Esame di stato per l'abilitazione all'esercizio della professione di Ingegnere

II sessione 2010

Sezione A - Laurea Specialistica

Settore dell'Informazione
Classe 30/S: Ingegneria delle Telecomunicazioni e Ingegneria Telematica

Prova pratica N. 1

Per determinare la posizione di un satellite in orbita, in genere si utilizza il seguente metodo:

- la stazione di terra trasmette un segnale (detto di "ranging") $x(t)$;
- il satellite, in assenza di rumore, riceve il segnale $y(t) = x(t - \tau)$ e lo ritrasmette a terra in modo trasparente; τ indica il ritardo di propagazione, e si trascura, per semplicità, l'attenuazione;
- la stazione di terra, in assenza di rumore, riceve $z(t) = y(t - \tau) = x(t - 2\tau)$, calcola la correlazione
$$\rho(v) = \int z(t)x(t - v)dt \tag{1}$$
e stima il ritardo di propagazione τ come [1]
$$\hat{\tau} = \frac{1}{2} \max{}^{-1} \ \rho(v);$$
quindi calcola la distanza tra stazione base e satellite come $\hat{d} = c\hat{\tau}$, essendo c la velocità di propagazione della luce. La posizione del satellite sarà dunque a $\hat{d}$ metri nella direzione di puntamento dell'antenna della stazione di terra.

Il segnale di ranging $x(t)$ può essere scelto in vari modi. Di recente si è proposto l'uso di segnali basati su codici PN (pseudo noise) che consentono di utilizzare ricevitori numerici di complessità ridotta: nel seguito viene descritta una versione semplificata di un segnale di questo tipo, per consentire i calcoli manuali. Per semplificare l'analisi, si suppone inoltre che la trasmissione avvenga in banda base e non a radiofrequenza: i risultati risulteranno validi anche a radiofrequenza in presenza di perfetta sincronizzazione di fase.
Si costruiscono i due segnali periodici $x_1(t)$ e $x_2(t)$, con
$$x_i(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{i,k} h(t - kT), \quad i = 1, 2$$

[1] Con l'espressione $\max{}^{-1} \ f(x)$ si intende il valore x_0 tale per cui $f(x_0) \geq f(x), \forall x$.

dove $h(t) = 1/\sqrt{T}$ per $t \in [0, T]$ e $h(t) = 0$ altrove; T è il cosiddetto intervallo di "chip", e $R_c = 1/T$ è il "chip rate". La sequenza $c_{1,k}$ ha periodo 2 chip e la sequenza base è $+1, -1$; la sequenza $c_{2,k}$ ha periodo 7 chip e la sequenza base è $+1, +1, +1, -1, -1, +1, -1$; la sequenza base viene ripetuta continuamente. I segnali $x_1(t)$ e $x_2(t)$ risultano quindi periodici di periodo $2T$ e $7T$, rispettivamente. Il segnale di "ranging" è

$$x(t) = \frac{1}{2}[x_1(t) + x_2(t)].$$

D1 Si disegnino i grafici di $x_1(t), x_2(t)$ e $x(t)$. Qual è il periodo di $x(t)$ in secondi? Qual è il suo periodo L in numero di chip? Qual è l'energia E_{per} di $x(t)$ in un suo periodo? Qual è la potenza P di $x(t)$? Qual è l'energia media per chip trasmesso E_c?

Il ricevitore (nella stazione di terra) riceve

$$r(t) = x(t - 2\tau) + n(t)$$

dove $n(t)$ è il rumore Gaussiano bianco additivo con spettro di potenza $N_0/2$ W/Hz. Il ricevitore è costituito da un filtro adattato ad $h(t)$ seguito da un campionatore che genera i campioni r_k ad intervalli di T secondi l'uno dall'altro. Il ricevitore calcola le seguenti 9 correlazioni:

$$\rho_{1j} = \sum_{k=0}^{L-1} r_k c_{1,k-j} \quad \text{per } j = 0, 1 \qquad \rho_{2j} = \sum_{k=0}^{L-1} r_k c_{2,k-j} \quad \text{per } j = 0, \ldots 6$$

dove L è il periodo di $x(t)$ in numero di chip, e stima la "fase" delle due sequenze come

$$\hat{m}_1 = \max_{j=0,1}{}^{-1} \rho_{1j}; \quad \hat{m}_2 = \max_{j=0,\ldots,6}{}^{-1} \rho_{2j}$$

e la "fase" del codice complessivo come (teorema cinese del resto)

$$\hat{m} = \mod(7\hat{m}_1 + 8\hat{m}_2, L). \tag{2}$$

Si noti che $\hat{m}_1$ assume valori nell'insieme $\{0, 1\}$, $\hat{m}_2$ nell'insieme $\{0, 1, \ldots, 6\}$, $\hat{m}$ nell'insieme $\{0, 1, \ldots, L-1\}$. Se i campioni r_k sono prelevati negli istanti corretti e $\hat{m}$ è corretto, si ottiene $\hat{\tau}$ senza dover calcolare $\rho(v)$ per ogni v come invece previsto nella formula (1).

D2 Qual è la risposta all'impulso del filtro adattato nel ricevitore? si supponga $\tau = 0$ e che gli istanti di campionamento siano $t_k = (k+1)T$. Si dimostri che, in questo caso, $r_k = x_k + m_k$, dove m_k è una variabile aleatoria gaussiana e $x_k/\sqrt{T}$ è il livello assunto da $x(t)$ nell'intervallo $[kT, kT+T]$.

D3 Si supponga ancora $\tau = 0$ e $t_k = (k+1)T$. Si calcolino i valori di ρ_{1j} per $j = 0, 1$, e di ρ_{2j} per $j = 0, \ldots, 6$ in assenza di rumore. Quali sono i valori $\hat{m}_1$, $\hat{m}_2$ ed $\hat{m}$ delle fasi?

D4 Si supponga $\tau = 2.5T$ e $t_k = (k+1)T$. Quali sono i valori $\hat{m}_1$, $\hat{m}_2$ ed $\hat{m}$? Si verifichi che $\hat{m} = 2\tau/T$. Come dovrebbero essere cambiati gli istanti di campionamento t_k nel caso in cui fosse $\tau = 2.5T + \epsilon T$ con $\epsilon \ll 0.5$? Come va dunque calcolato $\hat{\tau}$ a partire da $\hat{m}$ e dagli istanti di campionamento ideali t_k? (si supponga che il sincronizzatore sia in grado di trovare automaticamente i t_k corretti).

D5 Si discuta la effettiva capacità del sistema di stimare una generica distanza d.

D6 In presenza di rumore e con $\tau = 0$, si calcoli $P(\hat{m}_1 \neq 0)$ nel caso in cui le correlazioni ρ_{1j} vengano calcolate utilizzando un numero di chip pari a $L, 2L, 3L, \ldots$. Si noti che $c_{1,k} = -c_{1,k-1}$.

D7 In presenza di rumore e con $\tau = 0$, si stimi $P(\hat{m}_2 \neq 0)$ nel caso in cui le correlazioni ρ_{2j} vengano calcolatate utilizzando un numero di chip pari a $L, 2L, 3L, \ldots$.

D8 Si progetti un sincronizzatore ad anello chiuso in grado di fornire gli istanti di campionamento nel ricevitore.