TAVOLE GRAFICHE A DUE ARGOMENTI

FATTE

SULLE FORMOLE di DARCY e BAZIN, di PR0NY e di EYTELWEIN

RELATIVE

al movimento uniforme dell'acqua in un canale od in un fiume

(Memoria letta ed approvata per la stampa negli Atti nelle adunanze 16 dicembre 1869 e 1° febbraio 1870).

I.

Considerazioni generali sulle tàvole grafiche a doppio argomento.

1. Le tavole numeriche possono dividersi in due classi principali, cioè a semplice entrata e a doppia entrata ; fra le prime cito le tavole dei logaritmi, appartiene alla seconda classe la tavola Pitagorica. Le prime sono formate ordinariamente a due colonne, e danno i valori di una funzione di una sola variabile, corrispondente ai valori che si vogliono attribuire alla variabile, nelle seconde si hanno due variabili, o due argomenti, i cui valori possono prendersi arbitrariamente, e si considera una terza quantità variabile, funzione delle prime due ; nella tavola Pitagorica i due argomenti sono i due fattori, ed il loro prodotto è la terza variabile funzione dei due fattori.

2. Alle tavole numeriche possono sostituirsi, soventi volte con vantaggio, delle tavole grafiche. In una tavola grafica ad un solo argomento vedesi disegnata una curva, le cui ordinate rappresentano i valori della funzione, e le ascisse quelli della variabile che si fa variare arbitrariamente. Esempi di simili disegni s'incontrano frequentemente nelle scienze matematiche e nelle loro applicazioni.

Ne abbiamo anche un esempio in una tavola che pubblica annualmente la Camera di Commercio di Torino, rappresentante le variazioni dei valori della Rendita Italiana.

3. Nelle tavole grafiche a due argomenti le tre variabili si considerano come le coordinate dei varii punti di una superficie, la cui equazione sia quella relazione che lega fra di loro le tre variabili. Si stabiliscono in disegno due assi per le due coordinate che formano i due argomenti della tavola, e si rappresenta la superficie per mezzo delle sue linee di livello quotate; le quote dei varii punti della superficie danno i valori della terza variabile che è funzione delle prime due.

4. Considerando le tavole grafiche ad un solo argomento, il cui uso è ora comune, vedesi come queste presentano due grandi vantaggi sulle tavole numeriche. Uno è che su di esse si possono riconoscere con un sol colpo d'occhio le variazioni dei valori delle variabili ; e quando si abbiano due o più funzioni di una stessa variabile, si possono facilmente riconoscere le relazioni dei valori di queste funzioni per eguali valori della variabile comune, così si possono facilmente conoscere per quali valori della variabile comune corrispondano massimi o minimi valori delle funzioni, oppure dei valori eguali. Un esempio di tale rappresentazione si ha nelle curve che servono per il calcolo dei massimi momenti di rottura di un ponte a travate rettilinee. Il secondo gran vantaggio che voglio indicare è che quando si conosca la natura della curva che si deve disegnare, basta calcolare il valore di poche ordinate per poterla tracciare, e questa tracciata si possono avere graficamente e con molta speditezza i valori delle ordinate comprese fra quelle che sono state calcolate; ed ancorché non si conosca la natura della curva che deve disegnarsi, l'interpolazione ottenuta graficamente, dà soventi volte risultati utili.

Queste tavole grafiche presentano poi l'inconveniente che non danno quell'approssimazione dei valori delle variabili, che possono dare le tavole numeriche ; perché per queste

basta calcolare la variabile con un gran numero di cifre decimali, onde ottenere una grande approssimazione ; che se si dovesse costrurre una curva le cui coordinate potessero leggersi nella scala del disegno con molte cifre decimali, dovrebbe farsi il disegno in scala talmente grande, che ne riescirebbe incomodo l'uso, e cesserebbe di presentare quei vantaggi che gli sono proprii, e sono pure importanti. Ma intanto la tavola grafica servirà per dare un primo valore approssimato della variabile che si cerca, col calcolo poi della formola algebrica potrà aversi dopo quella maggior approssimazione che si desidera.

5. Gli stessi vantaggi che ho detto riconoscersi per le tavole grafiche ad un solo argomento si hanno anche per quelle a due argomenti; questi si riconosceranno meglio, quando l'uso delle tavole grafiche a due argomenti potrà riescire facile e comune a tutti come è ora l'uso di una curva per rappresentare una tavola ad un solo argomento.

6. Furono già pubblicati varii esempi di tavole a doppio argomento. Una bellissima memoria su tale oggetto venne presentata all'Accademia delle Scienze di Parigi dal signor Lalanne e pubblicata nei *Comptes rendus de l'Académie année 1843.* In questa memoria il signor Lalanne indica il miglior modo di costruire simili tavole, dando varii esempi, fra i quali è da notarsi specialmente il suo *Abaque ou Comptoir universel,* e dà poscia un sunto storico dei lavori fino allora eseguiti su tale argomento.

Dopo la pubblicazione di questa memoria si videro molte altre tavole simili; io mi limiterò qui a citare quelle che vennero pubblicate in Torino. Una trovasi negli Atti dell'Accademia delle scienze anno 1867, in una memoria intitolata *Tableaux graphiques donnant à vue l'altitude d'une statimi au moyen de la seule observation du baromètre et du thermomètre,* del conte P. de Saint Robert.

Altre tavole simili vedonsi nel *Giornale d''Artiglieria,* anni 1863, 1864 e 1868, che si pubblica in Torino dal Comitato della stessa Arma; sulle quali tavole trovansi raccolti i risultati di esperienze fatte sul tiro in arcata di alcuni cannoni, e dalle quali col mezzo di interpolazioni grafiche vennero dedotte alcune tavole di tiro numeriche.

Chi ha l'onore di presentare alla Società la presente memoria, pubblicò nel corrente anno altre tre tavole le quali servono a risolvere, con un'approssimazione soventi volte sufficiente, qualunque problema relativo agli interessi composti ed alle annualità.

II.

Tavole rappresentanti le relazioni date dalle forinole di Darcy e Bazin, di Prony e di Eytelwein fra gli elementi che si considerano in un canale o fiume a regime costante-

Le tavole che formano l'oggetto della presente memoria sono formate sullo stesso principio sopra indicato; in esse però si considerano cinque variabili legate fra di loro da due equazioni, per modochè tre di esse possono assumersi arbitrariamente.

Queste cinque variabili sono le seguenti cinque quantità che si considerano ordinariamente in un canale o fiume, nel quale s'intende che l'acqua si muova con moto uniforme:

Ω superficie di una sezione che si considera;
R raggio medio, cioè il quoziente della superficie Ω divisa per il perimetro bagnato;
i pendenza ;
Q portata per minuto secondo;
v velocità media per secondo , cioè il quoziente della portata divisa per la superficie della sezione.

Fra queste cinque quantità si ritiene che esista l'equazione :

$$Q = \Omega v \tag{1}$$

ed una delle tre seguenti, come trovasi indicato in capo a

ciascheduna tavola, cioè la formola di Prony:

$$R i = \alpha v + \beta v^2 \qquad \begin{array}{l}\alpha = 0{,}00004445\\ \beta = 0{,}00030931\end{array} \tag{2}$$

La formola di Prony coi coefficienti indicati da Eytelwein:

$$R i = \alpha v + \beta v^2 \qquad \begin{array}{l}\alpha = 0{,}0000243\\ \beta = 0{,}0003655\end{array} \tag{3}$$

e la formola di Darcy e Bazin:

$$R i = \alpha \left(1 + \frac{\beta}{R}\right) v^2 \tag{4}$$

α e β essendo dei coefficienti che hanno dei valori diversi dipendenti dalla qualità delle pareti del canale che si considera; distinguendosi quattro categorie di canali, cioè:

1ª Categoria. Canali a pareti perfettamente liscie, come pareti in muratura rivestite di cemento ben lisciato, oppure pareti di tavole piallate accuratamente; per i quali si ritiene:

$$\alpha = 0{,}00015 \qquad \beta = 0{,}03$$

2ª Categoria. Canali a pareti unite, come muratura di mattoni, pietra taglio, tavole ecc., per i quali si ritiene:

$$\alpha = 0{,}00019 \qquad \beta = 0{,}07$$

3ª Categoria. Canali a pareti poco unite, come muratura di moellons, di pietre spaccate ecc., per i quali si ritiene:

$$\alpha = 0{,}00024 \qquad \beta = 0{,}25$$

4ª Categoria. Canali a pareti in terra, per i quali si ritiene:

$$\alpha = 0{,}00028 \qquad \beta = 1{,}25$$

8. Le prime quattro tavole sono fatte sulla forinola di Darcy e Bazin nel modo che è indicato al N. 9; le stesse unite alla tavola V servono a risolvere tutti i problemi che possono essere dati sulle cinque quantità sopra indicate riferite ad un canale o ad un fiume di non grande portata.

Nelle tavole VI e VII sono ripetute la IV e la V, con questa differenza però, che i valori della velocità sono portati in scala minore e salgono fino a 5 metri per secondo; così i valori della portata i quali salgono fino a 10,000 metri cubi per secondo. Ho fatto queste due tavole con queste scale perché servano nei calcoli relativi alle grandi piene dei fiumi.

È ben vero che in questi casi non può dirsi ordinariamente che l'acqua si muova con moto uniforme, e quindi non possono applicarsi le forinole sulle quali sono fatte queste tavole ; ma tuttavia anche in questi casi l'impiego facile di queste tavole darà dei risultati approssimativi che potranno anche essere utili.

Per far conoscere l'uso di queste tavole indicherò la soluzione di due quesiti che s'incontrano ordinariamente in pratica.

Sia per es. da calcolarsi la portata di un canale in terra del quale si abbiano i dati seguenti:

Pendenza i = 0,25 per mille;
Sezione Ω = 40 metri quadrati;
Eaggio medio R=*0*,55 metri.

Guardando sulla tavola IV si segua la colonna verticale corrispondente ad i = 0,25 finché s'incontri la linea di livello la cui quota è 0,55, si leggerà sulla orizzontale corrispondente a quel punto la velocità v = 0^{m},388; seguendo poi la stessa orizzontale si guardi sulla tavola V al punto in cui quell'orizzontale incontra la linea di livello quotata 40 mq., si leggerà su quella colonna verticale corrispondente a quel punto d'incontro il valore della portata Q = 15^{mc},8. Sarebbe inutile di cercare maggior precisione col calcolo, perché l'im-

piego di queste forinole non può dare con grande approssimazione il valore della portata.

Per secondo esempio sia da calcolarsi l'altezza alla quale dovrà trovarsi l'acqua di un fiume in un tratto di pendenza i =. *0,0002,* inalveato fra due argini, la portata dovendo essere eguale a 400 metri cubi, essendo la distanza degli argini di metri 200.

Questo problema non può risolversi che per tentativi, ma con queste tavole, la ricerca per tentativi del valore di quest'altezza incognita si fa molto facilmente. Potendo ritenersi in questo caso il raggio medio eguale alla stessa altezza incognita, e detta R questa altezza, sarà $\Omega = 200\ R$; pertanto osservando la tavola VI scendasi lungo la colonna verticale corrispondente al valore i = *0,2* per mille, e nello stesso tempo si osservi anche sulla colonna verticale della tavola VII, che corrisponde alla portata di 400^{mc} , si vedrà facilmente, e dopo pochi tentativi, che alla velocità v = *0,96* corrisponde sulla colonna i = *0,2* un valore di R approssimativamente eguale a 2^{m},*1*, e sulla colonna $Q = 400^{mc}$ un valore di Ω approssimativamente eguale a *420,* cioè eguale a *200 B.* Questo valore di R è l'altezza che si cerca.

9. Le superficie che sono rappresentate nelle prime quattro tavole hanno per equazione la seguente forinola:

$$v^2 = \frac{R}{1000\,\alpha\left(1 + \frac{\beta}{R}\right)}\,J^2\,; \qquad (5)$$

gli assi delle coordinate essendo *0 V* per le velocità, *0 J* per la variabile *J;* e per i valori del raggio medio R un terzo asse che può immaginarsi condotto per *0* perpendicolarmente al piano del disegno.

La variabile J poi ha colla pendenza i la seguente relazione : $J^2 = 1000\ i$; ed ho cambiato la variabile i nella variabile J sia perché la pendenza i essendo sempre data da un numero molto più piccolo, che non sia quello che dà il valore della velocità, non avrebbe potuto essere rappresentata nella stessa scala grafica nella quale è rappresentata la velocità; sia poi affinchè le linee di livello risultino delle linee rette, invece di parabole che si avrebbero colla forinola (4). Le equazioni delle varie linee di livello si ottengono dalla formola (5) ponendovi in luogo di R i numeri 0,05, 0,10, 0,15, 0,20, ecc, indicati dalle varie quote.

Sull'asse *0 J* poi invece di segnare le divisioni ed i numeri che corrispondono alla variabile *J* ho segnato invece le divisioni ed i numeri che corrispondono ai valori della pendenza *i*.

La superficie che è rappresentata nella tavola VI ha per equazione:

$$(2\,v)^2 = \frac{R}{1000\,\alpha\left(1+\frac{\beta}{R}\right)}\,J^2, \quad J^2 = 1000\,i.$$

10. Nelle tavole V e VII poi si considera la formola (1), e facilmente si capisce come si abbiano le varie linee di livello, che corrispondono ai varii valori numerici della sezione Ω indicati dalle varie quote. Queste linee di livello sono ancora rette ; le stesse vedonsi piegate sulla colonna che corrisponde alla portata di 10 metri cubi nella tavola V e di 1000 metri cubi nella tavola VII; ciò è perchè per i valori della portata *Q* maggiori a quei numeri ho preso una scala minore di quella impiegata per i valori di *Q* inferiori.

11. Nei fogli 4° e 5" ho voluto porre in evidenza le differenze dei valori che corrispondono alla velocità *V* per determinati valori di *i* e di R, quando si voglia applicare la formola e coeficienti dati da Prony oppure la formola di Prony coi coeficienti di Eytelwein, oppure la formola di Darcy-Bazin.

Nelle tavole I, II e III del foglio 4° sono rappresentate le tre superficie che hanno per equazione le tre formole suddette, le quali vedonsi scritte in capo a ciascheduna tavola. Si ottengono le equazioni delle linee di livello ponendo in quelle formole $i = \frac{1}{600}$, e per R le varie quote corrispondenti.

Tutte le linee di livello dì ciascheduna superficie sono parabole; quelle che vedonsi disegnate nella tavola I hanno l'asse comune sulla retta *0 0* ; quelle che sono disegnate nella tavola II e quelle che vedonsi nella III hanno per assi comuni le due rette punteggiate *A' A'*.

Usando queste tavole per trovare la portata del canale che è citato all'esempio 1° del N° 8, trovasi nella tavola I fatta stille forinole di Darcy e Bazin, la velocità di 0,388, alla quale corrisponde la portata di metri cubi 15,8 come si è già veduto ; nella tavola III costrutta sulla forinola di Prony, leggesi la velocità di 0^{m},60 alla quale corrisponde la portata di metri cubi 24, che può leggersi sulla tavola V; finalmente sulla tavola II, fatta sulla formola di Eytelwein, leggesi la velocità di metri 0,585, alla quale corrisponde la portata di metri cubi 23,5.

Nel foglio 5° ho disegnato in scala più grande quelle parti delle tre superficie suddette, che sono vicine alle loro linee d'intersezione; ed ho supposto le tre superficie riunite per vederne meglio la loro vicendevole posizione.

Per aver l'equazione delle linee di livello disegnate in queste tavole, bisogna porre nelle formole che leggonsi in capo alle tavole I, II e III del foglio 4° $i = \frac{1}{5000}$, e per R le quote corrispondenti.

12. Le varie linee di livello delle tre superficie s'incontrano tutte nell'origine delle coordinate ed in un punto di una delle tre linee $A\,M\,B$, $C\,M\,D$, $G\,M\,H$, le quali sono le proiezioni delle intersezioni due a due delle tre superficie.

La linea $A\,M\,B$ è retta, parallela all'asse delle pendenze, e distante dallo stesso di una quantità V approssimativamente eguale a 0^{m},3585, e più esattamente $V = \frac{\alpha' - \alpha}{\beta' - \beta}$, α, β essendo i coeficienti di Prony α', β' quelli di Eytelwein.

Le linee $C\,M\,D$ e $G\,M\,H$ che sono le proiezioni delle intersezioni della superficie data dalla formola di Darcy con quelle date dalla formola di Eytelwein e di Prony, sono due parabole che hanno ancora il loro asse parallelo all'asse delle pendenze.

L'equazione seguente

$$\left(v+\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\beta-0{,}00014}{\beta-0{,}00028}\right)^2=\frac{0{,}00035}{\beta\,(\beta-0{,}00028)}\left(i+\frac{0{,}00028\,\alpha^2}{5\,.\,\beta\,(\beta-0{,}00028)}\right)$$

ottenuta eliminando R fra le due formole di Darcy e di Prony, dà l'equazione della parabola CMD, oppure quella della parabola GMH disegnata nella tavola 5ª, quando vi si ponga per α, β i coeficienti dati da Eytelwein, oppure quelli dati da Prony, e si faccia $i=\frac{I}{5000}$.

La linea C*MD* incontra tutte le linee di livello della superficie data dalla formola di Eytelwein, di quota inferiore a metri 4,09 approssimativamente, ma le incontra in un punto solo, l'altro punto d'incontro trovasi al disopra dell'asse delle pendenze, corrispondente cioè a valori negativi di *V*. Così la linea *GMH* incontra tutte le linee di livello della superficie data dalla formola di Prony che hanno la quota inferiore a metri 10,94, e non incontra più quelle di quota superiore.

Ciò può riconoscersi anche analiticamente ; infatti si trova coll'analisi che la curva orizzontale della superficie data dalla formola di Eytelwein di quota approssimativamente eguale a $4^m{,}094$ ha il parametro eguale al parametro della parabola *CMD;* e la curva orizzontale di quota 10,941 della superficie data dalla formola di Prony ha il parametro eguale a quello della linea *GMH*.

13. Pertanto quando siano dati valori per *i* e per R , si vede subito su queste tavole, se a quei dati valori di *i* e di R, corrisponda per la velocità *v* un valore maggiore nella formola di Eytelwein, oppure in quella di Darcy, oppure in quella Prony; credo bene tuttavia di raccogliere qui a questo riguardo le seguenti proposizioni, che nascono dalla osservazione di queste tavole, e dalle considerazioni fatte al numero 12.

1° I valori di *v* e di *B* che corrispondono alle coordinate del punto *M*, soddisfano a tutte tre le formole di Prony,

di Eytelwein e di Darcy, questi valori sono approssimativamente i seguenti:

$$i = 0{,}00002439 \quad R = 2^m{,}2835 \quad V = 0^m{,}3585.$$

Il punto *M* è il solo punto per il quale le coordinate soddisfino a tutte tre le formole.

2° Per tutti i punti che si proiettano sulla linea *AMB* i valori di *v*, *i* ed R soddisfano alle due formole di Prony e di Eytelwein ; per tutti questi punti la velocità *v* è costante, ed approssimativamente eguale a 0,3585, ed i valori di *i* e di R debbono soddisfare all'equazione R *i* = $0^m{,}00005569$ (1).

Così per tutti i punti che si proiettano sulla linea *CMD*, i valori di *v*, *ì* ed R soddisfano alla formola di Darcy ed a quella di Eytelwein, e finalmente tutti i punti che si proiettano sulla linea *GMH*, hanno le coordinate *v*,*i* ed R che soddisfano alle due formole di Darcy e di Prony, e non vi sono altri punti comuni a due delle tre superficie, i quali corrispondano a valori di *v*, *i* ed R finiti e diversi da zero.

3° Per i punti che trovansi vicini alla linea d'intersezione di due superficie, i valori di *v*, *i* ed R che soddisfano alle due formole corrispondenti a quelle due superficie, sono fra di loro poco differenti, perchè i piani tangenti alle due superficie in un punto qualunque della loro intersezione, fanno fra di loro un angolo molto piccolo ; (2) ed allontanandosi un punto dalla linea d'intersecazione, cresce la differenza fra i due valori di *v* che si ottengono colle due formole corrispondenti a due determinati valori di *i* e di R*;*

Ne viene che:

(a) I valori di *v* ottenuti colla formola di Prony per due dati valori di *i* e di R, sono maggiori di quelli ottenuti colla formola di Eytelwein tutte le volte che la velocità *v* trovasi maggiore di *V*, inferiori invece quando trovisi $v < V$.

(1) L'iperbole data da quest'equazione è rappresentata dal profilo R*MS* della tavola V.

(2) Se si determinano le scale di pendenza dei due piani tangenti suddetti, in disegno si vedono quasi a coincidere.

(*b*) Semprechè sia $R < 2^{m},5$ $i > 0,00003$	La formola di Darcy dà per v un valore minore di quelli che si hanno colla formola di Eytelwein o di Prony.
(*c*) Semprechè sia $R \begin{cases} > 3^{m} \\ < 4,^{m}5 \end{cases}$ $i > 0,00007$	I valori di v ottenuti colle due formole di Eytelwein e di Darcy differiscono poco uno dall'altro, e sono minori di quelli ottenuti colla formola di Prony.
(*d*) Semprechè sia $R \begin{cases} > 4,10 \\ < 5. \end{cases}$ $i > 0,00007$ oppure $R \begin{cases} > 4,10 \\ < 8. \end{cases}$ $i > 0,00022$	I valori di v ottenuti colla formola di Eytelwein sono minori di quelli ottenuti colla formola di Darcy, i quali a loro volta sono ancora minori di quelli che si ottengono colla formola di Prony.
(*e*) Finalmente quando fosse $R > 10,5$ $i > 0,000001$	I valori di v ottenuti colla formola di Eytelwein sono minori di quelli ottenuti colla formola di Prony, i quali a loro volta sono ancora minori di quelli ottenuti colla formola di Darcy.

Torino, il 16 dicembre 1869.

DOMENICO REGIS.

INDICE DELLE TAVOLE

Disegno prospettico della macchina Cavalli per dedurre i coefficienti meccanici dei prismi di diversi materiali preparata per la prova alla flessione, con annessa descrizione.

REGIS — Tavole grafiche fatte sulle forinole di Darcy, Bazin, Prony, Eytelwein relative al movimento delle acque in un canale o fiume (in atlante separato).