DISAMINA

Sulla maniera di resistere dei solidi, dell'allungamento e raccorciamento loro stabile e instabile, elastico e duttile, rettificazione sulla tenacità, sul limite di elasticità ed apprezzamento nella resistenza alle impulsioni della velocità che sopportar possono, con esempli varii del calcolo della loro resistenza viva.

(Memoria letta nell'adunanza 5 marzo 1869).

Il grande svolgimento dato nei nostri tempi alle costruzioni d'ogni genere, indusse a fare delle indagini con più ampli ed accurati esperimenti, sulla resistenza dei materiali e sulla diversa maniera loro di resistere alle forze sì permanenti che istantanee.

I risultati più estesi e compiuti che si conseguirono dagli sperimentatori dei varii paesi, palesarono il difetto delle teorie e delle formole precedentemente stabilite e tuttora in uso. Leggesi in proposito nel libro « *Recueil des rapports* « *sur les progrès des lettres et des sciences en France*, par « Combles Phillips et Collignon, Paris 1867, pag. 168. Les « nouvelles expériences ont aussi mis en évidence certaines « lacunes de la théorie, sans toutefois combler ces lacunes; « ont montré la grande complication des problèmes, sans « donner les moyens de triompher de cette complication ».

Senza troppo presumere di noi d'aver in Italia conseguito di riempiere in parte le ora dette lacune della teoria e sulla maniera di resistere dei solidi, permettetemi, onorevoli colleghi, che brevemente per quanto lo comporta il soggetto, v'intrattenga su sì importante materia.

§ 1°. Grande è la disparità dei risultati delle prove meccaniche state fatte anche sui materiali di uguale fabbricazione, e se ne attribuisce la causa alla poca omogeneità dei materiali istessi, mentrechè ella sta piuttosto nelle inavvertenze e nelle impulsioni più o meno direttamente date nell'operare, per lo più inevitabili col procedimento e maniere generalmente in uso di sperimentare. Così a cagion d'esempio la tenacità del bronzo da cannoni, uno dei metalli più esperimentati, venne trovata variabilissima e si riporta nel *Manovale degli Ingegneri civili* del Claudel, 7^{a} edizione 1867, pag. 321, pel bronzo nuovo essere di $16,^{k}64$ al millimetro quadrato; per il bronzo rifuso di 21^{k},O9; pel bronzo tagliato da un cannone da 24 (expérience faite au Conservatoire) di 10^{k}, 23; invece all'Arsenale di Vienna risultò di 25^{k},15 (notizia dell'ingegnere Pellati, stampata nel 1862). All'Arsenale di Torino, misurata alla flessione con apposita macchina che traccia i risultati ingranditi delle prove, indipendentemente da ogni perturbazione, si trovò la tenacità del bronzo di 42^{k}. (Vedi *Mémoire sur la résistance statique et dynamique des solides*, 1863). All'Arsenale di Vienna ove questa tenacità del bronzo fu trovata più alta che altrove, risultò la tenacità della ghisa ordinaria da cannoni di 14^{k}, e la tenacità di quella migliore di 28^{k}, ed a pagina 357 del Claudel, infino di 32^{k}, siccome fu trovata anche da noi ed in altri paesi. Agli Stati Uniti d'America, tali tenacità si rinvennero nella ghisa dei cannoni, particolarmente in quelli gittati dal sig. Rodman coll'anima vuota e raffreddata da una corrente d'acqua, col qual metodo riesci a fare i migliori e più colossali cannoni di quanti siano mai stati fatti e si facciano altrove in diverse guise con enorme dispendio, ciò che in Italia pur si potrebbe fare, colla spesa di un decimo circa, intieramente di ferraccio nostrano.

Risulterebbe dal confronto delle dette tenacità misurate nella maniera ordinaria, che quella del bronzo variabile da

10 a 25, è inferiore alla tenacità della buona ghisa da cannoni che è perfino di 32^{k} per millimetro quadrato: e che pertanto contrariamente a ciò che l'universale e più che secolare esperienza dimostrò , sono i cannoni di bronzo che avrebbero dovuto più comunemente scoppiare e non quelli di ghisa! E però il fatto che sono invece i cannoni di ghisa che scoppiarono più comunemente e non quelli di bronzo, prova la grande erroneità delle fatte misure tanto più della tenacità presa direttamente come suolsi fare, del che fra gli altri ingegneri scrittori ne conviene il sig. Love a pag. 77 del suo libro *(Des diverses résistances, et autres propriétés de la fonte, du fer et de l'acier.* Paris 1859), ove dice:
« Cependant je dois dire que des expériences, faites par ef-
« fort transversal sur des barreaux obtenus de la méme
« fonte, ont donne des résultats beaucoup plus constants,
« ce qui porterait à attribuer les écarts qui viennent d'ètre
« signalés dans la résistance à la traction, à certaines cir-
« constances défavorables de l'expérimentation ».

Queste circostanze sono le impulsioni inevitabili operando senza apposita macchina ben intesa nelle singole sue funzioni, non che l'allungamento ineguale che prende il saggio nella prova longitudinale, la sua rottura che avviene in maniera successiva ed inegualmente e non contemporaneamente tutto intorno del saggio istesso, e infine come meglio si dimostrerà nel seguito, la dipendenza del tempo diverso che sta caricato il saggio per arrivare alla rottura.

§ 2°. Dalle due maniere di prova dei saggi longitudinale e transversale, giusto per la grande diversità dei risultati forniti ordinariamente, invalse in Inghilterra ed agli Stati Uniti d'America la distinzione della tenacità longitudinale da quella transversale. Ad esempio ancora della grande diversità di esattezza dei risultati ottenuti in dette due maniere di prova, notasi nei riassunti dei moltiplici esperimenti fatti e riferiti nel libro R*eport of experiments on the strengt and other proprieties of metals for cannons,* Philadelphie 1856, pag. 268, che la serie delle tenacità transversali mentre segue la progressione crescente colle densità, nella serie delle tenacità longitudinali l'ultima la più forte risultò decrescente: e ciò perché evidentemente la rottura dei saggi più densi e duri avvenne successivamente da un lato a quello opposto e non assieme da tutti i lati. La distinzione poi introdotta dai pratici delle oradette due specie di tenacità, proviene dal fatto che per molti corpi come la ghisa se si desumono dalle formole in uso risultano tra loro assai differenti a cagione della erronea ipotesi ammessa in teoria che sia la resistenza all'allungamento uguale alla resistenza opposta al raccorciamento dei prismi, ciò che torna a dire che nella flessione lo strato delle fibre neutre od inalterabili, sempre stia in mezzo della grossezza loro. Se la resistenza all'allungamento può verificarsi essere uguale a quella del raccorciamento in alcuna sorta di ferri ed altri materiali, così non avviene comunemente, nemmanco per le piccolissime cariche, e pertanto in genere occorreva ammettere nella teoria la disuguaglianza delle resistenze all' allungamento ed al raccorciamento dei prismi, e rettificarne conseguentemente le formole come si fece al § 3° della precitata memoria.

In quella memoria si prescelse la forma dei solidi prismatici a base rettangolare siccome la più semplice e confacente per fare le prove meccaniche, ad oggetto di dedurne i coefficienti costanti della resistenza della materia, mediante la flessione normale dei prismi infissi da un capo e caricati dall'altro ; non che colla compressione longitudinale di più piccoli prismi, tolti dallo stesso pezzo di materia ; i di cui risultati bastano a dedurre la resistenza alla trazione longitudinale , trovata che sia direttamente questa resistenza alla compressione. E perciò l'introduzione delle due diverse resistenze all'estensione ed alla compressione si rese generale nell'equazione dei momenti d'inerzia della sezione del solido, appunto riferendosi all'asse che divide la parte stirata da quella compressa (I).

(1) Basterà di qui rapportare le formole così ottenute per i prismi

§ 3. Modificata così senza variare sostanzialmente la teoria in uso, rettificandone solo la posizione delle fibre invariabili nei prismi inflessi, ben altre questioni occorreva risolvere tra le quali la più importante concerneva il così detto limite di elasticità. Se ne legge la definizione antica in molti libri e nel più recente manovale del Claudel già citato, pag. 310, che il limite di elasticità è il più grande allungamento (o raccorciamento) che un prisma stirato (o compresso) longitudinalmente può subire senza cessare di riprendere intieramente o quasi intieramente la lunghezza primitiva quando si toglie la carica: limite che non bisogna giammai sorpassare né raggiungere nelle pratiche applicazioni; ma le più accurate esperienze moderne non confermarono siffatte condizioni, svelarono l'insussistenza di un limite alla vera elasticità dei solidi.

a base rettangolare, ove è

P La resistenza all'estensione dell'unità superficiale della sezione
Q La resistenza alla compressione ed R la maggior delle due
} prese al limite di stabilità o di rottura.

ρ Il rapporto della maggiore coll'altra minore, $\rho = \frac{Q}{P}$ ritenuto $Q > P$ o viceversa secondochè la rottura nella sezione avviene dal lato della trazione o da quello della compressione.

N Distanza del punto della sezione, il più discosto, dalla linea delle fibre invariabili; questa linea delle fibre invariabili passa pel centro di gravità della sezione quando $P = Q$; e nel caso di P e Q disuguali la sua posizione è data dalla condizione, che sono uguali rispetto alla stessa linea i momenti delle due forze risultanti dal prodotto per P e per Q delle aree rispettive delle due parti, in cui la sezione è da essa divisa.

I Momento d'inerzia della sezione inflessa.

E Modulo o coefficiente di elasticità.

F La carica in funzione della flessione x, F_1 ed x_1 quelle della massima resistenza P.

T e T_1 Il lavoro corrispettivo alle flessioni oradette x ed x_1.

A La superficie della sezione del prisma lungo L di cui b sia la lunghezza ed h l'altezza della sezione.

Leggesi nella introduzione del prelodato autore Love al già citato suo libro, che « le résultat le plus saillant de ces « essais fut un dementi donne à la limite d'élasticité. » M. Hodgkinson dimostrò infatti che non esiste per la ghisa alcun punto fisso dove l'elasticità cominciasse ad alterarsi, che tale alterazione incomincia sotto le più piccole cariche per il ferro come per la ghisa, ecc: ed infine conchiudesi che « les formules tirées de la théorie en vigueur ne peu- « vent ètre appliquées avec quelque sécurité qu'après avoir « subi des transformations importantes. »

§ 4° A rischiarare compiutamente siffatta quistione occor-

Nel caso della flessione trasversale si ha

$$N=\frac{\sqrt{\rho}}{1+\sqrt{\rho}}\,h \quad I=\frac{\rho}{3\,(1+\sqrt{\rho})^2}\,bh^3 \quad \rho=\frac{Q}{P} \quad Q>P$$

$$P=\frac{\rho}{(1+\sqrt{\rho})^2}\,\frac{Ebh^3}{L^3}\,x_1 \quad F_1=\frac{\sqrt{\rho}}{3\,(1+\sqrt{\rho})}\,\frac{Pbh^2}{L}$$

$$x_1=\frac{1+\sqrt{\rho}}{3\sqrt{\rho}}\,\frac{PL^2}{Eh}$$

$$T=\frac{1}{2}\,Px \quad T_r=\frac{1}{18}\,\frac{P^2}{E}\,bhL$$

Nel caso della compressione longitudinale si ha

$$F=E\,\frac{A}{L}\,x \quad F_1=QA \quad x_1=\frac{Q}{E}\,L$$

$$T=\frac{1}{2}\,Fx \quad T_r=\frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{E}\,AL$$

Così trovato colla prova alla compressione $Q=\frac{F_1}{A}$ si deduce dalla espressione della F_1 alla flessione, eliminandone il rapporto ρ l'espressione di P.

$$P=\frac{Q}{\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{bh^2\,Q}{3\,LF_1}}-\frac{1}{2}\right)^2}$$

Le prefate formole si riducono a quelle in uso ivi facendo $\rho=1$.

reva anzitutto conseguire dei risultati dalle prove meccaniche le più regolari con una serie di cariche progredienti dalla minore alla maggiore, operando di seguito senza interruzioni e in guisa a scansare assolutamente le perturbazioni, inevitabili nell'operare come suolsi direttamente sui saggi durante l'azione della prova, avvertendo sopratutto di neutralizzare l'influenza dell'azione acceleratrice della gravità sulle cariche in movimento pendente la flessione, la quale per minima che fosse cangierebbe la natura dei risultati da statici in dinamici. A tale scopo era necessario operare col mezzo di apposita macchina, che tracciasse tutti i movimenti subiti dal prisma o saggio in prova, ingranditi per poter meglio misurarne i risultati con precisione e così pure quando si avesse ad operare su piccoli prismi. Una tale macchina fu eseguita fin dal 1846 per l'Arsenale di Torino e fornisce tracciati su di una lunga lista di carta tutti i particolari anche dianzi inavveduti della prova di ciascun saggio, con tanta regolarità che restò provato doversi la irregolarità dei risultati altrimenti conseguiti, non alla inomogeneità della materia, ma sibbene alle perturbazioni inevitabili colla maniera di prova in uso.

Affrancato il prisma a sito nella detta macchina l'operatore non ha che a girare un manubrio per caricare a poco a poco il prisma ed all'istante istesso che comincia a caricarsi, la matita, colla quale si è innanzi tracciato un meridiano sulla detta lista di carta avvolta ad un cilindro in moto, si scosta dal meridiano medesimo tracciando continuamente una linea: si scosta finché il prisma abbia ricevuta l'intera carica incominciando da quella minore della serie, e traccia quindi per queste cariche un tratto parallelo al detto meridiano, ed appena incominciato il movimento di scarico ritorna la traccia della matita verso il meridiano e l'esperienza dimostra che non lo raggiunge più, nemmeno colle minori cariche; quindi la traccia subito terminato lo scarico, si volge percorrendo altro tratto parallelo al meridiano per tutto il tempo che rimane libero il prisma ; nel qual tempo s'accresce la carica e si prosegue di poi a ripetere per ogni carica la stessa operazione, così successivamente fino a quella maggiore carica che produce la rottura del prisma od una piegatura equivalente.

Figura 1ª

Sia (fig. 1) *A B* il meridiano anzidetto, la traccia del movimento del capo libero del prisma, all'istante che per essersi dato il moto alla macchina comincia a caricarsi, parte dal punto *a* e giunge in *b* tosto ricevuta l'intiera carica : d'onde sopportando il prisma stabilmente la ricevuta carica, tracciasi il tratto *b c* paralellamente al meridiano ; e cominciato lo scarico, rivolgesi la traccia verso il punto e senza mai raggiungerlo, siccome l'esperienza ha dimostrato essere così in due divisa la flessione *a d* nelle due parti *c d* e *d e;* distanza questa *d e* invariabile per il tratto *d f,* tracciato nel tempo che il prisma rimane scaricato, nel qual tempo si fa l'aggiunta dei pesi per compiere la seconda carica, per poi ricominciare dal punto *f* un consimile tracciato, e così fino alla fine della prova.

Delle due parti della flessione intera, ingrandita in un rapporto prefisso *ce* = *c d* + *d e*, vedesi essere la *c d* la parte ritornante e *d e* la restante: e siccome nella facoltà di ritornare sta propriamente la definizione della elasticità ugualmente che nella deficienza di tale facoltà sta la definizione della duttilità, qualità queste di cui vanno forniti più o meno tutti i corpi solidi; così è ben razionale di prendere per misura della elasticità la sola parte ritornante della flessione, e l'altra parte restante per la misura della duttilità.

Che sia la parte restante della flessione dovuta propriamente alla duttilità, lo conferma l'esperienza che ove si ripeta la prova dello stesso prisma colla stessa carica più non si riproduce la parte duttile della flessione dianzi trovata, siccome si conferma colla riproduzione della intera sola parte ritornante che questa è dovuta alla elasticità, allora come se il prisma fosse divenuto perfettamente elastico : sempre quando per la soverchia fatica non sorvenga la lassitudine nel prisma istesso, siccome avviene ai muscoli degli animali di perdere d'energia, che poi riacquistano anche i solidi col riposo.

Invero l'esperienza conferma essere la parte elastica della flessione proporzionale alla carica fino alla rottura; mentre che la parte duttile cresce in una incognita ragione molto maggiore; ma, come si disse, una volta tanto avvenuta la parte duttile della flessione, più non si riproduce di sua natura, la duttilità essendo consuntiva.

§ 5° Proseguendo la prova colle successive crescenti cariche si giunge al segno da dove il tratto *b c* della linea tracciata dalla matita pendente che rimane carico il prisma stesso, cessando di poter sostenere stabilmente la ricevuta carica, cessa quel tratto d'essere parallelo al meridiano *A B:* e da quel segno sempre più ne diverge, divergenza che cresce evidentemente col crescere della velocità con cui continua a cedere il prisma sotto l'azione della carica che sempre più non reggerà stabilmente ; per cui ove si lasciasse agire anche quella stessa carica che incominciò a più non reggere stabilmente, e tanto più sotto le successive cariche maggiori, dopo un tempo sufficiente sempre più breve col crescere delle cariche, la rottura ognora avverrà, per essersi oltrepassato il limite di stabilità e sotto qualsiasi carica eccedente quella di detto limite. Questa carica sotto la quale avviene la rottura nelle ordinarie prove longitudinali all'allungamento dei prismi, presa sull'unità superficiale della loro sezione, chiamasi comunemente tenacità : mentre che non avvi in uso una sola parola colla quale esprimere la resistenza alla compressione, quando invece il prisma è compresso , e che per la limitata sua lunghezza rispetto alla grossezza non possa inflettersi. Vedesi adunque, che la tenacità siccome la resistenza alla rottura per compressione ossia allo schiacciamento, sono quantità di loro natura variabili col tempo stato impiegato nella prova ; ed è questa un'altra grandissima cagione della grande variabilità dei risultati ottenuti, e la cagione per cui non si può prendere sicura norma dalle tenacità state esperimentalmente così conseguite senza tener, conto del tempo.

E come tener conto del tempo ? il tracciato dei risultati dalla prefata macchina fornisce appunto colla misura della divergenza del tratto *b c*, seguito durante che resta intieramente carico il prisma, il mezzo di dedurre il tempo decorso nel prodursi la flessione *c d* successiva a quella *d e*, che sola prenderebbe ove non continuasse a cedere, col di cui rapporto al tempo stesso si ha la velocità media presa dalla carica pendente detta flessione. Abbisognerebbe pertanto stabilire in base comune, che la misura delle tenacità comparabili, si facesse al segno che fosse per tutte uguale la detta velocità o per essa l'angolo della suddetta divergenza; ma alla pratica raramente occorrerà di valersi di una rigorosa misura della tenacità quando a questa si sostituisca la ben più importante misura della resistenza al limite di stabilità, limite fin dove e pel quale i risultati sono indipendenti dal tempo; limite che ben scorgesi essere quello solo razionale da sostituirsi al limite anzidetto di elasticità, mentrechè dimostra l'esperienza non avere l'elasticità dei solidi limite alcuno, posto che sono le flessioni elastiche sempre proporzionali alle cariche ben oltre al limite di stabilità ; motivo per cui non occorre perciò modificare le forinole in uso, semprechè si ritengano le sole flessioni elastiche, che son quelle più importanti nelle pratiche applicazioni.

Si può eziandio tener conto della parte duttile delle flessioni per il limite di stabilità e fino ad un determinabile segno anche di quello di rottura, quantunque non si conosca la legge che desse seguono : poiché col tracciato dei risultati delle prove eseguite, siccome si disse, si ha graficamente

la curva risultante dalle cariche prese per ascisse, dagli spazii da esse percorsi, ossia dalle flessioni duttili prese per ordinate, quindi si può misurare la superficie compresa tra l'asse delle ascisse e la curva delle dette ordinate, superficie che rappresenta il lavoro del prisma, e dedurne per ambi i detti limiti di stabilità e di rottura le ordinate della superficie equivalente a quelle che si avrebbero ove le dette curve ipoteticamente divenissero rette (Vedi la *Memoria* predetta).

§ 6° Oltre alla rettificazione delle forinole in uso, ora detta al N° 3, rettificazione occorrente, allorché non si può ritenere tra loro uguali le due resistenze all'allungamento ed al raccorciamento , più non avvi bisogno di farne delle altre per valersene fin'anco al limite di rottura. Senonchè bisogna valersi dei nuovi sistemi dei coefficienti meccanici, appropriati ai detti limiti di stabilità e rottura, distintamente per la sola resistenza elastica, od unitamente a quella duttile.

Ma un'altra cagione della erroneità delle formole in uso avviene quando si adoperano anche nei casi ove sono in gioco delle forze vive, ossia moventisi per un determinato tempo (1), nei quali casi non sono più applicabili direttamente quali sono, né sono medesimamente sufficienti le note formole per la misurazione degli effetti prodotti dalle forze vive in generale, che per la misura della resistenza viva dei

---

(1) Ecco come in proposito si ragiona nel libro *Reports of experinients on the proprieties of metals for cannons*, stampato a Boston, 1861; Eapporto degli sperimenti fatti all'arsenale di Alleyhauy, del capitano Rodman del Dipartimento dell'artiglieria degli Stati Uniti, dall'anno 1837 al 1858, a pag. 270, Della differenza degli effetti dovuta alla differenza nei tempi di azione di una data forza : « Si è già riferito « più di una volta di questo soggetto; ma non in modo da porci quel « grado d'importanza, il quale si crede meriti. È ben conosciuto e « capito in architettura e meccanica pratica, che una trave di legno, « o una barra di ferro , sosterrà per un tempo limitato un peso , il « quale in ultimo la romperebbe di certo; e in termini generali, che « la forza rompente è una funzione scemante del tempo richiesto per « produrre la rottura. È creduto tuttavia, che non abbiano fin qui

solidi occorre riferirsi, anziché all'espressione del lavoro, a quella della quantità di movimento che ricever possono al limite di stabilità o di rottura da una data impulsione, motivo per cui abbisogna anzitutto introdurre la velocità d'impulsione che la materia dei solidi può sopportare.

A definire tale velocità occorre ricordare, che l'effetto di una forza F in movimento è nullo, se nullo è il tempo della sua azione, ed invece applicata ad una massa M durante un tempo t_1 la metterà in movimento colla velocità ricevuta V, per cui si ha:

$$(1) \quad F t_1 = M V$$

equazione dell'impulsione colla quantità di movimento.

Ove questa massa M sia quella d'un prisma fisso da un capo che siavi stata dall'altro capo applicata la forza F diretta secondo l'asse pel tempo t_1, allora per la ricevuta impulsione avrà appunto il prisma acquisita la quantità di movimento MV, producendo l'allungamento od il raccorciamento di cui, per quello corrispondente al limite di stabilità o di rottura, sarà la velocità V naturalmente quella d'impulsione che ai detti limiti la materia del prisma può sopportare. Chiamando con dx un elemento dello spazio percorso durante l'elemento dt corrispondente del tempo t e con $v = \frac{dx}{dt}$ la velocità in detto istante, dalla predetta equazione $Ft = Mv$ differenziandola e dopo d'averne eliminato il dt reintegrando deducesi la nota uguaglianza $Fx = \frac{1}{2} M v^2$ del lavoro colla metà della forza viva, dove ponendo per x l'allungamento x_1 corrispondente alla velocità V si ha:

$$(2) \quad F_1 x_1 = \frac{1}{2} M V^2 \qquad (3) \quad t_1 = \frac{2 x_1}{V}$$

nei due più semplici casi, quelli della prova longitudinale e transversale dei prismi, essendo nel primo caso $F_1 = R A \; x_1 = \frac{R}{E} L$ e nel secondo caso per i prismi a sezione rettangolare $F_1 = \frac{R b h^2}{6 E} \; x_1 = \frac{R L^2}{E h}$, sostituendo nella prefata equazione si deduce in detti casi la stessa espressione della predefinita velocità d'impulsione V, che possono reggere longitudinalmente i prismi ai predetti limiti stessi del coefficiente della resistenza R, essendo ivi $g M = A L D$, $A = bh$, per cui si ha,

$$(5) \quad V = \sqrt{\frac{R^2 g}{E D}} = \sqrt{g i \frac{R}{D}} \quad i = \frac{Q}{E}.$$

Questo importante risultato si deduce nella maniera la più generale dall'equazione differenziale del movimento sì longitudinale che transversale di flessione dei prismi (Vedi il § IV della *Memoria* stessa già citata), e se ne deducono inoltre le rispettive espressioni di tale velocità direttamente in funzione dei dati e risultati della prova dei prismi longitudinale e transversale.

$$(6) \quad V = \sqrt{\frac{Fxg}{ALD}} \qquad (7) \quad V = 3 \sqrt{\frac{Fxg}{bhLD}}.$$

Notisi pel caso della flessione che la espressione della ve-

: apprezzato debitamente l'effetto del tempo sulla resistenza , che un corpo può offrire, dove *l'assoluta* differenza nei tempi di azione è < piccola; ma dove il *ratio* (rapporto) del massimo al minimo tempo ; di azione è molto grande ; per esempio, il tempo richiesto a rompere < un tensile modello di ferro fuso sulla macchina di prova , è detto 5 minuti. Questo è un piccolo assoluto spazio di tempo, e la differenza tra questo e un più piccolo spazio deve essere ancora minore; ma come comparata colla lunghezza di tempo durante il quale la (massima pressione è esercitata entro l'anima di un cannone ad una sola scarica, egli diviene molto grande, probabilmente tanto grande quanto il rapporto del tempo di resistenza di ogni conosciuta costruzione od edifizio di legno o ferro , al quale si richiede di provare la forza di un sol modello di qualunque materiale»....

locità V d'impulsione che il prisma regge è indipendente dalla posizione delle fibre invariabili, mentre non lo sono le espressioni della carica e della flessione, quando in altri termini la resistenza /' all'estensione è diversa dalla resistenza Q alla compressione, ambedue rappresentate da R nella espressione della velocità V in funzione degli altri coefficienti meccanici.

Introducendo questa velocità V d'impulsione longitudinale che possono reggere i solidi ai prefati limiti di stabilità o di rottura, nelle forinole date dal celebre Poncelet sulla resistenza viva dei primi, pag. 292 del suo libro *Introduction à la Mécanique industrielle, 2° édition,* diverrebbero :

$$T=\frac{1}{2}M(V^2-v^2)$$

$$(8)\qquad T_r=\frac{1}{2}MV^2,\quad v^2=V^2-\frac{Fx}{M}$$

ivi essendo v la velocità corrispondente alla flessione x ed alla forza F corrispettiva : essendo poi nel caso della flessione transversale :

$$v^2=U^2-2\frac{Fx}{M}\qquad T=\frac{1}{2}M(U^2-v^2)$$

$$(9)\quad T_r=\frac{1}{4}MU^2=\frac{1}{18}MV^2\qquad\qquad (10)\quad U=\frac{\sqrt{2}}{3}V$$

vedesi essere il lavoro che i prismi possono reggere transversalmente $\frac{1}{9}$ di quello che reggono longitudinalmente quando sia la loro sezione rettangolare; rapporto che riducesi ad $\frac{1}{12}$ per i prismi a sezione circolare per i quali:

$$(11)\qquad U=\frac{11}{\sqrt{6}}V;$$

mentre che per i prismi a sezione rettangolare ritagliati secondo la curva di uguale resistenza, doppia essendo la flessione che possono allora prendere, duplicato ne risulta il lavoro.

Risulta dalle predette espressioni, essere il lavoro che possono fornire i solidi prismatici proporzionale alla loro massa ed al loro volume. Però così non è per tutti i solidi, che non sempre, a cagione delle diverse loro forme, può tutta la loro massa M essere utilmente ed intieramente usufruita (1).

---

(1) Abbiasi, per esempio, un solido tronco conico, che riceva un'impulsione secondo il suo asse, di cui siano a e b i raggi delle due basi parallele e ne sia L la lunghezza: suppongasi diviso in tanti strati elementari paralleli alle basi, sia la loro grossezza dz ed y il raggio loro variabile, chiamando ognora con F la forza applicata, con x l'allungamento od il raccorciamento ed E il modulo di elasticità, sarà:

$$y=\alpha z+b\quad \alpha=\frac{a-b}{L}\quad x=\int\frac{F\,dz}{E\pi y^2}\quad x=\frac{FL}{EA}\ A=\pi ab$$

cioè che il solido cono tronco si allunga o si raccorcia siccome il cilindro equivalente di uguale lunghezza, la di cui base è la media geometrica tra le due del tronco conico.

Dall'equazione differenziale del suo movimento si deduce quindi essendo :

$$\frac{1}{2}M\,dv^2=-F\,dx\quad v^2=U^2-\frac{Fx}{M}\quad gM=\frac{\pi}{3}L(a^2+b^2+ab)D$$

$$R=\frac{F}{\pi ab}\quad Fx=\frac{R^2}{E}\pi abL$$

e per $v=0$ si ha infine:

$$(12)\qquad U=V\sqrt{\frac{3ab}{a^2+b^2+ab}},$$

dalla quale espressione scorgesi che più si fa grande la differenza tra a e b, tra la grandezza delle due basi, maggiormente riducesi la velocità U, che reggere può il solido tronco conico ove facendoli in-

§ 7° — Or ritornando all'esame del tempo t N° 6 della durata dell' impulsione, ossia della azione della forza movente F ove abbia luogo nel tempo istesso il lavoro prodotto F e su di una massa M da determinarsi, il valore di questa massa si potrà ugualmente dedurre dalle prefate

---

vece uguali diviene $U = V$, poiché il tronco conico diviene cilindrico. Ove una delle basi fosse un punto nullo in superficie, nulla diverrebbe la velocità W ossia la resistenza del vertice del cono.

Il caso inverso può accadere, che sia per la diversa forma dei corpi solidi accresciuta la loro resistenza viva, come nel caso dei prismi di uguale resistenza essendo sottoposti alla flessione transversale ed ugualmente infissi e ritagliati nel verso della. loro grossezza h; essendo la curva determinata da un'equazione, che parte dalla estremità libera del prisma ove riducesi a zero la grossezza l variabile , e ad L alla sezione infissa (*Glaudel*, pag. 360, N° 358, del 1867) si ha:

$$h = \sqrt{\frac{(1+\sqrt{\rho})^2}{\rho}\frac{Fl}{Rb}} \quad F = \frac{\rho}{2(1+\sqrt{\rho})}\frac{Ebh^3}{L^3}x$$

$$x_1 = \frac{2}{3}\frac{1+\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\frac{RL^2}{Eh} \qquad gM = bhLD$$

$$T = \frac{1}{2}Fx = \frac{\rho}{4(1+\sqrt{\rho})^2}\frac{Ebh^3}{L^3}x^2 \quad E_1 = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{\rho}}{1+\sqrt{\rho}}\frac{Rbh^2}{L}$$

$$T_r = \frac{1}{9}\frac{R^2}{E}bhL = \frac{1}{9}MV^2.$$

Ciò che i prismi di uguale resistenza ritagliati nel verso dell'altezza della loro sezione, giusto appunto perchè possono prendere una doppia flessione, acquistano eziandio una doppia resistenza viva proporzionale al volume che avevano prima d'essere ritagliati. Così dimostra la teoria il vantaggio che la pratica ritrae col dare tale forma alle molle dei carri ove la flessione si accresce ancora componendole di più foglie. Riferendo al volume reale del prisma ritagliato la sua resistenza viva risulta più che doppia 1,674 maggiore. Ove si chiami con s la superficie della sua faccia curvilinea , essendo $s = \int h\, dl$

equazioni , sia da quella della quantità di movimento, che dall'altra della quantità di lavoro, essendo:

$$t = \frac{2x}{V} \quad M = \frac{Ft}{V} = \frac{2Fx}{V^2}$$

---

integrando fra i limiti estremi $l = 0$ ed $l = L$ risulta:

$$s = \frac{2}{3}\frac{1+\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\sqrt{\frac{E}{Rb}},$$

quindi il volume

$$bs = bhL\sqrt{\frac{4}{27}\frac{1+\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}}$$

ed il lavoro

$$T_r = \frac{1}{18}\frac{R^2}{E}bs\sqrt{27\frac{\sqrt{\rho}}{1+\sqrt{\rho}}} = \frac{1}{18}mV^2\sqrt{27\frac{\sqrt{\rho}}{1+\sqrt{\rho}}}$$

$$m = \frac{bsD}{g};$$

e per $\rho = 1$ il minor valore possibile si ha appunto quello suddetto.

FIGURA 2

Può ancora accadere che il prisma riceva l'impulsione secondo uno spigolo FE al vertice libero della sua sezione triangolare ABC essendo infisso al lato AC (*fig. 2*) essendo questo pure un prisma di uguale resistenza appunto per essere stato ritagliato della metà ove è $FE = h$ $AB = L$ e $BC = h$., S'intenda questa sua grossezza b divisa in tanti strati elementari con piani paralleli alla faccia verticale $DEFG$, e siano $\frac{F}{n} = F_1$ le parti uguali della carica ripartita per gli n elementi ed applicate tutte alla stessa distanza L sarà

$$F_1 = c\frac{Rbh^2}{nL}, \text{ ove è } c = \frac{\sqrt{\rho}}{3(1+\sqrt{\rho})};$$

e siano L_1, $L_{1,1}$, $L_{1,1,1}$ .... i bracci di leva ai quali riducesi L per i singoli elementi, siano X_1, $X_{1,1}$, $X_{1,1,1}$ .... le cariche corrispettive ai prefati

Ove invece fosse il tempo della durata della impulsione diverso da quello trascorso nell'attuazione del conseguente lavoro, allora non sarebbe più indifferente il dedurre il valore ricercato della massa *M* dall'una o dall'altra delle dette equazioni. Prendasi ad esempio quell'istesso preso dal Pon-

---

bracci di leva; siano $x_{,}$; $x_{,,}$; $x_{,,,}$ .... le flessioni alle estremità di detti bracci di leva.

Sarà $\quad L_{,} = L \qquad X_{,} = F_{,} = F \qquad x_{,} = \epsilon \dfrac{RL_{,}^{3}}{Eh} = \epsilon \dfrac{RL^{3}}{Eh}$

ove è $$\epsilon = \frac{1+\sqrt{\rho}}{3\sqrt{\rho}} \quad \text{ed} \quad \alpha = \frac{1}{g}$$

$$L_{,,} = L - \frac{1}{n} L = \frac{n-1}{n} L \qquad X_{,,} = \frac{L_{,}}{L_{,,}} \frac{F}{n} = \frac{12}{n-1} F_{,}$$

$$x_{,,} = \epsilon \frac{RL_{,,}^{3}}{Eh} = \epsilon \frac{n-1}{n} \frac{RL^{3}}{Eh}$$

$$L_{,,,} = L - \frac{2}{n} L = \frac{n-2}{n} L \qquad X_{,,,} = \frac{L_{,}}{L_{,,,}} \frac{F}{n} = \frac{n}{n-2} F_{,}$$

$$x_{,,,} = \epsilon \frac{RL_{,,,}^{3}}{Eh} = \epsilon \frac{n-2}{n} \frac{RL^{3}}{Eh}$$

per cui si avrà colla somma dei lavori parziali il totale

$$\frac{1}{2} Fx_{,} = \frac{1}{2} X_{,} x_{,} + \frac{1}{2} X_{,,} x_{,,} + \frac{1}{2} X_{,,,} x_{,,,}$$

$$= \frac{1}{18} \frac{R^{2}}{E} bhL = \frac{1}{g} MV^{2} \quad x_{,} = \frac{1+\sqrt{\rho}}{3\sqrt{\rho}} \frac{RL^{3}}{Eh}$$

essendochè è la massa $\quad M = \dfrac{1}{2} \dfrac{bhLD}{g}$,

mentre il lavoro del prisma triangolare trovasi duplicato rispetto al suo volume, la flessione si mantiene la stessa del prisma intero avente la stessa sezione infissa. In questo caso la velocità *U* d'impulsione trasversale del prisma suddetto, porre dovendosi nell'equazione differenziale del suo movimento $\dfrac{1}{3} M$ a vece di M_{1} per essere il momento $g\, M_{1}\, L = g\, M \dfrac{1}{3} L_{1}$ risulta $U = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\, V$.

celet (al N° 248 della sua *Introduzione alla meccanica industriale,* 2ª edizione, Metz 1841) di un'impulsione data ad un prisma secondo il suo asse verticale per mezzo di un peso *p* infilato nel prisma e caduto dall'altezza *h*, ad oggetto di dimostrare l'utilità che può esservi per le arti delle costruzioni nella considerazione della quantità di lavoro delle resistenze vive di cui ne diede le espressioni analitiche.

Nel prefato esempio sarebbe *F* la forza resistente all'allungamento del prisma ed essendo le due masse unite in fondo del prisma al cominciare dell'urto ossia del movimento impulso in virtù della quantità di movimento acquisita dal peso *p* nella precedente sua caduta dall'altezza *h*, questo movimento sarebbe compreso anche nell'equazione generale del movimento longitudinale dei prismi data al N° 6, ove solo occorre moltipllcare la massa *M* del prisma per *ω* volte, tante quante dessa sta nella somma delle due del prisma e del peso ». Se Queste due masse fossero ambedue libere, la velocità comune che avrebbero dopo l'urto sarebbe $\dfrac{V}{\sqrt{\omega}}$ ed appunto nell'esempio prefato, essendo il prisma fisso da un capo e ricevendo l'urto dal capo opposto libero, subisce un allungamento in virtù della velocità d'impulsione *V* ripartita sulle masse unite da bel principio per produrre l'allungamento anzidetto, della quale velocità se ne deduce l'espressione $V_{1} = \dfrac{V}{\sqrt{\omega}}$ facendo coll'equazione di detto movimento d'allungamento d'un prisma $v = o$ per quando resta esaurita l'impulsione.

Il tempo t_{1} occorrente all'allungamento del prisma e quello t_{11} precedentemente decorso nella caduta del peso *p* essendo rispettivamente

$$(35) \qquad t_{1} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\omega M L}{E A}} \quad e \quad t_{11} = \sqrt{\frac{2h}{g}};$$

vedesi che affinchè la caduta e l'allungamento succedessero contemporaneamente, occorrerebbe fosse *h = 0,* cioè che fosse la caduta del grave ridotta a quella sola dell'allungamento del prisma.

In questo come in ogni altro esempio simile ove avviene un urto, conseguenza dell'urto istesso è che la quantità di movimento ch'era posseduta dal corpo urtante passa ed è uguale alla quantità di movimento delle due masse se rimangono unite ; quindi è che sussistendo questa uguaglianza delle masse per le rispettive velocità, non può più sussistere generalmente l'uguaglianza delle forze vive delle masse istesse.

Potendo adunque il tempo della durata del lavoro essere ben diverso da quello della impulsione, in tale stato di cose a quale delle due eguaglianze, quella delle quantità di movimento, oppure quella delle quantità di lavoro debbesi ricorrere, per determinare la massa del prisma o le altre sue forme e dimensioni?

§ 8° — Quivi conviene riprodurre le parole istesse dell'esimio Autore precitato ove dice del lavoro *(ph)* : « que si ce der-
« nier produit excède celui qui représente la résistance
« vive d'élasticité [$T_e = \frac{1}{2} M (V^2 - v^2)$] la verge pris-
« matique aura subì une déformation, une altération mo-
« léculaire qu'il est souvent nécessaire d'éviter dans l'éta-
« blissement des constructions ; que s'il est égal ou supé-
« rieur à celui qui représente la résistance vive de rupture
« ($T_r = \frac{1}{2} MV^2$), la verge prismatique pourra se rompre... »
quindi havvi luogo a riflettere su ciò che al suddetto proposito esso dice in seguito a pag. 194. « Nous venons de
« supposer que lorsqu'un corps anime d'une certaine vitesse
« vient à choquer un prisme solide dans le sens de son axe,
« *il pourrait* y avoir rupture ou simplement altération de
« l'élasticité, si la farce vive dont il est anime se trouvait
« ètre à peu près égale au doublé de sa résistance vive de
« rupture ou d'élasticité; mais il est évident que diverses
« autres causes s'opposent à ce que ce principe puisse étre

« admis en toute rigueur dans les applications. Car, indé-
« pendamment... de l'action du choc, il est certain que nous
« ne connaissons pas sufflsamment le ròle joué par le calo-
« rique et le temps, lors des changements brusques de forme
« subis par les solides, pour pouvoir affirmer *a priori* que
« les résultats du calcul *seront exactement vérifiés* par ceux
« de l'expérience. » Queste riserve dimostrano come il Poncelet stesso non ammettesse assolutamente l'eguaglianza del lavoro della caduta di un grave con la metà della resistenza viva di un altro solido. Quindi non pare si debba neanche ritenere per assoluta tra diversi solidi la proposizione sua emessa in fin del N° 165: « II est bon de remarquer d'ailleurs que
« les mèmes géomètres qui mesurent les effets du choc par
« des sommes de pressions *(Ft)* nomment ces sommes des
« forces de percussion, et les considèrent comme égales aux
« quantités de mouvement qui ont été imprimées ou détruites
« dans l'acte du choc; tandis que d'après l'autre manière
« de voir, qui est aussi simple et d'ailleurs *parfaitement*
« *d'accord avec les résultats de Vexpérience,* nous sommes
« conduits naturellement à mesurer ces mèmes effets du choc
« par la force vive directement employée à les produire. »
Se devesi da un canto ritenere per assoluta la proposizione anzidetta quanto alla misurazione degli effetti prodotti, d'altra parte è tanto più da ritenersi che non si possa stabilire l'uguaglianza tra loro dei lavori prodotti anche in tempi divefsi per dedurre le appropriate condizioni dei diversi solidi occorrenti a ben sostenere i lavori stessi; giusto perché dianzi molto giustamente insiste l'autore istesso sulla distinzione a farsi tra le pressioni semplici e immobili, con le pressioni in movimento succedentisi, sebbene soggiunga: « Or
« cette succession n'est pas une pression simple et unique :
« on ne peut pas non plus la mesurer en kilogrammes par
« une somme de pressions, *puisqiie cette somme est infime,*
« mème pour un très-petit temps de l'action des forces et pour
« un mouvement extrèmement lent, mais, comme il y a à
« la fois pression ou effort et chemin décrit dans chaque in-

« stant très-petit, il y aura aussi un petit travail développé « dans cet instant; et c'est la somme finie de ces travaux « partiels qui, dans tous le cas, donne la mesure de l'effet « produit. » Poiché questo istesso ragionamento è applicabile a vece che al lavoro anche alle piccole quantità di movimento, egualmente svolte, la di cui somma serve pure alla misura della quantità totale, senza della quale quantità di movimento non si produrrebbe alcun lavoro.

§ 9° — Che l'eguaglianza debbasi stabilire tra le quanttià di movimento delle masse messe in moto e non tra le somme dei lavori a loro dovute, fa a proposito un altro esempio che l'autore istesso ci porge a pag. 177, N. 175, sulla misura totale del lavoro svolto dalla polvere da guerra accesa tra il fondo del cannone e la palla, ove dice : « Pour calculer directement ce travail, il faudrait connaître, d'après l'expérience, la loi ou la courbe qui lie les pressions *(F)* aux « chemins correspondants décrits par le boulet dans l'àme « de la pièce, ce qui n'est pas jusqu'à présent. » (Sicuramente non ancora nel 1841 che stampò il suo libro, ma dipoi l'esperienza fornì la detta curva che si trova nella mia memoria del 1867). « Mais, comme nous savons que cette « quantité de travaii est la moitié de la force vive impri« mée, nous pouvons l'obtenir au moyen des vitesses (V, V_1) « acquises effectivement par la pièce et le boulet. » Quindi essendo $M\,V^2$ la forza viva della palla e $M_1\,V_1^2$ la forza viva del cannone avuta dall'esplosione della polvere, ne deduce colla somma il lavoro totale dalla medesima svolto.

$$\frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} M_1 V_1^2.$$

Successivamente poi, nell'esempio che adduce, si serve appunto della uguaglianza delle rispettive quantità di movimento della palla con quella del cannone per dedurre la velocità V_1 impulsa al cannone stesso dicendo: *puisqu'on a* $PV = P_1 V_1$ essendo $P = g M$ e $P_1 = g M_1$ i rispettivi

pesi delle palle e del cannone. Quindi anche nell'esempio di un prisma che riceve l'urto longitudinalmente da un grave caduto da una data altezza, mentre si ha bensì nel prodotto del suo peso per la caduta la misura del lavoro, si può solo desumere quale relazione tra questi dati debba sussistere, dall'uguaglianza della quantità di movimento acquisita al grave istesso con quella che può sopportare la massa del prisma; dalla quale equazione risulta che la massa del prisma deve stare a quella del grave, come le rispettive velocità, mentrechè risulterebbe dalla eguaglianza delle quantità di lavoro o delle forze vive che le masse istesse dovrebbero stare come i quadrati di dette velocità.

Il sommo matematico Poisson, nel suo stampato « *For~ « mules rèiatives aux effets du tir sur les dìfférentes par« ties de l'affût*, 2e édition, Paris 1838 » senza ambagi scrisse a pag. 1 che « pour éclairer la pratique sur les « efforts auxquels les parties du système doivent ètre capa« bles de resister, il suffit de déterminer *la somme totale « des pressions que chaque partie éprouve pendant toute la « durée de l'action de la poudre. Or cette somme est une « quantité finie de mouvement,* qui ne dépend que de celle « que le boulet a recue à la sortie de la pièce, et que l'on « peut calculer eu faisant abstraction de la flexibilité du « système. En general, une percussion n'est autre chose « qu'une pareille somme de pressions successives qu'on pro« duit, dans un intervalle de temps très-court, une quan« tité de mouvement indépendante de la durée de leur ac« tion. » Così il Poisson dedusse le forinole delle quantità di movimento in funzione da quella del proietto ripartita sulle varie parti del sistema cannone ed affusto, messe in movimento assieme dallo sparo, quantità di movimento che occorre conseguentemente uguagliare a quelle che le parti istesse del sistema possono sopportare affine di dedurne le condizioni della loro stabilità.

II PARTE

SOLUZIONE

Di quesiti di meccanica pratica ad esempio dell'applicazione delle rettificazioni precedentemente esposte delle maniere di calcolo in uso.

(Letta nell'adunanza 30 aprile 1869).

§ 10. — Il confronto dei risultati di particolari esperienze ben constatate con alcuni esempli d'applicazione ai casi pratici varrà meglio a completare le esposte rettificazioni alle formole in uso pei casi statici, ed alla maniera di calcolare la resistenza viva dei solidi, od al loro modo di resistere alle forze nello stato di movimento, stato ch' è il solo esatto ed il più importante in natura, essendo meno frequenti i casi dello stato statico, se ben si ponderano.

Il principio generalmente ammesso che gli effetti siano in ragione delle forze vive, non viene punto confermato dalle moltissime e costosissime sperienze, che furono fatte in questi tempi sulla percussione dei proietti d'artiglieria contro varie sorta di ripari, sopratutto in Inghilterra; delle quali esperienze, incominciate fin dal 1862 sotto la direzione di una speciale Commissione, leggesi in un rapporto del capitano Noble segretario della medesima: « La Commissione delle piastre di « ferro ha proposto una serie di esperienze allo scopo di

« ricercare se la penetrazione dei proietti nel ferro è pro- « porzionale alla loro forza viva ». Di poi conchiude: « che « le esperienze fin qui fatte in Inghilterra su dei bersagli « massicci figurativi dei bordi delle navi corazzate di diversi « tipi, sono state ognora dirette in uno scopo così essenzial- « mente pratico ch'egli è difficile di tirare dai loro risultati « qualche deduzione teorica ». (Vedi *Supplemento alla teoria dell'urto dei proietti d'artiglieria Cavalli,* serie II, tomo XXV dell'Accademia Reale delle Scienze di Torino).

Tale principio che l'effetto nel corpo urtato fosse proporzionale alla forza viva del corpo urtante, non potè risultare dimostrato dalle sperienze di quella Commissione Inglese, e fu, dalle esperienze dei tiri eseguiti dall'Artiglieria Italiana con proietti uguali sparati con cariche quasi l' una doppia dell'altra sia a piccole che a grandissime distanze, dimostrato affatto insussistente.

Risulta pure tale principio essere erroneo in un singolare esperimento fatto dal signor Montdisir sul lavoro svolto e l'effetto ottenuto con un particolare ventilatore che caccia l'aria entro la bocca di un tubo conduttore, tutto in giro aperta e fatta ad imbuto (vedi pag. 299 della 94ª dispensa della R*evue Maritime et Coloniale)* basato, dicesi, tale sistema sulla corrente che dichiarasi all'interno degli alberi in lamiera delle navi, operanti siccome un camino di richiamo dell'aria; ivi l'autore conchiude: « La force vive de cet air, en effet « ne se conserve pas; c' est sa quantité de mouvement $m\,V$ « qui se retrouve toute entière en $M\,v$ au débouché dans « la salle... Le rapport des forces vives $\left(\frac{m\,V^2}{M\,v^2}\right)$ est donc égale « à $\frac{V}{v}$ et, par suite, la perte de travail est proportionnelle à « la vitesse de sortie du ventilateur ». *Seguono vari quesiti.*

§ 11. — Sia una spranga prismatica infissa verticalmente dal capo superiore e riceva dal capo inferiore libero di allungarsi l'urto d'un corpo ad essa infilato cadente da una data altezza, come nell'esempio predetto del Poncelet, che per avere un orlo o ritegno ivi restavano le due masse unite. Ne sia:

A la superficie della sezione retta del prisma;

L la lunghezza del medesimo;

P il peso del prisma;

D il peso dell' unità cubica della materia dello stesso prisma;

g la gravità;

P il peso del corpo caduto;

h l'altezza della caduta ivi compreso l'allungamento subito dal prisma;

i l'allungamento proporzionale del prisma;

R la resistenza all'allungamento sull'unità superficiale della materia del prisma stesso.

Ritenuto sia trascurabile l'allungamento del prisma preesistente all'urto e seguendo l'insegnamento scolastico, si avrebbe l'equazione del problema coll' uguaglianza del lavoro *Ph* del corpo caduto con il prodotto della resistenza media $\frac{1}{2}(RA-p)$ opposta all'allungamento del prisma per l'allungamento istesso iL

$$Ph=\frac{1}{2}(RA-p)\,iL$$

Dove sostituendo ad $L=\frac{p}{AD}$ si estrae l'espressione:

$$h=\frac{i}{2}\frac{R}{D}\frac{p}{P}\left(1-\frac{p}{RA}\right)=\frac{i}{2}\frac{R}{D}\frac{p}{P}\left(1-L\frac{D}{R}\right).$$

Cosicché risulterebbe decrescere l'altezza *h* della caduta del corpo *P* al cui urto può reggere la spranga, col crescere della lunghezza *L* della spranga medesima: mentrechè invece non varia la resistenza viva dei prismi colla lunghezza loro, essendo ognora proporzionale al loro volume (N° 6).

Ove si consideri che il solido *P* caduto dall'altezza *h* ha urtato il prisma *p* restando unite le due masse, e che in

detto urto la quantità di movimento del solido P passa nelle masse unite, si ha invece della prefata equazione, quest'altra:

$$P\sqrt{2gh}=(P+p)\frac{V}{\sqrt{\omega}}\quad(\text{N. } 7)\quad \omega=1+\frac{P}{p}$$

dalla quale equazione si estrae la giusta espressione della cercata altezza

$$h=\frac{V^2}{2g}\frac{p(p+P)}{P^2}=\frac{i}{2}\frac{R}{D}\frac{p}{P}\left(1+\frac{ALD}{P}\right)$$

da dove appunto risulta, dalla differenza del solo fattore binomio di questa a quello della precedente forinola, che cresce l'altezza *h* col crescere della lunghezza *L* del prisma, supposto di peso costante.

§ 12. — Siano da determinarsi le migliori condizioni attendibili nello affondamento delle palafitte a consolidamento del suolo o per qualsiasi oggetto. Convenendo di affondare le palafitte fino al rifiuto, siccome dicono i pratici, conviene notare che questo rifiuto, a parte la resistenza del suolo, è sempre relativo alla potenza dei colpi di maglio nonché alla resistenza viva delle palafitte istesse. La carica permanente ripartita per palafitta bisogna al più ragguagliare alla compressione che reggere può il legno della palafitta al limite di stabilità, ritenuto che comunque sia conficcata nel suolo o collegata con altre non possa inflettersi. Sia *Q* la detta resistenza sull'unità superficiale, dividendo la carica totale per questa resistenza si avranno i metri superficiali di sezione delle palafitte cilindriche o, se coniche, di quelle cilindriche equivalenti e quindi si potrà determinare per reggere un dato peso, l'occorrente numero di palafitte di forma naturale troncoconica, la di cui sezione media è quella del cilindro equivalente, come si è dimostrato alla nota (2) del N° 6. Sia ognora *V* la velocità elastica d'impulsione che può reggere il legname delle palafitte alla compressione al limite di stabilità ed *u* la velocità d'impulsione che solo può reggere il palo tronco-conico del peso q: occorrerà uguagliare la quantità di movimento $\frac{q}{g}u$ che il palo può ricevere a quella $\frac{p}{g}\sqrt{2gh}$ acquisita dal maglio del peso p caduto dall'altezza h necessaria per giugnere al rifiuto ossia al punto della massima resistenza viva del palo istesso, cosicchè si ha:

$$\frac{q}{g}u = \frac{P}{g}\sqrt{2gh}, \quad h = \frac{u^2}{2g}\,\frac{q^2}{p^2}.$$

$$\sqrt{2gh} = V\,\frac{\pi LD\left\{\frac{ab}{3}(a^2+b^2+ab)\right\}^{\frac{1}{2}}}{p}$$

Da dove scorgesi che il peso della palafitta di forma cilindrica deve stare a quello del maglio in ragione inversa delle rispettive velocità, cioè come la velocità acquisita al maglio sta alla velocità d'impulsione alla compressione che può sopportare la palafitta, *ed óve la sua forma non fosse cilindrica, detta velocità sarebbe quella stessa che può sopportare la sua materia ridotta della frazione*

$$\sqrt{\frac{3ab}{a^2+b^2+ab}}.$$

Se invece di stabilire l'eguaglianza tra le quantità di movimento, la si stabilisse tra le forze vive od i lavori dovuti a dette quantità di movimento, chiamando in questa ipotesi con K la caduta occorrente, si avrebbe:

$$\frac{q}{g}u^2 = \frac{p}{g}2gK, \quad K = \frac{u^2}{2g}\,\frac{q}{p}, \quad 2gK = V^2\,\frac{\pi abLD}{p}.$$

Allora risulterebbe che i pesi del maglio e della palafitta starebbero come i quadrati di dette velocità, e per le palafitte cilindriche essendo $u = V$, si avrebbe per il rapporto di questi pesi, rispettivamente alle prefate eguaglianze, $\frac{V}{2g}$ oppure $\frac{V^2}{2g}$, per cui ritenuta la velocità d'impulsione che può

reggere il legname delle palafitte di quercia di

$$V = 4\,000\,000\sqrt{\frac{9.81}{1200\,000\,000{,}857}} = 12^{m}{,}354.$$

si avrebbe per detti rapporti 1,26 contro 15,55, da dove mentre appare plausibile il primo, che il peso massimo del maglio debba essere 1,26 volte quello della palafitta, appare inammessibile che debba invece essere 15,55 volte. E non è che sia esagerata la dedotta velocità d'impulsione che può reggere alla compressione la quercia, giacché si prese per la sua resistenza alla compressione 400 chilogrammi per centimetro superficiale, valore intermedio a quelli dati dagli esperimenti tra 385 e 462 (vedi Claudel pag. 329, N° 245) per lo schiacciamento di un cilindro non maggiore in altezza di 7 a 8 volte il diametro : valore che si deve ben prendere allo schiacciamento che produce infatti la percussione del maglio sulla testa della palafitta e che questa può sostenere per la sua elasticità, per essere la testa cerchiata, e per essere istantanea la durata di ogni percussione.

§ 13.— Sull'effetto della caduta delle bombe sulle blinde composte semplicemente con travi, si fecero pure moltissime esperienze e se ne conoscono i risultati con sufficiente precisione per fare il confronto dei due metodi di calcolo. Notisi che qualunque sia la distanza ove cade la bomba dai due punti di appoggio della trave la sua resistenza viva è sempre la stessa. (Vedi N° 44 della *Mémoire sur la théorie de la résistance statique et dynamique des solides*, 1863).

Sia adunque da calcolarsi. la resistenza occorrente ad una blinda per ripararsi dalla caduta delle bombe e sia dessa composta di un solo strato di travi di quercia di $0^{m}{,}30$ di quadratura con una tratta di $4^{m}{,}90$, siccome a pag. 495 del manovale d'artiglieria francese Pl. 30. Quantunque non sia questa blinda del N° 1 la più resistente , postochè ivi una sola trave riceve l'impulsione della bomba che vi cade sopra, egli è perciò tale caso il più semplice ed opportuno allo scopo nostro di dimostrare quale maniera di calcolo sia più conforme al vero, certi essendo i risultati forniti dalla più lunga e compiuta esperienza. Così leggesi in detto manovale: « Le « blindage N° 1 forme d'un seul lit de poutres de chène « jointives de 30 centimètres d' équarissage et de $5^{m},5$ de « longueur resiste à la chùte des bombes de 22^{c}, est forte- << ment endommagé par celles de 27^{C} et ne resiste pas à celles « de 32^{C} ». A pag. 909 si trovano i pesi in chilogrammi di dette bombe cariche, rispettivamente di 23^{k}, $50^{k},6$ e 75^{k} nonché le velocità massime dovute alla caduta nell'aria dal più alto punto a cui ascesero, cioè di $131^{m},2$; $154^{m},8$; $160^{m},5$ le di cui componenti verticali prossimamente si hanno moltiplicandole pel cos 30° = 0,8660. L'espressione di queste velocità essendo $\sqrt{2gh}$, si avranno per le equazioni delle quantità di movimento e dei lavori rispettivamente

$$\frac{P}{g}\sqrt{2gh}=\frac{ALD}{2g}V\sqrt{\frac{5\delta}{18\omega}};\quad ph=\frac{1}{9}\,\frac{ALD}{2g}V\,\frac{25\delta}{18\omega}$$

Questo è il caso di un prisma orizzontalmente posato su due punti d'appoggio ed uniformemente caricato, essendochè è la massa propria del prisma che riceve l'urto della bomba, per cui la metà soltanto si può ritenere come fosse concentrata al punto di caduta, dove la espressione della velocità d'impulsione elastica e duttile che può sopportare è $V\frac{\sqrt{5\delta}}{18\omega}$ (vedi N° 17 della predetta memoria) essendo qui $\omega=1$ e δ uguale ad 1 o 2 o 3 volte la flessione elastica, quando si vuol tener conto anche di quella duttile che può al limite di rottura essere 1 o 2 o 3 volte quella elastica.

Ritenuto pel confronto $h=h$ la stessa altezza per la caduta della bomba, per il primo prefato caso della bomba più leggiera essendo $p=23$ chilogrammi, si ha:

$$\sqrt{2gh}=131^{m},2\cos 30^{\circ}=113^{m},6,\ ALD=422\ \text{con}\ D=857$$

si deduce dalla prima delle prefate equazioni per

$$\delta=1\ \ V=51^{m},2;\ \delta=2\ \ V=39,^{m}9$$
$$\delta=3\ \ V=30^{m},1;\ \delta=4\ \ V=26^{m},1$$

dalla seconda delle prefate equazioni $V=159,9$, $112,5$, $91,9$, $79,9$. Al confronto con queste si cerchi la velocità d'impulsione, che pel fatto caso si desume direttamente dal coefficienti del legno colla formola (5) $V=R\sqrt{\frac{g}{ED}}$, ove si ha $E=$ 1200,000,000^{k}, valore che rìducesi sempre più a meno oltre il limite di stabilità, dal qual limite crescono i valori della resistenza R da 2 a 6 ad 8 milioni di chilogrammi sull'unità superficiale (Claudel pag. 311, 313): ottiensi rispettivamente ai prefati coefficienti le velocità d'impulsione di metri 6; 18,5 e 22; valori che per le travi da blinde, tanto più verdi o poco stagionate, sarebbero appunto inferiori come sono ai veri valori, per quelli sopratutto che più si scostano dal limite di stabilità quando ne fosse minore il valore del modulo di elasticità da quello presupposto.

Quindi evidentemente sono verosimili i soli valori dedotti dall'eguaglianza delle quantità di movimento con quelli forniti dalle prove meccaniche dirette, ed invece risultano inammessibili in pratica come in teoria, quelli tirati dall' eguaglianza delle quantità di lavoro.

Ove si volesse tener conto del peso p della bomba che si aggiugne al peso della metà della trave concentrato nel suo punto di mezzo, allora sarebbe:

$$\omega=1+\frac{2p}{ALD}=1,109$$

per cui i prefati valori di V per ambo le due maniere di calcolo volendo essere moltiplicati per $\sqrt{\omega}=1,053$ vedesi che varierebbero di poco.

§ 14. — Quale sia la resistenza viva di una sala per carri, e ad ugual peso in che rapporto stiano le resistenze stesse delle sale di ferro, d'acciaio, o di legno d'olmo.

Quando la carica di un carro gravitante su di una sala cade da una determinabile altezza, siccome avviene quando dopo di aver le ruote sormontato una prominenza del suolo, ne precipitano, riceve la sala un' impulsione, una quantità di movimento pari a quella dalla carica suddetta acquisita nella caduta.

I punti d'appoggio della sala sulle ruote sono naturalmente quelli sulle verticali innalzate sul piano del suolo supposto orizzontale dai punti d'appoggio delle ruote istesse sul suolo medesimo, e prossimamente nel calcolo si può ritenere le estremità della detta parte della sala siano conformi a quelle del corpo di sala, quantunque siavi compresa una parte dei fusi della medesima, tanto più che perciò non si eccederebbe nel desumerne la resistenza viva, poiché così ritagliate s'accostano alla forma dei cosidetti prisma di uguale resistenza, per cui ne rimane duplicata la resistenza viva, quando appunto vengono le grossezze ridotte secondo la forma di ugual resistenza (N^0 6).

Ritengasi la forma del corpo di sala prismatica a base rettangolare, come comunemente si usa, ove sia A la sezione retta del corpo di sala prismatico, L la sua lunghezza suddefinita e D il peso dell'unità cubica della materia con cui è fatta. Ove si traduca il problema in equazione coll'eguaglianza dei lavori si avrebbe

$$Pk = (F_1 - P)\, x_1 = \frac{1}{9}\frac{R^2}{E} AL \left(1 - \frac{3}{2}\frac{P}{RA}\frac{L}{h}\right)$$

$$(59) \qquad K = \frac{V^2}{9 \cdot g}\frac{ALD}{P}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{P}{RA}\frac{L}{h}\right).$$

Notasi qui pure come al N° 11, l'assurdità che nel fattore binomio crescendo la lunghezza L sminuirebbe la resistenza viva.

Ricorrendo invece all'equazione delle quantità di movimento

della carica caduta dall'altezza K con quella che può reggere la sala si avrà per l'altezza da cui possono piombare le ruote sul suolo, supposto le ruote ed il suolo per nulla cedevoli

$$(59) \qquad K = \frac{V^2}{9g}\frac{(ALD)^2}{(ALD + P)\, P^2}$$

Ad uguale carica e peso loro proprio fra due diverse sale (distinguendone le prefate lettere *Jc* e *v* con una o due virgole) si deduce

$$\frac{K_{,}}{K_{,,}} = \left(\frac{V_{,}}{V_{,,}}\right)^2.$$

che le altezze della caduta alle quali possono reggere le due diverse sale sono semplicemente proporzionali al quadrato delle velocità d'impulsione longitudinale della materia colla quale sono fatte.

Ritenuto che le velocità d'impulsione, per la sola parte elastica e non la duttile, siano al limite di stabilità di 9 m. pel ferro, di 18 m. per l'acciaio e di 9 per il legno d'olmo, e siano dette velocità quadruple al limite della rottura, ne conseguirebbe avere uguale resistenza viva le sale di ferro e di olmo, e le loro sezioni essendo allora in ragione inversa della densità, dovrà essere la sezione delle sale di detto legno 10 volte quella della sala in ferro, prossimamente essendo la densità del ferro 10 volte quella del legno medesimo.

Essendo la detta velocità d'impulsione dell'acciaio doppia di quella del ferro e la densità a poco presso uguale, ad ugual peso ne sarebbe la resistenza viva quadrupla per la sala d'acciaio.

A cagion d'esempio sia per una sala in ferro

$$A = 0^{m^2},01,\ L = 1^m,5, \quad D = 7800 \text{ e } P = 4000^k.$$

si troverebbe soltanto, per

$$V = 9^m,\ k = 0^m,0000223 \text{ e per } V = 36^m,\ k = 0,00357$$

da dove vedesi il perché facilmente le sale possono piegarsi o rompersi quando le ruote dei carri carichi piombano dalle benché minime altezze, solo però quando, come si disse, nulla cedesse, né le ruote nè il suolo, che per poco siano le ruote flessibili e cedevole il suolo, ne rimane assai scemata l'impulsione sopportata dalla sala.

Ad accrescere la resistenza del corpo di sala in ferro s'usa rinforzarlo con un guscio di legno, ma si può ugualmente rinforzare con lamine pari a quelle delle molle di sospensione dei carri. Allora abbisogna rendere il capo di sala cedevole facendolo in due pezzi congiunti per soprapposizione longitudinalmente, gradatamele assottigliandoli e unendoli con un piuolo. Quindi dalla parte o da ambe le parti assottigliate, ove da ambe le parti potesse ricevere il corpo di sala delle impulsioni, vi si applicherebbero delle foglie simili a quelle delle mollette sicché essendo queste tenute con fascie congiunte al corpo di sala ne avrebbero a sopportare unicamente le impulsioni. Ove dunque si aggiunga tante lamine, per una grossezza pari a quella che aveva il corpo di sala di una sol massa, ritagliate come i prismi di uguale resistenza, la resistenza viva della sala così fatta diverrà più che doppia di quella che avrebbe ove fosse il suo corpo della stessa stoffa di ferro ed acciaio, con cui si fanno le molle.

§ 15.— Trovare con quale velocità una locomotiva può partire senza rompere il legame d'unione col traino.

La locomotiva per passare dallo stato di riposo a quello di movimento onde trainare un convoglio, deve anzitutto vincere la propria inerzia, e perciò le occorre sviluppare una forza F che la spinga durante un determinabile tempo t per impellersi una quantità di movimento $\frac{P}{g}v$. Essendo P il suo peso e v la velocità iniziale nell'atto della sua partenza, per cui si ha $Ft = \frac{R}{g}v$.

Adunque la locomotiva parte ognora con una definita velocità iniziale più o meno grande a seconda dell'energia della sua forza motrice, che conviene saper come limitare.

Supponiamo il caso più sfavorevole, che i vincoli d'unione tra i diversi carri del traino siano già in tensione, sicché la resistenza opposta al movimento del traino sia quale sarebbe se costituisse una sol massa. Suppongasi prismatica la spranga di unione della locomotiva col traino ; dessa nell'atto di partenza subirà una impulsione, la di cui quantità di movimento che può sopportare, pareggiare si dovrà a quella acquisita nell'urto alla massa del traino; di questo sia Q il peso ed u la velocità di partenza: conoscendo l'espressione di questa velocità e posto sia p il peso della spranga d'unione e di forma prismatica, e sia V la velocità d'impulsione che può reggere il ferro col quale è fatta, si avrà pertanto l'equazione tra la quantità di movimento virtuale propria e quella della massa della locomotiva animata dalla differenza $v-u$ delle anzidette velocità, nonché l'espressione del peso p occorrente alla spranga d'unione o della velocità v iniziale del movimento.

$$pV = P(v-u),\quad u = \frac{Pv}{P+Q},\quad p = \frac{PQ}{P+Q}\,\frac{v}{V},$$

$$v = \frac{p\,(P+Q)}{PQ}\,V,$$

facendo $p = mP$ e $Q = nP$ sarebbe $v = m\left(\frac{1+n}{n}\right)V$

da dove vedesi che nel caso tosse n molto grande rispetto all'unità diverrebbe $v = mV$, cioè che la velocità iniziale nella partenza della locomotiva sarebbe una frazione della velocità d'impulsione che può reggere longitudinalmente il ferro della spranga d'unione, frazione data dal peso della spranga istessa divisa pel peso della locomotiva.

Suppongasi il peso della spranga di 25^k e quello della locomotiva 25000^k, la velocità iniziale che la romperebbe, ritenuta quella d'impulsione del ferro di 50^m, risulterebbe di $0^m{,}05$, limite che non si dovrebbe raggiungere, tanto più quando di moltissimi vagoni si componesse il traino.

La prefata relazione tra la forza motrice F e la velocità v iniziale di partenza della locomotiva sussiste ugualmente tra la forza istessa e la velocità iniziale di partenza del traino: quindi data la forza motrice F per dedurne la velocità di partenza è d'uopo ricercare l'espressione del tempo t_1 necessario a mettere in movimento tutta la massa del traino, ossia a trasmetterle il movimento dal capo alla coda. Ove a questa massa del traino si sostituisca quella di un prisma omogeneo di ferro di uguale lunghezza e peso, e per tener conto della resistenza d'attrito fQ se ne moltiplichi la massa istessa per $1 + f$ si avrà, a vece della prefata, la relazione simile

$$Ft_1 = (1+f)\frac{Q}{g}v.$$

Ora l'espressione del tempo t_1 occorrente alla trasmissione del movimento longitudinale o normale in un prisma si deduce dalle equazioni del movimento d'allungamento e raccorciamento longitudinale o da quelle del movimento di flessione normale già date al N° 6, alla velocità variabile v sostituendo $v = \frac{dx}{dt}$ ed ivi chiamando con Σ il coefficiente di quantità costanti moltiplicatore dello spazio x, se ne deduce per ambi i fatti casi l'espressione del tempo t corrispondente ad x

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{V^2 - \Sigma x^2}} = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arc}\left(\operatorname{sen} = \frac{x}{V}\Sigma^{\frac{1}{2}}\right).$$

Dove sia esaurita l'impulsione ricevuta dal prisma, essendo allora $v = o$ l'arco divenendo $\frac{\pi}{2}$ (quello del seno = all'unità) per essere $x = x_1 = \frac{V}{\Sigma^{\frac{1}{2}}}$, ottiensi pel tempo t designato con t_1

$$t_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{\Sigma}} = \frac{\pi x}{2V}.$$

In generale vedesi, dalla seconda conseguita espressione, essere il tempo della durata dell'impulsione in ragione diretta dell'allungamento o raccorciamelo subito dal prisma, o della sua flessione, ed inversa della velocità dell'impulsione stessa ricevuta; ma dalla prima di dette espressioni risulta essere tale tempo indipendente dalla medesima impulsione dall'allungamento prodotto, qualunque esso sia, e per i prismi a sezione rettangolare che ricevono l'impulsione longitudinalmente essendo $\Sigma = \frac{Eg}{DL^2}$ risulta il tempo predetto

$$t_1 = \frac{\pi}{2} L \sqrt{\frac{D}{gE}},$$

in quanto alle dimensioni, semplicemente proporzionale alla lunghezza del prisma; e per i prismi che ricevono normalmente l'impulsione è il tempo stesso

$$t_1 = \frac{\pi}{2}\frac{L^2}{h}\frac{1+\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2\varepsilon}}\sqrt{\frac{D}{gE}}$$

in ragione diretta del quadrato della lunghezza ed inversa dell'altezza della sezione.

Così ottenuta l'espressione del tempo necessario a smovere il prisma suddetto ed a far partire il traino, tempo sempre lo stesso qualunque sia la impulsione data, si avrà per l'espressione della forza movente F occorrente a farlo partire con una velocità iniziale v_1 voluta, notando eh'è

$$x_1 = \frac{R}{E}L, \quad E = \frac{R^2 g}{V^2 D},$$

$$F = \frac{(1+f)Q}{g}\frac{2v_1}{\pi L}\sqrt{\frac{gE}{D}} = \frac{2(1+f)}{\pi}\frac{R}{LD}\frac{v_1}{V}Q$$

Da quest'altra espressione della equazione stessa

$$\frac{1}{2} Fx_1 = \frac{(1+f) Q}{g} \frac{v_1 V}{\pi}$$

scorgesi che la metà del lavoro della forza motrice F nell'allungare d' x_1 il prisma rappresentante il traino, allungamento corrispondente alla velocità d'impulsione V ricevuta, è uguale alla forza viva acquisita alla massa del prisma con una velocità di

$$\sqrt{\frac{v_1 V}{\pi}}$$

media proporzionale tra la velocità v di partenza e la velocità d'impulsione data alla massa divisa per la radice quadrata del rapporto della circonferenza al diametro del circolo.

§ 16.— Abbiasi da calcolare, nello stato dinamico nel quale si trovano, la resistenza delle travate di un ponte, sopratutto per vie ferrate, durante il passaggio d'un traino che le cuopra interamente; e sia così il caso della carica uniformemente ripartita, ivi compreso tanto la parte dovuta alla travata propria resistente, quanto quella parte occorrente per gli accessorii della detta parte resistente e per dare maggiore inerzia o stabilità al ponte stesso, ove a ciò non basti la massa resistente; essendo tale condizione da presciegliersi, siccome quella che più aggrava il ponte ed ognuna delle sue travate; siano queste composte di più travi cave o di una sola, dapprima supposte appoggiate semplicemente alle loro estremità.

Attenendoci per modo d'esempio del calcolo nello stato dinamico, alla trave cava di sezione rettangolare semplicemente appoggiata alle sue estremità sia

L la lunghezza della trave a sezione rettangolare.

b e b_1 le larghezze esterna ed interna.

h ed h_1 le altezze corrispondenti.

R, la resistenza del ferro sull'unità superficiale ritenuta uguale sì nella estensione che nella compressione.

D il peso dell'unità cubica del ferro della trave.

V la velocità d'impulsione corrispondente.

E il modulo di elasticità.

I il momento d'inerzia della sezione della trave.

N la distanza dell'asse neutro al lato esterno della sezione ove è minore la resistenza.

p la carica totale per metro corrente.

$F = \frac{1}{2} pL$ il momento inflettente (1).

$\frac{RI}{N}$ il momento di resistenza.

q il peso per metro corrente del traino che passa.

v la velocità del traino.

x_1 la flessione corrispondente alla resistenza R.

x la flessione corrispondente alla velocità u.

u la velocità acquisita in fin della flessione x.

U la velocità d'impulsione trasversale che può reggere la trave inflessa d'x_1.

ρ il rapporto $\frac{p}{q}$ ossia coefficiente di stabilità del ponte.

ω il rapporto $\frac{p}{AD}$ della carica totale al peso del ponte.

Dalle formole dello stato statico si possono ognora dedurre quelle confacienti allo stato dinamico, e si ha pertanto

---

(1) Il momento inflettente della forza di resistenza F alla flessione applicata per metà al punto di mezzo di ciascuna delle due mezze parti della distanza L, sì come fossero all'estremità loro incastrate, essendo uguale alla somma dei momenti degli elementi presi a tutti i punti intermedii, chiamando con y la distanza ad un punto qualunque si ha appunto :

$$\frac{F}{2}\,\frac{L}{2} = \int_{y=0}^{y=\frac{1}{2}L} py\,dy = \frac{1}{2}\,p\left(\frac{L}{2}\right)^2 \qquad F = \frac{1}{2}\,pL.$$

(come nel manovale del Claudel, 1867, pag. 351, n. 253) pel suddetto caso

$$(1) \quad \frac{pL^2}{8} = \frac{RI}{N} \qquad (2) \quad x = \frac{5pL^4}{384\,EI}$$

Ove essendo $\frac{1}{8}\,pL$ il momento inflettente, chiamando con F_1 la forza resistente F che deducesi dalla (2), quando diviene $x = x_1$ sostituendola nella (1) si ottengono le seguenti:

$$(3) \quad F = \frac{192}{5}\,\frac{EI}{L^3}\,x \qquad (4) \quad F_1 = 4\,\frac{RI}{LN}$$

$$(5) \quad x_1 = \frac{5}{48}\,\frac{RL^2}{EN}\,.$$

La massa inflettente concentrata nel mezzo della trave essendo $\frac{1}{2}\,\frac{pL}{g}$, trascurando la flessione preesistente dovuta al proprio peso $p - q$ essendo scarica, e ritenuto che la velocità u acquisita nella caduta x verticale, avviene come se la carica q a vece di scorrere da una estremità alla metà della trave, vi piombasse verticalmente, si avrà per l'equazione differenziale del movimento d'inflessione:

$$(6) \quad \frac{1}{2}\,\frac{pL}{2g}\,du^2 = -\,F dx.$$

Integrando fra $x = x_1$ ed $x = o$ ivi notando essere allora $u = U$ la velocità d'impulsione che può reggere la trave istessa perpendicolarmente sul mezzo, come in qualunque punto della sua lunghezza, si deduce, notando inoltre che per $x = x_1$ diviene $u=0$,

$$u^2 = U^2 - \frac{384}{5}\,\frac{EIg}{pL^4}\,x^2 \quad U^2 = \frac{5}{6}\,V^2\,\frac{DI}{pN^2}.$$

Nel prefato problema essendo dati N ed I, si deduce sostituendo :

$$p = eq,\ N = \frac{1}{2}\,h, \quad I = \frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{12}$$

$$(7) \quad U^2 = \frac{5}{18}\,\frac{D}{eq}\,bh\left(1 - \frac{b_1}{b}\,\frac{h_1^3}{h^3}\right)V^2.$$

Dove occorre sostituire in detta espressione di U^2 a

$$eq = p = \omega D\,(bh - b_1 h_1),$$

affine di paragonarne la velocità d'impulsione che regger può la trave cava con quella piena, allora il fattore in funzione delle dimensioni della sezione avendo il denominatore $1 - \frac{b_1}{b}\,\frac{h_1}{h}$, vedesi che questo denominatore avendo sempre un minore valore del numeratore, la velocità U è maggiore per la trave cava che non per la piena, e tanto più che è minore la frazione $\left(\frac{h_1}{h}\right)^3$.

Conformemente alle dimostrazioni precedentemente esposte si avrà ad uguagliare la quantità di movimento, che è capace di reggere la trave alla somma di quelle che deve sopportare; prima la quantità di movimento della sua massa stessa $\frac{pL}{2g}$ cadente dall'altezza x, ossia della prefissa flessione massima; seconda quella dovuta alla massa $\frac{q}{2g}$ del traino supposta cadere inoltre da una determinata altezza K dovuta all' oscillazione verticale delle molle del carreggio, nonché ai sussulti inevitabili per le irregolarità del movimento del traino ; terza quella parte della quantità di movimento del traino stesso che si accumula nella discesa, causa la inflessione della prima metà, che si esaurisce nella risalita dell'altra metà della lunghezza del ponte ; per semplicità del calcolo supporremo ambe rettilinee le due dette parti uguali della lunghezza L della trave siccome si fosse piegata ad angolo in mezzo. Allora ritenute le due metà del traino stato supposto concentrato nel mezzo della trave, concentrate invece ciascuna nel mezzo della rispettiva metà della trave, sia ivi la forza colla quale muovesi il traino pari ciascuna alla quantità di movimento $\frac{qL}{4g}v$ decomposta in ambi i siti nelle due componenti orizzontali e verticali, mentre le componenti orizzontali si distruggono, quelle verticali si sommano e ne risulterà la predetta terza parte

$$\frac{qLvx_{,}}{2g\sqrt{\frac{1}{4}L^2+x_{,}^2}}$$

quindi l'equazione predetta della quantità di movimento sarà:

$$(8)\quad \frac{PL}{2g}U=\frac{pL}{2g}\sqrt{2gx_{,}}+\frac{qL}{2g}\sqrt{2gk}+\frac{qLvx_{,}}{2g\sqrt{\frac{1}{4}L^2+x_{,}^2}}$$

Allorché sono note le quantità del problema e vogliasi determinare le dimensioni interne della trave, ossia le sue grossezze, oppure siano pur date queste grossezze, e si cerchi invece il valore conseguente del coefficiente c di stabilità (1)

(1) A definire questo coefficiente di stabilità occorre distinguere il peso della parte viva, ossia resistente, delle travate, oppure dell'arco di un ponte, dal peso delle parti accessorie e da quello della carica massima che vi può passar sopra. Il peso della parte resistente del ponte unitamente a quello delle parti accessorie deve essere abbastanza superiore a quello della detta carica massima, affinchè le vibrazioni provenienti dal passaggio della carica stessa, stiano entro limiti innocui. Il rapporto di questi pesi varia incirca da 1,6 a 5. (V. pag. 36 della nostra Memoria *Sul delineamento equilibrato degli archi,* 1850).

servirà al caso l'una delle due formole:

$$(9)\quad \frac{b_{,}}{b}\frac{h_{,}^3}{h^3}=1-\frac{18}{5}\frac{q}{cDbhV^2}\left\{c\sqrt{2gx_{,}}+\sqrt{2gK}+\frac{vx_{,}}{\sqrt{\frac{1}{4}L^2+x_{,}^2}}\right\}^2 \qquad (10)\quad x_{,}=\frac{5}{24}\frac{DL^2V^2}{Rhg}$$

$$(11)\quad c=\frac{5}{72}\frac{V^2D}{gq}bh\left(1-\frac{b_{,}h_{,}^3}{bh^3}\right)-\sqrt{\frac{K}{x_{,}}}-\frac{28x_{,}}{L\sqrt{2gx_{,}}}+\left\{\left[\frac{5}{72}\frac{V^2}{g}\frac{D}{q}bh\left(1-\frac{b_{,}h_{,}^3}{bh^3}\right)-\sqrt{\frac{K}{x_{,}}}-\frac{28x_{,}}{L\sqrt{2gx_{,}}}\right]^2-\left[\sqrt{\frac{K}{x_{,}}}+\frac{28x_{,}}{L\sqrt{2gx_{,}}}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

nel qual valore di c essendo trascurabili i due termini

$$\sqrt{\frac{K}{x_{,}}}\ \text{e}\ \frac{28x_{,}}{L\sqrt{2gx_{,}}},$$

approssimativamente ottiensi quest'altra espressione ridotta

$$(12)\quad c=\frac{5}{36}\frac{V^2D}{gq}bh\left(1-\frac{b_{,}h_{,}^3}{bh^3}\right).$$

§ 17. — Sia a cagion d'esempio $L=100$ metri; $b=h=7^m$; $D=7788^k$; $q=6000^k$; $K=0^m,03$; $c=3$; $p=18000^k$; $R=15000000^k$; $V=5^m$ e $v=20^m$ si desume dalla (10) $x_{,}=0^m,3938$, flessione che prenderà il ponte tubulare di ferro fatto come una trave cava, durante il passaggio del presupposto traino o doppio traino pesante sei tonnellate al metro corrente. Notisi che la flessione è indipendente dalle grossezze delle pareti della trave cava, è proporzionale al quadrato della lunghezza della trave ed in ragione inversa dell'altezza della sezione; è proporzionale al peso dell' unità cubica del ferro con cui è fatta, al quadrato della velocità d'impulsione elastica che corrisponde alla resistenza stessa del ferro sull'unità superficiale di cui n'è inversamente proporzionale.

Pari a questa flessione potrebbesi dare in costruzione una saetta saliente inarcando la trave, ciocché non altererebbe l'applicazione delle prefate formole. Quindi si trova colla (9) la grossezza delle quattro pareti della trave supposte uguali

$$\frac{1}{2}(b-b_1)=\frac{1}{2}(h-h_1)=0^m,0580\,;$$

la superficie della sezione $A=1^{mq},613$, ed il peso della trave stessa al metro corrente $AD=12562^k$, così si eccederebbe nel peso totale di 562^k per metro corrente, anziché avere una riserva. Si noti però che per tal foggia di ponti usasi sostituire ai fianchi verticali e pieni della trave degli intrecci a giorno di sufficiente resistenza alla compressione per cui concentrando la longitudinale resistenza dei lati della trave alle estremità dell'altezza della sua sezione, allora bastando per la resistenza la metà della loro sezione, rimarrà a disposizione la quarta parte del suo peso, quantità più che sufficiente agli intrecci ed agli altri accessori che non concorrono alla sua forza viva ; la quale in ogni caso abbisognando, la si potrà accrescere, accrescendo il presupposto valore di c, ove non si creda dedurne il valore direttamente colla (11) o (12) relazione.

A confrontare questa maniera di calcolo nello stato dinamico con quello in uso per lo stato statico, basta dedurre dall'equazione (1) dei momenti, N° 16, il valore del coefficiente R di resistenza che occorrerebbe dare, e si trova:

$$(13)\qquad R=\frac{PL^2N}{8I}=\frac{3}{4}\,\frac{pL^2}{bh^2\left(1-\frac{b_1}{b}\,\frac{h_1^3}{h^3}\right)}=6309370^k$$

valore al quale appunto l'esperienza dei pratici indusse di ridurre valendosi nella applicazione delle forinole appropriate allo stato statico, affine di equiparare possibilmente i risultati della impropria siffatta applicazione al naturale stato dinamico ; nel quale stato in realtà la effettiva resistenza esercitata sul ferro, qui ritenuta la stessa alla estensione che alla compressione, è quella prefissa di 15^k per millimetro superficiale e non di $6,3$.

§ 18. — Se a vece di ferro si facesse la trave ponte o la equivalente armatura longitudinale d'acciaio o di lega di ferro con acciaio, quale si adopera a fare le molle, e che si può ritenere di una resistenza doppia della presupposta, cioè fosse entro il limite di stabilità $R=30000000^k$ ed il relativo valore di $V=10^m$: pur ritenendo il coefficiente di stabilità $c=3$ affine di così dare maggior stabilità d'inerzia al ponte allora si troverebbe doppia la flessione cioè di $0^m,7916$ e si trova dover essere la grossezza

$$\frac{1}{2}(b-b_1)=\frac{1}{2}(h-h_1)=0^m,02769,$$

la sezione $A=0^m,9722$ ed il peso della parte resistente della trave cava $AD=6014^k$, e si avrebbe conseguentemente una eccedenza di peso disponibile anche solo per accrescere la stabilità d'inerzia del ponte

$$18000^k-6000^k-6014^k=5986^k$$

per metro corrente. Se il presupposto valore di c si riduce da 3 a 2, allora risulta la grossezza delle pareti di 20 millimetri a vece di $27^{mil},7$ la sezione $A=0^{mq},5568$ il peso $AD=4336^k$ e l'eccedenza disponibile di

$$12000^k-6000^k-4336^k=1664^k$$

per metro corrente.

Questa trave d'acciaio o ferro di lega a pareti intiere per *100* metri di lunghezza peserebbe 433600^k al prezzo di L. *1, 50* al chilg. costerebbe *650,000* lire circa : mentre che fatta in ferro peserebbe 1256200^k, circa il triplo, e valutandone il prezzo a lire *1* al chilog. costerebbe ancora il doppio della trave d'acciaio.

Allorché la trave cava, ossia ponte tubulare, posasse su diverse pile distanziate della lunghezza L da mezzo a mezzo di esse nel caso che almeno due campate potessero essere ad un tempo intieramente coperte nel passaggio del traino, delte campate si troverebbero nel caso come se avessero le estremità infisse, ed allora il coefficiente $\frac{5}{24}$ della formola (10) per il calcolo della flessione si cambierebbe in $\frac{8}{16}$ e quello del secondo termine del secondo membro della (9) $\frac{18}{5}$ in 8, e nella (11) il coefficiente $\frac{5}{72}$ in $\frac{1}{32}$ e nella (12) $\frac{5}{36}$ in $\frac{1}{16}$; ciò posto per l'ultimo prefato caso la flessione da $0^m,7916$ ridurrebbesi a $0^m,23748$; la grossezza delle pareti della trave da *20* ad *8,725* millimatri ; diverrebbe la sezione $A = 0^{mq},2494$ ed il peso $AD = 614^k,2$ e l'eccedenza disponibile a $12000^k - 6000^k - 614^k,2 = 5385^k,8$ sufficiente a rinforzare anche la piccola tratta della trave cava soprastante le pile ; ove per essere il momento di resistenza doppio di quello in mezzo della medesima, devesi duplicar le grossezze trovate per la sezione di mezzo per avere quelle alla sommità delle pile, da dove andranno sminuendo in modo da uguagliare quelle di mezzo alla distanza dal mezzo delle pile $a = 0,0917$ d'ambe le parti ; espressione questa che deducesi coll'eguagliare

$$\frac{P}{2}\left[\left(\frac{L}{2} - a\right)^2 - \frac{L^2}{12}\right] = \frac{pL^2}{24}$$

(Claudel, 1867, § 257) del momento o sua espressione in funzione d'*a* preso sulle pile con quello d'intermezzo.

Ora che i giornali tornarono sul progetto di fare un ponte sullo stretto di Calais, o di passarvi sotto con una galleria sotterranea, è interessante il calcolarne le progettate travate di 1000 metri.

Posta la grande convenienza di farle in acciaio e ritenuti i precedenti dati (meno $L = 1000^m$) supposto $b = h = 30^m$ si trova per la flessione $x = 1^m,744$ e le grossezze

$$\frac{1}{2}(b - b_1) = \frac{1}{2}(h - h_1) = 0^m,0531,$$

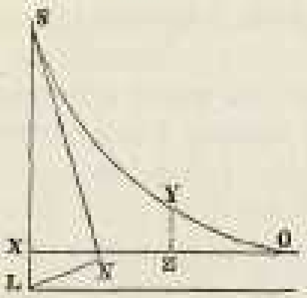
la sezione $A = 5^{mq},40$; sarebbe il peso al metro corrente $AD = 12299^k$ alquanto eccedente il $cq = 12000$ anzidato. Ma pure qui notando che un quarto del peso AD della trave cava si può togliere concentrando la resistenza viva delle pareti laterali alla estremità verticale della sezione, allora apparentemente rimane nella restante eccedenza di

$$12000 - 9974 = 2026$$

per metro corrente di che far fronte ai bisogni degli intrecci da sostituirsi ai fianchi e per le altre armature occorrenti a costituire il ponte trave all'americana, il di cui peso totale delle sole 30 travate ritenuta la lunghezza di 30 chilometri risulterebbe di $30000 \times 12000^k = 360,000,000^k$; valutati a lire 1,5 il chilog. il costo monterebbe già a 540 milioni, costo che almeno ad opera finita sarebbe duplicato, mentre che il costo della galleria sotterranea ultimata venne giudicato di soli 25 milioni di lire sterline, ossia di 625 milioni di lire, che supposta anche di 35 chilometri di lunghezza, verrebbe a costare 7143 lire al metro corrente, più della metà incirca del traforo del Moncenisio.

§ 19. — Il calcolo della resistenza di un ponte sospeso fatto nello stato statico non basta ad assicurare la stabilità quando il carico che vi passa sopra vi cagioni delle oscillazioni verticali notevoli; allora occorre ricercare quale sia l'altezza massima tollerabile di dette oscillazioni.

FIGUBA 3»



Sia SO la semi catenaria di un ponte sospeso, fig. (3), come nel Claudel, pag. 1275, N° 780, A la sezione della fune o spranga della catenaria stessa; L la sua lunghezza effettiva da O in S; T la tensione alla sommità S, secondo la tangente SN; Q la tensione in O del lato orizzontale; chiamisi con x l'allungamento della catenaria da O alla sommità S; e con $M\frac{pc}{g}$ la massa del peso che regge; ove p è la carica per metro di lunghezza del ponte, ivi compreso il peso della fune stessa ed ogni altra parte del ponte, ritenendo le ordinate come facenti parte della catenaria istessa, siccome tutto il peso fosse direttamente dalla stessa sostenuto; c è la mezza lunghezza del ponte XO; f è l'altezza SX massima saetta della catenaria, h è l'altezza SI della sommità della catenaria sul piano del ponte; P resistenza sull'unità superficiale del ferro della catenaria.

Ciò posto per dedurre la velocità d'impulsione U che la catenaria prefata potrà reggere, naturalmente diversa dalla velocità V che regge il ferro di cui è composta pure longitudinalmente, ma in linea retta, bisogna ricorrere all'equazione differenziale del suo movimento d'allungamento; e pertanto sia v la velocità U corrispondente all'allungamento x si avrà:

$$\frac{1}{2} Mdv^2 = Fdx, \quad F = E\frac{A}{L}x - T, \quad T = \sqrt{Q^2 + p^2 c^2},$$

$$Q = \frac{p^2 c^2}{2f}, \quad gM = pc$$

Si ha, sostituendo, integrando e notando ch'è $v = U$, quando $x = \frac{TL}{EA}$

$$v^2 = U^2 - \frac{T^2 L^2}{MEA} + \frac{2T}{M} x - \frac{EA}{ML} x^2 \quad L = \left(1 + \frac{2}{3}\frac{f^2}{c^2}\right)c$$

Da cui, notando ch'è $v = o$, quando $x = \frac{P}{E} L$, deducesi

$$U^2 = \frac{P^2 gLA}{Epc}\left(1 + \frac{T^2}{P^2 A^2} - 2\frac{T}{PA}\right)$$

$$U = V\sqrt{\frac{LAD}{pc}\left(1 + \frac{T^2}{P^2 A^2} - 2\frac{T}{PA}\right)}.$$

Trovata così la espressione della velocità U d'impulsione che può sostenere la catenaria, si avrà la espressione $\frac{ALD}{g} U$ della quantità di movimento che sarà capace di ricevere alla sommità S nella direzione della tangente SN; per cui moltiplicando questa resistenza viva per la distanza IN di detta tangente dal piede I del sostegno SI altezza sul piano del ponte, si avrà il momento di tale resistenza viva che si avrà ad uguagliare al momento della quantità di movimento, ossia forza movente della massa $\frac{pc}{g}\sqrt{2gK}$, moltiplicandola per la distanza $\frac{1}{2} c$ dal suo centro di gravità al punto d'appoggio I suddetto; essendone $\sqrt{2gK}$ la velocità acquistata nella caduta del suo centro di gravità dall'altezza K nella massima oscillazione del ponte stesso.

Quindi si deduce

$$IN = \frac{h}{\sqrt{1 + 4\frac{f^2}{c^2}}}$$

$$\frac{1}{2} e \frac{pc}{g} \sqrt{2gK} = \frac{h}{\sqrt{1 + 4\frac{f^2}{c^2}}} \frac{ALD}{g} U$$

$$K = \frac{2h^2 V^2}{(c^2 + 4f^2) g} \left(\frac{ALD}{pc} \right)^2 \left(1 + \frac{T^2}{P^2 A^2} - 2\frac{T}{PA} \right)$$

che è l'altezza *K* dell'oscillazione massima tollerabile nella catenaria: 1° in ragione diretta del quadrato dell'altezza dei sostegni, inversa del quadrato dell'ipotenusa del triangolo rettangolo i di cui cateti sono, la mezza lunghezza del ponte e la doppia altezza della saetta della catenaria; 2° è in ragione diretta del quadrato della velocità d'impulsione di cui è capace il ferro della catenaria, ed inversa della metà della gravita; 3° in ragione diretta del rapporto quadrato tra il peso proprio della catenaria ed il peso totale che sopporta; 4° è proporzionale al fattor trinomio, l'unità, più il quadrato del rapporto della tensione massima sostenuta dalla catenaria alla sua resistenza, meno due volte il detto rapporto.

A cagione d'esempio sia il peso per metro corrente del ponte carico $p = 4000^k$, in guisa che la carica di ciascuno dei quattro sostegni del ponte sospeso, posta la lunghezza $2c = 200$ metri, risulta di 200000^k. Inoltre si abbia $h = 11^m$ $f = 10^m$ e per la catenaria di ferro acciaio siano la sezione $A = 0^{mq},08$ la densità $D = 7820^k$, ed ai due limiti di stabilità e di rottura la resistenza del ferro sull'unità superficiale $P = \begin{cases} 40,000,000 \\ 90,000,000 \end{cases}$ e le rispettive velocità d'impulsione $V = \begin{cases} 50^m \\ 150^m \end{cases}$ ne risulta essere

$$Q = 200000^k,\ T = 2039680^k,\ U = \begin{cases} 22^m,43 \\ 12^m,46 \end{cases} K = \begin{cases} 0^m,0194 \\ 0^m,6790 \end{cases}$$

Notisi che nello stato statico la tensione massima delle catenarie per millimetro superficiale della sezione, sarebbe soltanto $\frac{2039680}{80000} = 25^k,5$; mentrechè sotto l'impulsione dovuta alle prefate oscillazioni sarebbe di 40^k e 90^k rispettivamente.

Qualora le parti delle funi o spranghe situate esternamente alla catenaria propriamente detta a ritegno del ponte sospeso, per la particolare disposizione dei sostegni fossero così fatte da lasciar lìbero d'aggiungersi all'allungamento della catenaria, l'allungamento anche di dette parti; allora pel fatto di tale maggiore allungamento verrebbe notevolmente accresciuta la resistenza viva del ponte sospeso.

§ 20. — Restano a trovarsi le forinole per la determinazione nello stato dinamico delle dimensioni dei sostegni a colonne o pilastri che reggono il ponte sospeso, ove assai più importa di non scarseggiare né eccedere nelle dimensioni dei sostegni medesimi, quando, come n'è il caso, sono destinate a reggere delle grandi cariche bensì stabili, ma che inoltre vanno soggette a ricevere delle impulsioni provenienti dai carichi mobili e soggetti a cadere da determinabili altezze, o che possano cagionare delle oscillazioni notevoli a tutta la massa del ponte.

Quantunque non sia immobile la massa del ponte, avendosi a determinare le dimensioni dei sostegni anche nello stato statico, sarà bene procedere alle prove meccaniche alla compressione dei materiali da adoperarsi.

Ordinariamente si misura la loro resistenza quando appariscono i primi segni della prossima rottura, e poi quando la rottura avviene; ma ciò non basta per dedurre con certezza la resistenza al limite di stabilità, non basta per ogni sorta di materiali fare una riduzione sulla resistenza conseguita al limite di rottura. Si è dimostrato che oltrepassato che sia questo limite di stabilità, fino al quale un dato materiale sostiene stabilmente la carica, abbisogna tener conto del tempo della durata in azione della carica eccedente un tal limite, poiché sempre avverrà allora la rottura dopo un tempo più o meno lungo.

Quindi importa assai di conoscere questo limite di stabilità più che non quello di rottura dei materiali diversi impiegati nelle costruzioni, cosa facile ad ottenersi colla prova fatta mediante una macchina dello stesso sistema qui innanzi stata descritta, prova che potrà farsi già bene con una macchina più forte e migliorata come quella or costrutta nel laboratorio di precisione del E. Arsenale in Torino.

Nel caso poi, che la carica dei sostegni sia soggetta a ricevere delle impulsioni, siccome nel prefato caso di un ponte sospeso, occorrerà di calcolare la loro resistenza viva, inoltre della loro resistenza stabile; per cui anche per i materiali di costruzione occorre dalle prove suddette dedurre anche la velocità d'impulsione che possono sostenere.

Supponendo il prefato ponte sospeso su quattro colonne tronco coniche, di cui *a* e *b* siano i raggi delle basi, ed *h* l'altezza, si avrà N° 6, per l'espressione della velocità d'impulsione che possono reggere $V_1 \sqrt{\frac{3ab}{a^2+b^2+ab}}$ essendo V_1 quella longitudinale che regge allo schiacciamento la materia della colonna.

Moltiplicando la massa di una delle quattro colonne per la detta velocità d'impulsione, si avrà la quantità di movimento alla quale ciascuna deve reggere, che dovrà eguagliarsi alla quarta parte di quella ricevuta dalla massa del ponte sospeso supposta caduta dall'altezza K anzidetta.

$$\frac{\pi h D_1}{3g}(a^2+b^2+ab)\, V_1 \sqrt{\frac{3ab}{a^2+b^2+ab}} = \frac{1}{2}\frac{pc}{g}\sqrt{2gK}$$

dalla quale eguaglianza, facendo $a = \tau b$ e $\tau = 1{,}25$, si ha:

$$\pi b^2 = \frac{pc}{hVD_1}\sqrt{\frac{3K}{2g\tau(\tau^2+\tau+1)}} = \frac{pc\sqrt{K}}{5.583\, hVD}$$

$$V_1 = \frac{pc\sqrt{K}}{5.583\,\pi b^2 D_1}$$

Cioè che. la superficie della base superiore della colonna è in ragione diretta del peso del ponte e della radice quadrata dell'altezza *K* della massima oscillazione ed è 5,588 volte in ragione inversa dell'altezza della colonna e della velocità d'impulsione alla compressione che la sua materia può reggere.

Ritenuta la resistenza allo schiacciamento della pietra delle colonne di 600^k per centimetro superficiale, colla riduzione al ventesimo suggerita dai pratici, si deduce pel diametro superiore delle colonne capaci di reggere stabilmente il ponte $2b = 1^m{,}2984$ e le velocità V_1 d'impulsione che avrebbero a sopportare, corrispondenti alle due altezze *K* delle oscillazioni prefate, si trovano rispettivamente di $3^m{,}56$ e $16^m{,}77$, velocità che dovrebbero risultare almeno dalla prova meccanica sopradetta.

30 aprile 1869.

G. CAVALLI.