SUL RILEVAMENTO ARCHITETTONICO

COLL' USO DELLA FOTOGRAFIA

MEMORIA

PRESENTATA DAL SOCIO INGEGNERE G. G. FERRIA

Alla Società degli Ingegneri e degli Industriali la sera del 19 luglio 1883.

1. Ridotta alla sua più semplice costruzione, la *camera oscura* che si adopera in fotografia consiste in una cassetta parallelepipeda munita nel centro di una delle faccie di uno strumento diottrico detto *obbiettivo,* il quale proietta sulla faccia opposta le immagini degli oggetti che gli stanno davanti. Questa faccia è formata da una lastra piana di vetro, e su di essa le immagini vengono *fissate* mercè l'azione della luce su alcuni sali. Queste in seguito si riproducono colle ombre invertite sopra altre lastre di vetro, o sopra carte appositamente preparate , e si hanno per tal modo quelle vedute prospettiche degli oggetti che si chiamano *fotografie.*

La legge di formazione delle prospettive cosi ottenute è assai complicata ; essa dipende da quella secondo la quale i raggi luminosi attraversano l'obbiettivo. Quest'ultima non è ancor ben conosciuta ; ragione per cui riesce difficilissimo comporre obbiettivi che diano immagini completamente esenti da aberrazioni. Tuttavia se ne trovano oggidì in commercio di quelli producenti aberrazioni poco sensibili, e, ciò che più importa per lo studio che mi accingo ad esporre, non danno quasi luogo a quella chiamata *distorsione.* Per questo fatto nelle immagini con esso ottenute le prospettive delle linee rette si confondono sensibilmente con rette o con punti.

2. Assunto di questo lavoro è di far vedere come la camera oscura, convenientemente adoperata , sia uno strumento preziosissimo nei rilevamenti architettonici, potendosi dalle fotografìe , ottenute cogli obbiettivi accennati, dedurre le dimensioni relative degli oggetti, col metodo che verrò esponendo.

3. È manifesto che qualunque sia la legge secondo la quale i raggi luminosi vengono rifratti dall' obbiettivo, le immagini esenti da distorsione sono le medesime che si avrebbero se i raggi si mantenessero rettilinei e passassero tutti per un medesimo punto. Partendo da questo concetto, il problema che mi propongo di risolvere si riduce ad una questione relativa alle proiezioni centrali.

Diremo *centro di proiezione,* e semplicemente *centro,* un punto pel quale si possa immaginare che passino tutti i raggi luminosi nell' ipotesi dianzi accennata, che si mantengano rettilinei e producano la immagine in quistione; *quadro* il piano del disegno fotografico ; *punto principale* il piede della perpendicolare condotta dal centro sul quadro ; *distanza* la lunghezza di questa perpendicolare ; *circolo di distanza* quello che è descritto sul quadro con centro nel punto principale e con raggio uguale alla distanza. Negli apparecchi bene costruiti avviene che l'asse dell' obbiettivo coincide colla perpendicolare di distanza ; vedremo per altro che questa condizione non è necessaria.

4. Geometricamente considerati gli edifizi che avviene d'ordinario di dover rilevare sono solidi terminati da piani e da superfìcie curve tali, che sostituendo alle medesime dei piani opportunamente scelti, l'insieme di ciascun ediflzio risulta composto di solidi prismatici combacianti fra loro per una o più faccie.

Il caso più semplice che si presenti nella pratica è quello di due parallelepipedi rettangoli sovrapposti, cogli spigoli dell' uno paralleli a quelli dell'altro.

Incominceremo dallo studiare questo caso.

5. Sia MN *(Fig. 1)* il solido, V il centro di proiezione, Q il quadro. Il procedimento che conduce alla determinazione delle grandezze relative de' suoi spigoli si riduce ad eseguire sul disegno fotografico le seguenti operazioni :

1° Segnare il *punto principale ;* vale a dire, come vedremo , segnare le prospettive di quel punto in cui l'asse dell'apparecchio fotografico supposto bene costrutto incontra la superflcie dell'oggetto.

2° Immaginando condotta per questo punto obbiettivo una retta parallela allo spigolo che vuoisi misurare divisa in parti uguali, disegnare la prospettiva di questa retta ; o in altre parole disegnare la *scala* che serve alla misura di tutte le rette parallele a quello spigolo.

3° Immaginando che lo spigolo si muova parallelamente a se stesso, farlo sovrapporre alla scala, determinando il numero di divisioni che vi comprende.

Per eseguire queste varie operazioni, è necessario anzitutto determinare alcuni elementi della prospettiva sulla quale si disegna, di cui verremo man mano discorrendo.

6. *Punti di fuga.* Immaginiamo il raggio luminoso che da un punto M *{Fig. 1)* qualunque preso sopra uno spigolo va al centro V ; la sua traccia *m* sul quadro sarà la prospettiva del punto M. Immaginiamo ora che punto e raggio si muovano scorrendo lungo lo spigolo ; il luogo delle traccie del raggio sul quadro sarà la prospettiva del cammino percorso dal punto ; e quanto più grande sarà questo cammino, tanto più il raggio si accosterà alla parallela BV condotta pel centro allo spigolo. Al limite, quando il raggio coinciderà con questa parallela , incontrerà il quadro in un certo punto B, che sarà il medesimo che si troverebbe ripetendo l'operazione su qualunque retta parallela allo spigolo. Esso sarà adunque un punto appartenente alle prospettive di tutte le rette parallele a questo spigolo ; queste prospettive perciò concorreranno in quel punto. Esso vien detto il loro punto di fuga. Il modo di determinarlo risulta chiaro dalla sua definizione.

7. *Punto principale.* A ciascuna delle direzioni degli spigoli del solido corrisponde un punto di fuga particolare ; nel caso proposto saranno adunque tre , che designeremo colle lettere A, B, G. Questi unitamente al centro V di proiezione determineranno i vertici di un tetraedro , le cui faccie sono rettangolari in V. Si tratta di determinare il *punto principale,* che, secondo la definizione, sarà il piede della perpendicolare condotta dal centro V sul quadro, e secondo la generazione supposta della prospettiva, sarà manifestamente la prospettiva di quel punto X, in cui l'asse dello strumento, supposto bene costrutto, cioè coll' asse normale al quadro, incontra la superficie dell'oggetto.

Allo scopo di indicare la via da seguire nel caso più generale di spigoli comunque inclinati, nella determinazione del punto principale faremo astrazione della ortogonalità di quelli del solido proposto ; e diremo α, β, γ gli angoli qualunque che supporremo questi spigoli facciano fra loro.

Supponiamo di conoscere questa perpendicolare che si cerca, e di far passare per essa tre piani normali ai tre spigoli del tetraedro giacenti sul quadro. Lo spigolo AB *{fig. 2)* sarà tagliato in un certo punto D e le faccie ABV ed ABC lo saranno secondo due rette DV e DP normali allo spigolo AB. Se ora facciamo rotare la faccia ABV intorno alla retta AB e la rabattiamo sul quadro, la retta DV cadrà sul prolungamento di DP; il punto V andrà in un certo punto M tale che DM=DV ; gli spigoli AV e DV cadranno rispettivamente in AM e BM e l' angolo AMB sarà uguale all'angolo AVB, che supporremo sia α.

Facendo considerazioni analoghe per gli spigoli AC e BC troveremo due punti N ed 0 analoghi ad M e due angoli ANC e BOC che saranno rispettivamente i rabattimenti degli angoli AVC e BVC del tetraedro, angoli che diremo β e γ.

Se l' operazione è ben fatta , deve risultare evidentemente che i due rabattimenti di ciascuno spigolo riescono uguali fra loro.

Consegue che se in generale A, B, C *(fig. 3)* sono i punti di fuga delle prospettive di tre sistemi di rette formanti fra di loro rispettivamente gli angoli α, β, γ, per trovare il punto principale basterà descrivere sulle rette AB, AC, BC, tre archi di cerchio capaci degli angoli corrispondenti α, β, γ ; segnare su questi archi tre punti M, N, O tali che risultino le uguaglianze

$$AM=AN, \quad CN=CO, \quad BO=BM$$

e da questi punti condurre le perpendicolari rispettivamente alle rette AB, AC, BC. Queste perpendicolari si incontreranno tutte in un punto medesimo P, che sarà il punto principale cercato.

Nel caso particolare che ciascuno degli angoli α, β, γ sia uguale ad un retto , come nell'esempio che ci siamo proposti, la ricerca del punto principale si semplifica notevolmente.

Infatti in questo caso *(Fig. 4),* ciascuno dei piani normali condotti per la retta VP ad uno dei lati del triangolo ABC contiene il vertice opposto; e tutto si riduce alla determinazione del punto d'incontro delle perpendicolari condotte al lato opposto da ciascuno dei vertici di un triangolo. Fatto centro nel punto di mezzo di uno dei lati, p. es. BG, con raggio uguale alla metà di esso, si descriva una semicirconferenza, la quale taglierà

il lato AB in un punto D, ed il lato AC in un punto E. 11 punto P d'incontro delle rette BE e DE sarà il punto principale.

8 *Disianza.* Come si è definita, è la lunghezza della perpendicolare VP *(Fig. 2).* Per determinarla nel caso di spigoli ortogonali basta osservare che la sezione fatta nel tetraedro da un piano passante per la perpendicolare VP ed uno dei punti di fuga, p. es. A, è un triangolo rettangolo nel vertice V, di cui un cateto è lo spigolo AV del tetraedro, 1' ipotenusa è la perpendicolare AF condotta dal vertice A del triangolo ABC sul lato opposto. Dopo le costruzioni fatte si hanno tutti gli elementi per costruire questo triangolo, e si potrà facilmente avere la perpendicolare VP condotta dal vertice dell'angolo retto sull'ipotenusa ; la quale sarà la distanza cercata. Si potrà adunque eseguire speditamente questa costruzione nel modo che segue.

Sulla retta AE come diametro *(Fig. 6)* si descriva una semicirconferenza e si elevi una perpendicolare in P, la parte PV' compresa fra il punto P e la semicirconferenza sarà la distanza.

9. *Circolo di distanza.* Per definizione, sarà il circolo descritto sul quadro con centro in P e raggio uguale a PV' *(Fig. 6).*

10. *Scale.* Per semplicità di costruzione, supporremo che l'oggetto si vada avvicinando al quadro, per modo che il punto X *(Fig. 1)* d'incontro della sua superficie coll' asse della camera oscura venga a coincidere colla propria prospettiva P, modificandosi nello stesso tempo nelle sue dimensioni così, che i raggi luminosi rimangano gli stessi. L' immagine dell' oggetto non sarà alterata, e la figura di questo si conserverà simile alla primitiva ; vale a dire saranno ancora le stesse le sue dimensioni relative.

Ciò premesso, immaginiamo condotta pel punto X una retta parallela ad uno degli spigoli del solido, essa riuscirà parallela ad uno spigolo del tetraedro, p. es. ad AV *(Fig. 1)* ; la sua prospettiva sarà in questo caso la retta AP *(Fig. 6),* e se la retta obbiettiva fosse divisa in parti uguali formanti una scala, i raggi luminosi che vanno dai punti di divisione al centro V, intersecherebbero la retta AP nei punti di divisione della scala prospettiva.

Per determinare questi punti di divisione si potrà pertanto procedere come segue. Si rabatta il piano che contiene il centro V *(Fig. 6),* la retta AP e la retta obbiettiva sul quadro, facendolo rotare attorno alla retta AP. Questa retta non si muoverà, il centro V cadrà in V sul circolo di distanza e sulla perpendicolare PV alle AP in P; lo spigolo AV del tetraedro andrà in AV, e la retta obbiettiva, che non avrà cessato di essere a questo parallela, andrà in PA,, parallela ad AV'.

Se ora sulla A_1P così determinata segneremo la scala obbiettiva , basterà condurre pei punti di divisione le rette che vanno al punto V, esse rappresenteranno i rabattimenti dei raggi luminosi, i quali intersecheranno la retta AP nei punti di divisione della scala prospettiva.

li. *Caso in cui la figura esce dai limiti del foglio.* In questo caso, che è assai frequente, torna più comodo determinare le divisioni della scala prospettiva con un procedimento numerico.

Sia PL una lunghezza obbiettiva misurata dal punto P come origine della scala e PH la sua prospettiva. Dalla similitudine dei triangoli PHL ed AHV' si ricava, pei punti compresi fra A e P :

$$PH:PA-PH::PL:AV',$$

donde

$$PH=\frac{PLxPA}{AV'+PL'}\ .$$

e pei punti che si trovano al di là del punto P :

$$PH=\frac{PLxPA}{AV'-PL}$$

dalle quali relazioni facendo variare PL di quantità uguali ad 1, 2, 3 ecc., divisioni della scala obbiettiva, si ottengono speditamente i valori corrispondenti ad 1, 2, 3 ecc., divisioni della scala prospettiva.

12. *Misura della distanza fra due punti presi sopra un medesimo spigolo.* Siano *a* e *b* *(Fig. 7)* le prospettive dei due punti e B il punto di fuga corrispondente allo spigolo sul quale si trovano. Immaginiamo che la retta di prospettiva *ab* si muova nello spazio parallelamente a se stessa , di guisa tale che ciascuno de' suoi estremi percorra una spezzata di lati paralleli alternativamente agli uni ed agli altri degli spigoli dei due sistemi ad essa retta ortogonali ; ed i vertici di queste spezzate siano sopra spigoli paralleli a questa retta. Le prospettive di queste due spezzate saranno altre due spezzate *aa'a''a'''*, *bb'b''b'''*, coi vertici sulle prospettive di spigoli concorrenti in B, e coi lati concorrenti alternativamente ai punti di fuga A e C ; e sarà sempre possibile costruire le due spezzate in modo che gli estremi vengano a cadere sulla scala concorrente in B.

È evidente allora che la distanza cercata sarà uguale a quella dei due punti estremi *a'''* e *b'''*, e che si potrà valutare dal numero delle divisioni fra essi comprese. Così nell' esempio proposto, troveremo che il punto *a'''* coincide colla 1^a divisione a destra dell'origine P della scala, ed il punto *b'''* colla 5^a di sinistra ; diremo perciò che la distanza dei due punti obbiettivi, le cui immagini sono *a* e *b* , è di 6 unità di misura.

13. *Sezioni rette.* È manifesto che il disegnare la spezzata corrispondente ad un punto qualunque nel modo dianzi accennato, equivale a disegnare la sezione retta del solido fatta da un piano passante per questo punto. Ora quando si tratta di rilevare un oggetto è molto importante conoscere delle sezioni rette opportunamente scelte. Nel rilevamento architettonico col metodo di cui trattiamo, sono sempre molto utili le determinazioni delle sezioni rette fatte da piani contenenti le scale. Nella figura 7 esse sono rappresentate in OQRSTUV, DEFG ed HIK LMNO.

14. *Uso di una scala unica — Bisettrici degli angoli retti.* Consideriamo il caso che il solido da rilevare sia un cubo, la cui prospettiva abbia un vertice nel punto principale P, *(Fig. 10)*, ed i tre spigoli concorrenti in esso giaciano sulle scale. Poniamo di più che noi conosciamo anche le prospettive delle diagonali concorrenti in questo punto e giacenti nelle faccie del cubo. Noi potremmo evidentemente valerci di una qualunque delle scale per misurare la lunghezza del lato di questo cubo; e di più possiamo anche valutare la distanza di un punto qualunque M da una delle faccie del cubo, purché per questo punto si faccia passare una sezione retta nel cubo, la quale taglierà un lato di esso in un certo punto *m.* Infatti potremo allora disegnare il cubo similmente disposto al primitivo, avente anch' esso un vertice nel punto P, ed il cui lato sia quella parte del lato del cubo primitivo compreso fra il punto d'intersezione di questo lato con quella sezione retta ed il punto principale. Per questo basterebbe osservare che le diagonali del secondo cubo concorrenti in P coincidono con quelle del primo cubo. Tutto si riduce alla conoscenza dei punti di fuga di queste diagonali.

Per questo basta osservare che se dal centro di proiezione conduciamo una retta parallela ad una delle diagonali suddette, essa giacerà nel piano di quella faccia del tetraedro che è parallelo alla faccia del cubo sulla quale questo diagonale si trova; e che il punto di fuga della sua prospettiva, ossia quel punto in cui questa parallela incontra il quadro, cade sul lato che si trova sul quadro della faccia del tetraedro, sulla quale giace la parallela in discorso.

Pertanto *(Fig. 9),* dopo aver rabattuto la faccia del tetraedro sul piano del quadro, come si fa per la ricerca del punto principale, si dividano per metà gli angoli retti di queste faccie; ed i punti d'incontro delle bisettrici coi lati del triangolo giacente sul quadro saranno i punti di fuga delle linee a 45° sugli spigoli del solido.

15. *Grado di approssimazione dei risultati.* Poiché la lunghezza di una retta qualunque col metodo che sono venuto esponendo, si deduce dal confronto fra la lunghezza di una retta fittizia ad essa parallela avente la stessa prospettiva e passante pel punto principale, colla lunghezza di questa prospettiva medesima, e questo qualunque sia la posizione delle retta obbiettiva nello spazio, noi possiamo per semplicità considerare il caso di una retta qualunque obbiettiva RT *(Fig. 8),* giacente in un medesimo piano colla sua scala corrispondente e col centro di proiezione; e supporre che questo sia il piano del disegno.

Sia dunque RT=L la retta obbiettiva, $Pt=l$ la retta fittizia che le sostituiamo; $P\tau=x$ la prospettiva comune ad entrambe; V il centro di proiezione; P il punto principale; PA la traccia del quadro col piano del disegno; A il punto di fuga della prospettiva di cui si tratta. A cagione di un piccolo errore assoluto tt_1 che diremo δl, sulla lunghezza l, avremo un altro errore assoluto TT_1 che diremo δL, nella valutazione di L; ma poiché i triangoli VPt e VRT sono simili, avverrà che

$$\text{a)} \qquad \frac{\delta l}{l}=\frac{\delta L}{L};$$

vale a dire che gli errori riferiti all'unità di lunghezza saranno uguali; in altri termini per sapere l'errore che si commette nella valutazione della retta obbiettiva RT, basta cercare l'errore che si commette nella valutazione della retta fittizia *Pt.*

Ciò premesso, dicendo a la distanza del punto di fuga A dal punto principale P e b la lunghezza della retta VA, avremo

$$x:a-x::l:b$$

$$\text{i)} \qquad bx=l\ (a-x).$$

Se ora noi commettiamo un errore δx nella costruzione, oppure nella lettura della scala, per cui invece della grandezza vera x della prospettiva ne leggiamo un' altra $x_1=x+\delta x$, invece della grandezza vera l ne avremo un'altra $l+\delta l=l_1$, e perché i triangoli VPt_1 e b_1VA sono ancora simili fra di loro, sussisterà ancora la relazione (1), per cui avremo analogamente

$$x_1:a-x_1::l_1:b,$$

donde

$$(x+\delta x)b=(l+\delta l)\ (a-x-\delta x),$$

ossia

$$bx+b\delta x=al+a\delta l-xl-x\delta l-l\delta x-\delta l.\delta x,$$

espressione che avuto riguardo all'eq. (1) ed alla piccolezza del prodotto $\delta l.\delta x$, si potrà scrivere in questo modo:

$$\text{(2)} \qquad b\delta x=(a-x)\delta l-l\delta x,$$

e dividendo membro a membro quest' eq. per l'eq. (1)

$$\text{(3)} \qquad \frac{b\delta x}{b\,x}=\frac{(a-x)\delta l-l\delta x}{(a-x)l};$$

dalla quale si ricava, avuto riguardo alla relazione (a),

$$\frac{\delta L}{L}=\frac{\delta l}{l}=\frac{\delta x}{x}+\frac{\delta x}{a-x}.$$

Vale a dire: *l'errore riferito all'unità di lunghezza che si commette nella misura di una lunghezza oggettiva* L *misurata dall'asse dello strumento, è uguale all' errore relativo sulla sua prospettiva, più Terrore relativo sulla distanza fra l'estremo di questa ed il punto di fuga corrispondente.*

Esempio. In una data fotografia si ha che la prospettiva di una certa retta è lunga 100 mill. a partire dal punto principale e che la distanza del punto di fuga corrispondente dal medesimo è di 400 mill.; di più si sa che il grado di esattezza nelle misure dirette è di ½ millimetro.

Si vuol sapere il massimo errore probabile che si può commettere nel valutare la retta obbiettiva, riferito alla sua unità di lunghezza.

Risposta. In questo caso avremo

$$\delta x=0{,}5,\ a=400,\ x=100$$

$$\frac{\delta L}{L}=\frac{0{,}5}{100}+\frac{0{,}5}{400-100}=\frac{1}{200}+\frac{1}{600}=\frac{1}{150}.$$

Vale a dire la lunghezza cercata si può valutare a meno di 1/150 di errore.

16. *Osservazioni pratiche.* È molto facile nell' atto istesso che si mette a posto la camera oscura per eseguire una fotografia, determinare sul vetro smerigliato di prova quale sia la posizione del punto principale; infatti basta notare che esso è quel punto, pel quale la verticale vista in prospettiva non subisce inclinazione, mentre per tutti gli altri punti questa si inclina più o meno, a seconda della sua maggiore o minore distanza da esso. Inoltre è anche facile dedurre dalla concorrenza della prospettiva delle linee parallele a quella che si vuole misurare, dove sia il loro punto di fuga, e dedurne la sua distanza dal punto principale; distanza che noi abbiamo chiamato *a.* Finalmente si può ancora con un decimetro misurare la lunghezza della prospettiva di quella retta che si vuole valutare. Allora, ritenendo che nelle operazioni grafiche successive che si faranno al tavolo si possa procedere coll'esattezza di ½ millimetro, si può molto speditamente verificare colla regola suesposta se il grado di esattezza che si può ottenere con quell'immagine sia o non al disopra di quello che si vuole, e nel caso che non lo sia, vedere quali sieno i movimenti opportuni da darsi alla camera oscura.

Come regola generale, che si deduce anche dalla forinola (3), si può dire che il rapporto δL/L è tanto minore quanto più grandi sono contemporaneamente x ed a. Risogna per altro avvertire che dovendo nelle costruzioni al tavolo far uso dei punti di fuga, è meglio fare in modo da poterli trovare nei limiti di un foglio di non troppo grande ampiezza, perché potrebbe essere talvolta assai incomodo quando si volesse ricorrere a costruzioni dirette, oppure dar luogo ad errori di graficismo se si ricorre a costruzioni ausiliarie.

Inoltre bisogna bene avvertire che le operazioni grafiche fin qui descritte, per quanto bene eseguite, non conducono a risultati giusti se la fotografia è stata distesa sopra un cartoncino e poi passata sotto lo strettoio, come usano di fare i fotografi, perché le dimensioni delle fotografie vengono ad essere grandemente alterate. — È assolutamente necessario valersi di fotografie su fogli sciolti e distenderle in modo da non dare luogo né a stiramenti, né ad increspature.

17. *Inclinazione del quadro.* Tutto quanto siamo venuti esponendo si potrebbe anche applicare all' immagine qualora la si considerasse come una sezione fatta da un piano comunque diretto entro un fascio di rette, che partendo da un punto V *(Fig. 5)* andassero a ciascuno dei punti dell'oggetto, non essendo necessaria nessuna condizione fra gli angoli che questo piano fa con quelle rette. Conseguentemente non è per nulla necessario che il piano della fotografia riesca normale all'asse della camera oscura, il tutto riducendosi a sostituire un asse fittizio VP normale al quadro, a quello reale dell'obbiettivo.

Questo fatto è di una grande importanza pratica, imperocché spesso avviene che per la posizione particolare della camera oscura per riguardo all' oggetto, riesce difficile avere tutti e tre i punti di fuga a distanza conveniente dal punto principale. Ora per i due riferentisi alle linee orizzontali si può comodamente rimediare a questo inconveniente girando in modo opportuno la camera oscura intorno al proprio asse verticale. Non così per il punto di fuga delle verticali. Ma per questo giova avvertire che, allo scopo di poter dare al quadro una posizione sempre verticale , ciò che mantiene il parallelismo delle verticali nelle fotografie degli edifizi con molto vantaggio della loro eleganza, usano i costruttori fare il piano della faccia sulla quale l'immagine si forma, girevole attorno ad una linea orizzontale. Questa particolarità di costruzione applicata allo scopo opposto a quello che si propongono i fotografi, serve egregiamente per ottenere il punto di fuga delle verticali più vicine al punto principale, quando ne andasse soverchiamente lontano. Affinchè una camera oscura del commercio peraltro si presti veramente bene in questo caso, bisognerebbe che l'inclinazione di cui il quadro è suscettibile fosse più grande di quanto generalmente si può dare in questi apparecchi.

Applicazioni.

18. *Rilevamento di un piedestallo (Fig. 9).* L'esempio che si propone, malgrado la sua semplicità, presenta le stesse particolarità a cui può dare luogo il rilevamento di un edifizio.

Come si vede, a cagione delle modanature a superficie curve riesce impossibile determinare le sezioni rette senza sostituire a quelle dei piani paralleli alle faccie del solido e tangenti a queste superficie. Ora questa condizione necessita la conoscenza degli elementi geometrici che caratterizzano queste superficie curve, per potervi condurre dei piani tangenti.

Una condizione utile per la soluzione di questo quesito è quella che ci presenta la simmetria delle sagome del piedestallo per rapporto al piano bisettore di uno qualunque degli angoli diedri a spigoli verticali, e conseguentemente la simmetria di due rette qualunque giacenti in un medesimo piano orizzontale, colla retta d'intersezione di questo piano orizzontale con quel piano bisettore ; la quale retta fa un angolo di 45° con ciascuna delle due rette accennate. Partendo da questo concetto si sono potuti sostituire alle superfide cilindriche delle sagome dei piani orizzontali e verticali ad esse tangenti, determinando prima i punti di fuga delle linee a 45°, sulle quali debbono trovarsi i punti appartenenti alle rette di intersezione di questi piani. La figura fa chiaramente vedere nella parte inferiore questi piani orizzontali e verticali tangenti all'ultimo toro. Nelle altre parti della figura furono ad opera compiuta cancellate tutte le linee ausiliarie, e sostituite ad esse le curve d'intersezione dei piani tangenti colle superficie delle modanature.

19. *Ponte sul Po presso il Valentino (Tav. 4).* Per dare uno degli esempi nei quali il metodo di rilevamento colla fotografia può essere di maggior utilità, si riporta qui lo studio per la determinazione della sezione retta di un'arcata di questo ponte. Essa è elittica, e nella parte inferiore della tavola è rappresentata in iscala al 1/100, desumendone i dati da una pubblicazione fatta per cura dell'Ufficio d'Arte del Municipio di Torino nel periodico *L'Ingegneria Civile e le Arti Industriali.* In seguito, allo scopo di far vedere la corrispondenza di questa rappresentazione ortogonale con quella fotografica, furono in quella segnate tutte le linee corrispondenti alle linee disegnate in prospettiva ; così anche dal confronto delle une e delle altre si potrà giudicare del grado di esattezza del metodo suesposto. Le figure del resto chiariscono abbastanza la cosa.

Qui giova peraltro far notare che non potendosi avere tracciata sulla fotografia una sezione retta dell'arcata perchè la intersezione della superficie d'intrados colla superficie di facciata è sostituita da un cordone, si è rilevata invece la linea inferiore secondo la quale sono terminate le armille che circondano questo cordone a distanza costante dalla superficie d'intrados. Inoltre non avendosi in disegno delle linee verticali abbastanza lunghe per determinare con sufficiente esattezza il punto di fuga corrispondente ad esse, si sono appese alla ringhiera del ponte due grossi fili a piombo fatti con funicelle, visibili in fotografia nelle linee AB e CD.

Finalmente noto ancora che sapendo per misura diretta che la lunghezza dell'interasse fra due arcate è di metri 27,50, epperò fra l'asse dell'arcata e l'asse delle pile di m. 13,75 ; e che questi due assi distanti fra loro di m. 13,75 sono alle distanze rispettive di mill. 79 e mill. 32 dal punto principale, ho determinato in modo analogo a quello indicato al § 11 quanti millimetri debbono rappresentare in prospettiva le lunghezze di 1 metro, 2 metri, 3 metri ecc, a partire dal medesimo punto. Così si è potuto fare la scala che dà in metri le lunghezze delle orizzontali parallele al piano di fronte. In modo simile colle conoscenze di questa distanza fra i due assi accennati si sono potute calcolare le divisioni per le altre due scale.

Torino, luglio 1883.

ING. G. G. FERRIA.