POLITECNICO DI TORINO

ESAMI DI STATO PER L'ABILITAZIONE ALLA PROFESSIONE DI INGEGNERE

I SESSIONE -ANNO 2000

Ramo: Ingegneria Nucleare Tema N. 1

Misurazione delle proprietà di moltiplicazione di fluidi. Preliminari per l'applicabilità di tecniche a neutroni pulsati.

Premesse.

In una delle sue fasi di lavorazione, un impianto di riprocessamento di combustibili nucleari si trova ad operare su un particolare **fluido moltiplicante,** che contiene disciolti, insieme alla frazione residua del fissile presente nel combustibile riprocessato, anche prodotti di fissione e svariati transuranici (attinidi maggiori e minori), in parte anch'essi fissili. Data la complessità del processo chimico adottato e l'imprecisa conoscenza del burn-up dei combustibili trattati, le concentrazioni dei diversi nuclidi disciolti nel fluido e anche le composizioni isotopiche dei transuranici, sono di **difficile identificazione**.

È perciò richiesto di studiare la fattibilità di una apparecchiatura adatta a misurare, almeno in prima approssimazione, il "*buckling materiale*" B_M^2 e il *coefficiente di diffusione* D del fluido moltiplicante di cui sopra.

I risultati delle misure saranno utilizzabili non solo per prevenire eventuali inneschi casuali di criticità nelle manipolazioni del fluido stesso, ma anche per **qualificarne** le proprietà moltiplicanti, in vista di un suo eventuale impiego, senza ulteriori trattamenti, come materiale da irraggiare in un sistema sottocritico di potenza, dedicato alla produzione di energia e/o alla trasmutazione nucleare di scorie ad alta attività.

Per la determinazione di B_M^2 e D viene proposto di effettuare, su diverse porzioni del materiale da qualificare, una serie di **esperimenti pulsati**, analoghi a quelli già messi a punto per lo studio dei moderatori. Queste tecniche, anche per l'applicazione ora in esame, richiederanno un apparato

costituito da un iniettore di neutroni e da una catena a risposta rapida, per la rilevazione del flusso neutronico termico, sia locale che integrato sul volume, nel corso del decadimento di ogni impulso.

È previsto che i neutroni pulsati siano iniettati simmetricamente, e con perfetto sincronismo, attraverso le due pareti opposte $x = -H/2$ ed $x = H/2$ di alcune vasche parallelepide, di diversi spessori H, contenenti il fluido. Le considerevoli dimensioni trasversali di tali vasche ci permettono di trattarle come **slab unidimensionali**. Il sincronismo delle due sorgenti viene realizzato sdoppiando il raggio dell'acceleratore di particelle cariche, che dà luogo alla creazione dei neutroni di sorgente. Dato che i neutroni di ciascun impulso vengono iniettati con elevata velocità media, è necessario attendere che essi abbiano raggiunto l'energia termica nel fluido in studio, prima di dar corso a ciascuna delle successioni di misure istantanee di flusso, che sono necessarie per determinare i valori delle costanti di decadimento asintotiche.

La sofisticata elettronica oggi disponibile è in grado di produrre, in tempo praticamente reale e non appena sia avvenuta la termalizzazione di ciascun impulso, il grafico spaziale del traffico neutronico, che potrà essere considerato, per convenzione, come lo **"stato iniziale"** di flusso termico $\Phi_0(x)$.

Sistematici rilevamenti sperimentali di tale stato iniziale hanno permesso di interpolarne l'andamento spaziale con la seguente rappresentazione analitica, che è simmetrica, come prevedibile in base alla simmetria dell'eccitazione, rispetto al piano mediano $x = 0$ della vasca:

$$\Phi_0(x) = 2 \cdot \varphi_1(x) - (\varphi_2(x) + \varphi_3(x)) \,. \tag{1}$$

Ciascuna $\varphi_n(x)$ rappresenta la funzioni normalizzata

$$\varphi_n(x) \doteq \sqrt{\frac{2}{H}} \cos\left(\frac{2n-1}{H}\pi \cdot x\right), \quad (n = 1, 2, ..., \infty), \tag{2}$$

ossia l'$n-$esima autofunzione simmetrica del problema di Helmholtz per lo slab di spessore H. Si può ammettere che la stessa rappresentazione analitica (1) di $\Phi_0(x)$ sia valida per tutti gli spessori H degli slab che si dovranno considerare.

Inoltre misurazioni sperimentali, effettute su *piccoli campioni* del fluido moltiplicante, pre-irraggiati con neutroni, permettono di valutare con buona precisione una *costante media di decadimento* $\hat{\lambda}$ dei precursori di ritardati, che vi si formano a seguito delle fissioni. Questo risultato rende giustificabile l'adozione di una tecnica interpretativa degli esperimenti pulsati, che si basi, per i neutroni, sulla diffusione monocinetica, e, per i precursori, su un modello ad **una sola famiglia di precursori**.

Nella fase di messa a punto della tecnica sperimentale, gli Strumentisti hanno effettuato alcune misure di prova, su slab notoriamente sottocritici. È stato ottenuto un risultato a prima vista sconcertante: a seguito di uno stato iniziale del tipo (1) si è trovato che il transitorio di **potenza** sembrava avere una prima fase ad andamento **crescente**. E ciò nonostante che venissero iniettati esclusivamente neutroni (senza, ovviamente, alcun precursore!) e che si fosse in presenza di uno stato di documentata sottocriticità. Questo risultato sperimentale ha minacciato di mettere in crisi tutto il programma di ricerca: fino a quando non è stata chiesta una spiegazione dell'apparente anomalia sopra descritta ad un team di qualificati Ingegneri Nucleari.

Posizione del Problema.

Fatte queste premesse, è richiesto al candidato:

D1) di stabilire se in uno slab moltiplicante sottocritico, trattabile con un'unica famiglia di precursori di ritardati, possa accadere o meno che, partendo dallo stato iniziale (1), si inneschi un transitorio **di spegnimento**, nel quale la potenza totale risulti *inizialmente crescente*. In caso affermativo si dia una giustificazione fisica, anche solo intuitiva, di questo fatto, che tenga conto della particolare dislocazione spaziale dei neutroni presenti all'istante $t = 0$.

E si spieghi per quale ragione neppure un'eventuale crescita iniziale della potenza, osservata in qualcuno o anche in tutti i dipositivi sottocritici impiegati, possa inficiare a priori la validità della tecnica pulsata di misura di B_M^2 e D, che verrà qui proposta e discussa.

Ai fini delle valutazioni di cui sopra si suggerisce di usare, ad esempio, i dati della seguente tabella:

$\nu = 2.4$ n per fissione
$\Sigma_f = 5.0297 \cdot 10^{-3}$ cm^{-1}
$\Sigma_a = 1 \cdot 10^{-2}$ cm^{-1}
$D = 0.8$ cm
$v = 2.2 \cdot 10^5$ cm·s^{-1}
$\hat{\beta} = 0.0065$
$\hat{\lambda} = 0.01$ s^{-1}
$H = 60$ cm .

Per la determinazione simultanea di D e B_M^2 è stato proposto di effettuare **tre serie di misurazioni**, su tre slab di diverso spessore, H_1, H_2 e H_3, con valutazione delle tre costanti di decadimento asintotiche p_1, p_2 e p_3, associate

alle rispettive armoniche fondamentali. Da queste misure, supposta nota la velocità media dei neutroni, dovrebbe essere possibile ricavare i valori incogniti del coefficiente di diffusione D e del buckling materiale B_M^2 del mezzo moltiplicante, insieme ad *un' ulteriore variabile materiale,* che chiameremo semplicemente x_3. Infatti: utilizzando, per la sola armonica fondamentale, l'**inhour equation**, ad es., nella seconda (e ben nota) forma sottoriportata:

$$p + v\Sigma_a L^2 B_G^2 - v\Sigma_a \left[k_\infty - 1\right] + v\Sigma_a k_\infty \hat{\beta} \frac{p}{p+\hat{\lambda}} =$$
$$= p + B_G^2 \cdot vD - 1 \cdot vDB_M^2 + \frac{p}{p+\hat{\lambda}} \cdot vD\hat{\beta}\frac{(1+L^2B_M^2)}{L^2} = 0,$$

considerando come grandezze **note** le costanti di tempo asintitoche p_j, misurate in corrispondenza di ciascuno dei tre bukling geometrici $(B_G^2)_j \doteq \left(\frac{\pi}{H_j}\right)^2$, $(j = 1, 2, 3)$ e prendendo come incognite le seguenti grandezze:

$$x_1 \doteq vD \ , \qquad x_2 \doteq vDB_M^2 \ , \qquad x_3 \doteq vD\hat{\beta}\frac{1+L^2B_M^2}{L^2} \ ,$$

dovrebbe essere facile calcolare D, B_M^2 e x_3.

D2) Il candidato valuti la praticabilità sperimentale della procedura suggerita; ne proponga, se lo ritiene possibile, una più semplice, e dia una qualche indicazione circa un metodo per stabilire l'**accuratezza** richiesta nella determinazione delle costanti di decadimento p_j , se si vuole contenere l'errore di misura del B_M^2 entro l'1.0 % (È ammesso qui ipotizzare un errore nullo per tutte le altre grandezze).

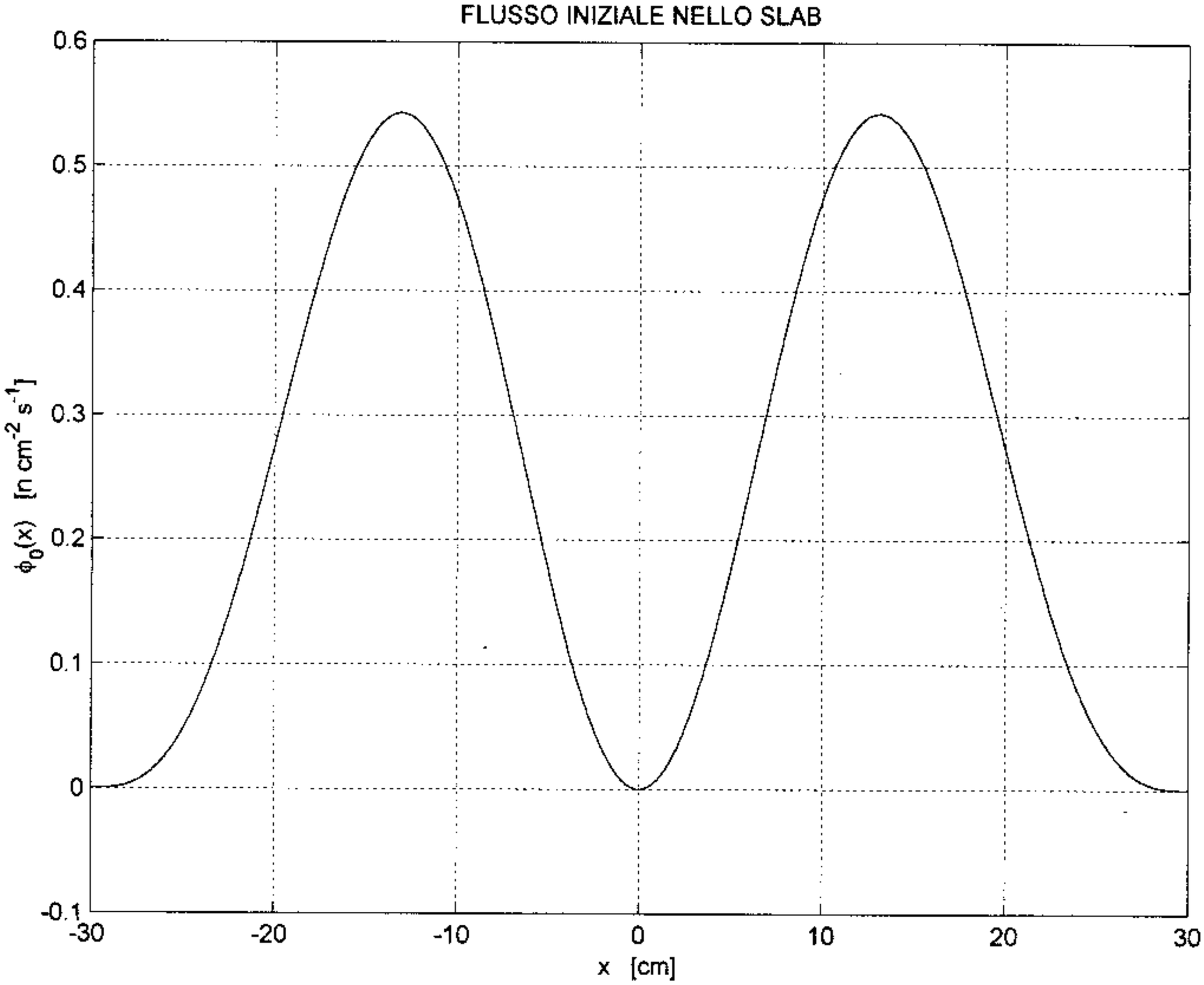
D3) Dato che, a seguito di ripetuti impulsi di sorgente, nel materiale moltiplicante si formeranno progenitori di ritardati, si stabilisca, almeno intuitivamente, qual'è il valore della **frequenza degli impulsi** che non può essere superato senza correre il rischio che il fondo di emissioni ritardate, che residua nello slab irraggiato, possa compromettere l'accuratezza della misura.

D4) Si indichino sommariamente i principali problemi di **sicurezza,** che potrebbero sorgere nell'esecuzione pratica di misure del tipo di quelle sopra proposte.

Nota. Si diano ordinatamente le risposte R1, R2, ...,.R4 alle domande D1, D2, ...,D4, presentando la trattazione in veste di *relazione tecnica professionale.*

Le minute non potranno essere prese in considerazione dalla Commissione.

Sono **allegati** il grafico della funz. (1) e alcune formule teoriche, utili per lo svolgimento del tema.


FLUSSO INIZIALE NELLO SLAB
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
$\phi_0(x)$ [n cm^{-2} s^{-1}]
-30
-20
-10
0
10
20
30
x [cm]

Si ricordi innanzitutto, circa tale denominatore, una volta richiamate le definizioni seguenti di "**costante di moltiplicazione effettiva**" e "**vita media**", per ogni armonica:

$$k_{eff}^{(n)} \doteq \frac{k_\infty}{1+L^2B_n^2}, \qquad l^{(n)} \doteq \frac{1}{v\Sigma_a(1+L^2B_n^2)},$$

e di "**reattività**" statica:

$$\rho^{(n)} \doteq \frac{k_{eff}^{(n)}-1}{k_{eff}^{(n)}} = 1-\frac{1}{k_{eff}^{(n)}} \Rightarrow k_{eff}^{(n)} = \frac{1}{1-\rho^{(n)}}, \tag{II.19}$$

che ognuna di queste grandezze[9] è da considerarsi perfettamente nota, relativamente alla frazione dei neutroni che è distribuita secondo la n^{ma} autofunzione del ∇^2.

Vale la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_n(p) &= p + v\Sigma_a L^2B_n^2 - v\Sigma_a[k_\infty - 1] + v\Sigma_a k_\infty \beta \frac{p}{p+\lambda} \\
&= p + v\Sigma_a(1+L^2B_n^2) - v\Sigma_a(1+L^2B_n^2)\frac{k_\infty}{1+L^2B_n^2} + \\
&+ v\Sigma_a(1+L^2B_n^2)\frac{k_\infty \beta p}{(1+L^2B_n^2)(p+\lambda)} \\
&= p + \frac{1}{l^{(n)}} - \frac{k_{eff}^{(n)}}{l^{(n)}}\left[1-\frac{\beta p}{p+\lambda}\right] = \frac{1}{l^{(n)}}\left[1+pl^{(n)} - \frac{1}{1-\rho^{(n)}}\left(1-\frac{\beta p}{p+\lambda}\right)\right] \\
&= \frac{1+pl^{(n)}}{l^{(n)}[\rho^{(n)}-1]}\left[\rho^{(n)} - 1 + \frac{1}{1+pl^{(n)}}\left(1-\frac{\beta p}{p+\lambda}\right)\right] \\
&= \frac{p+(1/l^{(n)})}{\rho^{(n)}-1}\cdot\left[\rho^{(n)} - \left(\frac{pl^{(n)}}{1+pl^{(n)}} + \frac{\beta p}{(1+pl^{(n)})(p+\lambda)}\right)\right] \\
&\doteq \frac{(p+1/l^{(n)})}{\rho^{(n)}-1}\cdot[\boldsymbol{I}^{(n)}(p)]
\end{aligned} \tag{II.20}$$

9 Notare che: $-\infty < \rho^{(n)} \ll 1$, $\lim_{n\to\infty} \rho^{(n)} \to -\infty$, mentre $\lim_{\to\infty} k_{eff}^{(n)} = 0^+$.

inhour equation e valgono, rispettivamente:

$$\boxed{p^{(n)}_{(1),(2)} = \frac{-[\lambda l^{(n)}(1-\rho^{(n)})+\beta-\rho^{(n)}] \pm \sqrt{[\lambda\, l^{(n)}(1-\rho^{(n)})+\beta-\rho^{(n)}]^2 + 4\lambda\rho^{(n)} l^{(n)}(1-\rho^{(n)})}}{2(1-\rho^{(n)})l^{(n)}}} \qquad (II.22)$$

Naturalmente è in potere di chi opera il reattore determinare le costanti fisiche e, quindi, il valore della $\rho^{(0)}$ per l'armonica fondamentale. Fissata $\rho^{(0)}$ tutte le $\rho^{(n)}$ acquistano un ben preciso valore, assegnato dalla loro definizione, ed è sempre $\rho^{(n+1)} < \rho^{(n)}, \forall\, n$.

Dalla (22) risulta subito evidente che, per reattività inserita positiva, cioè per $\rho^{(n)} > 0$, (condizione che sarà possibile realizzare fisicamente solo per $n = 0$, cioè per n coincidente con l'indice dell'armonica fondamentale, e che potrebbe verificarsi, in caso di **gravissimi incidenti**, o per sistemi esplosivi, eventualmente, anche per l' n dell'armonica immediatamente successiva) si dovranno avere, per ogni n, due soluzioni $p^{(n)}_{(i)}$ reali, semplici, distinte e che inoltre sarà di norma:

$$p^{(0)}_{(1)} > 0\,; \quad p^{(0)}_{(2)} < 0\,, \quad p^{(n)}_{(2)} < p^{(n)}_{(1)} < 0\,, \quad \forall\, n > 0\,, \qquad (II.23)$$

con

$$\lim_{\rho^{(0)} \to 0^{\pm}} p^{(0)}_{(1)} = 0^{\pm} \quad , \qquad \lim_{\rho^{(0)} \to 0^{\pm}} p^{(0)}_{(2)} = -\left(\lambda + \frac{\beta}{l^{(0)}}\right). \qquad (II.24)$$

Nel caso invece di reattività inserita negativa si otterranno ancora coppie di radici $p^{(n)}_{(i)}$ esclusivamente reali, ma entrambe negative, $\forall\, n$.

Che si tratti di radici p reali lo si può dedurre, oltre che dai ragionamenti fatti prima sulla realità degli autovalori dell'operatore $\{p - M(p)\}$, anche osservando che il

radicando $\Delta_{(n)}$ della (22), il quale può essere posto nella forma alternativa

$$\Delta_{(n)} \doteq [\lambda l^{(n)}(1-\rho^{(n)})+\beta+\rho^{(n)}]^2 - 4\beta\rho^{(n)}$$

sicuramente, per valori negativi di $\rho^{(n)}$, non potrà che assumere valori positivi, proprio come accadeva per $\rho^{(n)} > 0$. Ne discende la realità di entrambi i termini di ciascuna coppia di radici dell'inhour equation, per qualunque valore fisicamente ammissibile della reattività, associata alla corrispondente armonica spaziale.

E' molto importante tener conto che, anche nel caso di <u>reattore critico</u>, $(\rho^{(0)} = 0)$, si hanno due radici della " inhour eq. ", di cui **<u>una nulla</u>** e l'altra negativa.

Quella negativa, cfr. (24), serve a descrivere l'evoluzione di un reattore critico, nella fase in cui, a causa dell'eventuale squilibrio iniziale tra concentrazione di progenitori e flusso, non si sia ancora instaurato **<u>l'autostato dinamico fondamentale</u>** puro: il quale, nel reattore critico, coincide con quello stazionario. In esso ad un certo numero di neutroni corrisponde un ben preciso numero di progenitori: ed entrambi gli andamenti spaziali di queste grandezze sono proporzionali all'autofunzione fondamentale del problema di Helmholtz.

La **<u>dipendenza spazio-temporale più generale del flusso neutronico</u>** sarà quindi, tenute in conto le equazioni (6), (10), (18), (21), nonchè il teorema dei residui e quello di convoluzione, della forma seguente, (espressa tramite le costanti di tempo $p_{(j)}^{(n)}$ riportate nella (22)):

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi(\vec{r},t) = \sum_{n=0}^{\infty}\Bigg\{\sum_{j=1}^{2}\Bigg[&[(\Phi_0,\varphi_n)(\lambda+p_{(j)}^{(n)})+v\lambda(C_0,\varphi_n)]\frac{e^{p_{(j)}^{(n)}t}}{(p_{(j)}^{(n)}-p_{(k\neq j)}^{(n)})}+\\ &+\frac{v(\lambda+p_{(j)}^{(n)})}{(p_{(j)}^{(n)}-p_{(k\neq j)}^{(n)})}\int_0^t(S(\vec{r}',t'),\varphi_n(\vec{r}'))\cdot e^{p_{(j)}^{(n)}(t-t')}dt'\Bigg]\Bigg\}\varphi_n(\vec{r})\end{aligned}} \quad (II.25)$$

In definitiva quindi risulta verificato che, in assenza di sorgenti impresse persistenti nel tempo, coerentemente colla concentrazione di neutroni data dalla (25'), avremo per i progenitori la soluzione seguente:

$$\boxed{C(\vec{r},t)=\beta k_\infty \Sigma_a \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{2}\left[(\Phi_0,\varphi_n)+\frac{v\lambda(C_0,\varphi_n)}{\lambda+p_{(j)}^{(n)}}\right]\frac{1}{(p_{(j)}^{(n)}-p_{(k\neq j)}^{(n)})}e^{p_{(j)}^{(n)}t}\right\}\cdot\varphi_n(\vec{r})\,.} \qquad (II.30)$$

Dopo quest'ultima formula appaiono giustificati rigorosamente tutti i risultati di dinamica spaziale, conseguiti, un pò euristicamente, colla teoria degli **autostati dinamici**, elaborata nell'ambito di un approccio " vettoriale " al problema [14].

Risulta dimostrato in particolare che, nella **parte asintotica** $(t\to\infty)$ **di ogni transitorio**, si raggiunge un valore stabile del rapporto (neutroni/progenitori), valore che dipenderà esclusivamente dal mezzo moltiplicante considerato, dall'autovalore spaziale fondamentale dell'equazione d'onda stazionaria relativamente al volume del sistema, nonchè dall'autovalore temporale, algebricamente più grande del problema dinamico in esame. D'altra parte tale rapporto asintotico Φ/C risulta del tutto indipendente dallo stato iniziale del sistema e dal punto di osservazione interno al core omogeneo, nudo, nel quale la misurazione dei neutroni e dei progenitori viene effettuata. Anche dal presente contesto appare che l'autofunzione spaziale fondamentale del problema di Helmholtz gioca un ruolo privilegiato in dinamica, sia rispetto ai neutroni che ai progenitori.

Per **sintetizzare il risultato** di tutta la trattazione precedente potremo concludere che entrambe le evoluzioni temporali dei neutroni e dei progenitori distribuiti secondo una data armonica spaziale, avvengono in termini di una opportuna combinazione lineare degli stessi esponenziali: $\exp(p_{(1)}^{(n)}t)$ ed $\exp(p_{(2)}^{(n)}t)$, $\forall n$; e che, inoltre, ciascuna armonica del flusso o dei progenitori iniziali influenza soltanto l'armonica dello stesso ordine, sia per la distribuzione neutronica che per quella dei progenitori. Naturalmente discende anche dalla stessa rappresentazione matematica della soluzione che nessun tipo di eccitazione del reattore, che soltanto sia fisicamente realizzabile e non nulla, potrà prescindere dall'eccitare almeno **l'autostato dinamico fondamentale** del sistema.

---

14 Cfr. S.E. Corno, R. Guandalini, S. Nardi: rif. citato alla nota 12.