NORME PRATICHE

SUL DISEGNO ASSONOMETRICO ORTOGONALE

MEMORIA

DELL'INGEGNERE G. G. FERRIA.

Sommario. - **I.** — 1. Scopo del disegno assonometrico — 2. Le condizioni arbitrarie nel disegno assonometrico ortogonale. — 3. Scale principali. — 4. Condizioni alle quali debbono soddisfare le scale principali. — Sfera principale. — 5. Di sei condizioni quattro sole sono arbitrarie. — 6. *Date due scale in grandezza e direzione determinare la terza.* — 7. Rappresentazione di un parallelepipedo, i cui spigoli sono paralleli ai tre assi principali. — 8. Scala delle lunghezze oggettive. — 9. Scale secondarie. — 10. *Essendo date le coordinate di un punto di una retta che passa per l'origine degli assi, determinare la scala corrispondente a questa retta.* — 11. Soluzione analitica dello stesso problema. — 12. *Dato sul disegno un arco di elisse rappresentativo di un arco di circolo dello spazio, dividere il primo in parti corrispondenti a divisioni uguali del secondo.*

II. — Applicazioni dei procedimenti esposti alla rappresentazione della parte di coronamento della cupola nella Mole Antonelliana.

III. — Soluzioni di problemi ausiliari che si presentano nella pratica del disegno assonometrico secondo il metodo suesposto.

I.

1. — È noto che proiettando con raggi paralleli una figura dello spazio sopra un piano, tutte le proiezioni di rette obbiettive parallele riescono parallele, e stanno fra loro negli stessi rapporti di queste. Di qui nasce che si potrebbe col semplice uso di scale opportune, variabili per ogni retta soltanto colla sua direzione, rappresentare le proiezioni di un oggetto su di un piano qualunque.

Tale è lo scopo del disegno assonometrico. Questo disegno si divide in *ortogonale ed obliquo* a seconda dell'angolo dei raggi proiettanti col piano di proiezione. Con questo disegno si possono ottenere speditamente delle figure le quali, mentre giovano assai per dare una giusta idea della forma dell'oggetto, danno anche modo di dedurne tutte le dimensioni valendosi di una proiezione sola : ciò che talvolta rende questo sistema preferibile a quello ordinario delle proiezioni Cartesiane.

Il disegno assonometrico peraltro viene generalmente insegnato nelle scuole ad uno scopo alquanto diverso da quello che si propone l'ingegnere pratico, dal che deriva soventi tale una difficoltà nelle applicazioni, da essere i pratici indotti a rinunciare al suo impiego.

Assunto del presente lavoro è di far vedere come si possa facilmente impiegare il disegno *assonometriche ortogonale* nei lavori di ingegneria desumendo la teorica di esso da considerazioni puramente pratiche e da principii elementari di geometria generalmente conosciuti.

2. — D' ordinario quando si deve fare il disegno di un oggetto si ha bisogno di stabilire a priori lo spazio approssimativo che deve occupare la figura, e di più la grandezza e la direzione di alcune linee rappresentative di determinate dimensioni di esso. In seguito è necessario coordinare tutte le linee relative ad altre dimensioni in quel modo che è compatibile colle linee prestabilite.

Prima questione da risolvere sarà pertanto di sapere *quante e quali sono le condizioni del problema che si possono stabilire a priori.* In seguito converrà vedere *quali convenga scegliere ad arbitrio e come da queste si possano dedurre tutte le altre.*

3. — Per semplificare la quistione considereremo dapprima il caso di tre rette sole nello spazio, fra loro ortogonali ed eguali.

Per passare da questo ai casi più complessi, riferiremo le linee del solido nello spazio a queste prime tre rette, che chiameremo assi, X, Y, Z, e vedremo come le proiezioni di quelle linee si colleghino alle proiezioni di questi assi. — Inoltre

potendo dalle proiezioni di questi assi passare a quelle di rette eguali al doppio, triplo ecc., ed in generale ad un multiplo, o sottomultiplo qualunque dei medesimi col semplice moltiplicare o dividere le corrispondenti proiezioni per 2, 3 ecc, designeremo queste ultime coi nomi di scale principali delle *x,* delle *y,* delle *z.*

Finalmente per maggiore comodità di esposizione , seguiremo la regola generalmente tenuta nei trattati di geometria descrittiva, di designare con lettere maiuscole i punti dello spazio, e colle stesse lettere, ma minuscole, le loro proiezioni.

4. — *Condizioni alle quali debbono soddisfare le scale principali.*

Sieno dunque O un punto dello spazio *(Tav.* 1, *Fig.* 1), che diremo *origine,* OX, OY, OZ i tre assi, ed *ox, oy, oz* le tre corrispondenti scale. — Immaginiamo che gli assi OX, OY rotino intorno all'asse OZ. Le loro estremità X e Y descriveranno nello spazio una medesima circonferenza di cerchio, la quale si proietta in una certa elisse sul piano del disegno, di cui, per essere *ox* ed *oy* le proiezioni di due raggi fra loro perpendicolari nello spazio, saranno *ox* ed *oy* due semidiametri coniugati. Analogamente possiamo subito dire che le elissi costrutte sui semidiametri coniugati *ox, oz* ed *oy, oz* saranno rispettivamente le proiezioni delle circonferenze di circolo che si otterrebbero dalle rotazioni del sistema dato, prima intorno all'asse OY, poi all'asse OX. E perchè questi assi sono fra loro eguali, si avranno nello spazio tre circonferenze di circoli massimi, appartenenti ad una medesima sfera, che diremo *sfera principale,* fra loro perpendicolari ; i cui piani coincidono coi piani coordinati.

Ora questa sfera si proietterà sul disegno in un circolo avente per raggio le lunghezze comuni degli assi X, Y, Z. Di più essa sarà pure la proiezione del circolo massimo, che si può intendere come la sezione fatta da un piano parallelo a quello del disegno dentro la sfera.

Questo circolo conterrà due diametri per ciascuno dei circoli dianzi accennati, i quali, diametri per essere paralleli al piano del foglio, si proiettano in vera grandezza ; e perciò saranno i diametri massimi di quelle elissi, ossia i loro grandi assi. Consegue che i *grand' assi delle tre elissi formate sulle scale* ox, oy, oz, *prese due a due, devono essere fra loro eguali.*

5. — Considerando che date due delle rette che abbiamo denominate *scale,* si può sopra di esse come semidiametri coniugati costruire una sola elisse ; che perciò è determinato il grand'asse di questa; e per conseguenza anche il raggio della sfera principale, e quel circolo massimo di essa che si proietta in questa elisse; e conseguentemente quel raggio della sfera che è normale a questo circolo massimo ; e che questo raggio coinciderà in lunghezza e direzione colla terza scala ; consegue ancora che *date due delle scale in grandezza e direzione, è data implicitamente in grandezza e direzione anche la terza.*

Onde senz'altro si comprende subito come *delle sei condizioni relative alle grandezze ed alle direzioni delle scale, quattro sole possono essere arbitrarie.* Ed è così risposto alla prima quistione che ci proponevamo di risolvere.

Fra le condizioni che nella pratica meglio torna lo stabilire a priori sono generalmente due delle scale per grandezza e direzione, lasciando intieramente indeterminata la terza. Risolveremo pertanto questo:

6. — **Problema.** — *Date in grandezza e direzione due scale, determinare la terza.*

Da quanto si è veduto precedentemente risulta che si può procedere come segue : Costrutta l' elissi *xy, x'y',* che ha per semidiametri coniugati le scale *ox* ed *oy,* si segni il suo grand'asse *aa',* indi si immagini che il circolo in essa proiettato roti intorno alla retta AA' fino a diventare parallelo al piano del foglio, allora la sua proiezione verrà a coincidere col circolo di centro *o* e raggio *oa.* Intanto poichè la terza scala cercata è la proiezione di una certa retta OZ dello spazio normale al piano delle OX ed OY, sarà normale alla retta AA' contenuta nel piano di esse ; epperò anche alla retta *aa'* a questa parallela. Consegue che il terzo asse OZ nella sua rotazione intorno alla AA' descrive un cerchio il cui piano è normale alla retta *aa';* vale a dire è un piano di profilo, e che perciò questo cerchio si proietterà tutto sulla retta *zz',* normale alla *aa',* passante per O.

In altri termini *la direzione della terza scala è quella dell' asse minore dell' elisse costrutta sulle prime due.* — Diciamo *bb'* quest' asse minore.

Ciò posto determiniamone la lunghezza. A tal uopo si rabatta il piano di profilo che contiene l'asse OZ sul piano del foglio, facendolo girare intorno alla sua traccia *bob'.* Sia gg' la posizione che viene a prendere la retta ZOZ' dopo il rabattimento. Il centro O della sfera andrà in w, intersezione della retta *aa'* prolungata colla gg', e la circonferenza di quel circolo proiettato in *zoz'* andrà in gw'g', circonferenza descritta con centro in w e raggio uguale ad *oa.* Intanto il semiasse minore *ob* della elisse *xyx'y',* il quale manifestamente è la proiezione di un raggio della sfera che giace contemporaneamente sul circolo proiettato in *xyx'y',* ed in quello proiettato in *zoz',* cadrà in wb, essendo b la intersezione della circonferenza gw'g' colla perpendicolare condotta da *b* sopra gg'. Ora questo raggio, per essere contenuto in un piano normale all'asse cercato OZ, è pur esso normale a quest'asse; il quale perciò dopo il rabattimento dovrà trovarsi sul piano della circonferenza gw'g' ed essere normale al raggio wb. Per determinarlo basterà pertanto condurre il raggio wz normale ad wb ed il punto z sarà la posizione, che dopo il rabattimento avrà preso il punto Z, in cui l'asse cercato OZ incontra la superficie della sfera principale.

Se finalmente immagineremo che la figura ritorni al suo posto, il punto z descriverà nello spazio un quarto di circonferenza, e verrà a proiettarsi sull' asse *oz'* nel punto *z*, intersezione dell'asse minore *bb'* prolungato dell'elissi *xyx'y'* colla perpendicolare condotta dal punto z sopra quest'asse medesimo.

È evidente che si può semplificare questa costruzione, immaginando che la distanza arbitraria *ow* sia ridotta a zero, allora la circonferenza gw'g' verrà a coincidere colla *cac'*, e la regola per determinare la direzione e la grandezza della terza scala essendo date le prime due sarà la seguente:

Si determinino i due assi aa', bb' *della elisse costrutta sulle due scale date* ox *ed* oy, *assumendole come semidiametri coniugati. Indi nel centro* o *di essa, con raggio uguale al semiasse maggiore* oa *si descriva una circonferenza di cerchio. Sia* b_1 *la proiezione del vertice* b *su quella circonferenza fatta parallelamente ad* aa'. *Si tiri il raggio* ob_1 *e la retta* oz_1 *normale a questo raggio. Finalmente si segni la proiezione* z *del punto* z_1 *sull'asse* zz' *fatta parallelamente ad* aa', *e sarà* oz *la terza scala cercata.*

Per completare queste scale non rimane più che a dividere le lunghezze *ox, oy, oz* nello stesso numero di parti aliquote. Nelle figure delle tavole unite alla presente memoria, esse vennero costantemente divise in 10 parti uguali.

7. — Determinate così le tre scale relative ai tre assi, si potranno con esse rappresentare in grandezza e direzione tutte le linee che sono parallele a qualcuno di questi assi. Così p. e. vogliasi rappresentare il disegno di un parallelepipedo di cui gli spigoli paralleli ai tre assi OX, OY, OZ sono rispettivamente lunghi 10, 12, 5 Preso un punto M ad arbitrio sul piano del foglio *(Tav.* 1, *Fig.* 2*),* per esso si conducono tre rette parallele rispettivamente ad *ox, oy, oz,* e si portano su di esse le lunghezze date misurandole sulle scale relative. La semplice ispezione della figura, spiega il modo di completare la soluzione.

8. — Come si è veduto più sopra, i grandi assi delle elissi coincidenti coi piani coordinati, sono le proiezioni in vera grandezza di raggi della sfera paralleli al piano del disegno.

È pertanto manifesto che dividendo uno qualunque di essi nello stesso numero di parti uguali, in cui si sono divise le scale, si può sempre facilmente misurare con esso, considerandolo come una scala, la lunghezza reale di una retta nello spazio che si proietta in una certa lunghezza di una delle determinate scale precedenti. Giova pertanto formare questa scala, che si può chiamare delle *lunghezze oggetlive.* In figura essa è disegnata sul raggio *oa.*

9. *Scale secondarie.* — Come si vede il problema della rappresentazione delle scale, corrispondente ad un sistema qualunque di rette parallele si riduce a disegnare in proiezione il raggio della sfera principale parallelo a queste rette. Potendosi manifestamente coll'aiuto delle scale principali rappresentare due punti di una retta, bastano queste sole per la rappresentazione di qualunque sistema di rette note di posizione rispetto a tre assi. Tuttavia giova assai nella pratica por semplificare la formazione, e 1' uso del disegno di rappresentare le scale dirette non parallele agli assi. Chiameremo queste *scale secondarie.* Senza nulla togliere alle sue generalità, è manifesto che possiamo enumerare nei termini seguenti il relativo :

10. Problema. — *Essendo date le coordinate di un punto di una retta passante per l'origine degli assi, determinare la scala corrispondente a questa retta.*

Soluzione. Tutto si riduce manifestamente a determinare la proiezione del punto in cui questa retta ferisce la superficie sferica principale. Unita questa proiezione colla origine delle scale, avremo la lunghezza della scala cercata, e non si tratterà più che di dividerla in parti aliquote.

Siano, per fissare le idee, *x=10, y=17, z=l3* le coordinate del punto dato, prendiamo su *oy* la lunghezza *oh*=17, tiriamo da *h* parallelamente ad *ox* la retta *hi*=10, e da *i* parallelamente ad *oz* la *ik*=13.

Il punto *h* sarà la proiezione del punto (10, 17, 13), ed *oh* quella della retta in questione. Si tratta ora di vedere in qual punto la OK ferisca la superficie della sfera principale.

Immaginiamo il piano che passa per la retta OK e l' asse OZ, esso taglia la sfera secondo un circolo massimo, che passa pel punto cercato, che diremo N. Facciamo girare questo piano intorno al punto O, finchè diventi parallelo al piano del foglio, e poi proiettiamo questo circolo sul piano del disegno ; e per determinare meglio il modo di rotazione proponiamoci che la retta OI, intersezione di quel piano ZOK, col piano XOY scorra su quest' ultimo piano finchè divenga parallela al grand' asse *oa'* dell'elisse *xyx'y'* ; ed in seguito che la OZ diventi pur essa parallela al piano del disegno.

Nel primo movimento il raggio oa_1 andrà a coincidere coll'asse *oa'*, e la retta *oz* non si muoverà. Nel secondo rimarrà immobile l'asse *oa'* e si muoverà l'asse *oz.* Ma nel movimento di rotazione attorno all'asse OA' che manifestamente dovrà prendere la retta OZ' per divenire parallela al piano del disegno, dovendosi questa mantenere normale alla OA', epperò alla *oa',* la nuova direzione della *oz'* coinciderà ancora con quella di prima ; solo avverrà che la lunghezza di OZ dovendosi proiettare ora in vera grandezza, l'estremità *z* andrà a cadere sulla circonferenza *ab'a'e.*

Questo avviene per il punto *z* della retta *oz.* Se invece si trattasse di un altro punto *l* della stessa retta si troverebbe un altro punto *l',* che si determinerebbe risolvendo graficamente l'equazione

$$ol'=\frac{ol}{oz}\,oc$$

Se pertanto il punto *l* si prende colla stessa ordinata 13 del punto *k*, sarà *ol'* la lunghezza che questa ordinata dopo fatto il rabattimento.

Ciò premesso si vede subito che per risolvere la quistione data si può condurre la retta a_1a', essendo *a*, il punto d'incontro della retta *oi* colla elisse *xyx'y'*, poi per *i* la *ii'* ad essa parallela sino ad incontrare in *i'* la *oa'* prolungata ; poi la *i'k'* parallela ad *oz* e portare su di essa la *i'k'=ol'* ; e tirare la *ok'.*

Infatti poichè le rette *oi', i'k'* sono le posizioni che vengono ad assumere le *oi, ik,* dopo che esse sono divenute parallele al piano del disegno, cosa analoga avverrà della retta *ok'.*

Intanto è manifesto che se noi immaginiamo la sezione fatta del piano ZOI dentro la sfera, e supponiamo che abbia seguito questo piano nel suo movimento con cui è divenuto parallelo al piano del foglio, questa sezione sarà venuta a coincidere col circolo proiettato in *ac'a'c.* — Perciò dopo questa rotazione noi vedremo rappresentata la proiezione di quel certo punto N cercato nel punto v, intersezione del circolo *ac'a'c* colla retta *ok'.*

Immaginiamo ora che la figura ritorni a posto. Il punto *k'* ritornerà in *k,* passando dalla retta *ok'* alla *ok.* Cosa analoga avverrà del punto *v* che giace pure sulla *ok'* Il punto N cercato cadrà adunque nella intersezione della retta *ok* colla *v*N parallela a *k'k.*

La retta oN sarà adunque la scala secondaria cercata e non rimarrà più che a dividerla in parti eguali.

11. — Lo stesso problema si può anche risolvere più speditamente per mezzo delle scale principali e quelle delle grandezze vere, procedendo come segue.

Essendo 10, 17, 13 le cordinate del punto dato sarà :

$$oK=\sqrt{10^2+17^2+13^2}=\sqrt{558}=23{,}622$$

misurate nella scala delle lunghezze vere. Ma nel disegno OK è rappresentata dalla frazione *ok* di OK, per la stessa ragione diremo che oN sarà la stessa frazione di o*v*, ossia di 10, cioè :

$$oN=ok\frac{10}{23{,}662}$$

12. — Un caso pratico che soventi si presenta è quello espresso nel seguente

Problema. — *Dato sul disegno un arco di elisse rappresentativo di un arco di cerchio dello spazio, dividere il primo in parti corrispondenti a divisioni uguali del secondo.*

Siano a_1d_1b l'arco di elisse (*Fig.* 3), a_1b la corda, ed_1 la proiezione della saetta dell'arco di circolo, e siano rispettivamente *ox* ed *oy* (*Fig.* 1) le scale di queste due rette. Si immagini che il piano dell'arco A_1D_1B giri nello spazio sino a divenire parallelo a quello del disegno, rotando p. es. attorno al punto O in modo che la corda A_1B diventi parallela al grand'asse *aa'* dell'elisse *xyx'y'* in A_2B. Poi il piano A_1D_1B intorno ad *aa'* fino a divenire parallelo al piano del foglio. In questo movimento l' arco di elisse a_1d_1b si trasformerà nell' arco di circolo $a_2d'_2b$, di cui a_2b sarà parallela ad *aa'* della *Fig.* 1, e sarà

(*Fig.* 3) $$\frac{ba_1}{ba_2}=\frac{ox}{oa}$$ (*Fig.* 1).

La saetta $e'd'_2$ sarà parallela ad *oz* (*Fig.* 1), e sarà

(*Fig,* 3) $$\frac{e'd'_2}{ed_1}=\frac{oa}{oy}$$ (*Fig.* 1).

Tracciato 1' arco di circolo passante pei punti $a_2d'_2b$ lo si divida in parti uguali, e sia p. e. m uno dei punti di divisione — si proietti m in m_2 parallelamente alla $e'd'_2$ sulla a_2b ; poi si proietti m_2 in m_1 sulla *ab* parallelamente alla *a'a* ; finalmente si proietti m_1 in *m* sull' arco di elisse parallelamente ad *ed* — sarà m_1 il punto di divisione dell'arco di elisse che corrisponde al punto di divisione *m* dell'arco di circolo nello spazio. — Come facilmente si comprende questa è la conseguenza del movimento di restituzione che possiamo immaginare dell'arco $a_2d'_2b$ alla sua forma primitiva a_1d_1b.

Qualora si dovessero segnare pei punti di divisione dell'arco delle linee dirette secondo i raggi, come avviene p. e. nella rappresentazione dei giunti degli archi in muratura, basterebbe determinare il centro c_1 dell'arco di circolo, poi con una semplice proporzione determinare il centro *c* dell' elisse, prendendo sulla saetta d_1e prolungata la lunghezza $d_1c=d'_1c_1\frac{d_1e}{d'_1e'}$; finalmente pel punto *c* e per ciascuno dei punti di divisione come *m,* condurre una retta che sarà quella cercata rappresentativa del punto corrispondente,

II.

Applicazione.

Come saggio del procedimento esposto per le proiezioni assonometriche normali si presenta nella tavola 3 uno studio sulla parte di coronamento della cupola nella Mole Antonelliana.

III.

Soluzioni di problemi ausiliari che si presentano nella pratica del disegno assonometrico secondo il metodo suesposto.

Nell'applicazione del metodo che siamo venuti esponendo non si presentano difficoltà vere da risolvere, solo giova aver presente le soluzioni di varii problemi che si riferiscono alle proprietà della elisse, per cui è pregio dell'opera ricordare qui le più importanti.

1. *Dati i due semiassi* OA *e* OB *descrivere la elisse e la normale (Tav.* 1, *Fig.* 4).

Soluzione. — Centro in O e con raggi rispettivamente uguali ad OA, OB, OA+OB si descrivano tre circoli. Si tiri un raggio qualunque, e siano *m, m' m''* i punti d'incontro colle tre circonferenze minore, media e maggiore. Si conduca per *m* una parallela ad OA, per *m'* una parallela ad OB; il loro punto d'incontro M appartiene all'elisse. La retta *m''M* è la normale in questo punto.

2. **Altra costruzione dell'elisse.** *(Tav.* 1, *Fig.* 5). —Si descriva sul grand' asse AB una semicirconferenza ADB e si segnino le ordinate di vari punti di essa, in seguito si segni su ciascuna di queste il punto che diremo M, il quale la divide in due parti, che stiano fra loro nel rapporto dei due assi. Il luogo dei punti M è la elisse cercata.

3. — *Costrurre l' elisse di cui sono dati il grand'asse e i due fuochi (Tav.* 1. *Fig.* 6).

Sia AB il grand'asse ed F'F' i due fuochi, preso un punto qualunque D sul grand' asse si descrivano con centri in F ed F', e con raggi rispettivamente uguali ad AD e BD due archi di circolo. Il loro punto d'incontro C è un punto dell'elisse.

4. *Dati in grandezza e posizione due diametri coniugati, costrurre l'elisse (T.* 1, *Fig.* 7).

Siano AA', BB' i due diametri coniugati, O il centro. Si descriva sopra uno di essi p. e. BB' una circonferenza di circolo. Si determini il punto E di essa, che si trova sulla perpendicolare alla BB', e si tiri la retta EA. Indi proiettato un punto qualunque M della circonferenza sul diametro BB' si conduca sul punto di proiezione che diremo M_1 una parallela ad AA' e da M una parallela ad EA, il loro incontro M' appartiene all'elissi.

5. **Altra soluzione** *(Tav.* 2, *Fig.* 1). — Si conducano per le estremità AA' e BB' due rette parallele a questi diametri, esse racchiuderanno un certo parallelogramma di vertici C, D, E, F che sarà circoscritto all' elissi. Si prolunghi ED, della quantità DG=DB'; si divida BF in un certo numero di parti eguali, e sieno 1, 2, 3.... i punti di divisione. Si tiri da ciascuno di questi punti una retta passante pel punto G, si otterranno così altri punti di divisione sul lato DF del parallelogramma. Si segnino nell' ordine inverso di quello dei precedenti i nuovi punti di divisione, e si tirino le rette 1.1, 2.2, 3.3. ecc. Tutte queste rette saranno altrettante tangenti dell'elisse.

6. — *Altra costruzione dell'elisse per mezzo delle tangenti, essendo dati due diametri coniugati (Tav.* 2, *Fig.* 1).

Costrutto il parallelogramma DCEF come nel caso precedente, si tiri la retta AB', e dal punto E la retta *Em m''* che passa per un punto qualunque *m* di essa e sia *m''* il suo punto di incontro colla CB'. Si conduca per *m* una parallela alla AA', e sia *m'* il suo punto di incontro colla CA. Si tiri la m'*m''*, essa sarà tangente all'elisse.

7. — *Dati due diametri coniugati* AA' e BB', *costrurre gli assi (Tav.* 2, *Fig.* 2).

Per 1' estremità B' di uno di essi si conduca la normale all' altro. Indi a partire dal punto B', si prendano da una parte e dall' altra due lunghezze B'D e B'C eguali al semidiametro OA, e sieno D e C i punti così determinati. La bisettrice dell'angolo COD ha la direzione del grand'asse; la normale ad essa ha quella dell' asse minore. Quanto alle lunghezze dei semiassi sono date dalle relazioni

$$OA_1 = \frac{OD+OC}{2}$$

$$OB_1 = \frac{OD-OC}{2}.$$

8. — *Data un'elisse determinarne il centro e gli assi (Tav.* 2, *Fig.* 3).

Sia ABA'B' l'elisse. Si conducano due corde parallele fra loro EP, GH. Si conduca la retta che passa pei loro punti di mezzo, questa sarà il lor diametro coniugato. Il suo punto di mezzo O sarà i centro dell'elisse.

In seguito facendo centro in questo punto e con un raggio qualunque si descriva una circonferenza di circolo; essa taglierà l'elisse in quattro punti K, K', L, L' che determinano un rettangolo. Gli assi dell'elissi sono le corde condotte per O parallelamente ai lati di questo rettangolo.

9. — *Dato un punto sopra un'elisse, di cui si conoscono i fuochi, condurre per questo la tangente e la normale (Tav.* 2, *Fig.* 4).

Sieno M il punto, ed F e F' i fuochi; si tirino i raggi vettori FM, F'M che vanno a questo punto. La tangente e la normale dividono per metà gli angoli da essi formati.

10. — *Risolvere il problema precedente, quando si conoscono soltanto la curva ed il grand'asse (Tav.* 1, *Fig.* 5).

Si descriva sul grand'asse come diametro la semicirconferenza e si determini il punto H di essa che ha la stessa proiezione P sul grande asse del punto dato M. Si determini il punto T, d'incontro di esso col grand'asse prolungato; la retta TM è la tangente cercata.

11. — *Condurre la tangente ad un' elisse, per un punto esterno, quando si conoscono i fuochi, l' asse maggiore e la curva (Tav.* 2, *Fig.* 7).

Sia M il punto, XX' la curva; si descriva con centro in M, un circolo di raggio MF, essendo F uno dei fuochi. Centro nell'altro fuoco, e con raggio uguale al grand'asse, si tagli quest' arco, e sia D il punto d'intersezione. Si tiri la retta F'D. Il punto X d'incontro colla curva è il punto di tangenza. Le soluzioni evidentemente sono due.

12. — *Risolvere il problema precedente quando fossero dati soltanto il punto esterno, e la curva (Tav.* 2, *Fig.* 6).

Sia ABCD la curva ed M il punto dato. Si conducano per M varie rette MA, MB, MC, che taglino la curva. Due a due i punti d'intersezione determinano i vertici di un quadrilatero, di cui le diagonali si incontrano in punti come E e G che giaciono tutti su una medesima retta AA'. Questa retta taglia l'elisse nei due punti A ed A' di tangenza, che risolvono il problema.

13. — *Costrurre il raggio di curvatura dell'elisse in un punto dato (Tav.* 2, *Fig.* 5).

Sia ABA'B' l'elisse, M il punto; per uno dei fuochi p. e. F', si conduca la retta MF' e si prolunghi fino al suo punto d'incontro H coll'elisse. Si tiri la normale in M alla curva, e da H una perpendicolare HK ad HM ; il punto d'incontro K di queste due ultime rette determinerà la lunghezza del raggio cercato.

I centri di curvatura G ed N nei vertici AB' si trovano nei punti d'incontro G ed N della normale alla retta AB' che unisce questi vertici, condotta pel punto C d'incontro delle tangenti ai medesimi.

14. — *Dato il grand'asse di un elisse, due tangenti ed il centro, determinare i fuochi (Tav.*3,*Fig.*1).

Sieno AB il grand'asse MN e PQ le due tangenti, O il centro. Centro in O con raggio uguale alla metà di AB si descriva un cerchio, esso taglierà le due tangenti in quattro punti T, U, R, S. Per ciascuno di questi punti si conduca una normale alla tangente, sulla quale si trova. Le quattro normali si incontreranno a due a due nei fuochi dell'elisse.

Torino, Febbraio 1884.

Ing. G. G. FERRIA.