu'}^{\mu} q_{\nu}^{\nu'} \nabla_i A_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}.$$

Si noti che per un cambiamento (13.12) dei parametri della connessione proiettiva la derivata $\nabla_i N_{\lambda_1\dots\lambda_2}^{\cdots\mu_1\cdots\mu_3}$ di un qualunque tensore proiettivo, di ordine r+s, si muta in

$$(13.41)\qquad \hat{\nabla}_i N_{\lambda_1\dots\lambda_2}^{\cdots\mu_1\cdots\mu_3} = \nabla_i N_{\lambda_1\dots\lambda_2}^{\cdots\mu_1\cdots\mu_3} + (3-2)\psi_i N_{\lambda_1\dots\lambda_2}^{\cdots\mu_1\cdots\mu_3};$$

il che dà in particolare che, se $N_{\lambda_1\dots\lambda_2}^{\cdots\mu_1\cdots\mu_3}$ s'intende tensore proiettivo geometrico, il sistema

$$(13.42)\qquad \frac{\delta N_{\lambda_1\dots\lambda_2}^{\cdots\mu_1\cdots\mu_3}}{d\tau} = \Phi(\tau) N_{\lambda_1\dots\lambda_2}^{\cdots\mu_1\cdots\mu_3}$$

(ove $\Phi(\tau)$ indica un arbitrario fattore, anche = 0) ha per le (13.12) significato invariante: come la (13.20), cui si riduce se N è un punto, la (13.42) rappresenta una legge di trasporto proiettivo, pel tensore $N_{\lambda_1\dots\lambda_2}^{\cdots\mu_1\cdots\mu_3}$, determinato dalla connessione.
Notiamo qui incidentalmente che da un punto di vista prettamente analitico lo studio di una connessione

proiettiva si identifica con lo studio delle proprietà inerenti a un sistema differenziale (13.6) invarianti per le (13.23),(13.24),(13.28) e (13.12).

14.- Deviazione di una connessione proiettiva. Costruzione di parametri normalizzati.

Ci riesce utile qui (salvo a tornare qualche volta nel seguito alle ipotesi più generali) limitare l'arbitrarietà del riferimento: intendendo dapprima che esso sia un A_0-riferimento, cioè il vertice 10...0 dell' $(n+1)$-edro fondamentale su ciascuno spazio tangente sia il punto di contatto. Ciò equivale a dire che tale punto nel relativo spazio tangente avrà coordinate $\varkappa \delta_0^\alpha$, ove $\varkappa$ è un fattore $\neq 0$ (anche variabile da punto a punto) qualunque.

Corrispondentemente nelle (13.24) dovrà essere

$$q_{0'}^{r} = 0 \qquad (\text{onde anche } q_0^{r'} = 0 \; ; \; q_0^{0'} = \frac{1}{q_{0'}^{0}}) \; ; \tag{14.1}$$

ove, per ora, ad evitare equivoci, intendiamo che gli indici $r, s, t, p, q, \ldots$ servano a designare le n coordinate proiettive rimanenti di un punto x^λ, tolta la prima (x^0); mentre $i, j, h, k, l, \ldots$ servono a designare le n coordinate curvilinee dei punti sulla X_n.

In conseguenza della (14.1) le coordinate x^r di un punto x^λ formano esse stesse un tensore, per le (13.24):

$$x^r = q_{r'}^{r} \, x^{r'}. \tag{14.2}$$

Il significato geometrico è ovvio: le x^r sono, nella stella che ha per centro il punto di contatto coordinate omogenee della direzione che va al punto x^λ.

Entro lo spazio tangente vi è anche un altro sistema di riferimenti delle direzioni: quello cui si riferiscono le du^i. Saremo fra poco condotti a identificare i due riferimtni: o più esattamente, a fissare fra di essi un collegamento.

Secondo la legge di trasporto (13.6) della connessione i punti di una curva Γ della X_n, uscenti da un punto $P(u^i)$ con una direzione $t(du^i)$, si possono por-

tare sullo spazio tangente in P, π, dando luogo a una curva Γ_p, che si dirà immagine tangenziale della curva Γ su π. Sia t' la tangente in P a Γ_p: verifichiamo subito che t', t si corrispondono in una omografia nella stella P.

E infatti, il punto dello spazio π, che per effetto del trasporto proiettivo dato dalla connessione,

$$14.3) \qquad {}^*x^\lambda = x^\lambda - \Lambda^\lambda_{\mu i}\, x^\mu du^i ,$$

si porta nel punto di contatto ${}^*\kappa\delta^\lambda_o$ dello spazio ${}^*\pi$ tangente nel punto ${}^*P\,(u^i + du^i)$ infinitamente vicino P su Γ, ha coordinate proiettive infinitamente vicine a quelle di P, che sono date da $\kappa\delta^\lambda_o$: le potremo indicare con $\delta^\lambda_o + \Delta x^\lambda$. Dovremo dunque avere

$$(14.4) \qquad {}^*\kappa\delta^\lambda_o = \kappa\delta^\lambda_o + \Delta x^\lambda - \Lambda^\lambda_{\mu i}\,(\kappa\delta^\mu_o + \Delta x^\mu)\,du^i ;$$

onde posto $\lambda = z$ ricaviamo, prese le parti principali degli infinitesimi,

$$(14.5) \qquad \Delta x^z = \kappa\Lambda^z_{oi}\, du^i .$$

Ora le Δx^z sono proprio coordinate della direzione t' di Γ_p, e (come s'è già notato) le du^i sono coordinate della direzione t di Γ in P: la (14.5) rappresenta appunto un'omografia T in cui t e t' si corrispondono. La diremo omografia di deviazione della connessione proiettiva.

Il fatto che le $\kappa\Lambda^z_o$ servono a rappresentare una omografia fa prevedere che esse siano le componenti di un tensore; effettivamente le (13.28), quando si utilizzino le (14.1), dànno subito

$$(14.6) \qquad \Lambda^{z'}_{o'i'} = q^\lambda_{o'} q^{z'}_\mu \vartheta^i_{i'} \Lambda^\mu_{\lambda i} + \partial_{i'} q^\lambda_{o'} \cdot q^{z'}_\lambda$$

$$= q^\circ_{o'} q^{z'}_z \vartheta^i_{i'} \Lambda^z_{oi} ;$$

d'altra parte si ha naturalmente

$$(14.7) \qquad \kappa'\delta^{\lambda'}_{o'} = q^{\lambda'}_\lambda \kappa\delta^\lambda_o = q^{\lambda'}_o \kappa \quad \text{onde} \quad \kappa' = \frac{\kappa}{q^\circ_{o'}}$$

e infine

$$\kappa' \Lambda^{r'}_{o'i'} = q^{r'}_{r} \vartheta^{r}_{i'} \kappa \Lambda^{r}_{oi} \tag{14.8}$$

Questa mette in evidenza il carattere tensoriale di $\kappa \Lambda^{r}_{oi}$ (in relazione ai cambiamenti dell' A_0-riferimento).

Tale tensore $\kappa \Lambda^{r}_{oi}$ potrà dirsi tensore di deviazione della connessione proiettiva.

Risulta qui assai naturale valersi della omografia T di deviazione per legare (nel modo indicato al n° precedente) le rette che congiungono il punto P agli altri punti fondamentali e al punto unità del sistema proiettivo locale al riferimento curvilineo. Presi ordinatamente tali punti fondamentali e il punto unità sulle rette omologhe in T (o come diremo per brevità, associate) alle tangenti in P alle linee coordinate $u^1, u^2, \ldots, u^n$ alla retta $du^1 = du^2 = \cdots = du^n$ dovrà risultare, come mostrano le (14.5)

$$\kappa \Lambda^{r}_{oi} \equiv \delta^{r}_{i} \tag{14.9}$$

(eguale a meno di un fattore $\neq 0$); il secondo membro indicando, al solito, 1 oppure zero secondo che r, i prendono o no valori d'egual posto fra i contrassegni delle coordinate proiettive seguenti la prima e delle coordinate curvilinee.

Quale sia la trasformazione delle coordinate proiettive locali con cui si rende soddisfatta la (14.9) risulta subito dalle (14.8): queste dànno

$$\kappa' \Lambda^{r'}_{o'i'} = \sigma \delta^{r'}_{i'} \tag{14.10}$$

a condizione che si prenda

$$q^{r}_{r'} = \frac{\kappa}{\sigma} \vartheta^{i}_{i'} \Lambda^{r}_{oi} \delta^{i'}_{r'} . \tag{14.11}$$

Quando sia verificata la (14.9) e le trasformazioni del riferimento per X_{pn} si limitino a quelle per le quali essa rimane sempre verificata il riferimento si r

duce, secondo la terminologia introdotta al n.12, a un B-riferimento. Per le relative trasformazioni la (14.9) deve essere invariante: la (14.8) insieme alla condizione ulteriore detta al n.12 ci dà che per questo deve essere - usando come ora risulta lecito anche per le coordinate proiettive i contrassegni ijh anzichè rst ...-

(14.12) $$q^{i}_{i'} = \varrho\, \vartheta^{i}_{i'}\,, \qquad q^{0}_{0'} = \varrho\,.$$

Qui ϱ indica un fattore $\neq 0$, in generale funzione delle u^i. Possiamo senz'altro scrivere

(14.13) $$q^{\lambda}_{\lambda'} = \varrho\, \vartheta^{\lambda}_{\lambda'}\,,$$

ove $\vartheta^{0}_{0'} = 1, \vartheta^{i'}_{0'}$ e le $\vartheta^{0}_{i'}$ sono le quantità $\frac{1}{\varrho} q^{0}_{i'}$ (arbitrarie).

In forza delle (14.12) risulta lecito precisare le (14.9) ponendo proprio

(14.14) $$\Lambda^{r}_{0i} = \delta^{r}_{i}$$

(o anche $M\delta^{r}_{i}$ con M costante numerica $\neq 0$; ma conviene senz'altro supporre $M = 1$). Infatti per le (14.12) la (14.14) è invariante.

In forza delle (14.13) le formule (13.28) di trasformazione dei parametri si scrivono

(14.15) $$\Lambda^{\nu'}_{\mu' i'} = \Lambda^{\nu}_{\mu i}\, \vartheta^{\nu'}_{\nu}\, \vartheta^{\mu}_{\mu'}\, \vartheta^{i}_{i'} + \partial_{i'} \vartheta^{\lambda}_{\mu'} \cdot \vartheta^{\nu'}_{\lambda} + \delta^{\nu'}_{\mu'}\, \partial_{i'} \log \varrho\,.$$

Ma possiamo di qui eliminare ϱ, ad es. scrivendo le formule particolari che si hanno per $\nu' = \mu' = 0'$,

(14.16) $$\Lambda^{0'}_{0' i'} = \Lambda^{\nu}_{\mu i}\, \vartheta^{0'}_{\nu}\, \vartheta^{\mu}_{0'}\, \vartheta^{i}_{i'} + \partial_{i'} \log \varrho$$
$$= \Lambda^{0}_{0i}\, \vartheta^{i}_{i'} - \vartheta^{0}_{i'} + \partial_{i'} \log \varrho\,.$$

Ricaviamo subito che, posto

(14.17) $$\Gamma^{\nu}_{\mu i} = \Lambda^{\nu}_{\mu i} - \delta^{\nu}_{\mu} \Lambda^{0}_{0i}$$

si ha

$$(14.18)\qquad \Gamma^{\nu'}_{\mu' i'} = \Gamma^{\nu}_{\mu i}\,\vartheta^{\nu'}_{\nu}\vartheta^{\mu}_{\mu'}\vartheta^{i}_{i'} + \delta^{\nu'}_{\mu'}\vartheta^{\circ}_{i'} + \partial_{i'}\vartheta^{\lambda}_{\mu'}\vartheta^{\nu'}_{\lambda}.$$

Queste dànno come facile conseguenza che se completiamo il sistema $\Gamma^{\nu}_{\mu i}$ ponendo, in relazione al supposto B-riferimento,

$$(14.19)\qquad \Gamma^{\nu}_{\mu\, o} = \delta^{\nu}_{\mu}$$

risulta

$$(14.20)\qquad \Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} = \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}\,\vartheta^{\nu'}_{\nu}\vartheta^{\mu}_{\mu'}\vartheta^{\lambda}_{\lambda'} + \partial\,\vartheta^{\nu}_{\mu'}\cdot\vartheta^{\nu'}_{\nu}.$$

Ritroviamo dunque quali formule di trasformazione delle $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$ le solite formule (8.46) o (12.25).
Le $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$ date dalle (14.17) e (14.19) si diranno parametri normalizzati della connessione proiettiva; risulta immediata la verifica che le $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ sono invarianti per le (13.12), dunque esse sono determinate, in relazione a un B-riferimento, dalla connessione proiettiva. Notiamo che, in conseguenza delle (14.17) e (14.14), si ha pei parametri normalizzati $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$ anche

$$(14.21)\qquad \Gamma^{\nu}_{o\lambda} = \delta^{\nu}_{\lambda}.$$

Da quanto s'è già visto al n.8 e al n.12 risulta che i parametri normalizzati $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$ si possono usare quali parametri di una derivazione proiettiva pei tensori proiettivi: derivazione che dunque è determinata dalla connessione proiettiva. Ci riferiamo qui naturalmente a tensori proiettivi per le B-trasformazioni: dotati quindi della legge di trasformazione (9.3), ove le $\vartheta^{\lambda}_{\lambda'}$ e $\vartheta^{\lambda'}_{\lambda}$ soddisfano alle (9.2); e di tutte le proprietà di cui s'è detto al n.9. Potremmo dire ove occorra ϑ-tensori, per distinguerli dai tensori proiettivi per le A-trasformazioni, dotati della legge di trasformazione (13.32): q-tensori. Ma è ovvio che un q-tensore, covariante per r indici, controvariante per s indici, per una B-trasformazione si trasformerà nel modo seguente:

(14.22) $$N'^{\mu_1\dots\mu_s}_{\lambda'_1\dots\lambda'_2} = \varrho^g \vartheta^{\lambda_1}_{\lambda'_1}\dots\vartheta^{\lambda_2}_{\lambda'_2}\vartheta^{\mu_1}_{\mu_1}\dots\vartheta^{\mu_s}_{\mu_s} N^{\mu_1\dots\mu_s}_{\lambda_1\dots\lambda_2},$$

con $g = 2-s$; il che potrà esprimersi dicendo che esso è un ϑ-tensore relativo, di grado $2-s$. Più in generale se nella (14.22) g è qualunque si dirà che $N^{\dots\mu_1\dots}_{\lambda_1\dots\lambda_2}$ è di grado g: la derivazione proiettiva covariante di parametri $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ però si applica solo ai tensori di grado zero.

Questo è in sostanza sufficiente, in quanto i punti gli iperpiani, in genere i tensori proiettivi geometrici in quanto sono determinati a meno d'un fattore arbitrario possono pensarsi di grado zero; il che equivale a normalizzare opportunamente ciascuna trasformazione nelle loro coordinate. Del resto non presenta difficoltà il vedere che cosa occorre per formare derivate covarianti di tensori anche di grado qualunque. Basta occuparsi del caso di uno scalare H, pel quale si abbia

(14.23) $$'H = \varrho^g H .$$

Di qui segue

(14.24) $$\partial_{i'} 'H = \varrho^g \left(\partial_i H . \vartheta^i_{i'} + g H \partial_{i'} \log\varrho\right);$$

ora eliminando $\partial_{i'}\log\varrho$ fra questa e la (14.16) abbiamo:

(14.25) $$\partial_{i'} 'H - g\Lambda'^{\circ}_{\circ i'} 'H = \varrho^g\left(\partial_i H - g\Lambda^\circ_{\circ i} H\right)\vartheta^i_{i'} + g\varrho^g H \vartheta^\circ_{i'},$$

cioè, ponendo

(14.26) $$'\Gamma_i = \Lambda^\circ_{\circ i}, \quad \Gamma_\circ = -1;$$

(14.27) $$\nabla_\lambda H = \delta^i_\lambda \partial_i H - g\Gamma_\lambda H \quad (\text{dunque } \nabla_\circ H = gH)$$

abbiamo:

(14.28) $$\nabla_{\lambda'} 'H = \varrho^g \nabla_\lambda H \vartheta^\lambda_{\lambda'} .$$

Dunque: utilizzando le $\Lambda^\circ_{\circ i}$ si possono formare effet

tive derivate covarianti per scalari e quindi anche per tensori di grado qualunque; però non determinate dalla connessione proiettiva.

D'altra parte, utilizzando le $\Lambda_{\nu i}^{\nu}$, anche in relazione a un qualunque A-riferimento si formano, analogamente alle (3.24) e (3.25), derivate covarianti di tensori di peso qualunque: pei quali cioè nei secondi membri delle formule di trasformazione figuri anche una potenza del determinante $q = |q_{\lambda'}^{\lambda}|$ della trasformazione. Tale è ad es. $A_{\lambda}^{\cdot\mu\nu}$ se

$$A_{\lambda'}^{\cdot\mu'\nu'} = q^{p} q_{\lambda'}^{\lambda} q_{\mu}^{\cdot\mu'} q_{\nu}^{\cdot\nu'} A_{\lambda}^{\cdot\mu\nu} \tag{14.29}$$

(tensore di peso p). Un tensore proiettivo per le A-trasformazioni, covariante per c indici, controvariante per s indici, e relativo di peso p, in relazione alle B-trasformazioni è ovviamente di grado

$$g = p(n+1) + c - s. \tag{14.30}$$

La derivata covariante di $A_{\lambda}^{\cdot\mu\nu}$ ad es. potrà così costruirsi:

$$\nabla_i A_{\lambda}^{\cdot\mu\nu} = \partial_i A_{\lambda}^{\cdot\mu\nu} - p\Lambda_{\tau i}^{\tau} A_{\lambda}^{\cdot\mu\nu} - \Lambda_{\lambda i}^{\tau} A_{\tau}^{\cdot\mu\nu} + \\ + \Lambda_{\tau i}^{\mu} A_{\lambda}^{\cdot\tau\nu} + \Lambda_{\tau i}^{\nu} A_{\lambda}^{\cdot\mu\tau}. \tag{14.31}$$

Vi figurano dunque le $\Lambda_{\tau i}^{\tau}$, che non sono determinate dalla connessione. Ma vi è in realtà un caso in cui i termini contenenti le $\Lambda_{\tau i}^{\tau}$ si elidono: il caso in cui il tensore (anche se di peso $\neq 0$) è di grado nullo, cioè

$$p = \frac{s-c}{n+1}. \tag{14.32}$$

Effettivamente, se, mediante le (13.15), esprimiamo le $\Lambda_{\mu i}^{\lambda}$ per le $L_{\mu i}^{\lambda}$ - determinate dalla connessione - e per le $\Lambda_{\nu i}^{\nu}$, l'espressione della derivata covariante non contiene le $\Lambda_{\nu i}^{\nu}$, ma soltanto le $L_{\mu i}^{\lambda}$, con cui è formata come si forma con le $\Lambda_{\mu i}^{\lambda}$ la derivata covariante

di un tensore di peso e grado nullo, ad es. per $A_\lambda^{\cdot\mu\nu}$ se $p = \frac{1}{n+1}$ si ha

$$(14.33)\qquad \nabla_i A_\lambda^{\cdot\mu\nu} = \partial_i A_\lambda^{\cdot\mu\nu} - L_{\lambda i}^{\tau} A_\tau^{\cdot\mu\nu} + L_{\tau i}^{\mu} A_\lambda^{\cdot\tau\nu} + L_{\tau i}^{\nu} A_\lambda^{\cdot\mu\tau}.$$

Dunque: pei tensori di grado nullo (in particolare per quelli di peso nullo aventi egual numero d'indici di covarianza e controvarianza) la derivata covariante fatta coi parametri $\Lambda_{\mu i}^{\lambda}$, al luogo dei quali possono anche sostituirsi le $L_{\mu i}^{\lambda}$, sono determinate dalla connessione proiettiva.

Le formule di trasformazione delle $L_{\mu i}^{\lambda}$, cui si collega il comportamento ora detto, si scrivono facilmente: esse differiscono sia da quelle delle $\Lambda_{\mu i}^{\lambda}$, che delle $\Gamma_{\mu i}^{\lambda}$:

$$(14.34)\qquad L_{\mu' i'}^{\lambda'} = q_\lambda^{\lambda'} q_{\mu'}^{\mu} \partial_{i'}^{i} L_{\mu i}^{\lambda} + \partial_i q_\mu^\lambda \cdot q_\lambda^{\lambda'} - \frac{1}{n+1} \delta_{\mu'}^{\lambda'} \partial_{i'} \log q.$$

Anche le $L_{\mu i}^{\lambda}$ in quanto determinate dalla connessione potrebbero assumersi quali parametri normalizzati di questa: esse hanno un ruolo notevole nella teoria come vedremo. Hanno il vantaggio di costruirsi in relazione a un qualunque A-riferimento: ma, nei confronti delle $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$, lo svantaggio di applicarsi a tensori normalizzati in un modo che non sembra il più naturale, e di dar luogo a derivate covarianti che non sono nuovi tensori proiettivi.

Torniamo ai nostri parametri normalizzati $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$, per un'osservazione. In conseguenza delle formule di trasformazione (14.20) si ha:

$$(14.35)\qquad \Gamma_{\nu' i'}^{\nu'} = \Gamma_{\nu i}^{\nu} \partial_{i'}^{i} + (n+1)\partial_{i'}^{\circ} + \partial_{i'} \log \Delta,$$

col solito significato per Δ. Di qui risulta il fatto, sotto forma lievemente diversa notato dal CARTAN, che con una ben determinata scelta, in relazione alle presupposte coordinate curvilinee, degli iperpiani fondamentali $x^\circ = 0$ dei sistemi proiettivi locali, si può rendere

$$(14.36)\qquad \Gamma_{\nu i'}^{\nu'} = 0.$$

E infatti dalle (14.35), annullando i primi membri, risultano univocamente determinate le $\partial_{i'}^{\circ}$.

Naturalmente se intendiamo già soddisfatta la condizione $\Gamma^{\nu}_{\nu i} = 0$ questa avrà carattere invariante per le trasformazioni

$$(14.37) \qquad u^{i} = u^{i}(u^{1'}, \dots, u^{n'}); \quad x^{\lambda} = \varrho \vartheta^{\lambda}_{\lambda'} x^{\lambda'}$$

sulle coordinate curvilinee e sui sistemi proiettivi locali, già soggette alle condizioni

$$(14.38) \qquad \vartheta^{i}_{i'} = \frac{\partial u^{i}}{\partial u^{i'}}, \quad \vartheta^{i}_{o'} = 0, \quad \vartheta^{o}_{o'} = 1,$$

allora e solo che si abbia anche

$$(14.39) \qquad \vartheta^{o}_{i'} = -\frac{1}{n+1} \partial_{i'} \log \Delta;$$

il che vale appunto a subordinare del tutto la trasformazione sulle coordinate proiettive x^{λ} a quella sulle coordinate curvilinee u^{i}. Si determinano così quelle che diremo le D-trasformazioni; i riferimenti soggetti ad esse li diremo D-riferimenti: sono in sostanza quelli stessi implicitamente usati da T.Y.THOMAS e VEBLEN, e in queste Lezioni al n.9: ved. le (9.32), ove s'intenda posto $\mathcal{M} = 1$; e cfr. n.12, fine.

Facilmente possiamo esprimere la condizione (14.36) anche in relazione ai parametri $L^{\lambda}_{\mu i}$. Infatti le (13.15), (14.17) dànno subito

$$(14.40) \qquad L^{\tau}_{\tau i} = 0, \quad \Gamma^{o}_{oi} = 0,$$

e facilmente ne risultano fra le $\Gamma^{\lambda}_{\mu i}$ ed $L^{\lambda}_{\mu i}$ le relazioni

$$(14.41) \qquad \Gamma^{\lambda}_{\mu i} = L^{\lambda}_{\mu i} - \delta^{\lambda}_{\mu} L^{o}_{oi}, \quad L^{\lambda}_{\mu i} = \Gamma^{\lambda}_{\mu i} - \frac{1}{n+1} \delta^{\lambda}_{\mu} \Gamma^{\nu}_{\nu i}.$$

Dunque le (14.36) equivalgono a

$$(14.42) \qquad L^{\nu}_{\nu i} - (n+1) L^{o}_{oi} = 0, \text{ o anche } L^{\lambda}_{\mu i} = \Gamma^{\lambda}_{\mu i}.$$

Una interpretazione geometrica soddisfacente di queste condizioni, cioè in sostanza delle D-trasformazioni o dei D-riferimenti d'importanza notevole in quanto al-

meno formalmente consentono uno sviluppo della teoria che è relativa effettivamente alla sola X_n senza intervento degli spazi tangenti, non è sino ad ora conosciuta.

§. 2. Geodetiche. Curvatura e torsione.

15.- Geodetiche di una connessione proiettiva; connessione affine e tensore affine subordinati a un campo d'iperpiani. Scomposizione delle trasformazioni proiettive fra spazi infinitamente vicini.

Veniamo (concludendo il ravvicinamento con le considerazioni esposte nella I Parte) alla nozione di geodetiche di una connessione proiettiva, già incidentalmente accennata al n.2 (p.13). Secondo il Cartan esse sono le linee della varietà (P_n) a connessione proiettiva, aventi quali immagini tangenziali (entro lo spazio proiettivo (S_n) tangente alla varietà in un loro punto) linee rette. Vedremo fra poco come a questa possano sostituirsi altre caratterizzazioni, di natura differenziale.

Ma è utile intanto ricavare l'effettiva rappresentazione dell'immagine tangenziale di una qualunque curva della varietà P_n su un S_n tangente.

Riprendiamo le equazioni (13.6) o (13.20) del trasporto proiettivo dei punti lungo le linee della P_n, determinato dalla connessione (che diremo per brevità "traslazione proiettiva"): secondo le (13.29)

$$(15.1) \qquad \frac{\delta x^\nu}{dt} = \frac{dx^\nu}{dt} + \Lambda^\nu_{\mu i}\, x^\mu \frac{du^i}{dt} = \Phi(t) x^\nu,$$

lungo una linea Γ, $u^i = u^i(t)$; la $\Phi(t)$ essendo una funzione qualunque di t che può anche porsi $= 0$ (il che equivale a intendere opportunamente normalizzate le coordinate x^λ in relazione alla scelta dei parametri Λ^ν_μ

Supponiamo che il "riferimento" di cui ci valiamo sia qualunque; e consideriamo insieme ad esso anche un secondo riferimento pure del tipo più generale, in relazione al quale i punti fondamentali del precedente avranno certe coordinate $a^{\lambda'}$.

Sia $x^{\lambda'}(t)$ lungo Γ una serie di punti degli spazi tangenti che variano per traslazione proiettiva: la sua immagine tangenziale sull'S_n (π_0) tangente a P_n in un punto P_0 di Γ, $t = t_0$ (luogo dei punti ottenuti su questo S_n trasportandovi per traslazione proiettiva lungo Γ i punti della serie $x^{\lambda'}(t)$) si ridurrà naturalmente a un punto, $\hat{x}^{\lambda'}(t) = x^{\lambda'}(t_0)$. Ora: immaginiamo che, sempre per traslazione proiettiva lungo Γ, vengano portati su π_0 i punti fondamentali dei riferimenti proiettivi locali del 1° sistema, dati nei punti di Γ. Avremo su π_0 una famiglia di riferimenti proiettivi $\hat{a}^{\lambda'}_{\nu}(t)$; per ciascun valore di t il punto fisso $x^{\lambda'}(t_0)$ avrà rispetto al corrispondente riferimento coordinate $x^{\nu}(t)$ tali che

$$x^{\lambda'}(t_0) = \hat{a}^{\lambda'}_{\nu}(t)\, x^{\nu}(t) . \tag{15.2}$$

Le $x^{\nu}(t)$ sono evidentemente anche le coordinate del punto variabile (per traslazione proiettiva lungo Γ) $x^{\lambda'}(t)$ rispetto al corrispondente riferimento $a^{\lambda'}_{\nu}$ che era dato nello spazio tangente nel punto generico $u^{i}(t)$ della curva Γ. Si dovrà dunque avere

$$\frac{\delta x^{\nu}}{dt} = \Phi(t)\, x^{\nu} ; \tag{15.3}$$

e d'altra parte

$$\frac{d\hat{x}^{\lambda'}}{dt} = \frac{d\hat{a}^{\lambda'}_{\nu}}{dt} x^{\nu} + \hat{a}^{\lambda'}_{\nu} \frac{dx^{\nu}}{dt} \tag{15.4}$$

$$= \left(\frac{d\hat{a}^{\lambda'}_{\nu}}{dt} - \Lambda^{\mu}_{\nu i} \hat{a}^{\lambda'}_{\mu} \frac{du^{i}}{dt} \right) x^{\nu} + \hat{a}^{\lambda'}_{\nu} \frac{\delta x^{\nu}}{dt} =$$

$$= \left(\frac{d\hat{a}^{\lambda'}_{\nu}}{dt} - \Lambda^{\mu}_{\nu i} \hat{a}^{\lambda'}_{\mu} \frac{du^{i}}{dt} \right) x^{\nu} + \hat{a}^{\lambda'}_{\nu} \Phi(t) x^{\nu} = 0$$

e siccome queste dovranno valere qualunque sia il punto $x^\nu(t)$ considerato, ne consegue

$$\frac{d\hat{a}_\nu^{\lambda'}}{dt} - \Lambda_{\nu 2}^{\mu}\, \hat{a}_\mu^{\lambda'} \frac{du^2}{dt} = -\Phi(t)\, \hat{a}_\nu^{\lambda'}, \tag{15.5}$$

quale condizione necessaria e sufficiente perchè la serie di riferimenti $\hat{a}_\nu^{\lambda'}$ sia immagine tangenziale su π_0 della serie dei riferimenti locali $a_\nu^{\lambda'}$ dati lungo Γ, la $\Phi(t)$ essendo sempre una funzione qualunque che potrà anche porsi $= 0$.

Se ora supponiamo che $\hat{x}^{\lambda'}(t)$ rappresenti l'immagine tangenziale su π_0 di una qualunque serie di punti $x^{\lambda'}(t)$ dati negli spazi tangenti lungo Γ, avremo al solito, posto

$$\hat{x}^{\lambda'}(t) = \hat{a}_\nu^{\lambda'}(t)\, x^\nu(t), \tag{15.6}$$

che le $x^\nu(t)$ sono anche le coordinate, in relazione ai sistemi $a_\nu^{\lambda'}$, dei punti della supposta serie, di cui $\hat{x}^{\lambda'}(t)$ è l'immagine; ora dalla (15.5) abbiamo

$$\frac{d\hat{x}^{\lambda'}}{dt} = \left(\Lambda_{\nu i}^{\mu}\, \hat{a}_\mu^{\lambda'} \frac{du^i}{dt} - \Phi(t)\, \hat{a}_\nu^{\lambda'}\right) x^\nu + \hat{a}_\nu^{\lambda'} \frac{dx^\nu}{dt} \tag{15.7}$$

cioè

$$\frac{d\hat{x}^{\lambda'}}{dt} = \left(\frac{\delta x^\nu}{dt} - \Phi(t)\, x^\nu\right) \hat{a}_\nu^{\lambda'}. \tag{15.8}$$

Non stiamo a portarci dietro ancora $\Phi(t)$: è ovvio che basta porre $x^\nu = \rho \bar{x}^\nu$, $\hat{a}_\nu^{\lambda'} = \rho^{-1} \bar{a}_\nu^{\lambda'}$, con $\rho = \kappa e^{\int_\Gamma \Phi}$ ove κ è una costante $\neq 0$, perchè le (15.8) possano ridursi (tornando a scrivere per semplicità x^ν ed $\hat{a}_\nu^{\lambda'}$ anzichè $\bar{x}^\nu$ ed $\bar{\hat{a}}_\nu^{\lambda'}$) alla forma seguente:

$$\frac{d\hat{x}^{\lambda'}}{dt} = \frac{\delta x^\nu}{dt}\, \hat{a}_\nu^{\lambda'}. \tag{15.9}$$

possiamo proseguire: valendoci sempre delle (15.5), ove ora intenderemo dunque posto $\Phi(t)=0$, ricaviamo subito

$$\frac{d^2\hat{x}^{\lambda'}}{dt^2} = \frac{\delta^2 x^\nu}{dt^2}\,\hat{a}_\nu^{\lambda'}, \tag{15.10}$$

$$\frac{d^3\hat{x}^{\lambda'}}{dt^3} = \frac{\delta^3 x^\nu}{dt^3}\,\hat{a}_\nu^{\lambda'}, \ldots\ldots \text{ ecc.} \tag{15.11}$$

e dunque se intendiamo, per semplicità, che in un determinato punto P_o, $t=t_o$, i riferimenti locali cui si riferiscono le coordinate x^ν ed $x^{\lambda'}$ coincidano, cosicchè in quel punto sarà

$$\left(\hat{a}_\nu^{\lambda'}\right)_o = \left(a_\nu^{\lambda'}\right)_o = \delta_\nu^{\lambda'}, \tag{15.12}$$

otteniamo senz'altro, per l'immagine tangenziale $\hat{x}^\nu(t)$ della serie di punti $x^\nu(t)$ degli spazi tangenti nei punti di Γ, fatta sullo spazio tangente nel punto P_o, la rappresentazione seguente:

$$\hat{x}^\nu = x^\nu(t_o) + \left(\frac{\delta x^\nu}{dt}\right)_o t + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2 x^\nu}{dt^2}\right)_o t^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\delta^3 x^\nu}{dt^3}\right)_o t^3 + \ldots \tag{15.13}$$

Sin qui abbiamo inteso che la derivata assoluta $\frac{\delta x^\nu}{dt}$ fosse calcolata coi parametri $\Lambda_{\mu i}^\nu$ (il che, si badi, porta che la rappresentazione (15.13) non è univoca, perchè le $\Lambda_{\mu i}^\nu$ possono variare secondo le (13.12). Ma è geometricamente ovvio che, ciò non ostante, l'immagine tangenziale sarà sempre univocamente determinata).

Il riferimento era del tipo più generale. Se intendiamo invece di ricorrere all'uso di un B-riferimento, basterà introdurre in modo arbitrario, come al n.8 (pag. 65) du° per poter rappresentare la legge di traslazione proiettiva dei punti (15.1), anche nel modo seguente (ove con (Γ) contrassegniamo differenziali e derivate costruiti con le $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$):

$$(15.14)\qquad \frac{\overset{(\Gamma)}{\delta} x^\nu}{dt} = \frac{dx^\nu}{dt} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} x^\mu \frac{du^\lambda}{dt} = 0$$

è l'immagine tangenziale di una qualunque serie di punti degli spazi tangenti, dati lungo la curva $\Gamma, x^\nu(t)$, col seguente sviluppo:

$$(15.15)\qquad \hat{x}^\nu = x^\nu(t_o) + \left(\frac{\overset{(\Gamma)}{\delta} x^\nu}{dt}\right)_o t + \frac{1}{2}\left(\frac{\overset{(\Gamma)}{\delta^2} x^\nu}{dt^2}\right)_o t^2 + \dots\dots,$$

ove le derivate assolute sono calcolate coi parametri $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ (e, s'intende sempre nel punto t_o che si considera).

La (15.15) si presta meglio della (15.13) a dare una rappresentazione dell'immagine tangenziale della curva Γ medesima, cioè della serie formata dai punti di questa curva: le cui coordinate locali a meno d'un fattore comune sono, in ciascun punto di Γ, $x^\nu = \delta^\nu_o$, in relazione al B-riferimento (o più in generale anche a un A_o-riferimento).

Risulta subito

$$(15.16)\qquad \frac{\overset{(\Gamma)}{\delta}}{dt}\delta^\nu_o = \Gamma^\nu_{\mu\lambda}\delta^\mu_o \frac{du^\lambda}{dt} = \frac{du^\nu}{dt};$$

dunque l'immagine tangenziale, sullo spazio tangente in un punto $t = t_o$ della curva Γ, $u^i = u^i(t)$, è rappresentata delle equazioni

$$(15.17)\qquad \hat{x}^\nu = \delta^\nu_o + \left(\frac{du^\nu}{dt}\right)_o t + \frac{1}{2}\left(\frac{\overset{(\Gamma)}{\delta^2} u^\nu}{dt^2}\right)_o t^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\overset{(\Gamma)}{\delta^3} u^\nu}{dt^3}\right)_o t^3 + \dots.$$

ove ad es. $\frac{\overset{(\Gamma)}{\delta^2} u^\nu}{dt} = \frac{\overset{(\Gamma)}{\delta}}{dt}\frac{du^\nu}{dt}$ e il punto $\frac{du^\nu}{dt}$ è un punto sulla tangente associata alla tangente a Γ nel suo punto generico (ved. n.prec.): dipendente dalla scelta di du° (da cui, s'intende bene, dipende la rappresentazione (15.17), anche essa non univoca: non ne dipende però l'immagine tangenziale, quale ente geometrico).

A proposito delle immagini tangenziali di una serie di punti degli spazi tangenti nei punti di una curva Γ

o della curva Γ medesima, relative ai vari punti di Γ è interessante ma senz'altro ovvia l'osservazione che esse sono tutte proiettivamente identiche. Cosicchè lo studio delle curve di una P_n a connessione proiettiva, e anche delle serie di punti gli spazi tangenti a P_n lungo una tale curva si riconduce allo studio di curve di un S_n proiettivo.

Prima di venire al caso particolare che qui c'interessa (il quale, naturalmente, per sè solo, non avrebbe in realtà richiesto che una piccola parte degli sviluppi esposti); cioè alle geodetiche della connessione proiettiva, vogliamo indicare un'altra dimostrazione delle (15.13), che ci porta a stabilire interessanti formule relative alle derivate assolute $\frac{\delta}{dt}$ (calcolate coi parametri misti $\Lambda^{\lambda}_{\mu\nu}$ o anche con parametri proiettivi $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$).

Sia $x^\nu(t)$ una serie di punti dati lungo la curva Γ (le stesse considerazioni varrebbero per una qualunque serie di tensori proiettivi, ed è superfluo avvertire che valgono anche per tensori affini, in relazione a una qualunque connessione affine L^i_{jh}). Vogliamo opportunamente trasformare le espressioni

$$\frac{\delta x^\nu}{dt} = \frac{dx^\nu}{dt} + \Lambda^\nu_{\mu i} x^\mu \frac{du^i}{dt}. \tag{15.18}$$

Indichiamo con $x^\nu(t/t_0)$ il punto ottenuto, nel punto t di Γ, a partire dal punto t_0 per traslazione proiettiva lungo Γ, cosicchè si avrà

$$x^\nu(t_0/t_0) = x^\nu(t_0); \qquad \frac{dx^\nu(t_0/t)}{dt_0} + \Lambda^\nu_{\mu i} x^\mu(t_0/t)\frac{du^i}{dt} = 0 \tag{15.19}$$

Di qui ricaviamo

$$\Lambda^\nu_{\mu i} x^\mu(t) \frac{du^i}{dt} = -\left(\frac{dx^\nu(t_0/t)}{dt_0}\right)_{t_0=t}; \tag{15.20}$$

e quindi sostituendo nelle (15.18)

$$\frac{\delta x^\nu(t)}{dt} = \frac{dx^\nu}{dt} - \left(\frac{dx^\nu(t_0/t)}{dt_0}\right)_{t_0=t} = \tag{15.21}$$

$$= \lim_{t_0 \to t} \left(\frac{x^\nu(t) - x^\nu(t_0)}{t - t_0} - \frac{x^\nu(t) - x^\nu(t_0/t)}{t - t_0} \right)$$

(e infatti $\left(\lim_{t_1 \to t_0} \frac{x^\nu(t_0/t) - x^\nu(t_1/t)}{t_0 - t_1} \right)_{t_0 = t} = \lim_{t_1 \to t} \frac{x^\nu(t) - x^\nu(t_1/t)}{t - t_1}$).

Semplificando :

$$(15.22) \qquad \frac{\delta x^\nu(t)}{dt} = \lim_{t_0 \to t} \frac{x^\nu(t_0/t) - x^\nu(t_0)}{t - t_0}$$

il che dà la derivata assoluta quale limite di una sosta di rapporto incrementale, calcolato nello spazio tangente nel punto t_0 dopo avervi riportato il punto $x^\nu(t)$ dal punto t , lungo la supposta curva.

Supponiamo ora che il punto $\frac{\delta x^\nu}{dt}$ venga portato p traslazione proiettiva, lungo Γ , sino al punto t_1 ; indichiamo per brevità con $\left(\frac{\delta x^\nu}{dt} \right)_{t \to t_1}$ il punto così ottenuto. Abbiamo manifestamente, tenuto presente che il trasporto per traslazione proiettiva si fa mediante integrazione di un sistema differenziale pel quale vale il teorema di continuità degli integrali rispetto ai valori iniziali

$$(15.23) \qquad \left(\frac{\delta x^\nu}{dt} \right)_{t \to t_1} = \left(\lim_{t_0 \to t} \frac{x^\nu(t_0/t) - x^\nu(t_0)}{t - t_0} \right)_{t \to t_1} =$$

$$= \left(\lim_{t_0 \to t} \frac{x^\nu(t) - x^\nu(t/t_0)}{t - t_0} \right)_{t \to t_1} = \lim_{t_0 \to t} \frac{x^\nu(t_1/t) - x^\nu(t_1/t_0)}{t - t_0} = \frac{dx^\nu(t_1/t)}{dt}$$

Dunque: $\left(\frac{\delta x^\nu}{dt} \right)_{t \to t_1}$ è un'effettiva derivata ordinaria; e siccome la (15.23) equivale a

$$(15.24) \qquad \frac{\delta x^\nu}{dt} = \left(\frac{dx^\nu(t_1/t)}{dt} \right)_{t_1 \to t}$$

si vede bene quale sia l'effettiva costruzione della

derivata assoluta $\frac{\delta x^\nu}{dt}$ nel punto generico t di Γ :

a) trasporto della serie $x^\nu(t)$ nel punto fisso (ma qualunque) t_1 di Γ ;

b) derivazione ordinaria, nello spazio tangente in questo punto t_1 ,della serie $\hat{x}^\nu(t) = x^\nu(t_1/t)$ ottenuta come immagine tangenziale;

c) trasporto da t_1 al primitivo punto t (cioè,ridistribuzione lungo Γ)delle derivate ottenute.

Vedremo a suo tempo come analoghe vedute guidino nella costruzione delle "estensioni" di un tensore.

Tenuto presente che

$$(15.25)\qquad x^\nu(t_0/t) = x^\nu(t_0)+\left(\frac{dx^\nu(t_0/t)}{dt}\right)_0 t+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2x^\nu(t_0/t)}{dt^2}\right)_0 t^2+\cdots,$$

(ove con l'indice $_0$ contrassegniamo i valori calcolati in t_0), vediamo che le (15.24) dànno senz'altro di nuovo le (15.13), come volevamo.

Per la rappresentazione dell'immagine tangenziale di una linea Γ abbiamo già dato le (15.17) che presuppongono però l'uso di un B-riferimento. Anche in relazione a un A_0-riferimento possiamo facilmente ricavare l'immagine tangenziale quale luogo del vertice $\hat{a}_0$ del sistema proiettivo locale nel punto generico di Γ : riportato secondo le (15.5) - ove porremo $\Phi(t)=0$-nello spazio tangente in t_0 .Per $\nu=0$ le (15.5) dànno

$$(15.26)\qquad d\hat{a}_0^{\lambda'} = \Lambda^{\mu}_{0\,j}\,\hat{a}_\mu^{\lambda'}\,du^j\ .$$

Non presenterebbe difficoltà il procedere sino a trovare una rappresentazione integrale di $\hat{a}_0^{\lambda'}(t)$ .Ma veniamo ora al problema delle geodetiche, cioè - come dicevamo - delle linee le cui immagini tangenziali sono linee rette. E' ovvio che basterà esprimere l'allineamento dei punti $\hat{a}_0^{\lambda'}$, $d\hat{a}_0^{\lambda'}$, $d^2\hat{a}_0^{\lambda'}$ se vogliamo che l'immagine tangenziale di $a_0^{\lambda'}(t)$ sia appunto una linea retta. Abbiamo già espresso $d\hat{a}_0^{\lambda'}$; per $d^2\hat{a}_0^{\lambda'}$ abbiamo

(15.27) $$d\overset{2}{\underset{\circ}{\hat{a}}}{}^{\hat{\lambda}'} = \left(\partial_h \Lambda^{\mu}_{\circ j}\, du^j du^h + \Lambda^{\mu}_{\circ j}\, d^2u^j + \Lambda^{\nu}_{\circ j}\Lambda^{\mu}_{\nu h}\, du^j du^h\right)\hat{a}^{\hat{\lambda}'}_{\mu};$$

la condizione allineamento sopra precisata si esprime:

(15.28) $$\Lambda^{2}_{\circ j}\, d^2u^j + \left(\partial_h \Lambda^{2}_{\circ j} + \Lambda^{2}_{\nu h}\Lambda^{\nu}_{\circ j}\right) du^j du^h = \psi \Lambda^{2}_{\circ j}\, du^j,$$

ove ψ è un fattore (infinitesimo) di proporzionalità. (Notiamo che soltanto su questo fattore si rifletterebbe il tener conto del termine delle (15.5), che abbiamo trascurato ponendo $\Phi(t) = 0$).

Le (15.28) dànno in relazione a un A_0-riferimento la rappresentazione analitica delle geodetiche. Ma le semplifichiamo notevolmente passando a un B-riferimento, sì da poterci valere delle (14.14). Sostituendo nelle (15.28) queste divengono

(15.29) $$d^2u^k + \left(\Lambda^{k}_{jh} + \delta^{k}_{h}\Lambda^{\circ}_{\circ h}\right) du^j du^h = \psi\, du^k;$$

o facendovi figurare, mediante le (14.17), i parametri normalizzati Γ^{i}_{jk}, e introducendo un parametro t:

(15.30) $$\frac{d^2u^k}{dt^2} + \Gamma^{i}_{jk}\frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt} = \Phi(t)\frac{du^k}{dt}.$$

Queste sono evidentemente le geodetiche di una connessione affine, avente quali parametri, in relazione al presupposto riferimento, le Γ^{i}_{jk}.

Dunque: le geodetiche di una connessione proiettiva sono anche le geodetiche di infinite connessioni affini: i cui parametri, relativi a una scelta delle coordinate curvilinee, saranno gli infiniti valori dei parametri Γ^{i}_{jk}, corrispondenti ai B-riferimenti compatibili con quelle coordinate curvilinee: cioè alla scelta degli iperpiani $x^\circ = 0$ dei riferimenti locali.

Effettivamente se cambiamo le sole coordinate curvilinee u^i e non gli iperpiani $x^\circ = 0$, cioè nelle (14.20 od (8.46), (12.25), poniamo $\vartheta^{\circ}_{i'} = 0$, abbiamo

(15.31) $$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \Gamma^{i}_{jk}\,\vartheta^{j}_{j'}\vartheta^{k}_{k'}\vartheta^{i'}_{i} + \partial_{k'}\vartheta^{i}_{j'}\cdot\vartheta^{i'}_{i} ,$$

(15.32) $$\Gamma^{o'}_{j'k'} = \vartheta^{j}_{j'}\vartheta^{k}_{k'}\Gamma^{o}_{jk} ;$$

e se invece teniamo fisso il sistema curvilineo, onde $\vartheta^{i}_{i'} = \delta^{i}_{i'}$, e invece cambiamo gli iperpiani $x^o = 0$, sostituendoli con gli iperpiani $x^{o'} = x^o + \vartheta^{o'}_{i} x^i = 0$, che sono pei iperpiani qualunque degli spazi tangenti purchè non passanti pe punti di contatto, abbiamo i nuovi parametri

(15.33) $$\hat{\Gamma}^{i}_{jk} = \Gamma^{i}_{jk} + \delta^{i}_{j}\varphi_k + \delta^{i}_{k}\varphi_j ,$$

(15.34) $$\hat{\Gamma}^{o}_{jk} = \Gamma^{o}_{jk} + \delta_k\varphi_j - \Gamma^{i}_{jk}\varphi_i - \varphi_j\varphi_k ;$$

scritto φ_i al luogo di ϑ^{o}_{i}.

Le (15.31) sono proprio le formule di trasformazione dei parametri di una connessione affine; e le (15.33) dànno di questa proprio la più generale trasformazione che ne conserva le geodetiche e la torsione.
(Si badi, che la connessione affine Γ^{i}_{jk} generica sarà in generale asimmetrica: la sua torsione è un ente legato alla connessione, proiettiva sul quale torneremo al n. 17).

Le (15.32) mostrano che Γ^{o}_{jk} è pei cambiamenti delle sole coordinate curvilinee un tensore affine: le (15.34) coincidono con le (8.32) (pag.58) ove sia posto $M=1$; dunque, come a priori era evidente, varranno senz'altro, in quanto non si basino sulla simmetria delle Γ^{i}_{jk} rispetto ad j,k, che ora non è presupposta, gli sviluppi e i risultati del n.8, e particolarmente:

la connessione proiettiva determina anche, sulle singole geodetiche (a meno d'una trasformazione lineare fratta) un parametro proiettivo π, e insieme ad esso un secondo parametro u^o, tali che si abbia lungo le geodetiche,

(15.35) $$\frac{\overset{(\Gamma)}{\delta^2} u^\lambda}{d\pi^2} = \frac{d^2u^\lambda}{d\pi^2} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{du^\mu}{d\pi}\frac{du^\nu}{d\pi} = 0.$$

Ma ora possiamo dare di queste equazioni una interpretazione espressiva: i punti $\frac{du^\lambda}{d\pi}$ sono punti convenienti (e anche convenientemente normalizzati) presi sulle rette associate alle tangenti della geodetica che si considera. Dunque : le linee geodetiche di una connessione proiettiva sono caratterizzate da questa proprietà: che le rette associate alle loro tangenti contengono una serie di punti che variano, lungo la curva, per traslazione proiettiva.

Possiamo infine dare l'effettiva costruzione geometrica delle connessioni affini Γ^i_{jk} e mostrare come esse vengano individuate dalla connessione proiettiva quando si assegni un campo d'iperpiani sugli spazi tangenti.

Riprendiamo le formule (14.3) della rappresentazione proiettiva (omografica) determinata dalla connessione proiettiva fra gli spazi tangenti nei punti u^i ed $u^i = u^i + du^i$: che possiamo anche scrivere, in relazione a un B-riferimento

$$(15.36) \qquad {}^*x^\lambda \equiv x^\lambda - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} x^\mu du^\nu ;$$

cioè

$$(15.37) \qquad \begin{cases} {}^*x^i \equiv x^i - \Gamma^i_{jk} x^j du^k - x^\circ du^i - x^i du^\circ , \\ {}^*x^\circ \equiv x^\circ - \Gamma^\circ_{jk} x^j du^k - x^\circ du^\circ . \end{cases}$$

Risulta evidente che questa omografia infinitesima Ω si può spezzare nel prodotto delle due seguenti:

$$(15.38) \qquad \begin{cases} \hat{x}^i \equiv x^i (1 - du^\circ) \\ \hat{x}^\circ \equiv x^\circ (1 - du^\circ) - \Gamma^\circ_{jk} x^j du^k , \end{cases} \qquad (S)$$

e

$$(15.39) \qquad \begin{cases} {}^*x^i = x^i - \hat{x}^\circ du^i - \Gamma^i_{jk} \hat{x}^j du^k \\ {}^*x^\circ = \hat{x}^\circ \end{cases} . \qquad (A)$$

Ora: la (15.38) può interpretarsi come un'omologia speciale S entro lo spazio π tangente nel supposto punto u^i, che diremo O; essa ha in O il centro.

La (15.39) muta l'uno nell'altro gli iperpiani $x^\circ = 0$ dei riferimenti proiettivi locali dati in $O(u^i)$ o nel punto infinitamente vicino $^*O(u^i + du^i)$.

Ora interpretando tali iperpiani τ e $^*\tau$ entro π e $^*\pi$ (spazio tangente in $^*O$) quali iperpiani impropri si fanno di $\pi, ^*\pi$ due spazi affini, e fra essi l'omografia (15.39), che indicheremo con A, si può riguardare come un'affinità: essa è proprio la rappresentazione affine che fra i due spazi $\pi, ^*\pi$ determina la connessione affine Γ^i_{jk}, come appare evidente passando a coordinate non omogenee $\frac{^*x^i}{^*x^\circ}$ e $\frac{\hat{x}^i}{\hat{x}^\circ}$ (da interpretarsi come coordinate cartesiane sui due spazi affini) e confrontando con le (2.4), pag. 12.

Se indichiamo con τ_1 l'iperpiano dello spazio π che dall'omografia $\Omega = SA$ viene mutato in $^*\tau$ avremo infine che l'omologia speciale S muta τ_1 in τ: questa condizione determina anche l'iperpiano d'omologia, che d'altra parte ha l'equazione

$$\Gamma^\circ_{jk}\, x^j\, du^k = 0 \,; \tag{15.40}$$

quindi, anche la stessa omologia risulta del tutto determinata.

Possiamo concludere:

Data in una X_n una connessione proiettiva, e detti $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ i suoi parametri normalizzati in relazione un B-riferimento; assegnato poi a piacere entro gli spazi π tangenti alla X_n un campo d'iperpiani τ (purchè non passanti pe rispettivi punti di contatto), la rappresentazione omografica Ω che la connessione determina fra due spazi tangenti $\pi, ^*\pi$ infinitamente vicini si scompone (univocamente) nel prodotto di una omologia speciale S (di π in sè) che ha il punto di contatto O come centro e muta in τ l'iperpiano τ_1 omologo in Ω di $^*\tau$ (iperpiano del campo, dato entro $^*\pi$) per una omografia la qusle muta τ in $^*\tau$ e quindi può interpretarsi come

una affinità A . Assunti gli iperpiani τ e $^*\mathcal{E}$ come iperpiani fondamentali dei riferimenti locali in π e $^*\pi$ la S ha quale iperpiano d'omologia l'iperpiano (15.40); la A è la rappresentazione affine fra π e $^*\pi$ determinata dalla connessione affine Γ°_{jk} .

Si noti che quanto precede ci dà anche una interpretazione geometrica delle Γ°_{jk} , o meglio dei loro mutui rapporti : infatti la (15.40) si può interpretare come l'equazione di una correlazione, entro lo spazio π fra la stella O e l'iperpiano π : la quale a ciascuna direzione (o, se si vuole, a ciascuna retta) du^i della stella O fa corrispondere l'intersezione dell'iperpiano con quello ottenuto in π per traslazione proiettiva da $^*O$ $(u^i + du^i)$ ad O , a partire dall'iperpiano $^*\tau$ che è associato ad $^*O$. Tale correlazione C dà luogo a una correlazione K della stella O in sè, se alla direzione (du^i) facciamo corrispondere l'iperpiano che da O proietta l'S_{n-2} omologo in C ; allora e solo che K si riduce a una polarità le Γ°_{jk} sono simmetriche rispetto ad j, k . Questa però non è una proprietà della connessione proiettiva: ma dipende anche dalla scelta degli iperpiani $x^\circ = 0$ dei riferimenti locali. E infatti le (15.34) mostrano che sotto certe condizioni potremo rendere $\Gamma^{\circ}_{jk} = \Gamma^{\circ}_{kj}$, disponendo della scelta delle φ_i cioè degli iperpiani $x^\circ = 0$; ma su questo torneremo .

Ad ogni modo risulta chiaro, tenute presenti le (8.31), come le Γ°_{jk} valgano a determinare: 1) la scelta di un parametro proiettivo (a meno d'una trasformazione lineare fratta) su ciascuna geodetica; 2) la correlazione K nella stella O ; e viceversa, da questi enti - non indipendenti fra loro- esse risultino determinate. E appare anche del tutto chiaro, perchè la scelta di una fra le infinite connessioni affini (simetriche, o anche, aventi uno stesso tensore di torsione aventi le geodetiche della supposta connessione proiettiva equivalga proprio alla scelta degli iperpiani $x^\circ = 0$ ciò completa il collegamento degli attuali sviluppi con quelli esposti ai nn. 8 e 9 della Parte I.

Gli iperpiani τ in relazione ai quali sono determinati la connessione affine Γ^i_{jk} e il tensore affine Γ°_{jk} (cioè: i fattori S ed A nella generica decomposizione dell'omografia Ω)anzichè prendersi quali iperpiani $x^\circ = 0$ per un B-riferimento possono essere dati mediante un campo di vettori proiettivi covarianti A_α : "geometrici" cioè dati a meno di un fattore. Dovendo però essere $A_\circ \neq 0$,perchè gli iperpiani non debbono passare pei punti di contatto degli spazi tangenti, possiamo scegliere quel fattore ad es. rendendo $A_\circ = -1$: questo (come abbiamo visto al n.9) ha significato invariante pei cambiamenti del B-riferimento. Le componenti A_i avranno allora la legge di trasformazione

$$A_{i'} = \vartheta^i_{i'} A_i - \vartheta^\circ_{i'} . \tag{15.41}$$

La connessione affine e il tensore affine che vengono così determinati (e che potremo dire "subordinati" al supposto campo d'iperpiani A_α) sono, come immediatamente risulta dalle (15.33) e (15.34), ove basta porre $\varphi_i = A_i$:

$$A^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j A_k + \delta^i_k A_j , \tag{15.42}$$

$$p_{ik} = \Gamma^\circ_{jk} + \partial_k A_j - \Gamma^i_{jk} A_i - A_j A_k . \tag{15.43}$$

E' chiaro come basti appunto mettere $\varphi_i = A_i$ nelle (15.33) e (15.34): le (15.41) danno appunto $A_{i'} = 0$ (il che esprime che gli iperpiani del campo sono presi come iperpiani $x^{o'} = 0$) senza cambiamento delle coordinate curvilinee a condizione che si prenda $A_i = \vartheta^\circ_{i'}$: che nelle (15.33) e (15.34) era designato con φ_i .

Aggiungiamo ancora un'osservazione dovuta a E.Vano, relativamente alle geodetiche, o meglio al parametro proiettivo π su di esse. Secondo CARTAN abbiamo espresso che la linea $\Gamma, u^i = u^i(t)$, è geodetica scrivendo che per la sua immagine tangenziale, relativa a un suo punto $t_\circ$, luogo del punto $\hat{a}^{\lambda'}(t)$, sono allineati i punti $\hat{a}^{\lambda'}$,

$d\hat{a}^{\lambda'}_{\circ}$, $d^2\hat{a}^{\lambda'}_{\circ}$.

Ora: su una retta in un ordinario spazio proiettivo si può introdurre una coordinata proiettiva π: se $b^{\lambda'}, c^{\lambda'}$ e $b^{\lambda'}+c^{\lambda'}$ sono i punti fondamentali ed unità su una retta descritta dal punto $\hat{a}^{\lambda'}_{\circ}$ avremo ad es.

$$\hat{a}^{\lambda'}_{\circ} = b^{\lambda'}\pi + c^{\lambda'} \tag{15.44}$$

e quindi

$$\frac{d^2\hat{a}^{\lambda'}_{\circ}}{d\pi^2} = 0 . \tag{15.45}$$

Ebbene è precisamente questo parametro π il più generale parametro proiettivo sulla geodetica di cui $\hat{a}^{\lambda'}_{\circ}$ descrive l'immagine tangenziale. Infatti normalizzate, come ovviamente è lecito, le coordinate dei punti $\hat{a}^{\lambda'}_{\mu}$ sì da avere

$$\frac{d\hat{a}^{\lambda'}_{\mu}}{d\pi} = \Gamma^{\nu}_{\mu\tau}\,\hat{a}^{\lambda'}_{\nu}\,\frac{du^{\tau}}{d\pi} \tag{15.46}$$

abbiamo in forza delle (15.45):

$$\frac{d}{d\pi}\left(\Gamma^{\nu}_{\circ\tau}\,\hat{a}^{\lambda'}_{\nu}\,\frac{du^{\tau}}{d\pi}\right) = 0, \tag{15.47}$$

cioè, svolgendo e tenendo presenti le (15.46):

$$\left(\frac{d^2u^{\tau}}{d\pi} + \Gamma^{\tau}_{\lambda\mu}\,\frac{du^{\lambda}}{d\pi}\,\frac{du^{\mu}}{d\pi}\right)\hat{a}^{\lambda'}_{\tau} = 0; \tag{15.48}$$

il che è appunto condizione necessaria e sufficiente perchè la curva sia una curva geodetica e su essa π sia parametro proiettivo.

16. Applicazione determinazione delle connessioni affini simmetriche proiettivamente piane (rappresentazione della connessione proiettiva integrabile dell' S_n proiettivo mediante un B-riferimento)

Diamo una semplice applicazione dei risultati del n.

prec. ricavando la costruzione geometrica di tutte le connessioni affini simmetriche proiettivamente piane. Tale costruzione pel caso particolare delle connessioni equiaffini proiettivamente piane è stata indicata nel 1929 da WHITEHEAD; pel caso generale da me nel 1932(con alcuni ulteriori sviluppi in lavori del 1938).

Partiamo dall'osservazione che una ben determinata connessione proiettiva, se pure affatto banale, esiste nell'ordinario spazio proiettivo S_n ; pensato, come è naturale, lo spazio proiettivo tangente all' S_n in ciascun suo punto coincidente con l' S_n medesimo, tale connessione è quella cui corrisponde, quale rappresentazione omografica associata a due qualunque punti infinitamente vicini (o anche a distanza finita) l'identità.

La più semplice rappresentazione analitica di questa particolare connessione proiettiva (ovviamente integrabile) si ha in relazione a un riferimento proiettivo fisso nell' S_n , costituente, se si vuole, nell' S_n un A-riferimento. Rispetto a tale sistema proiettivo siano $y^\alpha_o \ (\alpha, \beta, \gamma, \delta = \vec{O}, \vec{1}, \ldots, \vec{n})$ coordinate proiettive omogenee dei punti dello spazio; la legge di trasporto della connessione è naturalmente espressa dalle formule

$$\frac{dy^\alpha}{dt} = \gamma(t)\, y^\alpha \ , \tag{16.1}$$

appunto esprimenti che il punto y^α è fisso. Si vede di qui che la connessione in parola ha, in relazione a quell'A-riferimento, un sistema dei valori dei parametri misti $\Lambda^\alpha_{\beta i}$ costituito da numeri tutti nulli (indipendentemente dalla scelta delle coordinate curvilinee, che potrebbero ad esempio coincidere con le coordinate proiettive non omogenee $y^i = \frac{y^i}{y^o}$).

E' immediata l'osservazione che le geodetiche della connessione in parola sono le linee rette dello spazio S_n (E infatti, più in generale l'immagine tangenziale di qualunque curva dell' S_n relativa a ciascun suo punto è la curva medesima).

Rappresentiamo la connessione ora detta in relazione a un qualunque A_o-riferimento costituito riferendo i punti dell' S_n a un qualunque sistema di coordinate cur-

vilinee, col porre

$$(16.2) \qquad y^\alpha = \overset{\circ}{y}{}^\alpha(u^1, u^2, \ldots, u^n) \; ;$$

(ove i secondi membri sono funzioni non tutte nulle, determinate anche a meno d'un comune fattore $\neq 0$) e a ciascun punto u^i associando un sistema proiettivo locale di vertici

$$(16.3) \qquad \underset{\lambda}{a}{}^\alpha = \underset{\lambda}{\overset{\circ}{a}}{}^\alpha(u^1, u^2, \ldots, u^n) \; ,$$

con la condizione che sia

$$(16.4) \qquad \overset{\circ}{a}{}^\alpha = \overset{\circ}{y}{}^\alpha \; .$$

Siano x^λ le coordinate proiettive locali, relative al punto y^α , di un qualunque punto y^α dello spazio: cioè si abbia $y^\alpha = \overset{\circ}{y}{}^\alpha x^\lambda$.

Le (16.1) divengono

$$(16.5) \qquad \frac{d}{dt}\left(\underset{\lambda}{a}{}^\alpha x^\lambda\right) = \varphi(t)\, \underset{\lambda}{a}{}^\alpha x^\lambda ,$$

cioè con facili sviluppi

$$(16.6) \qquad \frac{dx^\lambda}{dt} + \Lambda^\lambda_{\mu i}\, x^\mu \frac{du^i}{dt} = \varphi(t) x^\lambda \; ;$$

ove abbiamo posto, indicati con $\overset{\lambda}{a}_\alpha$ gli elementi reciproci delle $\underset{\lambda}{a}{}^\alpha$ nel determinante $\left|\underset{\lambda}{a}{}^\alpha\right|$:

$$(16.7) \qquad \Lambda^\lambda_{\mu i} = \overset{\lambda}{a}_\alpha \partial_i \underset{\mu}{a}{}^\alpha$$

(cfr. con le (12.18)). Questi sono i parametri della connessione in relazione all' A_0-riferimento. Ma ora riduciamo questo a un B-riferimento lasciando inalterati gli iperpiani $x^\circ = 0$, cioè $\overset{\circ}{a}_\alpha$, che sono iperpiani comunque associati ai punti $\overset{\circ}{a}{}^\alpha = \overset{\circ}{y}{}^\alpha$ purchè non passanti per essi; e portando i vertici $\overset{\circ}{a}{}^\alpha$ dei sistemi proiettivi locali sulle tangenti, in $\overset{\circ}{y}{}^\alpha$, alle n linee coordinate u^i . Posto per semplicità

$$(16.8) \qquad \underset{i}{y}{}^\alpha = \frac{\partial \overset{\circ}{y}{}^\alpha}{du^i}$$

dovremo esprimere che, con fattori A_i convenienti, si ha

$$(16.9) \qquad a_i^\alpha = y_i^\alpha + A_i\, y_0^\alpha .$$

Ricaviamo subito

$$(16.10) \qquad A_i = -\mathring{a}_\alpha\, y_i^\alpha ;$$

cioè sostituendo

$$(16.11) \qquad a_i^\alpha = y_i^\alpha - \mathring{a}_\beta\, y_i^\beta y_0^\alpha .$$

Tenute presenti le (16.7) calcoliamo ora i parametri normalizzati $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ della connessione di S_n in relazione al B-riferimento supposto, avremo $\left(\Gamma_{\mu 0}^\lambda = \Gamma_{0\mu}^\lambda = \delta_\mu^\lambda\right)$; e inoltre

$$(16.12) \qquad \Gamma_{ji}^k = \Lambda_{ji}^k - \delta_j^k \Lambda_{0i}^\circ = \mathring{a}_\alpha^k \partial_i a_j^\alpha - \delta_j^k \mathring{a}_\alpha \partial_i a_0^\alpha =$$

$$= \mathring{a}_\alpha^k \partial_{ij}^2 y_0^\alpha - \mathring{a}_\alpha \left(\delta_i^k y_j^\alpha + \delta_j^k y_i^\alpha\right) ;$$

$$(16.13) \qquad \Gamma_{ji}^\circ = \mathring{a}_\alpha \partial_{ij}^2 y_0^\alpha + \partial_i A_j .$$

Le (16.12) dànno, per ciascuna scelta degli iperpiani $\mathring{a}_\alpha$, una connessione affine simmetrica in S_n ; la quale dovendo avere le stesse geodetiche della connessione proiettiva di S_n è proiettivamente piana. Ma anche viceversa: data in una X_n qualunque una connessione affine simmetrica e proiettivamente piana, e detti Γ_{ji}^k i suoi parametri in relazione un sistema curvilineo arbitrario u^i, potremo anzitutto valendoci della presupposta rappresentazione della X_n su di un S_n proiettivo (la quale muta le geodetiche della connessione supposta in X_n nelle linee rette dell' S_n) interpretare le u^i quali coordinate curvilinee nello stesso S_n e le Γ_{ji}^k quali parametri di una connessione affine nell' S_n. In quanto questa è simmetrica e ha come geodetiche le linee rette dell' S_n essa è di necessità una delle connessioni affini che vengono determinate in S_n nel modo sopra precisato, in relazione a una conveniente scelta di un

campo d'iperpiani a°_{α}. (Ved.n. prec.). Abbiamo così la costruzione della più generale connessione affine simmetrica proiettivamente piana, che ora preciseremo anche nei riguardi geometrici, utilizzando i risultati generali del n. prec. Premettiamo che si dice trasformazione dualistica in S_n proiettivo una corrispondenza fra i punti e gli iperpiani dell' S_n; caso particolare ben noto è quello delle correlazioni e (più in particolare) delle polarità in S_n. Dare in S_n un campo d'iperpiani, associati ai suoi punti, è dunque lo stesso che dare una trasformazione dualistica e anzi, univoca in un senso almeno (perchè ad ogni punto essa deve associare un iperpiano). Diciamo che una trasformazione dualistica (univoca nel significato ora precisato; questo d'ora in poi verrà sottinteso) è nulla o di tipo nullo se ciascun punto appartiene all'iperpiano omologo (come nel caso classico delle polarità nulle); è non nulla nel caso contrario. Ciò posto:

La più generale connessione affine simmetrica proiettivamente piana può realizzarsi in S_n proiettivo assegnando a piacere una trasformazione dualistica non nulla: interpretando in relazione a ciascun punto P dell' S_n l'iperpiano omologo π quale iperpiano improprio di una geometria affine locale, e dando come legge di rappresentazione affine fra gli spazi affini locali che si riferiscono a due punti infinitamente vicini P, $^*P$ l'omologia speciale di centro P che muta π in $^*\pi$ (iperpiano omologo di $^*P$). I parametri della connessione in parola, relativi a un qualunque sistema curvilineo u^i in S_n, si ottengono quali parametri normalizzati Γ^i_{jk} della connessione proiettiva integrabile $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ di S_n assumendo gli iperpiani associati ai punti dell' S_n quali iperpiani $x^{\circ}=0$ dei sistemi coordinati proiettivi locali (del R-riferimento).

Vediamo sotto quali condizioni la connessione affine proiettivamente piana determinata in S_n assegnando una trasformazione dualistica è equiaffine: il che vuol dire, come è ben noto, che in relazione una conveniente scelta delle unità di volume (n-dimensionale) locali la legge di trasporto affine determinata dalla connessione

conserva i volumi. Condizione analitica perchè la connessione affine Γ^i_{jk} sia equiaffine è che pel suo tensore di curvatura

$$\Gamma^{\cdots j}_{hki} = \partial_k \Gamma^j_{ih} - \partial_h \Gamma^j_{ik} + \Gamma^l_{ih}\Gamma^j_{lk} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^j_{lh} \tag{16.14}$$

si abbia

$$\Gamma^{\cdots i}_{hki} = \partial_k \Gamma^i_{ih} - \partial_h \Gamma^i_{ik} = 0. \tag{16.15}$$

Nel nostro caso, essendo

$$\Gamma^i_{ij} = a^i_\alpha \partial_j a^\alpha_i - n a^\circ_\alpha \partial_j a^\alpha_\circ$$
$$= a^\lambda_\alpha \partial_j a^\alpha_\lambda - (n+1) a^\circ_\alpha y^\alpha_j = \partial_j \log a + (n+1) A_j, \tag{16.16}$$

ove abbiamo posto

$$a = \left| a^\alpha_\lambda \right| , \tag{16.17}$$

la condizione perchè la connessione affine subordinata alla supposta trasformazione duale sia equiaffine è che sia

$$\partial_h A_j - \partial_j A_h = 0 ; \tag{16.18}$$

cioè, tenute presenti le (16.10) : che si abbia

$$\partial_h a^\circ_\alpha \cdot y^\alpha_j - \partial_j a^\circ_\alpha \cdot y^\alpha_h = 0 ; \tag{16.19}$$

o ancora, tenute presenti le (16.13) : che risulti

$$\Gamma^\circ_{ji} = \Gamma^\circ_{ij} . \tag{16.20}$$

(Con la terminologia e le notazioni adottate nel n. prec. se A^i_{jk} , p_{jk} sono le connessioni affini e il tensore affine subordinati a un campo d'iperpiani in S_n si equivalgono le condizioni: che A^i_{jk} sia equiaffine, che p_{jk} sia simmetrico).

Portiamo le (16.19) a una forma più espressiva; le

ipersuperficie" di S_n , rappresentata dall'equazione

(16.28) $$\Phi(y^0, y^1, \ldots, y^n) = 0$$

ove

(16.29) $$\Phi = k e^F , \qquad (k = cost \neq 0).$$

(Cfr. n.12). Si può notare che questa funzione Φ a partire dalle a_α è determinata, a meno d'un fattore $\neq 0$, dalle due condizioni: di essere omogenea di grado 1 nelle y^α, e tale che gli iperpiani $a_\alpha y^\alpha = 0$ siano rappresentati anche dalle equazioni $\frac{\partial \Phi}{\partial y^\alpha} y^\alpha = 0$.

Quanto precede ci dà in sostanza una caratterizzazione geometrica, se pure indiretta, delle trasformazioni dualistiche di S_n interpretabili quali "polarità";per le quali cioè esiste una funzione Φ,omogenea di grado 1, delle y^α tale che sia $\frac{\partial \Phi}{\partial y^\alpha} y^\alpha = 0$ l'equazione dell'iperpiano omologo del punto y^α. Esse sono le trasformazioni dualistiche che dànno luogo, con la costruzione precisata poco sopra, a connessioni proiettivamente piane equiaffini.

Un caso particolamente semplice e notevole è quello in cui la superficie (16.28) è una quadrica, cosicchè la trasformazione dualistica è un'effettiva polarità nel l'ordinario significato. La connessione affine allora si riduce a quella riemanniana a curvatura costante, cioè non-euclidea, che ha la supposta quadrica come assoluto. Più in generale il WEYL ha dimostrato che per $n > 2$ le sole geometrie a connessione affine simmetriche e proiettivamente piane in ambiente n-dimensionale che siano metriche, tali cioè che in relazione a un conveniente tensore g_{ik} assunto come tensore metrico fondamentale la relativa legge di trasporto conservi gli angoli e i rapporti di lunghezza, sono le geometrie riemanniane a curvatura costante, cioè le metriche proiettive secondo Cayley. Pel caso n=2 si presenta invece una eccezione(*).

(*) A questo proposito rimando alle annotazioni che seguiranno questa II Parte; e al mio lav.[2] già citato

17.- Curvatura e torsione di una connessione proiettiva.

Veniamo ora a una nozione fondamentale, che nell'aspetto formale è stata già occasionalmente accennata (n. 9 ,p.68 e seg.): quella di curvatura di uno spazio a connessione proiettiva; cui, a differenza di quanto accade per gli spazi a connessione affine, è subordinata la nozione di torsione.

Riprendiamo per un momento le considerazioni svolte all'inizio del n. precedente: abbiamo visto che lo spazio proiettivo ordinario S_n possiede una particolare connessione proiettiva (integrabile) la quale ha un sistema di parametri misti ($\Lambda^{\mu}_{\nu i}$) costituito da numeri tutti nulli. Si presenta questo problema: dato in una varietà X_n (n.13) un A-riferimento e in relazione ad esso un sistema di parametri misti $\Lambda^{\mu}_{\nu i}$, sotto quali condizioni potremo identificare la connessione proiettiva che essi rappresentano con la connessione integrabile dell' S_n e la X_n con uno spazio S_n ?

La condizione manifestamente è questa: che mediante convenienti trasformazioni (13.28) e (13.12) si possa passare dai parametri supposti $\Lambda^{\mu}_{\nu i}$ a nuovi parametri misti tutti nulli.

Ora: anzitutto le (13.12) ,cioè

$$\hat{\Lambda}^{\mu}_{\nu i} = \Lambda^{\mu}_{\nu i} + \delta^{\mu}_{\nu}\psi_i \tag{17.1}$$

mostrano che, date le $\Lambda^{\mu}_{\nu i}$, si potrà determinare ψ_i in modo che le $\hat{\Lambda}^{\mu}_{\nu i}$ si annullino a condizione che sia

$$\Lambda^{\mu}_{\nu i} - \frac{1}{n+1}\delta^{\mu}_{\nu}\Lambda^{\tau}_{\tau i} = 0 \; ; \tag{17.2}$$

cioè, ricordando le (13.15): che si abbia

$$L^{\mu}_{\nu i} = 0 . \tag{17.3}$$

Dunque: la connessione $\Lambda^{\lambda}_{\mu i}$ coincide con quella integra-

bile dell' S_n a condizione che per una conveniente scelta dell'A-riferimento essa assuma parametri $L^{\lambda'}_{\mu' i'}$ tutti nulli. Ci conviene dunque riprendere le formule (14.34) di trasformazione delle $L^{\lambda}_{\mu i}$; nelle quali anzi faremo senz'altro $\vartheta^{i}_{i'} = \delta^{i}_{i'}$, ridurremo cioè all'identità il cambiamento delle coordinate curvilinee), tenuto conto che per questi cambiamenti $L^{\lambda}_{\mu i}$ si comporta come un tensore.

Dobbiamo dunque esprimere le condizioni d'integrabilità del sistema, nelle funzioni incognite $q^{\lambda}_{\lambda'}(u', u^2, \dots, u^n)$

$$(17.4) \qquad \left(\partial_i q^{\lambda}_{\mu'} + L^{\lambda}_{\mu i} q^{\mu}_{\mu'}\right) q^{\lambda'}_{\lambda} - \frac{1}{n+1} \delta^{\lambda'}_{\mu'} \partial_i \log q = L^{\lambda'}_{\mu' i} = 0.$$

Ma conviene semplificare questo sistema normalizzando opportunamente le funzioni incognite: poniamo

$$(17.5) \qquad p^{\lambda}_{\mu'} = q^{-\frac{1}{n+1}} q^{\lambda}_{\mu'} \qquad q = |q^{\lambda}_{\mu'}|$$

e risulterà immediata la verifica che il sistema (17.4) prende la forma

$$(17.6) \qquad \left(\partial_i p^{\lambda}_{\mu'} + L^{\lambda}_{\mu i} p^{\mu}_{\mu'}\right) p^{\lambda'}_{\lambda} = 0$$

cioè

$$(17.7) \qquad \partial_i p^{\lambda}_{\mu'} = - L^{\lambda}_{\mu i} p^{\mu}_{\mu'} .$$

La determinazione delle condizioni d'integrabilità è agevole: otteniamo

$$(17.8) \qquad \left(-\partial_j L^{\lambda}_{\mu i} + L^{\lambda}_{\nu i} L^{\nu}_{\mu j}\right) p^{\mu}_{\mu'} = \left(-\partial_i L^{\lambda}_{\mu j} + L^{\lambda}_{\nu j} L^{\nu}_{\mu i}\right) p^{\mu}_{\mu'} ;$$

cioè, infine, abbiamo la condizione, necessaria e sufficiente, che sia

$$(17.9) \qquad R^{\dots \lambda}_{i j \mu} = 0 ,$$

ove abbiamo posto

$$(17.10) \qquad R^{\dots \lambda}_{i j \mu} = \partial_j L^{\lambda}_{\mu i} - \partial_i L^{\lambda}_{\mu j} + L^{\nu}_{\mu i} L^{\lambda}_{\nu j} - L^{\nu}_{\mu j} L^{\lambda}_{\nu i} .$$

Le (17.9) dunque caratterizzano le connessioni proiettive che possono identificarsi con quella dell' S_n ; come vedremo fra poco il primo membro contiene proprio il tensore di curvatura della connessione proiettiva.

Vediamo appunto come anche un altro problema dia luogo a questo ente $R_{ij\mu}^{\ \ \ \ \lambda}$ e ne ponga anzi in evidenza il carattere di tensore. E' il problema del trasporto ciclico per traslazione proiettiva.

Dati nella supposta varietà (P_n) a connessione proiettiva un punto $P(u^i)$ e una giacitura piana (2-direzione) per esso, supponiamo di tracciare entro P_n una superficie, σ, che passi per P con la supposta giacitura; e su σ un doppio sistema ∞^1 di linee, tale che in una regione di σ contenente P per ciascun punto passino, senza toccarsi, una linea del 1° e una del 2° sistema. Indichiamo infine con d_1, d_2 i differenziali presi rispetto a parametri (v^1, v^2) cui sono riferite le linee dei due sistemi. Siano $P_2(u^i + d_1u^i + \frac{1}{2}d_1^2u^i + \dots)$, $P_1(u^i + d_2u^i + \frac{1}{2}d_2^2u^i + \dots)$ due punti infinitamente vicini a P sulle linee dei due sistemi che ne escono; le linee del 1° e del 2° sistema uscenti da P_2 e da P_1 avranno un'intersezione prossima a P, $P_{12} \equiv P_{21}$, di coordinate

$$u^i + d_1u^i + \frac{1}{2}d_1^2u^i + d_2u^i + \frac{1}{2}d_2^2u^i + d_1d_2u^i + \dots\dots$$
$$= u^i + d_2u^i + \frac{1}{2}d_2^2u^i + d_1u^i + \frac{1}{2}d_1^2u^i + d_2d_1u^i + \dots\dots$$

(sempre trascurando i termini d'ordine > 2); notiamo in particolare che deve riguardarsi $d_1d_2u^i = d_2d_1u^i$.

Siano π, π_1, π_2, π_{12} gli spazi proiettivi tangenti alla varietà P_n nei punti P, P_1, P_2, P_{12} ; sia x^λ un punto dato su π .Per traslazione proiettiva in P_n lungo i lati PP_1, P_1P_{12} del quadrilatero curvilineo $PP_1P_{12}P_2P$ ne otteniamo in π_1 il punto $\underset{1}{x}^\lambda$ e poi in π_{12} il punto $\underset{12}{x}^\lambda$; per traslazione proiettiva lungo i lati PP_2, P_2P_{12} ne otteniamo in π_2 il punto $\underset{2}{x}^\lambda$ e poi in π_{21}, il punto $\underset{21}{x}^\lambda$: precisamente abbiamo

$$\underset{1}{x}^\lambda = x^\lambda + d_1x^\lambda + \frac{1}{2}d_1^2x^\lambda + \dots\dots \tag{17.11}$$

e in quanto, evidentemente , dovrà essere

(17.12) $$\underset{12}{x}{}^{\lambda} - \underset{1}{x}{}^{\lambda} = \underset{2}{x}{}^{\lambda} - x^{\lambda} + d_1(\underset{2}{x}{}^{\lambda} - x^{\lambda}) + \dots$$

ottenìamo (sempre fino al 2° ordine):

(17.13) $$\underset{12}{x}{}^{\lambda} = x^{\lambda} + d_1 x^{\lambda} + \frac{1}{2} d_1^2 x^{\lambda} + d_2 x^{\lambda} + \frac{1}{2} d_2^2 x^{\lambda} + d_1 d_2 x^{\lambda} + \dots ;$$

analogamente risulta

(17.14) $$\underset{21}{x}{}^{\lambda} = x^{\lambda} + d_2 x^{\lambda} + \frac{1}{2} d_2^2 x^{\lambda} + d_1 x^{\lambda} + \frac{1}{2} d_1^2 x^{\lambda} + d_2 d_1 x^{\lambda} + \dots .$$

Vediamo come nell'ordine di approssimazione cui ci riferiamo i punti $\underset{12}{x}{}^{\lambda}$ e $\underset{21}{x}{}^{\lambda}$ siano <u>distinti</u> ; fra le loro coordinate vi è un divario dato, a meno d'infinitesimi d'ordine >2 , da

(17.15) $$\mathcal{D} x^{\lambda} = d_1 d_2 x^{\lambda} - d_2 d_1 x^{\lambda} .$$

Dobbiamo esprimere ora che il trasporto è stato fatto per traslazione proiettiva: cioè secondo le (13.6), ove $\Lambda_{\mu i}^{\lambda}$ potrà essere un qualunque sistema di parametri misti della connessione.

Dunque abbiamo

(17.16) $$d_2 x^{\lambda} = - \Lambda_{\mu i}^{\lambda} x^{\mu} d_2 u^{i} .$$

(17.17) $$d_1 d_2 x^{\lambda} = - \partial_j \Lambda_{\mu i}^{\lambda} x^{\mu} d_2 u^{i} d_1 u^{j} + \Lambda_{\nu i}^{\lambda} \Lambda_{\mu j}^{\nu} x^{\mu} d_2 u^{i} d_1 u^{j} - \Lambda_{\mu i}^{\lambda} x^{\mu} d_1 d_2 u^{i}$$

e analoghe formule per $d_1 x^{\lambda}$, $d_2 d_1 x^{\lambda}$; onde

(17.18) $$\mathcal{D} x^{\lambda} = \Lambda_{i j \mu}^{\dots \lambda} d_1 u^{i} d_2 u^{j} x^{\mu} ,$$

ove abbiamo posto (cfr. con le (3.27) ,(17.10))

(17.19) $$\Lambda_{i j \mu}^{\dots \lambda} = \partial_j \Lambda_{\mu i}^{\lambda} - \partial_i \Lambda_{\mu j}^{\lambda} + \Lambda_{\mu i}^{\nu} \Lambda_{\nu j}^{\lambda} - \Lambda_{\mu j}^{\nu} \Lambda_{\nu i}^{\lambda} .$$

Le (17.18) hanno anche un'altra interpretazione: è im-

mediata l'osservazione che, se il punto x^λ sempre per traslazione proiettiva lungo $P_{12}\,P_2$ e poi lungo $P_2 P$ viene portato di nuovo nello spazio π tangente in P, detto ${}^*x^\lambda$ il punto così ottenuto, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore al 2° le differenze ${}^*x^\lambda - x^\lambda$ equivalgono alle Dx^λ, date dalle (17.18). Cioè: per effetto della traslazione proiettiva lungo l'intero ciclo $P_{12}P_2PP$ lo spazio tangente in P viene rappresentato in sè stesso con un'omografia, data da

$$(17.20)\qquad {}^*x^\lambda = x^\lambda + Dx^\lambda = x^\lambda + \Lambda_{ij\mu}^{\cdots\lambda}\, d_1u^i d_2u^j x^\mu = x^\lambda + \Omega_\mu^\lambda x^\mu ;$$

ove abbiamo designato, secondo Cartan, con Ω_μ^λ le forme differenziali bilineari alternate

$$(17.21)\qquad \Omega_\mu^\lambda = \Lambda_{ij\mu}^{\cdots\lambda}\, d_1u^i d_2u^j = \Lambda_{ij\mu}^{\cdots\lambda}\, d_1u^{[i} d_2u^{j]}.$$

Cerchiamo ora sotto quali condizioni l'omografia (17.20) si riduce all'identità, cioè il trasporto ciclico riporta ciascun punto alla sua posizione primitiva. La condizione è che sia indeterminata la retta che congiunge x^λ ad ${}^*x^\lambda$, cioè

$$(17.22)\qquad x^{[\nu}\Omega_\mu^{\lambda]} x^\mu = 0 ;$$

ora questa può scriversi

$$(17.23)\qquad \delta_\tau^{[\nu}\Omega_\mu^{\lambda]} x^\mu x^\tau = 0 .$$

Il primo membro è una forma quadratica nelle x^μ; si annullerà qualunque sia il punto x^λ trasportato se i relativi coefficienti (simmetrizzati) saranno nulli:

$$(17.24)\qquad \delta_\tau^{[\nu}\Omega_\mu^{\lambda]} + \delta_\mu^{[\nu}\Omega_\tau^{\lambda]} = 0$$

ossia

$$(17.25)\qquad \delta_\tau^\nu\Omega_\mu^\lambda - \delta_\tau^\lambda\Omega_\mu^\nu + \delta_\mu^\nu\Omega_\tau^\lambda - \delta_\mu^\lambda\Omega_\tau^\nu = 0.$$

Poniamo $\nu = \tau$ e sommiamo: risulta subito

(17.26) $$(n+1)\,\Omega^{\lambda}_{\mu} - \delta^{\lambda}_{\mu}\,\Omega^{z}_{z} = 0,$$

cioè

(17.27) $$\Omega^{\lambda}_{\mu} - \frac{1}{n+1}\,\delta^{\lambda}_{\mu}\,\Omega^{z}_{z} = 0\ ;$$

(notiamo che, d'altra parte, se queste valgono, anche le (17.25) risultano soddisfatte). O ancora:

(17.28) $$\left(\Lambda^{\cdots\lambda}_{ij\mu} - \frac{1}{n+1}\,\delta^{\lambda}_{\mu}\,\Lambda^{\cdots z}_{ijz}\right) d_1u^{[i}\,d_2u^{j]} = 0.$$

Perchè questa valga qualunque sia la giacitura piana definita dal bivettore $d_1u^{[i}\,d_2u^{j]}$ dovremo avere infine

(17.29) $$\Lambda^{\cdots\lambda}_{ij\mu} - \frac{1}{n+1}\,\delta^{\lambda}_{\mu}\,\Lambda^{\cdots z}_{ijz} = 0\ ;$$

ma questa equivale alla (17.9); infatti è immediata la verifica che si ha, $\mathcal{R}^{\cdots\lambda}_{ij\mu}$ essendo dato dalla (17.10):

(17.30) $$\mathcal{R}^{\cdots\lambda}_{ij\mu} = \Lambda^{\cdots\lambda}_{ij\mu} - \frac{1}{n+1}\,\delta^{\lambda}_{\mu}\,\Lambda^{\cdots z}_{ijz}\ .$$

Dunque: la (17.9) è anche la condizione necessaria e sufficiente perchè il trasporto dei punti per la traslazione proiettiva determinata dalla connessione sia integrabile, cioè non vincolato alla linea di trasporto. E in quanto $\Lambda^{\cdots\lambda}_{ij\mu}$ in forza delle (17.18), (17.20) è manifestamente un tensore (misto: affine pei primi due indici, proiettivo pei due seguenti, in relazione ai cambiamenti dell'A-riferimento) senz'altro per le (17.30) potremo concludere che anche $\mathcal{R}^{\cdots\lambda}_{ij\mu}$ è un tensore : il tensore di curvatura (possiamo anche dire col Cartan: di curvatura e torsione) della connessione proiettiva. (Che esso in effetto coincida con l'ente che per altra via e in relazione a riferimenti meno generali avevamo introdotto al n.9, p. 68, ci risulterà fra poco).

Possiamo ora subito introdurre anche la nozione di torsione della connessione proiettiva. Anche senza ridursi all' identità, l'omografia ω determinata nello spazio π tangente in P dal trasporto ciclico lungo il quadrilatero $PP_1P_{12}P_2P$, rappresentata dalla (17.20),

potrà avere il punto di contatto P come punto to: in questa ipotesi (più precisamente: se per ogni punto e per ogni giacitura piana che ne esce si presenta il fatto ora detto) diciamo secondo Cartan che la connessione proiettiva è senza torsione. Nel caso contrario diremo che essa ha torsione: vedremo come questa si esprima mediante un tensore affine, che è appunto il tensore di torsione di tutte le connessioni affini ricavate da quella proiettiva con la costruzione in ata al n.15.

Conviene qui adottare un A_0-riferimento, in relazione al quale il punto P di contatto in π avrà coordinate locali (proporzionali a δ_0^λ) .La connessione proiettiva non ha torsione a condizione che questo p'nt nella (17.24) sia unit , cioè

$$\Omega_\mu^\lambda \delta_0^\mu \equiv \psi \delta_0^\lambda , \tag{17.31}$$

ove ψ rappresenta un conveniente fattore. Ma posto $\lambda = 0$ risulta subito $\psi = \Omega_0^0$; e posto $\lambda = 2$ (cioè $\neq 0$) ne ricaviamo

$$\Omega_0^2 = 0 \tag{17.32}$$

e ciò qualunque sia la giacitura definita dal bi ettore $d_1 u^{[i} d_2 u^{j]}$; onde infine

$$R_{ij0}^{\cdots 2} = 0 . \tag{17.33}$$

Le componenti di $R_{ij\lambda}^{\cdots\mu}$ contenute nel 1° membro formano un tensore, che appunto si dirà tensore di torsione della connessione proiettive.(Si badi, che per una trasformazione qualunque dell' A_0-riferimento sarà

$$R_{i'j'0'}^{\cdots 2'} = \vartheta_i^{i'} \vartheta_j^{j'} q_0^0 q_2^{2'} R_{ij0}^{\cdots 2}). \tag{17.34}$$

Se per una connessione proiettiva non si ha curvatura non si ha dunque neppure torsione. Supposto invece che la connessione non abbia torsione, valga cioè la (17.33), ma essa abbia curvatura, e cioè non siano nulle tutte le restan

ti componenti di $R_{ij\mu}^{\cdots\lambda}$, è da notarsi che il particolare gruppo di componenti $R_{ij\circ}^{\cdots\circ}$ costituisce un tensore (affine: cfr. n.9, p. 70). Dunque anche la condizione

$$(17.35)\qquad R_{ij\circ}^{\cdots\circ} = 0, \quad \text{cioè} \quad n\Lambda_{ij\circ}^{\cdots\circ} - \Lambda_{ijz}^{\cdots z} = 0,$$

inteso che valga le (17.33), ha un significato geometrico. Questo è stato indicato dal CARTAN (1924); esso esprime che l'omografia (17.20) determinata in $\mathcal{T}$ dal trasporto ciclico, oltre ad avere il punto P unito, appartiene a quel sottogruppo invariante del gruppo delle omografie col punto P unito, che è definito in modo duale del sottogruppo di MÖBIUS (che conserva i volumi) nel gruppo affine (formato dalle omografie che mutano in sè un iperpiano) (*).

Torniamo ora alle ipotesi più generali nei riguardi della connessione: ma pensiamo adottato un B-riferimento, in relazione al quale secondo le (14.17), (14.19), (14.41), siano

$$(17.36)\qquad \Gamma_{\mu i}^{\lambda} = \Lambda_{\mu i}^{\lambda} - \delta_{\mu}^{\lambda}\Lambda_{oi}^{\circ} = L_{\mu i}^{\lambda} - \delta_{\mu}^{\lambda}L_{oi}^{\circ}, \quad \Gamma_{\mu o}^{\lambda} = \delta_{\mu}^{\lambda}$$

i parametri normalizzati della connessione.

Rammentando che sempre secondo le (14.41) si ha

$$(17.37)\qquad L_{\mu i}^{\lambda} = \Gamma_{\mu i}^{\lambda} - \frac{1}{n+1}\delta_{\mu}^{\lambda}\Gamma_{\nu i}^{\nu}$$

dalla (17.10) ricaviamo subito

$$(17.38)\qquad R_{ij\mu}^{\cdots\lambda} = \partial_j\Gamma_{\mu i}^{\lambda} - \partial_i\Gamma_{\mu j}^{\lambda} + L_{\mu i}^{\nu}\Gamma_{\nu j}^{\lambda} - L_{\mu j}^{\nu}\Gamma_{\nu t}^{\lambda} - \frac{1}{n+1}\delta_{\mu}^{\lambda}(\partial_j\Gamma_{\nu i}^{\nu} - \partial_i\Gamma_{\nu j}^{\nu});$$

cioè anche, posto

$$(17.39)\qquad R_{z\circ\mu}^{\cdots\lambda} = R_{o z\mu}^{\cdots\lambda} = 0$$

(*) In modo più esplicito la definizione geometrica di questo sottogruppo è stata precisata in un mio lavoro del 1932 (51: nota 43 a pag. 27)

e inteso al solito che $\partial_0 A = 0$ per qualunque A :

$$(17.40) \qquad R^{\cdots\lambda}_{\tau\omega\mu} = \Gamma^{\cdots\lambda}_{\tau\omega\mu} - \frac{1}{n+1}\delta^\lambda_\mu \Gamma^{\cdots\nu}_{\tau\omega\nu}$$

ove abbiamo posto, secondo le (9.9) , pag.68 (ove sia posto $M = 1$):

$$(17.41) \qquad \Gamma^{\cdots\lambda}_{\tau\omega\mu} = \partial_\omega \Gamma^\lambda_{\mu\tau} - \partial_\tau \Gamma^\lambda_{\mu\omega} + \Gamma^\nu_{\mu\tau}\Gamma^\lambda_{\nu\omega} - \Gamma^\nu_{\mu\omega}\Gamma^\lambda_{\nu\tau} - \delta^\lambda_\mu(\Gamma^0_{\tau\omega} - \Gamma^0_{\omega\tau})$$

Le (17.4) coincidono con le (9.10) di p.68; dunque l'ente $R^{\cdots\lambda}_{\tau\omega\mu}$ definito mediante le (17.10) e (17.39) coincide con quello che già al n.9 avevamo chiamato tensore di curvatura della connessione proiettiva. Si badi però che l'ente $\Gamma^{\cdots\lambda}_{\tau\omega\mu}$,definito dalle (17.41), soltanto pel caso delle connessioni proiettive senza torsione (che nel n.9 era l'unico caso in vista) è un tensore. E infatti essendo secondo le (9.18), valide anche nelle attuali ipotesi

$$(17.42) \qquad \Gamma^{\cdots 0}_{\tau\omega 0} = 0$$

le (17.40) dànno

$$(17.43) \qquad R^{\cdots 0}_{\tau\omega 0} = -\frac{1}{n+1}\Gamma^{\cdots\nu}_{\tau\omega\nu}$$

e quindi anche

$$(17.44) \qquad \Gamma^{\cdots\lambda}_{\tau\omega\mu} = R^{\cdots\lambda}_{\tau\omega\mu} - \delta^\lambda_\mu R^{\cdots 0}_{\tau\omega 0} :$$

ora, come s'è già osservato, mentre $R^{\cdots\lambda}_{\tau\omega\mu}$ è un tensore , $R^{\cdots 0}_{ij0}$,cioè anche $R^{\cdots 0}_{\tau\omega 0}$, lo è soltanto sotto l'ipotesi che sia $R^{\cdots h}_{ij0} = 0$, e cioè la connessione non abbia torsione. Dunque esclusa questa ipotesi $\Gamma^{\cdots\lambda}_{\tau\omega\mu}$ non è un tensore. E' interessante però notare che, ciò non ostante, il suo annullarsi ha significato invariante: secondo le (17.40) e (17.44) la condizione $\Gamma^{\cdots\lambda}_{\tau\omega\mu} = 0$ equivale senz'altro all'annullarsi di $R^{\cdots\lambda}_{\tau\omega\mu}$, cioè di $R^{\cdots\lambda}_{ij\mu}$: ossia, della curvatura. Il CARTAN assume (1924) per rappresentare la curvatura della connessione proprio le

forme (non invarianti) $\Gamma^{\cdots h}_{ij\mu}\, d_1u^i d_2u^j = \Omega^h_\mu - \delta^h_\mu \Omega^\circ_\circ$ (*).

Per le (17.38) il tensore di torsione della connessione proiettiva in relazione a un B-riferimento si esprime per le $\Gamma^{\cdots h}_{ijk}$ semplicemente così:

$$(17.45)\qquad R^{\cdots h}_{ij\circ} = \partial_j \Gamma^h_{\circ i} - \partial_i \Gamma^h_{\circ j} + \Gamma^\nu_{\circ i}\Gamma^h_{\nu j} - \Gamma^\nu_{\circ j}\Gamma^h_{\nu i}\,,$$

cioè

$$(17.46)\qquad R^{\cdots h}_{ij\circ} = \Gamma^h_{ij} - \Gamma^h_{ij} = 2S^{\cdots h}_{ij}\,,$$

ove $S^{\cdots h}_{ij}$ è il tensore di torsione della connessione affine Γ^h_{ij}; o ancora, ricordando le (15.33): è il tensore di torsione comune a tutte le connessioni affini che la connessione proiettiva determina, in relazione alla assegnazione arbitraria degli iperpiani $x^\circ = 0$ dei riferimenti proiettivi locali.

Esprimiamo in relazione ai parametri normalizzati anche $R^{\cdots\circ}_{ij\circ}$: abbiamo

$$(17.47)\qquad R^{\cdots\circ}_{ij\circ} = \Gamma^\circ_{ij} - \Gamma^\circ_{ji} - \frac{1}{n+1}\left(\partial_j \Gamma^\ell_{\ell i} - \partial_i \Gamma^\ell_{\ell j}\right).$$

Ora: $\partial_j \Gamma^\ell_{\ell i} - \partial_i \Gamma^\ell_{\ell j} = 0$ è la condizione per l'annullarsi del tensore di curvatura contratto $\Gamma^{\cdots\ell}_{ijk}$ della connessione affine Γ^ℓ_{ij}; il che esprime che tale connessione è equiaffine. Fra le connessioni affini determinate (nel modo poco sopra rammentato; precisato al n.15) dalla connessione proiettiva ve ne sono infinite equiaffini, come risulta subito dalle (15.33); possiamo dunque con scelta conveniente del riferimento rendere $\partial_j \Gamma^\ell_{\ell i} = \partial_i \Gamma^\ell_{\ell j}$, e quindi

$$(17.48)\qquad R^{\cdots\circ}_{ij\circ} = \Gamma^\circ_{ij} - \Gamma^\circ_{ji}\,.$$

Ma le trasformazioni per le quali le (17.48) sono invarianti sono soltanto le C-trasformazioni: in relazione a queste soltanto le differenze $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ sono le componen-

---

(*) Si potrà osservare che in realtà, solo nei riguardi formali il ruolo di $\Gamma^{\cdots\mu}_{ijk}$ è diverso da quello di $R^{\cdots\mu}_{ijk}$: questo sia detto come precisazione e parziale rettifica di quanto a p.68 di queste lezioni.

ti di un tensore.

Per le connessioni proiettive senza torsione (qui il caso generale non avrebbe interesse) soltanto quando sia $R_{ij\,o}^{\cdots\,o} = 0$, il che allora - come abbiamo già notato - ha un significato geometrico, potremo, con una conveniente scelta di un riferimento, rendere

$$\Gamma_{ij}^{o} = \Gamma_{ji}^{o} \,, \tag{17.49}$$

e rendere quindi simmetrici rispetto a μ,ν i parametri $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ della connessione proiettiva. Una volta ottenuta la (17.49) essa si manterrà soltanto per le C-trasformazioni: in questo senso il riferimento adottato si potrà dire un C-riferimento. (Supporre che valga la (17.49) in relazione a riferimenti più generali non avrebbe senso. Quanto ora si è osservato completa ciò che, a proposito della eventuale simmetria delle Γ_{ij}^{o}, abbiamo accennato a p. 89 e a p.136).

Mediante il tensore di curvatura della connessione proiettiva (e quello di torsione: che però è contenuto nel precedente) possiamo formare anche pel caso generale (come al n.9 ,p.68 abbiamo fatto per le connessioni senza torsione) formule di commutazione delle derivate covarianti seconde dei tensori proiettivi.

Riferiamoci ancora, per semplicità , al caso in cui il tensore in oggetto è un vettore proiettivo covariante A_λ : troviamo subito (inteso che si designi ora con ∇ la derivazione covariante proiettiva fatta con parametri $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$) :

$$(\nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu) A_\lambda = \tag{17.50}$$

$$= \left(\partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^{\tau} - \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^{\tau} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\omega}\Gamma_{\omega\mu}^{\tau} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\omega}\Gamma_{\omega\nu}^{\tau}\right) A_\tau +$$

$$+ \left(\Gamma_{\nu\mu}^{\tau} - \Gamma_{\mu\nu}^{\tau}\right) \nabla_\tau A_\lambda$$

$$= \Gamma_{\nu\mu\lambda}^{\cdots\,\tau} A_\tau + \left(\Gamma_{\nu\mu}^{i} - \Gamma_{\mu\nu}^{i}\right) \nabla_i A_\lambda$$

$$= R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\tau} A_\tau + R_{\nu\mu o}^{\cdot\cdot\cdot o} \nabla_o A_\lambda + (\Gamma^i_{\nu\mu} - \Gamma^i_{\mu\nu}) \nabla_i A_\lambda$$

cioè infine

(17.51) $$(\nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu) A_\lambda = R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\tau} A_\tau + R_{\nu\mu o}^{\cdot\cdot\cdot\tau} \nabla_\tau A_\lambda .$$

Queste sono le formule cercate: le quali possono anche scriversi in questa forma equivalente:

(17.52) $$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) A_\lambda = R_{ij\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\tau} A_\tau + R_{ijo}^{\cdot\cdot\cdot\tau} \nabla_\tau A_\lambda$$

(inteso naturalmente che ad es. $\nabla_i B_j$ debba valere $\partial_i B_j - \Gamma^\mu_{ji} B_\mu$, ecc.) ; e ancora, posto

(17.53) $$2 S_{ij}^{\cdot\cdot\tau} = R_{ijo}^{\cdot\cdot\cdot\tau} \quad (\text{o anche: } 2 S_{\nu\mu}^{\cdot\cdot\tau} = R_{\nu\mu o}^{\cdot\cdot\cdot\tau}),$$

si scrivono:

(17.54) $$(\nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu) A_\lambda = R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\tau} A_\tau + 2 S_{\nu\mu}^{\cdot\cdot\tau} \nabla_\tau A_\lambda .$$

Si hanno così formule del tutto analoghe alle (3.26) (p.20) relative alla derivazione covariante legata a una connessione affine. Il passaggio a tensori qualunque è ovvio: ad es. pel tensore proiettivo $H_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\sigma}$ avremo:

(17.55) $$(\nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_o) H_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\sigma} = R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\tau} H_{\tau\omega}^{\cdot\cdot\sigma} + R_{\nu\mu\omega}^{\cdot\cdot\cdot\tau} H_{\lambda\tau}^{\cdot\cdot\sigma} - R_{\nu\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\sigma} H_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\tau} + 2 S_{\nu\mu}^{\cdot\cdot\tau} \nabla_\tau H_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\sigma}$$

(Cfr. p.21, form. (3.29) e (3.30)).

Del risultato ottenuto vogliamo dare un'applicazione: ricaviamo facilmente per una connessione proiettiva le identità di Bianchi generalizzate, relazioni fra le componenti del tensore di curvatura (e torsione) e quelle del tensore derivato, che estendono le (3.35) e insieme le (3.34) relative alla derivazione covariante affine.

Partiamo dalle (17.54), che ora scriveremo:

(17.56) $$\nabla_{[\nu}\nabla_{\mu]}A_\lambda = \frac{1}{2}R^{\cdots\ \ \tau}_{\nu\mu\lambda\ \ }A_\tau + S^{\cdots\ \tau}_{\nu\mu\ \ }\nabla_\tau A_\lambda$$

e applichiamo ancora ad ambo i membri la derivazione covariante ∇_ω indi alterniamo rispetto ad ω, ν, μ, tenendo presenti le (3.14) di p.18.:

(17.57) $$\nabla_{[\omega}\nabla_\nu\nabla_{\mu]}A_\lambda = \frac{1}{2}\nabla_{[\omega}R^{\cdots\ \ \tau}_{\nu\mu]\lambda\ \ }A_\tau + \frac{1}{2}\nabla_{[\omega}A_{|\tau|}R^{\cdots\ \tau}_{\nu\mu]\lambda\ \ } + .$$

$$+\nabla_{[\omega}S^{\cdots\ \tau}_{\nu\mu]\ \ }\nabla_\tau A_\lambda + S^{\cdots\ \tau}_{[\nu\mu\ \ }\nabla_{\omega]}\nabla_\tau A_\lambda\ ;$$

ove gli indici racchiusi fra tratti verticali s'intendono esclusi dall'alternazione.

Trasformiamo ora il 1° membro notando che esso può anche scriversi, per le formule di commutazione applicate a $\nabla_\mu A_\lambda$:

(17.58) $$\nabla_{[\omega}\nabla_\nu\nabla_{\mu]}A_\lambda = \frac{1}{2}R^{\cdots\ \ \tau}_{[\omega\nu\mu]\ \ }\nabla_\tau A_\lambda + \frac{1}{2}R^{\cdots\ \ \tau}_{[\omega\nu|\lambda|\ \ }\nabla_{\mu]}A_\tau$$

$$+ S^{\cdots\ \tau}_{[\omega\nu\ \ }\nabla_{|\tau|}\nabla_{\mu]}A_\lambda\ ;$$

e d'altra parte osservando che, per le (17.54) si ha

(17.59) $$\nabla_\omega\nabla_\tau A_\lambda = \nabla_\tau\nabla_\omega A_\lambda + R^{\cdots\ \ \mu}_{\omega\tau\lambda\ \ }A_\mu + 2S^{\cdots\ \nu}_{\omega\tau\ \ }\nabla_\nu A_\lambda\ ;$$

sostituendo abbiamo con facili semplificazioni

(17.60) $$\left(R^{\cdots\ \tau}_{[\omega\nu\mu]\ \ } - 2\nabla_{[\omega}S^{\cdots\ \tau}_{\nu\mu]\ \ } - 4S^{\cdots\ \sigma}_{[\nu\mu\ \ }S^{\cdots\ \tau}_{\omega]\sigma\ \ }\right)\nabla_\tau A_\lambda =$$

$$= \left(\nabla_{[\omega}R^{\cdots\ \ \tau}_{\nu\mu]\lambda\ \ } + 2S^{\cdots\ \sigma}_{[\nu\mu\ \ }R^{\cdots\ \ \tau}_{\omega]\sigma\lambda\ \ }\right)A_\tau\ .$$

Ricordando che $\nabla_\sigma A_\tau = -A_\tau$ queste si possono scrivere

(17.61) $$\left[\left(R^{\cdots\ \tau}_{[\omega\nu\mu]\ \ } - 2\nabla_{[\omega}S^{\cdots\ \tau}_{\nu\mu]\ \ } - 4S^{\cdots\ \sigma}_{[\nu\mu\ \ }S^{\cdots\ \tau}_{\omega]\sigma\ \ }\right)\delta^\kappa_\lambda +\right.$$

$$\left. + \left(\nabla_{[\omega}R^{\cdots\ \ \kappa}_{\nu\mu]\lambda\ \ } + 2S^{\cdots\ \sigma}_{[\nu\mu\ \ }R^{\cdots\ \ \kappa}_{\omega]\sigma\lambda\ \ }\right)\delta^\tau_\sigma\right]\nabla_\tau A_\kappa = 0\ ;$$

infine tenuto presente che queste debbono valere qualunque siano A_κ e quindi $\nabla_\tau A_\kappa$, otteniamo le identità cercate:

$$(17.62)\quad \Big[\big(R^{\cdots\tau}_{[\omega\nu\mu]} - 2\nabla_{[\omega}S^{\cdots\tau}_{\nu\mu]} - 4S^{\cdots\sigma}_{[\nu\mu}S^{\cdots\tau}_{\omega]\sigma}\big)\delta^{\pi}_{\lambda} + \big(\nabla_{[\omega}R^{\cdots\chi}_{\nu\mu]\lambda} + 2S^{\cdots\sigma}_{[\nu\mu}R^{\cdots\chi}_{\omega]\sigma\lambda}\big)\delta^{\tau}_{\circ} = 0.$$

Il primo membro è un tensore (del 6° ordine): cosicchè questa è la forma tensoriale delle relazioni cercate: forme più semplici ma non tensoriali abbiamo distinguendo i casi in cui è $\tau=0$, $\chi=k$, $\lambda=h$; $\tau=0$, $\chi\neq 0$, $\lambda=h$; $\tau=0$, $\chi=k$, $\lambda=0$; $\tau=0$, $\chi=0$, $\lambda=0$ e infine $\tau\neq 0$. (Poniamo anche, il che non è restrittivo, $\omega=i$, $\nu=j$, $\mu=l$.) Risultano nel primo caso le formule

$$(17.63)\quad \nabla_{[i}R^{\cdots k}_{jl]h} + 2S^{\cdots g}_{[ij}R^{\cdots k}_{l]gh} + \delta^{k}_{h}\big(R^{\cdots\circ}_{[ijl]} - 2\nabla_{[i}S^{\cdots\circ}_{jl]} - 4S^{\cdots g}_{[ij}S^{\cdots\circ}_{l]g}\big) = 0;$$

nel secondo caso

$$(17.64)\quad \nabla_{[i}R^{\cdots\circ}_{jl]h} + 2S^{\cdots g}_{[ij}R^{\cdots\circ}_{l]gh} = 0;$$

nel terzo caso

$$(17.65)\quad \nabla_{[i}R^{\cdots k}_{jl]\circ} + 2S^{\cdots g}_{[ij}R^{\cdots k}_{l]g\circ} = 0,$$

cioè

$$(17.66)\quad 2\nabla_{[i}S^{\cdots k}_{jl]} + 4S^{\cdots g}_{[ij}S^{\cdots k}_{l]g} - R^{\cdots k}_{[ijl]} = 0;$$

notiamo infine che queste stesse relazioni otterremmo nel quinto caso; nel quarto caso infine ci risulta

$$(17.67)\quad \nabla_{[i}R^{\cdots\circ}_{jl]\circ} + 2S^{\cdots g}_{[ij}R^{\cdots\circ}_{l]g\circ} + R^{\cdots\circ}_{[ij\,l]} - 2\nabla_{[i}S^{\cdots\circ}_{jl]} - 4S^{\cdots g}_{[ij}S^{\cdots\circ}_{l]g} = 0,$$

ma è immediata la verifica che queste ultime formule sono identicamente verificate, cosicchè le (17.62) equivalgono ai tre gruppi di formule (17.63), (17.64), (17.66). (Si badi bene che il simbolo ∇_i è sempre simbolo di derivazione proiettiva di parametri $\Gamma^{\lambda}_{\mu i}$, e non di derivazione affine fatta coi parametri $\Gamma^{\nu}_{\mu i}$ soltanto).

Daremo ora una semplice applicazione delle identità

di BIANCHI generalizzate (17.62), cioè (17.63), (17.64) e (17.66) : mostreremo che per $n>2$, una connessione proiettiva (in $\underset{p}{X_n}$) tale che l'omografia da essa determinata, nello spazio tangente nel punto generico P, pel trasporto ciclico per traslazione proiettiva, abbia unito il punto P e tutte le rette che ne escono si riduce alla connessione integrabile dell' S_n proiettivo : mentre la cosa non è vera per $n=2$. (Basta allora che la connessione sia proiettiva normale perchè si presenti il fatto ora accennato).

E infatti : l'omografia ora detta secondo le (17.20) è rappresentata dalle equazioni

$$(17.68) \qquad {}^{*}x^{\lambda} = x^{\lambda} + \Omega_{\mu}^{\lambda} x^{\mu} \; ; \qquad (\Omega_{\mu}^{\lambda} = \Lambda_{ij\mu}^{\cdots\lambda} du^{i} du^{j})$$

in questa deve essere $\Omega_{\rho}^{i} = 0$ perchè la connessione è supposta senza torsione; l'omografia da essa subordinata nella stella di direzioni (unita) P è ovviamente data dalle equazioni

$$(17.69) \qquad {}^{*}x^{i} = x^{i} + \Omega_{j}^{i} x^{j},$$

e dunque si riduce all'identità a condizione che sia

$$(17.70) \qquad \Omega_{j}^{i} = \psi \delta_{j}^{i} \quad , \text{ cioè } \Lambda_{kk_{\rho}}^{\cdots i} = \psi_{k\rho} \delta_{j}^{i}$$

ove $\psi = \psi_{kk} du^{k} du^{k}$ è una forma differenziale bilineare (alternata) conveniente, cioè $\psi_{k\rho}$ è emisimmetric . Ma ne segue

$$(17.71) \qquad R_{kkj}^{\cdots i} = \Lambda_{kkj}^{\cdots i} - \frac{1}{n+1} \delta_{j}^{i} \Lambda_{kk\rho}^{\cdots\rho} =$$

$$= \delta_{j}^{i} \left(\psi_{kk} - \frac{1}{n+1} \Lambda_{kk\lambda}^{\cdots\lambda} \right) = \delta_{j}^{i} \varphi_{kk} \; ;$$

con φ_{kk} tensore emisimmetrico. Si tratta di provare che $\varphi_{k\rho} = 0$; e poi che anche $R_{kk\rho}^{\cdots\rho} = 0$, $R_{k\rho\rho}^{\cdots\rho} = 0$.

Per questo anzitutto scriviamo le identità di BIANCHI generalizzate (17.63), (17.64), (17.66) pel caso di una connessione affine senza torsione : esse divengono allora

$$(17.72)\qquad \nabla_{[i} R_{jl]h}^{\cdots\ k} + \delta_h^k (R_{[ijl]}^{\cdots\ 0} - 2\nabla_{[i} S_{jl]}^{\cdots\ 0}) = 0,$$

$$(17.73)\qquad \nabla_{[i} R_{jl]h}^{\cdots\ 0} = 0,$$

$$(17.74)\qquad R_{[jli]}^{\cdots\ k} - 2\delta_{[i}^k S_{jl]}^{\cdots\ 0} = 0.$$

Le ultime in forza delle (17.71) dànno, posto $\chi_{il} = \varphi_{jl} - 2S_{jl}^{\cdots 0}$,

$$(17.75)\qquad \chi_{jl}\delta_i^k + \chi_{li}\delta_j^k + \chi_{ij}\delta_l^k = 0$$

Onde, ponendo $k = i$ e sommando, segue

$$(17.76)\qquad (n-2)\chi_{jl} = 0;$$

cioè, in quanto supponiamo $n > 2$, $\chi_{jl} = 0$. Ne risulta subito

$$(17.77)\qquad R_{ijh}^{\cdots\ k} = 0, \quad \text{e anche} \quad R_{ijo}^{\cdots\ 0} = 0$$

(perchè è sempre $R_{ij\lambda}^{\cdots\lambda} = 0$). In forza di queste, che dànno anche $S_{jl}^{\cdots 0} = 0$, le (17.72) si riducono a

$$(17.78)\qquad \delta_{[i}^k R_{jl]h}^{\cdots\ 0} + \delta_h^k R_{[ijl]}^{\cdots\ 0} = 0;$$

cioè, svolgendo:

$$(17.79)\qquad \delta_i^k R_{jlk}^{\cdots\ 0} + \delta_j^k R_{lik}^{\cdots\ 0} + \delta_l^k R_{ijk}^{\cdots\ 0} + \\ + \delta_h^k (R_{ijl}^{\cdots\ 0} + R_{jli}^{\cdots\ 0} + R_{lij}^{\cdots\ 0}) = 0$$

Poniamo anche qui $k = i$ e sommiamo; risulta

$$(17.80)\qquad (n-1) R_{jlk}^{\cdots\ 0} + R_{kjl}^{\cdots\ 0} + R_{lkj}^{\cdots\ 0} = 0.$$

Ma insieme a questa potremo ovviamente scrivere anche

$$(17.81)\qquad (n-1) R_{lkj}^{\cdots\ 0} + R_{jlk}^{\cdots\ 0} + R_{kjl}^{\cdots\ 0} = 0;$$

sottraendo membro a membro

$$(17.82)\qquad (n-2)\,R_{jlk}^{\cdots\,0} = (n-2)\,R_{lkj}^{\cdots\,0}\ ;$$

dunque sempre nell'ipotesi $n>2$ risulta $R_{jlk}^{\cdots\,0} = R_{lkj}^{\cdots\,0}$ onde, per la (17.79)

$$(17.83)\qquad R_{jlk}^{\cdots\,0} = 0\ ;$$

ciò prova infine quanto volevamo.

Che il ragionamento nel caso $n=2$ non potesse applicarsi era ben prevedibile: le identità di BIANCHI per $n=2$ si riducono a banali identità numeriche, perchè per $n=2$ ogni tensore emisimmetrico del 3° ordine è nullo. Vediamo subito che per una superficie a connessione proiettiva normale, caratterizzata (ved. n.9 p.71) dalle condizioni

$$(17.84)\qquad S_{ij}^{\cdots\,h} = 0\ ,\qquad R_{ijh}^{\cdots\,i} = 0\ ,$$

le (17.71) sono senz'altro soddisfatte, cosicchè l'omografia associata a un qualunque ciclo uscente da un punto O ha unito il punto O e tutte le rette (del piano tangente) che ne escono.

E infatti: per $n=2$ le condizioni $R_{ijh}^{\cdots\,i}=0$ si esprimono così:

$$(17.85)\qquad R_{21h}^{\cdots\,2} = 0\ ,\qquad R_{12k}^{\cdots\,1} = 0\ ;$$

il che vale a dire che tutte le $R_{ijk}^{\cdots\,k}$ si annullano: valgono le (17.71) e anzi con $\varphi_{lk}=0$ (ma non ne segue che anche le $R_{ijk}^{\cdots\,0}$ debbano annullarsi).

A proposito della connessione proiettiva normale non aggiungeremo qui ulteriori considerazioni a quanto nella Parte I (n.9) fu esposto: ci limiteremo ad osservare che nell' S_n proiettivo la connessione integrabile è ovviamente la connessione proiettiva normale determinata (n.9) dall'avere quali geodetiche le linee rette. Il risultato (di T.Y.THOMAS : ved. n.9 p.75) secondo cui l'annullarsi del tensore di curvatura della connessione proiettiva normale determinata dalle geodetiche di una

connessione affine è la condizione perchè questa sia proiettivamente piana, appare ora del tutto evidente: perchè con una conveniente trasformazione puntuale quelle geodetiche possano dare luogo alle linee rette di un S_n occorrerà appunto che la connessione proiettiva normale che esse determinano sia quella integrabile. come è stato notato dal CARTAN (1924), il quale ne ha tratto la dimostrazione (per via profondamente diversa da quella classica) dei teoremi di BELTRAMI concernenti le superficie (V_2) e le varietà riemanniane (V_n) geodeticamente rappresentabili sul piano o su uno spazio euclideo (R_n) . (Ved. n.1,p.7; p.85).

§.3 Coordinate normali; coordinate curvilinee omogenee. Tensori normali, estensioni. Interpretazione (n+1)-dimensionale.

18.- Coordinate normali e riferimento normale.

Riprendiamo ora la nozione di coordinate normali: già introdotta, in relazione a una connessione affine data a meno di trasformazioni proiettive, cioè, in sostanza, pel caso particolare delle connessioni proiettive normali, nella I Parte (n.7 p. 43 e seg.; spec.pp. 52-53). Possiamo ora (estendendola al caso generale) precisare e approfondire nei riguardi geometrici quella nozione: e giungere a quelle applicazioni che ne costituiscono lo scopo essenziale.

Rammento che le coordinate normali x^i introdotte al n.7 (seguendo EISENHART), hanno queste peculiarità sostanziali: in relazione ad esse le geodetiche uscenti da un determinato punto O (origine) si rappresentano in termini finiti con equazioni lineari $x^i = a^i \sigma$; e quando si faccia una trasformazione qualunque sulle primitive coordinate curvilinee u^i le x^i subiscono una trasformazione lineare fratta. Come già accennavo a p. 52 questo s'interpreta nel senso seguente: le formule di passaggio dalle u^i alle x^i definiscono una rappresentazione della varietà (in un intorno di O) sullo spazio proiet-

tivo σ tangente in O :la quale alle geodetiche uscenti da O fa corrispondere le rette della stella O in σ . Per ciascun punto $P(u^i)$ della varietà le z^i sono su σ coordinate proiettive (non omogenee) del punto immagine $\hat{P}$.

L'effettiva costruzione di questa rappresentazione dagli americani è data solo in modo algoritmico. Ma è facile precisarla nei riguardi geometrici, estendendola in pari tempo alle connessioni proiettive più generali (CARTAN,1937) .Si tratta semplicemente di questo : la rappresentazione di ciascuna geodetica Γ uscente da O su una linea retta è quella che risulta dalla costruzione della sua immagine tangenziale (n.15): cioè quella che si ottiene riportando i punti di Γ sullo spazio proiettivo π per traslazione proiettiva lungo la curva Γ medesima.

Dunque: in un qualunque spazio $\mathcal{P}_n$ a connessione proiettiva le coordinate normali (non omogenee) z^i di un punto $P(u^i)$,sufficientemente prossimo a un punto assegnato O (precisamente : preso entro una regione $\mathcal{R}$ di $\mathcal{P}_n$ contenente O ,tale che ogni punto di $\mathcal{R}$ sia congiunto ad O da uno e un solo arco di geodetica appartenente ad $\mathcal{R}$) sono sullo spazio proiettivo σ tangente $\mathcal{P}_n$ in O coordinate proiettive (non omogenee) del punto $\hat{P}$ corrispondente a P (cioè immagine di P)sulla retta che è immagine tangenziale della geodetica congiungente OP.

Se intendiamo scelto per la $\mathcal{P}_n$ un B-riferimento,cioè un sistema curvilineo iniziale u^i e un campo di iperpiani negli spazi tangenti, assunti come iperpiani $x^\circ = 0$ dei sistemi proiettivi locali, corrispondentemente viene determinata dalla connessione proiettiva una connessione affine , e quindi su ciascuna geodetica (a meno d'una trasformazione lineare intera) un parametro affine ; e perciò anche, secondo la (8.57) in cui ora intendiamo $\mathcal{K} = 1$(*)

$$u^\circ = -\frac{1}{2} \log \frac{ds}{d\pi} , \tag{18.1}$$

(*) Il secondo membro della (8.57) ,p.63 , va premesso il segno — .

viene determinato (sempre a meno d'una trasformazione lineare intera) il "parametro anolonomo" u°. Le linee geodetiche e, insieme, la distribuzione dei valori di u° lungo esse vengono rappresentate dal sistema differenziale (8.61) o (15.35):

$$\frac{\delta^2 u^\lambda}{d\pi^2} = \frac{d^2 u^\lambda}{d\pi^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{d\pi} \frac{du^\nu}{d\pi} = 0. \tag{18.2}$$

Secondo le (15.17) l'immagine tangenziale della generica geodetica uscente da O è la retta di equazioni parametriche

$$Z^\lambda = \delta^\lambda_o + a^\lambda \pi \ , \tag{18.3}$$

ove abbiamo posto

$$a^\lambda = \left(\frac{du^\lambda}{d\pi}\right)_o \tag{18.4}$$

(valori calcolati in O): con Z^λ abbiamo indicato qui coordinate proiettive omogenee dei punti nello spazio σ. Manifestamente sono senz'altro

$$x^i = \frac{Z^i}{Z^\circ} = \frac{a^i \pi}{1 + a^\circ \pi} \tag{18.5}$$

le coordinate normali (non omogenee) del punto di P_n che ha per immagine il punto $\delta^\lambda_o + a^\lambda \pi$ di σ; le Z^λ se ne potranno dire coordinate normali omogenee.

Vogliamo dare un'effettiva costruzione delle x^i o delle Z^λ a partire dalle u^i e dal B-riferimento presupposto.

Per prima cosa cambiamo opportunamente gli iperpiani $x^\circ = 0$ dei sistemi proiettivi locali (e quindi anche: la connessione affine che ha per parametri le Γ^i_{jk}; il corrispondente parametro affine σ e il parametro anolonomo u° lungo le geodetiche).

Poniamo - in sostanza l'idea è del CARTAN, se pure da lui espressa alquanto diversamente - la condizione che i nuovi iperpiani $x^{\circ\prime} = 0$, cioè

(18.6) $$x^{\circ} + \vartheta^{\circ'}_{j}\, x^{j} = 0$$

siano ottenuti dall'iperpiano $x^{\circ} = 0$ relativo al punto O entro lo spazio $\mathcal{C}$ per traslazione proiettiva lungo le geodetiche uscenti da O. Dobbiamo dunque esprimere che si ha, lungo tali geodetiche

(18.7) $$\frac{d}{ds}\vartheta^{\circ'}_{\lambda} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\,\vartheta^{\circ'}_{\nu}\frac{du^{\mu}}{ds} = \varrho(s)\,\vartheta^{\circ'}_{\lambda},$$

ove $\varrho(s)$ è un fattore conveniente: non del tutto arbitrario se vogliamo che $\vartheta^{\circ'}_{\lambda}$ sia normalizzato mediante la condizione

(18.8) $$\vartheta^{\circ'}_{o} = 1 .$$

Ponendo $\lambda = 0$ nella (18.7) e tenendo presente la (18.8) otteniamo effettivamente

(18.9) $$\varrho(s) = -\vartheta^{\circ'}_{\mu}\frac{du^{\mu}}{ds} ;$$

sostituendo nella (18.7) questa dà, postovi $\lambda = i$:

(18.10) $$\frac{d}{ds}\vartheta^{\circ'}_{i} - \Gamma^{j}_{ih}\vartheta^{\circ'}_{j}\frac{du^{h}}{ds} - \Gamma^{\circ}_{ih}\frac{du^{h}}{ds} + \vartheta^{\circ}_{i}\vartheta^{\circ'}_{h}\frac{du^{h}}{ds} = 0 .$$

Questo sistema ammette una e una sola soluzione (lungo ciascuna delle geodetiche uscenti da O) tale che per $s = 0$ le $\vartheta^{\circ'}_{i}$ assumano valori assegnati: porremo la condizione iniziale

(18.11) $$\left(\vartheta^{\circ'}_{i}\right)_{o} = 0 .$$

D'altra parte le (8.36), cioè (postovi $M = 1$)

(18.12) $$\Gamma^{i'}_{i'h'} = \left(\Gamma^{\circ}_{ih} - \partial_{h}\vartheta^{\circ'}_{i} - \vartheta^{\circ}_{h}\vartheta^{\circ'}_{i} + \Gamma^{j}_{ih}\vartheta^{\circ'}_{j}\right)\vartheta^{i}_{i'}\vartheta^{h}_{h'}$$

mostrano che le (18.10) equivalgono alle condizioni seguenti:

(18.13) $$\Gamma^{o'}_{i'k'}\,\frac{du^{k'}}{ds}=0,$$

s'intende: lungo le geodetiche uscenti da O. Se ricordiamo la (8.31), cioè, posto anche in questa $M=1$

(18.14) $$\left\{\pi,1\right\}=-2\,\Gamma^{o}_{jk}\,\frac{du^{j}}{ds}\,\frac{du^{k}}{ds}$$

vediamo che la condizione (18.7) dà, in particolare, che lungo le geodetiche uscenti da O il nuovo parametro affine deve essere un parametro proiettivo.

Passiamo ora dalle coordinate curvilinee u^i alle coordinate affini normali z^i di origine O, in relazione alla nuova connessione affine (determinata dalla connessione proiettiva in relazione al nuovo campo di iperpiani):

(18.15) $$\hat{\Gamma}^{i}_{jk}=\Gamma^{i}_{jk}-\delta^{i}_{j}\vartheta^{o'}_{k}-\delta^{i}_{k}\vartheta^{o'}_{j};$$

ove al luogo delle $\vartheta^{o'}_{j}$ s'intendano posti i valori ottenuti. (Per semplicità abbiamo scritto $\hat{\Gamma}^{i}_{jk}$ anzichè $\hat{\Gamma}^{i'}_{j'k'}$).

Le z^i, tali che in relazione ad esse le geodetiche uscenti da O si rappresentino con le equazioni

(18.16) $$z^{i}=b^{i}s \qquad b^{i}=\left(\frac{du^{i}}{ds}\right)_{o},$$

sono legate alle u^i da equazioni analoghe alle (7.8) di p.45: ove il ruolo delle π^{i}_{kk} viene preso dalle $\hat{\Gamma}^{i}_{jk}$:

(18.17) $$u^{i}=u^{i}_{o}+z^{i}-\frac{1}{2}\left(\hat{\Gamma}^{i}_{jk}\right)_{o}z^{j}z^{k}-\frac{1}{3!}\left(\hat{\nabla}_{l}\hat{\Gamma}^{(i)}_{jk}\right)_{o}z^{j}z^{k}z^{l}\dots$$

Eseguite, successivamente, la trasformazione

(18.18) $$\hat{x}^{i}=x^{i},\qquad \hat{x}^{o}=x^{o}+\vartheta^{o'}_{i}x^{i}$$

dei sistemi proiettivi locali e (18.17) delle coordinate curvilinee, la connessione proiettiva assumerà i nuovi parametri ${}^{*}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$: pei quali si avrà, lungo tutte le geode-
tiche uscenti da O:

(18.19) $$ {}^*\Gamma^{0}_{jk}\frac{dz^k}{ds}=0\ ,\qquad {}^*\Gamma^{i}_{jk}\frac{dz^j}{ds}\frac{dz^k}{ds}=0 $$

O ancora, lungo tali geodetiche per le (18.16) essendo

(18.20) $$ \frac{dz^i}{ds}=b^i=\frac{z^i}{J}\quad\left(=\left(\frac{dz^i}{ds}\right)_0\right), $$

varranno identicamente nelle z^i le relazioni

(18.21) $$ {}^*\Gamma^{0}_{jk}z^k=0\ ,\qquad {}^*\Gamma^{i}_{jk}z^jz^k=0\ ; $$

che in particolare dànno

(18.22) $$ {}^*\Gamma^{\lambda}_{jk}z^jz^k=0. $$

In forza delle (18.19) e delle (18.2) lungo le geodetiche uscenti da O si ha

(18.23) $$ \frac{d^2z^i}{d\pi^2}+2\frac{dz^0}{d\pi}\frac{dz^i}{d\pi}=0\ ,\qquad \frac{d^2z^0}{d\pi^2}+\left(\frac{dz^0}{d\pi}\right)=0; $$

il che dà, eliminando $\frac{dz^0}{d\pi}$:

(18.24) $$ \{z^i,\pi\}=0. $$

Cioè integrando, e tenendo presenti le condizioni iniziali $(z^i)_0=0$, $\left(\frac{dz^i}{d\pi}\right)_0=a^i$:

(18.25) $$ z^i=\frac{a^i\pi}{1+c\pi}\ . $$

Le stesse (18.23) dànno poi, lungo quelle geodetiche

(18.26) $$ z^0=\log(1+c\pi); $$

il valore della costante c si determinerà tenendo presente che lungo le geodetiche, deve essere

(18.27) $$ dz^0=du^0+\vartheta^0_j\,du^j $$

onde, per la (18.11),

$$(18.28) \qquad \left(\frac{dz^\circ}{d\pi}\right)_0 = \left(\frac{du^\circ}{d\pi}\right)_0, \text{ cioè } c = a^\circ.$$

Infine per le coordinate normali z^i e pel parametro olonomo normale z°, corrispondenti al valore $\pi=0$ del parametro proiettivo π alle condizioni iniziali $\left(\frac{du}{d\pi}\right)_0 = a^\lambda$, sulla corrispondente geodetica uscente da O abbiamo

$$(18.29) \qquad z^i = \frac{a^i \pi}{1+a^\circ \pi}, \qquad z^\circ = \log(1+a^\circ \pi).$$

Le prime non differiscono dalle (18.5), e questo ci mostra che sono precisamente le z^i, costruite mediante le (18.17) (dopo la preventiva trasformazione degli iperpiani $x^\circ=0$) le coordinate normali (non omogenee) che avevamo prima definito per via geometrica secondo il CARTAN. Le coordinate normali omogenee Z^λ (opportunamente normalizzate) risultano legate alle z^i e a z° dalle formule (WHITEHEAD):

$$(18.30) \qquad z^i = \frac{Z^i}{Z^\circ}, \qquad z^\circ = \log Z^\circ;$$

cioè risolvendo

$$(18.31) \qquad Z^i = e^{z^\circ} z^i, \qquad Z^\circ = e^{z^\circ}.$$

Si badi che il parametro z°, che qui figura quale $(n+1)$-esima variabile insieme alle z^i, ha il solito significato, precisato dalla (8.57), in generale soltanto lungo le geodetiche uscenti da O; come anche u°, cui è legato dalla (18.26), cioè

$$(18.32) \qquad z^\circ = u^\circ + \int_0^{\circ} \vartheta_j \, du^j,$$

ove l'integrale deve intendersi eseguito lungo la geodetica congiungente O al punto che si considera. Sia u° che z° sono in realtà ora da considerare come funzioni del posto in P_n, dipendenti anche dalla scelta di O: cioè funzioni delle u^i ed u_0^i.

È facile determinare il passeggio diretto dalle u^i cui sia associato il parametro u° (inteso nel senso ora detto: calcolato in ciascun punto P lungo la geodetica

congiungente OP a partire da un valore iniziale (unico) assegnato in 0) alle coordinate normali omogenee Z^λ : non v'è che ripetere, applicato al sistema differenziale (18.2), quello stesso procedimento che al n.7, p.44 e segg., abbiamo seguito a partire dalle equazioni differenziali (5.32) delle geodetiche per costruire le coordinate y^i : insomma il procedimento di VEBLEN per la costruzione delle coordinate normali, anche poco sopra richiamato (ved. le (18.17)). Le (18.2), inteso che ora col simbolo ∇ venga designata la derivazione fatta coi parametri $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$,dànno luogo (nell'ipotesi dell'analiticità) agli sviluppi seguenti, atti a rappresentare insieme le linee geodetiche uscenti dal punto 0 e la distribuzione del parametro u° lungo esse:

$$(18.33)\qquad u^\lambda = u^\lambda + a^\lambda\pi - \frac{1}{2}\left(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)a^\mu a^\nu\pi^2 - \frac{1}{3!}\left(\nabla_\tau\Gamma^{(\lambda)}_{\mu\nu}\right)a^\mu a^\nu a^\tau\pi^3 - \dots$$

ove al solito $a^\lambda = \left(\frac{du^\lambda}{d\pi}\right)_0$. Tenute presenti le (18.3) o (18.29) e (18.31) ne abbiamo le relazioni cercate:

$$(18.34)\qquad u^\lambda = u^\lambda_0 + Z^\lambda - \delta^\lambda_0 - \frac{1}{2}\left(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)_0\left(Z^\mu-\delta^\mu_0\right)\left(Z^\nu-\delta^\nu_0\right) -$$

$$- \frac{1}{3!}\left(\nabla_\tau\Gamma^{(\lambda)}_{\mu\nu}\right)_0\left(Z^\mu-\delta^\mu_0\right)\left(Z^\nu-\delta^\nu_0\right)\left(Z^\tau-\delta^\tau_0\right) - \dots .$$

Si può osservare che essendo, naturalmente,

$$(18.35)\qquad \frac{\partial u^i}{\partial z^\circ} = 0\ , \qquad \frac{\partial u^\circ}{\partial z^\circ} = 1$$

tenute presenti le (18.30) o (18.31) si ricava:

$$(18.36)\qquad \frac{\partial u^i}{\partial Z^\lambda}Z^\lambda = 0\ , \qquad \frac{\partial u^\circ}{\partial Z^\lambda}Z^\lambda = 1\ ;$$

cioè le u^i sono funzioni omogenee di grado zero delle Z^λ (come era ben prevedibile) ed è pure omogenea, ma di grado 1 , e^{u°. Il che dà come conseguenza che le $\frac{\partial u^\circ}{\partial Z^\lambda}$ sono omogenee di grado -1 .

Nei riguardi delle $\frac{\partial u^i}{\partial Z^\lambda}$ è però necessaria un'osservazione. Per un cambiamento generico del B-riferimento, definito da valori assegnati delle $\vartheta^\lambda_{\lambda'}$,

$$(18.37)\qquad \vartheta^i_{0'} = 0\ ,\ \vartheta^i_{i'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\ ;\ \vartheta^\circ_{0'} = 1\ ,\ \vartheta^\circ_{i'}\ \text{qualunque}$$

il parametro u°,

calcolato in ciascun punto $P(u^i)$ in relazione alla geodetica congiungente OP mediante la (18.1), si muta in

$$(18.38) \qquad u^{\circ'} = u^\circ + \int \vartheta_i^{\circ'} du^i,$$

l'integrale intendendosi calcolato lungo quel medesimo arco di geodetica. Dunque: $u^{\circ'}$ risulterà funzione di u° e delle u^i (e anche delle coordinate $\overset{\circ}{u}{}^i$ di O, che però qui s'intendono fissate): ma non potremo avere quali derivate $\frac{\partial u^{\circ'}}{\partial u^i}$ proprio le $\vartheta_i^{\circ'}$: a meno che la trasformazione del riferimento non sia soggetta all'ulteriore condizione, che le $\vartheta_i^{\circ'}$ siano le derivate di una stessa funzione scalare $\log \varphi$ (cioè: che essa si riduca a una "C-trasformazione": ved.p.105); nel qual caso la (18.38), scrivendosi

$$(18.39) \qquad u^{\circ'} = u^\circ + \log \varphi(u'u''\ldots u^n) + k \qquad k = \text{cost.}$$

perde qualsiasi traccia della linea geodetica OP e dà appunto $\frac{\partial u^{\circ'}}{\partial u^i} = \vartheta_i^{\circ'}$. Dunque: soltanto se il riferimento adottato è un riferimento olonomo (C-riferimento) le $\frac{\partial u^\nu}{\partial Z^\lambda}$ sono, nei riguardi di ν, le componenti di un tensore proiettivo.

Più precisamente, in relazione a una qualunque C-trasformazione, che induce sulle Z^λ la trasformazione lineare a coefficienti costanti

$$(18.40) \qquad Z^\lambda = \left(\vartheta_{\lambda'}^{\lambda}\right)_\circ Z^{\lambda'},$$

le $\frac{\partial u^\nu}{\partial Z^\lambda}$ si trasformeranno così:

$$(18.41) \qquad \frac{\partial u^{\nu'}}{\partial Z^{\lambda'}} = \vartheta_\nu^{\nu'} \left(\vartheta_{\lambda'}^{\lambda}\right)_\circ \frac{\partial u^\nu}{\partial Z^\lambda}.$$

Le $\frac{\partial u^\nu}{\partial Z^\lambda}$ e le $\frac{\partial Z^\lambda}{\partial u^{\lambda'}}$ potranno dunque, nell'ipotesi sopra precisata, servire quali coefficienti per una trasformazione del C-riferimento in un "riferimento normale olonomo": per la quale un tensore proiettivo qualun-

que, ad es. $H_{\lambda\mu}^{\cdots\nu}$, acquisterà nuove componenti $^{\circ}H_{\alpha\beta}^{\cdots\gamma} = \frac{\partial Z^{\gamma}}{\partial u^{\nu}} \frac{\partial u^{\lambda}}{\partial Z^{\alpha}} \frac{\partial u^{\mu}}{\partial Z^{\beta}} H_{\lambda\mu}^{\cdots\nu}$, soggette a mutarsi, quando il C-riferimento sia comunque mutato, secondo una trasformazione a coefficienti costanti:

$$(18.42) \qquad {}^{\circ}H_{\alpha'\beta'}^{\cdots\gamma'} = (\vartheta_{\alpha'}^{\alpha})_{0} (\vartheta_{\beta'}^{\beta})_{0} (\vartheta_{\gamma}^{\gamma'})_{0} {}^{\circ}H_{\alpha\beta}^{\cdots\gamma} .$$

In altre parole: il passaggio da un C-riferimento al corrispondente riferimento normale olonomo può interpretarsi quale una rappresentazione dei tensori (quale $H_{\lambda\mu}^{\cdots\nu}$) della varietà P_n mediante tensori (quale $^{\circ}H_{\lambda\mu}^{\cdots\nu}$) dello spazio proiettivo tangente. Non solo: ma anche ad es. la connessione proiettiva della P_n darà luogo a una connessione proiettiva nello spazio S_n tangente in O; e inversamente la connessione integrabile di questo darà una connessione integrabile in P_n: inteso che le serie di tensori, che variano lungo una curva per la legge di traslazione proiettiva della connessione immagine o indotta, siano quelle che si ottengono quali immagini delle serie di tensori che variano per traslazione proiettiva relativamente alla connessione (di P_n o di S_n) da cui si parte.

L'effettiva rappresentazione analitica delle connessioni indotte in S_n o in P_n, nel senso ora precisato, ci porta naturalmente a far uso di coordinate curvilinee omogenee nella varietà P_n: in quanto la rappresentazione dei punti della P_n sullo spazio S_n riporta sulla P_n le coordinate omogenee Z^{λ}. Ma di questo diremo al n. seguente: e soltanto al n. 20 potremo venire infine a una breve indicazione delle applicazioni più notevoli.

Dobbiamo intanto prospettare quelli che almeno sino a che l'argomento non venga ulteriormente approfondito si presentano come inconvenienti del riferimento normale olonomo: esso si basa sull'uso di C-riferimenti per la X_n e questa è una restrizione di cui non è chiara la ragione di essere geometrica; e in secondo luogo utilizza una rappresentazione dei tensori di P_n mediante tensori di S_n che è definita in modo puramente ana-

pubico. Nei singoli spazi tangenti i nuovi punti fondamentali sono i punti $\frac{\partial u^\nu}{\partial z^\alpha}$ (ove α si riguardi come indice ordinale) e il nuovo punto unità è $\sum_0^n{}_\alpha \frac{\partial u^\nu}{\partial z^\alpha}$, ma questo non ci dice affatto come tali riferimenti proiettivi locali si possano geometricamente ottenere.

Accanto al riferimento olonomo normale si presenta naturalmente e anzi in modo geometricamente espressivo la costruzione di riferimenti normali anolonomi, che ora darò con due diversi procedimenti: uno già utilizzato dal CARTAN (1937) che dà un A_0-riferimento ma non una rappresentazione dei tensori proiettivi di P_n con tensori di S_n; un altro invece è diretta estensione dei riferimenti anolonomi normali da me usati (1940) per le varietà a connessione affine: dà un A-riferimento del tipo più generale, ma d'altra parte determina una rappresentazione dei tensori di P_n nell'S_n tangente.

Il procedimento di CARTAN è sostanzialmente questo: detto P un punto qualunque della regione R e $\hat{P}$ il corrispondente punto immagine sulla retta, dell'S_n tangente in O, immagine tangenziale della geodetica congiungente OP, a partire dal sistema proiettivo locale Σ_0 dato nell'S_n egli associa al punto $\hat{P}$ in S_n un riferimento proiettivo $\hat{\Sigma}_P$ corrispondente a Σ_0 nell'omologia speciale di S_n in sè che porta O in $\hat{P}$ e ha uniti tutti i punti dell'iperpiano fondamentale $x^0=0$ di Σ_0 (*); infine da $\hat{\Sigma}_P$ deduce il riferimento Σ_P da associare al punto P in P_n mediante la traslazione proiettiva da O in P, lungo la geodetica OP. Il che equivale a dire che il punto fondamentale $(a)_P$ relativo a P è P medesimo e i punti fondamentali $(a_i)_P$, $i=1,\dots,n$ sono invece dedotti dai punti $(a_i)_0$ relativi ad O per traslazione proiettiva lungo OP: sono i punti aventi in re-

(*) E' quest'omologia speciale che il CARTAN chiama "traslazione relativa a Σ_0" in S_n: se quell'iperpiano fondamentale s'interpreta quale iperpiano improprio essa risulta un'effettiva traslazione.

lazione al B-riferimento primitivo (*) le coordinate date dagli sviluppi:

$$(18.43)\qquad X_i^\lambda = \delta_i^\lambda - \left(\Gamma_{i\nu}^\lambda\right)_o (Z^\nu - \delta_o^\nu) - \frac{1}{2}\left(\nabla_\tau \Gamma_{i\nu}^{(\lambda)}\right)_o (Z^\nu - \delta_o^\nu)(Z^\tau - \delta_o^\tau) - \dots$$

che si ottengono, per integrazione lungo la geodetica OP, a partire dal sistema differenziale

$$(18.44)\qquad \frac{dX_i^\lambda}{d\pi} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda X_i^\mu \frac{du^\nu}{d\pi} = 0 \qquad (\text{posto } (X_i^\lambda)_o = \delta_i^\lambda)$$

e il punto unità relativo a P è il punto di coordinate

$$(18.45)\qquad \delta_o^\lambda + \sum_1^n{}_i X_i^\lambda$$

(le X_i^λ essendo normalizzate nel modo precisato dalle (18.43)).

Posto per uniformità

$$(18.46)\qquad X_o^\lambda = \delta_o^\lambda$$

per un qualunque tensore, ad es. $H_{\lambda\mu}^{\dots\nu}$, il passaggio al riferimento normale anolonomo del CARTAN si farà così: le nuove componenti saranno

$$(18.47)\qquad {}^cH_{\alpha\beta}^{\dots\sigma} = H_{\lambda\mu}^{\dots\nu} X_\alpha^\lambda X_\beta^\mu X_\nu^\sigma ,$$

detti X_α^λ gli elementi reciproci delle X_λ^α in $\left|X_\lambda^\alpha\right|$.

Al riferimento normale così costruito potranno associarsi le coordinate normali non omogenee z^i o quelle omogenee Z^α; nella prima ipotesi i paremetri proiettivi della connessione, relativi al riferimento normale, saranno (rappresentato anche du^λ con le componenti $(du)^\alpha = X_\lambda du^\lambda$):

$$(18.48)\qquad {}^c\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda X_\beta^\mu X_\gamma^\nu X_\lambda^\alpha + X_\gamma^i \frac{\partial X_\beta^\lambda}{\partial z^i} X_\lambda^\alpha .$$

(*) Potremmo qui naturalmente, come fa il CARTAN, basarc anzichè su un B-riferimento, su un A-riferimento inizial

Volendo evitare l'uso dei "differenziali anolonomi" $(du)^\alpha$ potremo però anche usare i parametri misti

$$(18.49)\qquad {}^{c}L^{\alpha}_{\beta i} = L^{\lambda}_{\mu j} X^{\mu}_{\beta} X^{\alpha}_{\lambda} \frac{\partial u^j}{\partial z^i} + \frac{\partial}{\partial z^i} X^{\lambda}_{\beta} \cdot X^{\alpha}_{\lambda} - \frac{1}{n+1} \delta^{\alpha}_{\beta} \frac{\partial \log X}{\partial z^i}$$

(ove $X = |X^{\lambda}_{\alpha}|$; secondo la form. (14.34), p. 122). La condizione geometrica che definisce il riferimento normale anolonomo del CARTAN dà subito lungo ciascuna geodetica uscente da

$$(18.50)\qquad L^{i}_{jk} \frac{dz^k}{ds} = 0 \quad , \quad L^{\circ}_{jk} \frac{dz^k}{ds} = 0 \, ;$$

tenute presenti le (18.16) e (18.20) dà quindi le relazioni seguenti, identiche rispetto alle z^k:

$$(18.51)\qquad L^{i}_{jk} z^k = 0 \quad , \quad L^{\circ}_{jk} z^k = 0 .$$

L'altro procedimento, sopra accennato, dà luogo a un riferimento normale anolonomo, che diremo "completo". Si tratta in certo senso di un'appligazione, appunto, più integrale delle vedute del CARTAN: a partire dal sistema locale $\left(\begin{smallmatrix} a \\ \lambda \end{smallmatrix}\right)_o$ dato nel punto O ricaviamo il riferimento locale $\left(\begin{smallmatrix} a \\ \lambda \end{smallmatrix}\right)_P$ in ciascun punto P mediante il trasporto per traslazione proiettiva, lungo OP, dei punti fondamentali e unità del riferimento $\left(\begin{smallmatrix} a \\ \lambda \end{smallmatrix}\right)_o$.

Analogamente alle (18.43) le coordinate dei punti fondamentali del riferimento anolonomo completo nel punto $P(u^i)$ saranno

$$(18.52)\qquad y^{\mu}_{\alpha} = \delta^{\mu}_{\alpha} - \left(\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}\right)_o (Z^{\nu} - \delta^{\nu}_{o}) - \frac{1}{2} \left(\nabla_{\tau} \Gamma^{(\mu)}_{\alpha\nu}\right)_o (Z^{\nu} - \delta^{\nu}_{o})(Z^{\tau} - \delta^{\tau}_{o}) - \cdots$$

Le componenti di un qualunque tensore proiettivo, ad es. $H^{\cdots\nu}_{\lambda\mu}$, in relazione al riferimento anolonomo completo (che risulta univocamente associato a un R-riferimento di partenza) sono (indicati con y^{α}_{λ} gli elementi reciproci delle y^{α}_{λ} in $|y^{\alpha}_{\lambda}|$):

$$(18.53)\qquad {}'H^{\cdots\gamma}_{\alpha\beta} = y^{\lambda}_{\alpha} y^{\mu}_{\beta} y^{\gamma}_{\nu} H^{\cdots\nu}_{\lambda\mu} \, ;$$

corrispondentemente la connessione proiettiva risulta rappresentata dai parametri

$$(18.54)\qquad {}'\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\, y^{\lambda}_{\alpha} y^{\mu}_{\beta} y^{\gamma}_{\nu} + \partial_{\mu} y^{\lambda}_{\alpha}\, y^{\gamma}_{\lambda} y^{\mu}_{\beta}$$

ove $\partial_{\mu} = \dfrac{\partial}{\partial u^{\mu}}$. (Si tratta qui di parametri costruiti in relazione a un riferimento anolonomo : ved. n. seg. A differenza delle X_{λ}, le y_{λ} sono, nei riguardi dell'indice α, componenti di un tensore proiettivo dell'S_n hanno la legge di trasformazione.

$$(18.55)\qquad y^{\alpha'}_{\lambda'} = \vartheta^{\lambda}_{\lambda'}(\vartheta^{\alpha'}_{\alpha})_{0}\, y^{\alpha}_{\lambda}\ ;$$

dunque le (18.55) possono interpretarsi come formule di una effettiva rappresentazione del tensore $H^{\cdots\nu}_{\lambda\mu}$, dato nel punto P, nello spazio tangente in O. Tale rappresentazione ha un significato geometrico semplicissimo: il tensore ${}'H^{\cdots\gamma}_{\alpha\beta}$ di S_n è ottenuto in S_n da $H^{\cdots\nu}_{\lambda\mu}$ per traslazione proiettiva da P ad O lungo la geodetica congiungente OP.

Indichiamo ora una prima applicazione (dovuta, salvo l'assai diverso modo d'esposizione e sviluppo, al CARTAN) delle coordinate normali. (Altre applicazioni, ove intervengono anche riferimenti normali e la rappresentazione in relazione a coordinate curvilinee omogenee, daremo al n. 20)

Designiamo con Ω la rappresentazione della varietà a connessione proiettiva (o meglio : della sua regione R) sullo spazio S_n tangente in O, definita mediante le coordinate normali di origine O ; cioè chiamando omologo di un punto P di P_n il punto $\hat{P}$ che ha quali coordinate proiettive in S_n le coordinate normali omogenee Z^{λ} di P nella P_n. La Ω rappresenta, punto per punto, le geodetiche di P_n uscenti da O sulle rette di S_n, loro immagini tangenziali. Ma prendiamo una curva qualunque Γ di P_n uscente da O ; anch'essa ha su S_n una immagine tangenziale $\hat{\Gamma}$, che generalmente (se Γ non è geodetica) non coinciderà con la curva omologa $\hat{\Gamma}$ di

Γ in Ω . Rammentiamo (n.15, p.129) che le proprietà della curva Γ in P_n sono in sostanza tutte e sole le proprietà di una sua (qualunque) immagine tangenziale, qual'è $\hat{\Gamma}$. Ora dimostreremo che la curva $\hat{\Gamma}$ ha generalmente contatto del 2° ordine con ${}^*\Gamma$ in O : vi ha contatto del 3° ordine con ${}^*\Gamma$ se in O la torsione di P_n è nulla (e del 4° ordine, almeno, se si annulla in O anche la curvatura della P_n). Il che secondo il CARTAN s'interpreta dicendo che, mediante il passaggio a coordinate normali, si realizza un'applicazione generalmente del 2° ordine della P_n su uno spazio proiettivo, del 3° ordine se in O non vi è torsione, del 4° ordine se in O non vi è curvatura.

Riferiamo appunto la P_n a coordinate normali z^i ; negli spazi tangenti prendiamo i riferimenti locali nel modo che ci ha servito per costruire le z^i , caratterizzato dalle (18.21), che qui scriveremo semplicemente

$$\Gamma^{\circ}_{jk} z^k = 0 , \qquad \Gamma^{i}_{jk} z^j z^k = 0 \quad . \tag{18.56}$$

Se la curva Γ è data mediante la rappresentazione parametrica $u^i = u^i(t)$, cioè in coordinate normali

$$z^i = z^i(t) , \tag{18.57}$$

queste stesse equazioni rappresentano anche, in S_n (dove le z^i sono coordinate proiettive non omogenee) la curva ${}^*\Gamma$ immagine di Γ nella rappresentazione Ω . L'immagine tangenziale $\hat{\Gamma}$ è data invece dalle (15.17) di p.128, cioè con le attuali notazioni:

$$\hat{Z}^{\nu} = \delta^{\nu}_{\circ} + \left(\frac{dz^{\nu}}{dt}\right)_{\circ} t + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2 z^{\nu}}{dt^2}\right)_{\circ} t^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\delta^3 z^{\nu}}{dt^3}\right)_{\circ} t^3 + \dots\dots \tag{18.58}$$

ove le derivate delle z^i s'intendono calcolate a partire dalle (18.57), quelle assolute mediante i parametri $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ soddisfacenti alle (18.56) ; $\frac{dz^{\circ}}{dt}$ è scelto arbitrariamente (ma, come vedremo non ha effettiva influenza negli

sviluppi). Passando a coordinate non omogenee $\hat{z}^i = \frac{\hat{Z}^i}{\hat{Z}^0}$ abbiamo dalle (18.58) facilmente:

$$(18.59)\quad \hat{z}^i = \left(\frac{dz^i}{dt}\right)_0 t + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2 z^i}{dt^2}\right)_0 + \left(\frac{dz^i}{dt}\right)_0\left(\frac{dz^0}{dt}\right)_0\right] t^2 +$$

$$+\left[\frac{1}{3!}\left(\frac{\delta^3 z^i}{dt^3}\right)_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2 z^i}{dt^2}\frac{dz^0}{dt} + \frac{\delta^2 z^0}{dt^2}\frac{dz^i}{dt}\right)_0 + \left(\frac{dz^i}{dt}\right)_0\left(\frac{dz^0}{dt}\right)_0^2\right] t^3 + \cdots\cdots$$

e d'altra parte la (18.57) dà ovviamente:

$$(18.60)\quad z^i = \left(\frac{dz^i}{dt}\right)_0 t + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 z^i}{dt^2}\right)_0 t^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3 z^i}{dt^3}\right)_0 t^3 + \cdots\cdots;$$

ora mostreremo che, come sono senz'altro identici i coefficienti dei termini del 1° ordine in t nei due sviluppi, così anche in forza delle (18.56) risultano eguali sempre i coefficienti dei termini del 2° ordine, e in assenza di torsione, anche quelli del 3° ordine.

Effettivamente abbiamo

$$(18.61)\quad \frac{\delta^2 z^i}{dt^2} = \frac{d^2 z^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dz^j}{dt}\frac{dz^k}{dt} + 2\frac{dz^i}{dt}\frac{dz^0}{dt}$$

onde risulta per derivazione

$$(18.62)\quad \frac{\delta^3 z^i}{dt^3} = \frac{d^3 z^i}{dt^3} + \partial_l \Gamma^i_{jk}\frac{dz^j}{dt}\frac{dz^k}{dt}\frac{dz^l}{dt} +$$

$$+\Gamma^i_{jk}\left(\frac{d^2 z^j}{dt^2}\frac{dz^k}{dt} + \frac{dz^j}{dt}\frac{d^2 z^k}{dt^2}\right) + 2\left(\frac{d^2 z^i}{dt^2}\frac{dz^0}{dt} + \frac{dz^i}{dt}\frac{d^2 z^0}{dt^2}\right) +$$

$$+\Gamma^i_{jk}\frac{\delta^2 z^j}{dt^2}\frac{dz^k}{dt} + \frac{\delta^2 z^i}{dt^2}\frac{dz^0}{dt} + \frac{dz^i}{dt}\frac{\delta^2 z^0}{dt^2}.$$

Tenuto presente che, in conseguenza delle (18.56), si ha

$$(18.63)\quad \partial_l \Gamma^i_{jk}\, z^j z^k z^l = 0$$

ricaviamo subito

$$(18.64)\quad \left(\frac{\delta^2 z^i}{dt^2}\right)_0 = \left(\frac{d^2 z^i}{dt^2}\right)_0 + 2\left(\frac{dz^i}{dt}\frac{dz^0}{dt}\right)_0,$$

$$(18.65)\qquad \left(\frac{\delta^3 z^i}{dt^3}\right)_0 = \left(\frac{d^3 z^i}{dt^3}\right)_0 + 3\left(\frac{\delta^2 z^i}{dt^2}\frac{dz^0}{dt} + \frac{dz^i}{dt}\frac{\delta^2 z^0}{dt^2}\right)_0 - 6\left(\frac{dz^i}{dt}\right)_0\left(\frac{dz^0}{dt}\right)_0^2 + \left(S_{jh}^{\cdots i}\frac{\delta^2 z^j}{dt^2}\frac{dz^h}{dt}\right)_0 - \dots$$

onde, sostituendo nelle (18.59) otteniamo infine

$$(18.66)\qquad \hat{z}^i = \left(\frac{dz^i}{dt}\right)_0 t + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 z^i}{dt^2}\right)_0 t^2 + \left[\frac{1}{3!}\frac{d^3 z^i}{dt^3} + \frac{1}{3!}S_{jk}^{\cdots i}\frac{\delta^2 z^j}{dt^2}\frac{dz^k}{dt}\right] t^3 + \dots$$

Confrontando con la (18.60) ne segue quanto volevamo; in particolare si vede che per $n \leq 3$ esistono sempre (e sotto condizioni opportune potranno esistere anche per $n > 3$) sistemi di linee diverse dalle geodetiche per le quali in O si ha pure un contatto del 3° ordine almeno fra immagini tangenziali e immagini nella rappresentazione Ω .

19. Il metodo delle coordinate curvilinee omogenee: generalità. Riferimenti anolonomi. Indicatore d'anolonomia proiettiva.

Abbiamo visto, al n.prec., come si presenti naturalmente l'introduzione di particolari coordinate curvilinee omogenee su una varietà P_n a connessione proiettiva: quelle che abbiamo indicato con Z^λ, coordinate normali omogenee, che vengono trasportate sulla P_n mediante la rappresentazione Ω della P_n sull' S_n tangente in O (e di questa su quella). Siamo condotti a parlare più in generale delle coordinate curvilinee omogenee su una varietà qualunque, e del loro uso nella rappresentazione delle connessioni proiettive.

Tali coordinate sono state introdotte da D. VAN DANTZ (1932) e utilizzate appunto nella teoria delle connessioni proiettive e nelle sue applicazioni alla Relatività dallo stesso v.DANTZIG, da SCHOUTEN e da HAANTJES. Nel breve cenno che ora esporremo ci atterremo alla formu-

lazione più recente e più perfezionata, data appunto dai due ultimi Autori nel 1936.

Si passa dalle coordinate curvilinee ordinarie, non omogenee , u^i a coordinate curvilinee omogenee ponendo le u^i eguali ad n funzioni (indipendenti) omogenee di grado zero di n+1 parametri $v^\alpha (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots = 0, 1, \ldots, n)$:

$$u^i = u^i(v^0, v^1, \ldots, v^n). \tag{19.1}$$

In quanto i secondi membri sono omogenei di grado zero nelle v^α è ovvio che la trasformazione (19.1) si può scindere nel prodotto di una ordinaria trasformazione delle coordinate non omogenee per la trasformazione seguente:

$$u^i = \frac{v^i}{v^0}. \tag{19.2}$$

Supponiamo che la X_n che si considera sia una X_n (ai cui punti sono associati spazi proiettivi, "tangenti" in essi : n.13, p.107) e che si sia assunto per la X_n un riferimento olonomo (C-riferimento). Questo consente di prendere in considerazione un parametro u^0 che in relazione a un cambiamento del C-riferimento ha la legge di trasformazione

$$u^0 = u^{0'} + \log \varrho(u^{1'}, \ldots, u^{n'}), \tag{19.3}$$

ove intendiamo che sia posto

$$\vartheta^0_{i'} = \partial_{i'} \log \varrho. \tag{19.4}$$

L'interpretazione che di u^0 e di z^0 davamo al n. precedente, in relazione a un punto fissato O e alle geodetiche per esso, perde significato se non disponiamo di un punto privilegiato. Ma le relazioni (18.30) e (18.31) che ne avevamo ricavato si estendono in modo naturale : intenderemo che u^0 sia collegata a v^0, o viceversa, dalla relazione

(19.5) $$u^0 = \log v^0;$$

questa è una restrizione soltanto formale per v^0, in quanto u^0 è arbitraria: ma ne vedremo presto l'utilità. Le (19.2) e (19.5) daranno luogo alle formule inverse

(19.6) $$v^i = e^{u^0} u^i, \qquad v^0 = e^{u^0}.$$

Una trasformazione

(19.7) $$u^i = u^i(u^{1'}, \dots, u^{n'}); \quad u^0 = u^{0'} + \log \varrho(u^{1'}, \dots, u^{n'})$$

sulle u^λ induce sulle v^α la trasformazione

(19.8) $$\begin{cases} v^i = \varrho\left(\frac{v^{1'}}{v^{0'}}, \dots, \frac{v^{n'}}{v^{0'}}\right) \cdot u^i\left(\frac{v^{1'}}{v^{0'}}, \dots, \frac{v^{n'}}{v^{0'}}\right) v^{0'} \\ v^0 = \varrho\left(\frac{v^{1'}}{v^{0'}}, \dots \frac{v^{n'}}{v^{0'}}\right) v^{0'} \end{cases}$$

che rientra ovviamente nel tipo

(19.9) $$v^\alpha = \varphi^\alpha(v^{0'}, v^{1'}, \dots, v^{n'})$$

ove s'intenda che i secondi membri siano omogenei di grado 1 negli argomenti indicati; viceversa, data comunque una tale trasformazione (19.9), ne ricaviamo

(19.10) $$\begin{cases} v^0 = \varphi^0\left(1, \frac{v^{1'}}{v^{0'}}, \dots, \frac{v^{n'}}{v^{0'}}\right) v^{0'} \\ \frac{v^i}{v^0} = \varphi^i\left(1, \frac{v^{1'}}{v^{0'}}, \dots, \frac{v^{n'}}{v^{0'}}\right) \end{cases}$$

cioè $\log v^0 = \log v^{0'} + \log \varphi^0\left(1, \frac{v^{1'}}{v^{0'}}, \dots, \frac{v^{n'}}{v^{0'}}\right)$

e questa in forza delle (19.2), (19.5) rientra fra le trasformazioni (19.7); cosicchè le coordinate curvilinee omogenee v^α, in forza delle (19.2) e (19.5) subiscono precisamente la più generale trasformazione omogenea di grado 1 quando le u^i ed u^0 vengono trasformate mediante le (19.7). E' questa la conseguenza sostanziale della posizione (19.5); e inteso che si sia fatta questa posizione, e cioè si sia interpretata e^{u^0} come valore della $(n+1)^{ma}$ coordinata omogenea v^0, ci

ci si rende conto bene della ragion d'essere del modo di trasformarsi (19.3) di u° ;in quanto è ben natural che le v^λ risultino determinate appunto a meno della più generale trasformazione omogenea di grado 1.

E' notevole pel seguito questa osservazione: alle (19.9) pel teorema di EULERO può darsi la forma

$$(19.11)\qquad v^\alpha = \frac{\partial v^\alpha}{\partial v^{\alpha'}} v^{\alpha'} = \bar{\vartheta}^\alpha_{\alpha'} v^{\alpha'},$$

avendo posto

$$(19.12)\qquad \bar{\vartheta}^\alpha_{\alpha'} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial v^{\alpha'}} \qquad \left(\text{e } \bar{\vartheta}^{\alpha'}_{\alpha} = \frac{\partial v^{\alpha'}}{\partial v^{\alpha}}\right).$$

Le derivate $\frac{\partial u^\lambda}{\partial v^\alpha}$ e $\frac{\partial u^\alpha}{\partial u^\lambda}$,che precisamente sono da da :

$$(19.13)\qquad \frac{\partial u^\circ}{\partial v^\circ} = \frac{1}{v^\circ}, \quad \frac{\partial u^\circ}{\partial v^i} = 0 ; \quad \frac{\partial u^i}{\partial v^\circ} = -\frac{v^i}{v^{\circ 2}} ; \quad \frac{\partial u^i}{\partial v^i} = \frac{\delta}{v}$$

$$(19.14)\qquad \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^\circ} = v^\alpha ; \quad \frac{\partial v^\circ}{\partial u^i} = 0, \quad \frac{\partial v^i}{\partial u^i} = v^\circ \delta^i_{\cdot}$$

sono componenti di <u>tensori</u>, naturalmente <u>misti</u> in quan to l'indice λ è relativo al C-riferimento e l'indice α al sistema omogeneo: per trasformazioni (19.7) ,(19.9) <u>fra loro indipendenti</u> si ha naturalmente

$$(19.15)\qquad \frac{\partial u^{\lambda'}}{\partial v^{\alpha'}} = \vartheta^{\lambda'}_{\lambda} \bar{\vartheta}^{\alpha}_{\alpha'} \frac{\partial u^\lambda}{\partial v^\alpha}, \quad \frac{\partial v^{\alpha'}}{\partial u^{\lambda'}} = \vartheta^{\lambda}_{\lambda'} \bar{\vartheta}^{\alpha'}_{\alpha} \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^\lambda},$$

col solito significato per le $\vartheta^\lambda_{\lambda'}$ (e $\vartheta^{\lambda'}_{\lambda}$) :

$$(19.16)\qquad \vartheta^\lambda_{\lambda'} = \frac{\partial u^\lambda}{\partial u^{\lambda'}} \text{ e cioè } \vartheta^\circ_{\circ'} = 1, \ \vartheta^\circ_{i'} = \frac{\partial \log \varrho}{\partial u^{i'}}; \ \vartheta^i_{\circ'} = 0, \ \vartheta^i_{i'} =$$

Di più le $\frac{\partial u^\lambda}{\partial v^\alpha}$ sono, ovviamente ,<u>funzioni omogenee di grado -1</u> delle v^α e le $\frac{\partial v^\alpha}{\partial u^\alpha}$ omogenee di grado 1. Per brevità di scrittura porremo

$$(19.17)\qquad \omega^\lambda_\alpha = \frac{\partial u^\lambda}{\partial v^\alpha}, \quad \omega^\alpha_\lambda = \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^\lambda} \qquad \left(\omega^\lambda_\alpha \omega^\alpha_\mu = \delta^\lambda_\mu\right)$$

L'uso delle coordinate curvilinee omogenee presenta

sto indiscutibile vantaggio formale: possibilità di associare (con procedimento del quale, però, non appare il significato geometrico; in un caso particolare già accennato al n.prec.) alle coordinate curvilinee dei punti i corrispondenti sistemi proiettivi locali, in modo che su ciascuno spazio tangente il punto di contatto ha quali coordinate proiettive omogenee $\bar{x}^\alpha$ precisamente le stesse coordinate curvilinee omogenee v^α che esso ha sulla varietà. Il che porta che i coefficienti delle formule di trasformazione delle coordinate proiettive locali $\bar{x}^\alpha$ sono le stesse $\vartheta^\alpha_{\alpha'} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial v^{\alpha'}}$, calcolate nel supposto punto v^α : possiamo scrivere

$$\bar{x}^{-\alpha} = \bar{\vartheta}^\alpha_{\alpha'} \bar{x}^\alpha , \tag{19.18}$$

avvertendo però che l'analogia con le (19.11) è soltanto apparente in quanto le (19.11) non sono trasformazioni lineari: i coefficienti $\vartheta^\alpha_{\alpha'}$, sono funzioni delle v (cioè delle v^α). Solo quando le v^α sono proprio le coordinate $\bar{x}^\alpha_o$ del punto di contatto dello spazio tangente che si considera le (19.11) rientrano nelle (19.18). (Potremmo nelle (19.18) scrivere ad es. $(\vartheta^\alpha_{\alpha'})_o$ anzichè $\vartheta^\alpha_{\alpha'}$, per togliere ogni equivoco: ma per semplicità conserviamo la notazione adottata, rispondente del resto al fatto che il punto di contatto $\bar{x}^\alpha_o$ è un qualunque punto v^α della $\mathcal{X}_n$).

Le effettive formule di trasformazione delle coordinate proiettive locali dei punti nel passaggio dal primitivo C-riferimento al "riferimento omogeneo" (che in sostanza è un A-riferimento: ved. pp.100,107) non sono determinate dalla condizione già posta: che il punto di contatto δ^λ_o (o $n\delta^\lambda_o$) acquisti le coordinate $\bar{x}^\alpha_o = v^\alpha$: ma appare naturale porre (cfr. n.prec.)

$$\bar{x}^{-\alpha} = \omega^\alpha_\lambda x^\lambda \qquad \left(x^\lambda = \omega^\lambda_\alpha \bar{x}^{-\alpha}\right) \tag{19.19}$$

il che dà appunto, essendo $\omega^\alpha_o = \frac{\partial v^\alpha}{\partial \omega} = v^\alpha$, $\bar{x}^{-\alpha} = v^\alpha$ per $x^\lambda = \delta^\lambda_o$. Questo equivale ad assumere quali punti fondamentali e unità dei nuovi sistemi proiettivi locali i punti ω^λ_α (ove α si pensi come un indice ordi-

nale) e $\sum_{\alpha}^{n} \omega_{\alpha}^{\lambda}$ .Geometricamente soltanto questo può senz'altro notarsi: che gli iperpiani $\bar{x}^{\circ}=0$ dei nuovi riferimenti locali non differiscono dagli antichi $x^{\circ}=0$; e infatti le (19.19) dànno $\bar{x}^{\circ} = v^{\circ}x^{\circ}$.

Per un qualunque tensore proiettivo ,ad es. $H_{\lambda\mu}^{\cdots\nu}$, avremo nuove componenti

$$\bar{H}_{\alpha\beta}^{\cdots\gamma} = \omega_{\alpha}^{\lambda}\omega_{\beta}^{\mu}\omega_{\nu}^{\gamma} H_{\lambda\mu}^{\cdots\nu} . \tag{19.20}$$

In quanto si suppongano (come sino ad ora abbiamo sempre supposto) indipendenti da u° le $H_{\lambda\mu}^{\cdots\nu}$,le $H_{\alpha\beta}^{\cdots\gamma}$ risultano funzioni omogenee di grado -1 delle v^{α} ;per un tensore $\bar{H}_{\alpha_1\cdots\alpha_2}^{\cdots\beta_1\cdots\beta_3}$ le componenti saranno omogenee di grado $3-2$.

Il vettore proiettivo du^{λ} ,la cui interpretazione come punto dello spazio tangente dipende dalla scelta del valore di du° e della omografia che collega il sistema proiettivo locale a quello curvilineo (ved.pp. 100-101) ha quali nuove componenti le dv^{α} ;ma le du^{λ} naturalmente non sono indipendenti dalla distribuzione dei valori del parametro u° e corrispondentemente le dv^{α} non sono funzioni omogenee delle v^{α} ;per

$$\hat{v}^{\alpha} = \varrho v^{\alpha} \tag{19.21}$$

si ha effettivamente

$$d\hat{v}^{\alpha} = \varrho(dv^{\alpha} + v^{\alpha} d\log\varrho). \tag{19.22}$$

Secondo v.DANTZIG e SCHOUTEN la denominazione di tensori viene riserbata agli enti rappresentabili mediante componenti, funzioni omogenee delle v^{α} ; in questo senso dv^{α} non è un tensore. Su questo torneremo.

Veniamo alla rappresentazione della connessione proiettiva, in relazione alle coordinate omogenee (e al riferimento omogeneo). Le equazioni

$$\frac{dx^{\lambda}}{dt} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} x^{\mu}\frac{du^{\nu}}{dt} = \psi(t)x^{\lambda} \tag{19.23}$$

si possono scrivere nella forma

$$(19.24)\qquad \frac{d\bar{x}^\alpha}{dt} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\,\bar{x}^\beta \frac{dv^\gamma}{dt} = \psi(t)\,\bar{x}^\alpha$$

avendo posto

$$(19.25)\qquad \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\,\omega^\mu_\beta\,\omega^\nu_\gamma\,\omega^\alpha_\lambda + \partial_\gamma\,\omega^\lambda_\beta\,\omega^\alpha_\lambda .$$

Le $\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ sono le componenti cercate, della connessione proiettiva in relazione al riferimento omogeneo.

In conseguenza delle formule, che sino ad ora intendiamo sempre soddisfatte (ved. n.14, p.119), valgono identicamente le relazioni (14.21), (14.19),

$$(19.26)\qquad \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}\,v^\beta = 0\ ,\qquad \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}\,v^\gamma = 0\ :$$

queste formalmente possono apparire una restrizione inessenziale. Ma anche su questo avremo occasione di tornare (alla fine del presente n. e poi al n. 22).

Senz'altro nel solito modo con le $\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ si potranno formare derivate covarianti dei tensori proiettivi, o più precisamente di quei tensori proiettivi che unicamente ci si presentano sino ad ora (cfr. n. 22): tensori "di eccesso nullo", pei quali il grado d'omogeneità è uguale alla differenza fra la valenza controvariante e la valenza covariante (secondo la terminologia di SCHOUTEN: differenza fra i numeri d'indici di controvarianza e di covarianza). Senz'altro è ovvio che la particolarità ora detta per derivazione covariante si conserva: ad es. per

$$(19.27)\qquad \nabla_\varepsilon \bar{H}^{\cdots\gamma}_{\alpha\beta} = \partial_\varepsilon \bar{H}^{\cdots\gamma}_{\alpha\beta} - \bar{\Gamma}^\delta_{\alpha\varepsilon}\,\bar{H}^{\cdots\gamma}_{\delta\beta} - \bar{\Gamma}^\delta_{\beta\varepsilon}\,\bar{H}^{\cdots\gamma}_{\alpha\delta} + \bar{\Gamma}^\gamma_{\delta\varepsilon}\,\bar{H}^{\cdots\delta}_{\alpha\beta}$$

le componenti sono di grado -2. Invece il differenziale assoluto

$$(19.28)\qquad \delta \bar{H}^{\cdots\gamma}_{\alpha\beta} = \nabla_\varepsilon \bar{H}^{\cdots\gamma}_{\alpha\beta}\,.\,dv^\varepsilon$$

in conseguenza del già notato comportamento di dv^α soltanto per i tensori di grado (d'omogeneità) nullo è un tensore omogeneo; effettivamente si ha, per le (19.21),

(19.29) $$\hat{\delta}\,\hat{\bar{H}}^{\cdots\beta_1\cdots\beta_3}_{\alpha_1\cdots\alpha_2} = \varrho^{3-2}\left(\delta \bar{H}^{\cdots\beta_1\cdots\beta_3}_{\alpha_1\cdots\alpha_2} + d\log\varrho\, \nabla_\varepsilon \bar{H}^{\cdots\beta_1\cdots\beta_3}_{\alpha_1\cdots\alpha_2}\, v^\varepsilon\right)$$

e d'altra parte, per la seconda delle (19.26)

(19.30) $$\nabla_\varepsilon \bar{H}^{\cdots\beta_1\cdots\beta_3}_{\alpha_1\cdots\alpha_2}\, v^\varepsilon = \partial_\varepsilon \bar{H}^{\cdots\beta_1\cdots\beta_3}_{\alpha_1\cdots\alpha_2}\, v^\varepsilon = \varrho^{3-2}\bar{H}^{\cdots\beta_1\cdots\beta_3}_{\alpha_1\cdots\alpha_2}\,.$$

(Cfr.pp. 121-122).Pel caso generale dovremmo dire, secondo SCHOUTEN che non v'è differenziale assoluto: però è manifesto che le equazioni

(19.31) $$\delta H^{\cdots\beta_1\cdots\beta_3}_{\alpha_1\cdots\alpha_2} \equiv H^{\cdots\beta_1\cdots\beta_3}_{\alpha_1\cdots\alpha_2}$$

hanno sempre, anche in relazione alle (19.21), un significato invariante (dànno la legge di trasporto per traslazione proiettiva del tensore geometrico $H^{\cdots\beta_1\cdots\beta_3}_{\alpha_1\cdots\alpha_2}$): mi sembra che questo giustifichi il mantenere anche pel caso generale la notazione e la denominazione.

Veniamo alla rappresentazione della curvatura e della torsione della connessione proiettiva in coordinate omogenee. Secondo v. DANTZIG introduciamo anzitutto il tensore

(19.32) $$\bar{N}^{\cdots\delta}_{\alpha\beta\gamma\cdots} = \partial_\beta \bar{\Gamma}^{\delta}_{\gamma\alpha} - \partial_\alpha \bar{\Gamma}^{\delta}_{\gamma\beta} + \bar{\Gamma}^{\varepsilon}_{\gamma\alpha}\bar{\Gamma}^{\delta}_{\varepsilon\beta} - \bar{\Gamma}^{\varepsilon}_{\gamma\beta}\bar{\Gamma}^{\delta}_{\varepsilon\alpha}$$
$$= \omega^\lambda_\alpha \omega^\mu_\beta \omega^\nu_\gamma \omega^\delta_\zeta N^{\cdots\zeta}_{\lambda\mu\nu\cdots}$$

ove, analogamente, intendiamo posto

(19.33) $$N^{\cdots\zeta}_{\lambda\mu\nu\cdots} = \partial_\mu \Gamma^{\zeta}_{\nu\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^{\zeta}_{\nu\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}\Gamma^{\zeta}_{\sigma\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}\Gamma^{\zeta}_{\sigma\lambda}\,.$$

Questo è effettivamente un tensore solo per le C-trasformazioni come ovviamente risulta da quanto s'è notato al n.17; in generale esso è distinto da $\Gamma^{\cdots\zeta}_{\lambda\mu\nu\cdots}$, che invece è tensore per tutte le B-trasformazioni. Ma è immediata l'osservazione che

(19.34) $$R^{\cdots\zeta}_{\lambda\mu\nu\cdots} = N^{\cdots\zeta}_{\lambda\mu\nu\cdots} - \frac{1}{n+1}\delta^\zeta_\nu N^{\cdots\kappa}_{\lambda\mu\kappa\cdots}$$
$$= \Gamma^{\cdots\zeta}_{\lambda\mu\nu\cdots} - \frac{1}{n+1}\delta^\zeta_\nu \Gamma^{\cdots\kappa}_{\lambda\mu\kappa\cdots}$$

cioè (cfr. con la (17.40)) che il tensore di curvatura della connessione proiettiva si può esprimere (in relazione a un C-riferimento) per $N_{\lambda\mu\nu}^{\cdots\varepsilon}$ senz'altro come per $\Gamma_{\lambda\mu\nu}^{\cdots\varepsilon}$ Tornando alle coordinate omogenee: $R_{\lambda\mu\nu}^{\cdots\varepsilon}$ avrà nel riferimento omogeneo le componenti

$$(19.35)\qquad \bar{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\cdots\delta} = \bar{N}_{\alpha\beta\gamma}^{\cdots\delta} - \frac{1}{n+1}\delta_\gamma^\delta \bar{N}_{\alpha\beta\varepsilon}^{\cdots\varepsilon}$$

$$= \omega_\alpha^\lambda \omega_\beta^\mu \omega_\gamma^\nu \omega_\varepsilon^\delta R_{\lambda\mu\nu}^{\cdots\varepsilon} .$$

In conseguenza delle (17.39), cioè

$$(19.36)\qquad R_{o\mu\nu}^{\cdots\varepsilon} = R_{\lambda o\nu}^{\cdots\varepsilon} = 0$$

si ha in coordinate omogenee

$$(19.37)\qquad \bar{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\cdots\delta} v^\alpha = 0 \quad , \quad \bar{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\cdots\delta} v^\beta = 0$$

e anche, ovviamente

$$(19.38)\qquad \bar{N}_{\alpha\beta\gamma}^{\cdots\delta} v^\alpha = 0 \quad , \quad \bar{N}_{\alpha\beta\gamma}^{\cdots\delta} v^\beta = 0 .$$

Il tensore $S_{\lambda\mu}^{\cdots\varepsilon}$ dato dalle (17.53), cioè

$$(19.39)\qquad S_{\lambda\mu}^{\cdots\varepsilon} = \frac{1}{2} R_{\lambda\mu o}^{\cdots\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(N_{\lambda\mu o}^{\cdots\varepsilon} - \frac{1}{n+1}\delta_o^\varepsilon N_{\lambda\mu\nu}^{\cdots\nu}\right)$$

avrà nel riferimento omogeneo le componenti

$$(19.40)\qquad \bar{S}_{\alpha\beta}^{\cdots\delta} = \frac{1}{2}\bar{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\cdots\delta} v^\gamma = \frac{1}{2}\left(\bar{N}_{\alpha\beta\gamma}^{\cdots\delta} v^\gamma - \frac{1}{n+1}\bar{N}_{\alpha\beta\gamma}^{\cdots\gamma} v^\delta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\partial_\beta \bar{\Gamma}_{\gamma\alpha}^{\delta} - \partial_\alpha \bar{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\delta} + \bar{\Gamma}_{\gamma\alpha}^{\varepsilon}\bar{\Gamma}_{\varepsilon\beta}^{\delta} - \bar{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\varepsilon}\bar{\Gamma}_{\varepsilon\alpha}^{\delta}\right) v^\gamma -$$

$$- \frac{1}{2(n+1)}\left(\partial_\beta \bar{\Gamma}_{\gamma\alpha}^{\gamma} - \partial_\alpha \bar{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\gamma}\right) v^\delta$$

cioè, per le (19.26) ,con alcune semplificazioni:

$$(19.41)\qquad \bar{S}_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\delta} = \bar{\Gamma}^{\delta}_{[\alpha\beta]} - \frac{1}{2(n+1)}\left(\partial_\beta \bar{\Gamma}^{\gamma}_{\gamma\alpha} - \partial_\alpha \bar{\Gamma}^{\gamma}_{\gamma\beta}\right) v^{\delta}.$$

Il tensore di torsione $S_{hk}^{\cdot\cdot i}$ (od $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot i} = \delta_\lambda^h \delta_\mu^k S_{hk}^{\cdot\cdot i}$) non ha in relazione al riferimento omogeneo una rappresentazione semplice (e la stessa osservazione vale per tensori affini in genere). La condizione d'annullamento della torsione potrà scriversi

$$(19.42)\qquad \bar{S}_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot[\delta} v^{\varepsilon]} = 0 ,$$

o anche

$$(19.43)\qquad \bar{S}_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot i} v^{0} - \bar{S}_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot 0} v^{i} = 0 ;$$

cioè, sostituendo e semplificando

$$(19.44)\qquad \bar{\Gamma}^{i}_{[\alpha\beta]} v^{0} - \bar{\Gamma}^{0}_{[\alpha\beta]} v^{i} = 0 .$$

Le linee geodetiche potranno ancora rappresentarsi in coordinate omogenee (s'intende sempre : in quanto valgono le (19.26)) con un sistema differenziale della solita forma

$$(19.45)\qquad \frac{d^2 v^\alpha}{d\pi^2} + \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} \frac{dv^\beta}{d\pi}\frac{dv^\gamma}{d\pi} = 0 ;$$

ma questa non ha carattere d'invarianza per la (19.21), che la muta in

$$(19.46)\qquad \rho \frac{d^2\hat{v}^\alpha}{d\pi^2} + \hat{\bar{\Gamma}}^{\alpha}_{\beta\gamma} \frac{d\hat{v}^\beta}{d\pi}\frac{d\hat{v}^\gamma}{d\pi} = \rho\left[\frac{d^2\log\rho}{d\pi^2} - \left(\frac{d\log\rho}{d\pi}\right)^2\right]\hat{v}^\gamma + 2p\frac{d\log\rho}{d\pi}\frac{d\hat{v}}{d\pi}$$

Se invece lasciamo arbitrario il fattore d'omogeneità delle v^α e anche il parametro cui i punti di ciascuna geodetica son riferiti, le geodetiche si potran-

no rappresentare con un sistema della forma

$$\frac{d^2v^\alpha}{dt^2} + \overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dv^\beta}{dt}\frac{dv^\gamma}{dt} = hv^\alpha + k\frac{dv^\alpha}{dt}. \tag{19.47}$$

E' ovvio come da questa possa riottenersi la (19.45) disponendo opportunamente della scelta del parametro e della normalizzazione delle v^α.

Nelle applicazioni del metodo delle coordinate curvilinee omogenee, come vedremo al n.seguente, non basta l'uso del riferimento omogeneo di cui ci siamo valsi sino ad ora: può occorrere l'uso di riferimenti più generali(anolonomi) del tutto indipendenti dal sistema di coordinate curvilinee omogenee.

Un tale riferimento si darà (ved. n.12,p. 100) assegnando comunque n+1 campi di punti indipendenti degli spazi tangenti $\overline{\underset{\gamma}{D}}^\alpha(\alpha,\beta,\gamma,\dots=0,1,\dots,n)$ (le cui coordinate siano funzioni omogenee di grado q delle v^α (*) quali punti fondamentali dei sistemi proiettivi locali (e un $(n+2)^{mo}$ campo di punti, indipendenti da n qualunque dei precedenti , quali punti unità: ma potremo collegare i fattori d'omogeneità delle coordinate dei punti $\overline{\underset{\gamma}{D}}^\alpha$ in modo che le coordinate dei punti unità locali siano date da $\sum_\gamma \overline{\underset{\gamma}{D}}^\alpha$).Inteso che le $\overline{\underset{\alpha}{D}}_\alpha$ siano gli elementi reciproci delle $\overline{\underset{\gamma}{D}}^\alpha$ in $\left|\overline{\underset{\gamma}{D}}^\alpha\right|$,le nuove componenti di un qualunque tensore proiettivo, ad es $H_\lambda^{\cdot\mu} = \omega^\alpha_\lambda \omega^\mu_\beta \overline{H}_\alpha^{\cdot\beta}$, saranno

$$\overline{H}_{\bar\alpha}^{\cdot\bar\beta} = \overline{H}_{\bar\gamma}^{\cdot\delta}\overline{\underset{\alpha}{D}}^\gamma\overline{\underset{\delta}{D}}^{\bar\beta} = H_\lambda^{\cdot\mu}\overline{\underset{\alpha}{D}}^\lambda\overline{\underset{\mu}{D}}^{\bar\beta}, \tag{19.47}$$

(ove ad es. $\overline{\underset{\alpha}{D}}^\lambda = \overline{\underset{\alpha}{D}}^\gamma\omega^\lambda_\gamma$; ecc.).Introdotta (cfr. n.prec., form (18.54))la derivazione anolonoma

$$\partial_{\bar\alpha} = \overline{\underset{\alpha}{D}}^\gamma\partial_\mu = \overline{\underset{\alpha}{D}}^\lambda\partial_\lambda \tag{19.48}$$

$\left(\partial_\gamma = \frac{\partial}{\partial v^\gamma},\ \partial_\lambda = \frac{\partial}{\partial u^\lambda}\right)$

(*) Non conviene qui limitarci a priori al caso che in certo senso si presenterebbe come più naturale: quello in cui $q=1$ .Chè ad es. nel caso di olonomia dobbiamo supporre $q=0$.

la connessione potrà rappresentarsi coi parametri

$$(19.49)\qquad \bar{\Gamma}^{\bar\alpha}_{\bar\beta\bar\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\,\bar{D}^{\beta}_{\bar\beta}\bar{D}^{\gamma}_{\bar\gamma}\bar{D}^{\bar\alpha}_{\alpha} + \partial_{\bar\gamma}\bar{D}^{\alpha}_{\bar\beta}\bar{D}^{\bar\alpha}_{\alpha}$$

soddisfacenti in conseguenza delle (19.26) alle relazioni

$$(19.50)\qquad \bar{\Gamma}^{\bar\alpha}_{\bar\beta\bar\gamma}\,\bar{x}^{\beta}_{\circ}+\partial_{\bar\gamma}\bar{x}^{\bar\alpha}_{\circ}-\delta^{\bar\alpha}_{\bar\gamma}=0\,,\quad \bar{\Gamma}^{\bar\alpha}_{\bar\beta\bar\gamma}\,\bar{x}^{\gamma}_{\circ}-q\,\delta^{\bar\alpha}_{\bar\beta}=0 \quad \text{ove } \bar{x}^{\bar\alpha}_{\circ}=\bar{D}^{\bar\alpha}_{\alpha}\bar{x}^{\alpha}_{\circ}.$$

La legge di trasformazione pei tensori e pei parametri della connessione, per un cambiamento qualunque

$$(19.51)\qquad \bar{D}'^{\bar\alpha}_{\bar\gamma'} = \vartheta^{\bar\gamma}_{\bar\gamma'}\,\bar{D}^{\bar\alpha}_{\bar\gamma}$$

del riferimento anolonomo (ove le $\vartheta^{\bar\gamma}_{\bar\gamma'}$ sono funzioni delle v^{α}, omogenee di grado zero, tali che $|\vartheta^{\bar\gamma}_{\bar\gamma'}|\neq 0$, e del resto arbitrarie) è senz'altro formalmente la solita. Nella rappresentazione del tenscre di curvatura (o di torsione) interviene invece un elemento nuovo, l'ente o indicatore di anolonomia (proiettivo) ("Anholonomitätsobjekt" secondo SCHOUTEN). Esso si presenta, nel modo più semplice, se scriviamo le formule di commutazione delle derivate covarianti seconde di uno scalare $f(v^{\circ}, v', \ldots, v^{n})$:

$$(19.52)\qquad \partial_{[\bar\alpha}f_{\bar\beta]} = \partial_{[\bar\alpha}\bar{D}^{\alpha}_{\bar\beta]}f_{\alpha} = \Omega^{\bar\mu}_{\bar\alpha\bar\beta}\,f_{\bar\mu}$$

ove abbiamo posto

$$(19.53)\qquad \Omega^{\bar\gamma}_{\bar\alpha\bar\beta} = \partial_{[\bar\alpha}\bar{D}^{\alpha}_{\bar\beta]}\cdot\bar{D}^{\bar\gamma}_{\alpha} = \partial_{[\bar\alpha}D^{\lambda}_{\bar\beta]}\cdot\bar{D}^{\bar\gamma}_{\lambda}$$

$$= \partial_{[\beta}\bar{D}^{\bar\gamma}_{\alpha]}\cdot\bar{D}^{\alpha}_{\bar\alpha}\bar{D}^{\beta}_{\bar\beta} = \partial_{[\mu}\bar{D}^{\bar\gamma}_{\lambda]}\cdot D^{\lambda}_{\bar\alpha}D^{\mu}_{\bar\beta}\,.$$

Appunto $\Omega^{\bar\gamma}_{\bar\alpha\bar\beta}$ è l'indicatore di anolonomia proiettivo.

Le (19.49) ci danno subito

$$(19.54)\qquad \Gamma^{\bar\alpha}_{[\bar\beta\bar\gamma]} = \Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]} D^{\mu}_{\bar\beta} D^{\nu}_{\bar\gamma} \Pi^{\bar\alpha}_{\lambda} - \Omega^{\bar\alpha}_{\bar\beta\bar\gamma} ,$$

dunque le componenti in relazione al riferimento anolonomo del tensore proiettivo $\Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]}$ (tensore per le C-trasformazioni) sono le somme

$$(19.55)\qquad \Gamma^{\bar\alpha}_{[\bar\beta\bar\gamma]} + \Omega^{\bar\alpha}_{\bar\beta\bar\gamma}$$

Il tensore $N^{\cdots\lambda}_{\tau\omega\mu}$ (anch'esso tensore per le C-trasformazioni) ha in relazione al riferimento anolonomo $D^{\lambda}_{\bar\alpha}$ le componenti

$$(19.56)\qquad N^{\cdots\bar\delta}_{\bar\alpha\bar\beta\bar\gamma} = \partial_{\bar\beta}\Gamma^{\bar\delta}_{\bar\gamma\bar\alpha} - \partial_{\bar\alpha}\Gamma^{\bar\delta}_{\bar\gamma\bar\beta} + \Gamma^{\bar\varepsilon}_{\bar\gamma\bar\alpha}\Gamma^{\bar\delta}_{\bar\varepsilon\bar\beta} - \Gamma^{\bar\varepsilon}_{\bar\gamma\bar\beta}\Gamma^{\bar\delta}_{\bar\varepsilon\bar\alpha} + 2\,\Omega^{\bar\varepsilon}_{\bar\alpha\bar\beta}\Gamma^{\bar\delta}_{\bar\gamma\bar\varepsilon}$$

come facilmente si verifica. Ne seguono senz'altro le espressioni dei tensori di curvatura di torsione in relazione al riferimento anolonomo: e in particolare, la dipendenza da $\Omega^{\bar\gamma}_{\bar\alpha\bar\beta}$

Per un mutamento qualunque (19.51) del riferimento anolonomo l'indicatore di anolonomia $\Omega^{\bar\gamma}_{\bar\alpha\bar\beta}$ ha la trasformazione seguente:

$$(19.57)\qquad \Omega^{\bar\gamma'}_{\bar\alpha'\bar\beta'} = \Omega^{\bar\gamma}_{\bar\alpha\bar\beta}\vartheta^{\bar\alpha}_{\bar\alpha'}\vartheta^{\bar\beta}_{\bar\beta'}\vartheta^{\bar\gamma'}_{\bar\gamma} - \partial_{[\bar\beta'}\vartheta^{\bar\gamma}_{\bar\alpha']}\cdot\vartheta^{\bar\gamma'}_{\bar\gamma} .$$

Vi sono riferimenti in relazione ai quali l'indicatore di anolonomia si annulla: manifestamente essi sono caratterizzati dall'esistenza di n+1 funzioni scalari $\varphi^{\bar\alpha}(v^{\circ}, v^{1}, \ldots, v^{n})$ tali che sia

$$(19.58)\qquad \Pi^{\bar\alpha}_{\beta} = \frac{\partial\varphi^{\bar\alpha}}{\partial v^{\beta}} .$$

Si badi però che (a differenza di quanto accade per l'indicatore di anolonomia affine) la condizione ora detta non coincide con la condizione d'olonomia pel riferimen-

to considerato: infatti per questo basta che anche a meno d'un comune fattore le $\bar{D}^{\bar{\alpha}}_{\beta}$ si riducano alle derivate di n+1 scalari $\varphi^{\bar{\alpha}}$, funzioni omogenee di grado zero delle v^{α}.

Applichiamo le nozioni ora introdotte allo studio di un esempio particolare di connessione proiettiva, concettualmente molto semplice: il quale però richiederà una rappresentazione della connessione proiettiva di tipo più generale di quello sinora adottato (dal n.14, p.119); e d'altra parte ci darà poi una interpretazione geometrica dell'indicatore d'anolonomia proiettivo.

Dati ancora gli n+1 campi di punti indipendenti $\bar{\bar{D}}^{\alpha}_{\bar{\alpha}}(v^0, v^1, \ldots\ldots, v^n)$, o più precisamente, le loro coordinate a meno d'un comune fattore, il che equivale a dare anche l'$(n+2)^{mo}$ campo di punti $E^{\alpha} = \sum_{0}^{n} \bar{\bar{D}}^{\alpha}_{\bar{\alpha}}$, possiamo considerare la connessione proiettiva integrabile definita assegnando come legge di trasporto di un punto P la condizione che si mantenga proiettivamente rigida la configurazione formata dagli n+3 punti $\bar{\bar{D}}^{\alpha}_{\bar{\alpha}}, E^{\alpha}, P$. Il che equivale a dire che, dette $x^{\bar{\alpha}}$ le coordinate di P nel sistema locale $\left\{ \bar{\bar{D}}_{\bar{\alpha}}, E \right\}$, dovrà essere, nel passaggio da un punto v^{α} a un qualunque punto infinitamente vicino:

$$(19.59) \qquad dx^{\bar{\alpha}} = \varphi x^{\bar{\alpha}} \quad \text{cioè} \quad d\left(\bar{\bar{D}}^{\bar{\alpha}}_{\alpha} x^{\alpha}\right) = \varphi \bar{\bar{D}}^{\bar{\alpha}}_{\alpha} x^{\alpha},$$

φ indicando un fattore scalare infinitesimo.
La (19.59) con ovvie trasformazioni si scrive

$$(19.60) \qquad dx^{\alpha} + \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} x^{\beta} dv^{\gamma} = \varphi x^{\alpha},$$

avendo posto

$$(19.61) \qquad \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \partial_{\gamma} \bar{\bar{D}}^{\bar{\alpha}}_{\beta} \cdot \bar{\bar{D}}^{\alpha}_{\bar{\alpha}} = -\partial_{\gamma} \bar{\bar{D}}^{\alpha}_{\beta} \cdot \bar{\bar{D}}^{\bar{\gamma}}_{\gamma} \bar{\bar{D}}^{\bar{\beta}}_{\beta}.$$

Manifestamente queste $\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sono da riguardare come i parametri della connessione proiettiva sopra definita(*)

(*) Risulta, a posteriori, quanto a priori era prevedibile ma non senz'altro evidente: che cioè si trattasse effettivamente di una connessione proiettiva. L'analogia di questa con la nota connessione affine integrabile di WEITZENBÖCK, VITALI, EINSTEIN è evidente. (Cfr. n. 25),

in relazione al presupposto riferimento omogeneo (olonomo).

Ma le condizioni (19.26) non sono soddisfatte in generale: si ha soltanto:

$$\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}\, v^{\gamma} = -q\,\delta^{\alpha}_{\beta}\,, \tag{19.62}$$

detto ancora q il grado d'omogeneità delle $\bar{D}^{\bar{\alpha}}_{\alpha}$ rispetto alle v^{α}. Le $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sono, insomma, parametri non normalizzati; come i parametri relativi al C-riferimento, legato dalle (19.2) e (19.5) al sistema curvilineo:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}\,\omega^{\beta}_{\mu}\,\omega^{\gamma}_{\nu}\,\omega^{\lambda}_{\alpha} + \partial_{\nu}\omega^{\alpha}_{\mu}\cdot\omega^{\lambda}_{\alpha} = \partial_{\nu}\bar{D}^{\bar{\alpha}}_{\mu}\cdot\bar{D}^{\lambda}_{\bar{\alpha}}. \tag{19.63}$$

Per questi ultimi parametri non valgono le (14.21) e generalmente neppure le (14.19): al posto delle quali ultime si ha, inteso sempre che le $\bar{D}^{\alpha}_{\bar{\alpha}}$ siano omogenee di grado q e quindi le $\bar{D}^{\bar{\alpha}}_{\alpha}$ di grado $-q$ nelle v^{α}.

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu o} = (1-q)\,\delta^{\lambda}_{\mu}. \tag{19.64}$$

Si comprende facilmente perchè le condizioni (14.21) e (14.19) che caratterizzano i parametri normalizzati (in coordinate non omogenee) non risultino senz'altro soddisfatte: al n.14 le condizioni (14.19) erano state imposte a priori, ma è evidente che avremmo anche potuto porre, più in generale

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu o} = \varkappa(u^1,\dots,u^n)\cdot\delta^{\lambda}_{\mu}, \tag{19.65}$$

con $\varkappa$ scalare arbitrario (ad es. $\varkappa=M$ (cost.) come nelle (8.40)) senza modificare affatto la connessione e cioè la legge di trasporto dei punti: ciò equivale in sostanza ad alterare per un fattore l'espressione di du°. E nei riguardi delle (14.21) : esse risultavano in quanto avevamo utilizzato l'omografia di deviazione per collegare (parzialmente) i riferimenti proiettivi locali a quello curvilineo (non omogeneo); non

saranno soddisfatte in generale se il B-riferimento (o in particolare come nel caso attuale , C-riferimento è preventivamente assegnato.

Si noti che questo porta a una modificazione nella rappresentazione delle linee geodetiche: infatti nel caso generale in cui non si suppongano valide le (14.21), un punto sulla tangente associata (n.14 ,p.117) alla tangente (du^i), avrà coordinate proiettive omogenee $\alpha\delta^\lambda_o + \Gamma^\lambda_{o\mu}\frac{du^\mu}{dt}$, e quindi (ved. n. 15, p. 134) la supposta tangente (du^i)inviluppera una geodetica a condizione che tale punto $\alpha\delta^\lambda_o + \Gamma^\lambda_{o\mu}\frac{du^\mu}{dt}$ vari lungo la linea medesima per traslazione proiettiva, il che dà facilmente la seguente rappresentazione analitica delle geodetiche:

$$(19.66)\quad \frac{d^2u^i}{dt^2} + \left(\Gamma^\lambda_{ij}\Gamma^i_{oh} + \partial_j\Gamma^\lambda_{oh}\right)\Gamma^{\cdots i}_\lambda \frac{du^j}{dt}\frac{du^h}{dt} = \varphi(t)\frac{du}{dt}$$

ove non resta traccia del fattore α (se non in $\varphi(t)$). (Con $\Gamma^{\cdots\nu}_\lambda$ intendiamo indicare gli elementi reciproci delle $\Gamma^\lambda_{o\nu}$ nel determinante $|\Gamma^\lambda_{o\nu}|$,supposto $\neq 0$ .Cfr. con le (15.28)(*). Notiamo che a ogni modo $\Gamma^\lambda_{o\nu}$ è un tensore).

L'espressione del tensore di curvatura in relazione all'attuale rappresentazione della connessione proiettiva è senz'altro la solita; il tensore di torsione invece ha naturalmente l'espressione seguente:

$$(19.67)\quad S^{\cdots i}_{jh} = \frac{1}{2}R^{\cdots i}_{jho} = \frac{1}{2}\left(\partial_h\Gamma^i_{oj} - \partial_j\Gamma^i_{oh} + \Gamma^\lambda_{oj}\Gamma^i_{\lambda h} - \Gamma^\lambda_{oh}\Gamma^i_{\lambda j}\right.$$

(*) S'intende bene che è necessario e sufficiente, dato un campo di punti $Q(t)$ negli spazi tangenti a P_n nei punti di una linea Γ, $P = P(t)$ che le rette PQ siano associate alle tangenti a Γ (cioè :omologhe nelle omografie di deviazione relative ai singoli punti P)perchè le rette PQ contengano ∞^1 serie di punti che lungo Γ variano per traslazione proiettiva: tutte quelle che si hanno prendendo come punto iniziale u

che un po' si semplifica se si suppone (come è sempre lecito: ma anche questo non è sostanziale; e ad es. non vale nel caso delle (19.63))

$$\Gamma^{\circ}_{o\,i} = 0. \tag{19.68}$$

Tornando alla rappresentazione in coordinate omogenee: con le (19.25) passeremo anche dai parametri $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ più generali a parametri $\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}$, pei quali le (19.26) non valgono: al luogo delle seconde equazioni (19.26) si ha soltanto, in forza delle (19.65)

$$\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}\, v^{\gamma} = (\varkappa - 1)\,\delta^{\alpha}_{\beta}\,; \tag{19.69}$$

caso particolare delle (19.65) e (19.69) sono le (19.64). Risulta ora chiaro in che cosa la connessione integrabile definita dalle (19.61) differisca dalla connessione integrabile dell' S_n proiettivo: a differenza di questa essa ha una deviazione non nulla.

Anche in relazione ai parametri più generali $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, ma ad un C-riferimento, le differenze

$$\mathcal{M}^{\cdots\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}\right) \tag{19.70}$$

sono le componenti di un tensore, che potremo dire tensore di asimmetria della connessione proiettiva; a differenza di quanto accade per le connessioni affini esso è del tutto distinto dal tensore di torsione (e non ne è stata indicata sino ad ora una interpretazione geometrica).

---

qualunque punto della retta PQ iniziale. Questo spiega perchè v. DANTZIG e SCHOUTEN, i quali definiscono quali geodetiche le linee inviluppate dalle stesse tangenti PQ quando Q varia per traslazione proiettiva, trovino in generale non una, ma ∞^1 geodetiche uscenti da un punto con una direzione assegnata.

In relazione al riferimento omogeneo esso avrà componenti $\bar{M}_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\bar{\gamma}} = \omega_{\alpha}^{\mu}\omega_{\beta}^{\nu}\bar{\omega}_{\lambda}^{\bar{\gamma}} M_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} \equiv \bar{\Gamma}_{[\alpha\beta]}^{\bar{\gamma}}$. Ne ricaviamo (cfr.p. 27) una nuova connessione proiettiva "simmetrica", cioè a parametri simmetrici, "associata" alla $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$:

$$(19.71) \qquad B_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - M_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = \Gamma_{(\mu\nu)}^{\lambda} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}\right)$$

anche per questa sarebbe interessante precisare la relazione geometrica con la connessione di partenza (cfr. 48). Nel riferimento omogeneo essa avrà i parametri $\bar{B}_{\beta\gamma}^{\alpha} = \bar{\Gamma}_{(\beta\gamma)}^{\alpha}$.

Calcoliamo in particolare la connessione simmetrica associata alla connessione (19.61), legata ai campi di punti $\underset{\alpha}{\bar{D}}^{\alpha}$. Otteniamo

$$(19.72) \qquad \bar{B}_{\beta\gamma}^{\alpha} = \partial_{(\gamma}\underset{\beta)}{\bar{D}}\cdot\underset{\alpha}{\bar{D}}^{\alpha} = -\partial_{(\bar{\gamma}}\underset{\bar{\beta})}{\bar{D}}^{\alpha}\,\bar{D}_{\gamma}^{\bar{\gamma}}\,\bar{D}_{\beta}^{\bar{\beta}},$$

cosicchè, secondo le (19.49), nel riferimento anolonomo determinato dai punti $\underset{\alpha}{\bar{D}}^{\alpha}$ tale connessione avrà i parametri

$$(19.73) \qquad \bar{B}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}} = -\partial_{(\bar{\gamma}}\underset{\bar{\beta})}{\bar{D}}^{\alpha}\cdot\bar{D}_{\alpha}^{\bar{\alpha}} + \partial_{\bar{\gamma}}\underset{\bar{\beta}}{\bar{D}}^{\alpha}\cdot\bar{D}_{\alpha}^{\bar{\alpha}} = \partial_{[\bar{\gamma}}\underset{\bar{\beta}]}{\bar{D}}^{\alpha}\cdot\bar{D}_{\alpha}^{\bar{\alpha}}.$$

Confrontando con le (19.53) abbiamo infine

$$(19.73) \qquad \bar{B}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}} = \Omega_{\bar{\gamma}\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}}$$

ove l'eguaglianza, s'intende bene, vale in relazione al supposto riferimento anolonomo: e del resto altrimenti non avrebbe significato, quale eguaglianza fra due enti di natura affatto distinta.(*)

Si conclude che l'indicatore d'anolonomia proiettiva $\Omega_{\beta\gamma}^{\alpha}$ ha la seguente interpretazione (analoga a quella che ho dato (1936) per l'indicatore d'anolonomia affine) in relazione a ciascun riferimento anolonomo, definito

(*) Secondo SCHOUTEN una tale eguaglianza, valida solo in relazione al particolare riferimento pel quale è scrita, si designa col simbolo $\overset{*}{=}$.

dai punti $\overline{\underline{D}}_{\alpha}^{\alpha}$ quali punti fondamentali e $\sum_{0}^{n}{}_{\alpha} \overline{\underline{D}}_{\alpha}^{\alpha}$ quale punto unità locali, esso ha quali componenti i parametri $\mathcal{B}_{\underline{\beta}\underline{\gamma}}^{\alpha}$ (cambiati di segno) della connessione simmetrica associata alla connessione proiettiva integrabile che ha quale legge di traslazione l'invarianza proiettiva della configurazione formata dal punto trasportato coi punti $\overline{\underline{D}}_{\alpha}^{\alpha}$ e $\sum_{0}^{n}{}_{\alpha} \overline{\underline{D}}_{\alpha}^{\alpha}$.

20.- Tensori proiettivi normali; estensioni di un tensore proiettivo.

Possiamo ora venire a quelle più notevoli applicazioni delle coordinate normali e dei riferimenti normali già altre volte accennate (pp. 53, 163, 172): e cioè alla costruzione delle "estensioni" dei tensori proiettivi, e dei tensori proiettivi normali.

Spieghiamo anzitutto il processo geometrico: abbiamo indicato al n.18 come si ottenga, insieme alla rappresentazione Ω di una regione $\mathcal{R}$ della varietà a connessione proiettiva $\mathcal{P}_n$ sullo spazio proiettivo $\mathcal{S}_n$ ad essa tangente in un punto (regolare) O, anche una rappresentazione dei tensori proiettivi di $\mathcal{P}_n$ mediante tensori di $\mathcal{S}_n$, da intendersi applicati nei rispettivi punti immagini; e anzi abbiamo indicato due differenti processi per costruire quest'ultima rappresentazione: a partire da un tensore $H_{\lambda\mu}^{\cdots\nu}$ il primo dà un nuovo tensore

$$(20.1) \qquad {}^{\circ}H_{\alpha\beta}^{\cdots\rho} = \frac{\partial Z^{\rho}}{\partial u^{\nu}} \frac{\partial u^{\lambda}}{\partial Z^{\alpha}} \frac{\partial u^{\mu}}{\partial Z^{\beta}} H_{\lambda\mu}^{\cdots\nu},$$

le Z^{α} essendo (n.18) coordinate normali omogenee del punto $P(u^{i})$ sulla $\mathcal{P}_n$, cioè coordinate proiettive sull' $\mathcal{S}_n$ del punto immagine $\hat{P}$. Il secondo processo dà (ved. le (18.53)) il tensore

$$(20.2) \qquad {}'H_{\alpha\beta}^{\cdots\rho} = y_{\alpha}^{\lambda} y_{\beta}^{\mu} y_{\nu}^{\rho} H_{\lambda\mu}^{\cdots\nu},$$

ove le y^{λ}_{α} sono date dalle (18.57) (e le y^{α}_{λ} sono i rispettivi elementi reciproci in $|y^{\lambda}_{\alpha}|$): precisamente, $'H^{\cdots\gamma}_{\alpha\beta\cdots}$ è il tensore che si ottiene trasportando in S_n il tensore $H^{\cdots\nu}_{\lambda\mu\cdots}$ per traslazione proiettiva in P_n lungo la geodetica congiungente PO (*). Per brevità chiamiamo rappresentazione olonoma ed anolonoma le due rappresentazioni ora dette: che designeremo con T_o e T_a : mentre T servirà a indicare indifferentemente l'una o l'altra.

Ciò posto, l'estensione r-esima di un qualunque tensore proiettivo, ad es. $H^{\cdots\nu}_{\lambda\mu\cdots}$ (si intende che ci riferiamo a un campo di tensori) si costruisce nel seguente modo : 1) viene rappresentato mediante T il tensore supposto con un tensore di S_n, $\hat{H}^{\cdots\gamma}_{\alpha\beta\cdots}$ (che, nei due casi sarà $^{o}H^{\cdots\gamma}_{\alpha\beta\cdots}$ od $'H^{\cdots\gamma}_{\alpha\beta\cdots}$). 2) In S_n si calcolano le derivate ordinarie $\frac{\partial^r \hat{H}^{\cdots\gamma}_{\alpha\beta\cdots}}{\partial Z^{\omega_1}\cdots\partial Z^{\omega_r}}$ componenti di un nuovo tensore di S_n . 3) Il tensore così ottenuto viene riportato, mediante la rappresentazione T^{-1}, in P_n al punto P primitivo; ottenendo così un tensore di P_n che sarà funzione, oltrechè del punto P , anche del punto O (cioè: delle u^i ed u^i). 4) Si fanno coincidere i punti P ed O , cioè si pone $O \equiv P(u^i = u^i)$. Il tensore così ottenuto è appunto la estensione r-esima (rispettivamente olonoma, od anolonoma) del tensore proiettivo di partenza e la indicheremo con $E_{\tau_1\cdots\tau_r} H^{\cdots\nu}_{\lambda\mu\cdots}$ (rispettivamente: $\overset{(o)}{E}_{\tau_1\cdots\tau_r} H^{\cdots\nu}_{\lambda\mu\cdots}$ ed $\overset{(a)}{E}_{\tau_1\cdots\tau_r} H^{\cdots\nu}_{\lambda\mu\cdots}$).

A questa costruzione geometrica corrisponde il processo analitico seguente: calcolate le componenti di $H^{\cdots\nu}_{\lambda\mu\cdots}$ in relazione al riferimento normale olonomo; o a quello anolonomo completo (n.18) di origine O , se ne fanno le derivate r-esime rispetto alle coordinate norma-

---

(*) La rappresentazione si riduce in entrambi i casi all'identità quando $P \equiv O$, e per questo conviene non fare una distinzione fra gli indici che servono per $H^{\cdots\nu}_{\lambda\mu\cdots}$ (relativi a un C-riferimento), per $^{o}H^{\cdots\gamma}_{\alpha\beta\cdots}$ (relativi a un riferimento omogeneo olonomo) e per $'H^{\cdots\gamma}_{\alpha\beta\cdots}$ (relativi a un riferimento anolonomo).

li omogenee dal punto P d'applicazione: e si valutano tali derivate nel punto O ottenendo così i valori in O delle componenti del nuovo tensore, estensione r-esima di $H_{\lambda\mu}^{\cdots\nu}$.

Diamo subito un esempio: per un vettore proiettivo covariante H_λ calcoliamo $\overset{(0)}{E}_\tau H_\lambda$ ed $\overset{(1)}{E}_\tau H_\lambda$.

Abbiamo anzitutto, in conseguenza della (18.34),

$$(20.3)\qquad \frac{\partial u^\lambda}{\partial Z^\alpha} = \delta_\alpha^\lambda - \left(\Gamma^\lambda_{(\alpha\nu)}\right)_o (Z^\nu - \delta_o^\nu) - \frac{1}{2}\left(\nabla_{(\tau}\Gamma^{(\lambda)}_{\alpha\nu)}\right)_o (Z^\nu - \delta_o^\nu)(Z^\tau - \delta_o^\tau) - \cdots$$

e quindi

$$(20.4)\qquad {}^{o}H_\alpha = \frac{\partial u^\lambda}{\partial Z^\alpha} H_\lambda = H_\alpha - \left(\Gamma^\lambda_{(\alpha\nu)}\right)_o (Z^\nu - \delta_o^\nu) H_\lambda - \cdots$$

di qui derivando segue

$$(20.5)\qquad \frac{\partial {}^{o}H_\alpha}{\partial Z^\tau} = \frac{\partial H_\alpha}{\partial Z^\tau} - \left(\Gamma^\lambda_{(\alpha\tau)}\right)_o H_\lambda - \left(\Gamma^\lambda_{(\alpha\nu)}\right)_o (Z^\nu - \delta_o^\nu)\frac{\partial H_\lambda}{\partial Z^\tau} - \cdots;$$

valutando nel punto O, cioè ponendo $Z^\nu = \delta_o^\nu$, tutti i termini trascurati e anche l'ultimo di quelli scritti si annullano e resta (togliendo l'indice $_o$ in quanto O è un punto qualunque e ora è tolta la possibilità di equivoci)

$$(20.6)\qquad \overset{(0)}{E}_\tau H_\alpha = \partial_\tau H_\alpha - \Gamma^\lambda_{(\alpha\tau)} H_\lambda = \partial_\tau H_\alpha - B^\lambda_{\alpha\tau} H_\lambda,$$

ove al solito $\partial_\tau = \frac{\partial}{\partial u^\tau} = \delta_\tau^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ (per enti, come H_λ, indipendenti da u^o) e $B^\lambda_{\alpha\tau}$ è dato dalle (19.71).

Rammentando poi le (18.52), cioè

$$(20.7)\qquad {}_\lambda Y^\mu = \delta_\lambda^\mu - \left(\Gamma^\mu_{\lambda\nu}\right)_o (Z^\nu - \delta_o^\nu) - \frac{1}{2}\left(\nabla_\tau \Gamma^{(\mu)}_{\lambda\nu}\right)_o (Z^\nu - \delta_o^\nu)(Z^\tau - \delta_o^\tau) - \cdots$$

abbiamo

$$(20.8)\qquad {}^{\prime}H_\alpha = {}_\alpha Y^\lambda H_\lambda = H_\alpha - \left(\Gamma^\lambda_{\alpha\nu}\right)_o (Z^\nu - \delta_o^\nu) H_\lambda - \cdots$$

onde

$$(20.9)\qquad \overset{(a)}{E}_{\tau} H_{\alpha} = \partial_{\tau} H_{\alpha} - \Gamma_{\alpha\tau}^{\lambda} H_{\lambda} .$$

Analogamente, più in generale: l'estensione prima anoloma di un tensore proiettivo qualunque non differisce dalla derivata covariante proiettiva costruita coi parametri della connessione; l'estensione prima olonoma si identifica con la derivata covariante proiettiva fatta coi parametri della connessione simmetrica associata.

Per le estensioni d'ordine superiore, il cui calcolo risulta ovvio, notiamo che esse presentano naturalmente a differenza dalle derivate covarianti d'ordine superiore al primo, la commutabilità degli indici di derivazione: questo ci assicura che l'identificazione, di cui ora si è detto, non si spinge oltre al 1° ordine (se vi è curvatura).

Vi è anche un altro modo di calcolare le estensioni dei tensori, indicato pel caso affine (ma l'estensione è ovvia) dal BOMPIANI (1940). La rappresentazione T^{-1} riporta nella P_n la connessione integrabile dell' S_n tangente in O ; in quanto questa ha nell' S_n in relazione al riferimento omogeneo dato dall'ordinario sistema di coordinate proiettive Z^{α}, un sistema di parametri tutti nulli (Cfr. n.16, form. (16.1) (°)) se ci riferiamo più precisamente alla rappresentazione T_o quella connessione è immagine in S_n di una connessione di parametri

$$(20.10)\qquad \overset{(o)}{\Pi}{}_{\mu\nu}^{\lambda} = \partial_{\nu} \frac{\partial Z^{\alpha}}{\partial u^{\mu}} \cdot \frac{\partial u^{\lambda}}{\partial Z^{\alpha}} ,$$

la quale è in P_n, come mostrano le (19.61), proprio la connessione integrabile ottenuta a partire dagli $n+1$ campi di punti $\frac{\partial u^{\lambda}}{\partial Z^{\alpha}}$, ove α si riguardi come un indice ordinale (cosa facilmente prevedibile a priori). Tenuto conto che in forza delle (20.3) abbiamo

$$(20.11)\qquad \frac{\partial Z^{\alpha}}{\partial u^{\lambda}} = \delta_{\lambda}^{\alpha} + \left(\Gamma_{(\lambda\nu)}^{\alpha}\right)_o \left(Z^{\nu}-\delta_o^{\nu}\right) + \frac{1}{2}\left(\nabla_{(\tau}\Gamma_{\lambda\nu)}^{(\alpha)} + 2\Gamma_{(\omega\nu)}^{\alpha}\Gamma_{(\lambda\tau)}^{\omega}\right)_o \left(Z^{\nu}-\delta_o^{\nu}\right)\left(Z^{\tau}-\delta_o^{\tau}\right)$$

(°) E' ovvio il passaggio dai parametri misti $\Lambda_{\beta\iota}^{\alpha}$, tutti nulli, a parametri proiettivi $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$: alle $\Gamma_{\beta o}^{\alpha}$ potremmo dare i valori $\kappa\delta_{\beta}^{\alpha}$ ma possiamo anche porre $\kappa=0$ in modo che anche le $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ siano tutte nulle.

risulta, sostituendo

$$(20.12)\qquad \overset{(o)}{\Pi}{}^{\lambda}_{\mu\nu} = \left(\Gamma^{\lambda}_{(\mu\nu)}\right)_o + \left(\nabla_{(\varepsilon}\Gamma^{(\beta)}_{\mu\nu)} + \Gamma^{\alpha}_{(\omega\nu)}\Gamma^{\omega}_{(\mu\varepsilon)}\right)_o \left(Z^{\varepsilon} - \delta^{\varepsilon}_{o}\right) + \cdots\cdots$$

il che dà subito, ovviamente, la coincidenza nel punto O delle derivate covarianti relative alla connessione $\overset{(o)}{\Pi}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$ con le estensioni prime olonome. Ma più in generale: le estensioni olonome di un tensore in ciascun punto O si ottengono quali derivate covarianti relative alla connessione $\overset{(o)}{\Pi}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$ corrispondente al supposto punto O; questa è la costruzione del BOMPIANI e vale anche per le estensioni anolonome, sostituita alla connessione (20.10) la seguente:

$$(20.12)\qquad \overset{(a)}{\Pi}{}^{\lambda}_{\mu\nu} = \partial_{\nu} \overset{\alpha}{y}_{\mu} \cdot y^{\lambda}_{\alpha},$$

avente quale immagine in T_a la connessione integrabile dell' S_n tangente nel punto O considerato. La verifica analitica non presenterebbe difficoltà: ma a priori è evidente come la derivazione ordinaria rispetto alle Z^{α} in S_n equivalga in P_n proprio alla derivazione covariante relativa all'una o all'altra delle connessioni integrabili $\overset{(o)}{\Pi}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$, $\overset{(a)}{\Pi}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$.

Veniamo ai tensori proiettivi normali: essi si ottengono quali estensioni (olonome od anolonome) dei tensori proiettivi

$$(20.13)\qquad \overset{(o)}{Q}{}^{\ldots\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \overset{(o)}{\Pi}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$$

oppure

$$(20.14)\qquad \overset{(a)}{Q}{}^{\ldots\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \overset{(a)}{\Pi}{}^{\lambda}_{\mu\nu} \quad \text{e} \quad \overset{(a)}{\Pi}{}^{\lambda}_{[\mu\nu]}$$

esprimenti, i primi due, il divario fra la connessione assegnata $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ e quella integrabile che su P_n viene riportata dalla rappresentazione T_o^{-1} o T_a^{-1} quale immagine della connessione integrabile dell' S_n proiettivo; e ancora, il divario fra l'indicatore di anolonomia di P_n e quello di S_n, nullo in relazione al sistema coordinato Z^{α}.

Più esattamente: bisogna considerare anche le estensioni di ordine zero, che sono i tensori aventi in ciascun punto O quali componenti i valori relativi a tale punto dei tensori $\overset{(o)}{Q}{}^{\cdots\lambda}_{\mu\nu}$ oppure $\overset{(a)}{Q}{}^{\cdots\lambda}_{\mu\nu}$ e $\overset{(a)}{\Pi}{}^{\lambda}_{[\mu\nu]}$.

Il primo e il terzo di questi tensori (estensioni di ordine zero) coincidono entrambi col tensore di asimmetria $\mathcal{M}^{\cdots\lambda}_{\mu\nu}$ dato dalla (19.70): il secondo è nullo. Posto

$$\overset{(o)}{\mathcal{M}}{}^{\cdots\lambda}_{\mu\nu\cdot\omega_1\omega_2\cdots\omega_z} = \overset{(o)}{E}_{\omega_1\omega_2\cdots\omega_z}\ \overset{(o)}{Q}{}^{\cdots\lambda}_{\mu\nu}\ , \tag{20.15}$$

e d'altra parte

$$\begin{cases} \overset{(a)}{\mathcal{K}}{}^{\cdots\lambda}_{\mu\nu\cdot\omega_1\omega_2\cdots\omega_z} = \overset{(a)}{E}_{\omega_1\omega_2\cdots\omega_z}\ \overset{(a)}{Q}{}^{\cdots\lambda}_{\mu\nu} \\ \overset{(a)}{\mathcal{M}}{}^{\cdots\lambda}_{\mu\nu\cdot\omega_1\omega_2\cdots\omega_z} = \overset{(a)}{E}_{\omega_1\omega_2\cdots\omega_z}\ \overset{(a)}{\Pi}{}^{\cdots\lambda}_{[\mu\nu]} \end{cases} , \tag{20.16}$$

ciascuna delle due serie di tensori normali, olonomi

$$\mathcal{M}^{\cdots\lambda}_{\nu\lambda}\ ,\ \overset{(o)}{\mathcal{M}}{}^{\cdots\lambda}_{\mu\nu\cdot\omega_1}\ ,\ \overset{(o)}{\mathcal{M}}{}^{\cdots\lambda}_{\mu\nu\cdot\omega_1\omega_2}\ ,\ \ldots\ldots \tag{20.17}$$

ed anolonomi

$$\begin{cases} \overset{(a)}{\mathcal{K}}{}^{\cdots\lambda}_{\mu\nu\cdot\omega_1}\ ,\ \overset{(a)}{\mathcal{K}}{}^{\cdots\lambda}_{\mu\nu\cdot\omega_1\omega}\ ,\ \ldots\ldots \\ \mathcal{M}^{\cdots\lambda}_{\mu\nu}\ ,\ \overset{(a)}{\mathcal{M}}{}^{\cdots\lambda}_{\mu\nu\cdot\omega_1}\ ,\ \overset{(a)}{\mathcal{M}}{}^{\cdots\lambda}_{\mu\nu\cdot\omega_1\omega_2}\ ,\ \ldots\ldots \end{cases} \tag{20.18}$$

costituisce un sistema completo d'invarianti differenziali della connessione proiettiva rispetto alle C-trasformazioni. In particolare i tensori normali degli ordini zero ed 1 (olonomi oppure anolonomi) dànno facilmente il tensore di curvatura (e torsione). Ci limitiamo a questo cenno sull'argomento: il quale del resto è stato studiato soltanto da un punto di vista assai diverso, da T.Y.THOMAS (1926) con l'ausilio dell'interpretazione (n+1) dimensionale, di cui diremo al n. seguente.

21.- Interpretazione (n+1)-dimensionale.

Sino dalla prima introduzione dell'$(n+1)^{mo}$ parametro

u^0 (T.Y.THOMAS,1926) si è presentata naturalmente questa interpretazione (n+1)-dimensionale: considerare le $u^\lambda (\lambda = 0, 1, \ldots, n)$ come coordinate curvilinee in una varietà ad n+1 dimensioni, $\mathcal{X}_{n+1}$, per la quale le $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ si potranno considerare quali parametri di una connessione affine. Questa interpretazione è stata studiata particolarmente da J.H.C.WHITEHEAD (1931), e poi utilizzata sotto aspetto un po' diverso (pensando le coordinate curvilinee omogenee v^α quali coordinate in una $\mathcal{X}_{n+1}$) da v.DANTZIG e da SCHOUTEN.

Siano dunque le $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ parametri di una connessione proiettiva, relativi a un C-riferimento; in un primo tempo supponiamo che tali parametri siano soltanto soggetti alle condizioni (19.65), cioè

$$\Gamma^\lambda_{\nu 0} = \mathcal{K}(u^1, \ldots, u^n)\delta^\lambda_\nu . \tag{21.1}$$

Le variabili u^λ (e cioè, le coordinate curvilinee x^i nella $\mathcal{P}_n$ e il parametro u^0) si possono trasformare nelle $u^{\lambda'}$ ma con formule di trasformazione

$$u^\lambda = u^\lambda(u^{1'}, \ldots, u^{n'}) \tag{21.2}$$

soggette alle condizioni

$$\vartheta^i_{0'} = 0 , \quad \vartheta^0_{0'} = 1 , \text{ ove } \vartheta^\lambda_{\lambda'} = \frac{\partial u^\lambda}{\partial u^{\lambda'}} . \tag{21.3}$$

Per queste trasformazioni le (21.1) hanno significato invariante (e più precisamente: lo stesso scalare $\mathcal{K}$ è invariante); più in generale le $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ si trasformano in

$$\Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\vartheta^\mu_{\mu'}\vartheta^\nu_{\nu'}\vartheta^{\lambda'}_\lambda + \partial_{\nu'}\vartheta^\lambda_{\mu'}\cdot\vartheta^{\lambda'}_\lambda \tag{21.4}$$

(al solito essendo $\vartheta^{\lambda'}_\lambda = \frac{\partial u^{\lambda'}}{\partial u^\lambda}$). Rammentiamo infine che

$$\partial_0 \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0 , \tag{21.5}$$

cioè, che le $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ s'intendono indipendenti da u^0 (come anche, almeno sino ad ora, abbiamo sempre inteso indipen-

denti da u° tutti i tensori proiettivi considerati).

Interpretiamo ora le u^λ come coordinate curvilinee in una varietà ad n+1 dimensioni: in questa le $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ sono parametri di una connessione affine, perciò la varietà in parola, in quanto è dotata di una connessione affine, verrà designata con A_{n+1}. Le coordinate curvilinee u^λ nella A_{n+1} sono soggette a restrizioni, espresse dalle (21.3). Precisamente: le condizioni $\vartheta^i_{o'}=0$ esprimono che le trasformazioni di coordinate cui sottoponiamo la A_{n+1} sono solo quelle che lasciano invariato il sistema delle linee u°, cioè le linee sulle quali varia la sola u° e le u^i ($i=1,\dots,n$) hanno invece valori costanti. Dunque: in realtà la varietà A_{n+1}, in cui rappresentiamo la connessione proiettiva mediante una connessione affine, è una varietà (n+1)-dimensionale in cui è data una congruenza di linee, quella delle linee u°.

L'altra condizione $\vartheta^\circ_{o'}=0$ significa che, per di più, lungo questa linea lo stesso parametro u° è dato, a meno soltanto di un addendo, cioè della scelta di un'origine: o nella intera A_{n+1}, a meno della scelta (arbitraria) di una ipersuperficie $u^\circ=0$ iniziale.

Chiamiamo secondo WHITEHEAD, raggi le linee della congruenza invariante.

Essendo identicamente

$$\nabla_\nu \delta^\lambda_{(\mu)} \cdot \delta^\nu_o = \Gamma^\lambda_{\tau o} \delta^\tau_\mu = \Gamma^\lambda_{\mu o}, \tag{21.6}$$

ove $\delta^\lambda_{(\mu)}$, cioè δ^λ_μ ove si riguardi quale indice ordinale, sono per $\mu=0,1,\dots,n$ in P_n i punti fondamentali e in A_{n+1} i vettori fondamentali del riferimento locale generico, vediamo che le condizioni (21.1) equivalgono a

$$\nabla_\nu \delta^\lambda_{(\mu)} \cdot \delta^\nu_o = \pi \cdot \delta^\lambda_\mu \tag{21.7}$$

il che esprime che lungo ciascun raggio i vettori fondamentali del riferimento locale si spostano per parallelismo in A_{n+1} e anzi, più precisamente, in modo che, in ciascun punto $P(u^\lambda)$, il passaggio al punto infinitamente vicino $^*P(u^i, u^\circ + du^\circ)$ sul raggio che ne esce, è dato

da una trasformazione per omotetia seguita dal trasporto per equipollenza. In particolare per $\mu=0$ abbiamo che i raggi sono geodetiche della connessione affine in A_{n+1}.

Vediamo d'interpretare la (21.5). Per questo ci basta osservare che, in forza delle (21.1), posto secondo le (19.33)

$$N_{\lambda\mu\nu}^{\cdots\tau} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^{\tau} - \partial_\lambda \Gamma_{\nu\mu}^{\tau} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\omega}\Gamma_{\omega\mu}^{\tau} - \Gamma_{\nu\mu}^{\omega}\Gamma_{\omega\lambda}^{\tau} , \tag{21.8}$$

abbiamo

$$N_{\lambda o\nu}^{\cdots\tau} = \partial_o \Gamma_{\nu\lambda}^{\tau} - \delta_\nu^\tau \partial_\lambda \varkappa ; \tag{21.9}$$

e quindi, essendo secondo le (19.34)

$$R_{\lambda\mu\nu}^{\cdots\tau} = N_{\lambda\mu\nu}^{\cdots\tau} - \frac{1}{n+1}\delta_\nu^\tau N_{\lambda\mu\omega}^{\cdots\omega} , \tag{21.10}$$

abbiamo, sempre in conseguenza delle (21.1):

$$R_{\lambda o\nu}^{\cdots\tau} = \partial_o \Gamma_{\nu\lambda}^{\tau} - \frac{1}{n+1}\delta_\nu^\tau \partial_\sigma \Gamma_{\omega\lambda}^{\omega} . \tag{21.11}$$

Dunque la condizione (21.5) in forza delle (21.1) equivale a

$$R_{\lambda o\nu}^{\cdots\tau} = R_{\lambda\mu\nu}^{\cdots\tau}\delta_o^\mu = 0 ; \quad N_{\lambda\mu\omega}^{\cdots\omega}\delta_o^\mu = -(n+1)\partial_\lambda \varkappa . \tag{21.12}$$

Ora: $R_{\lambda\mu\nu}^{\cdots\tau}$ è in F_n il tensore di curvatura; in A_{n+1} (ove il tensore di curvatura della connessione affine è $N_{\lambda\mu\nu}^{\cdots\tau}$) esso è quello che potremmo dire tensore di curvatura direzionale; il cui annullarsi è la condizione necessaria e sufficiente perchè il trasporto delle direzioni (ossia il parallelismo) della connessione affine $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ sia integrabile. Le prime equaz. (21.12) si interpretano così: in ciascun punto di A_{n+1} e secondo ciascuna faccetta piana che ne esce e contiene la tangente al raggio che vi passa il trasporto ciclico di una qualunque direzione secondo la legge di parallelismo della connessione $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ non dà luogo divario fra direzione iniziale e finale(*). Si vede bene come non sia affatto qualunque

(* Le seconde (21.12) acquistano significato semplice e ovvio quando, com'è lecito, s'intenda reso $\varkappa$ = cost.

la connessione affine $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ che può interpretarsi come immagine in uno spazio ad n+1 dimensioni della supposta connessione proiettiva. Precisamente: essa è soggetta alla condizione che nella A_{n+1} esista una congruenza di curve ("raggi"), geodetiche della connessione, tale che in ciascun punto e secondo ciascuna giacitura piana che contenga la tangente al raggio che ne esce la curvatura direzionale della connessione affine sia nulla: ed esista un riferimento coordinato pel quale il trasporto infinitesimo dei vettori fondamentali lungo un raggio differisca per una omotetia nello spazio iniziale dal trasporto per equipollenza (*).

In questa ipotesi risulta immediata la possibilità di prendere quali linee coordinate di un sistema, ad es. appunto quali linee u^0, le linee della supposta congruenza.

Il passaggio dal C-riferimento a un riferimento omogeneo v^{α} (n.19) in A_{n+1} non è che un cambiamento di coordinate curvilinee: pel quale i raggi divengono le linee

$$v^i = h^i v^0 \qquad (h^i = cost.) \tag{21.13}$$

lungo le quali si mantengono costanti i mutui rapporti delle coordinate v^{α} : linee uscenti tutte da un punto ($v^{\alpha} = 0$) il quale però deve intendersi escluso dalle nostre considerazioni in quanto la trasformazione (19.2) o (19.6) vi ha una singolarità. (In altre parole: una congruenza o schiera di curve, tale che per ogni punto dello spazio ne passa una e una sola, è topologicamente equivalente a una stella di curve, o anche di rette se l'ambiente s'intende proiettivo: da cui però s'intenda tolto il centro).

Torniamo al primitivo sistema curvilineo u^{λ}. Le ipersuperficie $u^0 = cost.$ non sono invarianti per le trasformazioni (21.2) ammesse, anzi possiamo fare in modo che una di quelle ipersuperficie, ad es. $u^0 = 0$, si identifichi con una qualunque ipersuperficie, data ad arbitrio, a condizione soltanto che essa non sia luogo di raggi (il che porterà che, almeno entro una conveniente regione di A_{n+1}, la sua equazione può risolversi

---

(*) con l'ulteriore condizione espressa dalle seconde equazioni (21.12).

rispetto ad u°).

In una ipersuperficie Σ, assunta come $u^\circ = 0$ (o anche u° = cost.), la connessione affine $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ dell'ambiente A_{n+1} (cioè la connessione proiettiva di P_n) determina una connessione affine Γ^i_{jk} e un tensore affine Γ°_{jk} (ved.n.15): sono precisamente la connessione subordinata in Σ quando si prendono le tangenti nei suoi punti alle linee u° che ne escono quali pseudonormali; e il relativo tensore di curvatura euleriana.

/E infatti scrivendo che la derivata covariante di δ^λ_i è nulla abbiamo.

$$(21.14)\qquad \partial_j \delta^\lambda_i - \Gamma^\ell_{ij}\delta^\lambda_\ell + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\delta^\mu_i\delta^\nu_j = \Gamma^\circ_{ij}\delta^\lambda_\circ$$

il che in sostanza è una semplice identità, ma s'interpreta manifestamente nel senso voluto, perchè il primo membro è proprio, in relazione a coordinate u^λ per l'ambiente A_{n+1} ed u^i per Σ, il tensore completo e perciò Γ°_{ij} è il tensore ridotto ($\delta^\lambda_\circ$ essendo preso come vettore pseudonormale) di curvatura euleriana(*)

Fin qui intendevamo che le $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ fossero parametri generali della connessione proiettiva; un cambiamento

$$(21.15)\qquad \hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \delta^\lambda_\mu \Phi_\nu$$

ove Φ_ν è un arbitrario vettore proiettivo covariante, muta i parametri ma non la legge di trasporto dei punti, perchè si ha (cfr. n.13,pp. 108-109),lungo una qualunque curva Γ:

$$(21.16)\qquad \frac{d\hat{x}^\lambda}{dt} + \hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}\hat{x}^\mu\frac{du^\nu}{dt} = \left(\frac{d\hat{x}^\lambda}{dt} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\hat{x}^\mu\frac{du^\nu}{dt}\right) e^{-\int \Phi_\nu du^\nu}$$

ove

$$(21.17)\qquad \hat{x}^\lambda = e^{\int \Phi_\nu du^\nu} x^\lambda ,$$

l'integrale intendendosi calcolato lungo Γ (in relazione ad una assegnata espressione di u°, o di du°: che

(*) Ved. il mio lav. cit. nella nota (4.a) a pag.87.

a sua volta non ha alcuna influenza sulla legge di trasporto dei punti; ved.pp. 127-128).

La (21.15) è anzi la più generale trasformazione dei parametri proiettivi $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ che non muti la connessione. In A_{n+1} d'altra parte la (21.15) rappresenta la più generale trasformazione della connessione affine $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ che non ne muta la legge di trasporto delle direzioni: cosicchè è in sostanza una connessione affine data a meno di una trasformazione che ne conserva il parallelismo, che rappresenta nello spazio ad n+1 dimensioni la connessione proiettiva.

Da quanto s'è visto al n.14 (cfr. n.19) risulta che possiamo sempre, per una singola connessione proiettiva, utilizzando l'omografia di deviazione rendere soddisfatte anche le condizioni:

$$\Gamma^{i}_{oj} = \delta^{i}_{j} \quad ; \tag{21.18}$$

inteso che insieme alle (21.1) valgano queste potremo con una opportuna trasformazione (21.15) rendere soddisfatte le condizioni seguenti:

$$\hat{\Gamma}^{\lambda}_{\mu o} = \hat{\Gamma}^{\lambda}_{o\mu} = \delta^{\lambda}_{\mu} \tag{21.19}$$

passare cioè ai parametri normalizzati della connessione proiettiva (ved. n.14 ,p.119).Basta per questo porre, nelle (21.15):

$$\Phi_{\nu} = \delta^{o}_{\nu} - \Gamma^{o}_{o\nu} \,. \tag{21.20}$$

Supposto dunque che valgano le (21.19),torniamo a indicare con $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ i parametri (normalizzati).

Vediamo quali corrispondenti semplificazioni risultino nella rappresentazione in A_{n+1}.

Le (21.19) , o meglio (14.19) e (14.21),hanno questa semplice interpretazione (GOŁĄB): la congruenza dei raggi segna su due generiche ipersuperficie di A_{n+1} una corrispondenza che conserva le geodetiche della connessione affine indotta su esse prendendo le tangenti nei loro punti ai raggi quali pseudonormali (*).Dicendo

(*) Più esattamente : è necessario e sufficiente,perchè il fatto ora enunciato si presenti ,che sia $\Gamma^{i}_{oj} = \Gamma^{i}_{jo} = \delta^{i}_{j}$, $\Gamma^{i}_{oo} = 0$.

"generiche" qui basta intendere, che le ipersuperficie in discorso non siano luogo di raggi. Effettivamente le due ipersuperficie supposte potranno essere rappresentate da $u=0$, $u'=0$ rispetto a due riferimenti in A_{n+1}: le corrispondenti connessioni indotte come già sappiamo sono Γ^{i}_{jk}, $\Gamma^{i'}_{j'k'}$ e d'altra parte si ha

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \Big(\Gamma^{i}_{jk}\vartheta^{j}_{j'}\vartheta^{k}_{k'} + \Gamma^{i}_{00}\vartheta^{0}_{j'}\vartheta^{0}_{k'} + \Gamma^{i}_{0k}\vartheta^{0}_{j'}\vartheta^{k}_{k'} + \Gamma^{i}_{j0}\vartheta^{j}_{j'}\vartheta^{0}_{k'} + \vartheta_{k'}\vartheta^{i}_{j'}\Big)\vartheta^{i'}_{i} \tag{21.21}$$

e quando s'intenda $\vartheta^{i}_{i'} = \delta^{i}_{i'}$ in quanto valgano le (14.19) e (14.21) (*) queste si riducono a una trasformazione della connessione affine che conserva le geodetiche. (Ved. n.8, pp.59-62; n.15, p.133).

Conseguenza semplice e notevole è questa: che (valendo le (14.19) e (19.21)) ciascuna superficie σ luogo dei raggi uscenti da una geodetica di A_{n+1} (che non sia un raggio) è totalmente geodetica in A_{n+1}: cioè contiene completamente ogni geodetica di A_{n+1} che abbia con essa a comune due punti, o sia tangente ad essa. E infatti: anzitutto è conseguenza immediata delle attuali ipotesi che una geodetica di A_{n+1} che giaccia su una ipersuperficie $x^{0}=0$ è anche su questa geodetica della connessione affine indotta; ciò posto se sulla superficie σ formata dai raggi uscenti da una geodetica Γ (di A_{n+1}) prendiamo comunque due punti P, Q e diciamo γ la geodetica (di A_{n+1}) che congiunge P con Q, o γ è essa stessa un raggio, e allora giace su σ; oppure γ non è un raggio e allora potremo in infiniti modi prendere per Γ, γ due ipersuperficie Σ, Σ' in cui Γ e γ saranno geodetiche delle connessioni indotte. D'altra parte i raggi uscenti dai punti di Γ debbono incontrare Σ' lungo una geodetica di Σ', la

---

(*) o anche soltanto le condizioni indicate nella nota precedente.

---

quale dovrà passare per P, Q e quindi coincidere con γ. Questo prova quanto volevamo.

Vari altri risultati e applicazioni della rappresentazione (n+1)-dimensionale di una connessione proiettiva (data mediante i suoi parametri normalizzati) sono stati ottenuti da WHITEHEAD (1931) e da GOŁĄB (1930). Mi limito a indicare qui come si costruiscono in A_{n+1} secondo WHITEHEAD, coordinate proiettive normali per una P_n, e anzi quelle stesse che per altra via più geometrica ha poi definito il CARTAN (1937 ; ved.n.18).

Sia $Q(u^i_\circ)$ un punto in A_{n+1} e Σ sia l'ipersuperficie formata dalle geodetiche di A_{n+1} che toccano nel punto Q l'ipersuperficie $u^\circ = u^\circ_\circ$. L'equazione di Σ in A_{n+1} può certamente scriversi nella forma

$$u^\circ - u^\circ_\circ + \varphi^\circ(u^1, \ldots, u^n) = 0 ; \tag{21.22}$$

in quanto Σ non è luogo di raggi. Col cambiamento di coordinate in A_{n+1}

$$\bar{u}^\circ = u^\circ - u^\circ_\circ + \varphi^\circ(u^1, \ldots, u^n) ; \quad \bar{u}^i = u^i \tag{21.23}$$

("cambiamento della rappresentazione" secondo WHITEHEAD) si riduce l'equazione di Σ alla forma $\bar{u}^\circ = 0$. Lungo le geodetiche di A_{n+1} uscenti da Q e giacenti in Σ (geodetiche anche in Σ per la connessione indotta) si deve avere $\bar{u}^\circ = 0$ e quindi (cfr. n.18, form. (18.13))

$$\bar{\Pi}^\circ_{jk} \frac{d\bar{u}^j}{dt} \frac{d\bar{u}^k}{dt} = 0. \tag{21.24}$$

I parametri $\bar{\Pi}^i_{jk}$ sono i parametri della connessione affine indotta su Σ. In relazione a questa siano x^i coordinate affini normali di polo Q : sono senz'altro queste le coordinate normali del CARTAN in P_n rispetto al punto $O(u^i_\circ)$ come polo.

§. 4 - Le derivazioni proiettive più generali.

22- Cenno sulle più generali derivazioni proiettive: in coordinate non omogenee ed omogenee.

Quanto abbiamo visto al n.prec. offre l'occasione a una generalizzazione. Inteso che le u^λ s'interpretino come coordinate curvilinee in A_{n+1}, appare per la connessione $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ una restrizione inessenziale quella espressa dalla (21.1). A parte l'interpretazione (n+1)-dimensionale: parametri $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ che abbiano la legge di trasformazione (21.4), funzioni però delle sole u^i (cioè soddisfacenti alle (21.5)) dànno senz'altro sempre luogo a una derivazione covariante dei tensori proiettivi: la quale applicata a un tensore, funzione del posto in P_n (e cioè delle u^i) dà un nuovo tensore che è pure funzione del posto. Soltanto: se non valgono le (21.1) eguagliando a zero il differenziale assoluto di un punto o più in generale di un tensore (geometrico) si ha una legge di trasporto che dipende dall'assegnazione di du° e non soltanto dalla connessione.

Diremo che una derivazione proiettiva $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ (i parametri intendendosi calcolati rispetto a un B-riferimento, a priori comunque assegnato) è di prima specie se valgono le (21.1), di seconda specie nel caso contrario. La derivazione di 1ª specie è quella, determinata da una connessione proiettiva, unicamente considerata sino ad ora; la derivazione di 2ª specie ha pure notevoli applicazioni, ne vedremo un esempio (n.26).

La costruzione formale del tensore $N^{\cdots\tau}_{\lambda\mu\nu}$, mediante le (19.33), ha sempre significato: esso potrà dirsi tensore di curvatura della derivazione proiettiva (*). Anche il tensore di asimmetria $M^{\cdots\lambda}_{\mu\nu}$, dato dalle (19.70), ha significato in ogni caso, mentre questo non è pel tensore di torsione.

(*) Cfr. p.68 ed Errata Corrige di queste Lezioni.

E' utile notare come a una derivazione proiettiva di seconda specie si possa facilmente (se pure in modo formale) associare una derivazione di prima specie e quindi una connessione proiettiva, quando sia assegnato un campo d'iperpiani cioè di vettori proiettivi covarianti A_λ che potremo normalizzare mediante la condizione $A_0 = 1$.

E infatti: siano $\Pi^\nu_{\mu\lambda}$ i parametri di una qualunque derivazione proiettiva. E' immediata l'osservazione che in ogni caso

$$P^\nu_{.\lambda} = \Pi^\nu_{\lambda\, 0} \tag{22.1}$$

e

$$Q^\nu_{.\lambda} = \Pi^\nu_{0\,\lambda} \tag{22.2}$$

sono tensori: ebbene, se poniamo

$$\Gamma^\nu_{\mu\lambda} = \Pi^\nu_{\mu\lambda} - (P^\nu_{.\mu} - \delta^\nu_\mu) A_\lambda \tag{22.3}$$

le $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ sono ovviamente i parametri di una nuova derivazione proiettiva: per la quale valgono le (21.1), e anzi con $\varkappa = 1$. Cosicchè la nuova derivazione è di prima specie. Questo ci sarà utile per associare, nel n.26, secondo VEBLEN una connessione proiettiva a un campo di quadriche date negli spazi tangenti a una X_n.

In relazione a coordinate curvilinee omogenee (n.19) la più generale derivazione proiettiva sarà rappresentata mediante parametri $\bar\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, funzioni omogenee di grado -1 delle v^α. Se valgono le seconde (19.26), cioè

$$\bar\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} v^\gamma = 0 \quad \text{o} \quad \bar P^\alpha_{.\beta} = \delta^\alpha_\beta \tag{22.4}$$

si avrà una derivazione proiettiva di prima specie; nel caso contrario, di seconda specie.

Sia in coordinate u^i che v^α possiamo al solito modo noto (ved.le (3.25) p.20, (14.31) p.121) estendere la derivazione ai tensori di peso p qualunque: ad es. per $H^{\cdots\nu}_{\lambda\mu}$, supposto di peso p, tale cioè che .

(22.5) $$H'^{\cdots\nu'}_{\lambda'\mu'} = \Delta^{p}\,\vartheta^{\lambda}_{\lambda'}\vartheta^{\mu}_{\mu'}\vartheta^{\nu'}_{\nu}H^{\cdots\nu}_{\lambda\mu}\cdots,$$

ove $\Delta = \left|\vartheta^{\lambda}_{\lambda'}\right| = \left|\vartheta^{i}_{i'}\right|$, si avrà (coi parametri $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$) la derivata

(22.6) $$\nabla_{\tau}H^{\cdots\nu}_{\lambda\mu} = \partial_{\tau}H^{\cdots\nu}_{\lambda\mu} - p\Pi^{\omega}_{\omega\tau}H^{\cdots\nu}_{\lambda\mu} - \Pi^{\omega}_{\lambda\tau}H^{\cdots\nu}_{\omega\mu} - \Pi^{\omega}_{\mu\tau}H^{\cdots\nu}_{\lambda\omega} + \Pi^{\nu}_{\omega\tau}H^{\cdots\omega}_{\lambda\mu}\cdots.$$

In <u>coordinate omogenee</u> la derivazione coi parametri $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ è applicabile sotto la restrizione che il tensore, se di peso 0, abbia il grado d'omogeneità uguale alla differenza $s-t$ fra "valenza controvariante" e "valenza covariante" (n.19): se esso è di peso p il grado di omogeneità dovrà essere

(22.7) $$f = s - t - p(n+1)$$

o in altri termini la differenza, che secondo D.v.DANTZIG si dice <u>eccesso</u> $\mathcal{E}$ del tensore, tra il 1° e il 2° membro

(22.8) $$\mathcal{E} = f + t - s + p(n+1)$$

deve risultare <u>nulla</u>: e infatti il passaggio a coordinate omogenee dà, per un tensore le cui componenti relative a un C-riferimento siano funzioni <u>del posto</u> in $\mathcal{P}_n$, senz'altro il valore $\mathcal{E} = 0$ per l'eccesso. Però si presenta abbastanza naturalmente anche la considerazione di <u>tensori di grado</u> (d'omogeneità) <u>qualunque</u>, e quindi anche d'eccesso <u>qualunque</u>: effettivamente basta, perchè le componenti di un tensore in ciascun punto siano determinate a meno d'un comune fattore, che esse siano <u>funzioni omogenee</u> delle coordinate v^{α}, di un qualunque grado. Nel passaggio a coordinate <u>non omogenee</u> un tale tensore (di eccesso $\neq 0$) acquista componenti <u>che contengono, quale fattore, una certa potenza di</u> e^{*}: sotto tale aspetto questa generalizzazione si è presentata già al VEBLEN (1929), il quale ha detto <u>indice</u> di un tensore l'esponente M del fattore $e^{Mu^{\circ}}$ eventualmente co-

mune alle componenti del tensore. Si può osservare che i tensori "di grado qualunque" di cui s'è detto al n.14, p.120 e seg., non sono cosa proprio sostanzialmente diversa da questi tensori di indice o di eccesso non nullo: il grado g introdotto al n.14 corrisponde a $-f$, e la (14.30) alla (22.7). Su questo non il caso d'insistere; aggiungerò soltanto che, analogamente alla (14.27), per uno scalare $\bar{H}$ di peso nullo e quindi di eccesso $\varepsilon = f$ (qualunque) si ha una derivata covariante

$$\nabla_\alpha \bar{H} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial v^\alpha} + \varepsilon \bar{Q}_\alpha \bar{H}, \tag{22.9}$$

ove $\bar{Q}_\alpha$ è un qualunque vettore proiettivo covariante, omogeneo di grado 1. Possiamo in particolare prendere $\bar{Q}_0 = 0$, cosicchè $\bar{Q}_i$ sarà un vettore affine covariante: in questa ipotesi particolare la (22.9) equivale effettivamente alla (14.27), considerata a sua volta nell'ipotesi particolare che il B-riferimento sia un C-riferimento e sia precisamente, nella (14.16),

$$\vartheta^0_{i'} = \partial_i \log \varrho_{-}; \tag{22.10}$$

il che dà che Λ^0_{0i} o Γ_i, nelle (14.27), è anche esso un vettore affine covariante. La (22.9), passando dalle coordinate omogenee v^α alle u^λ, cioè al C-riferimento, diviene

$$\nabla_\lambda \bar{H} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial u^\lambda} + \varepsilon Q_\lambda \bar{H} = e^{\varepsilon u^0}\left(\frac{\partial H}{\partial u^\lambda} + \delta^0_\lambda \varepsilon H + \delta^i_\lambda \varepsilon Q_i H\right) \tag{22.11}$$

ove abbiamo posto

$$H = e^{-\varepsilon u^0} \bar{H}, \tag{22.12}$$

in modo che H risulti, a differenza di $\bar{H}$, indipendente da u^0. Posto infine

$$\Gamma_0 = -1 \quad , \quad \Gamma_i = -Q_i \tag{22.13}$$

l'espressione entro parentesi si riduce proprio a $\nabla_\lambda H$, data dalla (14.27).

Notiamo qui - ci servirà fra poco - che, quando si adotti un C-riferimento, un tensore di grado g (nel senso dato a questa parola al n.14, p.120: il che vorrebbe dire che passando a coordinate omogenee tale tensore acquista componenti omogenee di grado $-g$) ha una derivata covariante determinata dalla connessione: per la quale $\Gamma_i = 0$, cioè $Q_\lambda = 0$.

§. Applicazioni: le connessioni proiettive e la geometria proiettiva differenziale delle varietà di S_N proiettivo.

23.- Varietà X_n in S_N proiettivo.

Vogliamo ora almeno accennare a due campi d'applicazione della teoria delle connessioni proiettive: lo studio proiettivo differenziale delle varietà di S_N, la teoria unitaria del campo elettromagnetico e gravitazionale di VEBLEN (quella che egli dice della "relatività proiettiva", in quanto appunto si basa sulla considerazione di una connessione, o più esattamente di una derivazione, proiettiva.

Riprendiamo i risultati del n.12. Ivi abbiamo trovato che una connessione proiettiva viene indotta in una X_n data, mediante le equazioni parametriche (12.1), in S_N proiettivo, quando si associa ciascun punto $P(u^i)$ della X_n uno spazio S_{N-n-1}, che diremo qui τ, non incidente al rispettivo spazio tangente π, e si assegni come legge di rappresentazione di π sullo spazio ${}^*\pi$ tangente in ${}^*P(u^i + du^i)$ alla X_n la proiezione fatta da τ. Precisamente vedemmo che i parametri (normalizzati) di questa connessione indotta in relazione al C-riferimento che ha sullo spazio π generico i punti $B_0^\alpha = z^\alpha$ (di contatto) e $B_i^\alpha = \frac{\partial z^\alpha}{\partial u^i}$ quali punti fondamentali (e $B_0^\alpha + \sum_1^n{}_i u^i B_i^\alpha$ quale punto unità) sono dati dalle (12.18) e (12.23), cioè

$$\Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} = \delta_\nu^\circ \delta_\lambda^\mu + \delta_\nu^i \partial_i B_\lambda^\alpha B_\alpha^\mu . \tag{23.1}$$

Rammento ancora che, essendo C^{α}_{z}, ove $z, s, t, p, q = 1, 2, \ldots$ $\ldots, N-n$, punti indipendenti sul generico spazio z, le B^{μ}_{α} e C^{α}_{μ} sono gli elementi reciproci delle B^{α}_{μ} e C^{α}_{z} nel determinante Δ formato dalle coordinate (in S_N) di questi N+1 punti.

Per condurre innanzi lo studio delle X_n in S_N nello stesso ordine d'idee (quale ho sviluppato in un lavoro del 1932 : 51) occorre considerare, accanto alla connessione $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ per la X_n (la quale in quanto in un ambiente S_N può anche senz'altro considerarsi una X^{p}_{n} : ved. p. 107) una seconda connessione proiettiva, per la varietà Y^{N-n-1}_{n} luogo degli ∞^n spazi S_{N-n-1}, cioè z, associati ai punti della X_n. Si tratta di "connessione proiettiva" in un senso un po' generalizzato, ma in modo che si presenta ben naturale: intendiamo alludere a una legge di rappresentazione degli spazi generatori della varietà Y^{N-n-1}_{n} gli uni sugli altri, la quale lungo una qualunque linea, $u^i = u^i(t)$, della varietà direttrice X_n sia definita da un sistema differenziale della forma (cfr. con la (13.20))

$$\frac{dy^z}{dt} + G^{z}_{s\,i}\, y^s \frac{du^i}{dt} = \Phi(t) y^z; \tag{23.2}$$

ove intendiamo che nello spazio z generico le y^z siano coordinate proiettive omogenee dei punti rispetto ai punti fondamentali C^{α}_{z} (e al punto unità $\sum_{s}^{N-n-1} C^{\alpha}_{z}$).

Nel nostro caso intendiamo, più precisamente, che la connessione $G^{z}_{s\,i}$ sia quella che viene indotta nella Y^{n}_{N-n-1} in modo analogo a quello che sulla X^{p}_{n} dà luogo alla connessione $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$: e anzi proprio col medesimo procedimento, scambiato il ruolo delle due varietà (il che acquista un significato preciso in quanto la X^{p}_{n} si pensi come luogo dei suoi spazi tangenti S_n). Insomma: intendiamo che la legge di trasporto o di rappresentazione (23.2) nel passaggio da un punto $P(u^i)$ della X_n al punto infinitamente vicino $^*P\,(u^i + du^i)$ sia data dalla proiezione dei corrispondenti spazi associati z $^*z$ l'uno sull'altro, fatta dallo spazio π. Il che dà subito luogo a formule del tutto analoghe alle

(23.1) o meglio alle (12.18):

$$(23.3) \qquad G^{z}_{ji} = \partial_i C^{\alpha}_{j} C^{z}_{\alpha} .$$

La cosa può presentarsi, quanto sia $N-n>1$ (il caso in cui invece $N-n=1$ sarà ampiamente considerato al n. seg.) sotto un altro aspetto, forse più espressivo: Possiamo pensare gli spazi S_n tangenti alla X_n (inteso che $N-n>1$) come luogo di punti e anche come inviluppo d'iperpiani (S_{N-1}) di S_N. In quanto vi è una corrispondenza biunivoca fra gli S_{N-1} uscenti dallo spazio (S_n) π generico e gli S_{N-n-2} (iperpiani) secondo cui essi intersecano lo spazio τ associato, potremo prendere quali coordinate di un S_{N-1} della stella (S_n-stella che ha per centro π appunto le coordinate η_z della sua intersezione con τ. O anche, senza bisogno di considerare tale spazio τ: gli iperpiani C^{z}_{α}, $z=1,2,\dots,N-n-1$ sono precisamente $N-n-1$ iperpiani indipendenti della stella di centro π; possiamo prenderli entro questa stella come iperpiani fondamentali e $\sum_{z}^{N-n-1} C^{z}_{\alpha}$ quale iperpiano unità; il generico iperpiano della stella avrà in questo sistema coordinate η_z tali che $\eta_z C^{z}_{\alpha}$ saranno le sue coordinate in S_N.

Ciò posto è ovvio come l'assegnazione delle G^{z}_{jz}, e anche a meno d'una trasformazione del tipo (13.12), cioè

$$(23.4) \qquad \hat{G}^{z}_{jz} = G^{z}_{jz} + \delta^{z}_{j} \psi_i$$

equivalga a dare una legge di trasporto

$$(23.5) \qquad \frac{d\eta_z}{dt} - G^{s}_{zi} \eta_s \frac{du^i}{dt} = \chi(t) \eta_z$$

degli iperpiani tangenti alla X_n lungo le linee di questa. Insomma $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ e G^{z}_{ji} costituiscono per la X_n quelle che potremmo dire una connessione locale e una connessione tangenziale: leggi di trasporto, lungo le linee della X_n, dei punti degli spazi ad essa tangenti

e degli iperpiani ad essa tangenti, cioè uscenti dagli S_n tangenti.

La particolare connessione tangenziale che viene indotta mediante l'assegnazione degli spazi $\mathcal{T}$, rappresentata dai parametri (23.3), ha il seguente significato: nel passaggio da $P(u^i)$ a $^*P(u^i+du^i)$ iperpiani omologhi nelle stelle di centri P e $^*P$ sono due iperpiani che siano intersecati dallo spazio $\mathcal{T}$, associato a P, secondo uno stesso S_{N-n-2}.

Potremmo utilizzare l'arbitrarietà di φ, nella (23.4) per introdurre, anche per la connessione della V_n^{N-n-1} (o connessione tangenziale per la X_n), parametri normalizzati: cfr. n. 14, p. 119. Ma non presenta inconvenienti e in certo senso può anzi essere utile conservare i parametri generali G_{jz}^{r} dati dalle (23.3): tenendo presente che, come le $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ hanno pei cambiamenti (12.4) delle coordinate curvilinee e (12.5) del fattore d'omogeneità delle z^α sulla X_n la solita legge di trasformazione (12.25), ove

$$(23.6)\qquad \vartheta_{0'}^{z}=0\,,\quad \vartheta_{i'}^{z}=\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\,;\quad \vartheta_{0'}^{0}=1\,,\quad \vartheta_{i'}^{0}=\frac{\partial \log\varrho}{\partial u^{i}}$$

analogamente le $G_{\mu i}^{\lambda}$ hanno per le (12.12), cioè

$$(23.7)\qquad C_{z}^{\alpha}=h_{z}^{z'}C_{z'}^{\alpha}$$

che alterano i punti C_z^α o anche soltanto la loro normalizzazione ma non gli spazi associati $\mathcal{T}$, la legge di trasformazione

$$(23.8)\qquad G_{j'i'}^{z'}=G_{jz}^{z}h_{z}^{z'}h_{j'}^{j}\vartheta_{i'}^{i}+\partial_{i'}h_{z}^{z}\cdot h_{z}^{z'}\,,$$

ove $h_z^{z'}$ è l'elemento reciproco di $h_{z'}^{z}$ in $|h_{z'}^{z}|$.

Analogamente alle (19.33) possiamo per la connessione G_{ji}^{z} costruire il tensore

$$(23.9)\qquad G_{ij}^{\cdots z}=\partial_i G_{zj}^{z}-\partial_j G_{zi}^{z}+G_{zi}^{t}G_{tj}^{z}-G_{zj}^{t}G_{ti}^{z}$$

e mediante questo, analogamente alle (19.34), il tensore di curvatura

$$\Pi_{ij}{}^{\cdots}{}_{z} = G_{ij}{}^{\cdots}{}_{z} - \frac{1}{N-n}\delta_{z}\, G_{ij}{}^{\cdots}{}_{t}{}^{t} \qquad (23.10)$$

il cui annullarsi è la condizione necessaria e sufficiente perchè la connessione G_{jz}^{i} sia integrabile. Fa comodo scrivere anche

$$G_{\lambda\mu}{}^{\cdots}{}_{\nu} = \delta_{\lambda}{}^{i}\delta_{\mu}{}^{j} G_{ij}{}^{\cdots}{}_{z} \qquad (23.9^{*})$$

$$\Pi_{\lambda\mu}{}^{\cdots}{}_{\nu} = \delta_{\lambda}{}^{i}\delta_{\mu}{}^{j}\Pi_{ij}{}^{\cdots}{}_{z} \qquad (23.10^{*})$$

Vediamo ora come le connessioni $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ e G_{jz}^{i} insieme a due tensori (di curvatura euleriana), sotto opportune condizioni differenziali, valgano a determinare la X_n e insieme ad essa gli spazi $\mathcal{T}$ associati ai suoi punti, a meno di trasformazioni omografiche in S_n.

I due tensori ora accennati sono semplicemente

$$\Omega_{\lambda\mu}{}^{\alpha} = \mathcal{D}_{\lambda} B_{.\mu}^{\alpha} = \delta_{\lambda}{}^{\varrho} B_{\mu}^{\alpha} + \delta_{\lambda}{}^{i}\partial_{i} B_{\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} B_{\nu}^{\alpha}, \qquad (23.11)$$

$$\Phi_{\lambda z}{}^{\alpha} = \mathcal{D}_{\lambda} C_{.z}^{\alpha} = \delta_{\lambda}{}^{i}\left(\partial_{iz} C^{\alpha} - G_{zi}{}^{j} C_{j}^{\alpha}\right), \qquad (23.12)$$

ove abbiamo scritto $B_{.\mu}^{\alpha}$ e $C_{.z}^{\alpha}$ anzichè B_{μ}^{α} e C_{z}^{α} soltanto per porre in evidenza che gli indici μ ed z qui vanno considerati, agli effetti dell'applicazione del simbolo $\mathcal{D}_{\lambda}$, cioè non hanno più il ruolo di indici ordinali. Nei riguardi di $\mathcal{D}_{\lambda}$ (cfr. n.4, pp.22-23) è da intendersi che esso operi coi parametri $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ nei riguardi degli indici $\lambda\mu\nu\ldots$, mentre nei riguardi degli indici $z\ldots$ esso equivale a $\delta_{\lambda}^{i}\mathcal{D}_{i}$ e $\mathcal{D}_{i}$ opera coi parametri G_{jz}^{i}; infine gli indici $\alpha\beta\gamma\ldots$ relativi al sistema coordinato (fisso) dell'ambiente S_N rispetto ad esso si comportano come indici ordinali: o più esattamente in relazione ad essi $\mathcal{D}_{\lambda}$ opera coi parametri di derivazione tutti nulli della connessione proiettiva integrabile dell'ambiente. Aggiungo a chiarimento delle (23.11) che $B_{\lambda}^{\alpha} = B_{.\lambda}^{\alpha}$ essendo per le (12.7), in relazione alle trasformazioni (12.4) e (12.5), per l'indice λ vettore proiettivo covariante relativo di grado $g = 1$, la derivata covariante s'intende fatta nel modo precisato alla fine del n.prec.:

cioè col sistema di parametri Γ_λ, secondo le (14.27), ma ponendo $\Gamma_i = 0$ (e $\Gamma_o = -1$). Incidentalmente possiamo notare che, $\mathcal{D}_\lambda$ essendo il simbolo di questa derivazione, si ha anche

$$(23.13) \qquad B_\lambda^{\cdot\alpha} = \mathcal{D}_\lambda B_o^{\cdot\alpha};$$

e in generale per un qualunque tensore, ad es. $H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ di grado g, la derivata $\mathcal{D}_i H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ è calcolata come se esso fosse di grado 0, mentre

$$(23.14) \qquad \mathcal{D}_o H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = g H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}.$$

In conseguenza delle (23.1), che ora possiamo anche scrivere

$$(23.15) \qquad \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} = \mathcal{D}_\nu B_\lambda^{\cdot\alpha} \cdot B_\alpha^{\cdot\mu} \qquad (*),$$

e delle (23.3), abbiamo dalle (23.11) e (23.12)

$$(23.16) \qquad \Omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\alpha} B_\alpha^{\cdot\nu} = \mathcal{D}_\lambda B_\mu^{\cdot\nu} \cdot B_\alpha^{\cdot\nu} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} = 0$$

$$(23.17) \qquad \Phi_{\lambda i}^{\cdot\cdot\alpha} C_\alpha^{\cdot j} = \delta_\lambda^{\cdot i} \left(\partial_i C_i^{\cdot\alpha} \cdot C_\alpha^{\cdot j} - G_{ii}^{\cdot j} \right) = 0;$$

e viceversa, dalle (23.16) e (23.17) seguono senz'altro le (23.1) e (23.3); cosicchè pei due tensori di curvatura euleriana $\Omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\alpha}$, $\Phi_{\lambda i}^{\cdot\cdot\alpha}$, che hanno significato comunque s'intendano date le connessioni $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ e $G_{ii}^{\cdot j}$, le (23.16) e (23.17) caratterizzano il caso in cui essi vengono calcolati in relazione alle connessioni indotte (23.1) e (23.3). In forza delle (23.16) e (23.17), posto

$$(23.18) \qquad \Omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\alpha} C_\alpha^{\cdot i} = \omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot i},$$

$$(23.19) \qquad \Phi_{\lambda i}^{\cdot\cdot\alpha} B_\alpha^{\cdot\nu} = \varphi_{\lambda i}^{\cdot\cdot\nu}$$

abbiamo:

(*) Notiamo esplicitamente che $\mathcal{D}_\nu B_\lambda^{\cdot\alpha} = \delta_\nu^{\cdot\mu} B_\lambda^{\cdot\alpha} + \delta_\nu^{\cdot i} \partial_i B_\lambda^{\cdot\alpha}$ non è affatto la stessa cosa che $\mathcal{D}_\nu B_\lambda^{\alpha}$.

$$\Omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\alpha} = \omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varrho} C_{\varrho}^{\alpha}, \tag{23.20}$$

$$\Phi_{\lambda\varrho}^{\cdot\cdot\alpha} = \varphi_{\lambda\varrho}^{\cdot\cdot\nu} B_{\nu}^{\alpha}. \tag{23.21}$$

Diciamo $\omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varrho}$, $\varphi_{\lambda\varrho}^{\cdot\cdot\nu}$ tensori <u>ridotti</u> di curvatura euleriana per la X_n in S_N : in relazione all'assegnazione degli spazi associati τ . Ovviamente si ha $\omega_{o\mu}^{\cdot\cdot\varrho} = \omega_{\mu o}^{\cdot\cdot\varrho} = 0$, $\varphi_{o\varrho}^{\cdot\cdot\nu} = 0$, cioè $\omega_{ij}^{\cdot\cdot\varrho}$, $\varphi_{i\varrho}^{\cdot\cdot\nu}$ sono, per gli indici i ed j, <u>tensori affini</u>.

Le (23.20) e (23.21), tenute presenti le (23.11) e (23.12), dànno

$$\mathcal{D}_{\lambda} B_{\cdot\mu}^{\alpha} = \omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varrho} C_{\cdot\varrho}^{\alpha}, \tag{23.22}$$

$$\mathcal{D}_{\lambda} C_{\cdot\varrho}^{\alpha} = \varphi_{\lambda\varrho}^{\cdot\cdot\nu} B_{\cdot\nu}^{\alpha}; \tag{23.23}$$

cioè sviluppando, e dando a λ , μ valori $\neq 0$:

$$\mathcal{D}_i B_j^{\alpha} = \Gamma_{ji}^{o} B_o^{\alpha} + \Gamma_{ji}^{\ell} B_{\ell}^{\alpha} + \omega_{ij}^{\cdot\cdot\varrho} C_{\varrho}^{\alpha}, \tag{23.24}$$

$$\mathcal{D}_i C_{\varrho}^{\alpha} = \varphi_{i\varrho}^{\cdot\cdot o} B_o^{\alpha} + \varphi_{i\varrho}^{\cdot\cdot\ell} B_{\ell}^{\alpha} + G_{\varrho i}^{j} C_j^{\alpha}; \tag{23.25}$$

mentre posto $\lambda = i$, $\mu = 0$ e viceversa le (23.22) dànno, semplicemente,

$$\mathcal{D}_i B_o^{\alpha} = B_i^{\alpha}. \tag{23.26}$$

Le condizioni d'integrabilità delle "equazioni fondamentali" (23.24) e (23.25) (ove le B_i^{α} s'intendano date dalle (23.26)) sono le condizioni cui dovranno soddisfare le connessioni $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$, $G_{\varrho i}^{\varrho}$ e i tensori $\Omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varrho}$, $\Phi_{i\varrho}^{\cdot\cdot\lambda}$ perchè esistano una X_n e un campo di spazi S_{N-n-1} <u>associati ai suoi punti, in relazione ai quali gli enti ora detti siano le due connessioni indotte (locale e tangenziale) e i due tensori (ridotti) di curvatura euleriana.</u> Le condizioni d'integrabilità si scrivono facilmente va-

lendosi della forma invariante (23.22) e (23.23) delle equazioni in oggetto: abbiamo subito, in forza delle equazioni medesima

$$(23.27)\qquad N_{\nu\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\tau} B^{\alpha}_{\cdot\tau} = 2 D_{[\nu}\omega_{\lambda]\mu}^{\cdot\cdot\tau} C^{\alpha}_{\cdot\tau} + \left(\omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\tau}\varphi_{\nu\tau}^{\cdot\cdot\tau} - \omega_{\nu\mu}^{\cdot\cdot\tau}\varphi_{\lambda\tau}^{\cdot\cdot\tau}\right) B^{\alpha}_{\cdot\tau}$$

$$(23.28)\qquad G_{\nu\lambda\tau}^{\cdot\cdot\cdot s} C^{\alpha}_{\cdot s} = 2 D_{[\nu}\varphi_{\lambda]\tau}^{\cdot\cdot\tau} B^{\alpha}_{\cdot\tau} + \left(\varphi_{\lambda\tau}^{\cdot\cdot\tau}\omega_{\nu\tau}^{\cdot\cdot s} - \varphi_{\nu\tau}^{\cdot\cdot\tau}\omega_{\lambda\tau}^{\cdot\cdot s}\right) C^{\alpha}_{\cdot s}$$

e cioè, i punti $\underset{\lambda}{B}^{\alpha}$ e $\underset{\tau}{C}^{\alpha}$ essendo indipendenti:

$$\left.\begin{aligned}
&(23.29)\qquad N_{\nu\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = \omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\tau}\varphi_{\nu\tau}^{\cdot\cdot\tau} - \omega_{\nu\mu}^{\cdot\cdot\tau}\varphi_{\lambda\tau}^{\cdot\cdot\tau}\\
&(23.30)\qquad D_{[\nu}\omega_{\lambda]\mu}^{\cdot\cdot\tau} = 0\\
&(23.31)\qquad D_{[\nu}\varphi_{\lambda]\tau}^{\cdot\cdot\tau} = 0\\
&(23.32)\qquad G_{\nu\lambda\tau}^{\cdot\cdot\cdot s} = \varphi_{\lambda\tau}^{\cdot\cdot\tau}\omega_{\nu\tau}^{\cdot\cdot s} - \varphi_{\nu\tau}^{\cdot\cdot\tau}\omega_{\lambda\tau}^{\cdot\cdot s}
\end{aligned}\right\}\ (A)$$

A queste vanno aggiunte le condizioni dintegrabilità delle (23.26) : le quali essendo attualmente

$$(23.33)\qquad \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$$

si scrivono semplicemente

$$(23.34)\qquad \omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\tau} = \omega_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\tau} \quad (\text{cioè } \Omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\alpha} = \Omega_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\alpha}).$$

Le (A) , cioè il gruppo formato dai quattro sistemi (23.29) ....(23.32) , costituiscono la generalizzazione al caso attuale delle note equazioni di GAUSS, di CODAZZI, di KÜHNE-RICCI per una V_n in V_N .
Se le due connessioni e i due tensori di c.e. sono tali da soddisfare ad esse (e di più s'intende che $\omega_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\tau}$ sia simmetrico rispetto ai due indici inferiori) e allora soltanto le (23.26) e (23.24), (23.25) formano un sistema illimitatamente integrabile nelle $\underset{0}{B}^{\alpha}, \underset{i}{B}^{\alpha}, \underset{\tau}{C}^{\alpha}$:

la più generale soluzione di questo sistema si ottiene dando ad arbitrio una (n+1)-upla iniziale di punti indipendenti ${}^{(0)}B^{\alpha}$, ${}^{(0)}C^{\alpha}$. Ma è ovvio che una trasformazione omografica qualunque della X_n, coi suoi spazi $\mathcal{Z}$ associati, in S_N, non muta le connessioni $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, G^{z}_{sz}; nè i tensori $\omega^{\cdots z}_{\lambda\mu}$, $\varphi^{\cdots\mu}_{\lambda z}$; si conclude facilmente che la più generale soluzione del sistema (23.26),(23.24),(23,25) è la più generale trasformata omografica di una particolare soluzione.

Infine:

date le connessioni proiettive $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ e G^{z}_{sz}, e i tensori $\omega^{\cdots z}_{\mu\nu}$, $\varphi^{\cdots\nu}_{\mu z}$, inteso che sia $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$, condizione necessaria e sufficiente perchè esistano in S_N una varietà X_n e un campo di spazi S_{N-n-1} associati ai suoi punti, tali che in relazione a questa associazione siano, rispetto a convenienti sistemi di riferimento, $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ e G^{z}_{sz} i parametri delle connessioni indotte nella X_n e nella Y_n^{N-n-1} luogo degli spazi associati, ed $\omega^{\cdots z}_{\mu\nu}$, $\varphi^{\cdots\nu}_{\mu z}$ i tensori ridotti di curvatura euleriana, è che valgano le (A) e (23.34). La X_n, insieme agli spazi associati ai suoi punti, è allora individuata a meno di un'arbitraria omografia in S_N.

Vedremo nel seguente come le cose si semplifichino e si possano condurre più innanzi, specie nei riguardi geometrici, pel caso $N = n+1$. Qualche sviluppo ulteriore, ma secondo punti di vista alquanto differenti, è stato esposto anche pel caso generale da V.DANTZIG e SCHOUTEN (1932,1936), da HLAVATY (1933): considerando più in generale la X_n entro uno spazio a connessione proiettiva, il che può farsi all'incirca coi medesimi procedimenti finora indicati. Ma nell'aspetto geometrico l'effettiva utilità di simili trattazioni è subordinata a una preventiva associazione intrinseca, e proiettivamente invariante, degli spazi S_{N-n-1} alla X_n; il che andrà fatto caso per caso, con procedimenti che dovranno variare secondo le dimensioni n ed N e specialmente secondo il numero e la natura delle equazioni a derivate parziali cui soddisfino le coordinate del punto che in S_N descrive la X_n. A parte questo, è da notare che nelle (A) figurano proprio le G^{z}_{sz}, e non soltanto questi parametri dati a meno d'una trasfor-

zione (23.4): su questo punto, che andrebbe geometricamente chiarito, avremo occasione di tornare pel caso $N = n+1$ al n. seguente.

24. Ipersuperficie di S_n : quadriche di DARBOUX, forme di FUBINI; determinazione intrinseca delle pseudonormali.

Nel caso particolare delle ipersuperficie σ in X_N conviene semplificare le notazioni, ad es. ponendo

$$C_1^{\alpha} = X^{\alpha}, \quad C_{\alpha}^{1} = \xi_{\alpha}, \quad B_{\alpha}^{\circ} = \eta_{\alpha}; \tag{24.1}$$

$$G_{1i}^{1} = G_i, \quad G_{ij_1}^{\cdots 1} = G_{ij} \ (= \partial_j G_i - \partial_i G_j), \tag{24.2}$$

$$\omega_{ij}^{\cdots 1} = \omega_{ij}, \quad \varphi_{i1}^{\cdots j} = \varphi_i^j \ (\text{"poli"}), \quad \varphi_{i1}^{\cdots \circ} = \varphi_i. \tag{24.3}$$

Le X^{α} sono coordinate di punti associati ai punti di σ : ai quali ora si riducono gli spazi τ del n. prec. ; le ξ_{α} sono coordinate degli iperpiani (S_n) tangenti a σ, normalizzate in relazione alle X^{α} dalla condizione

$$X^{\alpha} \xi_{\alpha} = 1, \tag{24.4}$$

Le η_{α} sono coordinate degli iperpiani d'appartenenza dei punti X^{α} e B_i^{α}, normalizzate in relazione alle z^{α}, che ora scriveremo semplicemente z^{α}, dalla condizione

$$z^{\alpha} \eta_{\alpha} = 1. \tag{24.5}$$

Le (23.1) e (23.3), (23.18) e (23.11), (23.19) e (23.1 nel caso attuale dànno:

$$\Gamma_{jh}^{i} = \partial_h B_j^{\alpha} \cdot B_{\alpha}^{\cdot i} = \frac{\partial^2 z^{\alpha}}{\partial u^j \partial u^h} B_{\alpha}^{\cdot i}, \quad (B_{\alpha}^{\cdot i} =$$

(24.7) $$\Gamma^{0}_{jk} = \partial_k B^{\alpha}_{.j} \cdot \eta_\alpha = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial u^j \partial u^k} \eta_\alpha ,$$

(24.8) $$G_i = \partial_i X^\alpha \cdot \xi_\alpha = -\partial_i \xi_\alpha \cdot X^\alpha ;$$

(24.9) $$\omega_{ij} = D_i B^{\alpha}_{.j} \cdot \xi_\alpha = \partial_i B^{\alpha}_{.j} \cdot \xi_\alpha = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial u^i \partial u^j} \xi_\alpha = -\partial_j x^\alpha \cdot \partial_i \xi_\alpha$$

e ancora , essendo

(24.10) $$B^{\alpha}_{.j} \xi_\alpha = -x^\alpha \partial_j \xi_\alpha = 0 ,$$

(24.11) $$\omega_{ij} = x^\alpha \frac{\partial^2 \xi_\alpha}{\partial u^i \partial u^j} ;$$

infine

(24.12) $$\varphi_i^{.j} = \partial_i X^\alpha B_\alpha^{.j} ,$$

(24.13) $$\varphi_i = \partial_i X^\alpha \cdot \eta_\alpha = -X^\alpha \partial_i \eta_\alpha .$$

Le (24.9) mostrano in particolare che l'equazione di MONGE

(24.14) $$f_2 = \omega_{ij} du^i du^j = 0$$

cioè

(24.15) $$d^2 x^\alpha \xi_\alpha = 0$$

rappresenta in ciascun punto della X_n il cono delle direzioni asintotiche. Supponiamo d'ora in poi che sia

$|\omega_{ij}| \neq 0$, cioè che la varietà X_n abbia ∞^n iperpiani tangenti. E' allora naturale utilizzare $f_2 = \omega_{ij} du^i du^j$ come forma fondamentale di un calcolo differenziale assoluto secondo RICCI pei tensori affini definiti sulla X_n: i cui elementi verranno contrassegnati con l'indice (ω) (Ad es. $\left\{ {i \atop jh} \right\}^{(\omega)}$, $\Pi_i^{(\omega)}$, ...).

In particolare: ci si potrà valere di ω_{ij} e del tensore reciproco ω^{ij}, tale che $\omega^{ij}\omega_{jk} = \delta_k^i$, per <u>abbassare</u> o <u>alzare</u> gli indici dei tensori affini. Ad es.

$$\varphi_{ij} = \omega_{il}\varphi_j^{\cdot l} = -B_{\cdot\rho}^{\alpha}\,\partial_i \xi_\alpha \cdot \partial_j X^\beta B_{\beta}^{\cdot l} \tag{24.16}$$

$$= -G_i G_j - \partial_i \xi_\alpha \partial_j X^\alpha .$$

Le "equazioni fondamentali" (23.24) e (23.25) nel caso attuale si riducono a:

$$\partial_i B_j^\alpha = \Gamma_{ji}^{\circ} z^\alpha + \Gamma_{ji}^{l} B_l^\alpha + \omega_{ij} X^\alpha \tag{24.17}$$

$$\partial_i X^\alpha = \varphi_i z^\alpha + \varphi_i^{\cdot l} B_l^\alpha + G_i X^\alpha \tag{24.18}$$

e le relative condizioni d'integrabilità, (A), a:

$$(B)\begin{cases} N_{ijl}^{\cdots h} = \omega_{jl}\varphi_i^{\cdot h} - \omega_{il}\varphi_j^{\cdot h}; \quad N_{ijl}^{\cdots \circ} = \omega_{jl}\varphi_i - \omega_{il}\varphi_j & (24.19) \\ \Pi_i \omega_{jl} = \Pi_j \omega_{il} = G_j \omega_{il} - G_i \omega_{jl} & (24.20) \\ \Pi_i \varphi_j^{\cdot l} - \Pi_j \varphi_i^{\cdot l} = G_i \varphi_j^{\cdot l} - G_j \varphi_i^{\cdot l} & (24.21) \\ G_{ij} = \varphi_{ji} - \varphi_{ij} . & (24.22) \end{cases}$$

Nel caso attuale, ovviamente, la connessione $G_{1i}' = G_i$ per la varietà Y_n° dei poli X^α da un punto di vista geo-

metrico perde significato, riunendosi alla coordinazione di un polo ad un altro infinitamente vicino. Da un punto di vista analitico essa dà ancora una legge di trasporto

$$d\log v + G_i\, du^i = 0 \tag{24.23}$$

di un campo scalare v lungo le linee della X_n, in generale non integrabile. Questa legge esprime che, lungo la supposta linea, il punto di coordinate $d(vX^\alpha)$ si mantiene nell'iperpiano tangente alla X_n; infatti

$$d(vX^\alpha)\xi_\alpha = dv + v\partial_i X^\alpha \cdot \xi_\alpha\, du^i = dv + v G_i\, du^i \tag{24.24}$$

e questa espressione si annulla allora e solo che vale (24.23).

La legge di trasporto (24.23) ora detta però può rendersi sempre integrabile senza restrizione per la X_n bensì mediante una condizione imposta alla congruenza delle rette zX congiungenti i punti della X_n ai rispettivi poli: rette che diremo pseudonormali alla X_n. Precisamente: si rende $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$, e cioè per la (24.22) $G_{ij} = 0$ (il che appunto esprime che quella legge di trasporto (24.23) è integrabile) a condizione che la congruenza delle pseudonormali sia coniugata alla ipersuperficie σ, secondo FUBINI: cioè in ciascun punto di σ il cono delle direzioni secondo cui le pseudonormali formano rigate sviluppabili è apolare al cono asintotico. (Per $n=2$ ciò significa che le sviluppabili della congruenza delle pseudonormali segnano su σ un doppio sistema coniugato).

E infatti: esprimendo che le rette descritte dai punti $B_0^\alpha + hX^\alpha$, $B_0^\alpha + B_i^\alpha du^i + k(X^\alpha dX^\alpha)$ al variare di h e di k sono incidenti troviamo le condizioni

$$du^i + k\varphi_j^i\, du^j = 0\,, \tag{24.25}$$

onde, eliminando k, otteniamo l'equazione del cono delle tangenti a direttrici di rigate sviluppabili della

congruenza:

$$(24.26) \qquad (\varphi_j^{\cdot i}\delta_h^l - \varphi_j^{\cdot l}\delta_h^i)\, du^j du^h = 0 .$$

Condizione perchè questo cono sia apolare al cono asintotico (24.14) è che sia

$$(24.27) \qquad (\varphi_j^{\cdot i}\delta_h^l - \varphi_j^{\cdot l}\delta_h^i)\,\omega^{jh} = 0$$

cioè $\varphi^{li} - \varphi^{il} = 0$, o ancora

$$(24.28) \qquad \varphi_{ij} = \varphi_{ji} \; ; \qquad G_{ij} = 0 .$$

Supposto d'ora in poi che la congruenza delle pseudonormali sia appunto <u>coniugata</u> alla X_n, e quindi valgano le (24.28), vediamo subito che è possibile rendere, di più, mediante normalizzazione conveniente delle X^α (e quindi anche delle ξ_α)anche

$$(24.29) \qquad G_i = \partial_i X^\alpha \cdot \xi_\alpha = - X^\alpha \partial_i \xi_\alpha = 0$$

E infatti: una trasformazione

$$(24.30) \qquad \hat{X}^\alpha = \sigma X^\alpha \, , \quad \text{onde} \quad \hat{\xi}_\alpha = \sigma^{-1}\xi_\alpha$$

muta G_i in

$$(24.31) \qquad \hat{G}_i = G_i + \partial_i \log \sigma \, ;$$

dunque, appunto a condizione che sia

$$(24.32) \qquad G_{ij} = \partial_j G_i - \partial_i G_j = 0$$

potremo prendere σ in modo da rendere $\hat{G}_i = 0$ .Supponiamo d'ora in poi senz'altro la (24.29) soddisfatta, il che dà ovvie semplificazioni delle (24.16),(24.18), (24.20), (24.21).

Una conseguenza notevole delle (24.28), (24.19) è que

sta : ponendo nelle prime equazioni (24.19) $l = h$ e sommando se ne ricava

$$N_{ijl}^{\cdot\cdot\cdot l} = 0 , \tag{24.33}$$

il che porta che $N_{ij\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu}$ si riduce senz'altro <u>al tensore di curvatura</u> $R_{ij\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu}$ della connessione proiettiva $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$. Le stesse (24.19) dànno subito

$$\varphi_i^{\cdot h} = \frac{1}{n-1}\omega^{jl} N_{ijl}^{\cdot\cdot\cdot h} , \quad \varphi_i = \frac{1}{n-1}\omega^{jl} N_{ijl}^{\cdot\cdot\cdot 0} . \tag{24.34}$$

Sostituendo nelle (24.17) e (24.18) abbiamo un sistema differenziale nelle B^{α} ed X^{α} i cui coefficienti dipendono soltanto dalle $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ (e derivate) e dalle ω_{ij} ; anche nelle relative condizioni d'integrabilità (B), fatte le medesime sostituzioni, figurano soltanto le $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ ed ω_{ij} .Precisamente otteniamo

$$(C)\begin{cases} (24.35) & N_{ijl}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} = \dfrac{\omega^{kg}}{n-1}\left(\omega_{jl} N_{ikg}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} - \omega_{il} N_{jkg}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}\right) \\ (24.36) & D_i\,\omega_{jl} - D_j\,\omega_{il} = 0 \\ (24.37) & D_i\left(\omega^{kg} N_{jkg}^{\cdot\cdot\cdot l}\right) - D_j\left(\omega^{kg} N_{ikg}^{\cdot\cdot\cdot l}\right) = 0 . \end{cases}$$

Ecco dunque un primo risultato conclusivo:

Dati la connessione proiettiva $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ e il tensore affine (simmetrico) ω_{ij} , condizione perchè esistano una ipersuperficie σ e, su di una congruenza coniugata a questa, un campo di punti tali che presi tali punti come poli per la X_n ,siano in relazione a un conveniente C-riferimento $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}, \omega_{ij}$ i parametri della connessione proiettiva indotta nella X_n e il relativo (1°) tensore ridotto di curvatura euleriana è che le (C) siano soddisfatte. La X_n risulta determinata (insieme al campo di punti associati quali poli ai suoi punti) a meno di omografie in S_{n+1}.

Vogliamo ora passare da questa rappresentazione della X_n in S_{n+1} mediante $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ ed ω_{ij} ad una nuova rappresentazione mediante tre tensori affini simmetrici o anche mediante tre forme: quelle del FUBINI.

Osserviamo che gli iperpiani $x^0 = 0$ dei sistemi proiettivi locali, sugli S_n tangenti alla X_n, sono legati per ora a un elemento analitico e cioè alla scelta del fattore arbitrario delle coordinate y^{α} sulla X_n.

Potremo fra poco legarli invece alle pseudonormali con una corrispondenza geometrica: la polarità di DARBOUX. Ma prima conviene introdurre un altro elemento fondamentale : sappiamo che, ad ogni modo, la supposta scelta del C-riferimento e quindi degli iperpiani $x^i = 0$ subordina alla connessione proiettiva $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ una connessione affine Γ^{i}_{jk}, (e un tensore affine Γ^{0}_{jk}). Le differenze

$$c^{\cdot\cdot i}_{jk} = \Gamma^{i}_{jk} - \left\{ {i \atop jk} \right\}^{(\omega)} \tag{24.38}$$

sono le componenti di un tensore affine: è questo l'ente che volevamo introdurre. Potremmo dire che, come il tensore ω_{ij} esprime, in qualche modo, il divario fra la geometria a connessione proiettiva indotta nella X_n mediante il supposto campo di poli e la geometria dell'ambiente S_{n+1}, così $c^{\cdot\cdot i}_{jk}$ dà in certo modo una espressione del divario fra la geometria a connessione affine cui la connessione proiettiva ora detta dà luogo in relazione a ciascuna normalizzazione delle x^{α} e la geometria riemanniana per la quale la corrispondente determinazione di ω_{ij} fornisce il tensore metrico fondamentale.

Facilmente verifichiamo che

$$c_{jkl} = c^{\cdot\cdot i}_{jk}\, \omega_{il} \tag{24.39}$$

(in forza delle (24.29)) è simmetrico. E infatti , che c_{jkl} sia simmetrico rispetto ai primi due indici è conseguenza evidente delle (24.38) e (23.33). Poi:

$$c_{jkl} = \left(\Gamma^{i}_{jk} - \left\{ {i \atop jk} \right\}^{(\omega)} \right) \omega_{il} = -\partial_k B^{\alpha}_{j} B^{i}_{\alpha} B^{\beta}_{i} \partial_l \xi_{\beta} - \left\{ {i \atop jk} \right\}^{(\omega)} \omega_{il} \tag{24.40}$$

$$= -\left(\partial_k B^{\alpha}_{j} - \left\{ {i \atop jk} \right\}^{(\omega)} B^{\alpha}_{i} \right) \partial_l \xi_{\alpha} = -\overset{(\omega)}{\nabla}_k B^{\alpha}_{j} \cdot \partial_l \xi_{\alpha} ,$$

in forza delle (24.9): d'altra parte queste e le (24.10) dànno facilmente

$$(24.41)\qquad c_{jkl} = -\overset{(\omega)}{\nabla}_h B^{\alpha}_{.j}\,\partial_l \xi_{\alpha} = B^{\alpha}_{.j}\overset{(\omega)}{\nabla}_h(\partial_l \xi_{\alpha}) = B^{\alpha}_{.j}\overset{(\omega)}{\nabla}_l(\partial_h \xi_{\alpha}) =$$

$$= -\overset{(\omega)}{\nabla}_l B^{\alpha}_{.j}\,\partial_h \xi_{\alpha} = c_{jlh}\ ;$$

questo dà quanto volevamo.

Introdotto il tensore $c_{jk}^{\cdot\cdot l}$ le equazioni (24.17) si scrivono

$$(24.42)\qquad \overset{(\omega)}{\nabla}_i B^{\alpha}_{.j} = \Gamma^{\circ}_{ji}\,y^{\alpha} + c_{ji}^{\cdot\cdot l} B^{\alpha}_{l} + \omega_{ij}\,X^{\alpha}.$$

Vogliamo ora associare a ciascuna scelta delle pseudo-normali (s'intende: sempre soddisfacente alle (24.28)) anche una determinazione degli iperpiani $x^{\circ}=0$ locali e, insieme, una normalizzazione delle x^{α}. Per questo cominciamo dallo scrivere l'equazione della generica quadrica osculatrice (a contatto del 2° ordine) a σ nel punto $P(x^{\alpha})$ generico. Essendo, in relazione ai punti fondamentali B^{α} ed X^{α}, x^{λ} ed y le coordinate locali troviamo subito che le quadriche cercate sono:

$$(24.43)\qquad 2x^{\circ}y = \omega_{ij}\,x^i x^j + 2\lambda_i\,x^i y + \mu y^2$$

ove le λ_i e μ sono parametri arbitrari.

D'altra parte rispetto allo stesso riferimento locale l'ipersuperficie σ ha la seguente rappresentazione approssimata (sino al 3° ordine) nell'intorno del punto P considerato:

$$(24.44)\qquad \frac{y}{x^{\circ}} = \frac{1}{2}\omega_{ij}\frac{x^i}{x^{\circ}}\frac{x^j}{x^{\circ}} - \frac{1}{3}c_{ijl}\frac{x^i}{x^{\circ}}\frac{x^j}{x^{\circ}}\frac{x^l}{x^{\circ}} + \cdots$$

il che dà, pel cono cubico delle tangenti alla varietà intersezione

$$(24.45)\qquad \left(\lambda_i\,\omega_{kk} - \frac{1}{3}c_{ikk}\right)x^i x^k x^k = 0$$

Tale cono è apolare al cono asintotico a condizione che sia

$$(24.46)\qquad \left(\lambda_{(i}\,\omega_{hk)} - \frac{2}{3}\,c_{ihk}\right)\omega^{hk} = 0$$

cioè

$$(24.47)\qquad \lambda_i = \frac{2}{n+2}\,c_{ihk}\,\omega^{hk};$$

sostituendo nella (24.43) ne abbiamo il fascio di quadriche di DARBOUX:

$$(24.48)\qquad 2x^\circ y = \omega_{ij}\,x^i x^j + \frac{4}{n+2}\,c_{ihk}\,\omega^{hk}x^i y + \mu y^2.$$

La polarità rispetto a una qualunque di queste ∞^1 quadriche subordina, fra la stella di centro P in S_{n+1} e l'iperpiano (S_n) tangente in P, Π_1, una correlazione, che per brevità viene detta polarità di DARBOUX; alla direzione che da P va al punto di coordinate $x^\circ = 1$, x^i, y essa fa corrispondere l'S_{n-1} dell'S_n tangente, rappresentato dalle equazioni

$$(24.49)\qquad {}_0^y x^\circ = \omega_{ij}\,{}_0^x{}^i\,{}_0^x{}^j + \frac{2}{n+2}\,c_{ihk}\,\omega^{hk}\,{}_0^y x^i\,,\quad y = 0.$$

In particolare ponendo $y = 0$ si trova, come è ben naturale, che nella stella (unità) di S_n, di centro P è subordinato il coniugio rispetto al cono asintotico, e vediamo, che la condizione perchè l'iperpiano (dell'S_n tangente) $x^\circ = 0$ sia polare della pseudonormale, $x^i = 0$, nella polarità di DARBOUX è che sia

$$(24.50)\qquad c_{ihk}\,\omega^{hk} = 0 \qquad \text{cioè } c_{ih}{}^{h} = 0\,;$$

cioè che lo stesso cono cubico

$$(24.51)\qquad f_3 = c_{ihk}\,x^i x^h x^k = 0$$

sia apolare rispetto al cono asintotico. Vediamo subito che effettivamente è possibile soddisfare alla (24.50) mediante una di quelle trasformazioni degli iperpiani $x^\circ = 0$ che conseguono a un mutamento del fattore d'omogeneità delle x^α.

E infatti: se poniamo

$$\hat{z}^{\alpha} = \varrho\, z^{\alpha} \tag{24.52}$$

abbiamo subito, in conseguenza,

$$\hat{B}^{\alpha}_{i} = \varrho\left(B^{\alpha}_{i} + \frac{\partial \log\varrho}{\partial u^{i}}\, z^{\alpha}\right), \quad \hat{B}^{i}_{\alpha} = \varrho^{-1} B^{i}_{\alpha}, \tag{24.53}$$

$$\hat{\Gamma}^{i}_{jh} = \Gamma^{i}_{jh} + \delta^{i}_{j}\frac{\partial \log\varrho}{\partial u^{h}} + \delta^{i}_{h}\frac{\partial \log\varrho}{\partial u^{j}}\,; \quad \hat{\omega}_{ij} = \varrho\,\omega_{ij}, \tag{24.54}$$

infine

$$\hat{c}^{\cdots i}_{jk} = c^{\cdots i}_{jk} + \frac{1}{2}\left(\delta^{i}_{j}\frac{\partial \log\varrho}{\partial u^{k}} + \delta^{i}_{k}\frac{\partial \log\varrho}{\partial u^{j}} + \omega_{jk}\,\omega^{il}\frac{\partial \log\varrho}{\partial u^{l}}\right) \tag{24.55}$$

e quindi

$$\hat{c}^{\cdots h}_{jh} = c^{\cdots h}_{jh} + \frac{n+2}{2}\,\frac{\partial \log\varrho}{\partial u^{j}}\,; \tag{24.56}$$

cosicchè renderemo $\hat{c}^{\cdots h}_{jh} = 0$ prendendo, nella (24.52),

$$\varrho = e^{-\frac{2}{n+2}\int c^{\cdots h}_{jh}\, du^{j}}\,; \tag{24.57}$$

cioè, essendo

$$c^{\cdots h}_{jh} = \Gamma^{h}_{jh} - \left\{{h \atop jh}\right\} = \partial_{j} B^{\alpha}_{j}\cdot B^{h}_{\alpha} - \partial_{j}\log\sqrt{\omega}\,, \tag{24.58}$$

ove $\omega = |\omega_{ij}|$; o ancora

$$c^{\cdots h}_{jh} = \partial_{j} B^{\alpha}_{h}\cdot B^{h}_{\alpha} + \partial_{j} X^{\alpha}\cdot\xi_{\alpha} + \partial_{j} z^{\alpha}\cdot\eta_{\alpha} - \partial_{j}\log\sqrt{\omega} = \partial_{j}\log\frac{\Delta}{\sqrt{\omega}} \tag{24.59}$$

ove $\Delta = |y^{\alpha} B^{\alpha}_{1} \ldots B^{\alpha}_{n} X^{\alpha}|$, prendendo

$$\varrho = \left(\frac{\Delta^2}{\omega}\right)^{-\frac{1}{n+2}} . \tag{24.60}$$

Quando a ϱ nelle (24.52) e seguenti s'intenda dato questo valore, ne risultano coordinate normalizzate pei punti di σ,

$$Z^\alpha = \left(\frac{\Delta^2}{\omega}\right)^{-\frac{1}{n+2}} x^\alpha , \tag{24.61}$$

cui corrispondono determinazioni dei tensori ω_{ij}, $c_{ij}^{\cdots r}$ che indicheremo con a_{ij}, $a_{ij}^{\cdots r}$. Questi ultimi sono determinati (in modo invariante per trasformazioni omografiche nell' S_{n+1}) dalla X_n e dalla congruenza di pseudonormali. Le forme

$$F_2 = a_{ij}\, du^i du^j , \quad F_3 = a_{ijh}\, du^i du^j du^h \tag{24.62}$$

sono precisamente la prima e la seconda forma fondamentale di FUBINI per la X_n, corrispondenti alla supposta congruenza di pseudonormali.

Fin qui non abbiamo sottoposto ad alcuna restrizione la scelta dei poli sulle pseudonormali: in particolare F_2 ed F_3 non ne dipendono e la connessione affine Γ^*_{jk} non ne dipende: invece ne dipende il tensore affine Γ°_{jk}. Sappiamo già che questo è simmetrico nel nostro caso: dunque la correlazione, nella stella che ha per centro il punto generico P di X_n entro il relativo spazio tangente,

$$\Gamma^\circ_{ij}\, du^i x^j = 0, \tag{24.63}$$

di cui abbiamo visto a suo tempo il significato geometrico (n.15, p.136) è nel caso attuale la polarità rispetto ad un cono. Ha dunque un significato geometrico ben preciso la condizione, che anche questo cono sia apolare al cono asintotico, si abbia cioè

$$\Gamma^\circ_{ij}\, \omega^{ij} = 0. \tag{24.64}$$

Questa condizione vale a fissare sulle singole pseudonor-

mali i poli. E infatti per un cambiamento dei poli sulle pseudonormali,

$$(24.65) \qquad {}^*X^\alpha = X^\alpha + bz^\alpha ,$$

abbiamo, come immediatamente si verifica,

$$(24.66) \qquad {}^*\Gamma^\circ_{ij} = \Gamma^\circ_{ij} - b\,\omega_{ij} ;$$

dunque potremo rendere ${}^*\Gamma^\circ_{ij}$ apolare ad ω_{ij} prendendo

$$(24.67) \qquad b = \frac{1}{n}\Gamma^\circ_{ij}\,\omega^{ij} .$$

Alla scelta, così determinata, dei poli sulle pseudonormali(*) corrisponderà una determinazione di Γ°_{ij} che indicheremo con p_{ij}: ponendo dunque, dopo la normalizzazione (24.61),

$$(24.68) \qquad p_{ij} = \Gamma^\circ_{ij} - \frac{1}{n}\Gamma^\circ_{hh}\,a^{hk}a_{ij} .$$

Se d'altra parte designiamo con $A^\lambda_{\mu\nu}$ i parametri (normalizzati) della connessione proiettiva che viene indotta nella X_n in relazione alla scelta (sempre arbitraria) di una congruenza (coniugata) di pseudonormali e alla scelta ora precisata dei poli su di esse, avremo

$$(24.69) \qquad A^i_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\}^{(a)} + a_{jk}{}^{\cdot\cdot i} , \qquad A^\circ_{jk} = p_{ik} ,$$

ove l'indice $^{(a)}$ contrassegna gli elementi che si riferiscono al tensore a_{ij} quale tensore fondamentale. E' precisamente

$$(24.70) \qquad P = p_{ij}\,du^i du^j$$

la terza forma fondamentale del FUBINI: s'intende sempre relativa alla X_n e alla supposta congruenza di pseudonormali.

Riassumendo i risultati ottenuti:

Scelta a piacere una congruenza coniugata all'ipersu-

(*) e (24.60) di e : cioè degli iperpiani $x^\circ = o$.

perficie σ quale congruenza delle pseudonormali e fissato su ciascuna di queste in un primo tempo in modo arbitrario un punto come polo (le cui coordinate X^α verranno normalizzate in modo che il punto dX^α stia nel piano tangente), determinati infine gli iperpiani locali $x^0=0$ del C-riferimento quali polari delle pseudonormali nelle polarità di DARBOUX relative ai singoli punti di σ, le componenti a_{rs} del corrispondente (primo) tensore (ridotto) di curvatura euleriana e le differenze $a_{ijl}=a_{lh}(a_{ij}^{\cdot\cdot h}-\{{}^{h}_{ij}\}^{(a)})$ sono i coefficienti delle prime due forme fondamentali del FUBINI.

Vi è un unico modo di fissare, sulle pseudonormali, i poli sì da rendere il cono fondamentale della polarità $A^0_{ij}\,du^i du^j=0$ apolare al cono asintotico: i corrispondenti parametri $p_{ij}=A^0_{ij}$ sono i coefficienti della 3ª forma fondamentale del FUBINI. Sotto le condizioni che si ricavano dalle (C), cioè (24.35)...(24.37), ponendovi a_{ij}, $A^\lambda_{\mu\nu}$ al luogo di ω_{ij}, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, aggiungendo d'altra parte le condizioni di apolarità di F_3 e P ad F_2, queste tre forme F_2, F_3 e P oppure la connessione affine A^i_{jh} e i due tensori affini a_{il} e p_{il} sono enti atti a rappresentare la ipersuperficie σ nel gruppo delle omografie in S_{n+1}.

Resta infine da fare, in modo intrinseco alla X_n in S_{n+1}, la scelta delle pseudonormali. Almeno pel caso n=2 si conoscono svariati procedimenti geometrici per ricostruire quella particolare congruenza delle "normali proiettive", trovata dal FUBINI per via analitica: la quale almeno nell'aspetto analitico si presenta come la più semplice e naturale generalizzazione della congruenza delle normali metriche. Mi limiterò qui a rammentare una delle caratterizzazioni analitiche: lo scalare

$$J=-\frac{1}{n(n-1)}\,a^{ij}a_{ih}^{\cdot\cdot k}a_{jk}^{\cdot\cdot h}, \tag{24.71}$$

invariante pei mutamenti delle coordinate curvilinee e per le (24.52); mentre pel più generale cambiamento delle pseudonormali, o più esattamente delle X^α in modo da conservare verificate le (24.29) e l'apolarità di p_{ij} ad ω_{ij},

(24.72) $$\hat{X}^{\alpha} = \sigma\left(X^{\alpha} - \omega^{ij}\,\partial_i \log\sigma\, B^{\alpha}_{.j}\right)$$

si ha semplicemente

(24.73) $$\hat{J} = \sigma^{2} J$$

e d'altra parte

(24.74) $$\hat{Z}^{\alpha} = \sigma^{-1} Z^{\alpha},\quad \hat{\xi}_{\alpha} = \sigma^{-1}\xi_{\alpha}\ ;\quad \hat{a}_{ij} = \sigma^{-2} a_{ij}\ ,\quad \hat{a}_{ij\ell} = \sigma^{-2} a_{ij\ell}\ ;$$

questo permette, eliminato σ mediante la (24.73), di costruire coordinate e forme fondamentali normali, quelle del FUBINI. Tali elementi sono anche i trasformati di Z^{α}, ξ_{α}; di F_2 ed F_3 mediante le (24.74), in cui sia posto

(24.75) $$\sigma = (-J)^{-\frac{1}{2}}\ ;$$

questo valore posto nelle (24.72) dà i poli normali e determina in particolare le normali proiettive del FUBINI o la loro estensione al caso $n > 2$. Su questa teoria, che pel caso n=2 è già stata ricostruita in modo veramente geometrico per tutt'altra via dal BOMPIANI, non ci tratterremo più oltre : lo scopo del presente §. era soltanto mostrare come vi possano avere utili applicazioni e interpretazioni i risultati dello studio delle connessioni proiettive (*)

§. 6- Applicazioni: la relatività proiettiva.

25.- Premesse e richiami su alcune teorie unitarie del campo elettromagnetico e gravitazionale.

Veniamo ora a qualche cenno su un altro campo di applicazione delle connessioni proiettive: nella teoria

(*) Lo studio delle varietà in uno spazio a connessione proiettiva, particolarmente pel caso in cui la varietà è una ipersuperficie in P_n, e più precisamente una superficie in P_3 ha avuto alcuni sviluppi recenti degni di nota: ma soltanto nelle annotazioni alla bibliografia (n.30) po-

della relatività, o più precisamente, nella costruzione di teorie unitarie pel campo elettromagnetico e gravitazionale.

Rammento che appunto questo stesso scopo di unificazione è stata la sorgente prima dell'intera teoria delle connessioni: le nozioni di connessione affine e metrica sono state introdotte dal WEYL appunto quali basi concettuali della sua teoria unitaria (1918).

Dopo molti altri tentativi, basati sempre su connessioni affini o in particolare metriche ed euclidee, più recentemente (1930; VEBLEN) anche le connessioni proiettive hanno servito di fondamento a teorie unitarie. Sulla teoria di VEBLEN daremo qualche indicazione (e qualche cenno poi anche sull'altra di poco posteriore dovuta a SCHOUTEN e v.DANTZIG): dopo un breve cenno sul precendente sviluppo delle teorie unitarie.

La teoria della relatività generale, da A.EINSTEIN sviluppata fra il 1913 e il 1916, si basa su una geometrizzazione del campo gravitazionale, che viene in certo modo fuso e conglobato nella stessa nozione dello spazio-tempo 4-dimensionale, G_4: questo viene identificato con uno spazio riemanniano, o più esattamente pseudoriemanniano cioè a ds^2 indefinito: le sue linee isotrope (reali) sono le linee orarie dei raggi luminosi. La condizione

$$\varepsilon\, ds^2 = g_{ik}\, du^i du^k = 0 \qquad \varepsilon = \pm 1 \tag{25.1}$$

(ove intendiamo, sino a contrario avviso, $i,j,h,k,l = 1,2,3,4$ e con u^i indichiamo coordinate curvilinee in G_4) rappresenta in ciascun punto P il cono isotropo, il quale separa, nella stella P, la totalità delle direzioni temporali da quella delle direzioni spaziali. Rammento che l'intervallo $ds = \sqrt{|g_{ik}\, du^i du^k|}$ fra due avvenimenti (u^i), $(u^i + du^i)$ infinitamente vicini, se essi stanno in una direzione temporale è l'intervallo di tempo fra di essi per un osservatore che assista ad entrambi; se essi stanno in una direzione spaziale è la loro distanza nello spazio per un osservatore pel quale

---

trò darne qualche cenno.

essi siano contemporanei.

I coefficienti g_{ik} si dicono i potenziali gravitazionali: in quanto essi possono assumersi per rappresentare, in relazione al presupposto sistema di riferimento, il campo gravitazionale, e d'altra parte le forze del campo si esprimono mediante i simboli di CHRISTOFFEL relativi a g_{ik}, cioè mediante le derivate prime delle g_{ik}. "Così, secondo la teoria generale della relatività, la gravitazione occupa un posto essenziale rispetto alle altre forze, particolarmente rispetto a quelle elettromagnetiche; poichè le 10 funzioni (g_{ik}) che rappresentano il campo gravitazionale allo stesso tempo definiscono le proprietà metriche dello spazio (G_4) (EINSTEIN, 1916 (*)).

In assenza di materia (ed energia), e allora soltanto riesce possibile, con scelta conveniente del riferimento in G_4 ridurre le g_{ik} a costanti e cioè G_4 allo spazio, pseudo-euclideo di MINKOSKI, della relatività speciale. In generale questo non è possibile, in conseguenza dell'esistenza di una curvatura, che fisicamente manifesta l'esistenza di materia.

Le leggi generali della natura (secondo il principio della relatività generale di EINSTEIN) debbono venir espresse mediante equazioni di carattere invariante rispetto a ciascuna trasformazione delle coordinate curvilinee in G_4. La legge fondamentale viene espressa mediante le equazioni gravitazionali

$$G_{ik} + \varkappa T_{ik} = 0, \tag{25.2}$$

ove G_{ik} è il "tensore di Einstein"

$$G_{ik} = K_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} K, \tag{25.3}$$

posto

$$K_{ik} \equiv K_{ijk}^{\cdots j}, \qquad K = K_{ik} g^{ik}, \tag{25.4}$$

$$K_{jik}^{\cdots l} = \partial_i \left\{ {l \atop kj} \right\} - \partial_j \left\{ {l \atop ki} \right\} + \left\{ {h \atop kj} \right\} \left\{ {l \atop hi} \right\} - \left\{ {h \atop ki} \right\} \left\{ {l \atop hj} \right\}; \tag{25.5}$$

(*) Darò nelle annotazioni (n.30) qualche indicazione bibliografica. (La frase riportata sopra è in 173).

i simboli di CHRISTOFFEL riferendosi a g_{ik} ; e T_{ik} è il tensore energetico, tensore simmetrico (come G_{ik}), che caratterizza lo stato di tensione, la quantità di moto, l'energia fisica del campo che si considera (gravità esclusa). Infine $\varkappa$ è una costante , legata alla scelta delle unità di misura. Le (25.2) possono riguardarsi come equazioni a derivate parziali del 2° ordine nelle g_{ik} : servono quindi a determinare, in un conveniente intorno di un punto (cioè: di un avvenimento) P in G_4, la natura metrica dello spazio, che comprende anche il campo di gravitazione, quando vi si conosca la determinazione del tensore energetico, che in certo modo caratterizza l'insieme delle circostanze fisiche che si presentano in quel campo di G_4 . Rammento ancora che si ha, come conseguenza immediata delle identità di BIANCHI (3.33) pel tensore di curvatura $K_{jik}^{\cdot\cdot\cdot l}$,

$$\nabla_l G^{il} = 0 , \qquad (\text{cioè: } g^{ik} g^{lh} \nabla_l G_{kh} = 0); \tag{25.6}$$

queste e le (25.2) dànno le equazioni di conservazione

$$\nabla_l T^{il} = 0 . \tag{25.7}$$

Il tensore energetico T_{ik} può scindersi in due addendi: il tensore energetico materiale M_{ik} e quello elettromagnetico E_{ik}:

$$T_{ik} = M_{ik} + E_{ik} . \tag{25.8}$$

Nei riguardi di E_{ik} rammenterò ancora che esso è legato (secondo EINSTEIN) al tensore emisimmetrico F_{ik} , che rappresenta il campo elettromagnetico

$$F_{ik} = \partial_k \Phi_i - \partial_i \Phi_k , \tag{25.9}$$

(rotore del vettore Φ_k che rappresenta il potenziale elettromagnetico: conglobando il potenziale scalare del campo elettrico e il potenziale vettore del campo magnetico) dalla formula seguente:

$$E_{ik} = -F_{il} F^{hl} g_{hk} + \frac{1}{4} F_{hl} F^{hl} g_{ik} \tag{25.10}$$

(sempre inteso che l'innalzamento e abbassamento degli indici si faccia mediante g^{ik} e g_{ik} :ad es.

$$F^{hl} = g^{hk} g^{li} F_{ki} \quad). \tag{25.11}$$

Le componenti di F_{ik} sono legate fra loro e al vettore di corrente J^k (che riassume la densità di carica e la densità di corrente) dalle equazioni di MAXWELL:

$$\nabla_{[i} F_{hl]} = 0 \text{ , cioè } \nabla_i F_{hl} + \nabla_h F_{li} + \nabla_l F_{ih} = 0 \tag{25.12}$$

(ove la derivazione covariante ∇_i, che intendiamo qui fatta coi simboli di CHRISTOFFEL relativi a g_{ik}, può anche sostituirsi con la derivazione ordinaria) e

$$\nabla_l F^{hl} = J^h . \tag{25.13}$$

Conseguenza evidente di questa è la seguente:

$$\nabla_h \nabla_l F^{hl} = \nabla_h J^h = 0 , \tag{25.14}$$

esprimente, analogamente alle (25.7) , il principio di conservazione dell' elettricità.

Rammenterò infine che le equazioni gravitazionali (25.2) di EINSTEIN possono anche ottenersi a partire da un principio variazionale (principio di HAMILTON generalizzato): annullando cioè la variazione prima dell'integrale, esteso a una regione τ di G_4, di una "funzione universale " $W(u^i; g_{ik}, \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}, \ldots)$ opportunamente presa. Precisamente inteso che la variazione $\delta \int W d\tau$, ove $d\tau = \sqrt{-g}\, du^1 du^2 du^3 du^4$ è l'elemento di volume 4-dimensionale in G_4, sia calcolata in relazione a variazioni arbitrarie delle g_{ik} nei punti interni a τ , le quali però si annullino nel contorno σ di τ , si hanno le equazioni (25.2) relative al caso dello spazio vuoto di materia (ed energia) ponendo

$$W = K ; \tag{25.15}$$

e si hanno anche (secondo il PALATINI) le (25.2) relati-

ve al caso generale ponendo

$$W = K + \varkappa g^{ik} T_{ik} \; ; \tag{25.16}$$

ma questo se si accetta l'ipotesi restrittiva che le componenti $\mathcal{T}_{ik} = \sqrt{-g}\, T_{ik}$ della densità del tensore energetico non abbiano variazione in conseguenza a variazioni arbitrarie delle g_{ik}.

Appare evidente, in questa teoria di EINSTEIN, la dissimetria con cui vi figurano i due campi di forze fondamentali: gravitazionale ed elettromagnetico. Il primo determina addirittura, secondo EINSTEIN, la forma dello spazio-tempo e in questa forma si manifesta: mentre il secondo viene considerato soltanto come energia, o se si vuole come materia che mediante la sua ripartizione nello spazio e nel tempo dà luogo al campo gravitazionale.

Il WEYL ha emesso (1918) questa ipotesi: che come nella G_4 spazio tenporale il campo gravitazionale si manifesta nell' esistenza di una curvatura, cioè nella non-integrabilità del trasporto delle direzioni secondo LEVI-CIVITA, così il campo elettromagnetico potrebbe manifestarsi in una non-integrabilità del trasporto delle lunghezze.

E' precisamente quanto vi presenta nella teoria delle connessioni metriche (di WEYL: sensa torsione).

Rammento che una connessione metrica di WEYL è definita da un tensore fondamentale, che indicheremo sempre con g_{ik}, e da un vettore fondamentale Φ_i, cioè da due forme differenziali, l'una quadratica e l'altra lineare:

$$F = g_{ik}\, du^i du^k, \quad \omega = \Phi_i\, du^i. \tag{25.17}$$

Ecco il significato geometrico: mediante g_{ik} si ottengono in ciascun punto della varietà (qui naturalmente il numero delle dimensioni potrebbe essere qualunque) le lunghezze $l = \sqrt{g_{ik}\xi^i \xi^k}$ dei vettori relativamente a una presupposta distribuzione di unità di misura locali. Nel passaggio, secondo la legge di equipollenza della connessione, da un punto $P(u^i)$ a un punto infinitamente vicino $^*P\,(u^i + du^i)$, le lunghezze si alterano in un rapporto che dipende dalle u^i e anche dalle du^i, cioè

dalla direzione P^*P : il coefficiente di dilatazione $\frac{d\ell}{\ell}$ è dato da

$$\frac{d\ell}{\ell} = -\frac{1}{2}\Phi_i\, du^i . \tag{25.17}$$

S'intende che si parla qui di "dilatazione" in un senso relativo: relativamente alle unità di lunghezza locali prescelte. Se cambiamo in modo arbitrario tali unità: cioè mutiamo g_{ik} in

$$\bar{g}_{ik} = \varrho(u^1 \dots u^n)\, g_{ik} , \tag{25.18}$$

corrispondentemente anche il coefficiente di dilatazione si altera : Φ_i si muta in

$$\hat{\Phi}_i = \Phi_i - \partial_i \log \varrho . \tag{25.19}$$

Ma i parametri della connessione, che (in forza dell'ipotesi ulteriore che fa il WEYL: dell'assenza di torsione) sono

$$\Gamma^i_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\} + \frac{1}{2}\left(\delta^i_j \Phi_k + \delta^i_k \Phi_j - g^{il} g_{jk} \Phi_l\right) , \tag{25.20}$$

non dipendono dalla scelta delle unità locali: cioè sono invarianti per le (25.18) e (25.19).

Per trasporto ciclico lungo un parallelogrammo infinitesimo costruito come al n.17, si ha fra lunghezza iniziale e finale di un vettore trasportato un divario $\mathcal{D}\ell$ tale che

$$2\frac{\mathcal{D}\ell}{\ell} = F_{ik}\, d_1u^i d_2u^k = \left(\partial_k \Phi_i - \partial_i \Phi_k\right) d_1u^i d_2u^k \tag{25.22}$$

(ved.le (25.9)). Dunque soltanto se il "tensore di curvatura segmentaria" (secondo WEYL)

$$F_{ik} = \partial_k \Phi_i - \partial_i \Phi_k \tag{25.23}$$

si annulla il trasporto delle lunghezze sarà integrabile, e sarà possibile una tale scelta delle unità lo-

cali di lunghezza che la presupposta legge di trasporto dei vettori ne conservi le lunghezze. La connessione allora diventa euclidea, e anzi, non avendo torsione, riemanniana. Quando il tensore F_{ik} non s'annulla esso darà in certo modo una misura dello scostarsi della supposta connessione metrica dalla connessione euclidea.

Rammento ancora che invece, in uno spazio a connessione metrica o anche affine qualunque Γ^{i}_{jk}, detto $\Gamma^{\cdots k}_{jih}$ il tensore di curvatura, la non-integrabilità del trasporto delle direzioni può esprimersi mediante quest'altro tensore:

$$L^{\cdots k}_{jih} = \Gamma^{\cdots k}_{jih} - \frac{1}{n}\delta^{k}_{h}\Gamma^{\cdots l}_{jil} ; \tag{25.24}$$

il cui eventuale annullarsi è appunto la condizione perchè sia integrabile il trasporto delle lunghezze. La (25.24) è del tutto analoga alla (17.40), e questa analogia non è senza una evidente ragione d'essere: la traslazione proiettiva dei punti degli spazi tangenti nella interpretazione (n+1)-dimensionale (n.21) è proprio un trasporto delle direzioni dei vettori.

Se la connessione Γ^{i}_{jk} è metrica secondo WEYL, il suo tensore di curvatura $\Gamma^{\cdots k}_{jih}$ si può esprimere per $L^{\cdots k}_{jih}$ ed F_{ji}; e infatti si ha

$$\Gamma^{\cdots l}_{jil} = \frac{n}{2}\left(\partial_i \Phi_j - \partial_j \Phi_i\right) = \frac{n}{2} F_{ji} \tag{25.25}$$

onde

$$\Gamma^{\cdots k}_{jih} = L^{\cdots k}_{jih} + \frac{1}{2}\delta^{k}_{h} F_{ji} . \tag{25.26}$$

Al posto del teorema di RICCI

$$\nabla_h g_{ik} = 0 , \tag{25.27}$$

che è caratteristico delle connessioni euclidee, per le connessioni metriche si ha

$$\nabla_h g_{ik} + \Phi_h g_{ik} = 0 , \tag{25.28}$$

e questa condizione (cioè : l'esistenza di tensori g_{ik}

e Φ_i che vi soddisfino) caratterizza le connessioni metriche fra le connessioni euclidee. (Se non si aggiunge la condizione che il tensore di torsione $S_{jk}^{\cdots i} = \Gamma_{(jk)}^{i}$ si annulli si hanno le connessioni metriche più generali di CARTAN).

Ciò premesso: il WEYL identifica (1918) lo spazio-tempo G_4 con uno spazio a connessione metrica (senza torsione): e assume, quali tensori del potenziale gravitazionale e di quello elettromagnetico, appunto g_{ik} e Φ_i. Che quest'ultimo risulti determinato, secondo la (25.20) solo a meno di un gradiente additivo, è d'accordo con la natura fisica del vettore potenziale. Assunta, quale funzione universale,

$$(25.29) \qquad W = \Gamma_{jih}^{\cdots l}\,\Gamma_{\cdots l}^{jih} = L_{jih}^{\cdots l}\,L_{\cdots l}^{jih} + F_{ji}F^{ji}$$

(ove l'abbassamento e innalzamento degli indizi s'intende sempre fatto mediante g_{ik} e g^{ik}) il WEYL ne ricava le equazioni fondamentali (o "equazioni del campo", Feldgleichungen) da sostituire a quelle gravitazionali (25.2) di EINSTEIN, col solito processo variazionale. In prima approssimazione si riottengono così le equazioni (25.13) di MAXWELL (quelle del 1° gruppo (25.12) valgono senz'altro in conseguenza delle (25.23) e la legge di gravitazione di NEWTON che è appunto prima approssimazione di quella di EINSTEIN. Ma non risultano, come sarebbe desiderabile, senz'altro le equazioni gravitazionali di EINSTEIN in assenza del campo elettromagnetico: e del resto le equazioni fondamentali di questa teoria del WEYL risultano molto complesse. Presto a tale teoria hanno fatto seguito altri tentativi; di questi (o meglio, di alcuni più notevoli) darò ora un rapido cenno.

La teoria di EDDINGTON (1921) si basa su una connessione affine (non metrica, in generale) senza torsione. Siano Γ_{jk}^{i} i parametri di questa, sia $\Gamma_{jih}^{\cdots k}$ il tensore di curvatura; posto al solito

$$(25.30) \qquad \Gamma_{ih} = \Gamma_{jih}^{\cdots j}$$

indi

$$(25.31)\qquad \gamma_{ik} = \lambda g_{ik} = \Gamma_{(ik)} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ik} + \Gamma_{ki}\right),$$

$$(25.32)\qquad F_{ik} = \Gamma_{[ik]} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ik} - \Gamma_{ki}\right) = \frac{1}{2}\Gamma_{\cdots ikl}^{\cdots l}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\partial_k \Gamma_{li}^{l} - \partial_i \Gamma_{lk}^{l}\right)$$

secondo EDDINGTON si assumono le g_{ik} (supposto $|g_{ik}| \neq 0$ e λ essendo una costante, introdotta per conservare la libertà nella scelta dell'unità di lunghezza) quali potenziali gravitazionali, ed F_{ik}, che è il rotore di un vettore, quale tensore del campo elettromagnetico (*).

EINSTEIN nel 1923 si è proposto in un primo tempo di completare e perfezionare la teoria di EDDIGTON introducendovi un principio variazionale mediante il quale si possano ricavare (con l'integrazione delle corrispondenti equazioni delle estremali) le funzioni Γ_{jk}^{i}, che nella teoria di EDDINGTON sono affatto arbitrarie. (O meglio, s'intende: si tratterà di esprimere 36 di queste 40 funzioni, in quanto il riferimento curvilineo deve restare arbitrario). Precisamente EINSTEIN assegna come valore della funzione universale W (Cfr. con le (25.15) e (25.29), o meglio, della corrispondente densità scalare

$$(25.33)\qquad \mathcal{W} = \sqrt{-g}\, W,$$

pel principio di HAMILTON generalizzato, l'espressione seguente:

$$(25.34)\qquad \mathcal{W} = 2\sqrt{-|\Gamma_{ik}|}$$

(le Γ_{ik} essendo date dalle (25.30). Al solito si deve intendere che la variazione $\delta \int \mathcal{W}\, du^1 du^2 du^3 du^4$ vada presa per arbitrarie variazioni delle Γ_{jk}^{i} nel campo τ di G_4 cui è esteso l'integrale: nulle al contorno di τ).

(*) La veduta che ha guidato EDDIGTON è così da lui stesso illustrata (1922); nella teoria di WEYL il sistema delle unità locali è un'entità in parte fisica, in parte convenzionale in quanto il W. suppone di poter confrontare in

./.

In un secondo tempo EINSTEIN ha esposto (1923) una teoria che si riconnette ancora a quella di EDDINGTON ma se ne discosta d'altra parte abbastanza profondamente in quanto si basa proprio su un principio variazionale

$$\delta \int W \, du^1 du^2 du^3 du^4 = 0, \tag{25.35}$$

ove W è una funzione, dapprima non determinata, di due tensori γ_{ik} (simmetrico) ed F_{ik} (emisimmetrico), legati a una presupposta connessione affine Γ^i_{jk} dalle (25.31) e (25.32). Posto

$$g^{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ik}}, \quad f^{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial W}{\partial F_{ik}} \tag{25.36}$$

indi

$$g_{ik} g^{ik} = \delta^k_k, \quad f_{jk} = g_{ij} g_{kk} f^{ik}, \tag{25.37}$$

$$J^k = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_k \left(\sqrt{-g} f^{kk} \right), \quad J_k = g_{kk} J^k \tag{25.38}$$

EINSTEIN interpreta g_{ik}, f_{jk}, J^k (rispettivamente) come tensori del campo gravitazionale e di quello elettromagnetico, e come vettore di corrente, e mostra che si può scegliere W sì da rendere

$$\gamma_{ik} = -\beta E_{ik}, \quad F_{ik} = -\frac{1}{6} \left| \partial_h J_i - \partial_i J_h \right| = -\beta f_{ik}, \tag{25.39}$$

ove β è una costante ed E_{ik} è dato dalla (25.10): ove però sia posto f_{ik} al luogo di F_{ik}. Le (25.39) sono le equazioni del campo in questa teoria; le prime di esse si presentano come corrispondenti alle equazioni

---

un punto di G_n le lunghezze nelle diverse direzioni, con processi fisici; e pensa invece di non poter confrontare a priori (senza una legge di trasporto che in generale non è integrabile) le lunghezze in punti diversi. EDDINGTON in un primo tempo considera la lunghezza come un invariante del tutto convenzionale, misurata quindi mediante un tensore g_{ik} a priori indipendente dalla connessione affine Γ^i_{jk}; in un secondo tempo pone le (25.31) come il procedimento più semplice per fare di quella lunghezza convenzionale una entità fisica.

di EINSTEIN (25.2), è relativo al caso di uno spazio vuoto di materia, ma ove si presenti insieme al campo gravitazionale anche un campo elettromagnetico.

I parametri Γ^i_{jk} della connessione affine si esprimono così per le g_{ik} e le J_k:

$$\Gamma^i_{hk} = \left\{ {i \atop hk} \right\} + \frac{1}{6}\left(\delta^i_h J_k + \delta^i_k J_h\right) - \frac{1}{2} g_{hk} J^i \quad (25.40)$$

cosicchè la teoria può considerarsi in sostanza basata sui due tensori g_{ik} ed f_{ik}. Essa presenta questo inconveniente non lieve: il campo elettromagnetico secondo le seconde equazioni (25.39) non può esistere dove si annulli il vettore di corrente J_k.

SCHOUTEN ha cercato (1923) di modificare la teoria di EINSTEIN in modo da evitare questa difficoltà: a tale scopo è partito, anzichè da una connessione affine simmetrica, da una emisimmetrica; tale cioè che il suo tensore di torsione $S^{\cdot\cdot k}_{ij}$ non sia nullo, ma abbia la forma

$$S^{\cdot\cdot k}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta^k_i J_j - \delta^k_j J_i\right). \quad (25.41)$$

Non entro in particolari a proposito di questa teoria di SCHOUTEN: noterò soltanto che appunto il vettore covariante J_i viene interpretato come vettore del potenziale elettromagnetico; e che il tensore del campo elettromagnetico viene espresso quale una combinazione lineare del rotore di questo vettore e del rotore del vettore di corrente J_i.

Nel 1925 EINSTEIN ha esposto un secondo tentativo di teoria unitaria: basato questa volta su una connessione affine asimmetrica L^i_{jk} e su di una densità tensionale (di peso 1) $\mathcal{G}^{ik}$ anch'essa non simmetrica. Mediante il tensore di curvatura contratto $L_{ik} = L^{\cdot\cdot j}_{ji\,k}$ relativo a quella connessione, e il tensore relativo $\mathcal{G}^{ik}$, EINSTEIN forma la densità scalare

$$W = \mathcal{G}^{ik} L_{ik} \quad (25.42)$$

e ne ricava col solito processo variazionale (per variazioni delle $\mathcal{G}^{ik}$ ed L^i_{jk} nulle al contorno) le "equazioni del campo". Queste danno luogo, quando $\mathcal{G}^{ik}$ sia

simmetrico alle equazioni gravitazionali di EINSTEIN per lo spazio vuoto, e in caso contrario dànno, ma in prima approssimazione, anche le equazioni di MAXWELL.

Di questa teoria si sono occupati anche (1925-26) EISENHART e J.M.THOMAS. Assai maggiore interessamento ha suscitato la teoria unitaria che EINSTEIN ha iniziato nel 1928: basata su una connessione euclidea integrabile, cioè ad equipollenza assoluta (*): ma dotata di torsione. Il modo più generale di costruire una tale connessione (in una X_n) è questo: assegnati n campi di vettori indipendenti X_a^i, ($a, b, c, d, e = 1,2,\ldots n$) si pone pel vettore ξ^i da trasportare la condizione che esso mantenga costanti le sue componenti ξ^a, tali che

$$\xi^i = \xi^a X_a^i \,, \tag{25.43}$$

rispetto alle n-uple locali X_a^i. I parametri di questa connessione sono (cfr. con le (19.61)):

$$\Gamma_{jh}^i = \partial_h X_k^a \cdot X_a^i \,, \tag{25.44}$$

ove abbiamo indicato con X_k^a gli elementi reciproci delle X_a^k in $|X_a^k|$. Tale connessione è effettivamente euclidea rispetto alla metrica che ha quale tensore fondamentale

$$g_{ik} = X_i^a X_k^a \,; \tag{25.45}$$

(ove è sottintesa la somma rispetto ad a): metrica caratterizzata dal fatto che rispetto ad essa, in ciascun punto della X_n, i vettori dell'n-upla X_a^i che ne escono sono unitari e ortogonali.

La legge di trasporto di questa connessione era già stata osservata da CARTAN (1923) e da VITALI (1924), e la derivazione covariante che vi corrisponde, già nel 1921 da R.WEITZENBÖCK. Della teoria unitaria che vi è basata, oggetto di parecchie ricerche e di successivi

---

(*) Più comunemente si parla di parallelismo assoluto, riferendosi però al trasporto dei vettori e non solo delle loro direzioni. In quanto si tratta di connessione euclidea, in sostanza fa lo stesso: perchè il trasporto dei vettori ne conserva i moduli.

perfezionamenti di EINSTEIN medesimo (sino al 1931), di LEVI-CIVITA, di CARTAN, di T.Y.THOMAS e di altri , dirò soltanto che vi s'identificano le g_{ih}, date dalle (25.45) coi potenziali gravitazionali, e

$$\Phi_i = S_{ij}^{\cdot\cdot j} \tag{23.46}$$

col vettore del potenziale elettromagnetico. (Questo viene determinato dalla connessione: non solo a meno di un gradiente additivo, come apparrebbe più naturale (*)). Le equazioni del campo sono ottenute con processo abbastanza complicato, e richiede non brevi sviluppi lo stabilirne la compatibilità.

Alla teoria di EINSTEIN ora detta (del 1938) si connette la teoria esposta nel 1932 da P.STRANEO: il quale l'anno precedente aveva anche abbozzato un'altra teoria basata su una connessione euclidea emisimmetrica.

Vi è ancora da dire di un intero gruppo di teorie unitarie lasciate da parte sinora, benchè in ordine di tempo solo in parte posteriori a quelle ora accennate. Sono le teorie che si ricollegano alla "relatività 5-dimensionale" di TH.KALUZA; al loro gruppo appartengono le teorie di VEBLEN (e di SCHOUTEN) della "relatività proiettiva", di cui diremo per ultimo, ai nn. seguenti.

Il KALUZA, nel 1921, ha avuto questa idea: che a una teoria geometrica, che renda conto anche dei fenomeni elettromagnetici, si possa pervenire restando nel campo della geometria riemanniana ma "chiamando in aiuto una quinta dimensione" per lo spazio-tempo.

Più precisamente il KALUZA pensa lo spazio tempo come una varietà a 4 dimensioni entro uno spazio riemanniano a cinque dimensioni (V_5).

Intenderemo che G_4 in V_5, ove le u^λ ($\lambda, \mu, \nu = 0,1,\ldots 4$) sono coordinate curvilinee, sia rappresentato dall'equazione $u^0 = 0$. Per rispecchiare nella formulazione analitica il

---

(*) Ho occasionalmente notato (1929) che basterebbe supporre i vettori X_a^i dati a meno d'un comune fattore perchè Φ_i risultasse invece dato a meno di un gradiente additivo; e la connessione Γ_{jh}^i a meno d'una trasformazione che ne conserva il parallelismo.

fatto che "non osserviamo altre variazioni che spazio-temporali" delle grandezze fisiche, il KALUZA pone la condizione che gli enti che le rappresentano abbiano sempre nulle le loro derivate rispetto alla quinta coordinata x^0: è questa che egli dice "condizione cilindrica" (ZYLINDERBEDINGUNG).

Inteso che gli indici λ, μ, ν prendano i valori 0,1, ...,4, nell'ipotesi ora precisata i simboli di CHRISTOFFEL $[\lambda, \mu, \nu]$ (di prima specie) di V_5, relativi al suo tensore metrico fondamentale $\gamma_{\lambda\mu}$, posto (detta α una costante):

$$(25.47) \qquad \gamma_{0i} = 2\alpha \Phi_i \,, \quad \gamma_{00} = 2g_0 \,, \quad \gamma_{ik} = g_{ik}$$

si riducono ai simboli di CHRISTOFFEL per g_{ik} ($i,k = 1,2,3,4$) e inoltre a

$$(25.48) \qquad [0i,j] = -\alpha F_{ij} = -\alpha\left(\partial_j \Phi_i - \partial_i \Phi_j\right),$$

$$(25.49) \qquad \begin{cases} [ij,0] = \alpha \Sigma_{ij} = \alpha\left(\partial_j \Phi_i + \partial_i \Phi_j\right), \\ [00,i] = -[0i,0] = -\partial_i g_0 \,, \quad [00,0] = 0. \end{cases}$$

Di qui facilmente si ricava (cfr. n. seg., form. (26.28) e seg.) l'espressione del tensore di curvatura $H_{\lambda\mu\nu}^{\ \ \ \tau}$ di V_5 (cioè: relativo alla metrica determinata da $\gamma_{\lambda\mu}$), e quindi del tensore contratto $H_{\mu\nu} = H_{\lambda\mu\nu}^{\ \ \ \ \tau}$, per le g_{ik}, Φ_i, g_0 (e loro derivate) ed α. KALUZA interpreta le g_{ik} e Φ_i quale tensore del potenziale gravitazionale e vettore del potenziale elettromagnetico: e le equazioni

$$(25.50) \qquad H_{\mu\nu} = 0$$

quali equazioni del campo (nel vuoto). In prima approssimazione (intese che le g_{ik} si scostino infinitamente poco dai coefficienti $-\delta_{ik}$ di un ds^2 euclideo) tali equazioni, in cui figurano soltanto g_{ik} ed F_{ik}, danno le equazioni di EINSTEIN e di MAXWELL, e anche un'altra equazione pel coefficiente ancora indeterminato g_0.

E mentre nella relatività generale di EINSTEIN le geodetiche di G_4 vengono interpretate quali linee orarie

dei moti spontanei di un punto materiale, nella teoria di KALUZA le geodetiche di V_5 dànno, quali proiezioni secondo la linea u° sulla ipersuperficie $u^\circ=0$ che rappresenta G_4 (*), le linee interpretabili quali linee orarie delle particelle elettrizzate: l'interpretazione è resa possibile dalla presenza della costante α, disponendo della quale si hanno sulla G_4 per ogni punto e in ogni direzione ∞^1 linee e non una sola (Cfr. n.19).

La teoria di KALUZA come già accennavo ha dato origine a un esteso gruppo di ricerche, in direzione svariata. Da O.KLEIN (1926) e poi indipendentemente anche da EINSTEIN (1927) è stato osservato come una modificazione conveniente di quella teoria dà il modo di ottenere equazioni generali del campo che esattamente e non solo quali approssimazioni contengono le equazioni gravitazionali di EINSTEIN e le equazioni di MAXWELL.

Precisamente: EINSTEIN osserva anzitutto che la "condizione cilindrica" di KALUZA

$$\frac{\partial \gamma_{\lambda\mu}}{\partial u^\circ} = 0, \tag{25.51}$$

è invariante per le trasformazioni sulle u^λ del tipo

$$u^i = u^i(u', \ldots, u^{n'}); \quad u^\circ = u^{\circ\prime} + \psi(u', \ldots, u^{n'}); \tag{25.52}$$

per le quali sono invarianti anche γ_{oo} e il tensore

$$g_{\lambda\mu} = \gamma_{\lambda\mu} - \gamma_{\lambda o}\gamma_{\mu o}. \tag{25.53}$$

Il che in particolare dà che le (25.52) sono tutte e sole le trasformazioni sulle u^λ per le quali sono invarianti le (25.51) e l'ulteriore condizione

$$\gamma_{oo} = 1. \tag{25.54}$$

(*) Intendo: luogo delle intersezioni con la $u^\circ=0$ delle linee u° uscenti dai punti delle linee (geodetiche) considerate. Veramente KALUZA ottiene questa proprietà solo "in seconda approssimazione" (ved. 63, p. 970): ma essa sussiste esattamente (EINSTEIN, 1927).

EINSTEIN anzichè γ_{ij} interpreta g_{ij} come tensore del potenziale gravitazionale, e $\Phi_i = \gamma_{oi}$ come vettore del potenziale elettromagnetico : per le (25.52) si ha

$$(25.55) \qquad \Phi_{i'} = \Phi_i \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} + \frac{\partial \psi}{\partial u^{i'}}$$

e dunque per un cambiamento della sola u^0 cioè della ipersuperficie $u^0 = 0$, che è in sostanza una ipersuperficie qualunque (non luogo di linee u^0) in V_5 (cfr.n.21), Φ_i varia proprio per un gradiente additivo.

Ciò premesso: proprio lo stesso processo variazionale che in G_4 dà le equazioni gravitazionali (25.2) (per $T_{ik} = 0$:spazio vuoto) applicato in V_5 (col sostituire a g_{ik} , $\gamma_{\lambda\mu}$; e scambiare analogamente i relativi tensori di curvatura, ecc.) dà un unico gruppo di equazioni che conglobano quelle gravitazionali (25.2) ed elettromagnetiche (25.13) (pel caso $J^h = 0$): e le contengono esattamente.

Secondo questa formulazione la teoria di KALUZA si identifica quasi, da un punto di vista formale, con quella proiettiva di VEBLEN (1930) di cui si dirà al n.27.

Accennerò prima ad altre teorie che, se in ordine di tempo posteriori a quella di VEBLEN, restano però ancora nel campo della teoria delle connessioni metriche o anzi riemanniane.

La teoria di KALUZA formalmente offriva una risoluzione per molti riguardi soddisfacente del problema dei campi fisici. Ma presentava il grosso inconveniente del far ricorso a una quinta dimensione, che fisicamente non appare in alcun modo interpretabile .Da EINSTEIN e MAYER (1931) e poi da VRANCEANU (1935) in due modi sostanzialmente diversi, ma che offrono una parziale analogia di sviluppi, si è cercato di togliere almeno in parte l'inconveniente. EINSTEIN e MAYER non ricorrono a una V_5 ambiente: ma pensano associato a ciascun punto dello spazio-tempo G_4 (considerato quale uno spazio riemanniano a ds^2 indefinito, come nella relatività generale) uno spazio euclideo locale R_5 :sul quale (o meglio: su un iperpiano χ del quale , che gli AA. chiamano "ausgezeichnete Ebene") viene rappresentato, con una affinità $\gamma^{\lambda}_{\cdot i}$, lo spazio tangente locale R_4 .

VRANCEANU invece pensa che gli spazi locali debbano essere a quattro dimensioni (il che dall'esperienza appare risultare in modo più diretto che la dimensionalità globale 4 per lo spazio-tempo): ma ritiene che tali spazi locali possano riguardarsi come gli spazi tangenti a una varietà anolonoma X_5^4 in ambiente a cinque dimensioni. (Invece l'ente considerato da EINSTEIN e MAYER è quella che può dirsi una varietà anolonoma - in un senso generalizzato - o spazio di König $X_4^{(5)}$ (*)).

Veniamo ad alcuni particolari delle due teorie: cominciando da quella di EINSTEIN e MAYER . Siano u^i coordinate curvilinee in G_4, x^λ coordinate cartesiane negli R_5 locali. Mediante il tensore $\gamma^\lambda_{\cdot i}$ si rappresenta, secondo la formula $\xi^\lambda = \gamma^\lambda_{\cdot i}\,\xi^i$, ogni vettore controvariante ξ^i dell' R_4 tangente (nel punto P generico) a G_4 con un vettore ξ^λ dell' R_5, giacente in un determinato iperpiano χ, di equazione $\chi_\lambda x^\lambda = 0$, ove χ_λ è determinato a meno d'un fattore dalle condizioni $\chi_\lambda \gamma^\lambda_{\cdot i} = 0$. Viene poi assegnato, in modo arbitrario purchè non giacente nell'iperpiano χ, in ciascun punto entro l' R_5 locale un vettore non nullo A^λ. La metrica euclidea negli R_5 locali viene determinata mediante le condizioni: che la rappresentazione detta sopra, dei vettori dell' R_4 tangente con quelli di χ, conservi lunghezze e angoli; ed A^λ risulti unitario e ortogonale a χ. Le componenti controvarianti del tensore metrico fondamentale di R_5 risultano $g^{\lambda\mu} = g^{ij}\gamma^\lambda_{\cdot i}\gamma^\mu_{\cdot j} + A^\lambda A^\mu$, ove g^{ij} sono quelle del tensore metrico le di G_4 (e quindi, in P, dell' R_4 ivi tangente).

L'uso dei due tensori metrici $g_{\lambda\mu}, g_{ij}$ permette di abbassare e alzare indici di entrambe le serie $\lambda\mu\nu\varrho\ldots$ $\ldots ijhk$ nei tensori, ad es. di costruire $\gamma^i_\lambda = g_{\lambda\mu} g^{ij} \gamma^\mu_{\cdot j}$, che dà luogo mediante la formula $\xi^i = \gamma^{\cdot i}_\lambda \xi^\lambda$ alla rappresentazione di un qualunque vettore di R_5 sull' R_4 tangente a G_4. Naturalmente risulta $\gamma^{\cdot i}_\lambda A^\lambda = 0$; per conseguenza lo stesso vettore di R_4 rappresenta infiniti

(*) Con $X_n^{(m)}$ intendiamo designare l'ente costituito da una X_n ai cui punti siano associati spazi locali (affini) ad m dimensioni (E_m) uscenti da essi. Campo di vettori (ad es. controvarianti) della $X_n^{(m)}$ è la totalità delle determinazioni di un vettore dell' E_m locale, funzione del punto variabile nella X_n. In particolare se $m \leq n$ e gli E_m locali giacciono negli spazi E_n (rispettivamente) tangenti alla X_n la $X_n^{(m)}$ è una vera e propria varie_

vettori di $\mathcal{R}_5$, tutti contenuti in uno stesso piano con A^λ.

Costruita la metrica locale a 5 dimensioni viene definita la connessione per la varietà $X_4^{(5)}$ (che in quanto dotata di questa metrica designeremo ora con $V_4^{(5)}$): quale legge di rappresentazione fra le totalità di vettori degli $\mathcal{R}_5$ associati a punti infinitamente vicini di G_4, mediante queste condizioni: 1) che il trasporto conservi lunghezze ed angoli, cioè la connessione sia euclidea ($\mathcal{D}_i g_{\lambda\mu} = 0$); 2) che quando un vettore ξ^i di V_4 varia secondo la legge di parallelismo (di LEVI-CIVITA) di V_4 il differenziale assoluto in $V_4^{(5)}$ del corrispondente vettore $\xi^\lambda = \gamma^\lambda_{.i}\xi^i$ di X abbia costantemente la direzione di A^λ (il che dà $\mathcal{D}_k \gamma^\lambda_{.h} = A^\lambda F_{hk}$, ove F_{hk} è un tensore); 3) che quando più in particolare ξ^i si trasporta pel parallelismo relativo a G_4 lungo la propria direzione, anche $\xi^\lambda = \gamma^\lambda_{.i}\xi^i$ si trasporti pel parallelismo relativo a V_4 (il che porta che F_{hk} deve essere emisimmetrico). Queste condizioni effettivamente determinano, in funzione delle g_{ik}, $\gamma^\lambda_{.i}$, A^λ i parametri della connessione: si trova

$$(25.56)\qquad \Gamma^\lambda_{\mu k} = \left\{ {i \atop hk} \right\} \gamma^\lambda_{.h}\gamma^{.i}_{\mu} + \gamma^{.i}_{\mu}\left(F_{ik}A^\lambda - \partial_h \gamma^\lambda_{.i}\right) + A_\mu\left(F_{kh}g^{hi}\gamma^\lambda_{.i} - \frac{\partial A^\lambda}{\partial u^k}\right).$$

Questi parametri $\Gamma^\lambda_{\mu k}$ insieme ai simboli di CHRISTOFFEL $\left\{ {i \atop hk} \right\}$ per g_{ik} danno la derivazione covariante pei tensori a indici delle due serie $\lambda\mu\nu\ldots$ ed $i\,h\,k\ldots$.

Per la $V_4^{(5)}$ (o meglio per G_4, ma in relazione alla $V_4^{(5)}$) viene introdotta da EINSTEIN e MAYER una nozione di linee geodetiche (*); linee costruite nel modo seguente: una di esse si determina prendendo ad arbitrio in un punto iniziale della V_4 un vettore a^k dell'$\mathcal{R}_5$ associato, e trasportandolo pel parallelismo relativo a $V_4^{(5)}$ lungo la direzione del vettore $a^i = \frac{du^i}{dt} = \gamma^i_\lambda a^\lambda$, ad esso corrispondente nell'$\mathcal{R}_4$ tangente. Queste linee geodetiche sono rappresentate dal sistema

$$(20.57)\qquad \frac{d^2u^k}{dt^2} + \left\{ {k \atop ih} \right\} \frac{du^i}{dt}\cdot\frac{du^h}{dt} = \varrho g^{hk} F_{hi} \frac{du^i}{dt},$$

(*) esattamente la denominazione scelta dagli AA. è questa: " in bezug auf den V_5 geradeste Linien". (Con V_5 essi designano ciò che qui abbiamo denotato con $\mathcal{R}_5$: gli spazi vettoriali euclidei locali).

ove ρ ha il seguente valore:

$$\rho = g_{\lambda\mu}\, a^{\lambda} A^{\mu} \tag{25.58}$$

che risulta <u>costante</u> lungo ciascuna delle linee considerate.

Veniamo all'interpretazione relativistica. Anzitutto g_{ik} ed F_{hz}. forniscono, al solito, i tensori del potenziale gravitazionale e del campo elettromagnetico. Le "geodetiche" (25.57) si interpretano quali linee orarie delle particelle elettrizzate: ρ come rapporto della carica elettrica alla massa della particella.

Introdotto il <u>tensore di curvatura</u> (cfr. con le (23.10))

$$P_{ik\lambda}^{\cdots\mu} = \partial_k \Gamma^{\mu}_{\lambda i} - \partial_i \Gamma^{\mu}_{\lambda k} + \Gamma^{\nu}_{\lambda i}\Gamma^{\mu}_{\nu k} - \Gamma^{\nu}_{\lambda k}\Gamma^{\mu}_{\nu i} \tag{25.59}$$

accanto a $K_{ikh}^{\cdots l}$ (tensore di curvatura di G_4), e posto

$$P = \gamma^{\lambda h} P_{h\lambda} = \gamma^{\lambda h}\gamma_{\mu}^{\cdot i} P_{hi\lambda}^{\cdots\mu} \qquad (\gamma^{\lambda h} = g^{hk}\gamma^{\lambda}_{\cdot k}) \tag{25.60}$$

infine (essendo al solito $K = g^{ih}K_{ih} = g^{ih}K_{lil}^{\cdots l}$)

$$\mathcal{U}_{\lambda h} = P_{\lambda h} - \frac{1}{4}\gamma_{\lambda h}(P+K), \tag{25.61}$$

$$N_{ihk} = \partial_k F_{ih} + \partial_i F_{hk} + \partial_h F_{ki}\ , \tag{25.62}$$

quali equazioni del campo sono poste le seguenti:

$$\mathcal{U}_{h\lambda} = 0\ , \qquad N_{ihk} = 0. \tag{25.63}$$

La prima moltiplicando per $\gamma^{\lambda}_{\cdot i}$ o per A^{λ} e sommando dà, tenute presenti le (25.3) e le (25.10):

$$G_{hi} + E_{hi} = 0\ , \qquad \nabla_k F^{hk} = 0. \tag{25.64}$$

Le seconde equazioni (25.63) e (25.64) sono senz'altro le equazioni di MAXWELL; le prime (25.64) dànno pel caso in cui il tensore d'energia materiale $\mathcal{M}_{ik}$ (ved. le (25.8)) sia nullo, le equazioni gravitazionali (25.2) di EINSTEIN (con un valore particolare per la costante $\varkappa$: il che

può attribuirsi alla scelta delle unità di misura).

Nei riguardi della teoria di VRANCEANU, che è stata anche studiata (e posta in relazione con quella di EINSTEIN e MAYER) da K.YANO (1937), mi limiterò a dire che essa parte dall'osservazione che, Φ_i designando al solito il vettore del potenziale elettromagnetico, l'equazione pfaffiana

$$du^0 - \Phi_i du^i = 0 \tag{25.65}$$

non è (in generale) illimitatamente integrabile. Dunque in uno spazio a 5 dimensioni, ove u^0 e le u^i s'interpretino quali coordinate curvilinee, la (25.65) definisce una ipersuperficie anolonoma, e anzi una V_5^4 (riemanniana) in quanto si faccia dell'ambiente a 5 dimensioni una V_5, attribuendogli quale elemento lineare quello dato da

$$d\sigma^2 = ds^2 + (du^0 - \Phi_i du^i)^2, \tag{25.66}$$

ove $ds^2 = g_{ik} du^i du^k$ è il ds^2 di G_4 : qui interpretabile quale ds^2 della V_4^5 . Su questa le linee geodetiche estremali (minimizzanti la lunghezza d'arco: su una varietà analonoma distinte dalle autoparallele) si possono interpretare quali linee orarie delle particelle elettrizzate.

26. Derivazioni proiettive legate a un campo di quadriche.

Per passare alla teoria del VEBLEN ci conviene fare una breve digressione: per approntare e delimitare in modo preciso gli elementi geometrici su cui essa si basa. La relazione con la teoria del KALUZA traspare subito, ma ce ne occuperemo all'inizio del numero seguente.

Per una X_n , in relazione ad un C-riferimento, sia assegnato un campo di quadriche Q poste negli spazi tangenti nei singoli punti P e non passanti pei rela-

tivi punti P di contatto. Per questo occorre e basta che sia dato un campo di tensori del 2° ordine, covarianti simmetrici, $G_{\lambda\mu}(u^1,\dots,u^n)$ (torniamo qui al simbolismo dei §§ precedenti): tensori geometrici, dati cioè a meno d'un fattore $\neq 0$ comune alle componenti; con la condizione ulteriore che sia

$$G_{oo} \neq 0. \tag{26.1}$$

Posto quindi

$$\gamma_{\lambda\mu} = \frac{G_{\lambda\mu}}{G_{oo}}, \quad \text{onde } \gamma_{oo} = 1, \tag{26.2}$$

potremo rappresentare le quadriche supposte, di equazioni

$$\gamma_{\lambda\mu} x^\lambda x^\mu = 0 \tag{26.3}$$

mediante il tensore normalizzato $\gamma_{\lambda\mu}$.

E' evidente come due altri elementi geometrici fondamentali si colleghino al campo di quadriche: un campo d'iperpiani Σ, polari dei punti P di contatto rispetto alle quadriche Q rispettive: di equazioni

$$\Phi_\lambda x^\lambda = 0, \quad \text{cioè} \quad x^o + \Phi_i x^i = 0, \tag{26.4}$$

ove abbiamo posto

$$\Phi_i = \gamma_{oi} = \gamma_{io}; \tag{26.5}$$

e inoltre, un campo di coni quadrici, i coni C circoscritti dai punti P alle quadriche Q: di equazioni

$$g_{\lambda\mu} x^\lambda x^\mu = 0 \quad \text{o anche} \quad g_{ik} x^i x^k = 0, \tag{26.6}$$

ove abbiamo posto (cfr. con le (25.53) del n.prec.)

$$g_{\lambda\mu} = \gamma_{\lambda\mu} - \gamma_{\lambda o}\gamma_{\mu o} = \gamma_{\lambda\mu} - \Phi_\lambda \Phi_\mu, \tag{26.7}$$

il che dà appunto

(26.8) $$g_{\lambda 0} = g_{0\mu} = 0 ,$$

cosicchè g_{ik} è un tenscre affine. La quadrica Q, di equazione (26.3), nello spazio π tangente in P costituisce l'assoluto di una metrica non-euclidea locale; il cono (26.6) è il cono isotropo, di vertice P, in relazione a tale metrica; ma anche all'altra metrica locale euclidea che ha g_{ik} come tensore fondamentale; la quale ha l'iperpiano τ, polare di P rispetto a Q, come iperpiano improprio e su esso la quadrica $(n-2)$-dimensionale, sezione di esso con Q, quale assoluto.

La quadrica Q medesima, assoluto della metrica non-euclidea, rispetto alla metrica euclidea detta ora è semplicemente l'ipersfera che ha centro in P e raggio i (basterebbe mutare $g_{\lambda\mu}$ in $-g_{\lambda\mu}$ perchè tale raggio risultasse reale ed uguale ad 1).

E' ovvio che il tensore g_{ik} nell'intera X_n darà luogo a una metrica riemanniana che l'ha come tensore fondamentale (ne fa cioè una V_n): inteso, come intenderemo senz'altro, che sia $|g_{ik}| \neq 0$ nei punti che consideriamo.

Le metriche locali, euclidea e non-euclidea, dette sopra, manifestamente coincidono (fra loro e con la metrica riemanniana ora detta) nell'intorno del 1° ordine di ciascun punto P.

E' naturale cercare di costruire una geometria a connessione proiettiva per la X_n, legata al campo di quadriche, e che stia con le metriche non-euclidee locali che tali quadriche determinano in una relazione analoga a quella che passa fra la geometria riemanniana e quella euclidea locale che lo stesso tensore g_{ik} determina entro ciascuno spazio tangente.

Come il trasporto parallelo (secondo LEVI CIVITA) relativo alla connessione della V_n conserva gli angoli e quindi i coni isotropi, così le connessioni proiettive in oggetto dovranno dar luogo a una legge di traslazione proiettiva che conservi il campo di quadriche (26.3). Facilmente si dimostra che condizione necessaria e sufficiente per questo è che sia

(26.9) $$\nabla_\nu g_{\lambda\mu} + Q_\nu g_{\lambda\mu} = 0 ,$$

ove Q_ν è un conveniente vettore proiettivo covariante e la derivazione ∇_ν s'intende fatta coi parametri $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ della supposta connessione proiettiva. (Cfr. con le (25.28): le (26.9) si stabiliscono proprio allo stesso modo).

Per brevità diremo <u>non-euclidee</u>, in relazione al supposto campo di quadriche, tali connessioni proiettive, e anche più in generale <u>tutte le derivazioni proiettive</u>, anche di seconda specie (n.22) per le quali valgano le (26.9).

E' facile determinare la più generale derivazione proiettiva non-euclidea in relazione a un assegnato campo di quadriche (26.3): detto $\mathcal{M}_{\mu\nu}^{\cdots\lambda}$ il relativo <u>tensore di asimmetria</u> (ved. le (19.70)), che resta arbitrario, si ha

$$(26.10)\qquad \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \left\{{\nu \atop \lambda\mu}\right\} - \frac{1}{2}\left(Q_\lambda \delta^\nu_\mu + Q_\mu \delta^\nu_\lambda - g^{\nu\tau} g_{\lambda\mu} Q_\tau\right) + \\ + \mathcal{M}_{\lambda\mu}^{\cdots\nu} - g^{\nu\tau}\left(g_{\lambda\omega}\mathcal{M}_{\tau\mu}^{\cdots\omega} + g_{\mu\omega}\mathcal{M}_{\tau\lambda}^{\cdots\omega}\right),$$

ove le $g^{\nu\tau}$ sono gli elementi reciproci delle $g_{\nu\tau}$ in $|g_{\nu\tau}|$ e i simboli di CHRISTOFFEL sono costruiti pel tensore $g_{\lambda\mu}$ al solito modo (come se esso fosse il tensore fondamentale di una metrica in n+1 dimensioni: cfr. n. prec.).

Nella (26.10) Q_λ è il tensore $\mathcal{M}_{\lambda\mu}^{\cdots\nu}$, emisimmetrico in μ,ν, sono arbitrari. Ma veniamo subito al caso assai particolare considerato dal VEBLEN (1930): esso si ha ponendo

$$(26.11)\qquad Q_\lambda = 0 \quad , \quad \mathcal{M}_{\mu\nu}^{\cdots\lambda} = 0.$$

Vogliamo verificare ora che tale derivazione covariante proiettiva del VEBLEN, di parametri

$$(26.12)\qquad \Pi^{\nu}_{\lambda\mu} = \left\{{\nu \atop \lambda\mu}\right\} = \frac{1}{2} g^{\nu\tau}\left(\partial_\mu g_{\lambda\tau} + \partial_\lambda g_{\mu\tau} - \partial_\tau g_{\lambda\mu}\right),$$

è in generale <u>di seconda specie</u> (n.22). E infatti: premettiamo che, essendo

$$(26.13)\qquad g^{\lambda\tau}\Phi_\tau = g^{\lambda\tau} g_{\tau 0} = \delta^\lambda_0 ,$$

(26.14) $$\gamma^{i\lambda}\gamma_{j\lambda} = \delta^{i}_{j} = \gamma^{i\lambda}(g_{i\lambda} + \Phi_j \Phi_\lambda) = \gamma^{ih} g_{jh} ,$$

ne segue

(26.15) $$\gamma^{ih} = g^{ih} ;$$

indi

(26.16) $$\gamma^{o\lambda}\gamma_{j\lambda} = 0 = \gamma^{o\lambda}(g_{i\lambda} + \Phi_j \Phi_\lambda) = \gamma^{oh} g_{jh} + \Phi_j$$

onde

(26.17) $$\gamma^{oh} = \gamma^{ho} = -\Phi_j g^{jh} ;$$

infine

(26.18) $$\gamma^{o\lambda}\gamma_{o\lambda} = 1 = \gamma^{oo} - g^{ji}\Phi_j \Phi_i ,$$

onde

(26.19) $$\gamma^{oo} = 1 + g^{ij}\Phi_i \Phi_j .$$

Dunque

(26.20) $$\Pi^{\lambda}_{\mu o} = \Pi^{\lambda}_{o\mu} = \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\tau}(\partial_\mu \Phi_\tau - \partial_\tau \Phi_\mu) = \gamma^{\lambda\tau} F_{\tau\mu} = \gamma^{\lambda i} F_{i\mu} ,$$

ove abbiamo posto

(26.21) $$F_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi_\lambda - \partial_\lambda \Phi_\mu) = \delta^{i}_{\lambda}\delta^{h}_{\mu} F_{ih}$$

(in quanto ovviamente $F_{\lambda o} = F_{o\mu} = 0$: cosicchè F_{ih} è tensore affine).

Più in generale abbiamo

(26.22) $$\Pi^{\nu}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\tau}\left[\partial_\mu(g_{\lambda\tau} + \Phi_\lambda\Phi_\tau) + \partial_\lambda(g_{\mu\tau} + \Phi_\mu\Phi_\tau) - \partial_\tau(g_{\lambda\mu} + \Phi_\lambda\Phi_\mu)\right]$$

$$= \frac{1}{2} g^{\nu\tau}\left[\partial_\mu g_{\lambda\tau} + \partial_\lambda g_{\mu\tau} - \partial_\tau g_{\lambda\mu}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{o}\left(\partial_\lambda \Phi_\mu + \partial_\mu \Phi_\lambda\right) + \gamma^{\nu\tau}\left(F_{\tau\mu}\Phi_\lambda + \Phi_{\tau\lambda}\Phi_\mu\right) ,$$

onde, i simboli di CHRISTOFFEL con indici latini riferendosi a g_{ik}:

$$\Pi^{i}_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\} + g^{il}\left(F_{lk}\Phi_j + F_{lj}\Phi_k\right), \tag{26.23}$$

$$\Pi^{\circ}_{jk} = -\Phi_i \left\{ {i \atop jk} \right\} - g^{il}\Phi_i\left(F_{lk}\Phi_j + F_{lj}\Phi_k\right) + \partial_{(j}\Phi_{k)} \tag{26.24}$$

$$= -\Phi_i \Pi^{i}_{jk} + \frac{1}{2}\left(\partial_j \Phi_k + \partial_k \Phi_j\right).$$

Le (26.20) ci hanno mostrato che la derivazione proiettiva $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$, data dalle (26.12) o (26.22), è di seconda specie.

Dal n.22 però sappiamo come a una derivazione proiettiva di seconda specie possa associarsene una di prima specie, e quindi una connessione proiettiva: quando sia assegnato un campo d'iperpiani, e cioè di vettori proiettivi covarianti A_λ, le cui componenti possono intendersi normalizzate con la condizione $A_\circ = 1$.

Le formule che danno tale connessione proiettiva sono le (22.3). Ma nel nostro caso, in quanto è dato il campo di quadriche, (26.3), senz'altro disponiamo appunto anche di un campo di iperpiani: quelli polari dei punti di contatto rispetto alle quadriche del campo supposto, (26.4): rappresentati mediante il campo di vettori proiettivi covarianti $\Phi_\lambda = \gamma_{o\lambda}$, pel quale si ha precisamente $\Phi_\circ = 1$. Dunque, secondo le (22.3), la connessione proiettiva che viene determinata dalla derivazione proiettiva $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ è

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Pi^{\lambda}_{\mu\nu} - \left(\Pi^{\lambda}_{\mu\circ} - \delta^{\lambda}_{\mu}\right)\Phi_\nu. \tag{26.25}$$

Non appare conveniente però, negli sviluppi analitici che ora esporremo (e che servono di base alla teoria della relatività proiettiva) far intervenire tale connessione $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, che del resto da sola non sarebbe sufficiente. Mediante le (26.22) si può esprimere per le g_{ij} e Φ_j il tensore di curvatura

$$N^{\cdots\tau}_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Pi^{\tau}_{\nu\lambda} - \partial_\lambda \Pi^{\tau}_{\nu\mu} + \Pi^{\omega}_{\nu\lambda}\Pi^{\tau}_{\omega\mu} - \Pi^{\omega}_{\nu\mu}\Pi^{\tau}_{\omega\lambda} \tag{26.26}$$

della derivazione $\Pi^{\tau}_{\lambda\mu}$. Le espressioni sono assai com-

plesse, e in realtà non ci occorrono: ci basta pel seguito calcolare il tensore contratto

$$N_{\mu\nu} = N_{\lambda\mu\nu}^{\cdots\lambda} . \tag{26.27}$$

Abbiamo successivamente, con sviluppi faticosi ma ovvi:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu} &= \delta_\nu^j \partial_\mu \left\{ {h \atop hj} \right\} - \partial_h \left(\delta_\mu^l \delta_\nu^j \left\{ {h \atop lj} \right\} + \delta_\mu^l F_{\cdot l}^{h} \Phi_\nu + \delta_\nu^j F_{\cdot j}^{h} \Phi_\mu \right) + \\
&+ \left[\delta_\nu^j \left(\left\{ {k \atop hj} \right\} + F_{\cdot j}^{k} \Phi_k \right) + F_{\cdot h}^{k} \Phi_\nu \right] \cdot \left[\delta_\mu^l \left(\left\{ {h \atop lk} \right\} + F_{\cdot l}^{h} \Phi_k \right) + F_{\cdot k}^{h} \Phi_\mu \right] + \\
&+ \left[\partial_{(h} \Phi_{\nu)} - \Phi_k \left(\delta_\nu^j \left(\left\{ {k \atop hj} \right\} + F_{\cdot j}^{k} \Phi_k \right) + F_{\cdot h}^{k} \Phi_\nu \right) \right] \delta_\mu^l F_{\cdot l}^{h} + \\
&+ \left[\partial_{(k} \Phi_{\mu)} - \Phi_k \left(\delta_\mu^l \left(\left\{ {h \atop lk} \right\} + F_{\cdot l}^{h} \Phi_k \right) + F_{\cdot k}^{h} \Phi_\mu \right) \right] \delta_\nu^j F_{\cdot j}^{k} + \\
&+ \delta_\nu^j \delta_\mu^l F_{\cdot l}^{h} F_{\cdot j}^{k} \Phi_h \Phi_k ,
\end{aligned} \tag{26.28}$$

indi ($\overset{(3)}{\nabla}_k$ riferendosi a g_{ik}: cfr. (24.40) e seg.):

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu} &= \delta_\mu^l \delta_\nu^j K_{lj} - \overset{(3)}{\nabla}_h F_{\cdot l}^{h} \left(\delta_\mu^l \Phi_\nu + \delta_\nu^l \Phi_\mu \right) + \\
&+ 2 F_{\cdot \mu}^{h} F_{h\nu} + F_{\cdot k}^{h} F_{\cdot h}^{k} \Phi_\mu \Phi_\nu ,
\end{aligned} \tag{26.29}$$

ove con $K_{lj} = K_{i\,lj}^{\cdots i}$ abbiamo indicato il tensore di curvatura contratto della metrica riemanniana che ha come tensore metrico fondamentale g_{ik}, e l'innalzamento degli indici (latini) nei tensori affini, come ad es. F_{ik}, s'intende fatto con g^{jl}.

Conseguenze facili delle (26.29) sono le formule seguenti: posto

$$\Pi = \Pi_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \tag{26.30}$$

abbiamo

$$(26.31)\qquad \Pi = K_{lj}\,g^{lj} - \overset{(g)}{\nabla}_h F^h_{.l}\left(\gamma^{l\nu}\Phi_\nu + \gamma^{\mu l}\Phi_\mu\right) + \\ + 2g^{jl}F^h_{.l}F_{hj} + \gamma^{\mu\nu}\Phi_\mu\Phi_\nu F^h_{.k}F^k_{.h}\,,$$

cioè posto $K = K_{lj}\,g^{lj}$, e tenendo presente che

$$\gamma^{l\nu}\Phi_\nu = 0,\quad \gamma^{\mu\nu}\Phi_\mu\Phi_\nu = 1,\quad F^h_{.l}F^{.l}_{h} = -F^h_{.l}F^l_{.h},$$

ricaviamo

$$(26.32)\qquad \Pi = K - F^h_{.k}F^k_{.h}\,;$$

poi, ponendo $\mu=\nu=0$ nelle (26.29),

$$(26.33)\qquad \Pi_{oo} = F^h_{.k}F^k_{.h}\,;$$

infine inteso che per gli indici greci dei tensori proiettivi e misti l'innalzamento s'intenda fatto mediante $\gamma^{\lambda\mu}$, costruiti quindi i tensori proiettivi

$$(26.34)\qquad \Pi^\lambda_{.\mu} = \gamma^{\lambda\nu}\Pi_{\nu\mu}\,,\qquad \Pi^{\lambda\mu} = \gamma^{\lambda\nu}\gamma^{\mu\tau}\Pi_{\nu\tau}\,,$$

avremo i tensori affini

$$(26.35)\qquad \Pi^i_{.o} = \gamma^{i\mu}\Pi_{\mu o} = -\overset{(g)}{\nabla}_h F^{hi} = \overset{(g)}{\nabla}_h F^{ih}$$

e

$$(26.36)\qquad \Pi^{ij} = \gamma^{i\mu}\gamma^{j\nu}\Pi_{\mu\nu} = K^{ij} + 2g^{il}g^{jk}F^h_{.l}F_{hk}$$

cioè

$$(26.37)\qquad \Pi^{ij} = K^{ij} + 2F^{hi}F^{.j}_{h}\,.$$

Sono queste, e precisamente le (26.32), (26.33), (26.35), (26.37), le formule che volevamo stabilire, nei riguardi della derivazione proiettiva $\Pi^\lambda_{\mu\nu} = \left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}$ di VEBLEN legata a un campo di quadriche; ne indicheremo nel n. seg. l'applicazione relativistica, già più volte accennata.

27.- La teoria della relatività proiettiva secondo VEBLEN.

Il confronto di quanto abbiamo esposto al n.prec. e (nei riguardi della teoria di KALUZA) al n.25 conduce in modo naturale all'osservazione da cui è originata la teoria di VEBLEN. Senza bisogno di una quinta dimensione, quei tensori con indici che prendono 5 valori anzichè 4, tensori (come ovviamente basta) pel gruppo di trasformazioni (25.52) che è precisamente quello stesso cui è subordinata una trasformazione del 5-riferimento (ved. p.93, form.(12.8)) possono interpretarsi quali tensori proiettivi di G_4 anzichè tensori affini di V_5 ; la derivazione di Ricci in V_5 in relazione al tensore metrico $\gamma_{\lambda\mu}$ allora s'identifica con la derivazione proiettiva $\pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ di VEBLEN, di cui s'è detto al n.prec. (e in relazione a questa la teoria di KALUZA appare assumere il ruolo di quella "interpretazione (n+1)-dimensionale" di cui s'è detto al n.21).

Lo spazio-tempo G_4 della relatività secondo VEBLEN s'immagina appunto dotato di una derivazione proiettiva ("non euclidea") $\pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ definita in relazione a un campo di quadriche negli spazi tangenti nel modo precisato al n.prec.; e quindi anche come abbiamo visto dotato di una metrica riemanniana di tensore fondamentale g_{ik} dato dalle (26.7) e di una connessione proiettiva $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ data dalle (26.25).

Senz'altro g_{ik} si assumerà quale tensore del potenziale gravitazionale e $\Phi_i = \gamma_{i0}$ quale vettore del potenziale elettromagnetico.

La equazione del campo da VEBLEN sono ottenute (cfr. n.25) mediante la condizione variazionale

$$\delta \int_{\tau} \pi \sqrt{-g}\, du^1 du^2 du^3 du^4 = 0, \tag{27.1}$$

ove π è dato dalla (26.32), e la variazione dell'integrale s'intende calcolata per variazioni delle $\gamma_{\lambda\mu}$ nulle al contorno del campo τ in G_4 .Risultano le equazioni seguenti

$$\Gamma_{\lambda\mu} - \Phi_\lambda \Phi_\mu \Gamma = 0, \tag{27.2}$$

ove si è posto (cfr. con le (25.3))

$$\Gamma_{\lambda\mu} = \Pi_{\lambda\mu} - \frac{1}{2}\gamma_{\lambda\mu}\Pi, \tag{27.3}$$

$$\Gamma = \Gamma_{\lambda\mu}\gamma^{\lambda\mu} = \Pi - \frac{5}{2}\Pi = -\frac{3}{2}\Pi. \tag{27.4}$$

Risulta facile scindere (come dice VEBLEN) le equazioni "proiettive" (27.2) in equazioni "affini", cioè nelle quali figurino tensori affini anzichè proiettivi.

Premettiamo l'osservazione che un tensore proiettivo simmetrico del 2° ordine $T_{\lambda\mu}$ dà luogo, quando sia assegnato il tensore simmetrico $\gamma_{\lambda\mu}$ tale che $|\gamma_{\lambda\mu}| \neq 0$, e mediante il suo tensore reciproco $\gamma^{\lambda\mu}$ si innalzino gli indici, ai tre tensori affini (l'ultimo dei quali è uno scalare)

$$T^{ij} = \gamma^{i\lambda}\gamma^{j\mu}T_{\lambda\mu}, \quad T^{i}_{.0} = T^{.i}_{0} = \gamma^{i\lambda}T_{\lambda 0}, \quad T_{00} \tag{27.5}$$

viceversa è facile constatare che, note le componenti $T^{ij}, T^{i}_{.0}, T_{00}$ (e, s'intende, $\gamma_{\lambda\mu}$), si possono ottenerne tutte le $T_{\lambda\mu}$, cioè il tensore $T_{\lambda\mu}$ è determinato.

Nel nostro caso dunque le equazioni (27.2) saranno equivalenti al sistema formato dalle equazioni

$$\gamma^{i\lambda}\gamma^{j\mu}\left(\Gamma_{\lambda\mu} - \Phi_\lambda\Phi_\mu\Gamma\right) = 0, \tag{27.6}$$

$$\gamma^{i\lambda}\left(\Gamma_{\lambda 0} - \Phi_\lambda\Gamma\right) = 0, \tag{27.7}$$

$$\Gamma_{00} - \Gamma = 0. \tag{27.8}$$

Le (27.6) d'altra parte si possono scrivere

$$\gamma^{i\lambda}\gamma^{j\mu}\left(\Pi_{\lambda\mu} - \frac{1}{2}\gamma_{\lambda\mu}\Pi\right) = 0, \tag{27.9}$$

$$\Pi^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}\Pi = 0. \tag{27.10}$$

O infine,

per le (20.32) e (26.37) :

$$K^{ij} + 2F^{hi}F_{h}^{\ j} - \frac{1}{2}g^{ij}K + \frac{1}{2}g^{ij}F_{\cdot k}^{h}F_{\cdot h}^{k} = 0, \tag{27.11}$$

cioè per le (25.3) e (25.10)

$$G^{ij} - 2E^{ij} = 0 , \tag{27.12}$$

ove G_{ij} ed E_{ij} sono il tensore di EINSTEIN e il tensore d'energia del campo elettromagnetico (e G^{ij}, E^{ij} le componenti controvarianti di questi tensori affini, ad es. $G^{ij} = g^{il}g^{jk}G_{lk}$).

Le (27.7) si scrivono

$$\gamma^{il}(\Pi_{\lambda o} + \Phi_{\lambda}\Pi) = 0 \tag{27.13}$$

ossia, per le (26.35),

$$\nabla_{k}F^{ik} = 0 ; \tag{27.14}$$

infine le (27.8) per le (26.33) dànno

$$\Pi_{oo} - \frac{1}{2}\Pi + \frac{3}{2}\Pi = K = 0. \tag{27.15}$$

Ma questa è una conseguenza algebrica della (27.12), ossia (27.11): infatti moltiplicando ambo i membri di quest'ultima per g_{ij} e sommando si ha

$$K + 2F^{hi}F_{hi} - \frac{4}{2}K + 2F_{\cdot k}^{h}F_{\cdot h}^{k} = 0 \tag{27.16}$$

ossia semplificando appunto

$$K = 0. \tag{27.17}$$

Concludendo: le equazioni (27.2) equivalgono al sistema formato dalle (27.12) e (27.14). Ora le (27.12) sono senz'altro, a parte il valore della costante $\varkappa$ che è legata alla scelta delle unità di misura (cfr. con le (25.64), le equazioni gravitazionali (25.2) di EINSTEIN pel caso in cui il tensore energetico T_{ik} si riduca al tensore E_{ik} di energia del campo elettromagnetico (cioè

il tensore $\mathcal{M}_{ik}$ nella (25.8) sia nullo). E le (27.14) sono le equazioni (25.13) di MAXWELL (3° gruppo), pel caso in cui il vettore di corrente J^h sia nullo. Dunque le (27.2) sono effettivamente atte a fornire una formulazione generale delle leggi che governano i campi di forze fondamentali: la quale conglobe le equazioni usuali del campo gravitazionale di quello elettromagnetico.

Quanto abbiamo accennato (al n.25) nei riguardi della teoria di KALUZA (cfr. anche con quelle di EINSTEIN-MAYER e di VRANCEANU ci dà senz'altro quale potrà essere nell'attuale teoria la rappresentazione delle linee orarie delle particelle elettrizzate: esse sono le linee di G_4 tali che le loro tangenti contengano un campo di punti che variano lungo la curva medesima per la legge di traslazione proiettiva legata alla derivazione $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$: linee che SCHOUTEN dice autogeodetiche per la derivazione (o con la sua terminologia, per la connessione) in parola. Più precisamente : VEBLEN pone la condizione che si abbia, lungo ciascuna delle linee in parola:

$$k\frac{du^i}{dt} = X^i = \frac{x^i}{x^0}, \tag{27.18}$$

ove le X^i sono coordinate non omogenee di un conveniente campo di punti degli spazi tangenti che si spostano per traslazione proiettiva lungo la linea medesima; e k s'intende costante. Facilmente si ricava che tali linee si hanno integrando il sistema

$$\frac{d^2u^i}{dt^2} + \left\{ {i \atop j} \right\} \frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt} + \frac{1}{k} F^i_{.j} \frac{du^j}{dt} = 0. \tag{27.19}$$

Basta porvi $\frac{1}{k} = \frac{e}{m}$ (rapporto fra la carica elettrica e la massa) perchè queste diano appunto le linee orarie delle particelle elettrizzate.

28. Cenno sulla teoria generale dei campi secondo SCHOUTEN e VAN DANTZIG.

Nel 1931 SCHOUTEN e v. DANTZIG hanno iniziato l'esposizione di una teoria unitaria dei campi, la quale si basa, come quella di VEBLEN, sulla considerazione

di una derivazione proiettiva collegata a un campo di quadriche.

Tale teoria negli anni successivi ha avuto perfezionamenti ed estensioni ad opera dello SCHOUTEN stesso, di v. DANTZIG e di HAANTJES : un'ampia esposizione della teoria nella sua forma definitiva è stata data da SCHOUTEN nel 1935 (135). Mi limito a un cenno assai sommario, riferendomi appunto a questa più recente formulazione (*). In sostanza, posta la preventiva condizione che la derivazione proiettiva in parola, $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$, debba essere non-euclidea (n.26) in relazione a un campo assegnato (26.3) di quadriche, cioè valgano le (26.9), si tratta anche qui di fare una conveniente scelta del vettore proiettivo covariante Q_λ e del "tensore di asimmetria" $M^{\cdots\nu}_{\lambda\mu}$: questi enti insieme a $\gamma_{\lambda\mu}$ determineranno, secondo le (26.10), la derivazione voluta.

Secondo VEBLEN si pone semplicemente $Q_\lambda = 0$, $M^{\cdots\nu}_{\lambda\mu}$; SCHOUTEN basandosi su condizioni in parte geometriche, in parte fisiche, è condotto anch'egli a porre $Q_\lambda = 0$; e invece, essendo sempre

$$\Phi_\lambda = \gamma_{\lambda 0} \qquad \gamma_{00} = \Phi_0 = 1 \,, \tag{28.1}$$

e posto, ove χ indica una costante reale,

$$q^\lambda = \chi^{-1} \delta^\lambda_0 \,, \quad q_\lambda = -\chi \Phi_\lambda \,, \quad \mathcal{G}_{\lambda\mu} = -\chi^2 \gamma_{\lambda\mu} \,, \tag{28.2}$$

$$q_{\lambda\mu} = \partial_{[\lambda} q_{\mu]} = \chi F_{\lambda\mu} \,, \tag{28.3}$$

egli pone (**)

$$M^{\cdots\nu}_{\lambda\mu} = (q-1)\, q_{\mu\lambda} q^\nu + (q-p)\, q_{[\mu} q_{\lambda]\varepsilon} \mathcal{G}^{\varepsilon\nu} \,, \tag{28.41}$$

(*) In tutti questi lavori, salvo il primo, vengono adottate le coordinate curvilinee omogenee (n.19): ma naturalmente questo modo di esposizione non ha nulla d'essenziale e qui per semplicità non ne faccio uso.

(**) SCHOUTEN veramente scrive $\Pi^{\nu}_{\mu\lambda}$, $S^{\cdots\nu}_{\mu\lambda}$ al luogo di $\Pi^{\nu}_{\lambda\mu}$, $M^{\cdots\nu}_{\lambda\mu}$.

ove $\mathcal{G}^{\tau\nu}$ è l'elemento reciproco di $\mathcal{G}_{\tau\nu}$ in $|\mathcal{G}_{\tau\nu}|$; cioè

$$(28.5)\qquad \Pi^{\nu}_{\lambda\mu} = \left\{{\nu \atop \lambda\mu}\right\} + (q-1)\,q_{\mu\lambda}\,q^{\nu} + (1-p)\,q_{\mu}\,q_{\lambda\tau}\,\mathcal{G}^{\tau\nu} + (1-q)\,q_{\lambda}\,q_{\mu\tau}\,\mathcal{G}^{\tau\nu} ;$$

ove p, q sono altre costanti da scegliere in modo opportuno.

Le condizioni geometriche ulteriori poste da SCHOUTEN pongono una relazione fra la connessione "riemanniana" determinata da $\mathcal{G}_{\lambda\mu}$ e la connessione affine "subordinata" a $\Pi^{\nu}_{\lambda\mu}$ in relazione al campo d'iperpiani q_{λ} (*); quelle fisiche stabiliscono fra l'altro identificazione fra le "autogeodetiche" di $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ e le linee orarie delle particelle elettrizzate; fra certi tensori proiettivi legati a $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ e d'altra parte il vettore d'energia totale, e il tensore del campo elettromagnetico $\mathcal{F}_{\lambda\mu}$. Quest'ultimo a meno di un fattore costante è $q_{\lambda\mu}$: in sostanza come nella teoria di VEBLEN.

Ulteriori condizioni fisiche legano con eguaglianze e disuguaglianze la costante ora detta con p e q, che figurano nella (28.4). Esse esprimono che le equazioni dedotte dalla condizione variazionale

$$(28.6)\qquad \delta \int \mathcal{R}\, du^{1} \dots du^{4} = 0,$$

ove

$$(28.7)\qquad \mathcal{R} = N^{\dots\nu}_{\nu\lambda\mu}\,\mathcal{G}^{\lambda\mu}\sqrt{\mathcal{G}} \qquad \left(\mathcal{G} = |\mathcal{G}_{\lambda\mu}|\right),$$

si riducono alle equazioni gravitazionali (25.2) e di MAXWELL (25.13), nell'ipotesi $\mathcal{M}_{ik} = 0$, $J^{k} = 0$; e d'altra parte, conducono anche all'equazione di MAXWELL completa (col termine di corrente), quando si sostituisca $\mathcal{R}$ con un altro invariante, dedotto dall'equazione di DIRAC: il che non si verifica nella teoria di WEBLEN, corrispondente a $p = 1$, $q = 1$.

In conclusione la teoria di SCHOUTEN è formalmente più complessa di quella di VEBLEN; ma appare forse più completa la sua rispondenza alla realtà fisica.

(*) Si badi che qui si tratta di una derivazione proiettiva di seconda specie, e non di una connessione proiettiva. Ma il fatto formale espresso dalle (15.31) si mantiene inalterato. Va notato anche che gli enti introdotti da SCHOUTEN si legano ma non identificano con quelli della presente trattazione ora ricordati.

§. 7.- BIBLIOGRAFIA E ANNOTAZIONI

29.- Secondo elenco bibliografico.

Dò ora un elenco di opere che si riferiscono agli argomenti trattati o accennati nella Parte II (o eventualmente anche nella Parte I) di queste Lezioni (*):a completamento del primo elenco già dato (pp.79 - 85; nn 1-61).

1919 - 62 - R.KÖNIG. Beiträge zu einer allgemeinen linearen Mannigfaltigkeitslehre."Jahresberich d.Deutsch. Mathem. Vereinigung" 28,1919, 213 - 228.

1921 - 63 TH.KALUZA : Zum Unitätsproblem der Physik "Sitzungsber.d.Preuss. Akad.d. Wissenschaften", Berlin, 1921, LIV, 966 - 972.

1922 - 64 É.CARTAN: Sur les espaces généralisés et la théorie de la relativité ,"Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences", Paris, 174,1922, 734-737.

1924 - 65 O VEBLEN, T.Y THOMAS: Extensions of relative tensors."Transactions of the Amer. Mathem. Society" 26, 1924, 373-377.

" - 66 É.CARTAN: Sur la connexion projective des surfaces."Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences" ,Paris ,178,1924, 750-752.

1924 - 67 É.CARTAN: Les récentes généralisations de la notion d'espace."Bulletin des Sciences Mathém." 48, 1924, 294-320.

(*) Svariati lavori concernenti anche la materia della II Parte sono già stati compresi nel primo elenco: non vengono qui ripetuti.

1924 - 68 - J.A.SCHOUTEN: Sur les connexions conformes et projectives de M.Cartan/."Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences,"Paris, 178,1924, 2044-2046) /et la connexion linéaire générale de M. König

" 69 - J.A.SCHOUTEN : On the place of conformal and projective geometry in the theory of linear displacements."Proceedings, Kon. Akademie van Wetenschappen", Amsterdam, 27,1924,407-42

" 70 - V.HLAVATÝ: Sur le déplacement linéaire du point ". Vestník Král. České Společ.Nauk" Praga, 2,1924, 8 p.

" 71 - R.WEITZENBÖCK : Ueber projektieve Differentialinvarianten, "Proceedings , Kon. Akad. van Wetenschappen", Amsterdam, 27,1924, 734-741 (I) e 921 - 929 (II); 28,1925, 214-218 (III), 220-230(IV) e 390 - 395 (V), 35,1932, 458-461 (VI) e 462-468 (VII).

1925 - 72 - É.CARTAN : La théorie des groupes et les recherches récéntes de géometrie différentielle. "L"Enseignement Mathém."24,1925, 5-18; trad. spagn. in "Revista Mater. Hispano-Americana" 1927, 1-13; "Proceedings int. mathem. Congress",Toronto,1,1928, 85-94.

" 73 - É.CARTAN : Les groupes d'holonomie des espaces généralisés,"Acta Mathematica" 48,1925, 1-42.

" 74 - J.A.SCHOUTEN: Projective and conformal invariants of half-symmetrical connections. "Proceedings ,Kon. Akad. van Wetenschappen" Amsterdam ,28,1925,334-336.

" 75 - T.Y.THOMAS: On the equiprojective geometry of paths."Procedings Nation. Acad. of the U.S.A." 11,1925,592-594.

1925 - 76 . O.VEBLEN: Remarks on the foundations of geometry."Bulletin Amer. Mathem. Society 31, 1925,121-141.

1926 - 77 . J.A.SCHOUTEN: Erlanger Programm und Uebertragungslehre: neue Gesichtspunkte zur Grundlegung der Geometrie."Rendiconti Circolo Matem. Palermo" 50,1926, 142-169.

" 78 J.A. SCHOUTEN: Ueber die Projektivkrümmung und Konformkrümmung halbsymmetrischer Uebertragungen." In memoriam N.I.Lobatschewskij" Kazan, 1926,2,90-98.

" 79 J.M.THOMAS: Asymmetric displacement of a vector."Transactions Amer.Mathem. Society 28,1926, 658-670.

" 80 G.FUBINI,E. ČECH: Geometria Proiettiva Differenziale (2 volumi).Bologna, Zanichelli, 1926-1927.

1927 81 A.EINSTEIN: Zu Kaluzas Theorie des Zusammenhanges von Gravitation und Elektrizität. "Sitzungsber. Preuss. Akad.der Wissenschaften" Berlin,1927 ,VI,23-25(I) e 26-30 (II).

1927 82 É.CARTAN: Rapport sur le Mémoire de J.A. Schouten intitulé: "Erlanger Programm und Uebertragungslehre. Neue Gesichtspunkte zur Grundlegung der Geometrie." "Bulletin Soc. Phys. Mathem. Kazan" 2,1927, 71-76.

" 83 É.CARTAN: La Géometrie des groupes de transformations."Journal de Mathématiques" 6,1927, 1-119.

" 84 É.CARTAN: La théorie des groupes et la géometrie. "L'Enseign. Mathém. " 26,1927, 200-225.

1927 - 85 V. HLAVATÝ: Théorie des densités dans le déplacement général. "Annali di Matem." (4)5, 1927-28, 73-83.

1928 - 86 O.VEBLEN : Differential Invariants and Geometry."Atti Congr. Intern. dei Matematici", Bologna 1928; I (1929), 181-189.

1929 - 87 J.A. SCHOUTEN, V. HLAVATÝ : Zur Theorie der allgemeinen linearen Uebertragung."Mathem. Zeitschrift " 30,1929, 414-432.

" 88 O.VEBLEN: Generalized projective geometry. "Journal of the London Mathem. Society" 4, 1929, 140-160.

" 89 H.P.ROBERTSON, H.WEYL: On a problem in the theory of groups arising in the foundations of infinitesimal geometry."Bulletin of the Amer. Mathem. Society" 35,1929, 686-690.

" 90 H.WEYL: On the foundations of general infinitesimal geometry. Ibid. 716-725.

" 91 J.H.C.WHITEHEAD: On a class of projectively flat affine connections."Proceedings of the London Mathem. Society " (2) 32,1929,93-114.

" 92 E.ČECH : Projektive Differentialgeometrie der Kurvennetze in der Ebene."Jahresber.d. Deutsch. Mathem. Vereinigung" 39,1930, II Abt. (Angelegenheiten),31-34.

" 93 G.THOMSEN: Topologische Fragen der Differentialgeometrie XVI. Ueber die topologischen Invarianten der Differentialgleichung

$$y'' = f(x,y)y'^3 + g(x,y)y'^2 + h(x,y)y' + k(x,y).$$

"Abhandlungen Mathem. Seminar Hamburg. Universität ", 7,1930, 301-328.

1930 - 94 - O.VEBLEN: A generalization of the quadratic-differential form."The Quarterly Journal of Mathem ",Oxford Series,1,1930,60-76.

" 95 - J.H.C.WHITEHEAD: A method of obtaining normal representations for a projective connection."Proceedings Nation. Acad. of the U.S.A." 16,1930, 754-760.

" 96 J.A.SCHOUTEN, St. GOŁĄB : Ueber projektive Uebertragungen und Ableitungen ."Mathem. Zeitschrift" 32,1930,192-214 (I) e "Annali di Matem".(4) 8,1930-31 ,141-157 (II).

" 97 ST.GOŁĄB : Ueber verallgemeinerte projektive Geometrie."Prace Matematyczno - Fizyczne", Warszawa, 37,1930, 91-153.

" 98 O.VEBLEN. B.HOFFMANN: Projective relativity. "Physical Review "36,1930,810-822.

1931 99 B.HOFFMANN : Projective relativity and the quantum field."Physical Review" 37,1931, 88-89.

" 100 E. BORTOLOTTI : Differential invariants of direction and point displacements "Annals of Mathem." (2)32, 1931, 361-377.

" 101 E.BORTOLOTTI : Forme di Fubini e connessioni proiettive nelle ipersuperficie di S_n. "Rendiconti Semin. Fac. di Scienze", Cagliari, 1,1931, 38-44.

" 102 E.FUBINI , E. ČECH : Introduction à la geometrie projective différentielle des surfaces . Paris, Gauthier-Villars 1931.

" 103 A. EINSTEIN, W.MAYER: Einheitliche Theorie von Gravitation und Elektrizität."Sitzungsber.d. Preuss. Akad.d. Wissenschaften", Berlin,1931,XXV,541-557 (I) e 1932,XII,130-137 (II).

1931 - 104 - J.A.SCHOUTEN,D.van DANTZIG: Ueber eine vierdimensionale Deutung der neuesten Feldtheorie."Proceedings,Kon.Akad.van Wetenschappen" Amsterdam, 34,1931,1393-1407.

" 105 - V.HLAVATÝ: Projektive Invarianten einer Kurvenkongruenz und einer Kurve."Mathem. Zeitschrift",34,1931 ,58-73 .

" 106 - A.D.MICHAL: Projective integral invariants attached to the trajectories of differential systems."Bulletin Amer.Mathem. Society 37,1931,447-454.

1932 - 107 D.VAN DANTZIG : Theorie des projektiven Zusammenhangs n-dimensionaler Räume. "Mathem.Annalen" 106,1932, 400-454.

" 108 D.VAN DANTZIG: Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie. I. Einordnung der Affingeometrie."Proceedings , Kon.Akad. van Wetenschappen", Amsterdam,35,1932,524-534.

" 109 D.VAN DANTZIG : Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie. II. X_{n+1} mit einglie diger Gruppe. Ibid. 535-542.

" 110 J.A.SCHOUTEN ,D.VAN DANTZIG: Zum Unifizierungsproblem der Physik. Skizze einer generellen Feldtheorie (G.F.I.). Ibid. 642-655.

" 111 J.A.SCHOUTEN,D.VAN DANTZIG: Zur generellen Feldtheorie . Diracsche Gleichungen und Hamiltonsche Funktion (G.F.II). Ibid. 844-852.

" 112 J.A.SCHOUTEN, D.VAN DANTZIG : Generelle Feldtheorie (G.F. III)."Zeitschrift fur Physik" 78,1932, 639-667 .

1932 - 113 R.WEITZENBÖCK ; Ueber den Reduktionssatz bei affinem und projektivem Zusammenhang, "Proceedings , Kon. Akad. van Wetenschappen", Amsterdam, 35,1932,1220-1229.

" 114 O VEBLEN ,J.H.C. WHITEHEAD : The foundations of Differentialgeometry ."Cambridge Tracts" 29; Cambridge, at the University Press,1932.

" 115 V.HLAVATÝ ,ST. GOŁĄB : Zur Theorie der Vektor- und Punktkonnexion ."Prace Matematyczne Fiz.", Warszawa, 39,1932,119-130.

" 116 V.HLAVATÝ : Ueber eine Art der Punktkonnexion."Mathem. Zeitschrift " 38,1933, 135-145.

" 117 V. HLAVATÝ: Invariants projectifs d'une hypersurface ."Rendiconti Circ. Matem. Palermo " 57,1933, 402-432.

118 V.HLAVATÝ: Connexion projective et déplacement projectif. " Annali di Matematica" (4) 12,1933 - 34, 217-294.

119 D.VAN DANTZIG : Ueber projektive Differentialgeometrie. "Jahresber .d. Deutsch.Mathem. Vereinigung", 42,1933 ,II Abt.(Angelegenheiten) 25.

120 E.BORTOLOTTI : Connessioni nelle varietà luogo di spazi; applicazione alla geometria metrica differenziale delle congruenze di rette. "Rendiconti Semin. d. Facoltà di Scienze",Cagliari, 3,1933, 81-89.

121 J.A.SCHOUTEN : Zur generellen Feldtheorie; Ableitung des Impulsenergiestromprojektors aus einem Variationsprinzip. (6.F.IV)."Zeitschrift für Physik" 81,1933, 129-138.

1933 - 122 -J.A.SCHOUTEN: Zur generellen Feldtheorie. Raumzeit und Spinraum (G.F.V). Ibid. 405-417.

" 123 J.A.SCHOUTEN , D. VAN DANTZIG : On projective connexions and their application to the general Field-Theory (G.F.VI)."Annals of Mathematics (2) 34,1933,271-312.

" 124 J.A.SCHOUTEN: Zur generellen Feldtheorie. Semivektoren und Spinraum.(G.F.VII)."Zeitschrift für Physik " 84,1933,92-111.

" 125 B.HOFFMANN: Projective relativity and the Einstein-Mayer unified field theory."Physical Review" 43,1933 , 615-619.

" 126 O.VEBLEN : Projektive Relativitätstheorie. "Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete", II,1,1933; V ,73 p.

" 127 O.VEBLEN : Spinors in projective relativity. "Proceedings Nation. Acad. of. the U.S.A." 19,1933, 979-989.

1934-128 - O. VEBLEN ,A.H.TAUB : Projective differentiation of spinors Ibid. 20 ,1934, 85-92.

" 129 A.H.TAUB, O. VEBLEN ,J. VON NEUMANN: The Dirac equation in projective relativity. Ibid. 383-388.

" 130 J.A.SCHOUTEN, J.HAANTJES : Generelle Feldtheorie. VIII. Autogeodätische Linien und Weltlinien."Zeitschrift fur Physik" 89,1934, 357-369.

" 131 D. VAN DANTZIG : On the general projective differential geometry .III.Projective point-field-algebra and -analysis."Proceedings Kon. Akad.van Wetenschappen", Amsterdam, 37,1934 ,150-155.

1934 - 132 J.L. VANDERSLICE: Non-holonomic geometries. "American Journal of Mathem." 56,1934,153-193.

1935 - 133 É.CARTAN: La methode du repère mobile, la theorie des groupes continus et les espaces généralisés."Actualités Scientifiques et Industrielles" 194 (Exposés de Géometrie, V). Paris, Hermann 1935, 66 p.

" 134 E.CARTAN: Le calcul tensoriel projectif."Matematiceskii Sbornik" 42,1935, 131-148.

" 135 J.A.SCHOUTEN: La théorie projective de la relativité."Annales de l'Institut H. Poincaré" 5,1935, 51-88.

" 136 J. A.SCHOUTEN,D.VAN DANTZIG: Was ist Geometrie ? "Abbandlungen Seminar für Vektor- und Tensoranalysis" Moskau,2-3,1935,15-48.

" 137 V.HLAVATÝ : Systeme complet des invarian[illegible] d'une courbe dans un espace projectif courbe. Ibid.119-144.

" 138 V.HLAVATÝ : Espaces abstraits courbes de König. "Rendiconti Circ.Matem.Palermo" 59, 1935, 1-39.

" 139 E.BORTOLOTTI : Lezioni di Geometria Superiore. Firenze 1934 - 35 (litografie)

1936 - 140 E.PICASSO: Connessioni proiettive di specie superiore. "Rendiconti Circolo Matem. Palermo" 60,1936, 1-16.

" 141 J.A.SCHOUTEN,J. HAANTJES: Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie."Compositio Mathematica" 3,1936, 1-51.

" 142 E.BORTOLOTTI,V. HLAVATÝ: Contributi alla teo-

ria delle connessioni. I . Connessioni proiettive: costruzione al finito, classificazione secondo Klein."Annali di Matematica" (4) 15,1936, 1-45,129-154.

1936 - 143 E.BORTOLOTTI- Superficie anolonome complementari."Scritti matematici offerti a L.Berzolari",Pavia Tip. Rossetti, 1936, 553-576.

1937 - 144 É.CARTAN: L'extension du calcul tensoriel aux géometries non-affines "Annals of Mathem." 38,1937, 1-13.

" 145 É. CARTAN : Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective .Paris, Gauthier-Villars 1937; VI e 308 p.

" 146 É.CARTAN : La théorie des groupes finis et continus et la géometrie differentielle Paris, Gauthier - Villars 1937; VI e 269 p.

" 147 M.HACHTROUDI: Les espaces d'éléments à connexion projective normale ."Actualités Scient. et Ind. " 565, Paris, Hermann 1937;, 83 p.

" 148 F.VYČICHLO: Invariants d'un champ tensoriel dans un espace projectif courbe . "Časopis pro pěstování matematiky a fysiky", Praha ,67,1937, 26-61.

" 149 K.YANO: Sur le changement des coefficients d'une connexion projective."Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences" Paris, 205,1937, 637-639.

" 150 K.YANO: Sur les équations des géodésiques dans une varieté à connexion projective. Ibid. 829-831.

" 151 É.CARTAN: Les espaces à connexion projective "Abhandlungen Seminar für Vektor- und Tensoranalysis", Moskau, 4,1937, 147-159.

1937 - 152 - E.PICASSO: Contributo alla geometria differenziale proiettiva delle superficie di S_4. "Atti del 1° Congresso dell'Unione Matematica Italiana", Firenze 1937, 346-349.

" 153 - V.Hlavatý. Faisceaux de Darboux et questions connexes dans l'espace affine courbe."Časopis pro pěstování matematiky a fysiky" 66,1936-37, 229-260.

1938 - 154 V.HLAVATÝ . Hypersurfaces in a projective curved space".Annals of Mathem." 39,1938, 725-761.

" 155 K.YANO: Sur l'espace projectif de M.D. van Dantzig."Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences".Paris ,206,1938,1610-1612.

" 156 K.YANO : The non holonomic representation of projective spaces".Proceedings Physico-Mathem.Society of Japan" (3)20,1938,442-450.

" 157 J.KANITANI: Impressions on a space with projective connection ."Tensor" Sapporo,1,1938, 9-12

" 158 S.SASAKI:On projective and conformal connections. Ibid. 31-35

" 159 E.BORTOLOTTI- Trasformazioni dualistiche e spazi proiettivamente piani." Bollettino Un. Matem. Italiana" (1) 17,1938, 219-223.

" 160 E.BORTOLOTTI : Sulla geometria proiettiva differenziale delle trasformazioni dualistiche."Rendiconti R. Accad. Lincei" (6) 28, 1938, 224-230.

1939 - 161 E.BORTOLOTTI . Geometria proiettiva differenziale dei 3-tessuti di curve spaziali (terne di congruenze). "Bolletino Un. Matem. Italiana " (2) 1,1939, 409-421.

1939- 162 - E.BORTOLOTTI: Contributi alla teoria delle connessioni. II. Connessioni di specie superiore, fondamenti analitici :calcolo del Vitali generalizzato."Memorie R.Ist. Lombardo" 24,1939, 1-39.

" 163- G. VRANCEANU: Gli spazi a connessione proiettiva e loro gruppi di trasformazioni di congruenze."Rendiconti della R.Accad.Lincei" (6) 29, 1939, 553-558.

" 164 - T.Y.THOMAS: Recent trends in geometry."American Mathem. Society Semicentennial Publications ",2,1939, 98-135.

" 165 - J.KANITANI: Les équations fondamentales d'une surface plongée dans un espace à connexion projective."Memoirs of the Ryojun College of Engineering" 12,1939, 61-88.

" 166 - J.KANITANI: Sur les tangentes de Darboux d'une surface plongée dans un espace à connexion projective."Proceedings Physico-Mathem. Society of Japan" (3) 21,1939 , 220-231.

1940 - 167 J.KANITANI : Sur l'arête de Green d'une surface plongée dans un espace à connexion projective . Ibid.(3) 22,1940, 343-358.

" 168 A.MAXIA: Geometria proiettiva differenziale dei complessi anolonomi di rette. "Atti 2° Congresso Un. Mat. Italiana", Bologna 1940, 305-312.

1941 - 169 E.BORTOLOTTI: Varietà a connessione proiettiva e loro immagini tangenziali."Rendiconti R.Accad. d'Italia"(7) 2,1941, 251-267.

" 170 E.BOMPIANI: Geometria degli spazi a connessione affine. I. Spazi affini associati ad un punto e coordinate normali. II:Le esten-

sioni e i tensori normali.(Verrà pubblicato nei Rendiconti R.Accad. d'Italia")

30. Note alla II Parte (*).

(12.a) (p.96)- Le connessioni proiettive particolari di cui s'è detto a pp.92-96 (connessioni che il BOMPIANI propone di chiamare "prospettive") si presentano come la più naturale estensione al campo proiettivo della legge di trasporto parallelo secondo LEVI CIVITA per le varietà in ambiente euclideo. La prima introduzione di queste connessioni prospettive si deve al CARTAN. Ved.66, 1924; ove si considera il caso N = 3, n = 2; come pure nel corso di Lezioni del CARTAN sulle connessioni proiettive, 145, 1937,pp.163-169(e anche in 151 pagg. 148-149).Ma il passaggio al caso generale è ben naturale ed ovvio: ved.37,1927 p.395; e 51, 1932, pp.35-42, onde (per questo§) è ricavata l'attuale trattazione.

(12.b) (pp.98-99) -La determinazione di du° può subordinarsi alla scelta di un campo d'iperpiani (S_{n-1})negli spazi tangenti: tali soltanto che non passino pei rispettivi punti di contatto. Ciò equivale ad assegnare (a meno d'un fattore $\neq 0$ arbitrario)un campo di vettori proiettivi covarianti A_λ ,tali che sia $A_\circ \neq 0$, cosic-

---

(*) Anche qui (cfr.p.85)le singole note portano il numero del testo cui si riferiscono. Ho preferito liberare il testo dai riferimenti alla Bibliografia, che l'avrebbero di troppo appesantito:senza grande utilità per il lettore, che,data la grande disparità dei simboli, della terminologia,e perfino degli algoritmi e delle stesse vedute che stanno a base delle varie trattazioni,non era forse opportuno sviare prematuramente dai procedimenti prescelti.Al necessario collegamento con la precedente letteratura penso possano bastare queste note,insieme a quelle del n.11,pp.85-91.

chè potremo ad esempio supporre $A_0 = -1$. La condizione che sia $A_\lambda du^\lambda = 0$, cioè che le du^λ siano coordinate di un punto posto nell'iperpiano associato al punto che si considera, dà $du^\circ = A_i du^i$.

Questo procedimento è proposto in 51, p.7 (veramente sotto un aspetto meno restrittivo); e adottato in 142 p.15. Qui ho preferito lasciare (almeno in un primo tempo) a du° piena arbitrarietà; mi sembra che ciò risponda meglio alla natura delle cose. Bisogna però sempre aver presente tale arbitrarietà: e quindi non attribuire un significato geometrico agli enti che dipendono dall'espressione assegnata a du°. Una particolare costruzione analitica di du° quale differenziale esatto, e cioè dell' (n+1)mo parametro u°, è data da HLAVATY: 118, p.225, cfr. 117, p.422 e (anche per ulteriori indicazioni) 142, nota a pag.15.

(12.c)(p.100) - La definizione generale di "riferimento" nel senso qui inteso e così pure l'esplicita distinzione dei vari tipi di riferimenti anolonomi (A-, A_0-, B-riferimenti) ed olonomi (C- e D-riferimenti) si trovano nel mio lav. 51, 1932, pp. 6-11; ved. anche 142, pp.5-13. In sostanza già il CARTAN nel lavoro (17, 1924) ove egli introduce la nozione di varietà a connessione proiettiva, fa uso, senza speciali denominazioni, di riferimenti dei tipi qui designati con A ed A_0, B, D. Nei riguardi degli ultimi si tratta più precisamente di quei particolari B- e D-riferimenti che in relazione a un'assegnata connessione proiettiva vengono più innanzi caratterizzati nel testo mediante le (14.14) o (14.21) e le (14.36) o (14.42), cioè-ved. l'Errata-Corrige- $\Gamma^\circ_{ji} = 0$, od $L^\circ_{oi} = 0$.

In lavori posteriori il CARTAN ha detto semi-naturali e-rispettivamente-naturali (per la connessione proiettiva) tali B- o D-riferimenti: ved. 145, pp.177-179; 151, p.154.

I C-riferimenti, o più esattamente le C-trasformazioni, cui essi sono soggetti, sono stati introdotti dal VEBLEN: ved. 88, 1929, pp.145-146: e poi usati in molti lavori, ad es. dallo stesso VEBLEN (94, 98, 126),

di WHITEHEAD (91,95) e miei (100;51,parte II). Ved. anche 49; 164 (T.Y. THOMAS) e cfr. 106 (MICHAL).

La maggior parte degli autori non parla di "riferimenti" ma soltanto dei gruppi di trasformazioni (lineari) che corrispondentemente risultano posti a base della nozione di tensore proiettivo (Ved. ad es. i lavori di SCHOUTEN, GOLAB, van DANTZIG, HLAVATÝ: a parte naturalmente il già cit. lav. 142, redatto da HLAVATÝ e da me in collaborazione ; e anche una interessante esposizione comparativa di HLAVATÝ sulle connessioni proiettive, non ancora pubblicata; della quale l'A. mi ha posto a conoscenza). Questo da un punto di vista analitico può bastare, ma a mio parere non è per nulla sufficiente se si vuole che anche il senso geometrico degli enti trattati sia chiarito.

(12.d) (p.102 e seg.)- I lavori di ČECH e di WHITEHEAD citati nel testo sono : 92,1930 (ved. anche le pp. 153-154 del libro 102 di FUBINI e ČECH) e 91,1929. In realtà in quest'ultimo lavoro la corrispondenza di cui è detto nel testo non figura che in modo implicito; come ad es. appare manifesto se si confronta col mio lav. 52,1931, pp.120 e seg. Già qui ho fatto uso anch'io della parola "polarità", nel senso che nel testo è precisato: l'estensione si presentava naturalmente, ma resta ancora a chiarire fino a qual punto essa fosse giustificata dal permanere di effettive proprietà geometriche.

(13.a) (p.106) - Sulla nozione di spazio proiettivo tangente ved. anzitutto CARTAN, 17, p. 208; ove in realtà l'A. si limita ad "imaginer qu'on a attaché à chaque point de la varieté un espace projectif dont ce point fait partie". Il che a me non sembra un chiarimento sufficiente: io ammetto che siano localizzabili su ciascuno di questi spazi associati o "tangenti", rispetto al riferimento proiettivo ivi dato, le tangenti alle linee della varietà nel punto che si considera : e in particolare le tangenti alle linee coordinate del sistema curvilineo che ne escono. Ved. 49, II, pp. 28-29; 51, p.5 ; 142, p.17; e pp. 354 -373 del

mio corso litografato 139. Si comprende come pel CARTAN, che pensa invece non localizzabili quelle tangenti sullo spazio proiettivo associato (e neppure le suppone esplicitamente appartenenti ad esso) non intervenga nella trattazione quella "omografia di deviazione" di cui qui parlo al n.14. Ved. ancora , a proposito degli spazi tangenti, VEBLEN: 88, 94, e il Cap. V (pp.59 –74) dell'opera 114 di VEBLEN e WHITEHEAD; poi YANO, 58, pp.404 e seg. e WEYL, 90. Il WEYL osserva (pag. 717-718) che secondo le vedute di CARTAN "the tangent plane is not tied up with the manifold; in order to justify this designation and hold to the idea of a tangent plane we must imbed it into the manifold". Egli ritiene ottenuto un tale "imbedment" in quanto perviene a legare a ciascun sistema curvilineo un sistema proiettivo entro ciascuno spazio locale: ma la relativa costruzione, che in modo analitico era stato già data dal CARTAN (si tratta del D-riferimento in cui nel testo è detto a pp.74 e 123), dal WEYL è esposta attraverso a considerazioni che non hanno un significato geometrico chiaro e che, ad ogni modo non sono di carattere proiettivo.

Sulla nozione di spazio tangente vedute assai interessanti sono esposte dal BOMPIANI in un lavoro in corso (170).

(13.b) (p.107) - La definizione del CARTAN riportata nel testo (a parte l'interpretazione delle parole" spazio tangente" di cui ora s'è detto) è quella primitiva (17, pp.207-209). Circa le idee del CARTAN su questo argomento e più in generale sulle connessioni ved. anche : 64, 67, 72, 84, 133 (spec. p.54 e seg.), 145 (p. 169 e seg.), 146 (spec.p. 169 e seg.), 151 (p. 151 e seg.). Nelle esposizioni più recenti sulle connessioni proiettive (145, 151) il CARTAN ha preferito sostituire alla primitiva definizione una di carattere analitico : secondo cui la connessione è definita da una matrice $\|\omega_\mu^\lambda\|$ di forme pfaffiane ($\omega_\mu^\lambda = \Lambda_{\mu i}^\lambda du^i$; ved. p.107 del testo). In realtà il substrato geometrico non manca, in quanto è premessa l'indicazione del procedimento con cui, note le ω_μ^λ, di ciascuna curva della varietà si costruisce l'im-

magine tangenziale sullo spazio tangente in uno dei suoi punti (cfr.p.125 del testo); e si dà poi la legge di trasformazione delle ω_μ^λ, pei cambiamenti del riferimento: cioè, per dirla col CARTAN, la condizione perchè due connessioni ω_μ^λ ed $\omega_{\mu'}^{\lambda'}$ $\frac{s_i}{A}$ equivalgano -(Ved.145,p.172-180)

In certo senso la veduta ora accennata, del CARTAN, si avvicina a quella puramente analitica del VEBLEN, quale è espressa in 40, p.16. Circa le idee del VEBLEN, e più in generale della scuola americana, cfr. anche 76, 86 e 88, 94, 114, 126 : 132 (VANDERSLICE), 55 e 164 (T.Y.THOMAS). Da un punto di vista formale i lavori del VEBLEN e già anche quelli precedenti di T.Y.THOMAS (spec. 30) hanno determinato un sensibile progresso della teoria, portandovi, con l'introduzione dei parametri proiettivi $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ (pag.61 e 119 del testo), la possibilità di una effettiva estensione del calcolo di RICCI. Il ravvicinamento e in certo senso la fusione delle due vedute si compiono nei lavori di SCHOUTEN e della sua scuola, di HLAVATÝ e miei; dopo alcuni primi lavori (68 e 69, 77; cfr. CARTAN, 82) in cui SCHOUTEN costruisce, riattaccandola alle vedute di KÖNIG (62) l'analisi tensoriale che traduce in forme invariante i procedimenti del CARTAN (basandosi quindi sull'uso di parametri misti: ved. p.108 del testo) SCHOUTEN e GOŁĄB hanno dato (96, 1930, e anche 97) la prima esposizione della teoria che, sia pure con una certa pesantezza di sviluppi e di simboli, tratti in modo formalmente adeguato (nei quadri di un calcolo di RICCI opportunamente esteso) la nozione del trasporto proiettivo veduta al modo di CARTAN. Più recentemente van DANTZIG e poi SCHOUTEN ed HAANTJES hanno portato nella teoria, perfezionandone l'aspetto formale (forse a scapito di quello geometrico) le coordinate curvilinee omogenee; di cui nel testo è detto al n 19. (Ved. la nota (19.a) per la bibliografia). Una esposizione interessante delle vedute più recenti di SCHOUTEN è 136. Ai lavori miei (49, 100, 101, 51) e a quelli di HLAVATÝ (spec. 117 e 118) su questo campo si è aggiunto più recentemente il lavoro comune, già altre volte accennato (142), nel quale ci siamo proposti di introdurre le connessioni proiettive con una costruzione geometrica

al finito. Tale costruzione (illustrata da HLAVATÝ anche nel suo lavoro in corso, cit. in (12 .c)) ha il vantaggio di non basarsi nè su considerazioni infinitesimali, nè su una formulazione analitica, che non dice nulla all'intuizione; ma d'altra parte non è univoca. Idee sulle connessioni proiettive sono anche esposte (in lingua giapponese) da J. KANITANI (157) e da S. SASAKI (158).

(13.c) (p.109). I parametri $L^{\lambda}_{\mu i}$ sono costruiti in modo affatto analogo a quelli che, per una connessione affine asimmetrica Γ^{i}_{jk}, da J.M.THOMAS (79, 1926, p. 663) sono indicati appunto con la notazione L^{i}_{jk}; invarianti per le trasformazioni della connessione che conservano il parallelismo:

$$(30.1) \qquad L^{i}_{jk} = \Gamma^{i}_{jk} - \frac{1}{n}\delta^{i}_{j}\Gamma^{l}_{lk} .$$

L'analogia ha un'intima ragione d'essere, che risulta evidente da quanto nel testo è esposto al n.21 a proposito dell'interpretazione (n+1)-dimensionale della connessione proiettiva in X_n; ed è illustrata nel mio lavoro 100, 1931, pp. 367 e 375. Ved. anche, a proposito di L^{i}_{jk}, 48, p.76 e seg.; e nei riguardi di $L^{\lambda}_{\mu i}$, 142, p.31. Cfr. 51, pp.20 e seg.: ivi si fa uso di un sistema di parametri $L^{\lambda}_{\mu\nu} = L^{\lambda}_{\mu i}\delta^{i}_{\nu}$.

(13.d) (p.111). Circa le (13.28) ved. ad es. SCHOUTEN e GOŁĄB, 96, I, p.197; e particolarmente K.YANO, 58, pp. 411-424. Lo YANO svolge un accurato ragguaglio delle teorie di CARTAN (17) di BERWALD (56) e di T.Y.THOMAS (30).

(13.e) Sulla derivazione covariante dei tensori proiettivi eseguita con parametri misti $\Lambda^{\mu}_{\nu i}$ ved. SHOUTEN, 69 e 77; SCHOUTEN e GOŁĄB, 96, I p.205 e GOŁĄB, 97, p.119; 51 e 142. Il CARTAN, che nel primo lavoro (17) usava sistematicamente la teoria delle forme differenziali esteriori, più recentemente ha pure

introdotto una sorta di derivazione covariante, che è fatta con parametri misti o addirittura affini. Ved. 134,1935 , p.139; 144, p.7 ; 145 ,p.211: 151, p.157. Le vedute del CARTAN a questo proposito sono interessanti; se pure appaiono di non agevole applicazione. Premetto che egli dice "tensore", in relazione alle trasformazioni delle coordinate proiettive in S_n , un ente rappresentabile con un certo numero qualunque di componenti H_r, le quali per effetto di una qualunque trasformazione T delle coordinate (*) subiscono una trasformazione pure lineare S i cui coefficienti dipendano solo dai coefficienti di T; con la condizione che al prodotto di due trasformazioni T_1 T_2 corrisponda il prodotto delle trasformazioni S_1 S_2 .D'altra parte: egli dice traslazione, relativa a un riferimento proiettivo R ciascuna omologia speciale che ha l'iperpiano $x^0=0$ del riferimento R quale iperpiano d'omologia.

Ciò posto, inteso che a ciascun punto $P(u^i)$ di S_n sia associato un sistema proiettivo $R(P)$ che ha P come vertice 10....0, per un tensore H_r , nel senso sopra precisato, egli introduce il differenziale assoluto δH_r (**) quale divario fra le componenti $(H_r)'$ ed H_r del supposto tensore: le H_r intendendosi calcolate in P rispetto ad $R(P)$ e le $(H_r)'$ in $P'(u^i+du^i)$ rispetto al riferimento dedotto da $R(P)$ con la traslazione, relativa ad $R(P)$, che porta P in P'.

Ad es. per un vettore affine covariante A_i si ha, secondo il CARTAN :

$$\delta A_i = dA_i - \omega_i^j A_i = dA_i - \Lambda^j_{i\ell} A_i du^\ell , \tag{30.1}$$

(*) la quale non muti origine, cioè il punto 10...0

(**) Mi attengo alla terminologia e al simbolismo del testo. Il CARTAN parla di differenziale covariante e lo indica con DH_r.

ove in realtà le $A^j_{i\ell}$ s'identificano con le $\Gamma^j_{i\ell}$ (ved. la form. (14.17) ,p.118),perchè il CARTAN intende sia reso $\omega^0_0 = 0$.

Fin qui l'ambiente è supposto un S_n proiettivo: se invece si tratta di una varietà P_n a connessione proiettiva, si deve intendere, preventivamente, sostituita in un intorno di P la supposta serie di tensori con la sua immagine tangenziale nello spazio S_n tangente in P (ved. 145,pp. 216-217). Il che , francamente, non appare a priori molto semplice!

Il differenziale assoluto determina la derivata covariante che ad es. per A_i ha le componenti $\nabla_k A_i$ (o secondo CARTAN $A_{i|k}$)tali che

$$\delta A_i = \nabla_k A_i \cdot \omega^k_0 = \nabla_k A_i \cdot \Lambda^k_{oj} \cdot du^j. \qquad (30.2)$$

Per $\Lambda^k_{oj} = \delta^k_j$ (cfr. (14.14) p.118) $\nabla_k A_i$ è il coefficiente di du^k nell'espressione di δA_i .Osserva il CARTAN che la "derivata covariante", così costruita per un tensore, generalmente non è un tensore: ma le sue componenti insieme a quelle del tensore dato costituiscono le componenti di un tensore (si badi bene: nel senso generale da lui inteso). Si vede dunque come , a parte la definizione di portata più generale, si tratta di un ente analogo (e sotto certe condizioni coincidente) con quelle derivate proiettive che nel testo sono definite (al modo di T.Y.THOMAS e VEBLEN) a p.67.

(13.f)(p. 114) - A proposito delle (13.20) e (13.42) rammento le (2.4) di p.12: che definiscono secondo CARTAN la legge di trasporto dei punti in uno spazio a connessione affine. Cfr. anche SCHOUTEN ,77; e HLAVATÝ,70, ove si definisce un trasporto dei punti,che in sostanza dà luogo a una connessione affine con deviazione (ved. n.14 del testo). Altri due lavori di HLAVATÝ e GOŁĄB (115) e di HLAVATÝ (116) studiano, in modo formale, "trasporti dei punti": si tratta però qui di connessioni proiettive anzichè affini.

(13.g) (p.115) - Nel lav.(17) del CARTAN, ove si inizia la teoria degli spazi a connessione proiettiva, se ne svolge anche una generalizzazione che non è stata finora molto studiata: cioè lo studio delle "varietà di elementi" a connessione proiettiva. Più precisamente si tratta di varietà d'elementi lineari (del 1° ordine) nel piano (generalizzazioni ha svolto M.HACHTROUDI: 147,1937). Pensati questi elementi ($x\ y\ y'$) come punti di uno spazio a tre dimensioni, si suppone che questo spazio sia dotato, nel senso ordinario, di una connessione proiettiva: sotto le condizioni che per la relativa legge di trasporto ogni "molteplicità" di elementi secondo S.LIE (Elementverein) si conservi una molteplicità , e anche ciascuna molteplicità-punto (luogo degli elementi uscenti da un punto) si mantenga tale.

Il CARTAN ad es. estende alle varietà d'elementi, a connessione proiettiva, la nozione di geodetiche; di queste curve il BOMPIANI ha dato (36, 1927) una semplice caratterizzazione geometrica.

(14.a) (p.116). La nozione di deviazione di una connessione proiettiva è introdotta nel mio lav. 51(1932) p.16 e seg.; cfr.142 ,p. 29. Il tensore di deviazione (quale è definito a p.117 del testo) equivale sostanzialmente al tensore Q^{ν}_{μ} trovato (per via analitica) da D. von DANTZIG: ved.107,p.418,e p.212, form. (22.2) del testo.

(14.b) (p.119) - A proposito di ϑ-tensori e φ-tensori ved.51 ,p.11; 142,p.13 (ove si parla di tensori proiettivi di tipo II e di tipo I). La distinzione, come è precisata nel testo, solo se ci si valga di un A-riferimento è sostanziale: e ha significato solo per i tensori proiettivi analitici (p.113), non per quelli geometrici (p.112), che hanno nella teoria un interesse preminente. D'altra parte anche tensori "analitici" si presentano effettivamente, ed in modo naturale, ad es. quello di curvatura (nn. 9 e 17).

I parametri normalizzati $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ per la connessione proiettiva sono esplicitamente introdotti in 51, p.20; però già il CARTAN aveva osservato che bastano, a determinare la connessione, le forme $\omega^{\lambda}_{\mu} - \delta^{\lambda}_{\mu}\omega^{\circ}_{\circ}$. Ved. 17, p.211. Nel lav. 100, p.375, guidato dall'interpretazione (n+1)-dimensionale, avevo introdotto un altro sistema di parametri normalizzati: $P^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{2}{n}\delta^{\lambda}_{\mu}\Gamma^{\tau}_{[\nu\tau]}$ costruiti proprio allo stesso modo dei parametri invarianti P^{i}_{jk} che avevo posto a base della teoria invariativa di una connessione affine per le trasformazioni che conservano il parallelismo: ved. 48, pp. 77-78. Cfr. VANDERSLICE, 132, p.184: ove appunto i parametri $P^{\lambda}_{\mu\nu}$ vengono utilizzati.

(14.c) (p.120) - Circa la nozione di grado di un tensore cfr. 142, pp.9-11 e spec. la nota (13) a p.10; e 107 p.451. Ved. anche pp. 184-185 e 213-214 del testo. Che il grado g, quale a p. 120 è definito, non coincida col grado d'omogeneità f nella rappresentazione in coordinate omogenee, ma sia invece $g = -f$, appare nella natura delle cose; ma indubbiamente una sola delle due nozioni in una formulazione definitiva andrà conservata.

(14.d) (p.123) Nei riguardi del D-riferimento legato a una connessione proiettiva e a un sistema curvilineo ved. CARTAN 17, pp.211-213; 145, pp. 177-179, WEYL, 90, p.721, e i miei lavori 49, II, pp.30 e 33 e III, pp. 83-84; 100, pp.375 - 376. In questi ultimi lavori è posta in luce l'identità fra le trasformazioni cui è soggetto il D-riferimento del CARTAN (repère naturel) e quelle ottenute per tutt'altra via (analitica) dal VEBLEN (40 - pp.155-157): di cui ho già accennato nella nota (9.a) a p.90. Ved. anche 51, pp.10, 18-19; e d'altra parte cfr. 30, 31, 44, 55 (T.Y.THOMAS); 41 (ROBERTSON); 89 (ROBERTSON e WEYL); 96 (SCHOUTEN e GOLAB), 97 (GOLAB), infine 118, 137, 154, ove HLAVATÝ pone appunto le D-trasformazioni (intese in un senso un po' esteso, come in 96 e 97) a base di estese ricerche sulle varietà a connessione proiettiva (normale) e sulle varietà, in particolare sulle curve e sulle iper-

superficie che vi sono immerse. Più precisamente: in 118 l'ente preso in considerazione da HLAVATÝ è una varietà a connessione affine (asimmetrica) Γ^i_{jk} data a meno di una trasformazione (cfr. 38, 39)

$$(30.3) \qquad {}^*\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j P_k + \delta^i_k Q_j,$$

ove P_j e Q_j sono vettori covarianti. Il che vuol dire: trasformazione che conserva le geodetiche, e anche il tensore

$$(30.4) \qquad H^{\cdots i}_{jk} = S^{\cdots i}_{jk} + \frac{1}{n-1}\left(\delta^i_j S^{\cdots l}_{kl} - \delta^i_k S^{\cdots l}_{jl}\right),$$

tensore di torsione della connessione $P^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \frac{2}{n-1}\delta^i_j S^{\cdots l}_{kl}$, legata a quella data da una semplice condizione geometrica (ved. 48, pp. 77-79) e cfr. nota (14.b) a pp. 292-293.

(15.a) (p.128). A proposito delle immagini tangenziali delle curve di una P_n su un S_n tangente ved. CARTAN, 145, pp. 171-172; e inoltre 142, p.41; 165, 166, 167 (KANITANI), e la mia nota recente 169.

(15.b) (p.130) - La form. (15.22) è dovuta a HLAVATÝ, che se n'è valso sistematicamente ad es. nel lav. 138 (pp. 11 e seg.) proprio per definire la derivata assoluta.

(15.c) (p.131) - La definizione delle geodetiche, quali linee aventi per immagini tangenziali linee rette, è data dal CARTAN; 17, p. 219. La caratterizzazione data nel testo a p.134 è a p.28 del mio lav. 51. Ved. anche 142, pp. 40-43; 58 (YANO) p.424 e seg.; 150 (YANO), 56 (BERWALD) 57 (HAANHJES). Sulla nozione di geodetiche secondo v. DANTZIG e SCHOUTEN, o "autogeodetiche", di cui nel testo è detto a pp. 194 - 195 (in nota) e 268, 270, ved. (19.d), p.300.

(15.d) (p. 133) Le formule (15.31) e (15.32), (15.33) e (15.34), però limitatamente alle C-trasformazioni, sono

date da WHITEHEAD (91, 1929); già questi ne ha tratto come la scelta del "fattore" u^0 (così egli chiama l' (n+1)mo parametro) associ alla connessione proiettiva una connessione affine e un tensore affine. Ma le (15.38) ,(15.39), e i fatti geometrici che vi si collegano (nel testo esposti a pp. 134-137) sono contenuti nei miei lav. 52 e 51 Ved. anche 143, 159 ,160 ; e cfr. 108; 123 ,p. 286; 132 ,p.193.

(16.a) (p.139) - I lavori di WHITEHEAD e miei citati nel testo sono: 91 e 52,159,160. Anche in 143 la mia costruzione delle connessioni affini proiettivamente piane è esposta e applicata. Applicazioni della connessione proiettiva integrabile dell'S_n sono anche in 161,168.

(16.b) (p.145)- Nei riguardi degli spazi a connessione metrica proiettivamente piani ved. WEYL,9,p.110,112; CARTAN, 28 (cfr.17 , p.227 e 145, p.251 ove si riottiene inquadrandolo nella teoria delle connessioni proiettive il teor. di BELTRAMI ,1) Un'esposizione abbastanza ampia sull'argomento è nel mio lav. 52, spec.pp.122-127. Colgo l'occasione per correggere svariati errori di stampa a p.126 da questo lavoro: nella formula (5.20) l'ultimo termine ($\frac{1}{b} Q_{qs}$) va preceduto dal segno -; tre righe dopo deve leggersi (5.16)..... c^{qt} anzichè (5.17) ... c^{rt}; infine nella (5.22) l'ultimo segno - va mutato in +. Nuovi risultati sugli spazi proiettivamente piani e particolarmente sulle superficie a connessione metrica proiettivamente piana (e anzi sul caso d'eccezione notato dal WEYL, accennato in nota a p. 145: connessioni metriche superficiali proiettivamente piane che non sono ottenibili quali metriche non-euclidee di CAYLEY) ha ottenuto il mio allievo S.GALLICO, che ne farà oggetto di pubblicazione.

(16.c) (p.145) EISENHART ha osservato che gli spazi a connessione affine proiettivamente piana ed equi affi-

ne possono ottenersi come ipersuperficie in ambiente affine in cui la connessione è indotta mediante rette uscenti da un punto prese come pseudonormali. Ved. 29 e 34, pp. 94, 166 e seg.; cfr. 91, p.102 e sg., e 52. E' evidente che deve essere una relazione fra questa proprietà e quanto nel testo è esposto a pp. 102-104.

(17.a) (p.151) - Il tensore $R_{ijk}^{\ \ \ l}$ è introdotto quale tensore di curvatura della connessione proiettiva nel mio lav. 51, p.24 (ove esso è indicato con $L_{ijk}^{\ \ \ l}$). Ved. anche 142, pp. 129-137 . Come ho precisato nel testo, il CARTAN nel suo lav. del 1924 (17) e così pure nei seguenti (134, p.144; 145 , p.218 e seg.) utilizza invece $\Gamma_{ijk}^{\ \ \ l}$ (che egli scrive $R_{kij}^{\ \ \ l}$): il quale secondo le vedute comunemente adottate, cui anche in queste Lezioni mi sono attenuto, non è (generalmente) un tensore: ma è invece tale nel senso più generale inteso dal CARTAN: ved.(13.e), p. 289. Ved. anche YANO, 58, pp. 433 e seg.)

Nella maggior parte dei lavori sulle connessioni proiettive s'intende quale tensore di curvatura, anzichè $R_{ijk}^{\ \ \ l}$, $N_{ijk}^{\ \ \ l}$ o $N_{\tau\omega\mu}^{\ \ \ \lambda} = \delta_\tau^i \delta_\omega^j N_{ijk}^{\ \ \ l}$, dato dalle (19.33) di p.186 (tensore soltanto per le C-trasformazioni); oppure $\Lambda_{ijk}^{\ \ \ l}$, dato dalle (17.19) di p. 149; ved. ad es. 30, p. 731-732 (T.Y.THOMAS); 40, p.163 e 88 , p.156 (VEBLEN), 56, pp.887 e 891 (BERWALD) 69, p.421 e 77, p.155 (SCHOUTEN), 96, I, pp.203-204 (SCHOUTEN e GOLAB). Più recentemente però SCHOUTEN ha adottato anch'egli, quale tensore di curvatura ("Krümmungsprojektor der Punktübertragung) $R_{\omega\tau\mu}^{\ \ \ \lambda}$ (che egli scrive $O_{\tau\omega\mu}^{\ \ \ \lambda}$: ved. 141, 1936, p.26).

(17.b) (p. 152) -Anche la nozione di torsione della connessione proiettiva è introdotta dal CARTAN, 17, p.216 e seg. V. 51, pp.26-28; 142, p.134 -137 ; 141, pp. 27-29.

(17.c) (p.153) -L'interpretazione, accennata nel testo, delle (17.35) dal CARTAN è data nel lav. 17, pp.

217-218.

(17.d) (p.157) - Le identità di BIANCHI per una connessione proiettiva del CARTAN nel lav. 17,p.216 sono espresse mediante le forme ω_μ^λ ed Ω_μ^λ, quale "teorema della conservazione della curvatura"; in forma più vicina a quella data nel testo in 145,p.233 e seg.;ivi ne è data anche una interpretazione geometrica (p.239). Cfr., pel caso di una connessione affine ,18 p.91 (SCHOUTEN); 54,I,p.123 (SCHOUTEN e STRUIK).

(17.e)(p.160) - La proprietà indicata nel testo, quale applicazione delle identità di BIANCHI, è dimostrata dal CARTAN nel lav.17,pp.218-219. Cfr.17,p.225.(La proprietà ivi enunciata , onde risulterebbe una caratterizzazione delle superficie a connessione proiettiva normale, probabilmente non è esatta: il CARTAN non vi è tornato nei lavori successivi. Ma, sempre a proposito del caso di una connessione proiettiva superficiale, pel quale l'omografia determinata dal trasporto ciclico è un'omologia col centro nel punto di contatto, un'altra interpretazione a lui comunicata dal CARTAN è accennata da CHERN in 59,p.171).

(17.f) (p.162). Sulle connessioni proiettive normali, introdotte dal CARTAN in 17,pp 221-226, e da lui estese anche alle varietà d'elementi (ibid.p.232 e seg.;cfr. 147) ved. 69 (SCHOUTEN),p.424; e 96 I,pp.203-205; 51,pp. 31-33; e cfr. 107,p.141 e 141,p.35. Ved. anche CARTAN.83 pp.104-118.Ivi l'A. completa la sua suggestiva "geometria dei gruppi di trasformazioni" associando a un gruppo, insieme alle due connessioni affini senza curvatura e all'altra simmetrica associata ad entrambe, anche una connessione proiettiva normale.

(17.g) (p.163). Il CARTAN ha mostrato come una connessione proiettiva possa ricostruirsi a partire dai valori dati in un punto del torsore di curvatura e torsione, e delle sue successive derivate covarianti: ved. 145,

p.222 e seg.(Non occorre dire che un elemento ulteriore andrebbe aggiunto, non preso in considerazione dal CARTAN : il tensore di deviazione. Ved.(13.a), p. 286). Della costruzione (per via puramente analitica) degli invarianti di una connessione proiettiva normale) R.WEITZENBÖCK si è occupato nel corso di una sua ricerca più generale sugli invarianti proiettivi differenziali (71; VII). Ved. anche 113. Da G.THOMSEN (93), che vi è stato condotto da un problema di topologia differenziale, la ricerca degli invarianti legati a una connessione proiettiva normale su una superficie (cioè, alle sue geodetiche) è stata condotta a fondo, attraverso all'introduzione di una connessione affine invariante (ibid.p.316).

Accennerò ancora a una nozione di notevole importanza, introdotta dal CARTAN, e collegata con quella di curvatura: la nozione di gruppo d'olonomia di una connessione. Esso è (per una connessione proiettiva) il gruppo formato dalle omografie associate a tutti i cicli (finiti) uscenti da un punto assegnato: ved. 73, pp. 1-2 e 37-41; 83, pp.116-118, e spec. 145, pp.278-301, ove, fra l'altro, l'A. svolge un metodo di ricerca degli spazi a connessione proiettiva che ammettono gruppi di olonomia (transitivi) prefissati. Ved. anche 72, 84.

(18.a) (p.164) - Sulle coordinate normali secondo CARTAN ved. 134 (1935), pp.146-147; 145, p.221 e seg; 59. La mia ricostruzione (che viene qui pubblicata) in qualche modo ma indirettamente si connette alla costruzione che dà, utilizzando l'interpretazione (n+1)-dimensionale (n.21), di coordinate normali WHITEHEAD: 50, 1931, spec. pp.336-338. Si vede bene come in realtà, se pure definite in modo profondamente diverso, le coordinate normali del CARTAN non siano differenti da quelle di WHITEHEAD. Questi introduce anche (a differenza del CARTAN) le coordinate normali omogenee (p.169 del testo; cfr. 50 ,p.341).

(18.b) (p.167) - Nei riguardi delle coordinate affini normali ved. 12, 21; 34, pp. 58, 110 e seg.; 18, p. 67 e seg.;

55; 54[I], p.100: e particolarmente il mio lav.61 e la nota 170 del BOMPIANI, ove sull'argomento si espongono vedute geometriche, in parte utilizzate nel testo.

(18.c) (p.177). Il teorema del CARTAN sviluppato (con altro procedimento) nel testo è esposto dal C. con due diverse dimostrazioni) in 145, pp.186-193 e 225-228.

(19.a) (p.179). L'introduzione delle coordinate curvilinee omogenee nello studio delle connessioni proiettive è fatta nel lav. 107 di van DANTZIG. Vedi anche i lav. 108, 109 e 131 dello stesso A., poi il gruppo di lavori sulla "generelle Feldtheorie" di SCHOUTEN, v.DANTZIG ed HAANTJES: 110, 111, 112, 121, 122, 123, 124, 130, 135; in cui la teoria geometrica posta a base, in successive (se pure parziali) esposizioni, riceve vari perfezionamenti e complementi. Ancora: 141 (SCHOUTEN ed HAANTJES); 53, p.41 e seg. (STRUIK); 155 e 58, p.455 e seg. (YANO). La mia esposizione ha, limitatamente alla sua impostazione iniziale qualche elemento a comune con lo studio comparativo che sulle teorie di v.DANTZIG, di CARTAN e T.Y. THOMAS espone HLAVATÝ nel lavoro in corso già altre volte accennato (ved. (12.c) p. 285). Le relazioni con le altre teorie, particolarmente con quella di SCHOUTEN e GOŁĄB (96) sono analizzate anche da v.DANTZIG: 107, pp.443 e seg.

Anche WHITEHEAD (50) usa coordinate omogenee (normali), come ho già accennato (nella nota (18.a) p. 297); vi è stato condotto naturalmente dalla interpretazione in n+1 dimensioni (n.21).

(19.b) (p.190). Nei riguardi dell'indicatore di anolonomia affine ved. 54, I, p.68 e 143, p.572, 61, p.112; per quello proiettivo ved. 141, p.16.

(19.c) (p.192). Sulla connessione affine integrabile, di cui è accennato in nota, sono date nel testo (p.249 e seg.) alcune indicazioni; la bibliografia verrà data nella nota (25.α), pp. 307-308.

(19.d) (pp.194,195) - A proposito delle "geodetiche" secondo v. DANTZIG e SCHOUTEN, di cui è accennato in nota, si veda 108, p.532; 112, p.651, 123 p. 295 ; 130 pp.359-361; 135 ,p.69; 141, pp. 30-33. Tali linee in 108 sono dette pseudogeodetiche, in 130 e 135 autogeodetiche; altrove, semplicemente geodetiche. Cfr.107, pp.431-435.

(19.e) (p. 195) - La denominazione di "tensore di asimmetria"(Asymmetrieprojektor) è data da SCHOUTEN ed HAANTJES: 141, p.19.

(19.f) (p.196). L'interpretazione geometrica dell'indicatore d'anolonomia affine è stata data da me in 143, p. 572; e utilizzata nel lav.61.

(20.a) (p.198) - La costruzione delle "estensioni"(olonome)e dei tensori normali proiettivi (olonomi) è stata data per la prima volta da T.Y.THOMAS (30), con un processo analitico che si basa esclusivamente sulla interpretazione (n+1)-dimensionale: e che allo stesso A non è apparso del tutto soddisfacente, almeno nella sua ultima conseguenza (teor. di p. 731, che caratterizza la varietà "as projective manifold", mediante i tensori proiettivi normali).

Effettivamente l'A. è tornato sull'argomento in un lavoro successivo (31).Ma non mi è ben chiaro come questo valga a completare in modo rigoroso, nei riguardi del "replacement theorem ", la ricerca precedente.

I risultati ad ogni modo appaiono convalidati dagli sviluppi esposti qualche anno dopo da WHITE EAD (50, 1931).

Circa le estensioni e i tensori normali per l varietà a connessione affine rimando ai lav. 61,170 e a quelli precedenti ivi citati (Ved. anche (18.b) pp.297-298).

(21.a) (p.203) - I lavori accennati nel testo sono gli stessi già più volte citati 30 e 31 (T.Y.THOMAS), 40 (WHITEHEAD),97 (GOŁĄB), 107 (v. DANTZIG) e 141 (SCHOUTEN ed HAANTJES).

Sopratuttoilavori di WHITEHEAD e di GOŁĄB portano contributi geometrici: i principali risultati di GOŁĄB sono riassunti in 15. Ved anche 34, p.103; 90 (WEYL); 96 I, .209; 100; 109 (v. DANTZIG); 58,p.449 e seg., 155 e 156 (YANO), 163 (VRANCEANU).

(21.b) (p. 204) - Rammentiamo che,per le varietà a connessione proiettiva, il fattore $\varkappa$ che figura nelle (21 7) non può avere interesse geometrico, giacchè lo si può ad es. conglobare in du° rendendo $\varkappa = 1$ .Dunque non è restrittiva la semplificazione accennata in nota a p. 205: senza di cui riesce alquanto difficile interpretare le (21.12) del 2° gruppo.

(22.a) (p.211) - La distinzione fra derivazioni proiettive di prima e di seconda specie è in 142, p.38; secondo SCHOUTEN invece la derivazione proiettiva più generale è detta"projektiver Zusammenhang"e quella di prima specie viene chiamata"Punktübertragung". Ved.141, pp.19 e 23.

(22.b) (p.213). La nozione di eccesso è introdotta da v. DANTZIG in 107, p.451. Quella di indice dal VEBLEN in 94; p.61.Le relazioni fra queste nozioni e quella di grado (nel senso precisato al n.14,p.120 : ciò che io in un primo tempo,secondo SCHOUTEN e HLAVATÝ, avevo chiamato classe del tensore proiettivo) sono precisate in 107, pp. 451 - 454 e in 51,p. 22 (cfr. p.11); 142, p. 10. Cfr. (14.c),p. 192.

(22.c) (p.214) - Circa la derivazione covariante (22.9) dei tensori d'eccesso $\neq 0$ ved.107, p.420 e 123,p.284.

(23.a) (p.215) L'esposizione contenuta nel testo

(nn.23 e 24) segue in gran parte, salvo qualche semplificazione e alcuni ulteriori sviluppi, quella che avevo dato nella II Parte del lav. 51, 1932, pp.35 e seg. Pel caso generale la teoria è condotta in modo analogo a quello che avevo adottato per la teoria delle varietà subordinate a uno spazio a connessione affine : loc. cit. in (4.a), p.87). Ved. anche le mie Lezioni 139, pp.492-518 e cfr. SCHOUTEN, 18, p.133 e seg.; EISENHART, 34, p.137 e seg.; STRUIK, 53, p.47 e seg.; SCHOUTEN e STRUIK, 54 II, p.79 e seg.. Pel caso di un ambiente a connessione proiettiva ved. HLAVATÝ, 105; 118, p. 257 e seg; 137; v. DANTZIG, 107, p.415; STRUIK, 53, pp.55-56; SCHOUTEN e HAANTJES, 141, pp.37 e segg.; e gli altri lavori di HLAVATÝ, di CARTAN, KANITANI e miei cit. in (24. α), p.303.

(23.b) (p.216). La varietà V_r^{N-n-1} può riguardarsi come uno spazio di KÖNIG (62; cfr. 69 e 77); la connessione G^2_{ji} può pensarsi quale una ordinaria connessione proiettiva per questo spazio, ma è forse più espressivo interpretarla (come nel testo si accenna a pag.217) quale una connessione tangenziale per la X_n. Quest'ultima nozione è introdotta nella mia nota 120 (1933), ed è stata da me applicata allo studio metrico e affine differenziale delle congruenze di rette; ved. anche 162, p.11.

A proposito degli spazi di KÖNIG: colgo l'occasione per citare le ricerche svolte da HLAVATÝ e VYČICHLO sulla geometria proiettiva nella varietà dei tensori di ordine e peso assegnato, dati a meno di un fattore scalare $\neq 0$ in un ambiente a connessione proiettiva (normale). Tale varietà può appunto trattarsi come uno spazio di KÖNIG, e vi viene determinata una connessione proiettiva; ved. 138, 148.

Si presenta come una generalizzazione della teoria degli spazi di KÖNIG, e d'altra parte anche, a un tempo, di quella tratteggiata nel testo al n.23 e nei riguardi algoritmici, del calcolo del VITALI (cfr 162) lo studio delle connessioni proiettive di specie superiore svolto dal mio allievo B. PICASSO (140). Lo stesso Picasso ha svolto ricerche più particolari sulla geometria proiettiva di una X_2 in S_4 mostrando (152)

che su una tale superficie un sistema planare di linee, secondo BOMPIANI, individua una connessione proiettiva che ha le linee del sistema quali geodetiche.

(23.c) (p.219) -Circa il simbolo D usato nelle (23.11) e (23,12) ved.p.12 e 87 del testo, nota (4.a); o anche 162, nota a pp.12-13.-

(24.a) (p.224) - Sulle X_n in S_{n+1}, oltre al mio lavoro (51) onde è tratta nelle linee generali l'esposizione data nel testo, ved. le mie note 49 e 101, il lav. 117 di HLAVATÝ, e d'altra parte le note opere d'insieme di FUBINI e ČECH 80,102.

E' interessante anche consultare la breve nota del CARTAN(66) che segna l'origine dell'ordine di ricerche cui la mia esposizione si ricollega: il CARTAN vi enuncia molti risultati che meriterebbero forse di essere ripresi.

Lo stesso CARTAN nel suo libro recente (145; p. 258 e seg.) ha iniziato(per le superficie in P_3) uno studio delle varietà in ambiente a connessione proiettiva, che poi è stato proseguito da KANITANI (165, 166, 167) e da me (169). Tale studio si basa sostanzialmente sulla considerazione delle immagini tangenziali delle curve della varietà subordinata, sullo spazio tangenziale alla varietà ambiente in uno dei loro punti. Il CARTAN ha esteso, fra l'altro, alle X_2 in P_3 la nozione di linee asintotiche e di direzioni coniugate, poi s'è valso delle quadriche osculatrici per studiare la possibilità di estendere le direzioni di DARBOUX; varie estensioni di queste e di altri elementi dell'usuale geometria delle X_2 in S_3 ha indicato il KANITANI; io ho osservato come (almeno) gli elementi del 4° ordine delle immagini tangenziali delle curve di una X_2 in P_3 uscenti da un punto appartengano a una stessa superficie anolonoma, il che rende ragione a priori di tutti i precedenti risultati.

Un'estesa ricerca sulle X_n e insieme anche le X_{n+1} anolonome in P_{n+1} (154) è stata svolta da HLAVATÝ nell'ordine d'idee di una sua precedente sulle X_n ed X_{n+1} in A_{n+1} a connessione affine; l'A. raggiunge, con mezzi analitici, svariati enti e risultati geometrici, ad es. direzioni, correlazioni e polarità invarianti. Citerò ancora, a proposito delle ipersuperficie X_n in P_{n+1}, SCHOUTEN ed HAANTJES: 141, p. 42 e seg.

(25,a) (p.238) - Credo opportuno qui aggiungere ai due precedenti elenchi bibliografici un terzo elenco, comprendente opere significative o comunque di utile consultazione, riguardanti la relatività e particolarmente le teorie unitarie, di cui al testo è detto al n.25. Si tratta di lavori che non hanno a che fare in realtà con le connessioni proiettive; e per questo non erano stati compresi nei precedenti elenchi.

TERZO ELENCO BIBLIOGRAFICO

a) Relatività generale.(*)

171 - A.EINSTEIN, M.GROSSMANN: Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation. "Zeitschrift f.Math.und Physik", 62, 1913, 225-261.

172 - A.EINSTEIN : Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. "Sitzungsber.Preuss. Akad." 1914, 41, 1030-1085.

173 - A.EINSTEIN : Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie". Annalen der Physik" 49, 1916.

174 - A.EINSTEIN: Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie. "Sitzungsber. Preuss.Akad." 1916, 42, 1111-1116.

175 - A.EINSTEIN : Kosmologische Betrachtungen zur allge-

(*) Non dò, naturalmente, che una piccola parte della vastissima bibliografia.

meinen Relativitätstheorie. Ibid.1917, 142-152.

176 - A. EINSTEIN:Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie."Annalen der Physik", 55,1918,241.

177 - A.PALATINI:Deduzione invariativa delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton."Rend. Circolo Matem. Palermo" 43,1919, 203-212.

178 - R.MARCOLONGO: Relatività. Messina,Principato 1923.

b) Teoria unitaria di WEYL.

179 - H.WEYL : Gravitation und Elektrizität."Sitzungsber. Preuss. Akad." 1918, 465-480.

180 - H.WEYL : Reine Infinitesimalgeometrie."Mathem. Zeitschrift" 2,1918, 384-411.

181 - H.WEYL : Raum, Zeit, Materie. Berlin, Springer 1918.

182 - M.PAULI : Zur Theorie der Gravitation und der Elektrizität von H.WEYL,"Physik. Zeitschrift "20, 1919, 457-467.

183 - R.WEITZENBÖCK: Über die Wirkungsfunktion in der Weylschen Physik."Wiener Berichte" (2) 129,1920,683-708.

c) Teoria di EDDINGTON.

184 - A.S.EDDINGTON : Space,time and gravitation. An outline of the general relativity theory. Cambridge, Univers. Press 1920.

185 - A.S.EDDINGTON: A generalisation of WEYL's theory of the electromagnetic and gravitational fields.'

"Proceedings Roy Soc., London" (A) 99, 1921, 104,122.

186 - A.S.EDDINGTON: The mathematical theory of relativity. Cambridge, Univers. Press,1923. Trad. tedesca (Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung); Berlin, Springer,1925.(Con una Nota dell'A.:"Die neue Einsteinsche Theorie"; e un'appendice di A.EINSTEIN:"EDDINGTONs Theorie und Hamiltonsches Prinzip".

d) Teorie di EINSTEIN e SCHOUTEN,1923.

187 - A.EINSTEIN : Zur allgemeinen Relativitätstheorie. "Sitzungsber. Preuss. Akad." 1923,5, 32-38.

188 - A.EINSTEIN . Bemerkung zu meiner Arbeit "Zur allgemeinen Relativitätstheorie".Ibid. 12, 76-77.

189 - A.EINSTEIN : Zur affinen Feldtheorie. Ibid. 17, 137-140.

190 - .A.SCHOUTEN. On a non-symmetrical affine field theory "Proceedings Kon. Akad. Amsterdam" 26, 1923 , 850-857.

e) Teoria di EINSTEIN, 1925.

191 - A.EINSTEIN. Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität."Sitzungsber. Preuss. Akad. 1925, 22, 414-419).

192 - L.A. SENHART: Einstein's recent theory of gravitation and electricity."Proceedings Nation Akad. of Sci. U.S.A." 12,1926, 125-129.

193-J.M.THOMAS: On various geometries giving a unified electric and gravitational theory. Ibid.187-191.

f) Teoria di EINSTEIN ,1928.

194- A.EINSTEIN: Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus."Sitzungsber. Preuss Akad." 1928, 17,217-221.

195 - A.EINSTEIN: Neue Möglichkeit für eine einhetiliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität. Ibid. 18, 224-227.

196 - A.EINSTEIN : Zur einheitlichen Feldtheorie. Ibid. 1929 ,1,2-7.

197- A.EINSTEIN : Einheitliche Feldtheorie und Hamiltonsches Prinzip. Ibid.10,156-159.

198 - A.EINSTEIN : Auf die Riemann Metrik und den Fernparallelismus gegrundete "Mathem. Annalen" 102,1929, 685-697. einheitliche Feldtheorie.

199 - A.EINSTEIN Théorie unitaire du champ physique. "Annales de l'Inst. H.Poincaré 1,1931, 1-24.

200 - T.LEVI-CIVITA . Vereinfachte Herstellung der Einsteinschen einheitlichen Feldgleichungen "Sitzungsber. Preuss. Akad." 1929,9, 137-153.

201 - É.CARTAN - Notice historique sur la notion de parallelisme absolu." Mathem.Annalen" 102,1929,698-706.

202 - É.CARTAN:Le parallelisme absolu et la théorie unitaire du champ."Actualités Scient. et Ind." Paris Hermann 1932.

263 - R.WEITZENBÖCK: Differentialinvarianten in der einsteinschen Theorie des Fernparallelismus."Sitzungsber. Preuss.Akad." 1928,26, 466-474 .

204 - E.BORTOLOTTI: Parallelismi assoluti nelle V_n riemanniane ." Atti Istit. Veneto" 86,1926-27, 455-465.

205 - E.BORTOLOTTI: On metric connexions with absolute parallelism ."Proceedings Kon. Akad. Amsterdam" 30,1927, 216-218.

206 - E.BORTOLOTTI : Parallelismo assoluto nelle varietà a connessione affine e nuove vedute sulla relatività."Memorie R.Accad. Bologna" (8)6, 1928-29, 45-58.

207 - E.BORTOLOTTI : Stelle di congruenze e parallelismo assoluto: basi geometriche di una recente teoria di EINSTEIN."Rendiconti R.Accad.Lincei" (6)9,1929, 530-538.

208 - T.Y.THOMAS: On the unified field theory. "Proceedings Nation.Acad.U.S.A." 16, 1930, 761-776, 830-835; 17,1931, 48-58, 111-119, 199-210, 325-329.

g) Teorie di STRANEO ,1931 e 1932.

209 - P.STRANEO :Gleichungen zu einer einheitlichen Feldtheorie."Sitzungsber. Preuss.Akad.1931, 18, 319-325.

210 - E.BORTOLOTTI : Connessioni affini associate ad una (n+1)-pla di conguenze in una varietà n-dimensionale."Rendiconti R.Accad.Lincei" (6)14,1931, 462-468.

211- P.STRANEO : Intorno alla teoria unitaria a geometrizzazione assoluta. Ibid.(6) 16, 1932, 139-141.

212 - P.STRANEO : Einheitliche Feldtheorie der Gravitation und der Elektrizität. "Zeitschrift für Physik" 77,1932, 829-833.

h) Teorie di VRANCEANU(1936).

213 - G.VRANCEANU : La théorie unitaire des champs

et les hypersurfaces non holonomes."Comptes Rendus de l'Acad." ,Paris ,200,1935, 2056 - 2058.

214-215 - G.VRANCEANU: Sur une théorie unitaire non holonome des champs physiques."Comptes Rendus Acad. Sci. Roumanie" ,1,1936 ,8-11: e "Le Journal de Physique",7,1936, 514-527.

216 - K.YANO :La théorie unitaire des champs proposée par I.VRANCEANU ."Comptes Rendus de l'Acad." 204,1937, 332-334.

217 - K.YANO : La relativité non holonome et la théorie unitaire d'EINSTEIN et MAYER."Mathematica"Cluj,1938, 124-132.

(25.b)(p.241) Il lav.cit. di PALATINI è 177 ; ved.anche 178,p.129 e seg.; e cfr.174 ,

(25.c) (p.242): Nei riguardi della metrica di WEYL oltre ai lavori contenuti nell'ultimo elenco bibliografico potrà dersi 16,p.16 e seg, 18,pp.216-236.

(25.d) (p.250, -A proposito delle due teorie proposte successivamente da STRANEO, la prima (1931)basata su una connessione metrica nel senso di CARTAN,emisimmetrica;la seconda (1932) su una connessione euclidea a parellelismo assoluto, ho citato solo alcuni dei lav. dell'A.: 209 si riferisce alla prima, la mia nota 210 vi apporta alcune rettifiche alla formulazione geometrica; 211 e 212 si riferiscono alla seconda.
L'osservazione riportata in nota ,p.250 è nel lav. 206.

(25.e) (p.230). Il lav. cit. di KALUZA (1921) è 63: nel lav. 81 di EINSTEIN (1927) e nella bibliografia del lav. 126 di VEBLEN sono citati altri lavori(di O. KLEIN,di H.MANDEL e di altri) che riguardano la teoria del KALUZA.

(25.f) (p.254). La teoria di EINSTEIN e MAYER è esposta

nelle due note 103; cfr. VEBLEN ,126 p.56 e seg.

(25.g) (p.257) -Sulla teoria di VRANCEANU ved. spec. il lav. 215 dell'A. e la nota 217 di K.YANO, dedicata a un raffronto con la teoria di EINSTEIN e MAYER.

(26.a) (p.257). Lo studio delle connessioni proiettive "non-euclidee "legate a un campo di quadriche è svolto dal VEBLEN nei lav. 94,126 : al primo di questi ci siamo generalmente attenuti nel testo. Una prima idea di una tale connessione può riscontrarsi in CARTAN, 67, 1924, p. 319. Indirettamente, attraverso all'interpretazione (n+1)-dimensionale, queste connessioni sono state studiate da GOŁĄB (97, 1932 p.49 e seg.); poi più esplicitamente da me (52,1932,p.127 e seg.).Fra l'altro io ho osservato come, in relazione a un assegnato campo di quadriche,venga individuata una connessione non-euclidea senza torsione, che ha come geodetiche quelle stesse della metrica riemanniana che il supposto campo di quadriche determina.
In 142, pp. 145 e seg." io e HLAVATÝ abbiamo svolto sulle connessioni non-euclidee un'analisi abbastanza completa. Infine l'argomento è trattato nei lav. di SCHOUTEN , v.DANTZIG ed HAANTJES già cit. in (14.α); e anche, in modo alquanto differente, nel precedente lav. 104. Ved. anche STRUIK, 53 ,p. 44 e seg.) VANDERSLICE ,132,p. 191.

(27.a) (p. 265). La teoria della "relatività proiettiva è esposta da VEBLEN ed HOFFMANN nel lav. 98 (1930) e poi più ampiamente nel già cit. libricciuolo 126 di VEBLEN. Sviluppi ulteriori dovuti a VEBLEN o ai suoi collaboratori sono nei lav. 99, 125, 127,128,129.

(28.a) (p. 268). Già ho avuto occasione di citare i lavori di SCHOUTEN, von DANTZIG ed HAANTJES in cui la "teoria generale dei campi" (generelle Feldtheorie) è sviluppata. Essi ordinatamente sono : 104, e poi una serie di otto lavori condotti con l'algoritmo delle coordinate omogenee: 110,111,112,121,122,123,124,

130. Infine si ha in 135 una esposizione riassuntiva della teoria dovuta a SCHOUTEN.

I N D I C E

Pa

Introduzione 3

1. Generalità. Cenno storico : geometria proiettiva in uno spazio a connessione affine. "

2. Connessione proiettiva secondo CARTAN; cenno su alcuni ulteriori sviluppi della teoria 10

PARTE I. GEOMETRIA PROIETTIVA IN UNO SPAZIO A CONNESSIONE AFFINE.

§ 1. Premesse: richiami formali sui tensori e le connessioni affini. 15

3. Algebra ed analisi tensoriale in uno spazio a connessione affine: nozioni e risultati più notevoli "

4. Tensori a più serie d'indici. Formule di CHRISTOFFEL, equivalenza di due connessioni affini 22

§ 2 - Trasformazioni proiettive di una connessione affine. 26

5. Trasformazione proiettiva della connessione affine ; parametri Π^{i}_{jk} di T.Y.THOMAS. "

6. Il tensore di WEYL, di curvatura proiettiva, e il covariante proiettivo; equivalenza proietti-

va fra due connessioni affini 32

§.3 - Parametro proiettivo. Derivazione proiettiva.

7. Coordinate proiettive normali (non omogenee) e parametro proiettivo normale legati a un sistema di geodetiche 43

8. La più generale costruzione di un parametro proiettivo secondo L.BERWALD. Prima introduzione di 53

9. Tensori proiettivi e derivazione proiettiva: tensore di curvatura relativo. La connessione proiettiva normale. Parametri $^{*}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ di T.Y.THOMAS 66

§. 4 - Bibliografia e annotazioni 79

10. Primo elenco bibliografico (1-61) "

11. Note alla I Parte 85

PARTE II - GLI SPAZI A CONNESSIONE PROIETTIVA, SECONDO CARTAN.

§. 1 Generalità. Riferimenti, rappresentazione analitica della connessione proiet-

12. Varietà in ambiente proiettivo; costruzione di una connessione proiettiva su di essa, passaggio al caso generale "

13. Spazi proiettivi tangenti a una X_n, a sè considerata. Tensori proiettivi, connessione proiettiva in generale, derivazione proiettiva 105

14. Deviazione di una connessione proiettiva. Costruzione di parametri normalizzati 115

§. 2 - Geodetiche . Curvatura e torsione 124

15. Geodetiche di una connessione proiettiva ; connessione affine e tensore affine subordinati a un campo di iperpiani. Scomposizione delle trasformazioni proiettive fra spazi infinitamente vicini 124

16. Applicazione: determinazione delle connessioni affini simmetriche proiettivamente piane (rappresentazione della connessione proiettiva integrabile dell'S_n proiettivo mediante un R-riferimento). 135

17. Curvatura e torsione di una connessione proiettiva 146

ERRATA-CORRIGE

Pag	righe	al luogo di	si legga:
3	4	spazio o connes-sione	spazio a connessio-ne
"	3 (*)	delle varietà	della varietà
4	22	spazio o connes-sione	spazio a connessio-ne
"	form.(1.1)	$+L^{z}_{jt}$ ...	$+L^{z}_{jt}\xi^{j}dx^{t}=0$
5	18	al WEYL al CARTAN	al WEYL e al CARTAN
6	2	o "nozioni	e "nozioni
8	13-14	si annulli $V^{\cdots q}_{zjp}$	si annulla $W^{\cdots q}_{zjp}$
"	20	"Cammini"of"paths"	"Cammini"o"paths"
"	form.(1.4)	$+\delta^{z}_{t}+\Gamma^{p}_{jp})$	$+\delta^{z}_{t}\Gamma^{p}_{jp})$
9	7	del CARTAN	dal CARTAN
"	form.(1.5) prima riga	$u^{z}=u^{z}(u^{1},$	$u^{z}=u^{z}(u^{1},$
10	20	una sua	una
"	form.(2.2)	$u^{z}(u^{3},u^{2},\ldots$	$u^{z}(u^{1},u^{2},\ldots$
11	7	punto analogo...*P-*O	punto omologo...*P-*O
12	19	legge osservata	legge accennata
14	2	SCHOTEN	SCHOUTEN
"	3	HAANTJES	HAANTJES);
"	4	miei di BERWALD	miei, di BERWALD
"	14	Ma questa	Ma questo
16	9	o od $h,k,$	o ad $h,k,$
19	form.(3.19)	3 3	3! 3!
21	form.(3.30)	$+2S_{ij}^{\ \ h}$	$+2S_{ij}^{\ \ h}$
"	13	(3.31).....=j	(3.31*).....= 0
"	7	onde	anche

(*) I numeri sottolineati indicano le righe numerate dal fondo.

Pag.	righe	al luogo di	si legga:
21	form.(3.32), (3.33), (3.34)	$L_{ijh,\dots}^{\dots\dots k}$	$L_{ijh,\dots}^{\dots k}$
"	form.(3.34)	$+2\nabla_{[i}S_{jh]}^{\dots k}$	$+2\nabla_{[i}S_{jh]}^{\dots k}$
22	14	riferibili	riferiti
24	2	valgono	valgano
27	16	$\Gamma_{(jk)}^{i}=\Gamma_{ik}^{j}$	$\Gamma_{(jk)}^{i}=\Gamma_{jk}^{i}$
35	12	emilinare	eliminare
39	2	è necessario	è necessaria
41	8	uno qualunque	una qualunque
42	13	un tensore condizione	un tensore a condizione
59	form.(8.35)	$-\partial_k\vartheta_j^{\circ}$	$-\partial_k\vartheta_j^{\circ'}$
63	form.(8.57)	$u^{\circ}=\frac{1}{2M}\log\frac{ds}{d\pi}$	$u^{\circ}=-\frac{1}{2M}\log\frac{ds}{d\pi}$
65	3	$\frac{du^{\circ}}{d\pi}$	$\frac{du^{\circ'}}{d\pi}$
66	form.(9.2)	$\vartheta_0^i=\vartheta_0^{i'}=0$	$\vartheta_{0'}^i=\vartheta_0^{i'}=0$
67	15	u^2	u^i
"	14	$\partial_\nu=\delta_\nu^2\partial_2$, $\partial_2=\frac{\partial}{\partial u^2}$	$\partial_\nu=\delta_\nu^i\partial_i$, $\partial_i=\frac{\partial}{\partial u^i}$
"	5	$\nabla_0 A^\lambda$	$\nabla_0 A_\lambda$
"	ultima	.....	$\nabla_0 A_\lambda=-MA_\lambda$, $\nabla_0 B^\lambda=MB^\lambda$
68	3-2	.....	(sopprimere le due righe (*))
70	5-7	e chiamarsi.... della derivazione proiettiva.	(sopprimere)
"	18	A_0	A°
86	23	ha dato	ho dato

(*) La denominazione di "tensore di curvatura della derivazione proiettiva", nel corso di queste Lezioni, è stata data, anzichè a $\Gamma_{\nu\mu\lambda}^{\dots\tau}$, a un altro tensore (per le C-trasformazioni), indicato con $N_{\nu\mu\lambda}^{\dots\tau}$. Ved. pp. 154-155, 186, 211; note a pp. 155 e 211.

Pag.	Righe	al luogo di	si legga:
91	5	in modo	in modo non
94	14	nelle (12.16)	nelle (12.10)
97	form.(12.24)	$\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}\vartheta^{\lambda}_{\lambda'}\vartheta^{\nu}_{\nu'}\vartheta^{\mu'}_{\mu}$	$\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}\vartheta^{\lambda}_{\lambda'}\vartheta^{\nu}_{i'}\vartheta^{\mu'}_{\mu}$
99	14	le coordinate	le coordinate $\overset{\circ}{x}{}^{\alpha}$
102	13	B-riferimento	B_1-riferimento (o)
102	7	$\frac{\partial(\psi \overset{\circ}{x}{}^{\alpha})}{du^i}$	$\frac{\partial(\psi \overset{\circ}{x}{}^{\alpha})}{\partial u^i}$
105	7	S_n	S_N
106	8	(u^2)	(u^i)
115	5	riferiemtni	riferimenti
116	13	con $\delta^{\lambda}_{o}+\Delta x^{\lambda}$	con $\varkappa\delta^{\lambda}_{o}+\Delta x^{\lambda}$
119	form.(14.20)	$+\partial\vartheta^{\nu}_{\mu}\cdot\vartheta^{\nu'}_{\nu}$	$+\partial_{\lambda'}\vartheta^{\nu}_{\mu'}\cdot\vartheta^{\nu'}_{\nu}$
120	13	nelle loro	delle loro
122	6	la derivata covariante fatta	le derivate covarianti fatte
"	form.(14.36)	$\Gamma^{\nu'}_{\nu i'}=0$	$\Gamma^{\nu'}_{\nu' i'}=0$
123	form.(14.42)	$L^{\nu}_{\nu i}-(n+1)L^{o}_{oi}=0$	$L^{o}_{oi}=0$
125	penultima	$-\Lambda^{\mu}_{\nu i}\hat{a}^{\lambda'}_{\mu}\frac{du^i}{dt}$	$-\Lambda^{\mu}_{\nu i}\hat{a}^{\lambda'}_{\mu}\frac{du^i}{dt}$
"	ultima	.....	$=\left(\frac{d\hat{a}^{\lambda'}_{\nu}}{dt}-\Lambda^{\mu}_{\nu i}\hat{a}^{\lambda'}_{\mu}\frac{du^i}{dt}\right)x^{\nu}+$ $+\hat{a}^{\lambda'}_{\nu}\Phi(t)x^{\nu}=0$
129	5	punti gli spazi	punti degli spazi
131	3	$d^2a^{\lambda'}_{o}$	$d^2\hat{a}^{\lambda'}$
133	form.(15.34)	$+\delta_h\varphi_j\cdot$	$+\partial^{\circ}_{h}\varphi_j\cdot$
148	4	in π_{21},	in π_{12},
150	8	$P_{12}P_2P$	$PP_1P_{12}P_2P$

(o) Questo secondo la definizione che avevo dato in 51. La condizione però, che si tratti proprio di un B_1-riferimento, non interviene in realtà nel seguito.

Pag.	Righe	al luogo di	si legga:
152	1	come punto	come punto unito
"	9	costruzione in...	costruzione indicata
154	6	Le (17.4)	Le (17.40)
159	1	[	(sopprimere)
169	4	olonomo normale	anolonomo normale
"	5	alle	e alle
174	ultima	su un A-riferimento	su un A_o-riferimento
179	14	proiettiva	proiettivo
183	16	delle v	delle $v^{\alpha'}$
186	5	distinto da...	distinto da $\Gamma^{\cdots r}_{\lambda\mu\nu}$
205	4	luogo divario	luogo a divario
215	8	§.	§§.
216	11	y^{n}_{N-n-1}	y^{N-n-1}_{n}
221	6	$\omega^{\cdots i}_{ij}$	$\omega^{\cdots r}_{ij}$
225	1	η^{i}_{α}	η_{α}
"	form.(24.14)	f_2	f_2
226	2	$f_2 = \omega_{23}\, du^2 du^3$	$f_2 = \omega_{ij}\, du^i du^j$
"	7	ω_{23}	ω_{ij}
"	8	$\omega^{23} \dots \omega^{21}\omega_{2t} = \delta^{3}_{t}$	$\omega^{ij} \dots \omega^{ij}\omega_{ik} = \delta^{j}_{k}$
227	16	rette yX	rette zX
234	13	Γ^{r}_{jt}	Γ^{i}_{jk}
"	12	Γ°_{jt}	Γ°_{jk}
236	5	invariante	è invariante
239	18	MINKOSKI	MINKOWSKI
245	2	fra le connessioni euclidee	fra le connessioni affini
"	3	$S^{\cdots r}_{jk} = \Gamma^{i}_{(jk)}$	$S^{\cdots i}_{jk} = \Gamma^{i}_{[jk]}$
"	form.(25.29)	$+F_{ji}F^{ji}$	$+4F_{ji}F^{ji}$

Pag.	Righe	al luogo di	si legga:
246	form.(25.32)	$= \frac{1}{2}\Gamma_{\cdots}^{\cdots\ell}$	$= -\frac{1}{2}\Gamma_{\cdots}^{\cdots\ell}$
		$= \frac{1}{2}(\partial_k \Gamma_{\ell i}^{\ell} - \partial_i \Gamma_{\ell k}^{\ell})$	$= -\frac{1}{2}(\partial_k \Gamma_{\ell i}^{\ell} - \partial_i \Gamma_{\ell k}^{\ell})$
"	7	F'_{ik}	F_{ik}
247	14	$g_{ik}, f_{jk}, \ldots$	g_{ik}, f_{ik}, J^k
"	10	G_n	G_4
248	1	relativo	relative
250	12	(del 1938)	(del 1928)
"	8	che $G_{\ldots}$ in $V_{\ldots}$	che G_4 in V_5
"	3	perchè	perchè Φ_j
251	9	$[\lambda, \mu, \nu]$	$[\lambda\mu, \nu]$
252	4	le linee	linee
"	form.(25.52)	$u^i = u^i(u^1, \ldots$	$u^i = u^i(u^{1'}, \ldots$
254	16	un vettore ξ^λ	un vettore $\hat{\xi}^\lambda$
"	28-29	metrico .... le	metrico fondamental
260	form.(26.10)	$\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} =$	$\Pi_{\lambda\mu}^{\nu} =$
261	form.(26.22)	$= \frac{1}{2} g^{\nu\tau}[\ldots$	$= \frac{1}{2} g^{\nu\tau}[\ldots$
		$= \frac{1}{2} g^{\nu\tau}[\ldots$	$= \frac{1}{2} g^{\nu\tau}[\ldots$
263	form.(26.27)	$N_{\mu\nu} =$	$\Pi_{\mu\nu} =$
269	17	$M_{\lambda\mu}^{\cdots\nu};$	$M_{\lambda\mu}^{\cdots\nu} = 0;$
270	11	WEBLEN	VEBLEN
"	2	identificano	s'identificano
277	6	Differentialgeo-metry	differential Geo-metry
286	17	era stato	era stata
293	5	HAANHJES	HAANTJES

Pag.	Righe	al luogo di	si legga:
295	5	deve essere	deve esservi
"	4	V.. 51	Ved.51
296	3	del CARTAN	dal CARTAN
"	2	del torsore	del tensore
303	3	precedente sulle	precedente(153)sulle
305	5	L.... SENHART	L.P. EISENHART
306	5	einhetiliche	einheitliche
308	17	potrà...dersi	potrà vedersi
312	8	introduzione di	introduzione di du°