

CALCESTRUZZI

## FORNITURE DI CALCESTRUZZO PRECONFEZIONATO



DIREZIONE E SEDE

TORINO □ Via Tirreno, 45 - tel. 502.102 / 502.103 / 599.908

CENTRALI DI BETONAGGIO

TORINO □ Via Nallino (ang. C. Orbassano) tel. 393.996

□ Via Sandro Botticelli - telefono 243.010

□ Via Pietro Cossa - telefono 737.070

MONCALIERI □ Corso Trieste - telefono 667.786

### IMPIANTI IGIENICI SANITARI

**g. SARTORIO ef**  
DI ING. LORENZO SARTORIO & C. S.A.S.

TORINO

C. Racconigi, 26 - Tel. 70.149 - 753.649

IMPIANTI TERMICI

RADIAZIONE

CONDIZIONAMENTO

VENTILAZIONE

IDRAULICI SANITARI

Licenziatari per impianti a radiazione diffusa - Minima inerzia

**STRAMAX**

# ATTI DELLA SOCIETÀ DEGLI INGEGNERI E DEGLI ARCHITETTI IN TORINO

## A proposito di centenario: cariche sociali nel secolo scorso

*Nel quadro delle celebrazioni centenarie pubblichiamo l'elenco delle cariche sociali durante il secolo scorso, traendole dalle ricerche del Reyceud.*

<i>Comitato provvisorio</i>	1881 Pres. <i>Berruti Giacinto</i> Vice <i>Curioni Giovanni</i>	1900 Pres. <i>Soldati Vincenzo</i> Vice <i>Reyceud G. Angelo</i>
dal 15.3.1866 al 23.12.1866 Presidente <i>Paleocapa Pietro</i>	1882 Pres. <i>Ferraris Galileo</i> Vice <i>Curioni Giovanni</i>	1901 Pres. <i>Soldati Vincenzo</i> Vice <i>Fadda Stanislao</i>
<i>Comitato Direttivo</i>	1883 Pres. <i>Ferraris Galileo</i> Vice <i>Soldati Vincenzo</i>	1902 Pres. <i>Soldati Vincenzo</i> Vice <i>Vicary Mario</i>
1866 <i>Cavalli Giovanni</i> Presidente dal 23.12.1866 al 31.12.1867 <i>Paleocapa Pietro</i> Presidente Comitato Provvisorio	1884 Pres. <i>Curioni Giovanni</i> Vice <i>Ferrante G. Battista</i>	1903 Pres. <i>Salvadori di Wiesen-</i> <i>hoff nob. Giacomo</i> Vice <i>Vicary Mario</i>
1867 Pres. On. <i>Paleocapa Pietro</i> Pres. Ef. <i>Cavalli Giovanni</i>	1885 Pres. <i>Curioni Giovanni</i> Vice <i>Ferrante G. Battista</i>	1904 Pres. <i>Salvadori di Wiesen-</i> <i>hoff nob. Giacomo</i> Vice <i>Fadda Stanislao</i>
1868 Pres. <i>Richelmy Prospero</i> Vice pres. <i>Erba Giuseppe</i>	1886 Pres. <i>Curioni Giovanni</i> Vice <i>Lanino Luciano</i>	1905 Pres. <i>Salvadori di Wiesen-</i> <i>hoff nob. Giacomo</i> Vice <i>Fadda Stanislao</i>
1869 Pres. <i>Spurgazzi Pietro</i> Vice <i>Peyron Amedeo</i>	1887 Pres. <i>Ferrante G. Battista</i> Vice <i>Solito G. Battista</i>	1906 Pres. <i>Franceschetti di Mez-</i> <i>zenile nob. Carlo</i> Vice <i>Guidi Camillo</i>
1870 Pres. <i>Peyron Amedeo</i> Vice <i>Codazza Giovanni</i>	1888 Pres. <i>Ferrante G. Battista</i> Vice <i>Solito G. Battista</i>	1907 Pres. <i>Reyceud Giov. Angelo</i> Vice <i>Corazza Cesare</i>
1871 Pres. <i>Codazza Giovanni</i> Vice <i>Massa Mattia</i>	1889 Pres. <i>Ferrante G. Battista</i> Vice <i>Casana Severino</i>	1908 Pres. <i>Reyceud Giov. Angelo</i> Vice <i>Prinetti Tommaso</i>
1872 Pres. <i>Richelmy Prospero</i> Vice <i>Peyron Amedeo</i>	1890 Pres. <i>Riccio Camillo</i> Vice <i>Reyceud G. Angelo</i>	1909 Pres. <i>Reyceud Giov. Angelo</i> Vice <i>Prinetti Tommaso</i>
1873 Pres. <i>Bella Giuseppe</i> Vice <i>Peyron Amedeo</i>	1891 Pres. <i>Berruti Giacinto</i> Vice <i>Soldati Vincenzo</i>	1910 Pres. <i>Vicary Mario</i> Vice <i>Fenolio Michele</i>
1874 Pres. <i>Berruti Giacinto</i> Vice <i>Peyron Amedeo</i>	1892 Pres. <i>Berruti Giacinto</i> Vice <i>Soldati Vincenzo</i>	1911 Pres. <i>Vicary Mario</i> Vice <i>Giovara Carlo</i>
1875 Pres. <i>Berruti Giacinto</i> Vice <i>Pecco Edoardo</i>	1893 Pres. <i>Berruti Giacinto</i> Vice <i>Thovez Cesare</i>	1912 Pres. <i>Vicary Mario</i> Vice <i>Giovara Carlo</i>
1876 Pres. <i>Curioni Giovanni</i> Vice <i>Pecco Edoardo</i>	1894 Pres. <i>Reyceud G. Battista</i> Vice <i>Fadda Stanislao</i>	1913 Pres. <i>Mazzini Carlo</i> Vice <i>Tedeschi Massimi</i>
1877 Pres. <i>Curioni Giovanni</i> Vice <i>Berruti Giacinto</i>	1895 Pres. <i>Reyceud G. Angelo</i> Vice <i>Fadda Stanislao</i>	1914 Pres. <i>Mazzini Carlo</i> Vice <i>Molli Stefano</i>
1878 Pres. <i>Curioni Giovanni</i> Vice <i>Berruti Giacinto</i>	1896 Pres. <i>Frescot Cesare</i> Vice <i>Brayda Riccardo</i>	1915 Pres. <i>Mazzini Carlo</i> Vice <i>Starda Ernesto</i>
1879 Pres. <i>Berruti Giacinto</i> Vice <i>Peyron Amedeo</i>	1897 Pres. <i>Frescot Cesare</i> Vice <i>Zerboglio P. Giuseppe</i>	1916 Pres. <i>Chevalley Giovanni</i> Vice <i>Arlorio Agostino</i>
1880 Pres. <i>Berruti Giacinto</i> Vice <i>Peyron Amedeo</i>	1898 Pres. <i>Frescot Cesare</i> Vice <i>Vicary Mario</i>	
	1899 Pres. <i>Vicary Mario</i> Vice <i>Reyceud G. Angelo</i>	

## Viaggio di studio in Francia

Si è svolto con successo dal 7 al 9 settembre scorso il viaggio di studio organizzato dalla nostra Società per visitare le opere di regolazione della Durance e gli impianti già costruiti per sfruttare le acque disponibili, sia a scopo di produzione di energia elettrica che di irrigazione dei terreni nella Bassa Durance, le opere di bonifica del Basso Rodano ed il porto industriale di Marsiglia.

Al viaggio hanno preso parte 18 Soci con a capo il Presidente ing. Richieri e tre gentili signore: Sigg.re Richieri, Chiaves e Ferroglio.

Seguendo l'itinerario stabilito via Susa, Ulzio, Clavière e Briançon, i partecipanti hanno raggiunto la prima tappa al Belvedere di Serre Ponçon, dove li attendeva l'ing. Brunetti con la gentile Signora, che si era precedentemente prodigato per prendere gli opportuni accordi con i dirigenti dell'EdF, dell'Ente Bonifica e della città di Marsiglia.

Dal Belvedere si è ammirata la distesa azzurra del lago di Serre Ponçon che si protende per 20 km tra i monti sul corso della Durance e si insinua tra le valli laterali a guisa di fiordi, dopo avere sommerso due centri abitati, risparmiando una chiesetta che sembra sorgere dall'acqua. Sulle acque del lago molte bianche vele e sulle sponde alcuni campeggi indicano che la grande diga costruita a scopi di utilità pubblica darà anche impulso alla valorizzazione turistica della zona.

Le caratteristiche tecniche delle opere visitate sulla Durance sono descritte nelle pagine seguenti. Qui nel resoconto generico del viaggio si possono aggiungere le notizie non strettamente tecniche che hanno reso vario ed interessante il viaggio, favorito da ottime condizioni meteorologiche.

Dopo la visita alla centrale ed alle opere idrauliche di Serre Ponçon e la sosta per la colazione a Sisteron, nel pomeriggio il viaggio è proseguito lungo il corso della Durance, sul quale sorgono una decina di centrali. Prima tappa a Cadarache (con deviazione fuori programma agli Stabilimenti Nucleari omonimi, visti solo attraverso un robusto cancello) alla confluenza del Verdon con la Durance, dove è stato costruito uno sbaramento mobile per regolare l'alimentazione del canale della portata di 250 mc/s che va ad alimentare quattro grandi centrali (la quinta Mallemort è in costruzione) e d'estate porta l'acqua occorrente ai canali di irrigazione. Così il deflusso regolato dell'acqua di Serre Ponçon assolve la duplice funzione di dare energia durante otto o dieci mesi dell'anno e negli altri di sopperire alle necessità irrigue, che fino a pochi anni fa durante la magra estiva erano spesso costrette a gravi limitazioni, oppure al contrario eliminate da pericolose alluvioni.

Dopo Cadarache visita alla centrale di Jouques ed alle opere di presa di St. Estève.

Il viaggio del 1° giorno si è concluso ad Aix en Provence all'albergo du Roi

René con una ottima « terrine au poisson ».

La prima tappa del secondo giorno è stata dedicata al ponte-canale dell'Acquedotto di Roquefavour alto ben 82 m dalle fondazioni, costruito in pietra squadrata che ripete con diversi ordini di archi la linea del ponte romano di Gard.

Al Belvedere sull'Etang de Berre il panorama delle grandiose raffinerie era offuscato dalla nebbia, ma scendendo verso St. Chamas spiccavano a distanza le tre torri affiancate, una a metà di ciascuna condotta, che fungono da pozzi piezometrici. Allo scarico di St. Chamas l'acqua della Durance va a finire in mare attraverso all'Etang de Berre, abbandonando il corso naturale che sbocca nel Rodano.

In mattinata ancora la sosta ad Avignon ha permesso ai gitanti di visitare il Castello dei Papi.

Sosta al ristorante « Le Petit Vin Blanc » per una squisita colazione con i Dirigenti dell'Associazione Risicoltori di Arles che hanno successivamente condotto i partecipanti a visitare un'azienda risicola, dove si raccolgono ogni anno ingenti quantità di riso nei silos, di dove esso viene prelevato per le lavorazioni meccaniche di pulitura e brillatura e quindi avviato ai mercati.

Il viaggio è proseguito nel pomeriggio attraverso la pittoresca zona della Camargue, dove gli equini vivono ancora in libertà entro grandi recinti, e dove le coltivazioni basse al suolo sono protette dal vento da filari di cipressi o da canneti. Per la rinascita di questa zona, si prevede di estendere la rete di canali di irrigazione e di rialimentarli dal Basso Rodano mediante numerose opere idrauliche da costruire nel prossimo decennio.

Una delle prime già in funzione è la stazione di pompaggio di Pichegu che pompa le acque derivate dal Rodano attraverso un canale lungo 7 km in altri due canali costruiti a quota superiore di m 40 e m 67 rispettivamente. Il canale di derivazione ha il fondo non rivestito, mentre le sponde sono rivestite da lastre di calcestrutto. Il gruppo di tre pompe a prevalenza inferiore sono servite ciascuna da una condotta, munita di venturimetro; le altre tre pompe convogliano l'acqua in una unica condotta.

Indice caratteristico dell'importanza di questo impianto sono le numerose comitive di visitatori, provenienti dagli altri paesi d'Europa, che chiedono spiegazioni con l'evidente interesse di chi si propone di fare altrettanto nel suo paese.

L'acqua pompata nei canali viene successivamente accumulata in serbatoi pensili, di altezza opportuna per effettuare l'irrigazione a pioggia, più costosa, ma assai più vantaggiosa.

Per accelerare la trasformazione culturale ed economica di questa zona, prima coltivata solo a vigneti, si è istituito un Ente che ha il compito di ridimensionare le proprietà in aziende di 7 a 10 ha. Altre Cooperative si stanno creando per la conservazione, trasformazione e vendita dei prodotti agricoli.

La trasformazione agricola intrapresa ed avviata decisamente a soluzione interessa decine di migliaia di ettari e per l'affinità del clima e delle coltivazioni chiama direttamente ed urgentemente in causa gran parte della nostra agricoltura, che solo in ristrette zone e ad opera di iniziative private, è in grado di sostenere il confronto.

Il viaggio è proseguito nel tardo pomeriggio verso Arles attraverso al centro storico-archeologico dell'antica città romana e si è concluso a Marsiglia con una memorabile « bouillabasse » all'Hotel Terminus.

La mattinata del terzo giorno è stata dedicata ad una visita al Porto di Marsiglia, su un natante alquanto vetusto guidato da un cortese lupo di mare che gareggiava con il funzionario della Camera di Commercio incaricato di descrivere le attrezzature e le trasformazioni di questo grandioso porto.

L'ingresso del porto che comprende diversi bacini, è protetto dal Chateau d'If. Il porto mercantile, verso ponente, è delimitato da una diga lunga 7 km, in parte a scogliera in parte formata da cassoni in c.a. Le banchine a pettine sono ben attrezzate, e particolarmente meccanizzate quelle destinate allo scarico ed all'insilamento dei cereali. Alle spalle della diga lungo tutto il suo sviluppo, una banchina comunica con la zona a tergo del porto, per mezzo di due ponti mobili, uno rotante orizzontalmente, l'altro apribile mediante rotazione verticale delle due metà campate. Questa banchina dovrà ospitare tutti i cantieri per la manutenzione e le piccole riparazioni navali.

I bacini per i grandi cantieri sono all'estremità ovest del porto; uno di questi, galleggiante, è in grado di contenere navi da 40.000 t.

Le possibilità future di ampliamento del porto di Marsiglia sono legate alla realizzazione di un canale a pelo libero che unisca il porto all'Etang de Berre e successivamente con un altro canale alle foci del Rodano. Questa grandiosa opera favorirebbe il porto petrolifero di Lavera sull'Etang de Berre e gli darebbe illimitate possibilità di sviluppo. Ora sono in corso lo scavo dei fondali del canale da Lavera a Martigues ed altre numerose opere per migliorare l'attrezzatura del porto petrolifero.

Il viaggio di studio si è concluso con un ricevimento presso la Camera di Commercio di Marsiglia, con intervento dei rappresentanti dell'EdF e delle Autorità interessate alle opere di irrigazione e bonifica, che hanno illustrato agli ospiti i progetti delle opere in corso di costruzione e le prospettive di sviluppo economico nell'ambito del MEC, in un clima di amichevole intesa.

L'ing. Richieri a nome dei partecipanti ha risposto ringraziando per l'accoglienza e felicitandosi dei programmi di sviluppo già intrapresi che saranno benefici per tutti.

Qui ci è grato rinnovare i ringraziamenti dei partecipanti a tutti gli ospiti ed in particolare ai tecnici dell'EdF, che hanno prodigato le loro cortesi e competenti spiegazioni ai visitatori degli impianti.

E. A.

# RASSEGNA TECNICA

La « Rassegna tecnica » vuole essere una libera tribuna di idee e, se del caso, saranno graditi chiarimenti in contraddittorio; pertanto le opinioni ed i giudizi espressi negli articoli e nelle rubriche fisse non impegnano in alcun modo la Società degli Ingegneri e degli Architetti in Torino

## Controllo della teoria flessionale del guscio sferico

GIUSEPPE SURACE calcola la matrice di deformabilità per un tronco di guscio sferico in situazione assial-simmetrica spingendo l'analisi al passo di approssimazione successivo a quello della teoria flessionale in uso, basata sulle ipotesi di Bernoulli. In una nota introduttiva PLACIDO CICALA mostra come la ricerca presenti un controllo di quella teoria.

### Introduzione.

Il grande numero di ipotesi e semplificazioni che debbono introdursi per rendere possibile il calcolo di una struttura a guscio fa sorgere naturale la domanda sull'entità dell'errore inerente a quel calcolo. La risposta è veramente incerta. In qualche pubblicazione viene indicato l'errore percentuale da cui una certa formula è affetta; però tale valutazione viene basata sul raffronto con una teoria più complessa, non con i valori esatti, che non si conoscono. A parte l'indagine sperimentale, la risoluzione delle equazioni della teoria tridimensionale dovrebbe evitare gli errori introdotti dalle semplificazioni dell'ordinaria teoria; ma le note difficoltà dell'una e dell'altra via non hanno permesso conclusivi controlli.

Un metodo di approssimazione sistematica è stato messo a punto per la via degli « sviluppi parametrici »<sup>(1)</sup>: esso conduce ad ottenere le *esatte* espressioni di tanti termini quanti si desiderino negli sviluppi delle grandezze incognite in serie di potenze di un parametro  $\delta$  proporzionale allo spessore *s*. Sebbene di tali sviluppi non si sia in grado di calcolare il campo di convergenza, è pur sempre vero che, per valori sufficientemente piccoli di  $\delta$  il risultato più preciso deve essere fornito dall'espressione

(1) I risultati di una serie di precedenti studi su questo indirizzo sono stati coordinati e completati nella monografia: P. CICALA, *Systematic Approximation Approach to Linear Shell Theory*, Levrotto & Bella, Torino, 1965.

che tiene esatto conto del maggior numero di termini dello sviluppo. Il calcolo di una incognita, spinto fino al termine *n*-mo del suo sviluppo serve di controllo per ogni altra determinazione che tenga esatto conto di *n*-1 termini, permettendo di trovare l'andamento dell'errore percentuale in prossimità del valore  $\delta = 0$  del parametro. Anche se tale assaggio della soluzione meno precisa viene effettuato per qualche caso semplice, le conclusioni che esso fornisce sono assai istruttive.

Tali concetti sono qui avanti applicati al calcolo dei coefficienti di deformabilità di un guscio di rivoluzione caricato in modo assial-simmetrico. La presente analisi di terza approssimazione (la quale, cioè, tiene conto dei primi tre termini negli sviluppi parametrici, i cui ordini relativi risultano nei rapporti  $1 : \delta^{1/2} : \delta$ ) è stata limitata al guscio sferico. Tuttavia essa consente di trarre importanti conclusioni dal raffronto delle varie formulazioni di seconda approssimazione.

Per l'analisi di terza approssimazione degli stati di tensione in esame, caratterizzati dal fatto che la striscia di orlo interessata da tali tensioni decresce come  $\sqrt{\delta}$  quando  $\delta$  tende a zero, la teoria usuale si dimostra inadeguata. Sono infatti da tenere in conto, in questo ambito di approssimazione, fra l'altro, le dilatazioni e le inflessioni della fibra normale alla parete, che l'ordinaria teoria suppone indeformabile. Questo rende necessarie speciali precisazioni nella definizione degli spostamenti

e degli sforzi che la matrice di deformabilità mette in relazione.

Posto che nella striscia influenzata dallo stato di tensione che si origina su un orlo non cada nè un altro orlo nè il polo del guscio, uno degli stati di tensione in esame può essere definito imponendo che la risultante delle tensioni sull'elemento di orlo compreso fra due piani meridiani adiacenti passi per il punto di mezzo dell'elemento; un altro resta definito dalla condizione che la risultante delle tensioni marginali sia una coppia (nel piano meridiano).

Distinguiamo con (a) e (b) i due sistemi anzidetti di tensioni. Possiamo definire come spostamento radiale il lavoro delle tensioni del sistema (a) riferito al valore della loro risultante, e come rotazione della fibra normale il lavoro delle tensioni del sistema (b) riferito al momento risultante. Con ciò si realizza la simmetria della matrice di deformabilità, in conformità al teorema di Betti. Nella deduzione della matrice di deformabilità ( $2 \times 2$  in questo caso) è tenuto conto, coerentemente, dell'ordine di approssimazione prefissato sia nella deduzione delle equazioni sia nella loro risoluzione. Confrontando con i risultati che si ottengono risolvendo con gli sviluppi parametrici le equazioni date dal Flügge si trova per i coefficienti diretti (spostamenti dovuti alle forze radiali e rotazioni dovute alle coppie) così ottenuti, un errore relativo in

meno dato da  $\frac{s}{10R} \sqrt{3(1-\nu^2)}$

dove  $R$  è il raggio della sfera media e  $\nu$  il coefficiente di Poisson: per i coefficienti indiretti si trova un errore in eccesso dato da

$$\frac{\nu s}{5R} \sqrt{3 \frac{1+\nu}{1-\nu}}$$

Queste espressioni valgono, naturalmente, per  $\delta \rightarrow 0$ ; peraltro, come s'è detto, fuori di questo limite una valutazione rigorosa di tali errori non è oggi possibile.

Gli errori sopra indicati sono di solito esigui. Non molto differenti risultano in generale le correzioni apportate da tutto il terzo termine nello sviluppo dei coefficienti di deformabilità. Dalle espressioni riportate si possono quindi desumere indicazioni circa l'adottabilità delle formule di seconda approssimazione, note per un guscio di rivoluzione generico (2).

Se nella striscia influenzata dalle tensioni in esame cade il polo del guscio, ossia se l'arco di meridiano compreso fra il polo e il parallelo di orlo assume l'ordine di grandezza  $\sqrt{\delta}$ , la trattazione che segue, perde validità e si deve far ricorso alla teoria del guscio piatto (2).

L'analisi di terza approssimazione viene anche svolta, nella presente nota, per il tronco di guscio sferico delimitato da due paralleli poco distanti, l'arco di meridiano compreso assumendo uno sviluppo dell'ordine di  $\sqrt{\delta}$ . Sforzi e spostamenti sui due orli sono definiti in analogia a quanto sopra è detto per il caso di un orlo solo e quindi la matrice  $4 \times 4$  di deformabilità risulta simmetrica. In base a questi risultati si può calcolare l'errore relativo, inerente alle formule di seconda approssimazione o quello a cui si va incontro adottando la teoria ordinaria. Tale errore viene calcolato per  $s$  tendente a zero come  $\delta$ , mentre lo sviluppo dell'arco di meridiano decresce come  $\sqrt{\delta}$ . La presente analisi di terza approssimazione è dunque atta a fornire utili indicazioni sul grado di precisione delle varie teorie.

P. CICALA

(2) P. CICALA, *Sul calcolo dei serbatoi assialsimmetrici*. Le Costruzioni Metalliche, N. 2, 1965.

## LE EQUAZIONI GENERALI

La proprietà caratteristica degli stati di deformazione e di tensione assialmente simmetrici in esame è espressa dalla relazione

$$V = O(V\delta^{-1/2})$$

ove  $\delta$  è un parametro proporzionale allo spessore,  $V$  è una generica variabile da determinare, componente di tensione o di spostamento. Con  $f'$  si indica, la derivata della generica funzione  $f$  rispetto alla coordinata  $\xi$  misurata lungo il meridiano.

Per tali configurazioni è indicato nella nota [1] nel caso generale della superficie di rivoluzione, come dalle relazioni di equilibrio e di elasticità, trasformate dalla formulazione tridimensionale al campo bidimensionale delle coordinate di longitudine e latitudine sulla superficie media, si deducano le equazioni differenziali atte a fornire le funzioni  $V$  sotto forma di sviluppo in serie di potenze di  $\delta$ .

Il caso particolare della superficie sferica è stato esaminato in [2] spingendo l'approssimazione ad un passo successivo rispetto all'ordinaria teoria.

È qui mostrato che il sistema differenziale, come suggerito in [3], può essere ordinato nella forma:

$$L_{11}(G_1) \dots + L_{12}(G_1, G_2) \dots + L_{13}(G_1, G_2, G_3) = \dots \quad (1)$$

$$L_{21}(G_1, G_2) \dots + L_{22}(G_1, G_2, G_3) = \dots \quad (2)$$

$$L_{31}(G_1, G_2, G_3) = \dots \quad (3)$$

indicandosi con (1) un gruppo di equazioni che contengono nei termini  $L_{11}$  fondamentali, un gruppo  $G_1$  di incognite  $V$  in numero uguale a quello delle equazioni. Similmente in (2) e (3) nei termini fondamentali  $L_{21}$  e  $L_{31}$  entrano i gruppi  $G_2, G_3$  di altrettante incognite quante sono le equazioni dei due sistemi. I successivi addendi in equazione rappresentano termini dell'ordine di potenze sempre più elevate di  $\delta$ : precisamente, i termini separati da tre punti (...) stanno in rapporto dell'ordine  $\delta^{1/2}$ .

Esplicitamente si scrive:

$$N_\theta - Esq'w = \dots + Esq'v + \nu N_\varphi \dots + \nu N_n \quad (1a)$$

$$w' + \chi = \dots + \rho v - \chi_3 + Q_\varphi/Gs \dots \quad (1b)$$

$$Q_\varphi' - \rho N_\theta = \dots + \rho N_\varphi - \rho_c Q_\varphi \quad (1c)$$

$$M_\varphi - \nu M_\theta - Es\chi'/12 = \dots + \nu M_n + Es^3\rho_c\chi_n/12 \quad (1d)$$

$$M_\theta - \nu M_\varphi = \dots + Es^3\rho_c\chi'/12 \dots + \nu M_n + Es^3\rho_c\chi_n/12 \quad (1e)$$

$$M_\varphi' - Q_\varphi = \dots + \rho_c(M_\theta - M_\varphi) \quad (1f)$$

$$v = -Q_\varphi(1 + \nu)/Es\rho \quad (2a)$$

$$N_\varphi = \rho_c Q_\varphi/\rho \quad (2b)$$

$$Es\chi_n + \nu N_\theta = \dots \quad (3a)$$

$$Es w_2 + \nu(M_\varphi + M_\theta) = \dots \quad (3b)$$

$$N_n + \rho(M_\varphi + M_\theta) = \dots \quad (3c)$$

$$Gs(w_2' + 5\chi_3) + Q_\varphi = \dots \quad (3d)$$

$$60 M_n/s^2 + Q_\varphi' = \dots \quad (3e)$$

$E, \nu$  sono il modulo elastico ed il coefficiente di Poisson.  $\rho = 1/R$  è la curvatura meridiana e normale,  $\rho_c = \cotg \varphi/R$  la curvatura geodetica essendo  $\varphi$  la colatitudine, come definita più avanti; con  $R$  ed  $s$  si indicano rispettivamente il raggio medio e lo spessore della parete sferica in esame.

Le altre quantità suscritte, se con  $\zeta$  si indica la coordinata normale alla superficie in esame e si pone  $c = 1 + \zeta/R$ , restano così definite:

$$N_\varphi = \int c\sigma_\varphi d\zeta \quad M_\varphi = \int c\sigma_\varphi \zeta d\zeta$$

$$N_\theta = \int c\sigma_\theta d\zeta \quad M_\theta = \int c\sigma_\theta \zeta d\zeta$$

$$N_n = \int c\sigma_n d\zeta \quad M_n = \int c\sigma_n \zeta d\zeta$$

$$Q_\varphi = \int c\tau_{\varphi n} d\zeta$$

$$v = \frac{1}{h} \int v_\zeta d\zeta \quad w = \frac{1}{h} \int w_\zeta d\zeta$$

$$\chi = \frac{12}{s^3} \int v_\zeta \zeta d\zeta \quad \chi_n = \frac{12}{s^3} \int w_\zeta \zeta d\zeta$$

$$\chi_3 = \frac{14}{s^5} \int v_\zeta (20\zeta^3 - 3s^2\zeta) d\zeta$$

$$w_2 = \frac{5}{s^3} \int w_\zeta (6\zeta^2 - \frac{s^2}{2}) d\zeta \quad (4)$$

Gli integrali si estendono da  $-s/2$  a  $+s/2$ . Vi compaiono come funzioni di  $\zeta$  le componenti di

spostamento  $w_\zeta$  radiale e  $v_\zeta$  secondo il meridiano, le tensioni normali  $\sigma_\varphi, \sigma_\theta, \sigma_n$  nelle direzioni meridiana, circonferenziale e radiale e la tensione tangenziale  $\tau_{\varphi n}$  diretta radialmente sulla sezione normale al meridiano.

Per quanto riguarda gli spostamenti si tenga presente che essi risultano definiti nella (4) dai valori medi perchè si è tenuto conto della deformazione delle fibre normali. Giova in ultimo ricordare che alcune delle quantità (4) coincidono con quelle della ordinaria teoria [4] precisamente:  $N_\varphi, N_\theta, v, w$ ; altre ne differiscono per il segno:  $Q_\varphi, M_\varphi, M_\theta, \chi$ ; le restanti non trovano riscontro.

## RISOLUZIONE PER SUCCESSIVE APPROSSIMAZIONI

Per risolvere il sistema differenziale si procede come segue. Dalle equazioni  $L_{11} = 0$  si ottengono le espressioni di prima approssimazione per le  $G_1$ , nonché l'equazione

$$w'''' + K^4 w = 0 \quad (5)$$

essendo

$$K = \sqrt{\rho/s_n} \quad s_n^2 = s^2/12(1 - \nu^2)$$

Poi, mediante queste espressioni, dalle relazioni (3a)-(3e) si ottengono le espressioni di prima approssimazione delle  $G_3$ . Sostituendo le  $G_1$  di prima approssimazione nei termini  $L_{12}$  dopo avere eliminato le  $G_2 = v, N_\varphi$  mediante le (2a)-(2b) dalle  $L_{11} + L_{12} = 0$  si ottengono le espressioni di seconda approssimazione delle  $G_1$ . Infine si sostituiscono queste espressioni nei termini  $L_{12}$ , quelle di prima approssimazione delle  $G_1$  e  $G_3$  nei termini  $L_{13}$  e si ottiene dalle equazioni (1) l'equazione risultante:

$$w'''' + K^4 w = \dots - 2\rho_c w'''' \dots + (\rho_c^2 + a\rho^2) w'''' \dots \quad (6)$$

ove  $a = 2,4(1 - \nu^2)$ . Se si applica il medesimo procedimento di approssimazione sistematica alle equazioni della ordinaria teoria si ritrova la medesima equazione ma con  $a = 0$ . D'ora innanzi procederemo nei calcoli usando le due teorie, sì da poterle confrontare i risultati parziali e quelli finali.

I coefficienti differenti nelle successive equazioni saranno via via indicati con  $a_i$  ( $i = 1, 2 \dots 9$ ) e sono riportati nella tabella 1.

TABELLA 1

Simbolo	(1)	(2)
$a$	2,4 (1 - $\nu^2$ )	0
$a_1$	0,15 + 0,6 $\nu^2$	0,75
$a_2$	0,2 (*)	0
$a_3$	1,2 - 0,2 $\nu^2$	- $\nu$
$a_4$	0,85 - $\nu$ - 0,6 $\nu^2$	0,25 - $\nu$
$a_5$	0,35 + $\nu$ + 0,4 $\nu^2$	-0,25
$a_6$	0,35 - 0,6 $\nu^2$	-0,25
$a_7$	1,55 + 1,2 $\nu$ + 0,4 $\nu^2$	-0,25 - $\nu$
$a_8$	0,85 + $\nu$ - 0,6 $\nu^2$	0,25 + $\nu$
$a_9$	0,2 $\nu$ + 0,2 $\nu^2$	0

Or dunque, nella (5), trascurando i termini a secondo membro si ottiene la soluzione:

$$w_0 = X_1 e^{-t} \cos(\alpha_1 + t) + X_2 e^t \cos(\alpha_2 + t) + X_3 e^{-t} \cos(\alpha_3 + t) + X_4 e^t \cos(\alpha_4 + t) \quad (7)$$

ov'è  $t = K\xi/\sqrt{2}$ ,  $\alpha_i$  ( $i = 1 \dots 4$ ) sono costanti arbitrarie e  $X_i$  fattori con cui si combinano linearmente le quattro soluzioni indipendenti della (5), definibili in base alle condizioni al contorno.

Sia  $\rho_0$  il valore di  $\rho_c$  per  $\xi = 0$ . Dalla (6), sostituendo il secondo membro con  $-2\rho_0 w_0$  e integrando si ha un'espressione, di seconda approssimazione per  $w$ . Per un'ulteriore approssimazione, tenendo conto che  $\rho_c' = -\rho_c^2 - \rho^2$  si deve sostituire nella (6)

$$\rho_c = \rho_0 \dots - (\rho_0^2 + \rho^2) \xi \dots$$

(1) Valori esatti (Sviluppi parametrici basati sulla teoria tridimensionale).

(2) Valori calcolati secondo la teoria ordinaria (Sviluppi parametrici basati sulle equazioni di Flugge).

(\*) Tale addendo proviene dal fatto che nel lavoro  $\int c\tau_{\varphi n} w_\zeta d\zeta$  si deve tenere conto che  $\tau_{\varphi n}$  contiene la componente  $-Q_\varphi(6\zeta^2 - s^2/2)/s^3$ , insieme a  $Q_\varphi/s$ .

e quindi, come è facile verificare per sostituzione si ottiene l'espressione:

$$w = w_0 \dots - \frac{\rho_0}{2} \xi w_0 \dots + \frac{3\rho_0^2 + 2\rho^2}{8} \xi^2 w_0 + \left(\frac{\rho_0^2}{8} + a_1\rho^2\right) \frac{\xi}{K^4} w_0 \dots \quad (8)$$

affetta da errori relativi  $O(\delta^{3/2})$ .

Siano  $r, z$  coordinate ortogonali nel piano meridiano, misurate rispettivamente nella direzione radiale (centrifuga) e nella assiale; sia  $\varphi$  l'angolo che la tangente al meridiano, volta nel senso delle  $\xi$  crescenti, fa con la direzione radiale. I versi positivi di  $\xi$  e  $z$  si fissano a piacere; l'angolo  $\varphi$  si misura in modo che sia

$$r' = \cos \varphi, \quad z' = -\sin \varphi \quad (9)$$

La normale al meridiano (lungo la quale si dirige lo spostamento  $w$ ) si orienta in modo che essa formi lo stesso angolo  $\varphi$  con la direzione assiale positiva. Così, dette  $u, e H$  le componenti radiali dello spostamento e dello sforzo unitario si può scrivere:

$$u_r = vr' - (w + a_2 w_2) z' \quad H = N_\varphi r' - Q_\varphi z' \quad (10)$$

Inoltre è:

$$r'' = r\rho_c \quad z'' = -r\rho \quad r''' = z'\rho \quad z''' = -r'\rho \quad (11)$$

Ciò posto, detto  $r_0$  il valore di  $r$  per  $\xi = 0$ , le quantità più significative per la scrittura delle condizioni al contorno sono:

$$rH = \frac{Ess_n^2}{\rho} \left\{ -w_0 \dots + \frac{\rho_0}{2} \xi w_0 \dots + \frac{\rho_0}{2} w_0 \dots + \left(\rho^2 a_5 + \frac{\rho_0^2}{8}\right) w_0 \dots - \left(\rho^2 a_6 + \frac{5\rho_0^2}{8}\right) \xi w_0 \dots - \left(\frac{\rho^2}{4} + \frac{3\rho_0^2}{8}\right) \xi^2 w_0 \dots \right\} \quad (12)$$

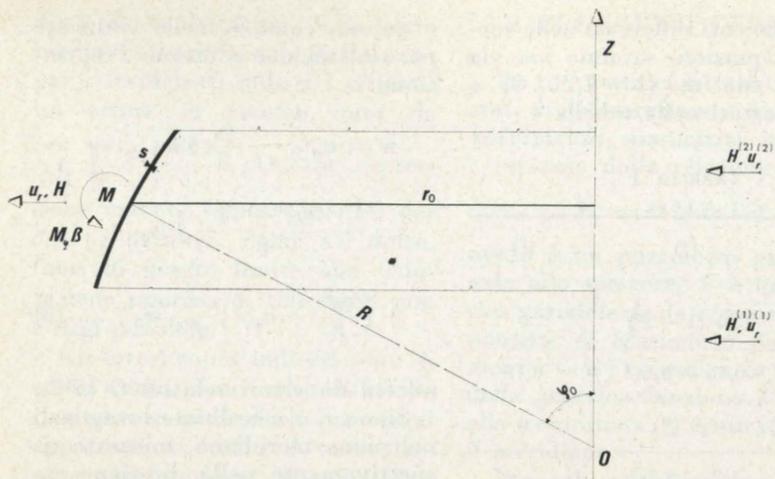


Fig. 1.

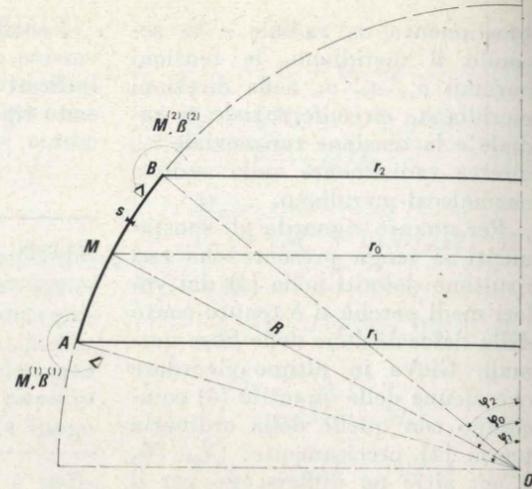


Fig. 2.

$$rM_\varphi = E s s_n^2 r_0 \left\{ -w_0 \dots - \right. \\ \left. - \frac{\rho_0}{2} \xi w_0 \dots + \rho_0 (1-\nu) w_0 \dots + \right. \\ \left. + \left( \rho^2 a_3 - \rho_0^2 \frac{1-\nu}{2} \right) w_0 \dots - \right. \\ \left. - \left( \rho^2 a_4 + \rho_0^2 \frac{3-4\nu}{8} \right) \xi w_0 \dots + \right. \\ \left. + \left( \frac{\rho^2}{4} + \frac{\rho_0^2}{8} \right) \xi^2 w_0 \dots \right\} \quad (13)$$

$$u_r = \rho r_0 \left\{ w_0 \dots + \frac{\rho_0}{2} \xi w_0 \dots + \right. \\ \left. + \rho_0 \frac{1+\nu}{K^4} w_0 \dots \dots + \right. \\ \left. + \left( \frac{\rho^2}{4} + \frac{\rho_0^2}{8} \right) \xi^2 w_0 \dots - \right. \\ \left. - \left( \rho^2 a_8 + \rho_0^2 \frac{3+4\nu}{8} \right) \frac{\xi}{K^4} w_0 \dots \dots - \right. \\ \left. - \left( \rho^2 a_9 + \rho_0^2 \frac{1+\nu}{2} \right) \frac{w_0 \dots}{K^4} \dots \right\} \quad (14)$$

$$\chi = -w_0 \dots + \frac{\rho_0}{2} \xi w_0 \dots + \\ + \frac{\rho_0}{2} w_0 \dots - \left( \rho^2 a_6 + \frac{5\rho_0^2}{8} \right) \xi w_0 \dots - \\ - \left( \frac{\rho^2}{4} + \frac{3\rho_0^2}{8} \right) \xi^2 w_0 \dots - \\ - \left( \rho^2 a_7 + \frac{\rho_0^2}{8} \right) \frac{w_0 \dots}{K^4} \dots \quad (15)$$

Si presentano ora due casi:

1) La struttura è delimitata da un solo orlo o da due orli abba-

stanza distanti, tali cioè che non vi sia mutua influenza fra di essi, sì che ogni orlo possa considerarsi indipendente dall'altro. Sull'orlo in esame assumeremo  $\xi = 0$  e quindi  $t = 0$ , ed i versi positivi ed i simboli così come indicati in fig. 1.

2) La struttura è delimitata da due orli, corrispondenti ai valori  $t = \pm \theta/2$ , sui quali quindi la coordinata  $\xi$  assume i valori  $\pm \theta/\sqrt{2}K$ . In fig. 2 sono definiti i simboli ed i versi positivi in questo secondo caso.

### ESPRESSIONE MATRICIALE DEI RISULTATI

#### PRIMO CASO

Indichiamo con  $\mathcal{F}$  e con  $\mathcal{D}$  le matrici colonna:

$$\mathcal{F} = \begin{vmatrix} r_0 H \\ r_0 M_\varphi / s_n \end{vmatrix} \quad (16)$$

$$\mathcal{D} = E s \begin{vmatrix} u_r \\ s_n \chi \end{vmatrix} \quad (17)$$

I segni sono fissati in modo che  $u_r$  ed  $H$  sono positivi nella direzione radiale centrifuga,  $\chi$  e  $M_\varphi$  nel verso della rotazione ( $< 180^\circ$ ) che porta quella direzione a coincidere con quella di  $\xi$ .

Sia inoltre:

$$\mathcal{C} = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_3 \end{vmatrix} \quad (18)$$

la matrice colonna dei coefficienti che compaiono nella (7) diversi da

zero. Indichiamo con  $\omega_1, \omega_3$  le funzioni che ivi entrano in combinazione, rispettivamente calcolate per:

$$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_3 = \pi/4$$

Per costruire la soluzione supporremo  $\xi < 0$  e quindi  $w_0 = Kw_0 (-\pi/4)$  indicandosi con  $w_0 (-\pi/4)$  l'espressione di  $w_0$  che si ottiene dalla (7) diminuendo l'argomento delle funzioni circolari di un angolo di  $\pi/4$ . Nel caso sia  $\xi > 0$ , in base a quanto stabilito per le convenzioni sui segni (vedi fig. 1) sarà sufficiente cambiare i segni dei coefficienti di influenza indiretti.

Ciò premesso i risultati possono essere scritti nella forma:

$$\mathcal{F} = \mathcal{D} (\mathcal{A} \dots + \mathcal{B} \dots + \mathcal{C} \dots) \mathcal{C} \quad (19)$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 (\mathcal{A}_1 \dots + \mathcal{B}_1 \dots + \mathcal{C}_1 \dots) \mathcal{C} \quad (20)$$

dove  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}_1$  sono rispettivamente le matrici formate dalle due colonne  $\mathcal{D}^{-1} \mathcal{F}$  e  $\mathcal{D}_1^{-1} \mathcal{D}$  che si ottengono in base alle (12)-(15) ridotte ai termini fondamentali per  $w_0 = \omega_1, \omega_3$  mentre  $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1$  le analoghe matrici che si ottengono rispettivamente dai termini di ordine relativo  $\delta^{1/2}, \delta$  nelle (12)-(15). Le matrici diagonali  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{D}_1$  formate rispettivamente dagli elementi 1,  $r_0 K$  e  $r_0 K$ , 1 sono state introdotte per semplificare le equazioni che seguono.

Sostituendo nella (20) la matrice ricavata dalla (19) sempre

nel medesimo ambito di approssimazione si ottiene:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 [\mathcal{A}_1 \mathcal{A}^{-1} \dots - \\ - \mathcal{A}_1 \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B} \mathcal{A}^{-1} + \mathcal{B}_1 \mathcal{A}^{-1} \dots - \\ - \mathcal{B} \mathcal{A}^{-1} (-\mathcal{A}_1 \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B} \mathcal{A}^{-1} + \mathcal{B}_1 \mathcal{A}^{-1}) - \\ - \mathcal{A}_1 \mathcal{A}^{-1} \mathcal{C} \mathcal{A}^{-1} + \mathcal{C}_1 \mathcal{A}^{-1} \dots] \mathcal{D}_1^{-1} \mathcal{F} \quad (21)$$

I termini fondamentali dell'espressione in parentesi quadre nella (21) sono rappresentati dalla matrice simmetrica:

$$\mathcal{A}_1 \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{P} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} \quad (22)$$

La (22) rappresenta la ben nota matrice di deformabilità del tronco cilindrico.

Gli altri termini nella (21) possono essere elaborati introducendo le matrici  $2 \times 2$   $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$  aventi rispettivamente elementi non nulli solo nelle posizioni:

$$u_{11} = 1 \quad \text{per } \mathcal{A}_1 \\ u_{12} = 1 \quad \text{per } \mathcal{A}_2 \\ u_{21} = 1 \quad \text{per } \mathcal{A}_3 \\ u_{22} = 1 \quad \text{per } \mathcal{A}_4$$

Con tali notazioni si ha:

$$\frac{K}{\rho_0} \mathcal{B} = -\frac{1}{2} \mathcal{A}_2 \mathcal{A} - (1-\nu) \mathcal{A}_4 \mathcal{A}_1 \quad (23)$$

$$\frac{K}{\rho_0} \mathcal{B}_1 = -(1+\nu) \mathcal{A}_1 \mathcal{A} + \frac{1}{2} \mathcal{A}_3 \mathcal{A}_1$$

$$\frac{K^2}{\rho_0^2} \mathcal{C} = -\left( \frac{\rho^2}{\rho_0^2} a_5 + \frac{1}{8} \right) \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1 + \\ + \left( \frac{\rho^2}{\rho_0^2} a_3 - \frac{1-\nu}{2} \right) \mathcal{A}_3 \mathcal{A}_1 \quad (24)$$

$$\frac{K^2}{\rho_0^2} \mathcal{C}_1 = \left( \frac{\rho^2}{\rho_0^2} a_9 + \frac{1+\nu}{2} \right) \mathcal{A}_2 \mathcal{A} + \\ + \left( \frac{\rho^2}{\rho_0^2} a_7 + \frac{1}{8} \right) \mathcal{A}_3 \mathcal{A}$$

Inoltre risulta:

$$\mathcal{A}_3 - \mathcal{P} \mathcal{A}_3 \mathcal{P} = \mathcal{P} \quad (25)$$

Con l'uso delle (23) per i termini del second'ordine, e delle (23), (24), (25) per quelli del terz'ordine, la (21) assume la forma:

$$\mathcal{D}_1^{-1} \mathcal{D} (\mathcal{D}_1^{-1} \mathcal{F})^{-1} = \mathcal{P} \dots + \\ + \frac{\rho_0}{K} \left[ \frac{1}{2} (\mathcal{P} \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 \mathcal{P}) + \right.$$

TABELLA 2	1	$\rho_0^2/K^2$
$h_{11}/Kr_0$	$\sqrt{2} - 2\nu \frac{\rho_0}{K}$	$\sqrt{2} \left( \nu^2 - \nu - \frac{1}{8} \right) + \frac{\rho^2}{\rho_0^2} a_4$
$h_{12} = h_{21}$	$-1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\rho_0}{K} (1-2\nu)$	$-2\nu^2 + 2\nu + \frac{1}{4} + \frac{\rho^2}{\rho_0^2} (a_5 + a_9 - a_4)$
$h_{22} Kr_0$	$\sqrt{2} + \frac{\rho_0}{K} (1-2\nu)$	$\sqrt{2} \left( 2\nu^2 - 2\nu + \frac{1}{8} \right) + \frac{\rho^2}{\rho_0^2} a_4$

$$+ (1-\nu) \mathcal{P} \mathcal{A}_4 \mathcal{P} - (1+\nu) \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1 \dots + \\ + \frac{\rho_0^2}{K^2} \left\{ \frac{1-\nu}{2} (\mathcal{P} \mathcal{A}_4 \mathcal{P} \mathcal{A}_2 + \right. \\ + \mathcal{A}_3 \mathcal{P} \mathcal{A}_4 \mathcal{P}) + \frac{1}{4} \mathcal{A}_3 \mathcal{P} \mathcal{A}_2 + \\ + (1-\nu)^2 \mathcal{P} \mathcal{A}_4 \mathcal{P} \mathcal{A}_4 \mathcal{P} + \\ + \left( \frac{\rho^2}{\rho_0^2} a_5 + \frac{5-4\nu}{8} \right) (\mathcal{P} \mathcal{A}_2 \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{A}_3 \mathcal{P}) + \\ + \frac{\rho^2}{\rho_0^2} a_9 (\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3) + \\ + \left[ \frac{\rho^2}{\rho_0^2} (a_7 - a_9) + \frac{1}{8} \right] \mathcal{P} \left\} \dots \quad (26)$$

La matrice simmetrica risultante  $\mathcal{H}$  (che moltiplicata per la colonna  $\mathcal{F}$  da la  $\mathcal{D}$  - MATRICE DI DEFORMABILITÀ - è esplicitata nella tabella 2. Nella prima colonna è riportato il contributo dei termini di prima e seconda approssimazione, nella seconda il contributo di quelli di terza. Sul fronte sono riportati i coefficienti per cui dev'essere moltiplicare i termini allocati nelle colonne sottostanti.

#### SECONDO CASO

Indichiamo con  $\mathcal{F}$  e con  $\mathcal{D}$  le matrici colonna:

$$\mathcal{F} = \begin{vmatrix} r_1 H^{(1)} \\ r_2 H^{(2)} \\ r_1 M^{(1)}/s_n \\ r_2 M^{(2)}/s_n \end{vmatrix} \quad (27)$$

$$\mathcal{D} = E s \begin{vmatrix} u_r^{(1)} \\ u_r^{(2)} \\ s_n \chi^{(1)} \\ s_n \chi^{(2)} \end{vmatrix} \quad (28)$$

dove  $r_1, H^{(1)}, M^{(1)}, u_r^{(1)}, \chi^{(1)}$  sono i valori di  $r, H, M_\varphi, u_r, \chi$  per

l'orlo  $t = \theta/2$  e  $r_2, H^{(2)}, M^{(2)}, u_r^{(2)}, \chi^{(2)}$  sono i valori di  $r, H, M_\varphi, u_r, \chi$  per l'orlo  $t = -\theta/2$ .

Con i segni così fissati, per ambedue gli orli  $u_r$  e  $H$  sono positivi nella direzione radiale centrifuga;  $\chi$  e  $M_\varphi$  nel verso della rotazione ( $< 180^\circ$ ) che porta quella direzione a coincidere con quella di  $\xi$ .

Sia inoltre

$$\mathcal{C} = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{vmatrix} \quad (29)$$

la matrice colonna dei coefficienti che compaiono nella (7). Indichiamo con  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  le funzioni che ivi entrano in combinazione rispettivamente calcolate per

$$-\alpha_1 = \theta/2 + \pi/4 = \alpha_2 \\ -\alpha_3 = \theta/2 = \alpha_4$$

I risultati possono essere scritti nella forma

$$\mathcal{F} = \mathcal{D} (\mathcal{A} \dots + \mathcal{B} \dots + \mathcal{C} \dots) \mathcal{C} \quad (30)$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 (\mathcal{A}_1 \dots + \mathcal{B}_1 \dots + \mathcal{C}_1 \dots) \mathcal{C} \quad (31)$$

dove  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}_1$  sono rispettivamente le matrici formate dalle quattro colonne  $\mathcal{D}^{-1} \mathcal{F}$  e  $\mathcal{D}_1^{-1} \mathcal{D}$  che si ottengono in base alle (12)-(15) ridotte ai termini fondamentali per  $w_0 = \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  mentre  $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1$  sono le analoghe matrici che si ottengono rispettivamente dai termini di ordine relativo  $\delta^{1/2}, \delta$  nelle (12)-(15). Le matrici diagonali  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{D}_1$  formate rispettivamente dagli elementi 1,  $r_0 K, r_0 K$  e  $r_0 K, r_0 K, 1, 1$  sono state introdotte per semplificare le equazioni che seguono.

Sostituendo nella (31) la matrice  $\mathcal{C}$  ricavata dalla (30) sem-

pre nel medesimo ambito di approssimazione si ottiene:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 [\mathcal{A}_1 \mathcal{A}^{-1} \dots - \mathcal{A}_1 \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}_1 \mathcal{A}^{-1} + \mathcal{B}_1 \mathcal{A}^{-1} \dots - \mathcal{B}_1 \mathcal{A}^{-1} (-\mathcal{A}_1 \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}_1 \mathcal{A}^{-1} + \mathcal{B}_1 \mathcal{A}^{-1}) - \mathcal{A}_1 \mathcal{A}^{-1} \mathcal{C} \mathcal{A}^{-1} + \mathcal{C}_1 \mathcal{A}^{-1} \dots] \mathcal{V}^{-1} \quad (32)$$

I termini fondamentali dell'espressione in parentesi quadre nella (32) sono rappresentati dalla matrice simmetrica

$$\mathcal{A}_1 \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{P} \quad (33)$$

Gli elementi della matrice  $\mathcal{P}$ ,

TABELLA 3

$\theta$	$P_{11}$	$P_{12}$	$-P_{13} = P_{24}$	$-P_{14} = P_{23}$	$P_{33}$	$P_{34}$
.05	56.568467	-28.284193	1199.99822	1199.99781	33941.0940	33941.0587
.10	28.284298	-14.142116	300.00105	299.99938	4242.69322	4242.62251
.15	18.856272	-9.428022	133.33570	133.33195	1257.15761	1257.05155
.20	14.142350	-7.070905	75.004189	74.997522	530.435130	530.293710
.25	11.314129	-5.656538	48.006549	47.996133	271.660334	271.483561
.30	9.428817	-4.713499	33.342760	33.327761	157.292416	157.080294
.35	8.082375	-4.039744	24.502628	24.482213	99.137555	98.890088
.40	7.072791	-3.534241	18.766759	18.740097	66.501352	66.218549
.45	6.287847	-3.140856	14.836023	14.802283	46.794808	46.476683
.50	5.660219	-2.825903	12.026180	11.984532	34.203700	33.850269
.55	5.147073	-2.567938	9.949028	9.898645	25.789269	25.400558
.60	4.719858	-2.352663	8.371019	8.311074	19.956862	19.532903
.65	4.358815	-2.170173	7.144807	7.074480	15.790043	15.330878
.70	4.049834	-2.013390	6.173710	6.092183	12.736564	12.242248
.75	3.782575	-1.877118	5.392153	5.298614	10.450100	9.920700
.80	3.549287	-1.757460	4.754387	4.648031	8.705956	8.141554
.85	3.344045	-1.651430	4.227709	4.107739	7.354007	6.754702
.90	3.162246	-1.556704	3.788236	3.653866	6.291347	5.657259
.95	3.000259	-1.471447	3.418199	3.268652	5.445835	4.777104
1.00	2.855181	-1.394186	3.104153	2.938668	4.765871	4.062662
1.05	2.724667	-1.323730	2.835774	2.653604	4.213885	3.476389
1.10	2.606796	-1.259100	2.605027	2.405445	3.762078	2.990514
1.15	2.499987	-1.199490	2.405579	2.187878	3.389579	2.584199
1.20	2.402921	-1.144226	2.232389	1.995886	3.080510	2.241599
1.25	2.314493	-1.092742	2.081395	1.825433	2.822646	1.950524
1.30	2.233765	-1.044560	1.949301	1.673252	2.606468	1.701492
1.35	2.159941	-999272	1.833402	1.536672	2.424487	1.487055
1.40	2.092338	-956531	1.731464	1.413494	2.270756	1.301309
1.45	2.030365	-916039	1.641626	1.301898	2.140511	1.139533
1.50	1.973508	-877539	1.562329	1.200364	2.029903	.997922
1.60	1.873405	-805660	1.430279	1.022594	1.855629	.763414
1.70	1.789039	-739460	1.326929	.872205	1.728967	.579197
1.80	1.718041	-677873	1.246076	.743442	1.636850	.432581
1.90	1.658489	-620112	1.183024	.632097	1.570062	.314718
2.00	1.608789	-565610	1.134144	.535055	1.521967	.219308
2.10	1.567586	-513970	1.096580	.449988	1.487704	.141785
2.20	1.533707	-464934	1.068047	.375133	1.463659	.078772
2.30	1.506123	-418350	1.046694	.309143	1.447120	.027723
2.40	1.483917	-374145	1.031012	.250972	1.436037	-.013325
2.50	1.466271	-332304	1.019762	.199790	1.428857	-.045925
2.60	1.452453	-292851	1.011929	.154920	1.424410	-.071330
2.70	1.441809	-255830	1.006682	.115795	1.421819	-.090584
2.80	1.433760	-221290	1.003349	.081922	1.420435	-.104575
2.90	1.427801	-189274	1.001395	.052853	1.419790	-.114073
3.00	1.423493	-159808	1.000396	.028179	1.419554	-.119759
3.10	1.420464	-132899	1.000028	.007508	1.419506	-.122238
3.20	1.418403	-108526	1.000045	-.009533	1.419502	-.122054
3.30	1.417056	-.086643	1.000271	-.023307	1.419461	-.119695
3.50	1.415734	-.050036	1.000899	-.042428	1.419130	-.110149
3.70	1.415360	-.022239	1.001375	-.052465	1.418473	-.096527
3.90	1.415312	-.002155	1.001552	-.055752	1.417631	-.081066
4.10	1.415301	.011444	1.001473	-.054299	1.416764	-.065388
4.30	1.415226	.019807	1.001237	-.049764	1.415992	-.050595
4.50	1.415086	.024113	1.000944	-.043463	1.415374	-.037368
4.70	1.414909	.025419	1.000662	-.036393	1.414921	-.026057
4.90	1.414730	.024629	1.000428	-.029271	1.414615	-.016771
5.10	1.414572	.022487	1.000254	-.022581	1.414425	-.009449
5.30	1.414446	.019579	1.000138	-.016618	1.414316	-.003924
5.50	1.414355	.016348	1.000066	-.011534	1.414260	.000035
5.70	1.414293	.013111	1.000027	-.007370	1.414235	.002687
5.90	1.414255	.010083	1.000008	-.004096	1.414226	.004289
6.10	1.414233	.007393	1.000001	-.001634	1.414223	.005082
6.30	1.414222	.005105	1.000000	-.000123	1.414223	.005280

TABELLA 4

	$\frac{r_1+r_2}{2r_0}$	$\frac{\rho_0}{K} \frac{r_1-r_2}{2r_0}$	$\frac{\rho_0^2}{K^2}$
1	$1 + \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2}$	$-\frac{\rho_0^2}{\rho_0^2} a_6 - \frac{1}{8} - \frac{\nu}{2}$	$-\frac{\rho_0^2}{\rho_0^2} a_4 - \frac{7}{8} + \nu$
$h_{11}/Kr_0$	$\frac{r_1}{r_0} P_{11} - 2\nu \frac{\rho_0}{K}$	$-\frac{\rho_0^2}{\rho_0^2} a_8 - \frac{7}{8} + \nu$	$\nu - \frac{1}{4}$
$h_{22}/Kr_0$	$\frac{r_2}{r_0} P_{11} + 2\nu \frac{\rho_0}{K}$	$\frac{\rho_0^2}{\rho_0^2} (a_7 - a_9) - \frac{3}{8} + \frac{\nu}{2}$	$2 \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2} a_5 + \frac{\nu}{2}$
$h_{12}/Kr_0 = h_{21}/Kr_0$	$P_{12}$	$1 + 2 P_{14}^2$	$-1$
$h_{13} = h_{31}$	$P_{13} + \left(\nu - \frac{1}{2}\right) \frac{\rho_0}{K} P_{11}$	$P_{12} P_{14} - P_{11} P_{13}$	$P_{11} P_{13} - P_{12} P_{14}$
$-h_{24} = -h_{42}$	$P_{13} - \left(\nu - \frac{1}{2}\right) \frac{\rho_0}{K} P_{11}$	$-1$	$2 P_{13}^2$
$h_{14} = h_{41}$	$\frac{r_1}{r_0} P_{14} + \left(\nu - \frac{1}{2}\right) \frac{\rho_0}{K} P_{12}$	$2 P_{14} P_{34} - P_{11}$	$1 - 2 P_{13}^2$
$-h_{23} = -h_{32}$	$\frac{r_2}{r_0} P_{14} - \left(\nu - \frac{1}{2}\right) \frac{\rho_0}{K} P_{12}$	$P_{11}$	$-1$
$h_{33} Kr_0$	$\frac{r_0}{r_1} P_{33} + \left(\nu - \frac{1}{2}\right) \frac{\rho_0}{K} 2P_{13}$	$2 P_{13} P_{34} + P_{12}$	$2 P_{13} P_{14}$
$h_{44} Kr_0$	$\frac{r_0}{r_2} P_{33} - \left(\nu - \frac{1}{2}\right) \frac{\rho_0}{K} 2P_{13}$	$2 P_{13}$	$2 P_{13} P_{33}$
$h_{34} Kr_0 = h_{43} Kr_0$	$P_{34}$	$P_{33}^2 + P_{34}^2$	$-2 P_{13}$
		$2 P_{14}$	$P_{11} - 2 P_{14} P_{34}$
		$2 P_{14}$	$P_{11}$
		$2 P_{14}$	$-P_{12} - 2 P_{13} P_{34}$
		$2 P_{14}$	$P_{12}$
		$2 P_{14}$	$2 P_{13} P_{34}$

posto  $c = sh^2 \theta - \sin^2 \theta$ , si scrivono

$$P_{11} = P_{22} = \sqrt{2} (sh\theta \operatorname{ch}\theta - \sin\theta \cos\theta)/c$$

$$P_{12} = P_{21} = \sqrt{2} (sh\theta \cos\theta - \operatorname{ch}\theta \sin\theta)/c$$

$$-P_{13} = -P_{31} = P_{24} = P_{42} = (sh^2 \theta + \sin^2 \theta)/c$$

$$-P_{14} = -P_{41} = P_{23} = P_{32} = 2 sh\theta \sin\theta/c$$

$$P_{33} = P_{44} = \sqrt{2} (sh\theta \operatorname{ch}\theta + \sin\theta \cos\theta)/c$$

$$P_{34} = P_{43} = \sqrt{2} (sh\theta \cos\theta + \operatorname{ch}\theta \sin\theta)/c \quad (34)$$

La (33) rappresenta la ben nota matrice di deformabilità del tronco cilindrico. I valori dei suoi elementi sono dati dalla tabella 3.

Gli altri termini nella (32) possono essere elaborati introducendo le matrici  $4 \times 4$   $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$  aventi rispettivamente elementi non nulli solo nelle posizioni

$$u_{11} = -u_{22} = 1 \quad \text{per } \mathcal{A}_1$$

$$u_{13} = u_{24} = 1 \quad \text{per } \mathcal{A}_2$$

$$u_{31} = u_{42} = 1 \quad \text{per } \mathcal{A}_3$$

$$u_{33} = -u_{44} = 1 \quad \text{per } \mathcal{A}_4$$

Con tali notazioni si ha:

$$\frac{8K}{\rho_0} \mathcal{B} = \left[ 2\sqrt{2}\theta (\mathcal{A}_4 - \mathcal{A}_1) - 4\mathcal{A}_2 \right] \mathcal{A} - 8(1-\nu) \mathcal{A}_4 \mathcal{A}_1$$

$$\frac{8K}{\rho_0} \mathcal{B}_1 = \left[ 2\sqrt{2}\theta (\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_4) + 4\mathcal{A}_3 \right] \mathcal{A}_1 - 8(1+\nu) \mathcal{A}_1 \mathcal{A} \quad (35)$$

$$\frac{8K^2}{\rho_0^2} \mathcal{C} = \left[ \left( \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2} 8a_6 + 5 \right) \frac{\theta}{\sqrt{2}} \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 + \left( \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2} + \frac{3}{2} \right) \theta^2 \mathcal{A}_1^2 - \left( \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2} + \frac{1}{2} \right) \theta^2 \mathcal{A}_4^2 \right] \mathcal{A} + \left[ - \left( \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2} 8a_5 + 1 \right) \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 + \left( \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2} 8a_3 - 4 + 4\nu \right) \mathcal{A}_3 \mathcal{A}_1 + \left( \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2} 8a_4 + 3 - 4\nu \right) \frac{\theta}{\sqrt{2}} \mathcal{A}_4^2 \right] \mathcal{A}_1$$

$$\frac{8K^2}{\rho_0^2} \mathcal{C}_1 = \left[ - \left( \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2} + \frac{1}{2} \right) \theta^2 \mathcal{A}_1^2 + \left( \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2} + \frac{3}{2} \right) \theta^2 \mathcal{A}_4^2 - \left( \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2} 8a_6 + 5 \right) \frac{\theta}{\sqrt{2}} \mathcal{A}_3 \mathcal{A}_1 \right] \mathcal{A}_1 + \left[ \left( \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2} 8a_9 + 4 + 4\nu \right) \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 + \left( \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2} 8a_7 + 1 \right) \mathcal{A}_3 \mathcal{A}_1 + \left( \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2} 8a_8 + 3 + 4\nu \right) \frac{\theta}{\sqrt{2}} \mathcal{A}_1^2 \right] \mathcal{A} \quad (36)$$

Inoltre in base alle espressioni (34) si trovano le relazioni:

$$\mathcal{A}_4 - \mathcal{P} \mathcal{A}_1 \mathcal{P} = \mathcal{P} \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_2 \mathcal{P}$$

$$\mathcal{A}_1 - \mathcal{P} \mathcal{A}_4 \mathcal{P} = \mathcal{P} \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 \mathcal{P} \quad (37)$$

Dalla seconda delle (37) si ha ancora:

$$\mathcal{P} \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{A}_3 \mathcal{A}_1 \mathcal{P} = 2\mathcal{A}_3 \mathcal{P} \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3 \mathcal{A}_1 - 2\mathcal{P} \mathcal{A}_4 \mathcal{P} \mathcal{A}_4 \mathcal{P} \quad (38)$$

D'altra parte per le (9) e (11) può scriversi:

$$\frac{r_1}{r_0} = 1 \dots + \rho_0 \frac{\theta}{\sqrt{2} K} \dots - \rho_0^2 \frac{\theta^2}{4K^2} \dots$$

$$\frac{r_2}{r_0} = 1 \dots - \rho_0 \frac{\theta}{\sqrt{2} K} \dots - \rho_0^2 \frac{\theta^2}{4K^2} \dots$$

$$\frac{r_0}{r_1} = 1 \dots - \rho_0 \frac{\theta}{\sqrt{2} K} \dots + \left( 1 + 2 \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2} \right) \rho_0^2 \frac{\theta^2}{4K^2} \dots$$

$$\frac{r_0}{r_2} = 1 \dots + \rho_0 \frac{\theta}{\sqrt{2} K} \dots + \left( 1 + 2 \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2} \right) \rho_0^2 \frac{\theta^2}{4K^2} \dots \quad (39)$$

Pertanto risulta (\*):

$$\frac{\rho_0 \theta}{\sqrt{2} K} = \frac{r_1 - r_2}{2r_0} \dots = \frac{r_0}{2} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \dots$$

$$\frac{\rho_0^2 \theta^2}{4K^2} = 1 - \frac{r_1 + r_2}{2r_0} \dots = - \left[ 1 - \frac{r_0}{2} \left( \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) \right] \left( 1 + 2 \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2} \right) \dots \quad (40)$$

(\*) L'ordine indicato dei residui è relativo ai valori globali delle espressioni a secondo membro.

Con l'uso delle (35)-(37)-(40) per i termini di second'ordine, e delle (35)-(36)-(37)-(38)-(40) per quelli di terz'ordine la (32) assume la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1^{-1} \mathcal{D}^{-1} (\mathcal{D}^{-1} \mathcal{F})^{-1} = & \mathcal{F} \dots + \frac{\rho_0}{K} \left[ -2\nu \mathcal{L}_1 + \left( \nu - \frac{1}{2} \right) (\mathcal{P} \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 \mathcal{P}) \right] + \\ & + \frac{r_1 - r_2}{4r_0} [\mathcal{P}(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_4) + (\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_4) \mathcal{P}] \dots + \\ & + \left( 1 - \frac{r_1 + r_2}{2r_0} \right) \left\{ \left( 1 + \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \right) (\mathcal{P} \mathcal{L}_4^2 - \mathcal{L}_1^2 \mathcal{P}) + \right. \\ & + \left. \frac{\rho_0^2}{2\rho^2} [\mathcal{P} + (\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_4) \mathcal{P} (\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_4)] \right\} + \\ & + \frac{\rho_0}{K} \frac{r_1 - r_2}{2r_0} \left\{ - \left( \frac{\rho^2}{\rho_0^2} a_6 + \frac{1}{8} + \frac{\nu}{2} \right) [\mathcal{P} \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 + (\mathcal{P} \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2)^*] - \right. \\ & - \left( \frac{\rho^2}{\rho_0^2} a_4 + \frac{7}{8} - \nu \right) \mathcal{P} \mathcal{L}_4^2 \mathcal{P} + \left( \frac{\rho^2}{\rho_0^2} a_8 + \frac{7}{8} - \nu \right) \mathcal{L}_1^2 + \\ & + \left( \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \right) [\mathcal{L}_3 \mathcal{P} (\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_4) + (\mathcal{L}_3 \mathcal{P} (\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_4))^*] \left. \right\} + \\ & + \frac{\rho_0^2}{K^2} \left\{ \left[ \frac{\rho^2}{\rho_0^2} (a_7 - a_9) - \frac{3}{8} + \frac{\nu}{2} \right] \mathcal{L}_3 \mathcal{L}_1 - \mathcal{P} \mathcal{L}_3 \mathcal{L}_1 \mathcal{P} \right\} + \\ & + \left( \frac{\rho^2}{\rho_0^2} 2a_5 + \frac{\nu}{2} \right) \mathcal{L}_3 \mathcal{P} \mathcal{L}_2 - \left[ \frac{\rho^2}{\rho_0^2} (a_5 - a_9) - \frac{3}{8} + \frac{\nu}{2} \right] [\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 + \\ & + (\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2)^*] - \left( \frac{\rho^2}{\rho_0^2} 2a_5 - \nu^2 + \frac{3}{2} \nu - 2 \right) \mathcal{P} \mathcal{L}_4 \mathcal{P} \mathcal{L}_4 \mathcal{P} \left. \right\} \dots \quad (41) \end{aligned}$$

La matrice simmetrica risultante  $\mathcal{H}$  (che moltiplicata per la colonna  $\mathcal{F}$  da la  $\mathcal{D}$ ) — MATRICE DI DEFORMABILITÀ — è esplicitata nella tabella 4. Nella prima colonna è riportato il contributo dei termini di prima e seconda approssimazione, nelle successive il contributo di quelli di terza. Sul fronte sono riportati i coefficienti per cui devono moltiplicare i termini allocati nelle colonne sottostanti.

#### Conclusioni.

Le matrici di deformabilità, definenti le relazioni fra sforzi e deformazioni, sia nel primo che nel secondo caso (facendo uso della tabella 3) sono di immediata calcolo.

Nel primo caso la matrice di deformabilità, in seconda approssimazione, è identica a quella trovata da Hétényi.

Nel secondo caso concorda in seconda approssimazione con quella relativa alla generica parete di rivoluzione [5].

Il medesimo problema è stato affrontato anche da Trentadue [6] basandosi sulla teoria classica e facendo uso di opportune semplificazioni nella soluzione del sistema differenziale [7].

Anche Galletly [8] ha trovato la matrice di deformabilità sia nel primo che nel secondo caso mediante laboriosa integrazione numerica per passi delle equazioni della teoria flessionale del guscio sferico, limitandola ai valori  $\varphi_1 = 90^\circ$  e  $\varphi_2 = 50^\circ, 40^\circ, 30^\circ, 20^\circ, 10^\circ$  (vedi fig. 2). Nella ipotesi più restrittiva da lui considerata in cui il rapporto  $R/s = 15$  e  $\varphi_2 = 50^\circ$  il Galletly ha trovato uno scarto massimo del 10% fra i valori ottenuti considerando i due bordi fra loro indipendenti e non. Ha quindi pubblicato solo i risultati relativi al primo caso.

Si è ritenuto inutile fare un confronto con questi risultati avendo già saggiato la bontà dei risultati di seconda approssimazione per altre superfici [5]. Si è preferito invece trovare la matrice di deformabilità in terza approssimazione, risolvendo con gli sviluppi in serie di potenze le equazioni della teoria usuale (1). La tabella 1 mette in

(1) Le equazioni (8)-(12)-(13)-(14)-(15) qui scritte, in questo caso si sono ottenute rispettivamente dalle (12)-(13a)-(13b), (11c)-(12), (13a)-(12), (12), (11a)-(11b) di pag. 322-323 di [4] tenendo presente che  $\nu$  si è ricavato dalla somma delle (11a)-(11b) con l'ausilio delle (15a)-(15b)-(13a)-(12).

evidenza le differenze fra le due teorie considerate, differenze che come potrà notarsi facilmente appaiono solo nei termini di terza approssimazione.

Da ultimo si mette in evidenza il particolare che, quando  $\theta \rightarrow \infty$  (praticamente quando  $\theta$  assume il valore 6,3, per il quale la matrice  $\mathcal{P}$  raggiunge il valore asintotico con l'approssimazione del 2/1000) non si ha più interferenza fra i due orli e la tabella 4 assume la forma della tabella 2. È quindi possibile, una volta assegnata la curvatura normale, lo spessore ed il coefficiente di Poisson, conoscere la distanza limite  $d_l$  di mutua influenza misurata sulla superficie media della sfera stessa. Precisamente si ha facendo la differenza fra i valori che la coordinata  $\xi$  assume sui due orli:

$$d_l = 8,88/K$$

Pertanto per distanze  $d \geq d_l$  si farà uso della tabella 2, per distanze  $d < d_l$  della tabella 4.

Giuseppe Surace

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] P. CICALA, *Sulla teoria elastica della parete sottile*, «Giorn. Genio Civile», N. 4, 6, 9-1959.
- [2] G. SURACE, *Stati di tensione assialmente simmetrici in un guscio sferico*, «Acc. delle Scienze», 1964, Torino.
- [3] P. CICALA, *A linear theory for thin shells based on a systematic classification of variables*, «Proc. Conf. Shell Structures», S. Francisco, 1962.
- [4] W. FLUGGE, *Stresses in shells*, Springer, Berlin, 1962.
- [5] G. SURACE, *Sul calcolo dei coefficienti di influenza per un tronco di guscio di rivoluzione in situazioni assialsimmetriche*, «Atti e Rassegna Tecnica della Società degli Ingegneri e degli Architetti di Torino», 1966.
- [6] P. TRENTADUE, *Le piastre di rivoluzione vincolate elasticamente ai bordi*, «Rivista di Ingegneria», Luglio 1963.
- [7] P. TRENTADUE, *Il calcolo delle piastre di rivoluzione qualsiasi soggette a carico radialsimmetrico*, «Rivista di Ingegneria», Aprile 1963.
- [8] G. D. GALLETLY, *Influence coefficients for Open-Crown Hemispheres*, «Journal of Engineering for Power», series A, TRANS. ASME, vol. 82, 1960, pag. 73.

## Sulla teoria delle onde d'emersione e di impulso

### Una soluzione rigorosa ad energia finita del problema di Cauchy e Poisson

*Affrontando ex novo lo studio del classico problema di Cauchy e Poisson relativo alle onde d'emersione e d'impulso, problema già ripreso in tempi recenti da numerosi ricercatori che ne hanno dato soluzioni approssimate per varie situazioni, GIANNANTONIO PEZZOLI ha fornito in questo lavoro la soluzione rigorosa della questione, riferendosi a fenomeni ad energia finita, sia per moto piano, nel qual caso la soluzione stessa è data mediante trascendenti elementari, sia nel caso a simmetria polare in cui è possibile esprimerla mediante serie a rapida convergenza.*

1. - La teoria delle onde prodotte in acqua di profondità grandissima da una perturbazione locale del pelo libero, è stata studiata in due classiche Memorie da Cauchy [1] e Poisson [2].

Il problema affrontato da questi Autori è risolto approssimativamente tanto nel caso di moto ondoso piano quanto nel caso a simmetria centrale, si riferisce a perturbazione concentrate provocate da assegnate configurazioni iniziali del pelo libero o da un impulso del pari assegnato, tali comunque da rendere infinita l'energia dell'onda così provocata.

Dal punto di vista matematico la questione è di tale complessità che solo alquanto più tardi è stata ripresa da altri Autori: Lamb [3], Lord Kelvin [4], che elaborò allo scopo l'interessantissimo metodo approssimato della «fase stazionaria», ed ancora Sneddon [5], Stoker [6] ed Hinze [7] che ha ripreso in tempi recenti lo studio del caso a simmetria centrale. Tutti questi studiosi si sono occupati sempre di problemi a energia iniziale infinita, e perciò non corrispondenti ad un possibile schema fisico e conseguentemente di scarso interesse pratico.

Solo recentemente i giapponesi Unoki e Nakano [8], in una serie di Memorie hanno tentato di affrontare lo studio di schemi più complessi, giungendo a risultati approssimati per il caso di perturbazioni iniziali di forma rettangolare, e per impulsi iniziali aventi analogia distribuzione.

Questi Autori, nelle Note citate, hanno eseguito controlli sperimentali e qualche sviluppo analitico anche per la situazione a simmetria centrale tenendo conto, sempre approssimativamente, della azione della viscosità.

Ma anche in quest'ultima ricerca il calcolo è stato fatto per un caso con energia iniziale infinita.

In questa Nota si ottiene, ritengo per la prima volta, una soluzione rigorosa per il problema di Cauchy e Poisson con onda iniziale assegnata avente energia finita, nello schema di moto irrotazionale di fluido perfetto, sia nel caso piano, situazione in cui è possibile esprimere la soluzione a mezzo di trascendenti note, sia nel caso a simmetria centrale, in cui la soluzione viene ottenuta sotto forma di sviluppi in serie a rapida convergenza.

2. - Riportiamo brevemente la nota soluzione di Poisson e Cauchy, per moto piano, riferendoci al caso fondamentale in cui è assegnata una certa configurazione iniziale del pelo libero, data da una sopraelevazione di altezza infinita e di base infinitesima, posta nell'origine degli assi, tale comunque che sia unitaria la sezione longitudinale (e quindi il volume per unità di larghezza del canale) della perturbazione stessa.

Le onde in esame sono considerate in profondità infinita.

Dovendo, per le cose dette, esistere un potenziale del moto, assunto l'asse  $y$  positivo verso l'alto, per la condizione di Poisson sul pelo libero

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (\text{per } y=0) \quad (1)$$

$$\varphi = \frac{g}{\pi} \int_0^\infty \left[ \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{ky} dk \int_{-\infty}^\infty f(a) \cos k(x-a) da \right] \quad (7)$$

$$\eta = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \cos \sigma t dk \int_{-\infty}^\infty f(a) \cos k(x-a) da \right] \quad (8)$$

e per l'equazione di continuità

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

risulta notoriamente assegnata una soluzione particolare a variabili separate del tipo [3]:

$$\varphi = g \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{ky} \cos kx \quad (3)$$

essendo

$$\sigma^2 = gk \quad \left( k = \frac{2\pi}{\lambda} \right) \quad (4)$$

e  $\lambda$  lunghezza d'onda generica.

La sopraelevazione  $\eta$  dell'onda, risulta dalla

$$\eta = \frac{1}{g} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{y=0} \quad (5)$$

e, corrispondentemente alla (3) è data da:

$$\eta = \cos \sigma t \cos kx \quad (6)$$

Ora la soluzione particolare (3), (6) non soddisfa alle condizioni iniziali assegnate di liquido fermo ed orizzontale dovunque tranne un'intumescenza di sezione longitudinale unitaria e di altezza infinita all'origine delle  $x$ .

È possibile, data la linearità delle equazioni, soddisfare alle condizioni del problema, sommando infinite soluzioni del tipo (3) e (6) con un integrale di Fourier.

Essendo  $\eta = f(x)$  per  $t = 0$ , si scrive immediatamente



la somma della (35); a questo scopo introduciamo la funzione

$$\Phi(z) = \int_0^z F(z) dz;$$

posto ora per semplicità  $\frac{\delta}{2\kappa} = \beta$  possiamo facilmente trasformare la (35) nella:

$$\eta = \frac{1}{\pi\beta\kappa} \left( \beta z \Phi' + \frac{\beta^3 z^3}{3!} \Phi''' + \frac{\beta^5 z^5}{5!} \Phi^V \dots \right) \quad (36)$$

avendo, come al solito, indicato con gli apici le derivazioni rispetto a  $z$ .

Con uno sviluppo in serie di Taylor, si può osservare che è:

$$\frac{\Phi[z(1+\beta)] - \Phi[z(1-\beta)]}{2} = \beta z \Phi'(z) + \frac{\beta^3 z^3}{3!} \Phi'''(z) + \frac{\beta^5 z^5}{5!} \Phi^V(z) \dots$$

e quindi  $\eta$  diviene

$$\eta = \frac{1}{2\pi\beta\kappa} \{ \Phi[z(1+\beta)] - \Phi[z(1-\beta)] \} \quad (37)$$

Ma è, per posizione

$$\Phi(z) = \int_0^z F(z) dz = \int_0^z \sqrt{\frac{\pi}{z}} \left[ \cos \frac{z}{2} C\left(\frac{z}{2}\right) + \sin \frac{z}{2} S\left(\frac{z}{2}\right) \right] dz$$

che con una integrazione per parti, fornisce:

$$\Phi(z) = \pi \left[ C^2\left(\frac{z}{2}\right) + S^2\left(\frac{z}{2}\right) \right] \quad (38)$$

(2) Si osservi a questo punto che partendo dalle regole del calcolo operatorio [11] si poteva valutare subito la (36) scrivendola nella forma:

$$\eta = \frac{1}{\pi\beta\kappa} [sh \beta z D] \Phi$$

avendo indicato con  $D$  l'operazione di derivata rispetto a  $z$ ,  $D = (d/dz)$ , ricordando che il prodotto simbolico  $zD$  non è invertibile e quindi l'operatore in questione non commutativo.

Conoscendo la valutazione dell'operatore  $e^{kD}$ , applicato ad una generica funzione  $\varphi(z)$ , che come è noto [11] è dato da:

$$e^{kD}\varphi(z) = \varphi(z+k)$$

si poteva giungere alla (37), qui ricavata direttamente.

Utilizzando la formula ora trovata, ricordando il valore di  $\beta$ , ed essendo  $z = gt^2/2\kappa$ , la (37) fornisce infine la soluzione esatta del problema in termini di funzioni note e tabulate; è:

$$\eta = \frac{1}{\delta} \left\{ C^2 \left[ \frac{gt^2}{4\kappa} \left( 1 + \frac{\delta}{2\kappa} \right) \right] - C^2 \left[ \frac{gt^2}{4\kappa} \left( 1 - \frac{\delta}{2\kappa} \right) \right] + S^2 \left[ \frac{gt^2}{4\kappa} \left( 1 + \frac{\delta}{2\kappa} \right) \right] - S^2 \left[ \frac{gt^2}{4\kappa} \left( 1 - \frac{\delta}{2\kappa} \right) \right] \right\} \quad (39)$$

In analogia con la (18) è facile trovare una espressione asintotica di  $\eta$ , valida per grandi valori di  $gt^2/4\kappa$  note le espressioni degli integrali di Fresnel valide per grandi valori della variabile:

$$\begin{cases} C(s) \simeq \frac{1}{2} + \frac{\sin s}{\sqrt{2\pi s}} \\ S(s) \simeq \frac{1}{2} - \frac{\cos s}{\sqrt{2\pi s}} \end{cases}$$

Introducendo le espressioni anzidette nella (39), eseguendo i calcoli e trascurando le quantità piccole come  $1/z$  rispetto a quelle dell'ordine di  $1/\sqrt{z}$ , si ottiene alla fine, lasciando sempre in evidenza  $gt^2/4\kappa$ :

$$\eta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \left( \frac{gt^2}{4\kappa} \cdot \frac{\delta}{2\kappa} \right)}{\delta \sqrt{\frac{gt^2}{4\kappa}}} \left( \cos \frac{gt^2}{4\kappa} + \sin \frac{gt^2}{4\kappa} \right) \quad (40)$$

Si vede ora che l'onda in un luogo assegnato tende a 0 per  $t \rightarrow \infty$  come  $1/t$ , essendo il numeratore sempre limitato, e ciò è perfettamente coerente dal punto di vista fisico, mentre la (40), passando al limite per  $\delta \rightarrow 0$  fornisce esattamente la (18) che invece si esalta e tende all' $\infty$  per  $t \rightarrow \infty$  proporzionalmente a  $t$  stesso.

4. - Il problema complementare a quello ora risolto, di determinare cioè l'onda risultante dall'applicazione di un impulso distribuito uniformemente da  $-\delta/2$  a  $\delta/2$  sulla superficie in quiete, si risolve immediatamente tenendo presente [3] che occorre ora sommare con un integrale di Fourier tante soluzioni semplici del tipo

$$\begin{cases} \varphi = \frac{e^{ky}}{g} \cos \sigma t \cos kx \\ \eta = -\frac{\sigma}{g} \sin \sigma t \cos kx \end{cases} \quad (41)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{g\delta \sqrt{g\kappa}} \left[ \sqrt{1 + \frac{\delta}{2\kappa}} \left\{ C \left[ \frac{gt^2}{4\kappa} \left( 1 + \frac{\delta}{2\kappa} \right) \right] \cos \left[ \frac{gt^2}{4\kappa} \left( 1 + \frac{\delta}{2\kappa} \right) \right] + S \left[ \frac{gt^2}{4\kappa} \left( 1 + \frac{\delta}{2\kappa} \right) \right] \sin \left[ \frac{gt^2}{4\kappa} \left( 1 + \frac{\delta}{2\kappa} \right) \right] \right\} - \sqrt{1 - \frac{\delta}{2\kappa}} \left\{ C \left[ \frac{gt^2}{4\kappa} \left( 1 - \frac{\delta}{2\kappa} \right) \right] \cos \left[ \frac{gt^2}{4\kappa} \left( 1 - \frac{\delta}{2\kappa} \right) \right] + S \left[ \frac{gt^2}{4\kappa} \left( 1 - \frac{\delta}{2\kappa} \right) \right] \sin \left[ \frac{gt^2}{4\kappa} \left( 1 - \frac{\delta}{2\kappa} \right) \right] \right\} \right] \quad (42)$$

il luogo delle (3) e (6). Il problema, per  $\delta \rightarrow 0$  è stato risolto approssimativamente da Cauchy e Poisson [1], [2], ed esattamente da Sneddon [5].

Per  $\delta$  finito la questione sarebbe assai più complicata, ma se si osserva che le (41) sono dedotte dalle (3) e (6) eseguendo sulle stesse l'operazione  $\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t}$ , essendo la densità del liquido, per la linearità dell'integrale di Fourier, dalla (39) si ottiene subito la soluzione per un impulso unitario senza eseguire nuovi complessi calcoli; è:

Quest'ultimo risultato non è di grande interesse, dato che il caso rientra, come già osservato dallo Stoker [6], che fornisce una soluzione approssimata per valori di  $\frac{gt^2}{4\kappa} \rightarrow \infty$ , nella categoria dei problemi con energia iniziale infinita.

5. - Il problema analogo a simmetria centrale, studiato anch'esso da Cauchy e Poisson [1], [2] e ripreso in tempi recenti da Hinze [7], riguarda la propagazione con moto irrotazionale, alla superficie di un liquido perfetto inizialmente in quiete, di una perturbazione generata da un cilindretto fluido di base infinitesima e altezza infinita (e quindi avente anche energia potenziale infinita) ma di volume unitario, posto nell'origine degli assi, mentre il pelo libero restante è dovunque orizzontale. Le onde sono studiate per profondità dell'acqua  $\rightarrow \infty$ .

Il potenziale  $\varphi$  di velocità sarà necessariamente una funzione armonica; si avrà cioè per l'irrotazionalità del moto e per la continuità,  $\Delta_2 \varphi = 0$  e trattandosi di un problema simmetrico rispetto al centro, al posto della (2) si scriverà:

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (43)$$

$r$  essendo il raggio vettore e  $y$  l'asse verticale contato sempre positivamente verso l'alto.

La soluzione particolare tipica che soddisfa la (43) e la condizione alla superficie (1), è (vedi ad esempio [3]):

$$\begin{cases} \varphi = g \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{ky} \cdot J_0(kr) \\ \eta = \cos \sigma t \cdot J_0(kr) \end{cases} \quad (44)$$

essendo  $J_0$  la funzione di Bessel di prima specie d'ordine 0.

La soluzione assegnata non soddisfa alle condizioni iniziali imposte dal problema, ma data la linearità delle equazioni è possibile, analogamente al caso piano, sommare infinite soluzioni del tipo (44) con un integrale di Fourier-Bessel per soddisfare alle condizioni richieste.

Ricorriamo al teorema di Fourier-Bessel che possiamo qui scrivere:

$$f(r) = \int_0^\infty [J_0(kr) k dk \int_0^\infty f(a) J_0(ka) da] \quad (45)$$

In corrispondenza alle condizioni iniziali  $\eta = f(r)$  per  $t = 0$  si ottiene

$$\begin{cases} \varphi = g \int_0^\infty \left[ \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{ky} J_0(kr) k dk \int_0^\infty f(a) J_0(ka) da \right] \\ \eta = \int_0^\infty [\cos \sigma t \cdot J_0(kr) k dk \int_0^\infty f(a) J_0(ka) da] \end{cases} \quad (46)$$

Se la sopraelevazione iniziale è concentrata nell'intorno dell'origine, dovendo essere

$$\int_0^\infty f(a) \cdot 2\pi da = 1$$

le (46) divengono:

$$\begin{cases} \varphi = \frac{g}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{ky} \cdot J_0(kr) k dk \\ \eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \cos \sigma t \cdot J_0(kr) k dk \end{cases}$$

Come già è stato fatto nel caso di moto piano, studiamo l'espressione di  $\eta$  che maggiormente interessa.

A questo scopo, nella 2ª delle (47), sviluppiamo in serie il coseno, e ricordiamo che dalla teoria delle funzioni di Bessel [12] risulta che

$$\int_0^\infty J_0(kr) k^n dk = \frac{n!}{r^{n+1}} P_n(0)$$

dove  $P_n$  è il polinomio di Legendre di ordine  $n$ . Tenendo ancora presente le relazioni

$$\begin{cases} P_{2m+1}(0) = 0 \\ P_{2m}(0) = (-1)^m \frac{1 \cdot 3 \dots (2m-1)}{2 \cdot 4 \dots 2m} \end{cases}$$

ne deriva immediatamente:

$$\eta = \frac{1}{2\pi r^2} \left[ \frac{1^2}{2!} \left( \frac{gt^2}{r} \right) - \frac{1^2 \cdot 3^2}{6!} \left( \frac{gt^2}{r} \right)^3 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{10!} \left( \frac{gt^2}{r} \right)^5 \dots \right] \quad (48)$$

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{[(2n+1)!!]^2}{[2(2n+1)]!} \left( \frac{gt^2}{r} \right)^{2n+1}$$

che compare a secondo membro della (48) non risulta di possibile espressione per mezzo di trascendenti note, tuttavia essa risolve il problema posto.

La perturbazione così studiata, è generata, come già si è detto, da una sopraelevazione iniziale che possiede energia infinita.

6. - Per passare al caso di un'intumescenza che per  $t = 0$  abbia volume finito ed energia finita, si dovrà ancora ricorrere alle (7), (8) e (9), ricordando però che in questa situazione è, per  $t = 0$ :

$$\begin{cases} f(r) = A & \text{per } r \leq \delta \\ f(r) = 0 & \text{per } r < \delta \end{cases}$$

essendo  $\delta$  il raggio del cilindretto di altezza finita  $A$  (avente quindi energia potenziale finita) che costituisce la perturbazione all'origine dei tempi.

Assumendo la detta perturbazione unitaria, sarà inoltre:

$$\int_0^\delta A \cdot 2\pi da = 1$$

cioè

$$A = \frac{1}{\pi\delta^2}$$

Dalla 2ª delle (46), l'espressione di  $\eta$  si riduce quindi a:

$$\eta = \frac{1}{\pi\delta^2} \int_0^\infty [\cos \sigma t \cdot J_0(kr) k dk \int_0^\delta J_0(ka) da] \quad (49)$$

La teoria delle funzioni di Bessel fornisce però la nota formula

$$\int a J_0(ka) da = \frac{a}{k} J_1(ka)$$

per cui la (49) diviene:

$$\eta = \frac{1}{\pi\delta} \int_0^\infty \cos \sigma t \cdot (kr) \cdot J_1(k\delta) dk \quad (50)$$

essendo  $J_1$  la funzione di Bessel di prima specie di ordine 1; passando al limite per  $\delta \rightarrow 0$  nella (50) si ritrova la 2ª delle (47).

Sviluppando in serie la  $J_1(k\delta)$  nella (21), si ottiene:

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \cos \sigma t \cdot J_0(kr) \cdot k \left[ 1 - \frac{1}{1!2!} \left( \frac{k\delta}{2} \right)^2 + \frac{1}{2!3!} \left( \frac{k\delta}{2} \right)^4 \dots \right] dk \quad (51)$$

ma il primo termine non è altro che la soluzione (48) che qui riportiamo indicandola con  $\eta_1$ :

$$\eta_1 = \frac{1}{2\pi r^2} \left( \frac{1^2}{2!} z - \frac{1^2 \cdot 3^2}{6!} z^3 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{10!} z^5 \dots \right)$$

avendo posto  $z = \frac{gt^2}{r}$ .

Questa si può scrivere anche:

$$\eta_1 = \frac{1}{2\pi r^2} F(z) \quad (52)$$

essendo  $F(z)$  uguale alla serie che compare nella (52) ed anche uguale a:

$$F(z) = \int_0^\infty r^2 \cos \sigma t \cdot J_0(kr) \cdot k dk \quad (53)$$

Se ora si deriva la  $F(z)$  data dalla precedente formula quattro volte rispetto a  $t$ , si osserva subito che si ottiene, a meno di un fattore moltiplicativo, il secondo termine  $\eta_2$  della serie (22), essendo notoriamente

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{2gt}{r} \frac{d}{dz}$$

Si ha in definitiva:

$$\eta_2 = \frac{1}{2\pi r^2} \left[ -\frac{1}{1!2!} \left( \frac{2\delta}{r} \right)^2 z^2 F^{IV} \right],$$

dove gli apici apposti a  $F$  indicano derivazione rispetto a  $z$ .

Proseguendo allo stesso modo si

ottiene la soluzione della (51) nella forma

$$2\pi r^2 \cdot \eta = F(z) - \frac{z^2}{1!2!} \left( \frac{2\delta}{r} \right)^2 F^{IV}(z) + \frac{z^4}{2!3!} \left( \frac{2\delta}{r} \right)^4 F^{(8)}(z) \dots \quad (54)$$

Ponendo ora

$$\Phi(z) = \int_0^z dz \int_0^z F(z) dz$$

e

$$\beta = \frac{2\delta}{r}$$

la (54) si trasforma facilmente nella:

$$2\pi r^2 \cdot \eta = \frac{1}{\beta z} \left[ \frac{\beta z}{0!1!} \Phi''(z) - \frac{\beta^3 z^3}{1!2!} \Phi^{(6)}(z) + \frac{\beta^5 z^5}{2!3!} \Phi^{(10)}(z) \dots \right]$$

$$A_{2n+1} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{[(2n+2k+1)!]^2 (2n+2k+1)!}{(4n+4k+2)!(2n-2k+1)!k!(k+1)!} \left( \frac{2\delta}{r} \right)^2 \quad (58)$$

Si può osservare dall'esame della (58) che la serie converge assolutamente e la sua convergenza è così rapida che bastano pochi termini per valutare con buona approssimazione la soluzione data almeno fino a che  $z$  non è molto grande; a questo scopo si riportano per esteso i primi coefficienti  $A$ :

$$A_1 = \frac{1}{2}$$

$$A_3 = -\left[ \frac{1}{80} + \frac{5}{1344} \left( \frac{2\delta}{r} \right)^2 \right]$$

$$A_5 = \frac{1}{16.128} + \frac{35}{658.944} \left( \frac{2\delta}{r} \right)^2 + \frac{21}{4.978.688} \left( \frac{2\delta}{r} \right)^4$$

7. - L'impiego del metodo della « fase stazionaria » di Lord Kelvin [4], consente di ottenere, ove si vogliano compiere più rapidi calcoli, due formule asintotiche per valori di  $z \rightarrow \infty$  e per valori di  $z \rightarrow 0$ .

I giapponesi Unoki e Nakano [8] lo hanno utilizzato per ottenere una soluzione asintotica per  $z \rightarrow \infty$  nel caso di un impulso distribuito uniformemente su di un'area circolare con centro nell'origine, met-

che indicando con  $D$  l'operatore di derivazione rispetto a  $z$ , ( $d/dz = D$ ) consente di scrivere la (55) nella forma compatta

$$2\pi r^2 \cdot \eta = \frac{1}{\beta z} [J_1(2\beta z D^2)] \Phi \quad (56)$$

Sfortunatamente, allo stato attuale delle cose, non pare semplice valutare l'operatore che compare nella (56), per cui occorre calcolare la soluzione per serie a partire dalla (54).

Eseguendo materialmente il calcolo, si giunge all'espressione che dà la soluzione per serie del nostro problema; è:

$$2\pi r^2 \cdot \eta = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} \left( \frac{gt^2}{r} \right)^{2n+1} \quad (57)$$

e i coefficienti  $A_{2n+1}$  sono dati da:

tendo in conto approssimativamente anche la viscosità.

Il lavoro, pur corretto dal punto di vista matematico, è di scarso interesse dal punto di vista fisico, dato che non sembra molto coerente partire con un'onda avente energia iniziale infinita (vedi [6]) e poi cercare di attenuarla introducendo la viscosità.

Riprendendo il metodo di Lord Kelvin, senza entrare nei dettagli della sua dimostrazione, peraltro notissima, si ricorda che l'autore citato riconduce la valutazione di un integrale definito del tipo

$$u = \int_a^b \varphi(x) e^{if(x)} dx \quad (59)$$

all'espressione:

$$u = \sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(\alpha_k)}{\sqrt{|f''(\alpha_k)|}} e^{i[f(\alpha_k) \pm \frac{\pi}{4}]}$$

dove le  $\alpha_k$  sono le radici della equazione

$$f'(x) = 0$$

comprese nell'intervallo  $a, b$ .

Nell'esponente della (60) va preso di volta in volta in segno più o il meno a seconda che  $f''(\alpha_k)$  è positiva o negativa.

Applichiamo il procedimento in-

dicato alla valutazione dell'integrale

$$\eta = \frac{1}{\pi\delta} \int_0^\infty \cos \sqrt{gk} t \cdot J_0(kr) \cdot J_1(k\delta) dk \quad (60)$$

nei due casi  $kr \rightarrow \infty$  e  $kr \rightarrow 0$ .

Per  $kr \rightarrow \infty$  si ha notoriamente:

$$J_0(kr) \simeq \sqrt{\frac{2}{kr\pi}} \cos \left( kr - \frac{\pi}{4} \right),$$

per cui la (50) diventa

$$\eta = \frac{1}{2\pi\delta} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{kr\pi}} J_1(k\delta) \cdot \left[ \cos \left( \sqrt{gk} t - kr + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left( \sqrt{gk} t + kr - \frac{\pi}{4} \right) \right] dk$$

Il secondo termine entro parentesi quadra non dà contributo all'integrale in quanto la derivata dell'argomento del coseno non ha radici positive; si ha:

$$f(k) = \sqrt{gk} t - kr + \frac{\pi}{4}$$

$$f'(k) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} t - r$$

L'equazione  $f'(k) = 0$  dà l'unica radice

$$k = \alpha = \frac{gt^2}{4r^2}$$

per cui la (50) diviene, applicando la (60) e prendendo la sola parte reale della formula:

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{\pi\delta r} J_1 \left( \frac{gt^2}{4r} \cdot \frac{\delta}{r} \right) \cos \frac{gt^2}{4r} \quad (61)$$

La condizione assegnata  $kr \rightarrow \infty$  equivale quindi a  $\frac{gt^2}{r} \rightarrow \infty$ .

Per  $kr \rightarrow 0$  si può invece usare l'artificio seguente; lo sviluppo in serie di  $J_0(kr)$ , arrestato ai termini del secondo ordine, vale:

$$J_0(kr) = 1 - \frac{k^2 r^2}{4} \dots$$

e questo coincide, con un'approssimazione limitata ai termini dello stesso ordine, con lo sviluppo del  $\cos kr/\sqrt{2}$ :

$$\cos \frac{kr}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{k^2 r^2}{4} \dots$$

Nella (50) sostituiamo quindi, al posto di  $J_0(kr)$ ,  $\cos kr/\sqrt{2}$ , ottenendo:

$$\eta \simeq \frac{1}{\pi\delta} \int_0^\infty \cos \sqrt{gk} t \cdot \cos \frac{kr}{\sqrt{2}} J_1(k\delta) dk$$

Si ha ancora:

$$\eta \simeq \frac{1}{2\pi\delta} \int_0^\infty J_1(k\delta) \left[ \cos \left( \sqrt{gk} t - \frac{kr}{\sqrt{2}} \right) + \cos \left( \sqrt{gk} t + \frac{kr}{\sqrt{2}} \right) \right] dk$$

e nella formula precedente non va considerato il secondo termine fra parentesi quadre per le ragioni già viste.

Procedendo come per il primo caso si ottiene:

$$f(k) = \sqrt{gk} t - \frac{kr}{\sqrt{2}}$$

$$f_1(k) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} t - \frac{r}{\sqrt{2}}$$

e la condizione  $f'(k) = 0$  fornisce

$$k = \alpha = \frac{gt^2}{2r^2}$$

per cui l'applicazione della (60) dà ora:

$$\eta \simeq \frac{2^{3/4}}{\sqrt{\pi\delta r}} \left( \frac{gt^2}{4r} \right)^{1/2} \cdot J_1 \left( \frac{gt^2}{4r} \cdot \frac{2\delta}{r} \right) \cos \left[ \sqrt{2} \left( \frac{gt^2}{4r} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \right) \right] \quad (62)$$

La condizione  $kr \rightarrow 0$  equivale alla  $\frac{gt^2}{r} \rightarrow 0$ .

Ritengo che la trattazione esposta sia completamente originale, e tanto la soluzione esatta del caso presente, quanto le formule asintotiche (61) e (62) siano state qui assegnate per la prima volta.

Non si insiste sull'ottenimento della soluzione per un impulso finito unitario distribuito unifor-

memente su di un cerchio con centro nell'origine, perchè, come già si è detto, è un problema ad energia iniziale infinita, e come si è visto nella prima parte di questo lavoro è sempre possibile ottenere il risultato applicando alla presente soluzione l'operatore  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t}$ , essendo  $\rho$  la densità del liquido.

Giannantonio Pezzoli

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] A. CAUCHY, *Mémoires sur la théorie des ondes*, « Mém. de l'Acad. roy. des Sciences » (1827).
- [2] S. D. POISSON, *Mémoire sur la théorie des ondes*, « Mém. de l'Acad. roy. des Sciences » (1816).
- [3] H. LAMB, *Hydrodynamics*, Cambridge, sixth edition.
- [4] W. THOMSON (Lord Kelvin), *On the waves produced by a single impulse in water of any depth, or in a dispersive medium*, Papers (1887).
- [5] I. N. SNEDDON, *Fourier transforms*, McGraw-Hill (1951).
- [6] J. J. STOKES, *Water waves*, Interscience publishers (1957).
- [7] J. O. HINZE, *Die Erzeugung von Ringwellen auf einer Flüssigkeitsoberfläche durch periodisch wirkende Druckkräfte*, « Zeitschrift für ang. Math. und. Mech. », Bd. 16 (1936).
- [8] S. UNOKI, M. NAKANO, *On the Cauchy-Poisson waves caused by the eruption of a submarine volcano*, « Oceanographical Magazine », n. 3 paper (1953).
- [9] W. FLÜGGE, *Four-place tables of transcendental functions*, Pergamon press, London (1954).
- [10] JAHNKE-EMDE-LÖSCH, *Tables of higher functions*, Sixth edition, McGraw-Hill (1960).
- [11] N. W. McLACHLAN, *Complex variable and operational calculus with technical applications*.
- [12] G. N. WATSON, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge, University Press (1952).

# Sui valori reali della resistenza al taglio delle terre

FELICE SANTAGATA, partendo dall'analisi delle denominazioni correntemente usate per la definizione delle caratteristiche meccaniche di un terreno, le inquadra nell'ambito delle prove geotecniche di laboratorio e dimostra come in effetti l'apporto alla resistenza al taglio dato dai termini comunemente detti coesione e angolo di attrito possono assumere valori variabili sino ad annullarsi per particolari condizioni di sperimentazione.

## Introduzione.

Le caratteristiche di resistenza al taglio delle terre chiamate «coesive» possono essere definite dalla legge di Coulomb

$$\tau = c + \sigma \operatorname{tg} \varphi \quad (1)$$

in cui si riconosce come il valore totale della resistenza sia somma di due differenti termini, il primo «c» caratteristico del materiale in assenza di sforzi perpendicolari alla superficie di taglio ( $\sigma = 0$ ), il secondo dipendente dall'angolo di attrito interno.

Per quanto riguarda il valore di «c» si sa che esso non è costante ma dipende ad es. dal contenuto d'acqua, dallo stato di sollecitazione preesistente nel terreno e dalle modalità sperimentali adottate.

Per quanto si riferisce invece alla componente di resistenza al taglio dovuta all'attrito risulterebbe che tale termine, a parità di sollecitazione, rimanga costante per lo stesso terreno quando non variano le modalità sperimentali e sempre che i valori delle sollecitazioni non siano superiori a  $15 \div 20 \text{ kg/cm}^2$ .

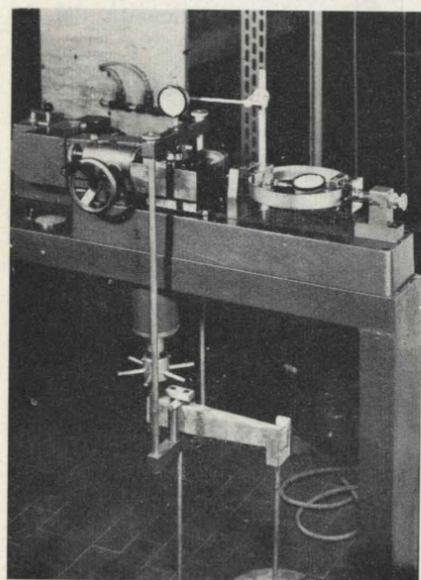


Fig. 1. - Apparecchiatura per la prova di taglio diretto.

Gli studi di verifica della stabilità di un'opera riferiti alle condizioni di resistenza al taglio possono, nel caso di terreni coerenti (impermeabili e semipermeabili), schematicamente essere suddivisi in due casi:

caso a) - Verifica delle condizioni di stabilità a breve scadenza;

caso b) - Verifica delle condizioni di stabilità a lunga scadenza.

Il primo caso è relativo generalmente a opere come fondazioni dirette o su pali, fondazioni di argini e dighe in terra. In questi casi le condizioni peggiori di stabilità si verificano inizialmente, cioè all'incirca durante la fase di costruzione; infatti il fattore tempo incide soltanto in senso positivo in quanto a causa dei fenomeni di consolidamento nel tempo si verifica un progressivo incremento della resistenza al taglio.

Per terreni sabbioso-ghiaiosi o comunque permeabili la pressione interstiziale si adatta immediatamente al nuovo stato di sollecitazione e pertanto le condizioni di stabilità immediate corrispondono a quelle di stabilità a lunga scadenza.

Quando si considerino opere come muri di sostegno, scavi e trincee le condizioni di stabilità, col passare del tempo, possono migliorare o peggiorare.

Generalmente peggiorano e pertanto occorre effettuare verifiche a lunga scadenza ma in certi casi (in presenza di argille normalmente consolidate e specialmente quelle di bassa plasticità) migliorano e allora è necessario eseguire ambedue le verifiche introducendo nei calcoli i risultati più gravosi.

## PROVE DI LABORATORIO.

La determinazione in laboratorio delle caratteristiche di resistenza al taglio necessarie per le verifiche

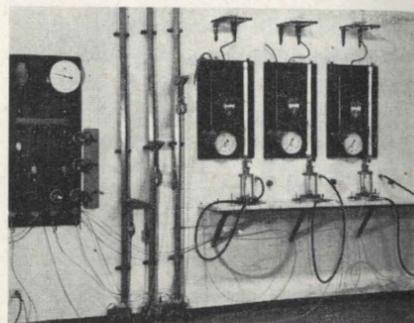


Fig. 2. - Apparecchiatura per la misura della pressione interstiziale (Triassiale).

di stabilità vengono eseguite con le seguenti prove:

a) Prova di taglio diretto (fig. 1);

b) Compressione triassiale (con e senza consolidamento, con e senza drenaggio) (fig. 2);

c) Prova di compressione con espansione laterale libera (ELL) (fig. 3).

Poichè l'obiettivo essenziale da tener presente è quello di ottenere in laboratorio la riproduzione più vicina possibile alle reali condi-

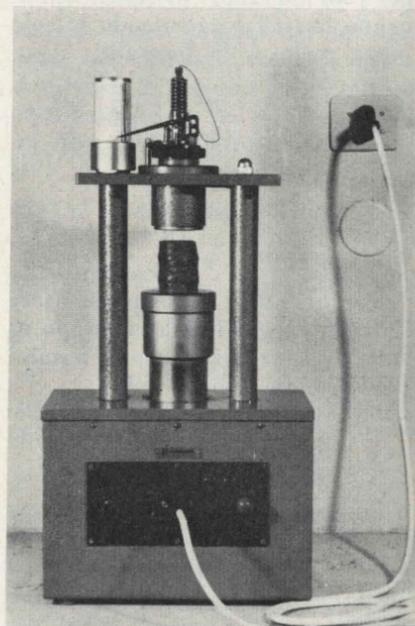


Fig. 3. - Apparecchiatura per la prova di compressione con espansione laterale libera (E.L.L.).

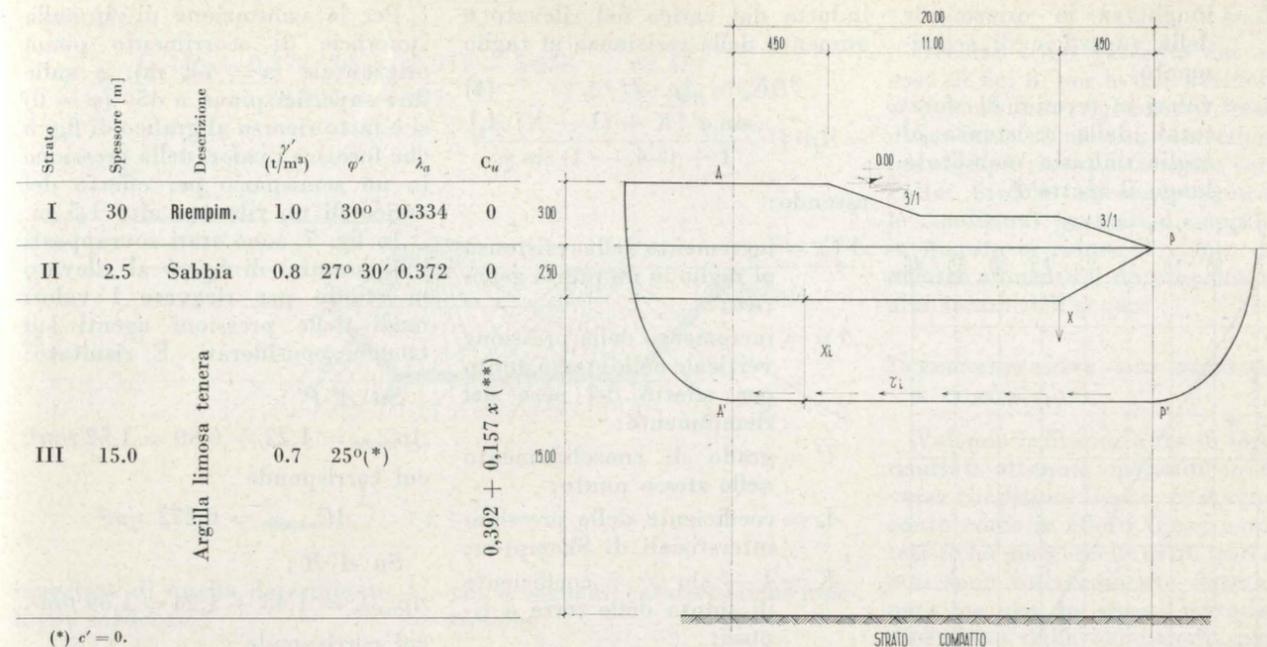


Fig. 4.

(\*)  $c' = 0$ .  
(\*\*)  $\varphi_u = 0$ .

zioni di lavoro e di sollecitazione del terreno in situ, ne deriva che la scelta opportuna del tipo di prova più idonea è riferita, caso per caso, all'esame del comportamento dell'opera reale.

Da quanto detto nel paragrafo precedente risulta pertanto chiara la necessità di dividere anche le prove geotecniche in due campi distinti:

I. Prove da effettuare per le opere che necessitano di verifica di stabilità a breve scadenza;

II. Prove da effettuare per le opere che necessitano di verifica di stabilità a lunga scadenza.

Del primo gruppo fanno parte quelle prove che forniscono i parametri di resistenza al taglio espressi in termini di sforzi totali e cioè la ELL e la Prova Triassiale senza consolidamento e senza drenaggio.

Nelle verifiche di stabilità a breve scadenza (caso I) si ha l'equivalenza di questi due tipi di prova; infatti essendo il valore finale di  $\tau_{\max}$  costante (pari a  $C_u$  intesa come coesione apparente espressa in termini di sforzi totali) e indipendente dal valore della  $\sigma_3$  (pressione laterale di contenimento), qualsiasi variazione delle sollecitazioni principali si traduce in un'eguale variazione della pressione interstiziale, senza però incrementare la resistenza al taglio.

In tali condizioni la prova ELL può considerarsi una particolare prova triassiale senza consolidamento e senza drenaggio avente  $\sigma_3 = 0$  (il cerchio di Mohr passa per l'origine degli assi).

Del secondo gruppo fanno parte quelle prove (taglio diretto e compressione triassiale con drenaggio) che forniscono i parametri di resistenza al taglio espressi in termini di sforzi effettivi.

## APPLICAZIONI PRATICHE.

### Esempio 1.

Si riporta come esempio il caso di un rilevato in acqua (fig. 4) poggiante su un terreno argilloso normalmente consolidato avente spessore di circa 15 m.

Il rilevato vero e proprio è steso in due successivi strati dello spessore di 1,5 m cadauno al di sopra di uno strato di riempimento avente spessore di 2,5 m.

Al di sotto si riscontra uno strato di limo argilloso compatto di spessore indefinito che, in virtù delle sue ottime caratteristiche meccaniche, non influenza in alcun modo la stabilità dell'opera in esame.

Sono anche note le caratteristiche geotecniche dei materiali di tutti gli strati interessati. In particolare sullo strato III sono state effettuate in situ prove coll'apparecchiatura VANE TEST (fig. 5)

che hanno fornito valori di  $C_u$  crescenti con la profondità secondo la

$$C_u = 0,157 x \quad (2)$$

in cui  $x$  è la profondità rispetto al fondale.

È stato determinato anche il coefficiente di consolidamento  $C_v$  risultato pari a  $34,6 \text{ cm}^2/\text{giorno}$ .

Nel caso in esame lo studio della stabilità dell'opera, date le caratteristiche al taglio del terreno di fondazione (aumento lineare con la profondità) e considerando le caratteristiche geometriche del problema (dimensioni dell'area caricata molto più grande dello strato tenero), è fatto considerando l'equilibrio di tutte le forze in gioco secondo l'asse orizzontale adottando superfici di scorrimento composte e aventi la parte centrale piana e orizzontale.

Pertanto il grado di sicurezza inteso come rapporto fra le forze resistenti e quelle disturbanti è dato dalla seguente espressione:

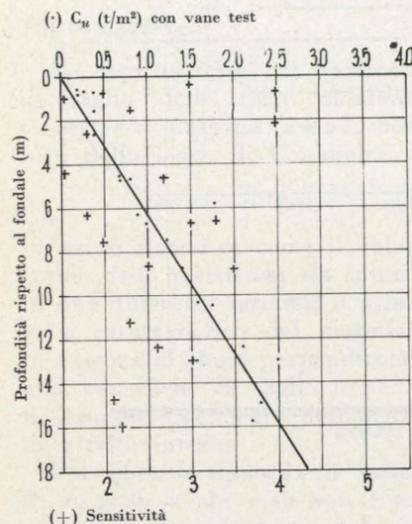
$$F = \frac{C_u L + \sum S_p}{\sum S_a} \quad (3)$$

dove:

$\sum S_p$  = risultante di tutte le spinte passive agenti su una sezione generica;

$\sum S_a$  = idem per le spinte attive;

$L$  = lunghezza in orizzontale della superficie di scorrimento;  
 $C_u$  = valori in termini di sforzi totali della resistenza al taglio unitario mobilitata lungo il tratto  $L$ .



indotta dal carico del rilevato e aumento della resistenza al taglio

$$\Delta C_u = \Delta p \cdot U \cdot \eta = \quad (4)$$

$$= \Delta p \cdot U \cdot \frac{\sin \varphi' [K + (1 - K) A_u]}{1 + (2A_u - 1) \sin \varphi'}$$

essendo:

$\Delta C_u$  = incremento della resistenza al taglio in un punto generico;

$\Delta p$  = incremento della pressione verticale nello stesso punto per effetto del peso del riempimento;

$U$  = grado di consolidamento nello stesso punto;

$A_u$  = coefficiente delle pressioni interstiziali di Skempton;

$K = 1 - \sin \varphi' =$  coefficiente di spinta delle terre a riposo;

$\varphi'$  = angolo di resistenza al taglio espresso in termini di sforzi effettivi.

Nel nostro caso è:

$$\varphi' = 25^\circ;$$

$$A_u = 1,0; \quad U = 60,4\% \quad (1);$$

per cui risulta:

$$\Delta C_u = \Delta p \cdot 0,604 \cdot 0,297 =$$

$$= 0,179 \Delta C_u.$$

(1) Poichè sperimentalmente il coefficiente di consolidamento è  $C_u = 34,6$  cm<sup>2</sup>/giorno e  $t = 120$  giorni (tempo intercorso tra il primo e il secondo gradino di riempimento) si ha:

$$T_u = \frac{34,6 \times 120}{40.000} = 0,1035$$

cui corrisponde  $U = 60,4\%$

Per la valutazione di  $\Delta p$  sulla superficie di scorrimento piana orizzontale ( $x = 4,8$  m), e sulle due superfici piane a  $45^\circ$  ( $\varphi = 0$ ) si è fatto ricorso al grafico di fig. 6 che fornisce i valori della pressione in un semispazio per effetto del carico di un rilevato alto 1,5 m.

In fig. 7, sono stati sovrapposti i diagrammi di fig. 6 al rilevato in studio per ricavare i valori medi delle pressioni agenti sui tronchi considerati. È risultato:

Su  $A'P'$ :

$$\Delta p_{\text{medio}} = 1,22 + 0,30 = 1,52 \text{ t/m}^2,$$

cui corrisponde

$$\Delta C_{u\text{medio}} = 0,272 \text{ t/m}^2$$

Su  $A'R$ :

$$\Delta p_{\text{medio}} = 1,45 + 1,24 = 1,69 \text{ t/m}^2,$$

cui corrisponde

$$\Delta C_{u\text{medio}} = 0,482 \text{ t/m}^2$$

Su  $P'S$ :

$$\Delta p_{\text{medio}} = 0,15 + 0,05 = 0,20 \text{ t/m}^2,$$

cui corrisponde

$$\Delta C_{u\text{medio}} = 0,036 \text{ t/m}^2.$$

L'espressione del coefficiente di sicurezza diventa:

$$F' = \frac{(C_u + \Delta C_u)L + \Sigma(S_p + \Delta S_p)}{(S_a - \Delta S_a)} \quad (5)$$

Essendo

$$\Delta S = 2h \cdot \Delta C_u$$

si ottiene

$$\Delta S_a = 2 \times 4,8 \times 0,482 = 4,627$$

$$\Delta S_p = 2 \times 7,3 \times 0,036 = 5,256$$

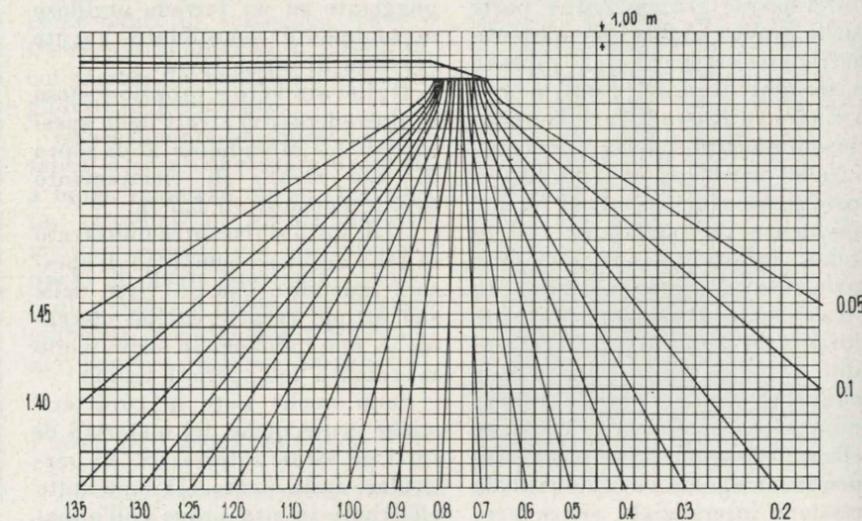


Fig. 6.

e pertanto

$$F' = \frac{(1,146 + 0,272) 20 + 28,971 + 5,256}{29,907 - 4,627} = \frac{62,587}{25,280} = 2,48$$

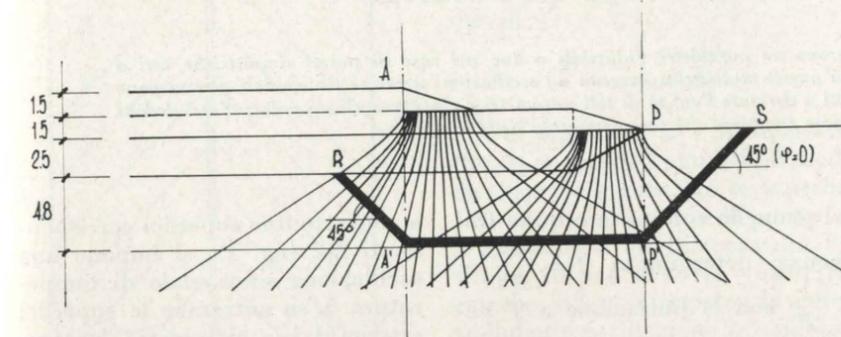


Fig. 7.

maggiore di quello determinato a breve scadenza.

Esempio 2.

Si debba effettuare uno scavo (fig. 8) nello stesso tipo di terreno dello strato III dell'esempio precedente.

A breve scadenza, introducendo le caratteristiche di resistenza al taglio in termini di sforzi totali ( $\gamma = 1,7$ ;  $C_u = 0,157x$ ;  $\varphi = 0$ ) si perviene al seguente valore della spinta attiva unitaria:

$$S_a = \frac{1}{2} \gamma h^2 \lambda_a - 2 C_u h =$$

$$= 0,5 \cdot 1,7 \cdot 5^2 \cdot 1 - 2 \cdot 0,392 \cdot 5 =$$

$$= 21,25 - 3,92 = 17,33 \text{ t/m}.$$

A lunga scadenza, introducendo le caratteristiche di resistenza al taglio in termini di sforzi effettivi ( $\gamma' = 0,7$ ;  $C' = 0$ ;  $\varphi' = 25^\circ$ ) si ottiene invece:

$$S'_a = \frac{1}{2} \gamma' h^2 \lambda_a = 0,5 \times 1,7 \times$$

$$\times 3^2 \times 0,405 + 0,5 \times 0,7 \cdot 2^2$$

$$= 0,405 + 0,5 \cdot 1 \cdot 2^2 = 5,665 \text{ t/m}.$$

Dal che risulta che nel tempo le condizioni di stabilità sono migliorate.

Esempio 3.

Si considera uno scavo avente le stesse caratteristiche geometriche della fig. 8 ma effettuato in un terreno preconsolidato (tipo Argilla del Villafanchiano - Zona Solbrito della Autostrada Torino-Piacenza)

con le seguenti caratteristiche meccaniche:

$$\gamma = 2,1 \quad \gamma' = 1,1$$

$$\varphi = 0 \quad \varphi' = 27^\circ$$

$$C_u = 12 \text{ t/m}^2 \quad C' = 0,3 \text{ t/m}^2$$

Analogamente, a breve scadenza:

$$S_a = \frac{1}{2} \gamma h^2 - 2 C_u \cdot h =$$

$$= 0,5 \times 2,1 \times 3^2 + 0,5 \times$$

$$\times 1,1 (5^2 - 3^2) - 2 \times 12 \times 5 = -$$

$$= -101,75 \text{ t/m}.$$

Essendo  $S_a < 0$  si considera agente la sola spinta dovuta all'acqua

$$S_a = \frac{1}{2} 1 \cdot 2^2 = 2 \text{ t/m}.$$

A lunga scadenza:

$$S'_a = \frac{1}{2} \gamma' h^2 \lambda_a - 2 C_u h =$$

$$= 0,5 \cdot [2,1 \cdot 3^2 + 1,1 (5^2 - 3^2)]$$

$$= 0,377 + 0,5 \cdot 1 \cdot 2^2 - 2 \cdot 5 \cdot 0,3 =$$

$$= 5,88 \text{ t/ml}.$$

Dal che risulta che nel tempo le condizioni di stabilità peggiorano. Tale peggioramento si accentua se si considera che le argille preconsolidate col passare del tempo perdono coesione per cui  $C'$  tende a 0 in un periodo variabile e dell'ordine di 30-50 anni.

Se pertanto l'opera in studio fosse destinata a durare più a lungo si rende necessaria anche la verifica a lunga scadenza con  $C' = 0$ . Nell'esempio considerato risulta  $S'_a = 8,88 \text{ t/ml}$ .

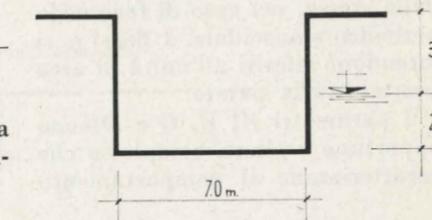


Fig. 8.

Ciò equivale a dire che tali grandezze non debbono considerarsi, come erroneamente si è spesso portati a dire, ben definite per un dato terreno ma solo che possono assumere valori variabili e caratteristici a seconda delle modalità sperimentali.

A proposito del valore della coesione si può pertanto parlare di valore apparente in quanto tale grandezza non ha nessun significato fisico.

Analogamente non è possibile parlare di angolo di attrito interno come caratteristica di un certo materiale. Variando le condizioni limite tale valore può annullarsi e pertanto sarebbe più giusto parlare di angolo di resistenza al taglio capace di dare un contributo solo in alcune condizioni.

Felice Santagata

# Parametri caratteristici di pareti composte

## Impostazione del problema

V. FERRO e A. SACCHI definiscono tre parametri, riducibili a due nel caso di pareti simmetriche, atti a caratterizzare il comportamento di una parete multistrati soggetta ad oscillazioni termiche sinusoidali. Propongono una serie di tre rilievi sperimentali atti a derivare l'entità di tali parametri e riportano alcuni valori d'essi dedotti analiticamente in attesa del completamento delle esperienze.

1) È noto [1] che per una generica parete, di grande superficie in relazione allo spessore, composta da più strati disposti perpendicolarmente alle linee di flusso e per escursioni limitate di temperatura, (10 ÷ 20 °C), si dà poter ritenere lineari le relazioni della propagazione termica in tale parete, vale l'espressione:

$$\begin{vmatrix} \theta_e \\ \varphi_e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ c_1 d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 b_2 \\ c_2 d_2 \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} a_n b_n \\ c_n d_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_u \\ \varphi_u \end{vmatrix} \quad (1)$$

fra la temperatura  $\theta_e$  ed il flusso  $\varphi_e$  entrante nella parete e la temperatura  $\theta_u$  ed il flusso  $\varphi_u$  uscente dalla stessa, nel caso di fenomeno periodico sinusoidale. I flussi  $\varphi$  si intendono riferiti all'unità di area frontale della parete.

I parametri  $A, B, C$  e  $D$  sono opportune costanti complesse che caratterizzano il comportamento

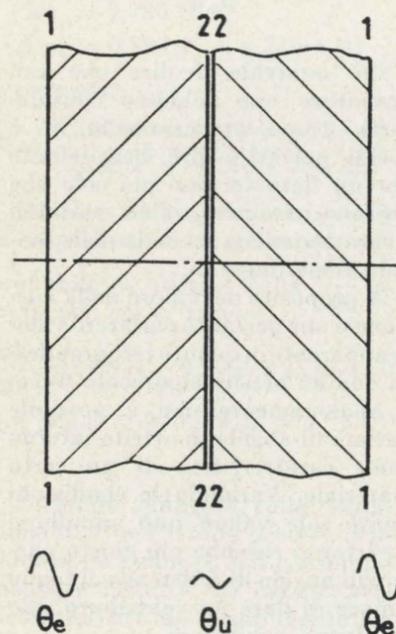


Fig. 1 - Disposizione sperimentale per la valutazione di A.

del pannello composto ad una frequenza determinata  $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$  con  $\omega$  pulsazione e  $T$  periodo della stessa oscillazione. I 4 parametri menzionati sono legati fra loro dalla espressione di unimodularità:

$$AD - BC = 1, \quad (2)$$

valida per qualsivoglia accoppiamento di sistemi lineari passivi; il numero di condizioni necessarie e sufficienti a definire il comportamento della parete in questione risulta pertanto 3, riducibile a 2 nel caso di pareti aventi un piano di simmetria e per le quali:

$$A = D. \quad (3)$$

Se ora immaginiamo di invertire la direzione del flusso termico, scambiando fra loro le superfici della parete, si avrà:

$$\begin{vmatrix} \theta_e^* \\ \varphi_e^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D & C \\ B & A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_u^* \\ \varphi_u^* \end{vmatrix} \quad (4)$$

avendo indicato con l'asterisco flussi e temperature nel caso di parete invertita.

2) Per una determinata frequenza  $f$  due pareti risulteranno equivalenti se coincideranno tre dei parametri  $A, B, C$  e  $D$ . Sperimentalmente è possibile rilevare, nel caso più generale, l'entità di tali grandezze eseguendo appropriate esperienze in numero comunque non inferiore a tre. Tenute presenti la difficoltà e la imprecisione derivanti dalle misure di flusso termico, particolarmente accentuate nel caso di fenomeni transitori, si prospetta la seguente successione di misure:

a) *misura di A* - Si dispongono due elementi di parete identici accostati in modo che risultino

a contatto due superfici corrispondenti 2-2 (fig. 1); si impone una oscillazione sinusoidale di temperatura  $\theta_e$  su entrambe le superfici esterne 1-1 e si registra la temperatura  $\theta_u$  sulle superfici interne accostate. Tale disposizione corrisponde alla condizione  $\varphi_u = 0$  e pertanto dalla (1) il rapporto  $\theta_e/\theta_u$  (numero complesso avente per modulo il coefficiente di riduzione delle oscillazioni e per fase lo sfasamento fra le stesse onde) risulta uguale ad  $A$ .

b) *misura di B* - Si mantiene la disposizione precedente e si introduce fra le superfici interne affacciate 2-2 ed a buon contatto termico con esse uno strato sottile di materiale buon conduttore del calore, avente capacità termica nota  $C_i$  e munito di opportuni intagli atti ad evitare gli eventi di conduzione dal centro verso la periferia (fig. 2). Si impone una oscillazione sinusoidale di am-

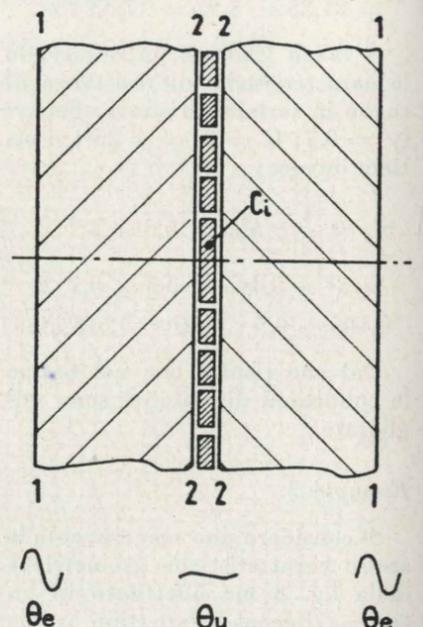


Fig. 2 - Disposizione sperimentale per la valutazione di B.

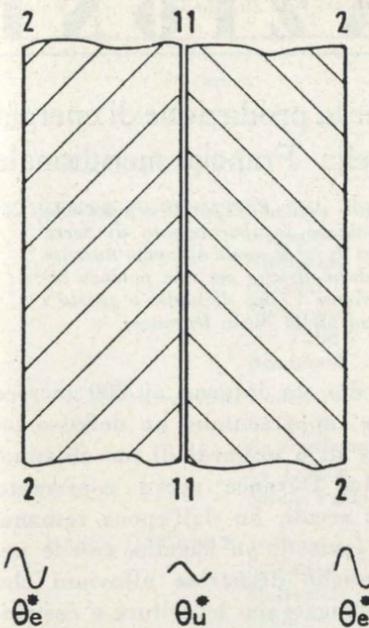


Fig. 3 - Disposizione sperimentale per la valutazione di D.

In tal caso risulta:  $\varphi_u = i\omega C_i \theta_u$ , con  $i$  unità immaginaria, e la prima delle (1) diventa:

$$\theta_e = A\theta_u + B i \omega C_i \theta_u$$

da cui:

$$B = \frac{\theta_e - A\theta_u}{i\omega C_i \theta_u} \quad (5)$$

c) *misura di D* - Si invertono (fig. 3) entrambi i pannelli in modo da disporre a contatto le superfici 1-1 e si procede come al punto A. L'oscillazione di temperatura  $\theta_e^*$  viene imposta sulle superfici esterne 2-2 e si registra la corrispondente oscillazione  $\theta_u^*$  sulle superfici accostate 1-1. Dalla prima delle 4, ricordando che  $\varphi_u^* = 0$  per la disposizione adottata, si deriva:

$$D = \frac{\theta_e^*}{\theta_u^*} \quad (6)$$

Il valore di  $C$  può ora essere derivato dalla (2).

3) In attesa di disporre di un adeguato numero di risultati sperimentali, ottenuti su pareti composte, in base al metodo indicato, si riportano nella tavola I i valori

dei parametri  $A, B, C, D$  per alcune delle suddette pareti di impiego più frequente, calcolati in base ai procedimenti validi per pareti multistrati [2].

4) Il problema della equivalenza di pareti può essere esaminato sotto molteplici aspetti.

Una equivalenza totale in ogni possibile utilizzazione richiede la uguaglianza di tre parametri caratteristici sia per una frequenza giornaliera, sia per ogni altra armonica. Nella impossibilità di una perfetta equivalenza, si comporteranno comunque meglio sotto il profilo della attenuazione delle perturbazioni termiche, pannelli presentanti i maggiori valori dei moduli di  $A, B, C$ , e  $D$ , mentre sotto l'aspetto degli argomenti occorre di volta in volta definire le condizioni ambientali interne e le caratteristiche degli impianti di riscaldamento e di raffreddamento.

Ai fini di una applicazione specifica, nella quale siano definite la disposizione della parete nei riguardi della direzione del flusso termico, la capacità termica del

TABELLA I - Valori dei parametri caratteristici di pannelli composti.

N. pannello	N. strato	Composizione	Caratteristiche strato						A		B		C		D	
			s [m]	k [W/(m °C)]	ρ [kg/m³]	c [J/(kg °C)]	q [W/(m² °C)]	H [W/(m² °C)]	mod	arg [rad]	mod [°C m²/W]	arg [rad]	mod [W/m² °C]	arg [rad]	mod	arg [rad]
1	1	Muratura	0,30	0,6	1800	850	2	1,50	9,17	2,9	1,11	2,10	75	3,7	9,17	2,9
	2	Calcestruzzo	0,10	1,4	2200	815										
2	2	Polistirolo	0,07	0,035	15	1215	0,473	0,44	49,5	2,45	4	0,32	640	3,02	51,7	0,89
	3	Calcestruzzo	0,06	1,4	2200	815										
3	1	Legno	0,01	0,11	550	2720										
	2	Lana di vetro	0,04	0,04	30	930	0,846	0,74	1,8	1	1,2	0,25	3,1	2	1,8	1
4	1	Cemento-amianto	0,005	0,41	1500	930										
	2	Polistirolo	0,06	0,035	15	1215	0,575	0,52	1,3	0,71	1,55	0,1	1,17	1,9	1,3	0,71
5	1	Lamiera in ferro	0,001	50	7560	495										
	2	Polistirolo	0,06	0,035	15	1215	0,583	0,53	1	0	0,008	0	0,03	1	1	0
	3	Lamiera in ferro	0,001	50	7560	495										

s = spessore dello strato. k = conduttività termica. ρ = massa specifica. c = calore specifico. q = conduttanza termica equivalente. H = trasmittanza termica per ogni unità di area frontale, calcolata assumendo come coefficiente liminare interno 8 W/(m² °C) e come coefficiente liminare esterno 23 W/(m² °C) - [DIN-4701 e Norme UEATC].

# INFORMAZIONI

locale interno e la resistenza fra quest'ultima e la superficie adiacente del pannello, si potrà considerare come parete equivalente quella presentante identica attenuazione termica. In particolare si può definire una impedenza termica equivalente di uscita  $z_u$ :

$$z_u = \frac{\theta_u}{\varphi_u} = R + \frac{1}{i\omega C_i} \quad (7)$$

dove  $R$  e  $C_i$  sono la resistenza e la capacità termica dell'ambiente interno.

Attribuendo ai vari simboli gli apici ' e '' caratterizzanti il pannello in esame e il pannello equivalente si avrà:

$$\theta_e' = A' \theta_u' + B' z_u' \theta_u' = (A' + B' z_u') \theta_u'$$

$$\theta_e'' = A'' \theta_u'' + B'' z_u'' \theta_u'' = (A'' + B'' z_u'') \theta_u''$$

L'equivalenza sotto il profilo indicato sarà quindi definita dalla:

$$A' + B' z_u' = A'' + B'' z_u'' \quad (8)$$

In essa i valori del secondo membro sono noti, mentre lo  $z_u'$  è caratteristico del tipo di struttura portante la costruzione e del contenuto che si ritiene in essa normale. La scelta dei pannelli di rivestimento andrà pertanto orientata verso quelli presentanti valori appropriati di  $A'$  e  $B'$  tali da verificare la (8).

Ai fini della definizione della equivalenza appare evidente dalla (8) l'influenza dovuta alla impedenza termica del locale e quindi alla capacità termica ambientale, che varia da tipo a tipo di costruzione.

V. Ferro e A. Sacchi

## BIBLIOGRAFIA

- [1] CARSLAW, H. S. - JAEGER, J. C. - *Conduction of Heat in Solids*, « Oxford Press », 1959, pag. 109.
- MATTAROLO L. - *Analoga elettrica e metoda dei quadripoli*, « La Termotecnica », vol. VI, 1952, pagg. 355-363.
- VODICKA, V. - *Conduction of fluctuating heat flow in a wall consisting of many layers*, « Applied Scientific Research », Section A, vol. 5, 1956, pagg. 108-114.
- COLUMBA, M. - LO GIUDICE, G. - *Risoluzione numerica di problemi di trasmissione di calore in regime periodica attraverso pareti composte*, Quaderno n. 6, « Istituto di Fisica Tecnica - Facoltà di Ingegneria », Palermo, 1964.
- [2] SACCHI, A. - *Sul calcolo della attenuazione termica di pareti in regime periodico*, « La Termotecnica », vol. XX, 1966, pagg. 60-65.

## La regolazione della Durance per la produzione di energia e la valorizzazione agricola della Francia meridionale

A. E. AMOUR descrive gli impianti costruiti dalla EdF per la regolazione del regime idrico della Durance. Opera-chiave lo sbarramento di Serre Ponçon che forma un'invaso di 1200 milioni di m<sup>3</sup> il quale alimenta durante 10 mesi dell'anno una catena di centrali idroelettriche per una potenza installata complessiva di oltre 1800 MW e durante i mesi di luglio e agosto i canali di irrigazione a scopi agricoli della Bassa Durance.

### Premessa

È ben noto il clima eccezionalmente secco di queste regioni mediterranee, sprovviste d'acqua, per la maggior parte del tempo, anche per i bisogni domestici, mentre torrenti e fiumi hanno normalmente una portata torrenziale in primavera. L'idea di base è dunque semplice: immagazzinare grandi quantità d'acqua al momento delle piene e distribuirla in estate dovunque essa è necessaria.

Opere romane come il Pont du Gard e molte altre avevano già per scopo di condurre l'acqua dove essa faceva difetto; da 400 anni per ragioni volta a volta politiche, finanziarie e tecniche, progetti successivi furono abbandonati, facendo di queste provincie delle terre parzialmente sottosviluppate nelle quali solo le colture della vite e dell'olivo potevano sussistere.

Il progetto di sviluppo del Sud-Est francese comprende due realizzazioni principali: la regolazione della Durance e la riconversione del basso Rodano-Languedoc.

### La regolazione della Durance

La Durance, che all'origine della nostra era geologica si gettava direttamente nel Mediterraneo è ora il principale affluente del Rodano e raccoglie alla sua foce i deflussi di un bacino imbrifero di 14.225 kmq. Il suo regime naturale è torrentizio: da una portata di piena di 1.800 mc/sec si scende ad una minima di 45 mc/sec, proprio quando maggiori sono le necessità dell'agricoltura. Dopo la confluenza col Verdon la portata

media sta intorno ai 200 mc/sec che rappresentano un deflusso totale di 6 miliardi di mc all'anno.

La Durance aveva conservato nei secoli, fin dall'epoca romana, la fama di un flagello, con le periodiche disastrose alluvioni che distruggevano le colture e costringevano gli abitanti a fuggire dalla pianura.

Fu appunto in seguito alle piene devastatrici del 1843 e del 1856 che i tecnici presero in considerazione l'idea di regolarizzare il corso del fiume con uno sbarramento ed effettuarono i primi sondaggi nella gola di Serre Ponçon.

Lo sbarramento di Serre Ponçon costituisce l'opera chiave della sistemazione della Durance. Esso serve a formare una riserva utile di oltre 1 miliardo di mc d'acqua ed ha permesso di intraprendere l'equipaggiamento energetico di tutta la Durance con lo sfruttamento di numerosi salti a valle di Serre Ponçon, fino all'Etang de Berre, praticamente senza soluzione di continuità (ved. tab. I).

Questi impianti metteranno a disposizione dell'industria francese una producibilità di oltre 6 miliardi di kWh all'anno.

In figura 1 (la planimetria) si vede l'insieme degli impianti che dovranno essere ultimati entro il 1970, di cui una parte è già in servizio, un'altra parte è in corso di costruzione ed i rimanenti sono in fase di definizione dei progetti esecutivi.

La Durance ha una pendenza cinque volte maggiore di quella del Reno ed una portata media di 194 mc/sec, dopo la confluenza del Verdon. Grazie a queste impor-

TABELLA I - Impianti idroelettrici sulla Durance.

Centrali	Caduta allestita in metri	Potenza installata in MW	Produzione annuale in GWh
SERRE PONÇON	125	325	700
MOYENNE DURANCE			
Curbans	83	156,6	410
Sisteron	114	180	385
Aubignasc	28	61,2	215
Oraison	82	165	720
Manosque	37	34,1	80
Ste Tulle 2	37	36	95
Beaumont	19	39,4	140
Centrali esistenti			
Ventavon	56	37	190
Le Poët	29	14	90
La Brillanne 2	28	25	140
Le Largue	10	9	55
Sainte Tulle	39	36	190
BASSE DURANCE			
Jouques	31	62	325
St Estève	65	140	675
Mallemort	43	90	420
Salon	45	90	325
St Chamas	72	142	560
Centrali esistenti			
Castillon	90	51	78
Chaudanne	68	21	62
VERDON			
Ste Croix	100	81,3	214
Quinson	45	35,2	100
Vinson	85	28,5	101
Cadarache	14	5,1	19
Centrali esistenti			
Castillon	90	51	78
Chaudanne	68	21	62
Totale		1864,4	6289

tanti caratteristiche, il suo bacino costituisce una importante riserva di energia potenziale, valutata a sei miliardi di kWh, dei quali solamente 900 milioni di kWh erano sfruttati nelle sette centrali esistenti fino a 10 anni fa sulla Durance e sul Verdon.

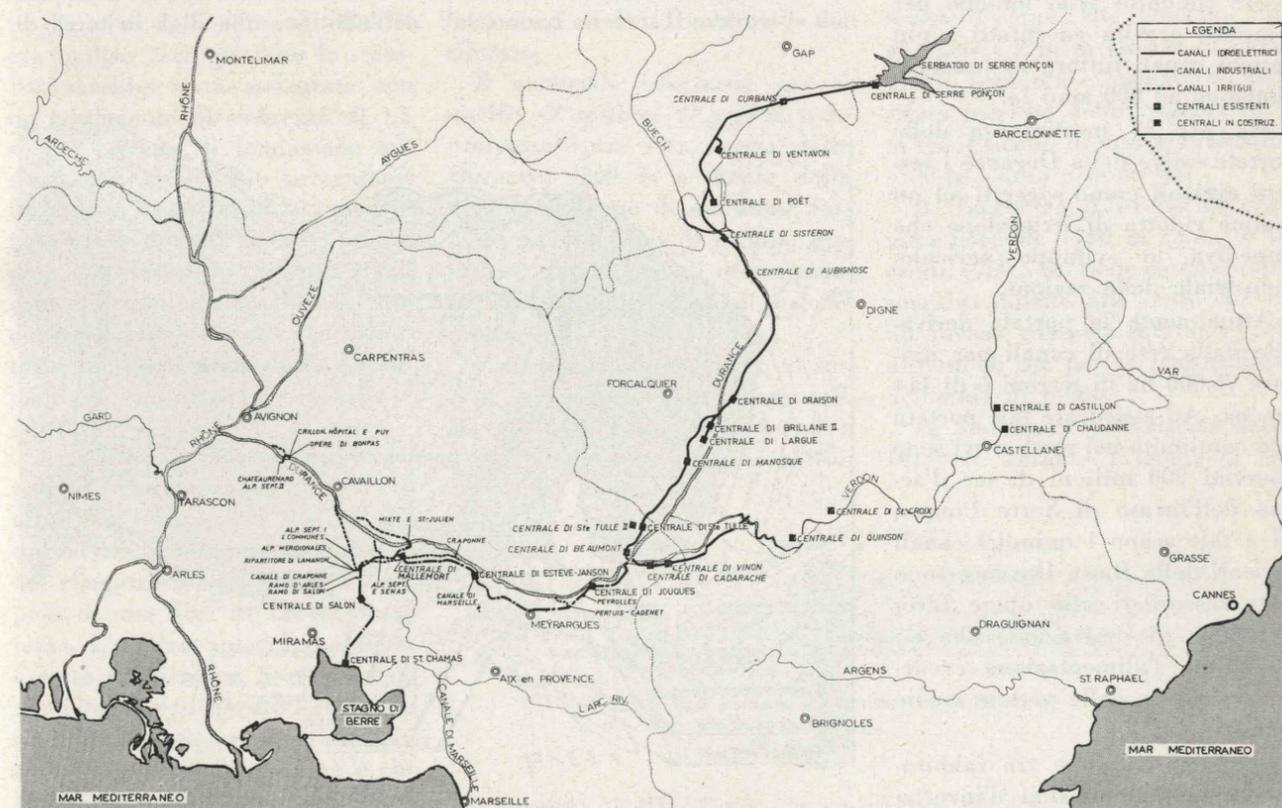
Per sfruttare tutto il potenziale energetico disponibile sono stati progettati ed in gran parte già costruiti gli impianti di cui alla tabella a lato.

La creazione dell'invaso di Serre Ponçon sul corso superiore della Durance e di cinque centrali sulla Bassa Durance aumenteranno la producibilità annua di 3 miliardi di kWh.

Attualmente con l'entrata in funzione delle centrali di Salon e St. Chamas la producibilità utilizzabile è di 4,5 miliardi di kWh e quando saranno costruiti tutti gli impianti progettati, la produzione di energia salirà ad oltre 6 miliardi di kWh, con una potenza totale installata di 1.850 MW.

Ma la più importante caratteri-

Fig. 1 - Planimetria Impianti Regolazione Durance.



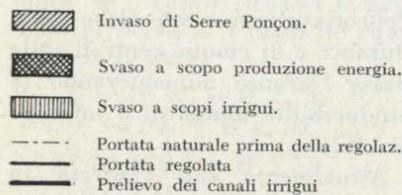
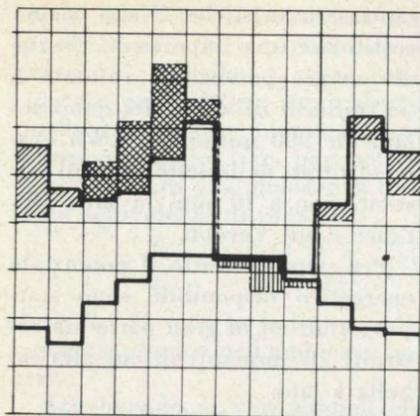


Fig. 2 - Diagramma portate mensili.

stica delle opere di regolazione della Durance è di provvedere oltre alla produzione di energia a soddisfare le esigenze irrigue dei terreni agricoli d'estate, quando la portata naturale scende a meno di 45 mc/sec.

Grazie alla forte pendenza della Durance, le sue acque potevano essere condotte assai lontano per semplice gravità ed infatti i più antichi canali tuttora in funzione risalgono ad 800 anni fa.

Ma per la insufficienza delle portate estive della Durance i terreni agricoli erano soggetti ad un regime ridotto di irrigazione che impediva lo sviluppo agricolo-industriale della regione.

Attualmente la portata derivabile dalla rete di canali per irrigare 75.000 ha di terreni è di 114 mc/sec. Ad assicurare tale portata con continuità nei mesi estivi sono riservati 200 milioni di mc d'acqua dell'invaso di Serre Ponçon ed a tale scopo i quindici canali agricoli della Bassa Durance sono stati raccordati alle opere idroelettriche di derivazione che ne assicurano l'alimentazione (vedere diagramma delle portate medie mensili - fig. 2).

La compensazione tra fabbisogni energetici, massimi d'inverno

e fabbisogni agricoli, massimi d'estate, consente la migliore utilizzazione del potenziale idrico che costituisce la premessa fondamentale per lo sviluppo della regione.

### Lo sbarramento di Serre Ponçon

La località di Serre Ponçon aveva attirato l'attenzione degli ingegneri fino dal 1856, quando furono effettuati i primi sondaggi per la costruzione di uno sbarramento.

Lo stretto passaggio della Durance tra la Serre Ponçon sulla riva destra e la Serre de Monge sulla riva sinistra presentava in effetti le condizioni più favorevoli per impiantare uno sbarramento, mentre l'allargamento della valle a monte poteva contenere una grande massa di acqua.

I primi tecnici che effettuarono le indagini preliminari ed anche coloro che successivamente nel 1912 e nel 1925 studiarono l'ubicazione dello sbarramento, si urtarono contro una difficoltà che a quell'epoca appariva tecnicamente insormontabile, vale a dire la grande profondità dello strato alluvionale nel letto del fiume. Se non si trovava il terreno buono, la

costruzione di un grande sbarramento, sia in muratura che in calcestruzzo non poteva essere presa in considerazione.

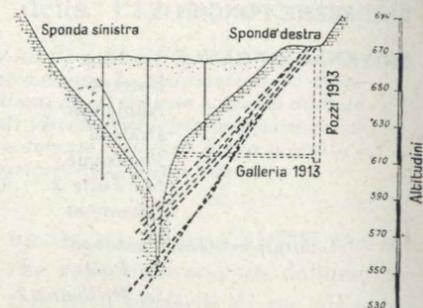


Fig. 3 - Profilo del terreno sull'asse della diga.

Gli ultimi sondaggi permisero di misurare la profondità dello strato alluvionale, più di 100 m verticalmente, come appare dalla sezione schematica di figura 3 del terreno dove risulta in particolare evidenza il solco alluvionale e la sua profondità.

Nel 1947 l'EdF riprendendo a sua volta gli studi preliminari del terreno, riuscì, grazie all'evoluzione della tecnica, a risolvere il problema mediante iniezioni impermeabilizzanti e grandi riporti di terre. La soluzione consistette nell'adottare una diga in terra di

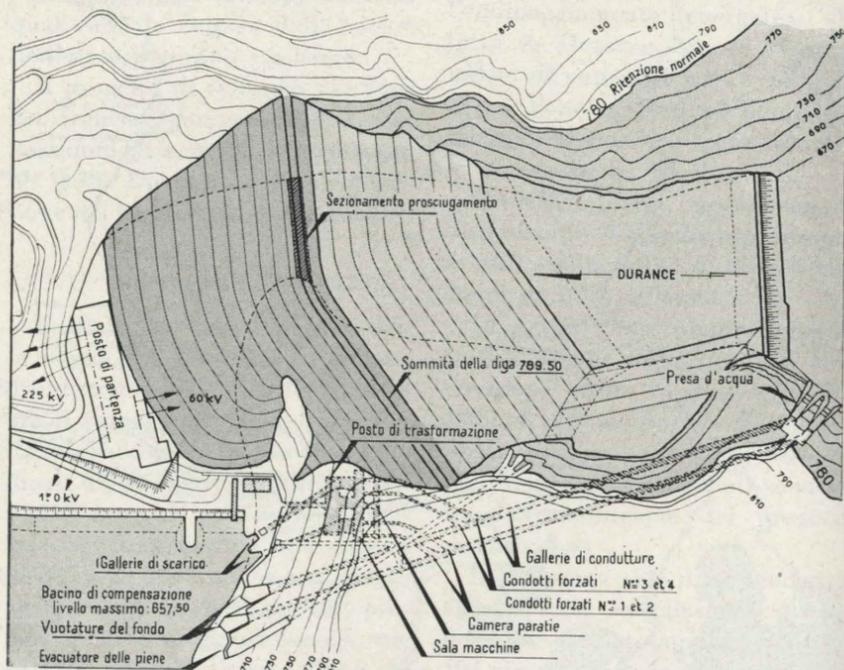


Fig. 4 - Planimetria sbarramento e opere accessorie.



Fig. 5a - Sezione longitudinale della diga.

grandi dimensioni, del tipo già realizzato con pieno successo in altri paesi. Le caratteristiche della diga sono rappresentate in dettaglio nei disegni 4 e 5. Con un'altezza di 120 m sul letto del fiume ed un volume di 14 milioni di mc la diga di Serre Ponçon costituisce un'opera di eccezionali dimensioni e caratteristiche. Essa è essenzialmente costituita da un nucleo centrale impermeabile la cui stabilità è assicurata sia a monte che a valle da un massiccio di ricarica con forte permeabilità.

La stabilità dell'opera è stata calcolata nell'ipotesi che il terreno di fondazione presentasse un angolo di attrito interno di 33°, mentre i materiali della Durance compattati accusano un coefficiente d'attrito dell'ordine di 42°. Si era inoltre verificato che la stabilità sarebbe stata assicurata con un coefficiente di sicurezza di 1,5 se nel terreno di fondazione esisteva uno strato che presentasse un angolo di attrito di 20°, mentre i materiali estratti avevano un angolo superiore a 30°. In base a tali considerazioni è stato deciso l'ancoraggio della diga alla roccia sottostante allo strato alluvionale, mediante iniezioni di cemento e argilla.

La qualità del materiale alluvionale di riempimento permetteva altresì di fare conto su limitati cedimenti, nonostante lo spessore del riempimento ed il sovrastante peso di una diga di 120 m di altezza. L'andamento dei cedimenti è stato verificato a Serre Ponçon mediante tre dispositivi installati ciascuno su una verticale che parte dal livello di fondazione e che comporta a distanze di 15 m un

sistema cosiddetto « cross arm » che permette di misurare gli abbassamenti di ciascuno dei livelli osservati. Sono stati inoltre installati caposalda topografici sul paramento della diga per controllare le deformazioni delle fondazioni ed i cedimenti del rilevato.

Il nucleo impermeabile della diga ha 35 m di spessore nel punto di contatto (661 m s.l.m.) con il diaframma, 55-60 m di spessore alla base del nucleo (670 m s.l.m.) e 7,40 m in cima (788 m).

La cadente piezometrica media attraverso il nucleo varia da 3,5 a quota 661 a meno di 2 a quota superiore a 670 m s.l.m., valori alquanto prudenziali per un materiale relativamente impermeabile, plastico e soggetto alle forti sollecitazioni derivanti dal peso del rilevato.

Il materiale necessario per il nucleo (2 milioni di mc) è stato prelevato sulla riva destra della Durance, 1500 m a monte della diga in un cono di deiezione formato da materiali di origine glaciale e di prodotti di disgregazione sia di marne che di calcari schistosi.

I materiali che formano il nucleo, compattati, hanno raggiunto una densità compresa fra 1,8 e 2,07. Il coefficiente di permeabilità

è quasi uniformemente di  $1 \times 10^{-7}$  cm/sec e l'angolo di attrito interno è compreso fra 28° e 30°.

Sotto al nucleo, il materiale alluvionale è stato consolidato e reso impermeabile mediante iniezioni di 35.000 tonn di una miscela di argilla e cemento iniettata a pressioni variabili da 60 ad 80 kg/cm<sup>2</sup>, mediante l'impiego di un tubo « à manchettes » ed un procedimento che permette di regolare a volontà l'iniezione, a seconda della profondità e della posizione rispetto alla diga.

Contemporaneamente sono state effettuate le iniezioni nella roccia sottostante in modo da cucire ad essa lo strato alluvionale compatto sul quale è fondata la diga. Il comportamento dello strato alluvionale compatto viene seguito mediante una serie di piezometri, dai quali si è potuto constatare che la portata di filtrazione è minima.

La diga forma un invaso di grande estensione, 20 km in lunghezza, con una superficie di 2.800 ha ed un invaso di 1.200 milioni di mc. Per proteggere la diga dalle onde create da questa grande massa d'acqua, che possono raggiungere i 2 m di altezza, il paramento a monte è formato da uno strato roccioso dello spessore di 1 m tra il livello di minima ritenuta (720 m s.l.m.) e la cresta.

Il franco tra il livello di ritenuta normale (780 m s.l.m.) e la cresta (789,5 m) tiene conto sia del sovrizzo dovuto alle onde che di un invaso complementare di 260 milioni di mc per la laminazione dell'onda di piena.

La deviazione provvisoria della Durance durante i lavori di co-

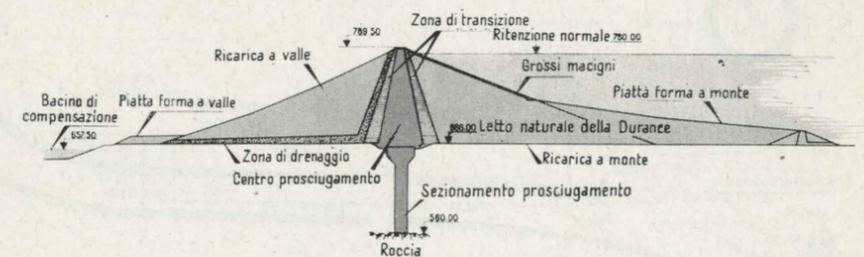


Fig. 5b - Sezione trasversale della diga.

struzione della diga è stata realizzata mediante due gallerie parallele, già costruite allo scopo di fungere successivamente da scarichi di fondo, capaci di assicurare il deflusso di 1.200 mc/sec e di contribuire a smaltire le piene (fig. 6).

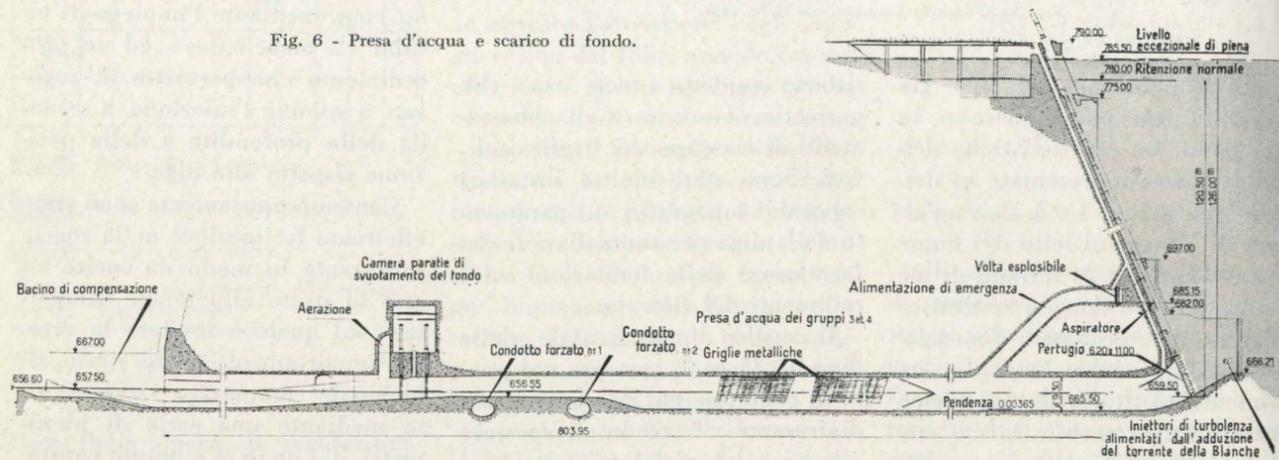
vello normale di ritenuta (780 m). Tenuto conto della durata delle portate di piena, si può prevedere di fare fronte a portate di piena di 5.500 mc/sec, mentre la portata di piena millenaria è valutata intorno ai 2.500 mc/sec.

La grande sezione della galleria

pareti è stato lasciato scoperto al naturale con un gradevole effetto di bassorilievo decorativo.

La centrale è equipaggiata con 4 turbine Francis ad asse verticale che utilizzano una portata di 75 mc/sec sotto un salto netto di 125 m ed azionano quattro gruppi ge-

Fig. 6 - Presa d'acqua e scarico di fondo.



Le prese delle gallerie dallo scarico di fondo sono a monte dell'avandiga e sono costituite da due luci rettangolari munite di paratoie piane di m 11 x 6,20, che devono essere manovrate sotto un battente massimo di 126 m. Oltre alle paratoie, le due gallerie sono munite di dispositivi di protezione contro l'inghiaiamento causato dalle alluvioni.

Lo smaltimento delle piene è assicurato dallo sfioratore di superficie (fig. 7) che ha una capacità di 2.200 mc/sec e dai due scarichi di fondo suddetti, con un deflusso totale di 3.400 mc/sec al li-

di presa ha permesso di evitare il pozzo d'oscillazione.

#### La centrale di Serre Ponçon

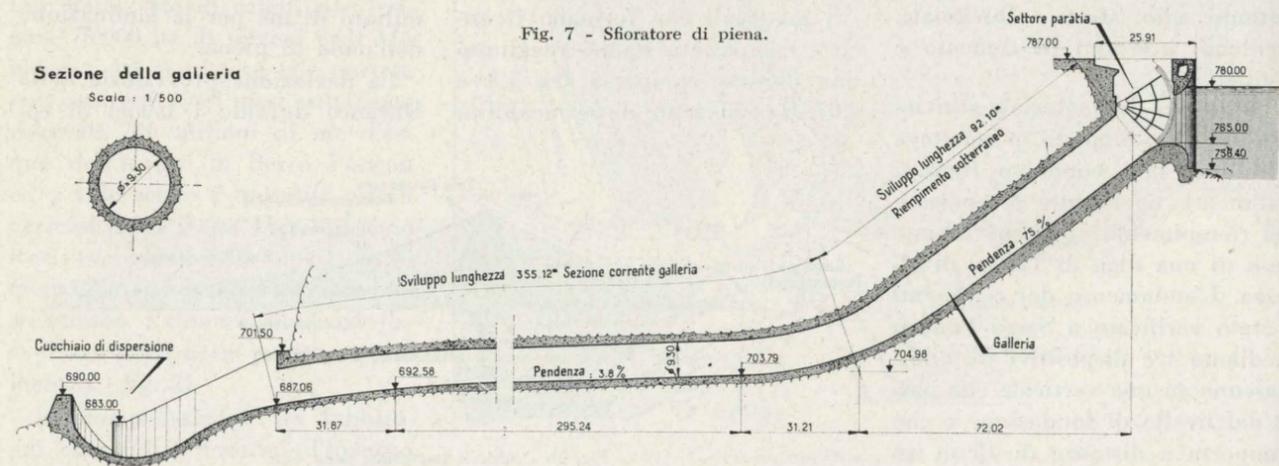
La centrale sotterranea scavata nella roccia si compone di tre sezioni distinte (fig. 8): la sala valvole, la sala macchine e la sala trasformatori. La separazione dei macchinari in cavità distinte giova alla sicurezza di esercizio ed ha permesso di ridurre i costi d'installazione, anche perché lo scavo della roccia non ha presentato difficoltà, data la buona qualità del calcare che in molti tratti delle

neratori da 90 MVA caduno, a 10,5 kV, che possono funzionare da compensatori sincroni per il rifasamento del carico sulla rete, su richiesta del ripartitore di Marsiglia.

L'energia prodotta viene elevata a 150 o a 220 kV a seconda della domanda dai trasformatori installati in caverna e di qui trasmessa alla stazione all'aperto situata sulla riva destra ai piedi della diga.

I canali di scarico delle quattro turbine confluiscono a valle in due gallerie che scaricano nel bacino di compenso di Espinasses attraverso un dissipatore di forma

Fig. 7 - Sfiatore di piena.



singolare e che possono essere chiuse da ture per svuotare le fosse delle turbine.

#### Dati di costo

La realizzazione delle opere di regolazione della Durance è stata decisa dalla legge del 5 gennaio 1955. I lavori iniziati prontamente a Serre Ponçon hanno permesso di iniziare l'invaso del lago alla fine del 1959, ed alla fine del 1960 il livello delle acque aveva raggiunto la quota 760 m s.l.m., con un invaso di 765 milioni di mc. I due primi gruppi della centrale di Serre Ponçon sono entrati in funzione nel settembre 1960, gli altri due nell'estate 1961.

Si prevede di ultimare tutto il complesso di opere idroelettriche ed irrigue sul corso della Durance entro l'anno 1970.

Le spese relative alla costruzione della diga di Serre Ponçon ed annessa centrale sono ammontate complessivamente a 50 miliardi di vecchi franchi, così ripartite:

Opere di ingegneria civile:	
costruzione diga . . . . .	23%
opere annesse e centrale	21%
Macchinario idro ed elettromeccanico . . . . .	13%
Ristabilimento delle comunicazioni . . . . .	27%
Acquisto di terreni . . . . .	13%
Indagini geologiche, prove, studi . . . . .	3%
<b>Totale</b>	<b>100%</b>

Da notare che la voce più importante di spesa è quella del ristabilimento delle comunicazioni che comprende la costruzione di 15 km di strada ferrata (con 2.500 m di gallerie ferroviarie e 3 viadotti) e di 60 km di strade (con 2.575 m di ponti tra i quali il ponte di Sevines in cemento precompresso lungo 925 m).

L'invaso di Serre Ponçon ha sommerso l'abitato di due comuni: Sevines e Ubaye dai quali hanno dovuto essere traslocate 1.400 persone.

#### Preso di Cadarache

Dal serbatoio di compenso di Espinasses, lo svaso regolato di Serre Ponçon va successivamente ad alimentare le centrali esistenti e via via alimenterà le nuove centrali ora in corso di costruzione sulla media Durance.

Alla confluenza del Verdon nella Durance, 120 km a valle di Serre Ponçon, dove questa raggiunge la sua massima portata, l'EdF ha costruito un altro sbarramento, delimitato sulla riva destra da una lunga diga a scogliera. Fondato sulla roccia che si trova a poco più di 10 m sotto al letto del fiume, lo sbarramento è munito di 5 paratoie a settore di m 25 di larghezza, alte m 6,5, delle quali due con ventola stramazante che serve a formare un invaso di 3,15 milioni di mc. In sponda sinistra si sviluppa la presa protetta da una griglia che è a sua volta preceduta da una catena di tubi d'acciaio chiusi sulla testata, tenuti in fila da una fune e galleggianti sull'acqua, allo scopo di trattenere i flottanti.

Per la pulizia della griglia sono installati due sgrigliatori semi-automatici a pettine, di cui uno provvisto di una benna.

La presa è stata studiata su modello ridotto in scala 1 : 50, a fondo mobile, per verificare gli effetti dell'insabbiamento, tenuto conto del trasporto solido della Durance. Il sistema sperimentato sul modello e realizzato a monte della presa comprende una torre cilindrica affondata che emerge dall'acqua (fig. 9). Su questa torre è aperta una luce conformata in maniera tale da creare, durante il

funzionamento dello scarico, un moto vorticoso tale da rimuovere la ghiaia dal fondo e convogliarla in una galleria che si apre nella torre e che va ad emergere al di là dello sbarramento attraverso una delle pile. Questa galleria è chiusa a valle da una paratoia a settore.

#### I Canali di alimentazione elettrica ed irrigua

Dalla presa di Cadarache ha inizio un canale lungo 85 km che segue la valle della Durance per 50 km fino al punto in cui sorgerà la centrale di Mallemort e quindi devia a sud per finire nell'Etang de Berre.

Lungo il suo percorso il canale va ad alimentare le centrali della Bassa Durance che sfruttano in cinque salti il dislivello totale di m 256.

Questo canale servirà ad alimentare le prese dei quindici canali agricoli, scaglionate dal Pont Mirabeau ad Avignone; i più importanti di questi canali sono collegati alle prese di Mallemort e Lamanon, dove possono prelevare fino ad 80 mc/sec d'estate.

Per portare a termine il complesso di queste opere sarà necessario costruire oltre alle nuove prese, 40 km di nuovi canali, con una portata variabile da 2 a 25 mc/sec e trasformare secondo i nuovi criteri 40 km di canali irrigui esistenti.

Oltre alla presa di Cadarache sulla Durance sono previste altre due prese: a Mallemort e a Bompas, formate essenzialmente da uno sbarramento mobile, che si prolunga in una diga e da una

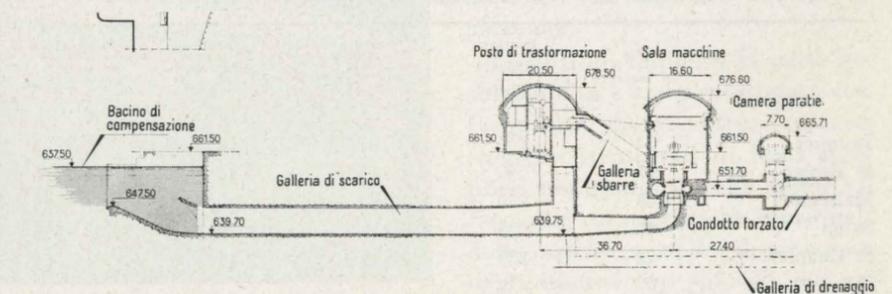


Fig. 8 - Centrale sotterranea Serre Ponçon.

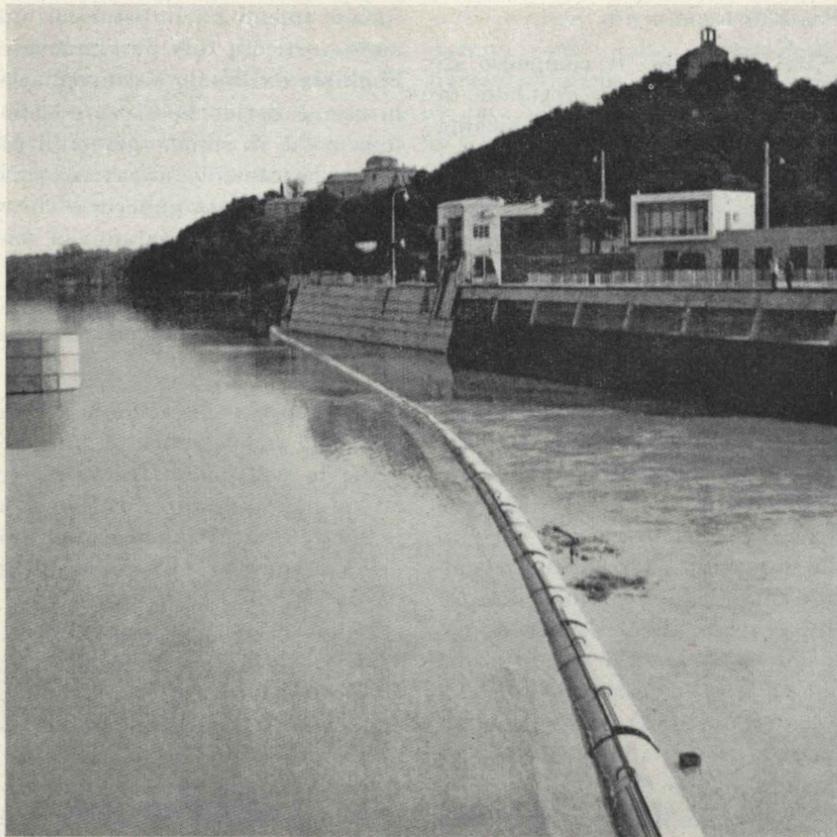


Fig. 9 - Protezione griglia presa Cadarache (foto presa dai partecipanti al viaggio in Provenza).

presa laterale. La presa ausiliaria di Mallemort permette di derivare dalla Durance una parte delle acque non captate a Cadarache, per compensare i prelievi agricoli e per integrare l'alimentazione delle centrali di Salon e St. Chamas.

La presa di Bompas è destinata ad alimentare i canali agricoli della zona di Avignone e di Château-renard, con una portata max di 20 mc/sec.

I canali che, su un percorso complessivo di 85 km (ved. tab. II) dalla presa di Cadarache vanno ad alimentare cinque centrali sono

stati ricavati su terreni accidentati di natura varia: limo alluvionale, sabbie argillose, marne, calcari, ecc. Questa eterogeneità di materiali ha imposto particolari accorgimenti costruttivi e la costruzione di lunghi argini di terra compattata, formati con materiali di riporto prelevati da altre zone.

Le scarpe verso acqua dei rilevati sono di 2/1, ad eccezione del canale di Jouques dove sono di 3/2 (fig. 10). In certi casi la stabilità del terreno è assicurata da adeguati riporti a gradoni di materiali di buona qualità.

TABELLA II - Salti utilizzati sulla Bassa Durance.

	Salto in metri	Portata utilizzata m <sup>3</sup> /sec.	Portata media m <sup>3</sup> /sec.	Potenza installata kW	Produzione annuale GWh
Jouques	31	275	167,5	62 000	325
St Estève	65	265	163	140 000	675
Mallemort	43	250	150	90 000	420
Salon	45	235	113	90 000	325
St Chamas	72	235	113	140 000	560
Totale	256			522 000	2305

Tutti i canali hanno le pareti rivestite con lastre di calcestruzzo di 20 cm di spessore quando l'inclinazione laterale è di 3/2 e di 15 cm dove l'inclinazione è di 2/1 e sul fondo. In certe zone dove il canale attraversa una falda freatica o terreni impermeabili, il rivestimento previsto è permeabile. Il calcestruzzo viene gettato sul posto. I giunti interrompono lo strato del rivestimento in lastre di 30 mq circa.

Saranno così rivestiti in totale 4,5 kmq di superficie mediante 700.000 mc di calcestruzzo.

La pendenza del fondo è di 15 a 20 cm per km, mentre la sommità degli argini è orizzontale.

La sezione bagnata del canale è di circa 180 mq a cui corrisponde, a piena portata una velocità di circa 1,4 m/s. La massima intumescenza nel canale in caso di brusco arresto della portata è di circa 1 m.

Gli sfioratori a monte dell'imbocco delle condotte forzate che alimentano le centrali sono più alti della quota che il pelo libero assume durante il funzionamento

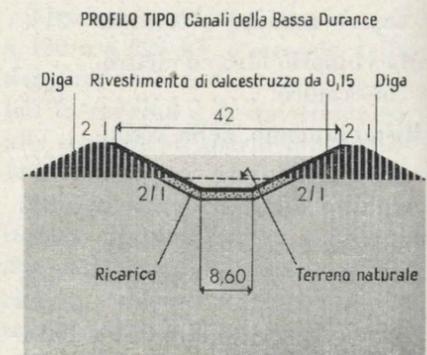


Fig. 10 - Profilo tipo dei canali di alimentazione centrali.

a piena portata, al fine di guadagnare un poco di salto con portate inferiori.

Il canale non può essere messo fuori servizio per non interrompere l'alimentazione dei canali irrigui.

#### Le centrali della Bassa Durance

Il canale industriale che parte da Cadarache alimenta prima la centrale di Jouques e poi quella

TABELLA III - Caratteristiche del materiale.

Centrale	N° di gruppi	Condotte forzate		Turbine Tipo	Velocità in giri/min	Alternatori		Tensione in partenza kV
		Ø metri	Lunghezza in metri			Potenza kVA	Tensione kV	
Jouques	3	6	75	Kaplan	187,5	26 000	10,3	150
St Estève	3	5,5	235	Francis	187,5	50 000	5,65	150 e 225
St Estève	1	2,5	170	»	333	6 000	5,65	63
Mallemort	3	5,5	200	»	167	37 000	5,65	225
Salon	3	5,5	160	»	167	34 000	5,65	225 e 63
St Chamas	3	5 e 5,5	360	»	200	55 000	5,65	225 e 63

di St. Estève, per scaricare attualmente nella Durance in attesa che sia ultimato l'impianto di Mallemort ora in costruzione.

Le due ultime centrali, Salon e St. Chamas, sono alimentate dalla presa di Mallemort, già in funzione.

Le condizioni topografiche non hanno permesso di impiantare le cinque centrali in modo da ottenere il medesimo salto utile ed equipaggiarle tutte con gruppi identici (ved. tab. III) e solamente la sistemazione generale dell'impianto è eguale per le cinque centrali. Le prime tre sono progettate per utilizzare una portata di 250 mc/sec e le due ultime per una portata di 275 mc/sec; ma una

parte del macchinario può funzionare con portate maggiori.

Ogni gruppo idroelettrico, costituito da turbina, alternatore, trasformatore, forma un blocco indipendente alimentato da una condotta forzata.

La derivazione dal canale che alimenta la centrale di Jouques è nella parte terminale in galleria in pressione, che sbocca nel pozzo piezometrico sfiorante, nel quale sono installate le paratoie che servono tre condotte forzate sotterranee in calcestruzzo.

Le condotte forzate degli altri impianti (ved. fig. 11) sono invece metalliche all'aperto.

A St. Chamas i pozzi piezometrici sono stati costruiti in poche settimane con elementi cilindrici in calcestruzzo, che formano tre

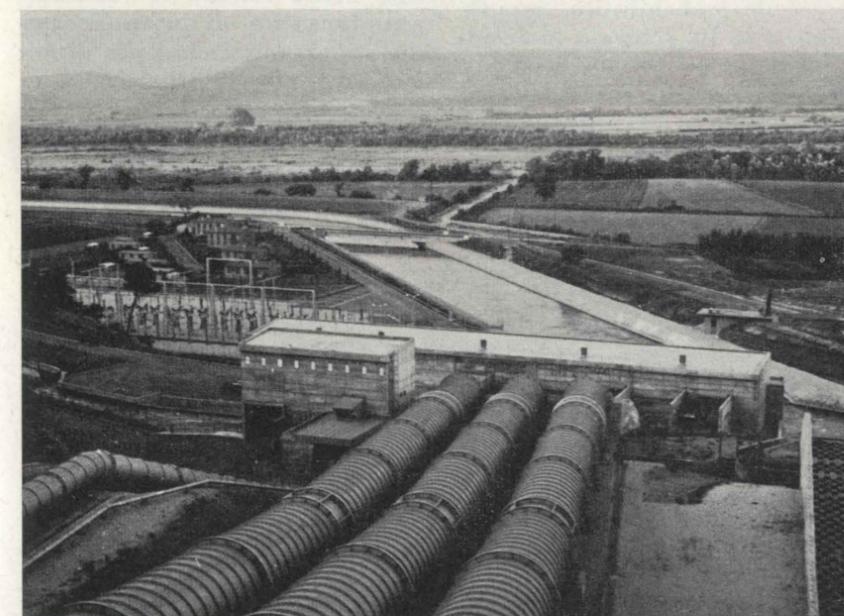


Fig. 11 - Condotte forzate di St. Estève (foto presa dai partecipanti al viaggio in Provenza).

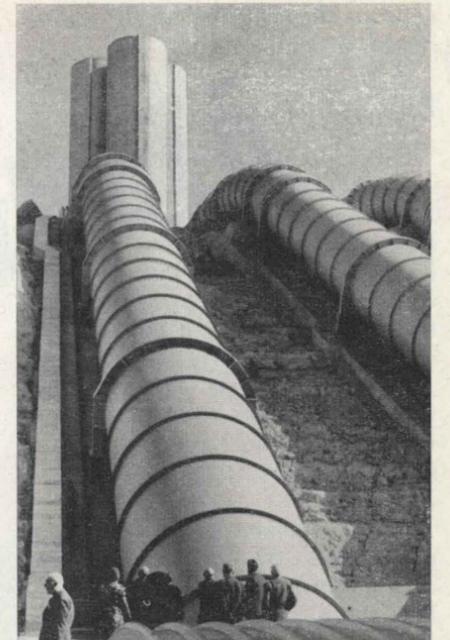


Fig. 12 - Pozzi piezometrici di St. Chamas (foto presa dai partecipanti al viaggio in Provenza).

torri affiancate che danno una nota caratteristica nel paesaggio tipico della Bassa Durance.

Le altre quattro centrali sono equipaggiate con turbine Francis a cassa metallica e ponte scorrevole interno (fig. 12). Le sovrastrutture sono in carpenteria metallica. La sala quadri è a livello delle turbine a valle di queste; i trasformatori sono installati a monte a livello del piano di montaggio.

I servizi ausiliari delle centrali sono alimentati dalla rete locale di distribuzione a media tensione.

Quando sarà ultimata la centrale di Mallemort, l'esercizio delle cinque centrali sarà telecomandato da un posto centralizzato a Mallemort, mentre la sorveglianza di ciascun impianto sarà affidata ad una squadra ridotta di personale.

In tutti gli impianti la parte architettonica è stata valorizzata con l'ampiezza delle costruzioni, con elementi strutturali di linea semplice, ma grandiosa, che danno rilievo alle caratteristiche funzionali delle opere, e nella decorazione degli interni con spiccati ma armonizzanti contrasti di tinte e con

accorta disposizione degli apparecchi di illuminazione.

#### Valorizzazione agricola

Gli impianti « multipurpose » si contano ormai in gran numero in molti paesi ed in particolare nell'America del Nord, dove la TYA ha dimostrato per prima come la costruzione di impianti idroelettrici può giovare anche all'agricoltura ed alla navigazione.

In Francia fin dal 1921 la Compagnie Nationale du Rhône ha favorito con i suoi impianti lo sviluppo dell'agricoltura e della navigazione.

Ma nel bacino della Durance la produzione di energia, benché considerevolmente attivo, non è l'elemento più importante. Nel 1970 quando gli impianti saranno ultimati la produzione idroelettrica della Durance non rappresenterà che il 3 a 4% della produzione totale francese. Di importanza capitale ai fini dello sviluppo della regione sono i vantaggi che derivano all'agricoltura dalla regolazione delle acque della Durance e del Verdon, che potranno così soddisfare convenientemente i fabbisogni dell'irrigazione, senza più temere le distruzioni periodiche, prima causate dalle piene.

Questa ricca disponibilità di acque che favorirà lo sviluppo e l'estensione dell'agricoltura avrà un'influenza determinante sulle condizioni di vita della popolazione e sul ripopolamento di quelle valli.

La creazione di grandi centrali idroelettriche non ha in genere grandi ripercussioni sull'economia locale, perché non altera la struttura demografica ed economica della regione. La prosperità dell'agricoltura per contro può modificare tale struttura assai rapidamente con benefici effetti che non tarderanno ad essere manifesti nel bacino della Durance.

Nel 1955 le acque della Durance irrigavano mediante 15 canali, ma non sempre a sufficienza, 75.000 ha di terreni (ved. tab. IV). Quando

TABELLA IV - Canali agricoli derivati dalla Bassa Durance.

Canale di	Epoca di costruzione	Portata m <sup>3</sup> /sec
Peyrolles	15° secolo	2,850
Pertuis-Cadenet	15° secolo	4,800
Marseille	19° secolo	15,200
Craponne	16° secolo	23,400
Mixte	18° secolo	12,300
Alpines meridionali	18° secolo	16,200
Alpines settentrionali 1	19° secolo	12,590
Senas	14° secolo	1,750
Saint-Julien	12° secolo	7,250
Quatre communes	14° secolo	2,200
Crillon	18° secolo	4,350
Chateaurenard	18° secolo	1,600
Alpines settentrionali 2	19° secolo	6,750
Hopital	13° secolo	2,150
Puy	19° secolo	1,070

d'estate la portata discendeva a meno della metà del fabbisogno, si imponevano per tutti delle restrizioni che danneggiavano le colture, quando addirittura non le mettevano in pericolo (5% in media della produzione agricola totale andava persa ogni anno).

Gli studi svolti dopo la guerra dall'EdF hanno stabilito che per soddisfare alle necessità dell'agricoltura occorreva anzitutto costituire una riserva di acque abbastanza grande da assicurare la regolarizzazione delle derivazioni dalla Durance, almeno, secondo un calcolo probabilistico, durante 8 annate su 10. L'invaso occorrente a tale scopo è stato fissato in 200 milioni di mc. Parallelamente è stato fissato in 100 milioni di mc il volume della riserva necessaria agli impianti di irrigazione in progetto a partire dalla confluenza del Verdon a Cadarache.

In tale studio è stata anche stabilita equamente la partecipazione dell'agricoltura alla costruzione dello sbarramento di Serre Ponçon: 5 miliardi di vecchi franchi per una utilizzazione massima annua di 200 milioni di mc, pari a 25 fr/mc.

Grazie all'invaso di Serre Ponçon le regioni agricole servite pos-

sono prevedere di introdurre l'irrigazione a condizioni economicamente convenienti su una superficie totale di 22.000 ha di terreni nella Bassa Durance e di 5.000 ha di terreni nella Media Durance, e di ricavarne un aumento di valore della produzione agricola rispettivamente del 25% e del 10 a 15%.

La trasformazione delle nuove terre da irrigare richiederà altri considerevoli rivestimenti ed una modifica della struttura fondiaria da graduare nel tempo. D'altra parte i vantaggi sono tanto evidenti che ormai più nessuno dubita della convenienza delle opere già attuate e di quelle da realizzare.

\*\*\*

Perché allora le opere di regolazione non sono state intraprese prima? Le esitazioni del passato si devono attribuire in parte ad un certo spirito di conservazione caratteristico delle popolazioni agricole, che temono le imprese di nuovo genere e non osano arrischiare i risparmi in investimenti di tale entità.

Ma finalmente superati i dubbi, quello che conta è il futuro: una maggiore produttività delle terre irrigate a dovere ed un maggiore profitto alla fatica di chi le coltiva, con la possibilità di industrializzare le lavorazioni dei prodotti della terra e sviluppare nuove attività per dare lavoro alle nuove leve. Senza contare la valorizzazione turistica di Serre Ponçon che sta organizzandosi per diventare un centro di soggiorno e di ricreazione, nella salubre aria dei monti e sullo specchio azzurro delle acque di Serre Ponçon.

A. E. Amour

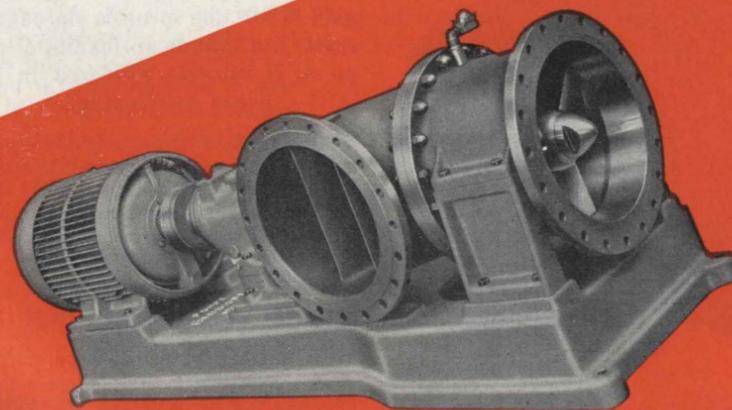
#### BIBLIOGRAFIA

- [1] *L'équipement de la Durance et l'agriculture de la Région*. Revue Française de l'Energie, maggio 1955.
- [2] *Aménagement de la Durance*. Le Barrage de Serre Ponçon. Travaux, agosto 1958.
- [3] *Aménagement de la Durance*. Le Barrage de Serre Ponçon. Travaux, maggio 1961.

POMPE PER L'INDUSTRIA CHIMICA, AD ASSE ORIZZONTALE, VERTICALE, IMMERSE ED ESTERNE, IN ACCIAIO INOX E LEGHE SPECIALI

# POMPE GABBIONETA S. P. A.

- POMPE di PROCESSO
- POMPE per DOWTHERM a 300 - 400° C.
- POMPE per AMMONIACA e GAS LIQUIDI a 500 - 900° C., sali fusi, ecc.
- POMPE verticali immerse per METALLI fusi
- POMPE per CELLULOSA e LIQUIDI DENSI
- POMPE per LISCIVIO BISOLFITICO
- POMPE per MERCURIO
- POMPE per Alimentazione Caldaie e per circolazione di acqua SURRISCALDATA
- POMPE ad ELICA per portate fino a 1000 litri al secondo
- POMPE per alte pressioni, per alimentare serbatoi elevati e per acquedotti
- AGITATORI - MESCOLATORI
- MOLINI COLLOIDALI
- IMPIANTI COMPLETI - NOLEGGI



Direttore responsabile: **AUGUSTO CAVALLARI-MURAT**

Autorizzazione Tribunale di Torino, n. 41 del 19 Giugno 1948

STAMPERIA ARTISTICA NAZIONALE - TORINO