

SULLE CASSE PENSIONI

BASATE

SUL SISTEMA DI RIPARTIZIONE DEGLI INTERESSI

CONFERENZA

del Socio corrispondente Prof. Ing. GIUSEPPE MAZZOLA.

letta nell'adunanza del 3 giugno 1898

I.

1. — Fra i vari sistemi invalsi presso le così dette Casse-pensioni, per la determinazione dei dividendi, ve n'ha uno che merita di essere seriamente studiato, perchè può dar luogo nei primi anni di distribuzione a risultati splendidi, direi quasi favolosi, capaci di illudere non solamente il volgo, ma ancora quei dotti che si arrestano ad un esame superficiale dell'argomento. Secondo l'accennato sistema:

1° L'associazione è concessa, in qualunque tempo, a tutti gli individui di una determinata categoria — francesi, italiani, operai, ecc. — che ne facciano richiesta;

2° Ogni socio deve pagare per 20 anni consecutivi, in ciascun mese una quota di 1 lira, che dirò quota *attiva*, più certe tasse che dovranno servire alle spese d'Amministrazione;

3° Colle quote attive si costituisce un fondo, che chiamerò pure *fondo attivo*, destinato a somministrare le pensioni;

4° Il fondo sociale attivo si pone a interesse;

5° Vengono *eliminati* dalla Società i soci che muoiono e quelli che, pur rimanendo vivi, omettono durante un anno intero di effettuare i dovuti pagamenti: i soci della seconda categoria si dicono *decaduti*;

6° Le somme versate da tutti i soci eliminati, siano morti, o semplicemente decaduti, sono devolute alla Società;

7° Trascorsi 20 anni dalla data della sua iscrizione, ciascun socio *effettivo*, cioè superstite e non decaduto, acquista il diritto a un dividendo annuo, detto impropriamente *pensione*, pagabile a rate bimestrali posticipate, fino al giorno della sua morte;

8° La misura della pensione individuale, per ciascun anno, viene determinata prendendo l'interesse prodotto nel corso dell'anno precedente dal fondo sociale attivo, dividendolo per il numero degli aventi diritto, e sottraendo dal quoziente L. 12,60, delle quali 12 vanno ad accrescere il fondo sociale attivo, e i 60 centesimi quello che deve servire alle spese d'Amministrazione.

2. — Per semplificare la ricerca dei veri risultati a cui può condurre il detto sistema, supporrò che:

Le iscrizioni dei soci abbiano luogo solamente nel primo giorno di ciascun anno;

Ciascun socio invece di 12 quote di 1 lira nei 12 mesi di ogni anno, paghi nel primo giorno dell'anno una sola quota di 12 lire;

E anche la pensione annua venga distribuita per intero, nel primo giorno di ciascun anno.

Così il diritto alla pensione verrà acquistato da ciascun socio non eliminato, fin dal primo giorno dell'anno *ventesimo* dalla data della sua iscrizione; ma la pensione diverrà *posticipata*, perchè la prima distribuzione per lui avrà luogo solamente al primo giorno dell'anno *ventunesimo*.

Il fondo attivo determinato secondo questa ipotesi, risulterà alquanto maggiore del vero; ma per altra parte crescerà pure un poco l'onere delle pensioni; così che i risultati che si avranno per l'andamento economico dell'associazione si potranno ritenere come abbastanza approssimati al vero.

3. — Nel corso dei primi 19 anni sociali, non avendo luogo nessuna distribuzione di pensioni,

a costituire il *fondo attivo* concorreranno, insieme alle *quote attive*, i loro interessi composti.

Cominciando poi dal principio dell'anno 20°, l'interesse annuo del fondo attivo verrà destinato alla distribuzione delle pensioni, e pertanto questo fondo crescerà di anno in anno solamente per l'aggiunta delle quote attive versate dai soci non ancora pensionati, più tante volte 12 lire, quanti saranno in ciascun anno i soci pensionati, ossia, in definitiva, di tante quote attive di 12 lire, quanti saranno i soci effettivi, siano essi pensionati o no.

4. — La misura straordinariamente elevata a cui può salire la pensione individuale nel primo anno di distribuzione, salta agli occhi. Perché i pensionati allora saranno solamente quelli rimasti vivi e non decaduti fra gli iscritti all'origine della Società; mentre il fondo attivo, del quale essi godranno l'interesse annuo, si troverà costituito da tutte le quote attive versate non solo da quei soci primitivi, ma ancora da tutti gli altri sopravvenuti nel ventennio.

Così per la Società dei *Prévoyants de l'avenir*, sorta in Francia nel 1881, è oramai accertato che nel 1901 si avranno da ripartire non meno di 900000 lire, mentre i partecipanti saranno poco più di 250; così che il dividendo individuale sorpasserà 3500 lire. E un premio tanto cospicuo sarà conseguito mediante un contributo attivo di sole lire 240, versate in 20 anni, con una piccola aggiunta di una quindicina di lire per spese di Amministrazione.

I dividendi annui successivi potranno andare diminuendo, perché il numero dei partecipanti cresca più rapidamente che il fondo sociale attivo. Ma risulta da considerazioni semplicissime, che la pensione assegnabile al principio di un dato anno qualunque potrà sempre raggiungere qualunque misura si voglia, purchè entri al principio dell'anno precedente un numero sufficiente di nuovi soci.

Così si possono costruire, anzi furono costruite certe tavole, nelle quali supponendo certi *sviluppi* della popolazione associata, si riesce a mantenere il dividendo, per un certo numero di anni, tre e quattro volte superiore a quello che possa concedere qualunque Società d'assicurazione regolata secondo i sistemi ordinari.

Di qui è nata in alcuni la illusione, che lo stesso fatto possa durare indefinitamente. Ed è specialmente per contribuire a dissipare questa illusione, che io mi sono indotto a fare la presente esposizione.

II.

5. — Partendo da un gruppo iniziale di 10000 neonati, ho calcolato quanti ne rimarranno *effettivi*, cioè viventi e non decaduti, alle età notate nella colonna 1^a della tavola delle pensioni normali [pag. 24], di 1 anno, 2, 3, ecc.

In questo compito ho dovuto tener conto delle due cause distinte di *eliminazione sociale*, che sono la *mortalità* e la *decadenza*, per mancato pagamento, di soci viventi. Per ciò che riguarda la seconda, la decadenza sociale, in mancanza di dati statistici attendibili, ho supposto, coi fautori delle Casse in questione, che la sua influenza abbia luogo nella misura annua di 2 %; o per parlare più esattamente, che essa faccia crescere di 2 unità la percentuale della mortalità semplice. Così la percentuale, che nella colonna 3^a della tavola corrisponde all'età di 5 anni, cioè 3,877, risulta dalla percentuale, 1,877, della sola mortalità, accresciuta delle 2 unità sopraddette.

E per la *mortalità*, supponendo che i soci debbano essere italiani, mi sono attenuto alle tavole più recenti pubblicate in elegante volume, per cura della Cassa dei Depositi e Prestiti, col titolo: *Tavole analitiche per la formazione del bilancio tecnico del Monte-Pensioni per gli insegnanti elementari* — Roma, tipografia elzeviriana, 1892.

6. — Da queste premesse deriva il modo di calcolare i numeri registrati nella colonna 4^a della tavola, e, dopo il numero iniziale 10000, nella 2^a. Infatti sui 10000 neonati, colla percentuale 22,334 della eliminazione annua, si ha l'eliminazione assoluta di soci

$$10000 \times 22,334 = 2233$$

a meno di 1, che si legge nella colonna 4^a, e quindi il numero dei rimanenti all'età di 1 anno

$$10000 - 2233 = 7767,$$

indicato nella colonna 2^a. E ragionando analogamente si ottengono gli altri numeri notati nelle dette colonne 4^a e 2^a.

7. — Al principio dell'anno 20°, dalla data dell'iscrizione a soci, quando comincia il diritto alla pensione, i rimanenti dei 10000 neonati compiono 19 anni e il loro numero si trova ridotto, per le successive eliminazioni annue, a 3824. Così il complesso delle prime due colonne della tavola, limitato alla linea dell'età di 19 anni, rappresenta quello che si può chiamare *movimento annuo sociale* di un gruppo di 10000 neonati simultaneamente iscritti, fino al conseguimento del diritto alla pensione.

8. — Posto che la loro iscrizione abbia luogo all'origine della Cassa-pensioni, ho determinato il *fondo attivo* costituito da tutte, e sole, le loro quote, per via delle considerazioni seguenti.

Tavola di pensioni normali.

ETÀ	Iscritti	Eliminazione annua		Soci dopo 19 anni	Capitale al principio dell'anno 20°		Coefficiente di pensione annua	Pensione normale
		%	assoluta		totale	individuale		
0	10000	22,334	2233	3824	2 009 440	525	1 : 18,26	28,10
1	7767	12,710	987	3719	1 871 560	503	1 : 18,13	27,10
2	6780	7,325	497	3615	1 785 530	494	1 : 18,00	26,80
3	6283	5,280	333	3512	1 720 820	490	1 : 17,88	26,80
4	5950	4,426	263	3409	1 665 370	489	1 : 17,76	27,00
5	5687	3,877	220	3311	1 615 270	488	1 : 17,64	27,10
6	5467	3,430	188	3215	1 568 930	488	1 : 17,51	27,30
7	5279	3,074	162	3122	1 525 400	490	1 : 17,38	27,50
8	5117	2,802	144	3031	1 483 990	491	1 : 17,25	27,80
9	4973	2,614	130	2993	1 444 120	491	1 : 17,10	28,10
10	4843	2,514	122	2857	1 405 420	492	1 : 16,95	28,40
11	4721	2,494	118	2774	1 367 590	493	1 : 16,79	28,80
12	4603	2,563	118	2693	1 330 490	494	1 : 16,62	29,10
13	4485	2,589	116	2614	1 294 040	495	1 : 16,44	29,50
14	4369	2,592	113	2538	1 258 340	496	1 : 16,26	29,90
15	4256	2,609	111	2463	1 223 350	497	1 : 16,07	30,30
16	4145	2,623	109	2390	1 189 060	497	1 : 15,88	30,70
17	4036	2,638	106	2318	1 155 440	498	1 : 15,69	31,10
18	3930	2,688	105	2247	1 121 520	499	1 : 15,49	31,60
19	3824	2,741	105	2178	1 091 220	501	1 : 15,28	32,20
20	3719	2,788	104	2111	1 058 620	501	1 : 15,07	32,60
21	3615	2,841	103	2045	1 027 720	502	1 : 14,85	33,20
22	3512	2,919	103	1981	997 530	504	1 : 14,61	33,90
23	3409	2,867	98	1919	968 140	505	1 : 14,37	34,50
24	3311	2,901	96	1859	939 540	505	1 : 14,11	35,20
25	3215	2,906	93	1800	911 660	507	1 : 13,86	36,00
26	3122	2,912	91	1741	884 480	508	4 : 13,60	36,80
27	3031	2,915	88	1683	857 960	510	1 : 13,34	37,60
28	2943	2,917	86	1625	832 080	512	1 : 13,06	38,60
29	2857	2,915	83	1568	806 820	515	1 : 12,80	39,60
30	2774	2,916	81	1513	782 100	517	1 : 12,51	40,70
31	2593	2,916	79	1459	757 960	520	1 : 12,22	41,90
32	2614	2,914	76	1406	734 340	522	1 : 11,92	43,20
33	2538	2,950	75	1355	711 250	525	1 : 11,61	41,60
34	2463	2,979	73	1305	688 630	528	1 : 11,28	46,20
35	2390	3,019	72	1254	666 470	531	1 : 10,95	47,90
36	2318	3,051	71	1203	611 720	536	1 : 10,63	49,80
37	2247	3,082	69	1152	623 390	541	1 : 10,31	51,90
38	2178	3,093	67	1101	602 150	547	1 : 9,99	54,20
39	2111	3,104	66	1050	581 870	551	1 : 9,67	56,70
40	2045	3,109	64	1000	561 640	562	1 : 9,34	59,60

Supponendo da prima che ciascuna quota attiva individuale sia di una sola lira [2], si avrebbe che per ciascuno dei 20 versamenti effettuati da quel gruppo di soci entrerebbero nella *Cassa attiva* tante lire, quanti sono, alla data rispettiva, i soci effettivi, vale a dire, giusta le indicazioni della colonna 2^a,

per il 1° versamento	L.	10000
» 2° »	»	7767
» 3° »	»	6780
.....		
» 20° »	»	3824

Insieme all'accumulazione di queste somme ha luogo quella dei loro interessi. Questi, ho supposto che vengano regolati in ragione di L. 4 per 100, pagabili intieramente ad anni scaduti; il che equivale, nel sistema dei pagamenti semestrali, ad ammettere il saggio di 3,96 %. Così ho avuto:

Al principio dell'anno 1°, fondo attivo	. L.	10000
Interesse durante l'anno, 10000 X 0,04 == »		400
Al principio dell'anno 2°, versamento	. »	<u>7767</u>
Al principio dell'anno 2°, fondo attivo	. L.	18167
Interesse durante l'anno, 18167 X 0,04 == »		727
Al principio dell'anno 3°, versamento	. »	<u>6780</u>
Al principio dell'anno 3°, fondo attivo	. L.	25674

Proseguendo così fino al principio dell'anno 20° si arriva al fondo attivo di L. 167453, che moltiplicate per 12, poiché tante sono le lire costituenti ciascuna quota, danno il *fondo attivo totale* di L. 2009442, notato nella colonna 6^a della tavola, colla sostituzione di un zero all'ultima cifra 2, perchè incerta. Ma i soci effettivi rimanenti, fra i 10000 neonati primitivamente iscritti, sono 3824, come si legge nella colonna 5^a. Per ciascuno adunque il *fondo attivo* sarà quello che si ottiene dividendo il fondo totale per 3824, ossia L. 525, trascurando la frazione di lira.

9. — Considerando ancora un gruppo di neonati iscritti all'origine della Cassa-pensioni, ma in numero differente da 10000, per es. 4100, per determinare *direttamente* il fondo attivo occorrerebbe un calcolo analogo al precedente, per il quale, mantenuta la stessa legge di *eliminazione sociale*, si cominciasse a calcolare la serie dei numeri che rappresentino il *movimento sociale* del gruppo durante il ventennio.

Ma questi numeri risulterebbero evidentemente proporzionali a quelli che si trovano nella 2^a colonna della tavola, vale a dire che conserverebbero con essi un rapporto costantemente uguale al rapporto dei due numeri iniziali, 4100 e 10,000, salvo le piccole divergenze dovute alle frazioni successivamente trascurate; e secondo quello stesso

rapporto si troverebbero variati i fondi attivi dopo 1,2, 3... anni, fino all'ultimo, costituito al principio dell'anno 20°. Pertanto, detto F questo fondo, si avrebbe

$$F : 2009440 = 4100 : 10000;$$

e sussistendo anche, per le cose già dette, fra il numero S, dei soci rimasti dei 4100 e il numero 3824 di quelli rimasti fra i 10000, la proporzione

$$S : 3824 = 4100 : 10000,$$

si avrebbe per la coesistenza delle due proporzioni

$$\frac{F}{S} = \frac{2009440}{3824},$$

dove il 2° membro è il fondo individuale, determinato sulla considerazione del gruppo iniziale di 10000 neonati in L. 525, e il 1° membro è quello relativo all'altro gruppo di 4100 neonati. E così questo fondo risulterà ancora di L. 525, a meno della differenza proveniente dalle frazioni trascurate, la quale non potrà eccedere 1 lira.

10. — In conclusione il fondo individuale, che ad un socio, il quale sia stato iscritto all'età di anni 0 e all'origine della Cassa-pensioni, spetterà nel primo giorno dell'anno sociale 20°, nelle ipotesi che ho ammesso intorno all'eliminazione e al saggio d'interesse, si può ritenere come uguale a quello registrato nella tavola, indipendentemente dal numero dei neonati componenti il gruppo al quale appartenga il socio considerato.

11. — Quello che ho detto intorno a un gruppo di neonati, si estende, naturalmente, a soci iscritti ad altre età. Pei bambini di 1 anno ho supposto che il numero iniziale sia quello che si legge nella tavola daccanto a questa età, cioè 7767. In grazia di questa scelta quello, che ho chiamato *movimento sociale* del gruppo, si trova rappresentato dalla serie dei venti numeri consecutivi somministrati dalla stessa tavola, cominciando da 7767; e ragionando come ho detto per i neonati, si trova il fondo attivo individuale di L. 503.

E analogamente prendendo come numeri iniziali di gruppi iscritti alle età di 2 anni, 3 anni... fino a 40 anni quelli registrati nella seconda colonna della tavola, ho calcolato gli altri fondi individuali.

12. — I fondi attivi, dei quali mi pare di aver procurato a chi legge un concetto abbastanza chiaro, saranno effettivamente posseduti, o per dir meglio *custoditi* dalla Cassa-pensioni, regolata secondo le norme dianzi esposte [1], nel primo giorno dell'anno 20° dalla sua origine.

III.

13. — Ora voglio considerare una *Cassa-pensioni*, la quale, mantenendo le prime sette, fra quelle norme, sostituisca all' 8^a i canoni seguenti:

a) Distinguere i soci entrati in ciascun anno per gruppi composti d'individui aventi tutti la medesima età;

b) Tenere per i singoli gruppi altrettanti conti distinti, assegnando a ciascuno, come componenti del suo fondo attivo complessivo, insieme alle quote attive, anche i loro interessi composti;

c) Conferire a ciascuno dei soci di ciascun gruppo, i quali si mantengano effettivi fino al principio dell'anno 20° dalla iscrizione, una rendita vitalizia annua posticipata, la quale corrisponda al fondo attivo complessivo di quel gruppo per modo che questo fondo, tenuto conto degl'interessi de' suoi residui successivi, venga ad esaurirsi in quello stesso anno, dopo il quale abbia a cessare ogni distribuzione per la morte sopravvenuta di tutti i partecipanti;

d) Ritenere su ciascuna annualità vitalizia L. 0,60 per spese d'Amministrazione.

14. — Alle pensioni così determinate compete per ragioni ovvie, sulle quali avrò occasione di insistere più innanzi, la qualificazione di *normali*, la quale estenderò pure alle Casse-pensioni che si propongano di distribuirlo ed ai fondi attivi per esse costituiti.

Per antitesi dirò *anormali* le Casse-pensioni regolate secondo il sistema della ripartizione degli interessi.

15. — I fondi attivi normali spettanti ai singoli sodi effettivi in quei giorni, nei quali acquisteranno il diritto alla pensione, secondo le ipotesi fatte intorno all'eliminazione sociale e al saggio d'interesse, saranno quelli notati nella tavola, non solo per coloro i quali vengano iscritti all'origine della Cassa pensioni, ma bensì per tutti indistintamente.

16 — La pensione annua dovuta a ciascun socio dipende dal suo fondo attivo individuale, dalla sua età, dalla eliminazione sociale successiva e dal saggio d'interesse.

Supponendo che nessuno dei soci sopravviventi ometta di presentarsi a riscuotere la sua pensione, questa si determina con un calcolo abbastanza semplice, benché alquanto lungo, mediante una *tavola di sopravvivenza*. Ma quel calcolo venne già da altri effettuato e i risultati si trovano pubblicati in quelle stesse *tavole analitiche*, che ho già citate [5].

Considerando, per es., un socio il quale, essendo stato iscritto nel giorno stesso della sua nascita,

divenga *pensionato* all'età di anni 19, e ritenendo come saggio d'interesse il 4 %, si trova nelle dette tavole che, per avere una pensione annua posticipata di 1 lira, egli dovrebbe versare un capitale di L. 18,26 (media dei valori corrispondenti all'età di anni 19 nelle colonne 4 e 9 della pag. 19 di quelle tavole).

Il fondo attivo di quel socio essendo, secondo la mia tavola, di L. 525, per trovare la pensione corrispondente basterà dividere 525 per 18,26; il quoziente, a meno di un mezzo centesimo, sarebbe $525 : 18,26 = 28,75$; ma, a cagione dell'incertezza del dividendo 525, converrà limitarlo ai decimi di lira e prendere L. 28,7, oppure, secondo l'uso, 28,70. Deducendo poi L. 0,60 per spese d'Amministrazione [13 d] si ottiene la pensione netta di L. 28,10, che ho registrato nell'ultima colonna della tavola. E in questa tavola volendo inserire anche il divisore 18,26, poiché dividere per 18,26 vale quanto moltiplicare per $1 : 18,26$, ho registrato questo *quoziente indicato* nella colonna penultima sotto il titolo *coefficiente di pensione*.

17. — Col medesimo procedimento ho calcolato le altre pensioni *nette* spettanti a soci iscritti alle età di anni 1, 2, 3... fino a 40.

E con questo credo di avere spiegato abbastanza il contenuto della *tavola di pensioni normali*.

IV.

18. — Per arrivare a conclusioni fondate intorno ai dividendi conseguibili presso una Cassa-pensioni anormale, converrà che mi trattenga ancora sulla gestione delle Casse normali.

Per abbreviare il discorso d'or innanzi, dicendo: *gruppo di soci*, terrò come sottinteso che i componenti siano tutti coetanei e iscritti in uno stesso giorno.

Risulta, da quanto sono venuto esponendo, che una Cassa-pensioni normale tiene in qualunque momento della sua esistenza un fondo attivo complessivo composto di tanti fondi attivi individuali, quanti sono i soci effettivi, siano, o non, pensionati.

Così nel primo giorno di un dato anno, posteriore al 20°, dalla fondazione della Cassa, per ogni socio il quale acquisti in quel giorno il diritto alla pensione esiste un fondo attivo individuale, che è quello contemplato nella tavola delle pensioni normali.

19. — Quanto agli altri soci consideriamone, per esempio, uno che sia stato iscritto all'età di 2 anni e supponiamo che in quello stesso giorno ne compia 35 ed abbia già percepito la sua pensione normale. Questa pensione è di L. 26,80 nette, ossia,

comprese le L. 0,60 ritenute per spese di Amministrazione, di L. 27,40. Essa è ancora a lui dovuta dall'età attuale di 35 anni, ed a rate *posticipate*, fino alla sua morte. Dunque la Cassa normale per il servizio delle pensioni che dovrà distribuire a tutti i soci effettivi del gruppo, al quale appartiene il socio considerato, tiene altrettanti fondi attivi individuali, uguali, ciascuno, al capitale occorrente per chi voglia procacciarsi, all'età di anni 35, una pensione vitalizia di L. 27,40.

Il coefficiente di pensione corrispondente all'età di anni 35 si può trovare nella tavola, in corrispondenza all'età d'iscrizione di anni 35-19, cioè di anni 16, dove si legge 1 : 15,88.

Vuol dire che con L. 15,88 di capitale si consegue una pensione annua di 1 lira; e pertanto il fondo attivo in questione si otterrà moltiplicando le L. 27,40 costituenti la pensione di cui si tratta, per 15,88, e sarà, trascurando la frazione di lira, di L. 435.

20. — Quando si tratti invece d'un socio non ancora pensionato, supponiamo, per esempio, che abbia 18 anni, e sia stato iscritto all'età d'anni 11. Prendendo come numero iniziale dei soci componenti il suo gruppo quello che si legge nella tavola daccanto a questa età, cioè 4721, si avrà da quello stesso calcolo che serve a determinare, nel modo che ho detto, il fondo attivo del gruppo dopo 20 anni, supponendo da prima che la quota individuale annua sia di una sola lira: fondo attivo totale al principio dell'anno 18° L. 40003; e questo moltiplicato per 12 darà il fondo attivo reale di L. 480036. Intanto il numero dei soci effettivi di quel gruppo sarà ridotto, per causa delle eliminazioni successive, a quello che dà la tavola per l'età di anni 18, cioè 3930. Dunque basterà dividere per 3930 il fondo complessivo di L. 480036, e si avrà così il fondo attivo individuale spettante al socio considerato, in L. 122.

21. — I fondi individuali fin qui contemplati sono quelli che esistono presso la Cassa normale nel primo giorno di ciascun anno. Per un altro dato giorno, intermedio, ciascuno di essi crescerà di una quantità facile a determinarsi, tenendo conto dell'interesse prodotto e dell'eliminazione avvenuta fra il giorno dato e il primo giorno dell'anno. Ma non occorre che io mi fermi ad esporre l'andamento di questo calcolo, perché nei ragionamenti che dovrò fare più innanzi basterà che sia provata la loro esistenza.

22. — Però una determinazione che ha qualche importanza è quella del *massimo* raggiungibile dal fondo individuale di ogni dato socio; esso corrisponde, evidentemente, al giorno in cui egli dovrà riscuotere la sua prima annualità *vitalizia*.

Per esempio, per un socio il quale sia stato iscritto a 8 anni, si avrebbe il massimo fondo attivo individuale normale prendendo quello dato dalla tavola in L. 490, aggiungendo il suo interesse annuo, e poi tenendo conto ancora della eliminazione annua, e risulterebbe di L. 602. E per uno iscritto appena nato si troverebbe il massimo di L. 550.

23. — *Una Cassa-pensioni normale pagherà sempre regolarmente le pensioni normali, conservando i fondi attivi individuali normali spettanti ai singoli soci. E qualora avvenga il suo scioglimento, darà a tutti i fondi residui dovuti.*

È questa una conclusione importante, che invito i miei lettori a imprimersi ben bene nella mente.

24. — Farò ancora notare come la Cassa normale applichi il sistema della *mutualità* con perfetta *equità* e *giustizia*, *limitandola ai soli soci di ciascun gruppo*, ai quali, poichè si trovano continuamente in condizioni uguali di età, e di contributi da pagare, è affatto equo proporre i *patti normali*, secondo i quali :

1° Colui che venga a morire o a decadere, rinunci al suo fondo attivo individuale in favore dei soci rimanenti del proprio gruppo;

2° I soci effettivi di ogni gruppo abbiano in ogni tempo diritti uguali sul fondo attivo complessivo del gruppo e sopra i suoi frutti;

3° Questo fondo complessivo venga totalmente esaurito a beneficio de' suoi partecipanti.

Supponiamo, per esempio, che in uno stesso giorno scada la prima annualità vitalizia a 100 soci aventi 60 anni e a 1000 che ne abbiano 23. La mutualità, applicata con giustizia, esige che si tengano per i due gruppi due conti distinti, così che, verificandosi le ipotesi che io ho assunto riguardo all'eliminazione sociale e al saggio d'interesse, si conceda ai soci del primo gruppo la pensione normale di L. 59,60 e a quelli del secondo gruppo la pensione di L. 26,80 inferiore alla metà della prima. A questo modo i singoli soci godranno benefici commisurati equamente ai contributi attivi da loro pagati.

V.

25. — Passando alle Casse-pensioni anormali, vediamo prima di tutto come intendano la mutualità. Esse cominciano a confondere insieme tutti i soci, vecchi e giovani, iscritti in un medesimo anno, per la bella ragione che *sono tutti uguali davanti alla Società*.

Così i soci contemplati nell'esempio precedente verranno tutti a godere dividendi uguali, a tutto danno dei più vecchi. E se la Cassa anormale non

commettesse altri peccati d'ingiustizia, il dividendo complessivo di

$$L. 26,80 \times 1000 + 59,60 \times 100 = 32760$$

ripartito fra i

$$1000 + 100 = 1100 \text{ soci}$$

apporterebbe a ciascuno

$$L. 32760 : 1100 = 29,78 ,$$

col vantaggio insignificante di

$$L. 29,78 - 26,80 = 2,98$$

conseguito da ciascun socio più giovane, contro il danno di

$$L. 59,60 - 29,78 = 30,82$$

inflitto agli altri, i quali riceverebbero meno della metà di quanto è a loro dovuto.

26. — Ma, dicono i fondatori delle Casse anormali, questo danno sarà risarcito ad usura dal vantaggio, concesso a tutti i soci, di ricevere in ciascuna distribuzione i frutti di tutto il fondo attivo sociale costituito dalle quote attive che saranno state pagate non solamente da loro stessi, ma ancora da tutti gli iscritti prima di loro, e dopo fino all'anno che preceda quello in cui abbia luogo la detta distribuzione.

Ho già accennato come questo sistema di ripartizione possa veramente procurare, ai soci iscritti nei primi anni, dividendi favolosi. Ma fra i casi possibili ve n'ha pure uno, il cui avvento sarebbe proprio opportuno per far ricredere i fautori del sistema.

Basterebbe che il pubblico, istruito a tempo intorno ai risultati disastrosi che non potranno a meno di verificarsi tardi o tosto, lasciasse i fondatori della Cassa anormale a godersi da soli i frutti del loro sistema ideale. Allora, posto che quei fondatori siano appunto i soci considerati nell'esempio precedente, il primo dividendo, che percepirebbero dopo 20 anni, sarebbe quale risulta dal calcolo seguente.

Al principio dell'anno 20° per ogni socio giovane si troverà un fondo attivo di L. 488 e per ogni socio vecchio, di L. 562. Alla stessa data i soci del primo gruppo avrebbero 22 anni, e il loro numero sarebbe superiore a quello dei rimanenti alla fine dell'anno, che per ipotesi è 1000, di tante unità quanti saranno gli eliminati durante l'anno. L'eliminazione avrebbe luogo solamente per mortalità, epperò nella misura di 0,919 % ; per conseguenza quel numero si potrà determinare mediante la proporzione :

$$x' : 1000 = 1 : (1 - 0,00919)$$

la quale dà :

$$x' = 1009.$$

Analogamente si avrebbe, al principio del ventesimo anno, il numero dei soci più vecchi :

$$x'' = 103.$$

Pertanto il fondo attivo totale sarebbe di:

$$L. 488 \times 1009 + 562 \times 103 = 550278;$$

la sua rendita, durante l'anno 20°:

$$550278 \times 0,04 = 22011,12$$

e il dividendo individuale lordo, per ciascuno dei 1100 soci esistenti al principio dell'anno 20°:

$$22011,12 : 1100 = 20,01 ;$$

così che, dedotte L. 12,60, il dividendo netto si ridurrebbe a L. 7,41.

Il vantaggio che godrebbero i fondatori sarebbe: per i giovani di

$$L. 7,41 - 26,80 = -19,39,$$

e per i vecchi di

$$L. 7,41 - 59,60 = -52,19.$$

27. — Ma i fautori delle Casse anormali respingono, come assurda, l'ipotesi che per un intero ventennio nessun socio debba aggiungersi a quelli primitivamente iscritti. E appoggiandosi a larghi sviluppi della popolazione associata, conseguiti da istituzioni esistenti, i quali assicurano, nelle prime distribuzioni, dividendi individuali di centinaia e migliaia di lire, predicono che una notevole eccedenza delle pensioni anormali debba mantenersi indefinitamente.

Che sia questa una pura illusione è cosa evidente, dirò anzi *intuitiva*, per chiunque posseda le prime nozioni intorno all'impiego fruttifero del denaro. Perché la somma dei benefici che una Cassa-pensioni qualunque possa distribuire in tutta la durata della sua esistenza dipende esclusivamente: 1° dalle quote attive pagate dai soci; 2° dalla misura dell'eliminazione sociale; 3° dal saggio d'interesse. Per ciò che riguarda le prime due cause, la Cassa anormale si trova in condizioni identiche colla normale presa come termine di confronto. Pertanto, a meno che quella impieghi il fondo attivo, che amministra, a un saggio d'interesse più alto che la Cassa normale, la somma di tutte le pensioni da lei distribuite non potrà sorpassare la somma delle pensioni normali.

Naturalmente queste somme non vanno intese nel senso letterale, come risultanti, cioè, dalla semplice addizione delle pensioni effettivamente pagate, ma bensì tenendo conto delle date dei rispettivi pagamenti. Perché l'onere che sopporta per pagare oggi a lire una Cassa, la quale possa impiegare ininterrottamente il denaro giacente secondo un saggio d'interesse di i per 1 lira, è notoriamente uguale a quello cagionato dal pagamento, effettuato n anni più tardi, di L. $a(1+i)^n$.

E a questi due oneri equivalenti corrispondono equivalenti vantaggi per chi abbia a ricevere l'una

o l'altra delle due somme accennate, supposto sempre che possa anche lui impiegare secondo lo stesso saggio d'interesse ogni fondo da lui posseduto.

VI.

28. — Per coloro poi, i quali vogliono chiudere gli occhi innanzi all'accennata evidenza, valgano le riflessioni seguenti, le quali affinché riescano più impresse, converrà immaginare che colla Cassa-pensioni anormale coesista effettivamente una cassa normale, che accolga i medesimi soci della prima, e riceva da essi i medesimi contributi, così che ciascun socio paghi in duplicato le sue quote attive.

29. — Ciò premesso comincerò a dimostrare che:

È impossibile che il dividendo complessivo ripartito dalla Cassa anormale si mantenga per un numero indefinito di anni superiore, in ciascun anno, al dividendo complessivo distribuito nel medesimo anno dalla Cassa normale.

Infatti per tutto il tempo che precede la prima distribuzione, il fondo attivo sociale è identico per le due Casse. Pertanto se il primo dividendo anormale risulterà maggiore del normale, appena effettuata la prima ripartizione, la Cassa anormale si troverà con un fondo attivo minore di quello custodito dalla Cassa normale. E ad ogni nuova distribuzione la deficienza del fondo anormale rispetto al normale andrà crescendo, anche se il dividendo anormale complessivo cessando in un dato anno di essere superiore, divenga soltanto uguale al dividendo complessivo normale.

Perchè quella deficienza non solo uguaglia, ma supera di quantità, che col progredire del tempo acquistano valori assai considerevoli, la semplice somma delle deficienze verificatesi nelle singole distribuzioni.

Un milione, p. es., pagato una volta dalla Cassa anormale in più del normale, diviene dopo 50 anni, unito a' suoi interessi accumulati secondo il solito saggio di 4 %, qualche cosa più di 7 milioni, e dopo 100 anni più di 50 milioni, cagionando così alle date corrispondenti altrettanti milioni di deficienza nel fondo attivo della Cassa anormale.

Consideriamo ora distintamente ciascuno dei due fondi attivi totali. Per la Cassa normale esso è in ciascun giorno semplicemente uguale alla somma dei fondi attivi individuali spettanti, secondo lo statuto normale, ai singoli soci effettivi esistenti in quel giorno. Il numero possibile dei soci è soggetto naturalmente ad un limite dipendente dalla popolazione associabile; p. es., una Cassa-pensioni istituita fra cittadini italiani non potrà mai contare un numero di soci superiore a quello degli italiani viventi. Parimenti i fondi attivi indi-

viduali saranno tutti inferiori ad un certo limite che si potrà determinare giusta quanto ho detto intorno ai fondi individuali dei vari soci.

Ora una somma aritmetica di termini, quando sono limitati e il numero dei termini e la loro grandezza, rimane pure soggetta ad un certo limite uguale al prodotto dei due limiti accennati. Dunque per ogni data Cassa-pensioni normale esiste un limite, che non potrà mai essere raggiunto dal suo fondo attivo totale.

Sotto questo limite il fondo attivo normale può crescere, crescendo la popolazione associata, e può anche diminuire, diminuendo quella popolazione.

Invece il fondo attivo che rimane alla Cassa anormale al principio di ogni anno sociale, dopo distribuita la sola rendita prodotta nell'anno precedente, è decretato *intangibile, inamovibile*; non può mai soffrire alcuna diminuzione, ma cresce perennemente fin tanto che rimanga anche un solo socio.

Anche il fondo anormale è una somma aritmetica, e la grandezza di ciascuno de' suoi termini è soggetta a un certo limite; ma il numero dei termini, col progredire del tempo, fin tanto che l'associazione permane, cresce fino a superare qualunque limite prestabilito; così che il fondo attivo anormale finirà sempre per superare il fondo normale.

Nè questa conseguenza soffrirebbe eccezione quando, venendo a sparire tutti i soci, cessasse l'aumento del fondo attivo anormale, perchè allora questo conserverebbe la misura intangibile di già raggiunta, mentre il fondo normale si ridurrebbe a zero. Dunque:

Se la Cassa-pensioni dura indefinitamente, il suo fondo attivo complessivo arriva sicuramente a superare, in qualche giorno, il fondo attivo esistente in quello stesso giorno presso la Cassa-pensioni normale presa come termine di confronto.

Ma questo fatto non può avvenire senza che in qualcuna delle ripartizioni effettuate prima di quel giorno il dividendo complessivo distribuito dalla Cassa anormale divenga minore di quello concesso dalla Cassa normale. Dunque è vero, ecc.

30. — In ciascuna ripartizione i partecipanti sono gli stessi per entrambe le Casse. Quando il dividendo complessivo anormale sarà minore del normale, detto n il loro numero, si avrà

$$\frac{\text{dividendo complessivo anormale}}{n} < \frac{\text{dividendo complessivo normale}}{n}$$

Ora il primo membro di questa disuguaglianza è il dividendo anormale individuale; il secondo è la media aritmetica delle pensioni normali. Dunque:

Se una Cassa anormale avrà una durata indefinita, accadrà inevitabilmente che in qualche anno il dividendo individuale netto da essa ri-

partito sia minore dalla media delle pensioni distribuite nello stesso anno dalla Cassa normale presa come termine di paragone.

VII.

31. — Questa conclusione che è della massima importanza, induce alla ricerca della *pensione normale media*.

Risulta da quanto son venuto fin qui esponendo che i soci iscritti in età avanzata si trovano, nell'associazione anormale, in condizioni sfavorevoli rispetto agli altri. Questo svantaggio per individui i quali abbiano raggiunto anche solo 20 anni, è abbastanza sensibile perchè, quando fosse fatto conoscere, come sarebbe dovere dei fondatori, l'associazione venga richiesta quasi esclusivamente da persone di età inferiore a 20 anni, così che la pensione normale media risulterebbe inferiore a L. 30.

Ma qui occorre un'altra considerazione più stringente. Se la Cassa anormale potesse realizzare i benefizi sognati, quando la sua esistenza fosse divulgata, ogni famiglia alla quale non sia impossibile o troppo difficile il risparmio di qualche lira in ogni mese, fatta eccezione per quelle alle quali non piaccia la condizione del *fondo perduto* imposta ai soci eliminati, si deciderebbe tosto a far iscrivere i suoi componenti meno vecchi, e così non potrebbe più in avvenire introdurre nell'associazione che i nuovi nati.

A queste famiglie si potrebbero soltanto unire più tardi quelle poche le quali, allettate dai pingui dividendi distribuiti nei primi anni di ripartizione, cangiassero d'avviso riguardo alla condizione del fondo perduto. Ma ad ogni modo si può ritenere che quando la Cassa avesse raggiunta, se fosse possibile, la sua esistenza rigogliosa e duratura, la grandissima maggioranza degli associati entrebbero in età inferiore ai 10 anni, e la pensione normale media sarebbe minore di L. 28.

32. — Ma c'è dell'altro. Calcolando la tavola delle pensioni normali io ho ammessa la *decadenza per mancati pagamenti*, di 2 %, costante per tutti i 19 anni occorrenti per acquistare il diritto alla pensione. Ora questa uniformità è assolutamente inammissibile, perchè le diserzioni diverranno sicuramente meno numerose a misura che i soci di ogni dato gruppo si avvicineranno al termine di quei 19 anni. E si andrà certamente molto più vicino al vero supponendo che la decadenza effettiva abbia luogo in misura decrescente secondo una progressione aritmetica.

Ciò posto, ritenendo quel 2 % come una media, cominciando con una decadenza annua di 4 % per il primo anno d'associazione, e terminando

con una decadenza nulla dopo l'anno 19°, ho provato a rifare il calcolo della pensione normale spettante ad un individuo iscritto all'età di 1 anno, ed ho avuto L. 26, cioè L. 1,10 di meno di quella ottenuta nell'ipotesi della decadenza uniforme. Per questa ragione ritengo che si debba diminuire di 1 lira anche la media surriferita, abbassandola a L. 27.

33. — Ancora: la decadenza media annua di 2 % è, a parere dei conoscitori della materia, esagerata. Intanto per conoscere la sua influenza ho anche provato a supporla nulla, ed in questa ipotesi ho trovato per individui iscritti all'età di 1 anno, una pensione netta di sole L. 21,30; vale a dire L. 4,70 di meno che nell'ipotesi della decadenza decrescente in progressione aritmetica nella misura media di 2 %.

34. — Per tutte queste ragioni mi pare che, volendo annunciare al pubblico previsioni fondate, si dovrebbero dedurre ancora dalle 27 altre due lire, e adottare infine come *probabile* la pensione normale di L. 25; supponendo, ben inteso, che il saggio dell'interesse si mantenga costantemente prossimo al 4 %.

VIII.

35. — Tornando quindi alla Cassa anormale, e ritenendo sempre che il danaro renda annualmente il 4 %, avremo in forza di una conclusione precedente [31], che:

Il dividendo individuale netto distribuito da una Cassa anormale, di durata indefinita, diverrà in qualche anno verosimilmente inferiore a L. 27; e probabilmente anche inferiore a L. 25.

E questo dovrebbe bastare per disilludere coloro che confidano nelle previsioni dei fondatori delle Casse anormali.

36. — In quegli anni nei quali il dividendo individuale anormale sarà minore della pensione normale media, qualunque sia la misura di questa media, alcuni dei soci i quali allora soltanto acquistino il diritto alla pensione, riceveranno meno di quello che loro sarebbe dovuto secondo la più stretta giustizia. E fra loro ve ne sarà, generalmente, qualcheduno che morrà prima che sopraggiunga una ripartizione capace di compensarlo del danno sofferto. Così nei riguardi di questo socio la Cassa anormale verrà meno ai doveri della giustizia.

37. — Può sembrare che questa mancanza si possa evitare decretando, prima del suo avvento, lo scioglimento della Cassa anormale. Ma rammen-

tando quello che ho detto intorno all'invariabilità della somma, razionalmente intesa, dei benefici sociali [28] si vedrà tosto che:

O lo scioglimento avrà luogo quando qualche socio abbia di già ricevuto — come sta per accadere presso la Società dei *Prévoyants de l'Avenir* [4] — un beneficio superiore a quello che a lui avrebbe procurato, o gli procurerebbe durante il corso intero della sua vita, la Cassa normale, e allora la riparazione sarà divenuta impossibile;

Oppure nessun socio si troverà nel detto caso, e allora tutti potranno venir a godere semplicemente benefici equivalenti ai normali, raggiungendo così niente più di quello scopo che si sarebbe ottenuto adottando semplicemente fin da principio, il sistema normale.

IX.

38. — I fondatori di certe Casse anormali, ben lungi dall'ammettere come evidente l'invariabilità testè accennata del beneficio sociale complessivo, rettamente inteso, sentenziano che, dati certi sviluppi della popolazione associata, ne viene come necessaria conseguenza un fatto ben diverso, apportatore della ricchezza universale, per cui la somma dei benefici sociali, che potrà distribuire la Cassa anormale, dovrà riuscire, come ho già accennato, tre o quattro volte maggiore di quella procurata dalla Cassa normale.

Essendo questa, fra le molteplici illusioni, sotto l'influsso delle quali son nate le Casse anormali, la più funesta, io cercherò di addurre del fatto vero tali prove da convincere anche i più ostinati contraddittori, e rendere inappellabile la condanna di codeste Casse.

39. — Supponiamo che in compenso di un capitale di L. 800 una Società d'assicurazioni offra, a scelta dell'assicurato, l'uno o l'altro dei due sistemi di pagamenti qui sotto indicati:

L. 500 dopo 10 anni	L. 100 dopo 10 anni
» 500 » 20 »	» 100 » 20 »
» 500 » 30 »	» 1500 » 30 »

e che nel corso dei 30 anni ci sia modo per chiunque lo voglia, di impiegare il denaro, senza rischio, a un dato saggio d'interesse, *i* per 1 lira. Quale dei due sistemi sarà più vantaggioso all'assicurato?

La somma aritmetica dei pagamenti è più grande nel sistema secondo; ma essa non costituisce un criterio sufficiente per risolvere il quesito, perchè il maggiore o minore vantaggio di ciascun pagamento dipende non solo dalla sua misura, ma anche dalla data della sua concessione. Così le prime 500 lire del primo sistema pagate dopo 10 soli anni, procurano all'assicurato lo stesso vantaggio che

L. $500q^{20}$ (se si rappresenta con *q* il binomio $1+i$), pagate alla scadenza finale, ossia 20 anni più tardi. E ragionando analogamente sugli altri pagamenti si trova che il vantaggio complessivo offerto all'assicurato col primo sistema equivale a quello di un pagamento unico, concesso alla data finale, di L.

$$P^I = 500q^{20} + 500q^{10} + 500;$$

e coll'altro sistema, invece, di L.

$$P^{II} = 100q^{20} + 100q^{10} + 1500.$$

Pertanto il sistema preferibile, per l'assicurato, sarà quello in cui prevalga il pagamento unico, determinato nel modo che ho detto. Secondo che sarà P^I maggiore o minore di P^{II} , sarà più vantaggioso all'assicurato il sistema primo, oppure il secondo.

40. — Questa illazione potrà sembrare malferma a chi dubiti che il senso della disuguaglianza possa variare dipendentemente dalla data attribuita al pagamento unico. Ebbene supponiamo che invece della data presa nel ragionamento precedente se ne assuma un'altra *posteriore* per un numero qualunque, *t*, di anni. Un ragionamento analogo darà:

$$P^{III} = 500q^{20} + 500q^{10} + 500q^t = P^I q^t,$$

$$P^{IV} = 100q^{20} + 100q^{10} + 1500q^t = P^{II} q^t;$$

così che il senso della disuguaglianza fra i pagamenti unici P^{III} e P^{IV} , sarà ancora lo stesso che fra P^I e P^{II} , e condurrà alla medesima conseguenza.

Nè questa potrebbe mutare quando si prendesse una data *anteriore* di *t* anni, perchè allora i pagamenti unici invece di crescere entrambi secondo il rapporto di q^t ad 1, diminuirebbero secondo il rapporto inverso, di 1 a q^t .

41. — In ogni caso si avrà

$$P^{III} : P^{IV} = P^I : P^{II}$$

Pertanto il rapporto $P^I : P^{II}$ potrà servire in ogni caso per determinare, dirò così, la misura della preferenza da dare all'uno o all'altro sistema. Quando fosse, per esempio:

$$\frac{P^I}{P^{II}} = \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4},$$

si potrebbe dire che il primo sistema offre all'assicurato un vantaggio superiore di $\frac{1}{4}$, oppure del 25 % al vantaggio del secondo sistema.

42. — Intanto una somma di danaro determinata in quel modo, che ho tenuto qui sopra per riguardo a P^I e P^{II} , si potrà dire che è, *alla data prescelta, equivalente* al complesso di tutte le somme parziali, alle quali si suppone sostituita.

43. — Supponiamo ora che un ente qualunque, per esempio una Banca, riceva certe quote attive, e con esse costituisca un fondo attivo, dal quale abbia a prelevare certe somme da pagare. E poniamo che il fondo attivo residuo venga impiegato incessantemente secondo un dato saggio d'interesse costante, t per 1 lira.

A una data qualunque che dirò *data finale* siano:

f il fondo attivo;

v_1, v_2, v_3, \dots le quote attive versate prima della data finale;

p_1, p_2, p_3, \dots i pagamenti effettuati fino alla stessa data;

t_1, t_2, t_3, \dots gli intervalli di tempo, valutati in anni, compresi rispettivamente fra le date dei singoli versamenti e la data finale;

T_1, T_2, T_3, \dots gli analoghi intervalli di tempo relativi ai pagamenti.

Immaginiamo che la Banca per effettuare il primo pagamento p_1 , invece di attingere al fondo attivo, ricorra ad un'altra Banca, accendendo presso questa un pari debito, da estinguersi alla data finale insieme a' suoi interessi composti calcolati secondo lo stesso saggio i . Per quest'operazione il debito finale della prima Banca sarà di $L. p_1 q^{T_1}$. Allo stesso modo eseguendo tutti gli altri pagamenti, si troverà alla data finale col debito complessivo:

$$D = p_1 q^{T_1} + p_2 q^{T_2} + p_3 q^{T_3} + \dots$$

Intanto i versamenti v_1, v_2, v_3, \dots avranno prodotto un fondo attivo, la cui misura alla data finale, sarà:

$$A = v_1 q^{t_1} + v_2 q^{t_2} + v_3 q^{t_3} + \dots$$

Allora la Banca potrà pagare il debito D e il residuo $A - D$ sarà appunto il fondo attivo f . E così si avrà:

$$f = A - D, \quad A = D + f,$$

$$\begin{aligned} v_1 q^{t_1} + v_2 q^{t_2} + v_3 q^{t_3} + \dots &= \\ = p_1 q^{T_1} + p_2 q^{T_2} + p_3 q^{T_3} + \dots + f & \quad (A) \end{aligned}$$

44. — Ora applichiamo questa conclusione ad una Cassa anormale, la quale abbia già effettuato certe distribuzioni di dividendi; e intendiamo che siano p_1, p_2, p_3, \dots i singoli dividendi individuali pagati. Il secondo membro dell'uguaglianza (A), privato del termine f , rappresenterà la somma di danaro equivalente, alla data finale, al complesso di tutti i dividendi distribuiti dalla Cassa anormale. E poichè il fondo f è proprio dei soci rimanenti, potremo dire che quel secondo membro, preso nella sua totalità, esprime la misura totale del beneficio conseguibile presso la Cassa anormale dal complesso di tutti i soci passati e presenti.

Analogamente rappresentando con P_1, P_2, P_3, \dots le pensioni individuali pagate dalla Cassa normale immaginata come termine di paragone, ed osservando che gli intervalli di tempo rappresentati con T_1, T_2, T_3, \dots sono identicamente applicabili a quelle pensioni, detto F il fondo attivo finale esistente presso la Cassa normale avremo nella somma:

$$P_1 q^{T_1} + P_2 q^{T_2} + P_3 q^{T_3} + \dots + F;$$

la misura del beneficio complessivo procurato a quei medesimi soci dalla Cassa normale.

Ma il primo membro dell'eguaglianza (A) è precisamente lo stesso per entrambe le Casse, perché identici sono i versamenti attivi e identiche le loro date. Dunque sarà pure:

$$\begin{aligned} p_1 q^{T_1} + p_2 q^{T_2} + p_3 q^{T_3} + \dots + f &= \\ = P_1 q^{T_1} + P_2 q^{T_2} + P_3 q^{T_3} + \dots + F; \end{aligned}$$

con che rimane posta fuori d'ogni dubbio l'impossibilità della moltiplicazione del beneficio sociale complessivo, sognata dai creatori delle Casse anormali.

45. — Di qui poi deriva, per necessaria conseguenza, che il *benefizio individuale medio* procurato dalla Cassa anormale a' suoi associati, in tutta la durata della sua esistenza, equivale alla *media delle pensioni normali*.

X.

45. — Per venire, intorno alla misura di questa media, ad una conclusione ben determinata, supporrò:

a) che i soci entrino tutti in età di 3 anni;

b) che la decadenza per mancati pagamenti, cominciando da 4 % nel primo anno d'iscrizione, discenda, secondo una progressione aritmetica, fino a diventar nulla nell'anno ventesimo.

I termini di questa progressione, ridotti a tre decimali, sono:

4	3,789	3,579	3,368	3,158
2,947	2,737	2,526	2,316	2,105
1,895	1,684	1,474	1,263	1,053
0,842	0,632	0,421	0,211	0

Per avere le percentuali dell'eliminazione annua verificantesi nell'ipotesi b), basta aggiungere ordinatamente quei termini alle percentuali della mortalità italiana, le quali si possono desumere dalla tavola delle pensioni normali, togliendo due unità [5] dai numeri notati nella sua terza colonna, a cominciare dall'età di 3 anni. Le percentuali risultanti si trovano raccolte nella colonna terza della tavola seguente, in corrispondenza alle

età di 3 anni, 4 anni . . . 22 anni, registrate nella colonna prima. La colonna quarta poi e la seconda contengono, rispettivamente, le eliminazioni annue assolute e i numeri dei soci rimanenti al principio di ciascun anno, calcolati per un gruppo composto inizialmente di 10000 soci, in quel modo che ho detto nel n. 6.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
3	10000	7,820	782	10 000
4	9218	6,215	573	19 618
5	8645	5,456	472	29 048
6	8173	4,798	392	38 383
7	7781	4,232	329	47 699
8	7452	3,749	279	57 069
9	7173	3,351	240	66 525
10	6933	3,040	211	76 159
11	6722	2,810	189	86 127
12	6533	2,668	174	96 105
13	6359	2,484	158	106 308
14	6201	2,276	141	116 761
15	6060	2,083	126	127 491
16	5934	1,886	112	138 525
17	5822	1,691	98	149 888
18	5724	1,530	88	161 608
19	5636	1,373	77	173 708
20	5559	1,209	67	186 211
21	5492	1,052	58	199 152
22	5434	0,919	49	212 552
23	5385			

Ciò premesso, considerando dapprima quote attive annue di una sola lira, e procedendo come nel n. 8, si ottengono i capitali complessivi appartenenti a quel gruppo al principio dell'anno 1°, 2°, . . . 19°, dalla sua iscrizione, quali sono registrati nell'ultima colonna.

L'ultimo di questi capitali moltiplicato per 12 dà il capitale effettivo di lire 2 550 624, e dividendolo per il numero dei soci rimanenti al principio dell'anno 19°, che è, secondo la tavola, 5434, si ottiene il capitale individuale di lire 469,4 spettante a ciascuno di essi soci.

Per avere la pensione normale corrispondente basta moltiplicare quest'ultimo capitale per il *coefficiente di pensione* relativo ad un socio il quale sia stato iscritto in età di 3 anni, il quale è, secondo la tavola delle pensioni normali, 1 :17,88. Deducendo poi dal quoziente, che è 26,23, le

lire 0,60 da ritenersi per spese d'Amministrazione, si trova la pensione netta di lire 25,63. La quale spettando a qualunque socio iscritto in qualsiasi anno, sarà pure la *media delle pensioni normali*, contemplata nel numero precedente, quando si avverino le ipotesi a) e b) insieme alle altre sottintese.

47 — Da queste considerazioni deriva la prima parte di quella fra le *conclusioni finali* [51], che è distinta col numero IV.

XI.

48.— *Quale potrà essere il minimo dividendo anormale?*

Questo *minimo*, al pari del *massimo*, dipende specialmente dallo sviluppo della popolazione associata.

Mantenuta l'ipotesi dell'età di 3 anni comune a tutti i soci entranti, si avrà in ogni anno un gruppo solo [18]. Consideriamo un gruppo iscritto in un anno sociale posteriore al 18°. In quel giorno nel quale scadrà per esso il primo dividendo — giorno che richiederò brevemente, quando occorra, colla denominazione *epoca* — il complesso di tutti i suoi effettivi presenti si potrà distinguere in queste tre categorie:

- Soci appartenenti al gruppo designato;
- Soci iscritti anteriormente;
- Soci iscritti posteriormente.

I soci delle prime due categorie saranno tutti *pensionali*; della terza, nessuno; così che, detto S il numero dei soci della prima categoria ed S' della seconda, sarà S + S' il numero dei partecipanti al dividendo scadente nell'epoca suddetta.

Il capitale sociale inamovibile esistente nel giorno anteriore di 1 anno *all'epoca*, si potrà considerare come composto di tre parti, che dirò C, C', C'' costituite rispettivamente dai soci i quali abbiano fino a quel giorno appartenuto alle tre categorie. Così, detto i il saggio dell'interesse per ogni lira, si avrà il dividendo anormale individuale lordo da ripartire *all'epoca*,

$$D = \frac{C + C' + C''}{S + S'} i$$

maggiore, generalmente, di quest'altro:

$$D' = \frac{C + C'}{S + S'} i.$$

Dei due rapporti $\frac{C}{S}$, $\frac{C'}{S'}$, il più grande, nelle ipotesi assunte, è, per ragioni ovvie, il secondo. Pertanto il dividendo D sarà anche maggiore di

$$D'' = \frac{C}{S} i.$$

Assumendo uguale a 10000 il numero iniziale arbitrario [10], dei soci componenti il gruppo della prima categoria, si avrà dalla tavola precedente $S = 5385$.

Il capitale C poi sarà semplicemente uguale alla somma di tutti i versamenti attivi effettuati dai soci di quel gruppo, perchè i loro interessi saranno stati distribuiti ai soci anteriori. Pertanto basterà sommare i numeri registrati nell'ultima colonna della tavola [46], e moltiplicare il risultato per 12; così si avrà:

$$C = 1706832, \quad \frac{C}{S} = 317,0;$$

e quando sia $i = 0,04$, oppure $i = 0,03$, rispettivamente:

$$D'' = 12,68, \quad D'' = 9,51.$$

Deducendo infine le lire 12,60, ritenute dalla Cassa anormale, si otterranno i residui:

$$d'' = 0,08, \quad d'' = - 3,09.$$

49. — Pertanto la Cassa anormale potrà lealmente assicurare ai suoi associati che, verificandosi le ipotesi surriferite intorno alla mortalità, alla decadenza e all'età dei soci entranti, finchè il saggio dell'interesse si manterrà nella misura di 4 % ad ognuno toccherà in qualsiasi anno un dividendo netto maggiore di *otto centesimi*. E quando il detto saggio discenda a 3 %, se in qualche anno i soci dovranno pagare alla Cassa più di quanto da essa ricevano, la differenza sarà minore di lire 3,09.

50. — Stabilito così del minimo in questione un limite inferiore, passerò a cercarne uno superiore.

Fra i casi possibili vi è quello nel quale lo sviluppo dell'associazione negli anni posteriori all'epoca [48] diminuisca tanto da produrre un capitale C'' talmente piccolo che il rapporto $\frac{C''}{S}$ risulti minore del rapporto $\frac{C + C''}{S}$. Nè questo caso è tanto inverosimile quanto può sembrare a prima vista, perchè si verificherebbe anzi naturalmente se le illusioni sparse nel pubblico sulla eccellenza della Cassa anormale svanissero proprio nell'anno immediatamente posteriore all'epoca. Allora si avrebbe:

$$D < \frac{C + C''}{S} i.$$

D'altronde può darsi che C risulti più grande non solo di C'' , ma anche di un suo multiplo, per esempio, di 10 C'' anzi questo fatto, per quanto generalmente inverosimile, acquista un certo grado di probabilità, qualora la grande maggioranza del pubblico, diffidente nel corso dei primi

18 anni dalla fondazione della Cassa, venuta poi a conoscenza di un lauto dividendo assicurato ai soci entrati nel primo anno, si decidesse a domandare l'associazione. E allora si avrebbe:

$$D < \frac{C + 0,1C}{S} i, \quad D < \frac{1,1C}{S}, \quad D < 1,1d'';$$

e quindi, ponendo mente ai valori di d'' trovati precedentemente, secondo che sarà $i = 0,04$ oppure $i = 0,03$, rispettivamente:

$$D < 13,95, \quad D < 10,46;$$

ed infine deducendo L. 12,60, un dividendo netto minore di lire 1,35, oppure di — lire 2,13.

XII.

51. — Da quanto son venuto fin qui esponendo derivano, riguardo alle Casse *anormali* [14] te conclusioni seguenti:

I. *È ingiusta la concessione di dividendi uguali a soci iscritti in età comunque differenti* [25].

II. *È del pari ingiusta l'aggiudicazione, ai soci entrati nei primi anni, di dividendi che possono risultare cento e mille volte maggiori di quelli, che potranno toccare ai soci iscritti venti o trenta anni più tardi* [4 e 50].

III. *L'età nella quale è più conveniente associarsi, è verso i tre anni.* (V. tavola di pensioni normali).

IV. *Supposto:*

a) *che la mortalità dei soci abbia luogo secondo le ultime statistiche italiane;*

b) *che la decadenza sociale per mancati pagamenti, cominciando da 4 % nel primo anno d'iscrizione, discenda secondo una progressione aritmetica fino a zero nell'anno ventesimo;*

c) *che ciascun socio contribuisca in ogni anno con L. 12 alla costituzione del capitale inamovibile e con L. 0,60 alle spese d'Amministrazione, e acquisti dopo 20 anni il diritto al dividendo sociale;*

d) *che il capitale inamovibile frutti costantemente L. 4% all'anno:*

il dividendo annuo individuali: netto (dedotto cioè il contributo di L. 12,00) potrà salire da principio a centinaia e migliaia di lire, ma dovrà poi discendere fino ad un minimum il quale, se i soci entrassero tutti in età di 3 anni, sarebbe certamente inferiore a L. 25,03 e potrà anche ridursi a meno di tre o quattro lire [4 e 50].

V. *Secondo quelle stesse ipotesi il beneficio individuale medio, se la Cassa avrà una durata indefinita, oppure sciogliendosi ripartirà ai soci tutto il capitale inamovibile, sarà equivalente a quello procurato da una pensione vitalizia di L. 25,63* [45 e 46].

VI. *Su questa beneficio medio lo sviluppo più o meno rapido, più o meno abbondante della popolazione associata non ha assolutamente nessuna influenza. La presunzione contraria è assurda* [44].

VII. *Quando il frutto annuo del capitale inamovibile discenda a L. 3 %, potrà anche avvenire che in qualche anno il dividendo individuale netto divenga nullo o negativo [50].*

NOTA.

Questo mio lavoro venne accolto dalla Società degli Ingegneri e degli Architetti in Torino col seguente ordine del giorno, approvato all'unanimità nella seduta dell'11 luglio 1898:

« La Società degli Ingegneri e degli Architetti » in Torino, udita la Relazione del socio professore Mazzola sulle Casse-pensioni che hanno per base la ripartizione degli interessi, ne approva le conclusioni e fa voti che simili Casse vengano trasformate in Casse normali secondo i concetti indicati nella suddetta Relazione ».

Le accennate conclusioni mettono in piena luce lo squilibrio che avrà luogo inevitabilmente nella distribuzione dei dividendi anormali, tanto più enorme quanto sarà più rapido lo sviluppo dell'associazione.

E danno ragione dell'augurio che le Casse anormali, convertendosi in normali [14] si rendano veramente benefiche per le classi meno agiate, alle quali, accogliendo i loro piccoli risparmi, verrebbero a procurare vantaggi equamente ripartiti e superiori a quelli conseguibili presso qualunque Società d'assicurazione.

La determinazione dei *dividendi normali* sarà tanto più laboriosa, quanto maggiore sarà il numero dei gruppi che si avranno a distinguere [13]. Per renderla più facile, senza venir meno all'equità, converrà stabilire che:

1° Le associazioni decorrano solamente dal primo giorno di ciascun anno civile; chi voglia associarsi in un altro giorno, paghi le quote arretrate, cogli'interessi scaduti;

2° Si estenda la comprensione di ciascun gruppo a individui di età differenti, entro certi limiti, non troppo larghi; per esempio:

da anni	0	ad anni	5,
»	5	»	10,
»	10	»	15, ecc.

Così avrà luogo una mancanza di equità, ma questa verrà purgata dall'accusa d'ingiustizia, dichiarando qual sia l'età più conveniente entro i limiti assegnati a ciascun gruppo. Perchè allora ognuno potrà aspettare ad iscriversi quando compia quell'età; e se vorrà associarsi in un'età differente, non farà altro che rinunciare *volontariamente* ad una parte di quanto gli spetterebbe, *stricto iure*, a favore degli altri soci del proprio gruppo.

Non si devono confondere i *dividendi normali effettivi* colle *pensioni normali* date dalla tavola, che io ho calcolata solamente per servire come fondamento a certe *precisioni*, dalle quali i *fatti* discorderanno sempre, tanto più, quanto maggiori saranno gli scarti che avranno luogo nell'eliminazione e nel saggio d'interesse da me supposti.

Per determinare i dividendi normali effettivi bisognerà preparare tavole analoghe a quelle che ho citato nel n. 16, supponendo però che le pensioni, o per meglio dire, le annualità vitalizie, invece di essere *posticipate*, decorrano già fino da quello stesso giorno nel quale si voglia intendere versato il *valore capitale*. Allora per stabilire il dividendo *annuo* spettante a ciascun socio di un dato gruppo, nel primo giorno di ogni dato anno, basterà:

1° Fare l'inventario del capitale attivo appartenente in quel giorno all'intero gruppo;

2° Contare i soci rimanenti di esso gruppo;

3° Calcolare il *capitale individuale*, dividendo quello complessivo per il numero dei partecipanti;

4° Vedere qual debba essere nell'anno entrante il saggio d'interesse;

5° In fine, ricorrendo alle tavole presupposte coi due ultimi risultati, determinare la rendita vitalizia corrispondente all'età giudicata più conveniente, entro i limiti stabiliti per quei gruppi.

Questa rendita vitalizia sarà il dividendo spettante ad ogni socio nel primo giorno dell'anno considerato. E volendolo distribuire in rate semestrali, o trimestrali, ecc., la loro determinazione non darà luogo ad alcuna difficoltà.

I dividendi varieranno, anche per uno stesso gruppo, di anno in anno: ma senza che cessino di essere adempiute le disposizioni *normali*, eque e razionali, indicate nel n. 16.