BIBLIOTECA DELLA REGIA UNIVERSITÀ DI TORINO

R VII. 321

Q. VIII. 321.

LA

TACHÉOMÉTRIE

OU

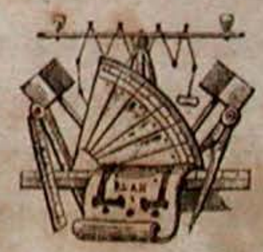
L'ART DE LEVER LES PLANS ET DE FAIRE LES NIVELLEMENTS

AVEC UNE ÉCONOMIE CONSIDÉRABLE DE TEMPS

PAR

J. PORRO

MAJOR DU GÉNIE MILITAIRE EN RETRAITE.



TURIN, 1850.

IMPRIMERIE ZECCHI ET BONA

RUE CARLO ALBERTO.

BIBLIOTECA DELLA
R.a UNIVERSITÀ
DI TORINO

PRÉFACE

La Tachéométrie est l'art de lever les Plans, et de faire les nivellements avec une économie considérable de temps ; ce résultat s'obtient bien dans les levées militaires par des moyens connus, mais toujours au détriment de l'exactitude; au contraire, à l'aide du Pantomètre on arrive à un degré d'exactitude bien supérieur à celui des opérations les plus soignées, faites par les instruments et la méthode usuels, tout en obtenant la grande économie de temps et d'argent, qui rend si précieuse la nouvelle méthode dont il s'agit ici pour les travaux publics, civils et militaires; pour le cadastre, pour l'arpentage ordinaire, etc.....

Cet art, bien que présenté pour la première fois au public dans le présent ouvrage, n'est

plus à l'état de simple invention nouvelle; l'Italie l'a vu naître en 1822, et a offert un vaste champ à l'expérience dans les levées et les nivellements complets, qui ont servi de base à la rédaction des projets de chemins de fer, de routes et de canaux, en pays très difficiles, à travers l'Apennin et les Alpes; ainsi que dans la formation des plans directeurs de quelques places fortes, parmi lesquelles celle de Gênes à la fois très vaste et hérissée de toutes les difficultés immaginables. Ce sont donc les perfectionnements successifs apportés à la méthode et à l'instrument, pendant 27 ans, d'une pratique soutenue qui ont porté la Tachéométrie à sa perfection actuelle; les dix dernières années surtout ont été fécondes en comparaisons et en épreuves rigoureuses, qui ont mis hors de doute ses avantages sur toutes les méthodes connues, et la comparaison récente avec les meilleures méthodes pratiquées en France, et ailleurs confirme, de l'aveu des plus hautes notabilités de l'art, la supériorité de cette méthode, et de ces instruments sur toutes les méthodes connues.

Le Pantomètre est un instrument plus simple sous certains rapports que le Théodolithe ordinaire, mais avec quelques additions qui lui donnent les propriétés suivantes:

1° De donner par une seule observation, en moins d'une minute de temps, la position dans l'espace de tout point accessible; c'est-à-dire la position du point sur le plan par la distance et l'azimuth, et son altitude par l'angle vertical sous lequel il apparaît à l'observateur.

2° Ces trois éléments sont donnés par l'instrument, de telle manière qu'on trouve, en eux-mêmes, et dans leur combinaison, un contrôle qui met l'opérateur immédiatement à l'abri de toute erreur matérielle. Si le point est inaccessible, deux observations sont nécessaires pour le déterminer, mais elles suffisent pour le contrôle le plus complet.

3° Le degré d'exactitude qu'on obtient avec cet instrument, est au moins trois fois plus rigoureux que par les méthodes ordinaires.

4° Le temps nécessaire pour exécuter un relèvement, avec nivellement complet, sur une étendue de pays donnée, est au moins trois fois

moindre que par les méthodes communément en usage.

5° Les connaissances nécessaires pour bien comprendre toute la Tachéométrie et la théorie de l'instrument lui-même sont celles ordinaires de l'Ingénieur et du Géomètre; mais on peut devenir en peu de temps habile opérateur praticien, avec des connaissances théoriques très bornées; et on peut par la Tachéométrie arriver à tous les résultats de la Trigonométrie, de l'Arpentage et du Nivellement, presque sans calculs, autre que ceux de l'arithmétique ordinaire (1).

6° L'instrument donne par l'observation des quantités numériques, qui ont la précieuse propriété de pouvoir être employées directement dans les calculs de la surface agraire, des terrassements, des distances entre différents points du plan, etc. etc., sans que jamais on n'ait de dimensions a prendre sur le plan même

(1) La Brigade Topographique du Génie, qui dans les États Sardes a fait la grande Carte de défense de la place de Gênes, a été recrutée, sans faveur de choix, parmi les sous-officiers et soldats des Bataillons de Sapeurs; trois mois ont suffi pour l'instruire.

à l'échelle et au compas; et comme ces nombres enregistrés ne se détériorent ni ne s'altèrent aucunement par le temps ni par l'usage, comme il arrive des plans, il s'ensuit que le résultat d'un levé Tachéométrique est impérissable, que le plan peut être dessiné à une échelle quelconque, et même à vue si on le veut, sans que cela nuise à l'exactitude des données qu'on peut vouloir y chercher; pas plus que les altérations provenant du papier ou de toute autre cause.

7° Indépendamment des résultats numériques qu'on enregistre au carnet, l'instrument détermine à l'instant de l'observation la position du point observé sur un type eidographique que l'opérateur a soin de compléter à la fin de chaque station en y figurant la levée à la manière ordinaire.

Ces types se forment pour ainsi dire d'eux-mêmes par station, en double original, dont un peut être décalqué directement sur la mise au net aussitôt que le centre de la station y est déterminé d'après ses coordonnées numériques qu'on a coutume de rapporter à la

méridienne et à la perpendiculaire; l'autre, on le passe à l'encre, et il constitue la minute du levé.

Le haut degré d'exactitude de cet instrument dépend essentiellement de la bonté de la lunette, qui même pour le plus petit modèle ne grossit pas moins de 40 fois; la lunette est l'âme de l'instrument, elle règle la proportion de toutes les autres parties.

Les Pantomètres se construisent avec des objectifs à la lunette qui ont depuis 40 jusqu'à 70 millimètres de diamètre; ceux qui portent des objectifs de 45 et de 50 millimètres sont généralement les plus convenables. Ceux de 40 millimètres ne tracent pas le point sur le type qu'on est forcé de faire entièrement à vue; à ceux de 50 millimètres et au dessus est ajouté un artifice optique particulier, au moyen duquel ils donnent pour les petites distances la position des points inaccessibles par une seule observation: ces instruments ne laissent rien à désirer sous aucun rapport pour les observations les plus délicates.

Les lunettes sont fort courtes malgré leur

grande ouverture, et les instruments, sans être ni trop pesants ni trop volumineux, ne manquent pas de la stabilité nécessaire à l'emploi de si fortes lunettes; les accessoires sont assez peu nombreux pour permettre aussi une réduction dans le personnel; un opérateur et un aide porte-mire (simple manœuvre) suffisent à la rigueur; l'emploi de deux aides portemire augmente l'économie de temps quand le pays est difficile à parcourir.

Un Ingénieur qui est pourvu d'un de ces instruments n'a besoin absolument d'aucun autre objet; plus de chaîne ni de perche, plus d'équerre, de graphomètre, de planchette, pas même de niveau à lunette, puisque l'instrument résout à vue d'œil le problème complet de la détermination d'un point dans l'espace tant en planimétrie qu'en altimétrie.

L'artifice micrométrique perfectionné sur le micromètre de Green, qui dans le Pantomètre donne la distance, peut aussi s'adapter à tous les instruments à lunette que les Ingénieurs possèdent; ils en obtiendront l'avantage d'évaluer à vue leurs distances avec une précision

qui, quoique inférieure à celle qu'on obtient avec le Pantomètre, sera cependant encore bien supérieure au chaînage ordinaire.

Les lunettes de tous ces instruments sont stéréogoniques, c'est-à-dire telles que la valeur absolue des mesures micrométriques, faites avec un micromètre quelconque adapté à ces lunettes, n'est pas influencée ni par la variation focale de la lunette, causée par la variation de distance de l'objet observé, ni par la différence dans la portée de vue de divers observateurs.

C'est l'invention des lunettes stéréogoniques qui, en donnant un haut degré d'exactitude aux mesures micrométriques, est devenue la base de la Tachéométrie, et la préférence donnée au micromètre de Green, le plus simple de tous, a été amplement justifiée par une longue expérience.

Dans ce traité on trouvera la démonstration succincte des principes sur lesquels la Tachéométrie est fondée, et l'exposition des problèmes géométriques qui se rapportent à la pratique de ce nouvel art: chaque problème est résolu d'abord par les formules algébriques,

puis accompagné de solutions numériques données comme exemples et des models de tenue de tous les calculs relatifs.

Ainsi, le lecteur savant qui veut approfondir la théorie, trouvera les traces du chemin qu'il aura à parcourir, et le practicien qui ne voudra pas s'occuper de la théorie, trouvera néanmoins des règles complètes et sûres pour se mettre à même de pratiquer la Tachéométrie dans toute son extension.

PROLÉGOMÈNES.

BIBLIOTECA DELLA R. UNIVERSITÀ DI TORINO

1. Parmi les moyens que l'on connaît pour l'évaluation des longueurs dans le relèvement des plans le plus prompt et expéditif est sans doute celui de se placer à l'une des extrémités de la ligne à évaluer, et d'y mesurer avec un micromètre le diamètre apparent d'un objet connu placé à l'autre extrémité.

Cependant la grande difficulté d'avoir des micromètres à fils mobiles d'une exactitude compétente, la facilité avec laquelle ils se dérangent, la délicatesse avec laquelle il faut s'en servir ont empêché jusqu'ici qu'on en fît l'application à l'arpentage.

2. Mais il est un micromètre qu'imagina, en 1778, Williams Green (A) *1, ingénieur opticien à Londres, qui est de la plus grande simplicité, et qui peut en conséquence être employé avec avantage dans l'évaluation des distances: ce micromètre, qui est applicable à tout télescope ou lunette d'approche, procure la plus grande rapidité dans les opérations, puisqu'il ne s'agit que d'une pointée de lunette pour juger en quelques secondes de temps la distance cherchée.

*1 Les lettres (A), (B), (C), etc. indiquent les notes et documents qui se trouvent à la fin du volume.

3. Williams Green fixe pour cela dans le champ du télescope deux points au moyen de deux pointes très fines ajustées dans le champ du diaphragme focal; ces deux pointes déterminent deux rayons visuels, dont les directions prolongées hors du télescope font entre elles un petit angle, que l'inventeur suppose constant pour un instrument donné: une mire en bois de deux toises de longueur est divisée en pieds et pouces par des lignes fortement marquées et visibles au télescope à la plus grande des distances qu'on se propose d'évaluer: on place la mire à l'une des extrémités de la ligne, on l'observe au télescope placé à l'autre extrémité et on compte combien il y a de divisions de la mire comprises entre les deux pointes qui constituent le micromètre: il est facile ensuite d'en déduire par un calcul simple la distance cherchée.

4. Cette invention reproduite en diverses époques, en Italie par Fabbroni, Alberti, Gatti et autres auteurs, et récemment par Bifezzi (B), était cependant toujours retombée dans l'oubli, parce que le degré d'exactitude qu'on obtenait par ce moyen, était à peine convenable pour les cartes topographiques à petit point, et cessait de satisfaire au besoin lorsqu'il s'agissait de mesures agraires précises et de plans exacts à grande échelle pour servir à l'étude et au tracé de travaux publics importants.

5. Il ne paraît pas qu'on ait jusqu'ici songé à en étendre l'application à la détermination des différences de niveau.

6. En 1803, lorsque Gatti ayant reproduit cette invention à Turin, essaya de l'appliquer à la dioptre pour le relèvement des plans au moyen de la planchette; on sentit tout l'avantage qu'elle aurait procuré aux géomètres du cadastre, en les mettant à même d'opérer avec une rapidité jusqu'alors inconnue; mais Gatti lui-même n'avait pas mieux réussi que ses devanciers quant à l'exactitude, et l'on fut forcé d'en défendre l'usage dans les relèvements du cadastre *1, du moins jusqu'à ce que des perfectionnements ultérieurs eussent mis ce moyen diastimométrique à la hauteur de l'exactitude réclamée par ces importantes opérations.

7. Aucun perfectionnement ne parut avant 1816, époque où l'on s'avisa d'en profiter pour la confection de la carte des limites entre la France et la Savoie.

Les ingénieurs piémontais s'attachèrent particulièrement à bien connaître les conditions géométriques de ce mode de mesuration en montagne, et M. Negretti, ingénieur aussi estimable par ses talents que promoteur zélé de tout ce qui peut être utile, fut le premier à démontrer la possibilité d'employer cet instrument en montagne, et à donner des formules rigoureuses et des moyens graphiques fort ingénieux pour obtenir la réduction des distances observées à l'horizon: il fut aussi le premier à entrevoir la possibilité d'obtenir des cotes de hauteur *approximatives*, et à s'apercevoir des incon-

*1 Décret impérial du 26 février 1805. V. Recueil de lois et décrets sur le cadastre.

vénients qui existaient encore dans la composition optique des lunettes; inconvénients qu'il n'essaya pas d'éliminer, et qu'il jugeait minimes quand on se bornait à employer des lunettes non achromatiques et à petite ouverture, et à ne jamais lire des distances moindres que 20 mètres, ni plus fortes que 120.

8. Les essais que M. Negretti fit pour y employer des lunettes achromatiques de fortes dimensions demeurèrent infructueux, parce que le moindre mouvement du réticule, soit par rapport au foyer correspondant à l'objet qui se trouve placé à une distance variable de l'objectif, soit par rapport à la vue de l'observateur y altère considérablement la valeur de l'angle micrométrique.

9. M. le chev. de l'Ostende, officier supérieur d'état-major français, employé dans ce temps là au relèvement de la carte des limites entre la Savoie et la France, apprit de M. Negretti ce nouveau moyen d'obtenir les distances, et le proposa au gouvernement français, qui, par une dépêche ministérielle adressée au bureau de la guerre, accompagnée du mémoire même de M. de l'Ostende, en ordonna l'adoption pour détailler les masses sur les cartes topographiques à petit point.

10. C'est aussi à l'extrême obligeance de M. Negretti que je dois la connaissance de ce diastimomètre, tel qu'il l'employait lui-même; et sentant, comme il les avait senti, les inconvénients optiques signalés plus haut, je me suis dévoué à la recherche des causes qui avaient arrêté M. Negretti; j'ai eu le bonheur de les découvrir,

et je suis arrivé facilement à une nouvelle combinaison de lentilles, formant une lunette achromatique susceptible de la plus haute perfection, et exempte de tous les inconvénients que l'on remarquait encore dans l'application des micromètres à la mesuration des longueurs, lunette, à laquelle convient l'épithète de *stéréogonique*, c'est-à-dire *à angle invariable* *1.

11. Le degré d'exactitude, auquel il fut possible d'arriver par ce moyen, fut tel, qu'il surpassa toute attente; il fut tel, que les opérations graphiques de la planchette qu'on employait dans ce tems là encore pour l'arpentage, ne se trouvèrent plus en rapport avec le nouveau moyen diastimométrique; il s'en suivit que, pour profiter de toute cette exactitude, c'est-à-dire, pour ne pas la perdre dans la partie graphique des opérations, il fallut avoir recours aux instruments gradués. Ce qui changea entièrement la méthode qui jusqu'alors avait été le plus en honneur en Italie pour le relèvement des plans, et, tout en permettant d'obtenir en même temps les cotes de niveau, en amena la conduite bien plus près des méthodes anglaises qui n'admettent pas la planchette, et qui demandent pour tous les services des relèvements numériques.

12. Les détails dans lesquels nous allons entrer de toutes les opérations partielles qui constituent cette méthode, en quelque sorte nouvelle, démontreront que la

*1 Στερεὸς, solide, invariable, γωνία, angle.

célérité du travail, et par conséquent le bon marché s'obtient tout en atteignant un degré d'exactitude jusqu'ici inespéré.

C'est en 1824 qu'ont eu lieu en Piémont les premières expériences en quelque sorte officielles sur le micromètre de Green ainsi perfectionné, et ce fut d'ordre du général comandant du génie militaire sarde, le marquis de Boyl, et est en présence de plusieurs officiers du même corps auxquels je dois une partie des lumières qui ont éclairé ma marche vers le but que je m'étais proposé; c'est aussi vers ce temps là que je consignais dans deux mémoires consécutifs, lus aux séances académiques du génie militaire les principes sur lesquels se fondait la nouvelle méthode, et d'après lesquels les nouveaux instruments devaient être construits.

13. Depuis ce tems là des nouvelles expériences très multipliées ont donné lieu à des perfectionnements sur tous les détails du procédé dont il est question, et la direction qui me fut confiée en 1833 de la confection d'une carte générale de défense de la place de Gênes, me donna le temps et le moyen de fixer définitivement mes idées.

Ce vaste travail qui fut exécuté en entier par des sous-officiers et des soldats du bataillon des sapeurs, dont l'instruction antérieure était tout autre que celle qu'il aurait fallu pour une semblable opération, a cependant réussi avec une exactitude supérieure à tout ce que l'on pouvait attendre des moyens et des instruments employés, dont la construction matérielle était très imparfaite; ce travail, disons nous, suffirait à lui seul pour démontrer jusqu'à l'évidence la vérité pratique de nos prévisions en faveur de la nouvelle méthode, tant rapport à la simplicité et à l'exactitude, que rapport à la célérité des opérations, si la théorie la plus simple, la plus lumineuse ne prouvait pas déjà d'une manière irrécusable l'exactitude de chacune de nos propositions, ainsi que de l'enchaînement qui le lie et de l'ensemble qu'en résulte.

14. J'exposerai aussi rapidement que faire se pourra toute la nouvelle méthode, en omettant les demonstrations que tout ingénieur peut trouver par soi-même avec facilité ou que l'on trouve dans tous les ouvrages de topographie, d'arpentage et de nivellement; mais je m'attacherai surtout à décrire avec clarté les propriétés du nouvel instrument, à signaler les perfectionnements qui le distinguent de tout autre du même genre, à bien exposer les opérations successives, par lesquelles on arrive au but, à constater de la manière la plus positive et consciencieuse le temps nécessaire à chacune d'elles et par suite la dépense à faire pour obtenir un travail donné, et finalement comparaison sera faite entre nos résultats et ceux qu'on obtient par la méthode usuelle, prenant surtout pour terme de comparaison le cadastre, et non pas un cadastre uniquement financier, c'est-à-dire un cadastre considéré dans la stricte application à la loi de l'impôt foncier qui pourrait être con-

duit avec une assez large tolérance; mais un cadastre tel à être en plein rapport d'utilité avec tous les services publics, et avec les entreprises privées d'améliorations agricoles, d'irrigations, de communications, etc. *1.

*1 Le cadastre d'un pays, à l'état actuel des connaissances humaines en économie publique, ne pourrait plus être ordonné autrement.

Le cadastre est un *moyen de constater et garantir à perpétuité la propriété foncière*, et je dis *la propriété* dans toute l'étendue de l'acception de ce mot. Il doit consister en un livre descriptif dans lequel toutes les dimensions, l'ubication, les cohérences, les servitudes actives et passives, etc., ainsi que la valeur relative de chaque parcelle soient décrites avec pleine et entière vérité: un tel livre doit être tenu au courant de toutes les mutations tant de propriétaire comme intrinsèques au fonds lui-même, si bien qu'il puisse en tout temps servir de base à tout acte relatif à la propriété, soit légal et judiciaire, soit de transaction privée.

Un tel livre serait cependant très difficile à faire, plus difficile encore à tenir au courant et à interprêter à l'avenir s'il n'était illustré *de mappes figuratives*, dont le rôle est de montrer dans un seul cadre un certain nombre de parcelles à la fois représentées graphiquement suivant la figure de leur périmètre et l'ubication relative de chacune d'elles: aidé d'un pareil secours, le livre cadastral devient très facile à interpréter; et il deviendra très facile de suivre les mutations de toute espèce dans leur plus capricieuse allure, si l'ordre, suivant lequel les dimensions auront été enregistrées, sera clair et simple, tel, par exemple, que celui qui dérive du *système rectangulaire*.

On avait cru, et on croit quelque part encore, que les mappes puissent donner à l'échelle et au compas les dimensions géométriques du plan, ce qui peut bien être vrai quand on ne vise qu'à une grossière appréciation; mais aussitôt qu'on admet la nécessité d'une exactitude géométrique en rapport avec la valeur et les besoins sociaux actuels, on sent qu'il est indispensable de coter les dimensions numériquement dans des registres *ad hoc*, à moins d'adopter une échelle énormément grande, telle, par exemple, qu'un deux-centièmes du vrai, ce qui serait monstrueux et inadmissible.

Tel est le projet de loi que des hommes compétents élaborent maintenant en France pour refaire en entier ce cadastre, qui fait déjà défaut à

15. On trouvera dans cet écrit toutes les formules trigonométriques, sans lesquelles il aurait été impossible de faire apprécier en théorie les propriétés de cette méthode; mais on verra ensuite que pour le praticien

toutes ses fins, et on sent que pour y arriver il faut que des géomètres parcourent et mesurent les pays en tout sens, et qu'ils en fassent *la carte* la plus détaillée et la plus complète qu'on puisse imaginer, et comme nul autre service public ou privé n'exige un si grand soin, une si minutieuse exactitude que le cadastre, tel que nous l'avons défini, il s'ensuit que, le cadastre une fois fait, le pays sera doté, sans autres frais qu'une rédaction et des illustrations diverses, de toute carte propre aux autres services qu'il désirera, surtout si, à l'imitation de ce qui se pratique en Angleterre, les géomètres auront recueilli aussi les hauteurs de niveau des points relevés, ce qui dans cette méthode n'amène qu'un surcroît de dépense tout-à-fait minime.

La *péréquation* ou la répartition équitable de l'impôt foncier est le premier des besoins publics qui ait fait sentir la nécessité du cadastre, c'est-à-dire de la *constatation de la propriété foncière;* mais on n'a pas tardé à reconnaître que le *cadastre* ainsi conçu joue un rôle bien plus étendu dans le bien-être social, tellement que la *péréquation* de l'impôt est actuellement presque le moins important des motifs qui commandent la formation du cadastre dans tout pays qui ne l'a pas.

Un homme d'état, fort éclairé d'ailleurs, avec qui j'ai eu l'honneur de conférer plusieurs fois au sujet du cadastre qui est à faire encore dans différents pays, tel qu'en Portugal, en Suisse, etc., disait à ce propos, qu'il ne voudrait point faire *un seul habit pour plusieurs tailles:* j'ose me flatter cependant qu'il en sera convaincu maintenant, que le cadastre n'est pas comme un *habit*, qui ne peut réellement convenir exactement qu'à une taille; un cadastre *bien fait*, et tel qu'on peut le réclamer aujourd'hui, est plutôt comparable à un bon miroir qui peut réfléchir fidèlement tous les rayons incidents; il *réfléchit* en effet plus d'un rayon de brillante lumière qui éclairent l'homme d'état dans une infinité de questions de politique, de statistique administrative, de tactique militaire, d'industrie, d'agriculture, de commerce; les magistrats dans un grand nombre de questions judiciaires; tous les sujets dans leurs transactions privées et dans l'amélioration de leur propriété foncière.

il pourra bien se dispenser d'étudier ces formules et qu'il lui suffira de s'en rapporter aux règles pratiques qui découlent de la théorie que l'on va exposer, et qui réussiront d'autant plus simples que la théorie en aura paru plus compliquée.

16. A part le stéréogonisme de la lunette, la nouvelle méthode ne contient aucune chose entièrement nouvelle, l'ensemble seul est nouveau et il n'est pas étonnant qu'on ne l'ait jamais tenté, puisque pour cela faire il aurait fallu vaincre des difficultés qui de prime abord paraissaient insurmontables et qu'on n'était pas tenté d'aborder, qu'il aurait été même inutile de résoudre, tant que l'élément le plus essentiel de toute opération géodésique, la distance, ne pouvait s'obtenir que par les moyens, et avec le degré d'exactitude jusqu'ici connus.

17. Je tâcherai dans cet écrit de prévenir les objections qu'on pourrait faire; l'espoir d'y réussir est d'autant mieux fondé que les discussions officielles et extra-officielles auxquelles ces travaux ont été soumis depuis 1824 jusqu'à ce jour, tout en laissant toujours une forte majorité en faveur de la méthode, ont souvent donné lieu à des objections qui ont mieux éclairé la route que je m'étais proposé de suivre.

CHAPITRE PREMIER.

DU DIASTIMOMÈTRE DE GREEN CONNU EN ITALIE SOUS LE NOM DE *STADIA*, ET DU PERFECTIONNEMENT QUI EN FAIT LE MEILLEUR MOYEN DIASTIMOMÉTRIQUE.

SECTION PREMIÈRE.

Du micromètre de Green considéré dans les lunettes ordinaires.

18. On sait par les principes d'optique, que dans toute lunette d'approche les axes des faisceaux lumineux provenant des objets éloignés se croisent au centre de l'objectif, et vont peindre au foyer occupé par un diaphragme convenablement disposé, une petite image très brillante des objets mêmes: c'est cette image que l'on observe par le moyen de l'oculaire qui la grossit, et moyennant les mécanismes connus sous le nom de micromètres, on peut prendre sur celle-ci des dimensions proportionnelles à celles que l'on mesurerait sur les objets mêmes, dont elle est un véritable dessin très exact et à très petite échelle.

Le rapport de grandeur de cette image à l'objet, est le même que celui des distances respectives à l'objectif.

19. Soit O (*fig.* 1) l'objectif de la lunette F; le diaphragme focal m', m'' deux points déterminés invariablement par deux croisées de fil d'araignée; S′, S″ une mire divisée en unité de mesures quelconques tenue verticalement à une distance quelconque, l'axe PQ de la figure étant horizontal. Il existera sur la mire deux points M′, M″ qui viendront se peindre dans la lunette en m', m'', c'est-à-dire sur les points fixés à l'avance par des fils d'araignée ou par tout autre moyen dans la lunette.

20. Soit M′ M″ $=$ S

m' m'' $=s$

O P $=a$

O Q $=f$

on aura évidemment

$$a = S\frac{f}{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Si $\frac{f}{s}$ était constant, et si on opérait toujours dans des terrains tels que l'on pût conserver l'horizontalité de l'axe optique de la lunette, il serait facile d'observer toujours le nombre des parties de la mire qui se trouveraient comprises en M′ M″, ce qui donnerait la valeur de S à introduire dans la formule (1) pour obtenir la projection horizontale de la distance comprise entre le centre de l'objectif et la mire; tel est le principe du micromètre diastimométrique de Green.

21. Posant $\frac{f}{s} = m$ on sent qu'il est facile de graduer et numéroter la mire pour un micromètre donné, de manière que l'on aie $m = 1$, et dès lors par tout où il est possible d'opérer avec la lunette sensiblement horizontale on aurait d mètres $=$S parties de la mire: ce que nous indiquons ici par m serait évidemment le double du sinus de la moitié de l'angle M′OM″, qui est l'angle que nous appellerons *diastimométrique:* cette simplification est due aux ingénieurs piémontais déjà cités.

22. Les meilleures lunettes achromatiques qu'on aie jusqu'ici appliqué à la géodésie sont composées comme la figure 2.

Les axes des faisceaux lumineux émanés de l'objet après s'être croisés au centre de l'objectif O, tombent sur une seconde lentille C, appelée collecteur, et de là, après avoir convergé vers l'oculaire et avoir formé image dans le diaphragme D, ils passent par l'oculaire à l'œil de l'observateur.

23. Toute la pièce CDE est mobile par rapport à l'objectif, pour pouvoir s'accommoder au foyer des objets placés à différentes distances de l'instrument, et le diaphragme D qui porte le reticule de fils, dont le micromètre se compose, est lui-même mobile longitudinalement entre les deux lentilles C, E, dont la distance est invariable, afin d'amener les fils à la distance de l'oculaire, qui correspond à la force visive de chaque observateur.

24. On sent que dès lors le problême se complique et que la valeur de l'angle diastimométrique devient variable et dépendant de la distance même, qu'il s'agit de déterminer ainsi que de la position que le reticule, occupera à chaque observation entre les deux lentilles C, E; cette position qui est dépendante de la portée de vue de l'observateur est difficile à apprécier en pratique, même avec des échelles appliquées à la lunette qui évalueraient les mouvements relatifs des différentes pièces dont elle se compose, ce qui d'ailleurs compliquerait outre mesure la détermination de la distance cherchée.

25. La construction de lunettes ci-devant décrites ne peut donc pas être utilisée pour obtenir par la voie d'un micromètre quelconque la mesure des distances : telle était cependant la lunette achromatique que M. Negretti avait tenté infructueusement d'employer. Voici comment on parvient à la solution de ce problême.

SECTION II.

Composition d'une lunette exempte des inconvénients des lunettes ordinaires spécifiées dans la section première.

26. En O (*fig.* 3) est un objectif achromatique, R est un verre convexe, dont la foyer insiste au centre optique de l'objectif: les lentilles CE constituent ensemble un oculaire de Ramsdem.

La distance OR est rendue invariable et forme avec l'objectif O un système qu'on appellera *système-objectif;* le diaphragme focal D portant le reticule peut se mouvoir longitudinalement dans les tubes par rapport au système objectif ainsi que le système oculaire par rapport au reticule.

27. On voit que par cette disposition les axes des faisceaux lumineux qui ont passé par le centre optique de l'objectif, et se sont croisés sans se réfracter, se trouvent parallèles entr'eux et à l'axe de la lunette après avoir traversé le second verre, et durant la portion de leur trajet qui a lieu dans l'espace de longueur variable, compris entre le système objectif et le système oculaire, et que par conséquent l'angle micrométrique émergeant de l'objectif, se trouve rendu constant malgré la variation focale de la lunette due à la variation de distance de l'objet observé et malgré la variation dans la force visive de l'observateur.

28. Il a fallu pour cela calculer des nouvelles courbures pour les verres qui, avec ces conditions de foyer et de position relative, ne devaient pas moins former une lunette le plus possible exempte d'aberration, de sphéricité et de réfrangibilité; mais il est facile de voir que ce problême optique ne présente aucune difficulté d'après les théories connues, au contraire, à part la très petite perte de lumière provenant de l'emploi d'un verre de plus, le système pourra mieux être délivré de l'aberration de sphéricité et l'aberration de réfrangibilité de l'oculaire pourra elle-même être mieux corrigée que par l'oculaire de Ramsdem tout seul, quoique pas mieux qu'avec l'oculaire astronomique négatif.

Une lunette ainsi construite est propre non seulement à l'appréciation des distances par le moyen du micromètre à fil fixe et d'une mire graduée, mais encore à tout autre objet pour lequel il soit utile d'employer un micromètre, soit à fils fixes, soit à fils mobiles (C).

29. Une autre question importante se présente maintenant: c'est de savoir quel est le pouvoir auquel il convient de porter la lunette pour obtenir un degré d'exactitude donné, et quelle est la limite des distances qu'il est possible d'obtenir par ce moyen.

30. N'ayant jamais une grande épaisseur d'air à traverser, on pourra faire abstraction de la modification que celui-ci apporte dans la transmissibilité du phénomène visif; on supposera aussi que la bonté relative de la lunette, c'est-à-dire le degré d'exactitude

mis par l'opticien à bien remplir les conditions optiques déterminées par la théorie, soit la même dans différentes lunettes, ainsi que le diamètre du faisceau lumineux émergeant de l'oculaire; d'après cela il est clair que l'amplitude de l'angle diastimométrique émergeant de l'objectif, et par suite la portion de mire interceptée à une distance donnée dans des lunettes différentes, sera en raison inverse de leur pouvoir amplificatif, qui dans chacune d'elles est rendu constant par cette construction. La grandeur des parties de la mire représentant l'unité de distance, sera donc aussi en raison inverse dudit pouvoir, et il s'en suivra qu'en augmentant les dimensions et le pouvoir de la lunette, on obtiendra seulement l'avantage de faire servir une mire plus courte, mais on n'aura pas celui d'une plus grande exactitude.

31. Une mire pour être maniable avec facilité ne doit guère dépasser quatre mètres de longueur, et il paraît prouvé par l'expérience qu'il peut suffire dans la plus part des cas de l'agrimétrie d'étendre à 200 mètres la portée de cet instrument; d'après cela l'amplitude de l'angle diastimométrique serait de $1^{gr},27$ à-peu-près, et comme d'autre part la limite de la vision très nette dans le champ de la lunette, eu égard aux aberrations résidues de l'oculaire, paraît pouvoir se fixer à $12^{gr.}$ environ de distance à l'axe, il s'ensuit que la lunette qui satisfait à ces conditions, peut supporter une amplification de vingt fois à-peu-près, et on sait qu'une lu-

nette achromatique portant ce grossissement est douée de beaucoup de clarté quand l'objectif a 36 à 40 millimètres d'ouverture.

La longueur de la lunette est ensuite déterminée d'après la qualité du flint et du crown qu'on veut employer pour la formation de l'objectif, et d'après les courbures *maximum* que l'on peut admettre sans que les aberrations résidues nuisent sensiblement à la netteté de la vision.

On voit d'après cela quel serait le calcul des dimensions des lunettes pour tout autre cas.

32. L'expérience prouve que, si deux traits consécutifs limitant une partie sur une échelle quelconque, se présentent à l'œil sous un écartement d'un tiers de grade environ, on peut avec un peu d'exercice estimer les dixièmes de l'interval à $\frac{1}{10}$ près, mais qu'on n'estime guère que les cinquièmes à $\frac{1}{5}$ près quand l'angle visuel, sous lequel l'œil perçoit l'interval donné, se reduit à $0^{gr},15$ (D); ceci nous met à même de déterminer jusqu'à quel point il est convenable de subdiviser la mire, et on voit facilement que si la longueur de quatre mètres ci-dessus adoptée se trouve divisée en doubles centimètres, chaque division représentera un mètre de distance, ce qui revient à supposer

$$2 \sin. \frac{1}{2} \text{ angle diastimométrique} = 0{,}02;$$

et, d'après ce que nous avons dit, on jugera fort bien

avec un peu d'exercice les dixièmes de mètre à 100 mètres.

33. Il est prouvé par la théorie précédente ainsi que par l'expérience qu'on ne pourrait pas obtenir mieux par cette construction : parce qu'en augmentant la puissance de la lunette on sera forcé de diminuer proportionnellement la grandeur des parties de la mire qui représentent l'unité de distance; mais il y a encore un moyen d'aller plus loin que j'ai appliqué avec avantage et dont la première idée, il est juste de le dire, est encore due à M. Negretti, qui n'en fit cependant point l'application à cause des autres imperfections signalées au n° 24, qu'il n'avait pas réussi à détruire, et aussi parce que l'oculaire négatif, dont sa lunette était garnie, ne permettait pas de l'employer sans de fortes aberrations de sphéricité et de réfrangibilité

34. La limite de l'amplitude de l'angle diastimométrique se trouve posé d'après la condition de ne pouvoir éloigner les fils de l'axe de la lunette de plus de 15^{gr} d'angle à l'œil, c'est même là le *maximum* possible; en se tenant à 12^{gr} on ne perd pas sensiblement en exactitude, car si d'une part le pouvoir de la lunette diminue, d'autre part on obtient beaucoup plus de netteté dans l'effet de l'oculaire, en approchant de son axe; mais rien n'empêche que celui-ci soit rendu mobile comme dans certains instruments d'astronomie, ou mieux de faire usage de deux oculaires un devant chaque fil; par ce moyen la vision a lieu par l'axe

même du système oculaire, et l'on peut éloigner beaucoup plus les fils de l'axe du système objectif: dès lors l'exactitude qu'on peut espérer de l'emploi de ce moyen diastimométrique n'a pour ainsi dire plus de bornes, et l'on peut admettre les lunettes les plus puissantes.

35. C'est alors à la pratique à mettre en balance les avantages d'un haut degré d'exactitude avec la difficulté de manier sur le terrain rapidement des lunettes de grande dimension, et à choisir la grandeur qui paraîtra la plus convenable.

36. Les besoins des différentes branches de la topographie, de l'agrimétrie et des relèvements partiels pour les travaux publics et privés réclament des degrès d'exactitude différents, et rendent convenable un rayon différent dans la portée de l'instrument; mais d'après notre expérience et l'avis de plusieurs ingénieurs très expérimentés que nous avons consulté, nous serions portés à considérer comme *maximum* désirable la force et l'exactitude qui, d'après ces principes, demanderaient une lunette de 60 millimètres d'ouverture; mais une aussi grande lunette deviendrait trop longue pour les usages ordinaires si l'on devait suivre les proportions jusqu'ici suivies dans la construction des objectifs achromatiques, auxquels on ne donne d'ouverture que tout au plus $\frac{1}{12}$ de la longueur focale.

37. Le docteur Blair et le professeur Amici ont, chacun de leur côté, résolu le problême de raccourcir le

foyer des lunettes achromatiques: le premier, par les objectifs liquides pour lesquels il emploie le sulfure de carbone; le second, en construisant des objectifs à quatre verres avec du flint et du crown. La variabilité des index de réfraction et de dispersion des liquides par les changements de température, ainsi que la grande évaporabilité du sulfure de carbone employé par le D. Blair, ne nous permettent pas d'espérer, pour le moment, de pouvoir transporter impunément sur le terrain aux alternatives d'un soleil ardent, et d'un vent froid qui peut lui succéder, les objectifs liquides; mais pour ceux de M. Amici je saisis l'occasion de le remercier ici de l'extrême complaisance qu'il a eu d'en mettre à ma disposition un de 165 millimètres de foyer sur 27 millimètres d'ouverture, qui m'a été très utile dans les expériences comparatives que j'ai institué à cet égard: or ces expériences ont prouvé la perfection à laquelle ce savant a su porter les lunettes de court foyer, puisque ce petit objectif supportait un grossissement de quarante fois, et montrait avec une netteté parfaite les divisions en centimètres d'une mire placée à 200 mètres.

38. Pendant qu'Amici s'occupait à Florence de la solution de cet important problême, je m'en occupais de mon côté; mais l'éloignement de tout établissement optique, et la nécessité de recourir à grands frais à l'étranger, ont mis des bornes à ma réussite; cependant j'ai pu obtenir d'un opticien de Paris les lentilles pour la composition d'une lunette achromatique avec objectif

à quatre verres réglée d'après mes calculs, ayant l'ouverture de 50 millimètres et le foyer de 315, ce qui n'est que six fois et un quart l'ouverture; quoique cette lunette ne soit pas entièrement exempte d'aberration de sphéricité, elle supporte cependant les amplifications de 30, 50, 80 fois et avec la plus forte amplification; elle présente encore une telle netteté, que sous une lumière favorable on peut lire la gazette de France placé à 80 mètres de distance.

Cette lunette et à plus forte raison celles de 60 millimètres d'ouverture, et de 360 et 400 millimètres de foyer construites plus tard *1, ont fourni dans l'observation des distances par le micromètre à fils fixes et à double oculaire, l'exactitude la plus scrupuleuse et telle à réclamer à peine $\frac{1}{4000}$ de tolérance, tandis que dans les opérations du cadastre on est dans l'usage d'accorder aux géomètres $\frac{1}{100}$, comme tout le monde sait: j'ai aussi fait exécuter des lunettes à objectif double avec du flint et du crown de Guinand très pur, qui produisent un assez bon effet, dont le diamètre est un sixième du foyer; mais les aberrations résidues ne s'y trouvent pas si bien détruites, et le ton vineux y est un peu trop apparent.

39. Nous rapportons à la note (E) le résultat d'une

*1 Ces nouvelles lunettes sont à objectif triple, elles sont d'une netteté parfaite: on peut lire la gazette de France placé à 100 mètres.

expérience faite en 1824 avec une lunette diastimométrique perfectionnée, telle qu'elle se trouve décrite dans les paragraphes précédents à ceci près; savoir: que l'ouverture de l'objectif n'était que de 40 millimètres, et la longueur focale était de 12 fois l'ouverture; cette expérience faite par les officiers du Génie, MM. les capitaines Passera et Siry par ordre de M. le marquis de Boyl, général-commandant en chef du Génie, qui les délégua à cet effet, est authentique, et a été conduite avec le plus grand soin.

40. Nous pensons que la plus grande lunette qu'il est convenable d'employer pour un instrument à lever des plans est celle de 60 millimètres d'ouverture avec 400 millimètres de longueur; mais nous pensons que la plupart des services n'auront pas besoin d'un aussi haut degré d'exactitude, et pourront se contenter de lunettes de moindre dimension, par conséquent moins coûteuses, adaptées à des instruments proportionnés.

SECTION III.

Observations des distances inclinées, leur reduction à l'horizon, détermination des différences de niveau.

41. On a supposé jusqu'ici l'axe optique de la lunette horizontal, et la mire verticale; mais pour peu que le terrain soit ondulé, on ne pourra obtenir cette condition. Il faut donc alors incliner la lunette de manière à collimer toujours avec l'un des fils sur le zéro de la division de la mire, et en estimer l'inclinaison sur un cercle vertical gradué, annexé à l'instrument; on calcule ensuite la distance horizontale comprise entre les verticales du centre de l'objectif et du pied de la mire par des formules que nous allons développer.

Soit (*fig.* 4) O le lieu du centre de l'objectif, OS l'axe de la lunette; M′, M″ les points de la mire qui viennent se peindre sur les fils du micromètre; soit encore S en mètres la longueur M′M″ de la portion de la mire, qui se trouve interceptée dans l'angle diastimométrique; α cet angle; φ l'angle compris entre la verticale et l'axe de la lunette; d la distance horizontale cherchée OP; on aura les angles

$$\varphi' = \varphi + \frac{1}{2}\alpha;$$

$$\varphi'' = \varphi - \frac{1}{2}\alpha;$$

le triangle diastimométrique OM′M″ donnera

$$OM' = \frac{S \sin. \varphi''}{\sin.(\varphi' - \varphi'')};$$

mais on a aussi $d = OM' \sin. \varphi'$

donc

$$d = S \frac{\sin. \varphi' \sin. \varphi''}{\sin.(\varphi' - \varphi'')} = S \frac{\sin.\left(\varphi + \frac{1}{2}\alpha\right) \sin.\left(\varphi - \frac{1}{2}\alpha\right)}{\sin. \alpha}$$

$$= \frac{S}{\sin. \alpha}\left(\overline{\sin.}^2 \varphi - \overline{\sin.}^2 \frac{1}{2}\alpha\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

dans laquelle expression on peut, vu la petitesse d'α, négliger $\overline{\sin.}^2 \frac{1}{2}\alpha$; et si la mire est divisée en parties telles que chacune soit égale a $1^{mèt.} \times \sin. \alpha$, on aura simplement

$$d^{mètres} = S^{parties} \overline{\sin.}^2 \varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

42. Les éléments qu'on doit recueillir sur le terrain pour arriver à la détermination de la distance horizontale, fourniront maintenant avec la même facilité la différence de niveau M′P′ = Z entre le centre de l'objectif, et le pied de la mire; en effet le triangle M′P′O, rectangle en P′, nous donne immédiatement

$$Z = d \cot.\left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right),$$

ou bien par une transformation facile à comprendre, il vient

$$Z = d \cot. \varphi - \frac{1}{2} S \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

43. On sent maintenant combien il est utile de prendre α tel que sin. $\alpha = 0{,}02$, parce que alors le second terme $\frac{1}{2}$S en centimètre est égal au nombre qui représente S en parties de la mire.

Si l'on prenait α, tel que sin. $\alpha = 0{,}01$, alors la mire serait divisée en centimètres et ce serait la moitié de S, qui donnerait en centimètres le second terme de la formule (4).

44. Ici, comme dans les chapitres suivants, on a eu recours à des formules qui exigent un calcul trigonométrique; ce calcul, quoique simple, pourrait bien n'être pas à la portée de tous les opérateurs; mais on trouvera dans la suite de l'ouvrage des moyens, par lesquels l'application de la nouvelle méthode se trouve dégagée de tous les calculs qui sont au-dessus l'arithmétique ordinaire; j'ai d'ailleurs fait construire récemment des lunettes qui donnent immédiatement sur la mire la distance horizontale, quelle que soit l'inclinaison de l'axe de la lunette (F).

45. Une lunette de la force et de la dimension indiquée étant très sensible à la variation du foyer dans les courtes distances jusqu'à 10 mètres, par exemple, une échelle graduée convenablement sur le corps même de la lunette peut indiquer cette variation, dont la distance de l'objet observé est une fonction impliquée des dimensions optiques de la lunette, d'où il suit que les distances inférieures à dix mètres peuvent se mesurer

sans le secours de la mire, ce qui est très utile dans bien de cas. Les instruments de 60 millimètres d'ouverture que j'ai fait construire, ont cette échelle qui donne immédiatement la distance d'un objet quelconque au foyer duquel la lunette est amenée (G).

46. Voilà la théorie succinte de ce nouvel instrument diastimométrique, avec les perfectionnements dont il était susceptible, en ne se départant pas du micromètre à fils fixes.

Un micromètre à fils mobiles pourrait être employé de même, et ce serait la valeur de sin. α, ou une fonction conventionnelle de celle-ci qu'on lirait sur la division du micromètre, tandis que S pourrait être pris constant et égal à toute la hauteur de la mire.

47. Par ce moyen, et avec une lumière convenablement disposée, et deux lames de miroir étroites fixées une en haut, l'autre en bas de la mire, on pourrait lire les distances de nuit avec le micromètre à fils mobiles, ce qui pourra être utile en temps de guerre; mais l'avantage essentiel serait qu'un pareil micromètre opérerait toujours dans les circonstances les plus favorables quelque fût la distance totale à déterminer: cette sorte de micromètre a par contre l'inconvénient d'être fort coûteux et trop délicat pour les opérations de campagne, et d'opérer moins rapidement; on s'en tiendra donc au micromètre à fils fixes et à mire graduée.

CHAPITRE II.

COMPOSITION D'UN INSTRUMENT PROPRE A RECEVOIR LA NOUVELLE LUNETTE DIASTIMOMÉTRIQUE DÉCRITE DANS LE CHAPITRE PRÉCÉDENT.

SECTION IV.

Digression sur les instruments ordinaires d'arpentage. Nécessité d'introduire les instruments gradués.

48. La lunette diastimométrique rendue *stéréogonique*, et telle qu'elle se trouve décrite dans le chapitre précédent, est susceptible d'être appliquée avec avantage à la boussole, à l'alidade pour planchette aux niveaux à lunettes, à condition seulement d'en proportionner les dimensions à la grandeur et au degré de stabilité de ces instruments.

Dans les deux premières applications, malgré les dimensions réduites qu'il faudrait y donner, le degré d'exactitude qu'elle pourrait fournir, se trouverait cependant bien supérieur à celui des opérations géométriques qui, avec ces instruments, déterminent les au-

tres éléments des deux projections; mais soit à la boussole, soit à la planchette le cercle vertical que l'on peut employer pour la détermination de l'inclinaison de l'axe de la lunette, ne peut pas être d'une exactitude suffisante pour en déduire des différences de niveau, dont la précision satisfasse aux besoins de tous les services.

49. D'autre part la boussole ordinaire ne saurait être considérée que comme un instrument accélératif des opérations toujours aux dépens de la précision, et la planchette qu'on croyait jadis être, du moins en Italie, l'instrument agrimétrique par excellence, se trouve elle-même tellement au-dessous du degré d'exactitude, que l'on obtient dans l'évaluation des distances avec la grande lunette diastimométrique, convenablement montée sur un instrument solide et peu volumineux, que ce degré d'exactitude demeurerait inutile, si ensuite on devait passer par les graphicismes ordinaires pour arriver aux résultats définitifs qu'on se propose d'obtenir.

Ces instruments manquent d'ailleurs de stabilité, et la planchette surtout qui est sujette à une trépidation considérable par le moindre vent, ne saurait se prêter à l'usage de si grandes lunettes comme moyen diastimométrique de précision *1.

*1 On sait qu'en Belgique, lorsqu'en 1826 on pensa sérieusement à former un bon cadastre, l'usage de la planchette fut défendu, vu les grandes imperfections pratiques inhérentes à la nature de cet instrument; les instruments gradués furent seuls admis pour la levée de l'ensemble et des détails des propriétés, l'équerre d'arpenteur fut tolérée pour les très petits détails.

50. Un plan dessiné sur une échelle proportionnée à l'étendue du terrain avec plus ou moins d'approximation dans les proportions, mais fidel dans la représentation des objets et parfaitement *ressemblant*, est indispensable pour parler aux yeux, pour montrer dans un seul cadre tous les accidents du terrain sur lequel on a en vue d'asseoir un projet quelconque; mais aussitôt qu'il s'agit d'obtenir, avec toute la rigueur possible, la surface agraire ou tout autre donné, soit de nivellement, soit de projection horizontale pour le cadastre ou pour servir de base au calcul des terrasses, ouvrage d'art, etc.; pour les grands travaux publics on est forcé de recourir à des plans et à des profils relevés expressément, et dessinés sur une grande échelle avec une rigueur de *similitude géométrique* *1 qui les rend longs à faire, et fort coûteux, c'est pour cela qu'en pareil cas on préfère avoir, s'il est possible, des plans obtenus par les moyens simples du double mètre et de l'équerre d'arpenteur exécutés avec un soin tout particulier avec toutes les dimensions cotées sur le plan même; et c'est sur ces éléments originaux qui expriment numériquement les dimensions de toutes les parties du plan

*1 Nous distinguons la *ressemblance* de la *similitude géométrique*: un bon croquis visuel qui représente tout, et chaque chose à sa position relative, de manière à être parfaitement reconnue, peut-être très *ressemblant*, sans que la *proportionalité géométrique* soit de rigueur; cette dernière est celle qui constitue la *similitude*: au reste on adopte ici ces dictions purement conventionnelles, afin que le lecteur puisse bien saisir les idées qui seront développées par la suite.

que l'on opère, et non pas sur des dimensions évaluées avec le compas et l'échelle, d'après des dessins toujours plus ou moins imparfaits, dans lesquels les lignes d'opération ont disparu, et le seul résultat *eidographique* *1 est resté; ce ne sera que par des plans à dimensions cotées ou enregistrées régulièrement que les cadastres pourront être rendu valables en jugement dans les contestations, mêmes les plus minutieuses; ce n'est que par là qu'il faut espérer d'arriver à la connaissance de la surface agraire avec une précision qui puisse mériter la confiance générale, et d'introduire dans tous les services publics qui réclament le secours de la géométrie pratique, une exactitude qui mette les ingénieurs à même de rédiger leur projet avec pleine connaissance de cause, d'en précalculer les dépenses sans incertitude, de transporter sans variation sur le terrain pour l'exécution le tracé de leurs études; ce n'est enfin que par là, que les travaux agrimétriques peuvent devenir en quelque sorte impérissables, puisque les desseins n'étant presque jamais dans le cas d'être tourmentés par l'usage du compas, durent beaucoup plus long-temps; et quand enfin ils seront à refaire, on le pourra toujours, et cela à la même échelle ou à une autre échelle quelconque, sans retourner sur le terrain et sans rien perdre de l'exactitude primitive, puisque tout se fait ainsi toujours sur les dimensions originales qui servent

*1 De *εἶδος* forme, *γράφω* je décris: un *type eidographique* est un plan où la *ressemblance* est parfaite sans que la *similitude* soit de rigueur.

à reproduire les nouveaux dessins, comme ils ont servi à produire les premiers, et on en peut dire que toutes ces copies sont comme autant d'originaux, puisqu'ils découlent de la même source que l'original primitif.

51. L'équerre d'arpenteur accompagnée de la mesuration matérielle des abscisses et des ordonnées, et les instruments gradués sont les seuls moyens par lesquels on puisse arriver à des plans à dimensions cotées; mais la visuelle de l'équerre d'arpenteur est de courte portée, la mesuration matérielle avec des perches, où la chaîne est longue et laborieuse, elle cesse même de mériter de la confiance dès que l'acclivité et les irrégularités de la surface du sol deviennent considérables.

52. Les instruments gradués, plus ou moins grands et exacts, fournissent un excellent moyen de faire un relèvement quelconque d'après l'observation des angles, et la connaissance d'une ou plusieurs longueurs prises pour bases, et mesurées avec attention dans des localités favorables; mais en se tenant aux méthodes trigonométriques les plus généralement en usage, il faut avoir recours à des calculs longs et fastidieux, qui ne sont pas à la portée des géomètres de la dernière classe pour arriver à la détermination des distances et des coordonnées, de tous les points par rapport à deux axes donnés de position.

Le relèvement des plans deviendrait par ce mode d'opérer une véritable triangulation à très petits cotés, et il serait absurde de proposer de recourir pour tous

les points d'un relèvement de détail à ce moyen, qui serait certainement très exact, mais immensement long et dispendieux.

Cependant en Angleterre, où la nécessité d'un haut degré d'exactitude dans toutes les opérations, notamment dans celles du *survey of land-s-office*, a été vivement sentie, on a adopté depuis long-temps la méthode des relèvements numériques, et les instruments gradués sont employés concurremment avec les mesures à la chaîne et avec l'équerre à réflexion, et autres moyens semblables pour le relèvement des mappes du cadastre.

53. La tendance des géomètres à l'emploi des instruments gradués, se montre de plus en plus parmi nous, et déjà il en est beaucoup qui emploient des équerres graduées ou des boussoles dans lesquelles on place des verniers, et où l'aiguille aimantée ne fournit plus qu'une orientation primitive. Ces géomètres y trouvent leur compte, malgré que cela les force à enregistrer des éléments numériques et à ne construire le plan qu'au cabinet, et d'après lesdits éléments, non sans avoir tracé, s'ils l'ont jugé nécessaire, un esquisse à vue du terrain sur lequel ils ont opéré; ils obtiennent alors, quoique graphiquement, un tracé beaucoup plus exact dans le calme de leur cabinet, qu'il n'auraient fait en campagne aux alternatives de l'ardeur du soleil, des vents et de l'humidité qui tendent et distendent, et font boursouffler par fois considérablement le

papier sur la planchette, tout en rendant fatiguante et pénible la condition de l'opérateur, qui achète bien cher sur le terrain l'avantage de n'avoir plus rien à faire quand il entre chez-lui, ni durant le temps où l'état de l'atmosphère ne lui permet pas de tenir la campagne.

54. Cet état de choses démontre jusqu'à l'évidence que l'utilité des instruments gradués suffisamment exacts d'une construction et d'un usage simple, et qui n'obligent pas à des calculs trigonométriques compliqués, est universellement reconnue par tous les hommes de l'art.

SECTION V.

Détermination des dimensions qu'il convient de donner au nouvel instrument, et des conditions auxquelles il doit satisfaire pour être en rapport avec la nouvelle lunette diastimométrique.

55. Puisque la *stadia* évalue maintenant les distances avec une exactitude qui surpasse de beaucoup celle que l'on obtient dans la détermination des directions correspondantes par les instruments agrimétriques ordinaires, il devient évident qu'on l'aurait inutilement perfectionnée, si ce n'était pour l'adapter à un instrument gradué d'une exactitude proportionnée, et malgré la célérité que l'usage de la *stadia* procure dans les opérations sur le terrain, on aurait peu gagné en économie de temps si on ne pouvait se délivrer des calculs longs et pénibles auxquels donne lieu l'usage des instruments gradués, quand on ne veut pas perdre dans le graphicisme du dessin une grande portion de l'exactitude obtenue dans les éléments numériques de l'opération.

56. Il ne faut pas oublier que le but n'est plus ici de se procurer avec une similitude, dont la limite se trouve dans l'usage manuel du compas et de l'échelle, un dessin dans un rapport donné; ce dessin on veut bien l'obtenir comme image figurative et bien ressemblante de la réalité qui en offre à l'œil l'ensemble, mais il ne faut pas oublier que, par le relèvement numéri-

que, il n'y a plus la nécessité de pousser à bout la similitude géométrique; j'arrive même à dire que, quant à la parfaite reconnaissabilité de toutes les parcelles représentées, on aura quelque chose à gagner en exagérant un peu certaines inflexions des contours qui se trouvent insensibles à l'œil sur le papier, et qui n'existent pas moins sur le terrain d'une manière très apparente, la connaissance rigoureuse des véritables dimensions du terrain dans les trois sens pour être employées dans le calcul des aires, des volumes, des pentes, des terrasses, etc., étant fournie par les registres numériques, on n'a rien à redouter de ces altérations graphiques qui rendent la *ressemblance inspective* plus frappante, quoique la similitude géométrique en soit légèrement atteinte.

57. Or il est évident que ces dimensions, en supposant même ce qui n'est pas admissible, que dans l'acte du relèvement par la méthode ordinaire, elles aient été traduites graphiquement du vrai sur la planchette avec une rigueur mathématique, il ne faudra pas moins les convertir ensuite en nombres au moyen de l'échelle et du compas pour les introduire dans les calculs, et on ne pourra pas y parvenir sans avoir à redouter les altérations physiques du papier et l'imperfection des moyens graphiques, inconvénients qui tous sont atténués, mais non pas détruits en opérant à une plus grande échelle, chose qui exigerait d'ailleurs de frais, de temps et d'argent proportionnellement plus grands.

SECTION V.

Détermination des dimensions qu'il convient de donner au nouvel instrument, et des conditions auxquelles il doit satisfaire pour être en rapport avec la nouvelle lunette diastimométrique.

55. Puisque la *stadia* évalue maintenant les distances avec une exactitude qui surpasse de beaucoup celle que l'on obtient dans la détermination des directions correspondantes par les instruments agrimétriques ordinaires, il devient évident qu'on l'aurait inutilement perfectionnée, si ce n'était pour l'adapter à un instrument gradué d'une exactitude proportionnée, et malgré la célérité que l'usage de la *stadia* procure dans les opérations sur le terrain, on aurait peu gagné en économie de temps si on ne pouvait se délivrer des calculs longs et pénibles auxquels donne lieu l'usage des instruments gradués, quand on ne veut pas perdre dans le graphicisme du dessin une grande portion de l'exactitude obtenue dans les éléments numériques de l'opération.

56. Il ne faut pas oublier que le but n'est plus ici de se procurer avec une similitude, dont la limite se trouve dans l'usage manuel du compas et de l'échelle, un dessin dans un rapport donné; ce dessin on veut bien l'obtenir comme image figurative et bien ressemblante de la réalité qui en offre à l'œil l'ensemble, mais il ne faut pas oublier que, par le relèvement numéri-

que, il n'y a plus la nécessité de pousser à bout la similitude géométrique; j'arrive même à dire que, quant à la parfaite reconnaissabilité de toutes les parcelles représentées, on aura quelque chose à gagner en exagérant un peu certaines inflexions des contours qui se trouvent insensibles à l'œil sur le papier, et qui n'existent pas moins sur le terrain d'une manière très apparente, la connaissance rigoureuse des véritables dimensions du terrain dans les trois sens pour être employées dans le calcul des aires, des volumes, des pentes, des terrasses, etc., étant fournie par les registres numériques, on n'a rien à redouter de ces altérations graphiques qui rendent la *ressemblance inspective* plus frappante, quoique la similitude géométrique en soit légèrement atteinte.

57. Or il est évident que ces dimensions, en supposant même ce qui n'est pas admissible, que dans l'acte du relèvement par la méthode ordinaire, elles aient été traduites graphiquement du vrai sur la planchette avec une rigueur mathématique, il ne faudra pas moins les convertir ensuite en nombres au moyen de l'échelle et du compas pour les introduire dans les calculs, et on ne pourra pas y parvenir sans avoir à redouter les altérations physiques du papier et l'imperfection des moyens graphiques, inconvénients qui tous sont atténués, mais non pas détruits en opérant à une plus grande échelle, chose qui exigerait d'ailleurs de frais, de temps et d'argent proportionnellement plus grands.

58. D'après les considérations faites dans la section précédente, voici comment on peut déterminer les dimensions de l'instrument sur lequel il convient de poser la nouvelle lunette diastimométrique et stéréogonique pour les relèvements et nivellements suivant la nouvelle méthode.

On a déjà vu au § 38, que l'exactitude, que ce micromètre fournit, est à peu près, avec la grande lunette, $\frac{1}{4000}$ de la longueur du rayon mesuré: s'il s'agissait de courir sur un alignement donné pour obtenir la distance entre les deux points extrêmes d'un long parcours, on voit aisément que la totalité de la ligne pourrait être connue *au pis aller* avec le même coëfficient d'approximation, car il se fait toujours naturellement des compensations dans l'ensemble; mais si pour arriver au même but on est obligé de parcourir une ligne oblique et anguleuse, alors le résultat définitif, la longueur demandée, est de plus affecté par les inexactitudes commises sur la mesure des angles que les rayons partiels font entre eux, angles desquels dépend la longueur de leur projection sur la ligne principale.

Ces deux espèces d'inexactitudes qui ont lieu, quelque soit la méthode et les instruments dont on fait usage, quand elles produisent en somme une erreur conséquente, elles disparaissent dans les méthodes ordinaires sous le *coup de pouce* de l'opérateur, et souvent, grâce aux compensations qui se font naturellement, elles restent en quelque sorte inaperçues à cause de la petitesse de l'échelle, ce qui n'a pas lieu pour les relèvements numériques; car l'arithmétique est inexorable jusque dans les plus petites fractions, elle met tout en évidence, elle laisse donc au jugement de l'opérateur ou de l'inspecteur la fixation de la limite de précision au-delà de laquelle il serait inutile d'aller, et la certitude que nulle faute réelle n'aura pu échapper aux vérifications qui suivent les opérations des géomètres.

59. Qu'on imagine (*fig.* 7) que le lieu vrai d'un point M soit déterminé par l'angle $\angle MNO = \theta$, et par la distance $OM = r$; si l'angle compris entre les rayons Oa, Ob représente l'incertitude totale restante sur l'angle mesuré, et si ad représente l'incertitude restante sur la distance, tous les lieux qui pourraient être assignés par les errements ou déviations résidues de l'opération au point M, seront compris dans le trapèze *abcd*.

L'incertitude *maximum* possible sur la position absolue du point M aurait lieu dans l'une des directions Ma, Mb, Mc, Md, et serait représenté par la moitié de la diagonale du trapèze, qui, vu sa petitesse, peut toujours être considéré comme un rectangle.

60. Nulle opération matérielle ne pouvant arriver à des résultats d'une rigueur mathématique, nous nous proposerons de déterminer les dimensions de notre instrument, de manière que l'incertitude dans le sens ab, que nous désignerons par $r\partial\theta$ sin. $1''$, ne soit pas plus grande que ∂r: or au moyen du micromètre perfec-

tionné on a vu que l'on peut obtenir $\partial r = \frac{r}{4000}$; on aura donc, à la limite, à peu-près $\partial\theta = 0^{gr},016$.

Un cercle qui donne par son vernier $0^{gr},10$, c'est-à-dire les minutes centésimales dix à dix, ou tout au plus cinq à cinq, serait donc suffisant pour le but : car on y estimerait aisément les minutes, mais comme il peut être utile de déterminer avec le même cercle quelque position dépendante de points trigonométriques fort éloignés, soit pour se stationner quand on ne veut pas partir directement d'un point trigonométrique, soit pour tout autre but, et qu'on peut désirer alors une plus grande précision, nous admettrons de vouloir obtenir les minutes centésimales une à une directement, ce qui permettra de juger les secondes de 20 en 20.

61. La haute perfection à laquelle on a porté maintenant l'art de construire les instruments géodésiques, permettrait d'obtenir un pareil résultat avec un diamètre de $0^{mèt.},10$ environ; mais un instrument d'un aussi petit diamètre ne serait pas assez solide pour supporter la lunette qu'il est destiné à recevoir, et comme d'autre part on gagne en célérité si on rend les divisions plus larges et lisibles, on peut fixer comme bonne proportion le diamètre de $0^{mèt.},18$ à la division qui pourra se faire directement en 4000 parties, et être parcourue par un vernier de 10, ce qui est beaucoup plus prompt à la lecture qu'un long vernier avec une division moins nombrée sous le microscope : le microscope pouvant, avec

un vernier si court, être immobile, on peut le construire optiquement, de manière que l'inconvénient de la parallaxe soit complètement évité.

62. Si pareil cercle est adapté verticalement à l'axe rotatif de la lunette, de manière qu'il en résulte les distances zénitales avec l'approximation que l'on peut espérer de sa division, il s'ensuivra que les différences de niveau seront aussi données avec le même degré de précision, et par suite la position d'un point dans l'espace déterminée au moyen d'un tel instrument par rapport à trois axes rectangulaires passant par son centre, ne pourra avoir d'incertitude que celle qui serait comprise dans un parallèlepipède, dont les arrêtes seraient

$$\partial r, \quad r\partial\theta \sin. 1'', \quad r\partial\varphi \sin. 1'',$$

duquel la face

$$r\partial\theta \sin. 1'' \times r\partial\varphi \sin. 1''$$

serait normale au rayon vecteur.

63. Si le but était d'obtenir les projections du rayon représenté par OM sur chacun des trois axes, c'est-à-dire les coordonnées x, y, z du point M par rapport à trois plans rectangulaires passant par le centre de l'instrument, il est aisé de démontrer que ∂x, ∂y, ∂z seraient des fonctions de ∂r, $r\partial\theta$, $r\partial\varphi$, dont le *maximum* ne pourra jamais dépasser ∂r.

64. Mais pour les géomètres du cadastre, par exem-

ple, nous pensons qu'une lunette de 40 à 50 millimètres au plus d'ouverture et un cercle de 14 à 15 centimètres, donnant les dixièmes de grade, sera toujours suffisant, et pourra permettre de n'accorder que la tolérance d'$\frac{1}{1000}$ sur les opérations des géomètres, ce qui est suffisant; cela n'empêche pas, au contraire il convient que les ingénieurs vérificateurs et les délimitateurs fassent usage d'instruments plus grands.

SECTION VI.

De l'aiguille aimantée et de son emploi dans le nouvel instrument.

65. On sait que la boussole qui rend de si éminents services en mer, est le plus infidel des instruments que les géomètres aient jusqu'ici employé; on sent cependant qu'il serait d'une grande utilité, s'il ne présentait pas les incertitudes qu'on observe dans ses indications.

66. Les infidélités de l'aiguille aimantée proviennent de quatre causes différentes, savoir:

1° Les variations diurnes dans la direction et dans l'intensité de l'action physique qui détermine le phénomène;

2° Les causes perturbatrices inhérentes à l'instrument, telles que son état électrique variable, et peut-être l'attraction moléculaire elle-même des parties de l'instrument, dont la position par rapport à l'aiguille change à chaque observation (H);

3° L'imperfection mécanique de la suspension;

4° Les causes perturbatrices locales inhérentes à la nature du terrain sur lequel on opère.

67. Malgré tout cela, on peut tirer un bon parti des indications que l'aiguille aimantée fournit comme donnée approximative, de laquelle on tire le premier terme de certaines opérations qui admettent d'être traitées par la méthode connue des approximations successives, mé-

thode qui conduit cependant à des résultats rigoureux, et qui est très usitée en mer et en astronomie.

Voici de quelle manière l'aiguille aimantée est appliquée à l'instrument, et comment sont éludées quelques-unes des causes qui en rendent les indications infidèles.

68. L'aiguille aimantée est logée au-dessous du plateau de l'instrument dans un tube de cuivre convenablement disposé, il est suspendu par des fils de soie sans torsion, il est observé par un moyen analogue à celui employé par Causs dans son appareil à observer les variations diurnes, et qui permet d'apprécier la minute centésimale, il sert à orienter le diamètre zéro de l'instrument dans le méridien terrestre par la déclinaison moyenne qu'on suppose connue dans chaque lieu; on désignera par la suite cet appareil sous le nom d'*orientateur magnétique*.

69. Par la manière dont l'orientateur est appliqué à l'instrument, il arrive que, dans le moment où l'on s'en sert, toutes les pièces de l'instrument sont toujours disposées semblablement, par rapport à l'orientateur, de manière que leur effet attractif, s'il a lieu, est constant, et on le compte avec la déclinaison.

70. Quand il s'agit d'un relèvement d'une grande étendue on peut, s'il est nécessaire, tenir compte des variations diurnes que l'on peut faire observer au bureau central, et apporter aux indications employées les corrections résultantes (I), comme cela se pratique pour les observations barométriques.

71. Quand il s'agit d'un relèvement de petite étendue, et quand on n'a pas à craindre des perturbations locales, l'aiguille aimantée est presque toujours suffisante à orienter l'instrument, si c'est avec celui de la moindre dimension que l'on opère; mais il est convenable de se ménager toujours des vérifications géométriques et des moyens d'orientation indépendants de l'aiguille aimantée, et c'est là ce qu'on examinera dans un autre chapitre, quand on exposera la manière de tirer parti de l'orientation approximative donnée par l'aiguille aimantée.

SECTION VII.

Des niveaux et autres appareils accessoirs de l'instrument.

72. On a déjà vu que le nouvel instrument est composé de deux cercles, dont un horizontal et l'autre vertical, servis par une même lunette diastimométrique; mais le géomètre doit s'assurer que toutes les parties de l'instrument sont véritablement ainsi placées quand il est stationné. On indiquera donc ici les moyens par lesquels on parvient à ce but.

73. Il est très difficile de conserver rigoureusement de niveau pendant une longue station un instrument quelconque, et quand on veut retoucher aux vis du pied pour le reconduire, on risque toujours d'en altérer l'orientation, et l'on est obligé de revenir à la vérification de quelque point déjà relevé, à fin de corriger, au besoin, la déviation qui pourrait avoir eu lieu, ce qui occasionne une perte de temps considérable.

74. Il est démontré que si deux plans verticaux qui font entre eux un angle quelconque, sont coupés eux-mêmes par un troisième plan horizontal et par un quatrième plan un peu incliné à l'horizon, les traces qui résultent sur ce troisième et quatrième plan comprennent sensiblement le même angle; d'où il suit que pour obtenir un bon résultat il suffit que le plan décrit par l'axe optique de la lunette soit toujours exactement vertical au moment de chaque observation; mais il n'est pas nécessaire que le plan du limbe de l'instrument conserve une horizontalité parfaite; on peut s'assurer par le calcul qu'une inclinaison du plateau de $0^{gr},15$ arriverait à peine à produire une erreur *maximum* d'une seconde sur un angle observé.

75. Pour l'exactitude des différences de niveau il est aussi nécessaire que le diamètre zéro du cercle vertical corresponde à la position verticale de la lunette.

76. L'instrument doit donc satisfaire à ces conditions ou du moins il doit pouvoir y être amené avec promptitude à l'instant de l'observation sans rien déranger à l'orientation du limbe, et tout cela s'obtient par le moyen de niveaux convenablement disposés.

77. Un niveau sphérique tient au limbe de l'instrument, et sert à indiquer l'horizontalité de celui-ci; ce niveau a de deux à cinq mètres de rayon de courbure, et se conduit promptement au milieu, à moins d'un ou deux millimètres près par les vis du pied: ses variations spontanées qui peuvent avoir lieu durant la station ne dépassent guère cette limite, et il est rare d'avoir à retoucher aux vis du pied.

78. Le support qui porte la lunette est appliqué au plateau supérieur du cercle horizontal, de manière qu'il peut par rapport à celui-ci avoir deux mouvements dans le sens vertical sans déranger aucunement la situation relative du vernier, et de la projection de la ligne de foi de la lunette sur le plan du limbe, les deux mouve-

ments sont réglés par des vis à bouton que l'observateur peut toucher quand il se prépare à observer; deux niveaux cylindriques à bulles d'air sont placés dans le sens de ces deux mouvements, desquels un se fait dans le plan du cercle vertical, et l'autre a lieu normalement à celui-là; l'instrument est rectifiable de manière que, quand les bulles de ces deux niveaux sont calées, le plan décrit par l'axe optique de la lunette est exactement vertical, et le zéro de la division du cercle vertical correspond à une visuelle verticale. Il y a des moyens d'inversion, et des vis de rectification disposés d'une manière simple et solide pour obtenir promptement toutes ces conditions.

79. On distinguera les deux niveaux dont il est question, en appelant *longitudinal* celui qui est disposé parallèlement à la lunette, et l'autre sera nommé *niveau transversal*. Ces niveaux sont travaillés à un rayon de courbure, tel qu'un millimètre de déplacement de la bulle correspond à la moindre fraction appréciable sur le vernier; car il ne faut pas que les niveaux soient plus sensibles qu'il ne convient au degré d'exactitude qu'on veut obtenir, pour ne pas avoir à perdre pour les caler un temps précieux.

80. Toute opération faite avec des instruments gradués est numérique, et quand on se propose de passer à la mise au net du dessin figuratif du terrain où l'opération a été conduite, on a recours à la description de chaque point, que l'on a eu soin d'écrire dans le carnet où les données numériques sont inscrites; mais pour plus de

facilité et de clarté on est dans l'usage de former d'avance sur le terrain un croquis à vue de la localité pour servir de guide au dessinateur; c'est sur ce croquis même que les opérateurs ont usuellement l'habitude d'inscrire les dimensions et les angles mesurés sur le terrain quand la figure est simple et de peu d'étendue; mais on a recours au carnet dans le cas contraire, et le croquis se fait à part.

81. On peut faciliter la formation de ce croquis par différents moyens que l'on indiquera dans le cours de cet ouvrage, mais il en est spécialement un que l'on obtient directement du pantomètre même, et qui par cela doit être indiqué ici: ce moyen a la propriété de donner un croquis où les points relevés sont exactement placés à l'échelle convenable pour chaque station; ceci abrège un peu les opérations à faire sur le terrain, et met le géomètre à même de donner beaucoup de vérité géométrique à ses croquis.

82. Ce moyen consiste en un appendice de l'axe rotatif du limbe intérieur du cercle horizontal, qui se prolonge au-dessous de la *patte d'aigle* qui supporte l'instrument, et conduit une alidade divisée en échelle de longueur.

Une feuille de papier est placée entre la patte d'aigle et le plateau du pied de l'instrument. L'alidade, qui suit le mouvement de la lunette, sert à marquer directement, après chaque observation, le point relevé en son lieu géométrique sur le croquis à faire: on donne

à ce point le numéro d'ordre qui lui correspond dans le carnet, et à la fin de la station on achève de figurer le terrain relevé en le dessinant entre les points géométriques obtenus, de manière à rendre complète la description eidographique de la localité.

83. C'est là l'instrument qu'on appellera *pantomètre*, c'est-à-dire *mesure tout* *1, puisqu'on peut, avec une seule observation faite avec cet instrument, obtenir les trois éléments dont il doit résulter la détermination complète d'un point dans l'espace.

84. Réservant à la seconde partie de cet ouvrage la description détaillée de l'instrument en question, on peut résumer ainsi qu'il suit les éléments qu'il peut fournir:

1° L'orientation immédiate par l'aiguille aimantée quand il n'y a pas de perturbation locale, orientation qui, à l'aide des observations correspondantes, s'il y a lieu, peut être exacte à $\frac{1}{20}$ de grade centésimal près;

2° L'angle azimutal de la visuelle dirigé à chaque point compté depuis le diamètre zéro de l'instrument, qui peut être exact pour le moins a 50″ centésimales près;

3° L'angle vertical qui peut avoir le même degré d'exactitude;

4° La distance du point observé à la station, qui a pour limite d'exactitude celle qui a été donnée au n° 38, et qui dépend de la distance à observer;

*1 Πᾶν tout, μέτρον mesure.

5° Une seule visée suffit pour obtenir ces trois résultats, ainsi que la position du point sur le papier où le croquis de la station doit être fait.

85. Pour fixer les idées sur le degré d'exactitude ci-dessus défini, on ajoutera que, si on suppose un point observé à la distance de 100 mètres, on aura pour le maximum d'erreur possible

$$\delta r' = 0^{\text{mèt.}},050$$
$$r\delta\theta \sin. 1'' = 0\ ,015$$
$$r\delta\varphi \sin. 1'' = 0\ ,015$$

d'où l'on voit que l'incertitude maximum sur la véritable position de ce point sera comprise dans un parallèlepipède de 15 millimètres de base opposée à œil de l'observateur sur 5 centimètres de longueur.

Il est aisé de se rendre compte, d'après le même principe, du degré d'approximation que l'on obtiendrait avec un autre instrument de semblable construction, mais adapté seulement à recevoir une lunette diastimométrique d'une plus ou moins grande puissance; pour satisfaire à tous les besoins, nous croyons convenable d'admettre trois dimensions, que nous désignerons par *grand*, *moyen* et *petit* pantomètre.

86. On a supposé jusqu'ici que la mire était tenue verticalement sur le point à relever, mais on n'a pas dit par quel moyen cette condition s'obtient: il est donc à propos d'indiquer ici, que la mire est garnie d'un manche et d'un marchepied en cuir, au moyen duquel il est

très facile de la maintenir immobile, et que sur un côté de la même mire se trouve adapté un niveau sphérique d'un mètre de rayon de courbure; ce niveau est rectifié de manière que, quand la bulle est au milieu, la mire se trouve parfaitement verticale; on trouvera dans la seconde partie tous les détails relatifs à la construction des mires que l'on obtient à-la-fois solides et légères au point d'être très facile à manier.

87. Les divisions de la mire sont numérotées, de manière à pouvoir facilement évaluer au coup d'œil la quantité S; mais comme il arrive quelquefois, que les branches des arbres et autres obstacles empêchent de distinguer les numéros, on a recours alors au moyen que voici; moyen qui a de plus la propriété de fournir un contrôle de l'exactitude de la lecture de chaque distance.

Outre la croisée ordinaire de fils qui sert dans les lunettes des instruments de géodésie à pointer, on a dans la lunette du pantomètre un système de fils disposés comme la figure 9: le fil AB est vertical; les fils CD, IL sont ceux qui déterminent l'angle diastimométrique par leur point d'intersection m', m'' avec le fil vertical; mais au lieu du fil unique, dont la position est marquée par la ligne ponctuée IL, figure 9, on place deux fils qui sont également éloignés, un en plus et l'autre en moins de la position IL d'une quantité telle, qu'en lisant sur la mire par chacun de ces deux fils, on obtient deux nombres, dont la somme est par construction la valeur de S en mètres, et la différence en est le

dixième, ce qui rend la lecture, et surtout l'estime des fractions plus exacte, et fournit une bonne précaution contre les erreurs que l'on pourrait commettre quand la mire n'est pas toute visible, ainsi qu'un moyen de savoir de suite jusqu'à quel point on approche du vrai par l'estime de la fraction.

88. Williams Green avait proposé de faire la mire très large, et il la divisait par des lignes parallèles tracées verticalement, et par des obliques vers l'une des extrémités, de la même manière que les échelles ticoniques; mais il ne paraît pas que cette méthode présente un avantage qui compense le plus grand embarras qui résulte d'une mire aussi large et pésante; au surplus l'expérience a démontré que l'estime des fractions sur les divisions de la mire peut se faire avec un peu d'exercice assez bien, pour ne mettre jamais en défaut les nombres que nous réclamons pour limite de tolérance.

CHAPITRE III.

RECTIFICATION DE L'INSTRUMENT, MODE D'OBSERVATION POUR LA DÉTERMINATION D'UN POINT, NOMBRES GÉNÉRATEURS ET SYSTÈME POLAIRE, PASSAGE AUX COORDONNÉES RECTANGULAIRES, FORMULES POUR OBTENIR CES DERNIÈRES.

SECTION VIII.

Rectification de l'instrument.

89. L'instrument est tellement combiné dans toutes ses parties, que quand il sort des mains du mécanicien il doit être susceptible d'être juste; mais l'ajustage définitif, c'est-à-dire la rectification des positions respectives de toutes les parties dont il se compose, c'est au géomètre à l'obtenir à l'aide du tournevis, et par le procédé que l'on va indiquer; on ne donnera pas ici la démonstration géométrique de ce procédé, qui est d'ailleurs facile à saisir, mais on la trouvera dans la seconde partie avec tous les développements désirables.

90. L'instrument étant placé sur son pied dans une

situation convenable, et amené à l'horizontalité par le moyen du niveau sphérique (J), on commencera par faire tourner le limbe de 200$^{gr.}$ environ.

Si dans ce mouvement la bulle du niveau sphérique n'a pas changé de place, on en conclut que le niveau est rectifié; en cas contraire on remarque le sens dans lequel a eu lieu le déplacement de la bulle, et on la ramène directement au centre du niveau, moitié par les vis de rectification, et moitié par les vis du pied; on répète l'épreuve jusqu'avoir obtenu l'immobilité de la bulle, quelque soit la position azimutale de la lunette; en cet état le niveau est rectifié, et le limbe est horizontal.

91. Il faut ensuite s'assurer si la ligne de foi de la lunette est à angle droit avec son axe de rotation, parce que sans cette condition la lunette décrirait dans l'espace un cône, et non pas un plan; pour cela on choisit un point dans l'horizon de la station, sur lequel on vise comme à l'ordinaire, et on remarque l'angle accusé par le vernier sur le cercle azimutal; on fait faire alors à la lunette une demie révolution dans le sens vertical, et on ramène l'objectif à sa première direction par la rotation azimutale, et on achève de pointer exactement la lunette sur le même point; si le vernier a par cela parcouru 200$^{gr.}$ exactement, c'est une preuve que la condition qu'il s'agit de vérifier est remplie; dans le cas contraire on corrige la moitié de la déviation par le moyen de la vis de rappel de l'instrument, et l'autre moitié par les vis de rectification de la lunette.

92. Le plan décrit par la lunette dans son mouvement doit être vertical quand le niveau transversal est exactement calé; pour vérifier si cette condition est remplie, on mesure au cercle azimutal par la méthode ordinaire, l'angle compris entre deux objets que l'on choisit, de manière que l'un soit le plus possible élevé au-dessus de l'horizon de la station, et l'autre le plus possible déprimé; on opère ensuite l'inversion complète de l'instrument comme dans le § précédent, et on remesure le même angle; si les deux résultats sont identiques, c'est une preuve qu'il n'y a pas à retoucher à cette partie de l'instrument; dans le cas contraire, si l'objet de droite est plus élevé, et si le second résultat est plus grand que le premier, c'est l'extrémité de droite du niveau qui est trop élevé; on la corrige par approximation, et on répète l'épreuve jusqu'à obtenir une coïncidence satisfaisante; tout géomètre qui a un peu de pratique du maniement des instruments obtiendra ce résultat avec facilité.

93. La ligne de foi de la lunette étant verticale, le niveau longitudinal calé, le vernier du cercle vertical doit marquer *zéro;* pour reconnaître si cette condition a lieu, on amène la lunette sur un point éloigné, de manière que l'image du point visé vienne se ranger exactement au milieu du champ sur le fil horizontal EF (*fig.* 8 et 9), ayant soin que le niveau longitudinal soit exactement calé; dans cette position on lira au vernier du cercle vertical un angle que nous indiquerons par ψ; on

BIBLIOTECA DELL'
R. UNIVERSITÀ
DI TORINO

retourne ensuite l'instrument, et après avoir pointé de la même manière et avec les mêmes précautions, sur le même point on obtient un second angle φ''; si maintenant φ représente la véritable distance zénitale du point observé, et ε l'erreur existante dans la position du *zéro* de ce cercle, on aura

$$\varepsilon = \frac{\varphi' + \varphi''}{2},$$

$$\varphi = \frac{\varphi' - \varphi''}{2}.$$

D'après les valeurs ainsi déterminées de ε et de φ, il sera facile d'amener le niveau à sa véritable position par la règle suivante: si $\varepsilon - 200^{gr}$ est positif, c'est l'extrémité du niveau longitudinal la plus voisine de l'observateur qu'il faut baisser par la vis de rectification; et c'est le contraire si $\varepsilon - 200^{gr}$ est négatif.

94. Il resterait à parler de la manière de s'assurer de l'orientation, que l'orientateur magnétique doit fournir; mais comme cette partie de la rectification de l'instrument n'est pas indispensable, et qu'elle exige d'ailleurs des développements dans lesquels on n'est pas entré jusqu'ici, on n'en traitera que dans la seconde partie. On supposera dans ce qui suit, que cette condition a été remplie, et que par conséquent, quand l'orientateur marque *zéro*, le diamètre zéro de la division du cercle azimutal correspond à une position de la lunette telle, que son axe se tient sensiblement dans le plan du méridien terrestre.

95. Si on voulait s'assurer de l'exactitude de l'angle diastimométrique, on pourrait avoir recours à la mesuration matérielle d'une ligne sur un terrain bien uni avec tous les égards possibles, et la comparer au résultat que donnera la mesure micrométrique; mais l'instrument lui-même peut servir à cette vérification de la manière suivante :

On amène la lunette à l'horizontalité, et on se place en regard d'un point bien nettement observable, ayant l'attention d'amener une branche de la griffe qui supporte l'instrument dans la direction de la lunette; on amène successivement l'un après l'autre les fils du rectícul sur le même objet, et on observe les angles accusés par le vernier du cercle vertical; ces angles comparés, à ce que le calcul donne pour les distances angulaires entre les fils du micromètre, font connaître si leur position est exacte; mais une première mesure des angles micrométriques faite ainsi sur un cercle qui donne seulement la minute centésimale, ne serait pas suffisante, on répétera donc le même angle au moins dix fois, en se servant pour cela des vis du pied alternativement avec la vis de rappel du cercle vertical, ayant l'attention de maintenir bien calé le niveau transversal.

Dans les bureaux topographiques, ainsi qu'aux bureaux du génie militaire, du corps des ponts et chaussées, du cadastre, etc., on pourrait avoir pour cet usage un instrument semblable à celui dont on se sert à l'institut mécanique du Belveder pour l'étalonnage des micro-

mètres, instrument qui rend cet étalonnage indépendant de toute mesure lineaire ou angulaire, et qu'on décrira dans la seconde partie.

Quant à la vérification des micromètres qu'un ingénieur vérificateur voudrait faire aux instruments des géomètres du cadastre en arrivant auprès d'eux sur le terrain même, elle s'obtient très facilement par la comparaison avec son propre instrument, qui se fait en visant les deux lunettes l'une contre l'autre, comme on expliquera dans la seconde partie.

SECTION IX.

Mode d'observation pour la détermination d'un point; nombres générateurs.

96. L'instrument étant ainsi bien vérifié dans toutes ses parties, il peut servir à toutes les observations auxquelles il est destiné, et il est bien rare qu'il se dérange dans le cours d'une campagne. Cependant quand on l'emploie dans des opérations de longue durée ou bien après des voyages sur les voitures, il est bon de vérifier si aucun dérangement n'est survenu dans ses parties. Pour ne pas revenir sur cette matière on le supposera dorénavant toujours bien rectifié; voici maintenant comment il faut s'y prendre pour arriver à la détermination complète d'un point relativement à trois axes orthogonaux, dont un vertical et un autre passant pour le zéro du cercle azimutal supposé dans le méridien.

97. Après avoir stationné l'instrument dans l'endroit qu'on a jugé convenable, on envoie la mire sur les points à déterminer l'un après l'autre suivant un ordre convenable, et on donne à chaque point un numéro d'ordre, qu'on écrit au carnet, avec une qualification abrégée qui sert à prévenir tout équivoque; si l'objet du relèvement est principalement la détermination de la surface agraire, il est bon de suivre autant que possible les contours des parcelles dans le sens opposé à la numération de l'instrument, on en verra plus loin le motif; on dirige

ensuite la lunette sur la mire, on cale les niveaux cylindriques, s'ils ne se trouvent pas calés, on vise le fil supérieur du micromètre sur l'image renversée du pied de la mire marquée zéro, et on observe le nombre des parties et leurs fractions indiquées par les deux autres fils; leur somme est la valeur de S; on inscrit le tout au carnet *1, chaque nombre à sa colonne, on lit alors les verniers des deux cercles, et ce sont les valeurs de θ et de φ qu'on inscrit pareillement à leur colonne dans le carnet; la même opération se répète pour tous les points visibles de la station jusqu'à avoir accompli le tour d'horizon, et que tout ce qui est visible de la station donnée soit relevé; on montrera plus loin le mode de rattachement et de conduite d'un relèvement qu'exige plusieurs stations.

98. On a recueilli ainsi pour chaque point des nombres, qui sont les valeurs de S, θ, et φ, et si au lieu que S n'est qu'une fonction de la distance on avait la distance elle-même inclinée dans l'espace, c'est-à-dire le rayon qui s'étend de l'instrument au point observé, ce seraient là les *trois coordonnées polaires* du point même rapportées au centre de l'instrument dans la plus exacte acception mathématique de cette expression; mais S n'est pas le rayon vecteur, et de plus il arrive par fois que les valeurs de θ et de φ sont elles-mêmes passibles de quelque correction, qu'on détermine par d'autres procédés;

*1 Voir le modèle n° I et son explication.

donc au lieu de les appeler *coordonnées polaires* on les appellera *nombres générateurs*, parce que c'est de ceux-là que l'on tire, par les procédés que l'on va indiquer, d'abord les coordonnées polaires proprement dites, puis, de ces dernières, les coordonnées rectangulaires de chaque point par rapport à trois plans orthogonaux.

Les nombres générateurs sont inscrits, savoir: les lectures sur les fils à la troisième colonne; la valeur de S qui résulte à la cinquième colonne, lignes blanches; les lectures φ, et θ des deux cercles, aux septième et huitième colonne, lignes blanches; on appellera *observation complète* celle où les trois nombres générateurs auront été observés et notés, et *observation incomplète* celle où l'un d'eux manquera: car on verra plus loin que bien souvent les observations incomplètes ne conduisent pas moins à des déterminations utiles.

On désignera aussi collectivement par l'appellatif de *système polaire* les résultats enregistrés aux colonnes 6, 7, 9 du carnet, quoique la colonne 6^{me} ne contienne pas la longueur du rayon vecteur, mais bien sa projection sur l'horizon, et avec l'appellatif de *système rectangulaire* le contenu des colonnes 4, 5, 6, 7, 8, 9, ligne grisée, dont on expliquera plus loin la formation; quant au système polaire il se compose, pour nous, de la distance réduite à l'horizon de l'angle vertical compris entre la verticale du lieu et l'axe de la lunette à l'instant de l'observation, et de l'angle compris entre le méridien vrai et le vertical du point observé, compté de zéro à 400^{gr} du nord par l'ouest.

SECTION X.

Formules pour passer des nombres générateurs ou du système polaire qui en dérive aux coordonnées rectangulaires.

99. On a vu maintenant quelles sont les observations à faire sur le terrain pour arriver à la détermination de la position relative d'un ou plusieurs points visibles de la station où l'instrument se trouve établi; mais ni les nombres générateurs eux-mêmes, ni le système polaire qui en dérive, ne sont pas directement propres à tous les usages pour lesquels on relève des plans; il faut donc recourir à une transformation qui, en rendant le travail conforme aux idées généralement reçues, introduise dans toutes les parties de l'opération l'uniformité et l'harmonie, par lesquelles seules on peut obtenir toute la clarté désirable, et qui soit propre au calcul immédiat des surfaces agraires ainsi qu'à l'obtention de tout autre résultat qu'on puisse désirer.

100. Le système des coordonnées rectangulaires réunit tous ces avantages: ce système est adopté dans les plus grandes opérations, et dans les levées trigonométriques de tous les ordres; il se retrouve encore dans les plus humbles opérations agrimétriques, celles que l'on exécute avec l'équerre d'arpenteur sur de très petites étendues; car, l'opération de l'équerre consiste précisément

dans le tracé, et la mesuration matérielle des coordonnées rectangulaires de tous les points par rapport à deux axes choisis arbitrairement. Donnez à la base des opérations d'équerre une direction perpendiculaire au méridien, et les résultats que vous obtiendrez seront des coordonnées rectangulaires, qui feront système avec les données trigonométriques, et il y a même des géomètres qui ont pour cela sur l'équerre une petite boussole; mais ce procédé, qui serait long et d'une exécution presque impraticable en colline et en montagne, quand il s'agit d'une grande surface, avait cédé en Italie la place à la planchette, qui se trouve à son tour repoussée maintenant par le progrès de l'art *1.

101. La nouvelle méthode vient remplir la lacune qui restait dans l'application du système des coordonnées rectangulaires, elle est propre par son degré d'exactitude à accoster directement les opérations trigonométriques du troisième ordre et par sa célérité à descendre jusqu'aux détails les plus minutieux d'un relèvement partiel. C'est donc en coordonnées rectangulaires, qu'il convient de transformer les nombres générateurs trouvés par l'observation.

102. La formule (3) donne la distance horizontale d, comprise entre les verticales de l'instrument et du point observé; θ étant l'angle azimutal MON, compris entre le rayon visuel et le méridien, on a (*fig.* 10)

$$\text{MP} = x = d \sin. \theta \quad (5),$$

$$\text{MQ} = y = d \cos. \theta \quad (6).$$

*1 Voir la note à la page 30.

103. On est dans l'usage de graduer les instruments de manière qu'en faisant tourner la lunette du nord par l'ouest, le vernier parcourt de $0^{gr.}$ à $400^{gr.}$ tout le tour de l'horizon dans le sens de la numération; on adoptera donc conventionnellement cette manière de compter la valeur de θ; les signes algébriques de x et de y seront respectivement les mêmes que ceux du sinus et du cosinus de θ. On est pareillement dans l'usage de compter les hauteurs des points observés au-dessus de l'horizon de la mer, c'est-à-dire de bas en haut, donc dans la formule (4) ce sera pareillement le signe de cot. φ, qui déterminera celui de la troisième coordonnée z.

104. On ne terminera pas ce chapitre sans montrer dans un seul cadre les formules réunies dont on a besoin pour arriver à ces trois résultats. Ces formules les voici:

Données recueillies par l'observation aux nombres générateurs

- S Portion de la mire interceptée dans l'angle diastimométrique;
- θ Angle azimutal *1 } lus aux verniers de
- φ Angle vertical } l'instrument;

Inconnues

- d Distance horizontale;
- x } Coordonnées rectangulaires rapportées
- y } à la méridienne, à la perpendiculaire
- z } et au plan horizontal passant par le centre de l'instrument.

*1 On suppose ici que l'instrument était bien orienté.

On obtiendra les inconnues par les formules

$$\left.\begin{aligned} d &= \mathrm{S}\,\overline{\sin.}^{-1}\varphi \\ x &= d\sin.\theta \\ y &= d\cos.\theta \\ z &= d\cot.\varphi - \tfrac{1}{2}\mathrm{S} \end{aligned}\right\} (7).$$

On rappellera ici que S est donné en parties de la mire, mais que $\frac{1}{2}$S doit être donné en mètres, et que si α est tel qu'on aie $2\sin.\frac{1}{2}\alpha = 0^{mèt.},02$, ce qui est convenable dans la plupart des cas, la quantité $\frac{1}{2}$S est alors en centimètres, représentée par le même nombre qui représente S en parties de la mire.

105. Quoique ces formules soient excessivement simples, et quoique il s'agisse toujours de nombres assez petits pour qu'il suffise d'employer au calcul les logarithmes à trois chiffres; l'opération serait cependant encore trop longue pour devenir d'une application générale si on ne pouvait avoir recours à des tables spéciales calculées, ou mieux à certains moyens accélératifs que l'on va indiquer dans le chapitre suivant, par lesquels tout calcul est éliminé.

Ces moyens sont, comme on le verra, si faciles à saisir, si prompts dans la pratique, qu'ils ne laissent vraiment rien à désirer.

CHAPITRE IV.

COMPOSITION, ET USAGE DE L'ÉCHELLE LOGARITHMIQUE, CONNUE SOUS LE NOM D'ÉCHELLE DE GUNTER OU DE RÈGLE A CALCUL, MODIFIÉE POUR LA RENDRE PROPRE AUX EXIGEANCES DE LA NOUVELLE MÉTHODE DU RELÈVEMENT ET NIVELLEMENT.

SECTION XI.

Composition de l'échelle logarithmique appropriée aux exigeances de la nouvelle méthode de relèvement et nivellement.

106. On n'entrera ici dans aucune discussion sur l'origine de l'échelle logarithmique qui est attribuée aux Allemands par M. Ampère, et qui porte cependant le nom d'échelle de *Gunter*, géomètre distingué, qui vivait en Angleterre vers l'année 1630, c'est-à-dire peu de temps après l'invention des logarithmes; ces échelles furent reproduites par différents auteurs, et on en construisit de diverses formes et dimensions, les Allemands les dispo-

sèrent en demi-cercle, les Anglais à coulisse; Gattey, en 1816, les disposa en cercle entier; Lambert, en 1761, en fit de quatre pieds de longueur, qui, divisées avec soin, remplaçaient complètement les tables des logarithmes à cinq chiffres. Lenoir en construit depuis 1820; il prend pour unité logarithmique une longueur de $0^{mèt.},175$, et pour d'autres plus petites $0^{mèt.},125$. Il y a long-temps qu'on avait en Angleterre cet instrument dans les mains des ouvriers, même de la dernière classe, et en France on s'efforce depuis quelques années d'en rendre la construction facile et peu dispendieuse, et d'en populariser l'usage, tant on est persuadé de sa grande utilité dans les arts. J. F. Arthur, en 1827, Ph. Mouzin, en 1837, sont les auteurs les plus récents qui, par des explications longues et détaillées, et par des nombreux exemples, ont tâché de mettre les échelles logarithmiques à la portée de tout le monde; de pareilles échelles se trouvent éminemment applicables au genre de travail dont il est ici question, il n'a fallu qu'y donner une disposition convenable pour obtenir le plus promptement et le plus exactement possible les résultats auxquels on vise. On en donnera ici succinctement la théorie, que l'on fera suivre par des exemples variés, mais pris dans la matière dont nous nous occupons. Pour toute autre application de l'échelle logarithmique, on pourra recourir avec fruit aux ouvrages déjà cités de Mouzin et d'Arthur.

107. Une longueur arbitraire AB (*fig.* 11) étant prise

pour unité, on peut imaginer qu'elle représente le log. 10; les logarithmes des nombres 2, 3, 4 étant des fractions, on pourra les représenter en longueur sur la ligne AB, ce qui fournira une division décroissante telle qu'on la voit dans la figure 11. On peut contreposer à la division les nombres, dont chaque longueur représente le logarithme, et l'unité, ayant son log. = zéro, trouvera sa place à l'extrémité A.

108. Si sur une même droite on ajoutera bout à bout plusieurs échelles semblables, comme dans la figure 11, il est clair que les longueurs AC, AD, etc. représenteront les logarithmes de 100, de 1000, etc., et les longueurs intermédiaires des échelles, comptant toujours du point A, représenteront les logarithmes de 20, 30, etc., ou bien de 200, 300, etc. suivant l'ordre de l'échelle à laquelle ils appartiennent.

109. Maintenant si l'on veut obtenir la longueur qui correspond à la somme de deux logarithmes: par exemple, du logarithme de 2 et du logarithme de 3, on n'aura qu'à prendre avec un compas l'ouverture A ..... 2 et la porter en avant depuis le point 3; la pointe du compas ira tomber dans un certain point de l'échelle qui désignera les longueurs réunies des logarithmes de 2 et de 3; dans le cas proposé la pointe du compas tombera sur le point G, produit de 2×3. Pareillement, si on voulait trouver sur l'échelle le point qui correspond à la différence entre le logarithme de 8 et le logarithme de 2, on n'aurait qu'à prendre sur l'échelle cette différence avec un compas, et

la porter du point A en avant, et observer le point où elle tomberait; ce serait ici 4 quozient de $\frac{8}{2}$.

110. Mais les additions et les soustractions des logarithmes conduisent à la connaissance du logarithme du produit ou du quotient des nombres correspondants, voilà pourquoi les points ainsi cherchés sur l'échelle ont coïncidé, dans le premier exemple, sur le nombre 6, qui est le produit de 2×3, et dans le second exemple sur le nombre 4 qui est le quotient de $\frac{8}{2}$.

111. On voit donc que si ces échelles seront convenablement subdivisées, elles seront propres à résoudre les problèmes d'arithmétique par des portées de compas.

112. On se donnera maintenant une autre ligne droite sur laquelle la même longueur AB, prise pour unité, soit portée plusieurs fois de suite; sur cette seconde ligne on tracera une échelle des subdivisions du même genre, mais correspondantes aux logarithmes des sinus et des cosinus de tous les arcs du cercle, vis-à-vis lesquelles on cotera le nombre des grades correspondants; et sur une troisième ligne droite on opérera de même pour les tangentes et les cotangentes; l'ensemble de ces trois échelles fournira le moyen d'obtenir à coups de compas la résolution des formules du § 104, ainsi que de toute autre qui soit impliquée de fonctions circulaires.

113. La formule (3) exige, pour être résolue avec les échelles, deux coups de compas au lieu d'un seul,

à cause que c'est le sinus carré et non le sinus simple que l'on emploie; et comme cette opération doit se répéter pour tous les points relevés, il sera utile de disposer encore une échelle qui donne immédiatement les sinus carrés de tous les angles compris entre $60^{gr.}$ et $140^{gr.}$; car c'est là la limite des valeurs que l'angle φ peut prendre en pratique. On conçoit assez comment cette petite échelle doit être construite.

114. Ces quatre échelles peuvent être tracées sur un carton ou sur une plaque métallique, et être employées avec un compas, comme on fera voir ci-après, et cela suffira pour le petit pantomètre, quand on aura pris la longueur $AB=0^{mèt.},20$; mais pour égaler l'exactitude que l'on obtient du grand pantomètre, ce mode d'opérer exigerait des précautions particulières qui ferait perdre une partie de la promptitude qu'on en attend, ou bien il faudrait construire les échelles dans une longueur qui les rendrait incommodes. Il y a alors deux formes également bonnes à donner aux échelles logarithmiques: la première consiste dans la règle à coulisse (*sliding rule* des Anglais) exécutée sur métal *1, qu'on emploie sans compas, et qui permet d'avoir des divisions beaucoup plus soignées; la seconde consiste dans un cylindre ou un cercle d'un diamètre proportionné, sur la périphérie duquel les mêmes divisions sont tracées; l'un et l'autre s'em-

*1 On emploie beaucoup en Angleterre de telles *échelles à coulisse* gradués sur bois, surtout pour la marine.

ploient sans compas, et se lisent comme on lit les verniers sur un théodolite.

115. La règle à coulisse devrait être construite, ainsi qu'il est indiqué par la figure 12, dans une longueur de $0^{mèt.},30$ à $0^{mèt.},40$, en y distribuant les divisions dans l'ordre que la figure indique *1; la résolution des quatre formules du § 104 se fait d'un seul coup, les quatre régions de la règle intérieure sont occupées par les logarithmes des nombres, ainsi que la région extérieure, inférieure à droite.

La région supérieure à droite est occupée par les compléments logarithmes des sinus et des cosinus; finalement on a ajouté dans le *couvercle* trois divisions en parties égales, à chacune desquelles sont contreposés respectivement les logarithmes des tangentes, cotangentes, des sinus et cosinus, et les logarithmes des nombres; on opère sur cette règle par le mouvement de la coulisse qui est réglée par un pignon, et on a une loupe pour faciliter la lecture de la division.

116. Dans le cylindre logarithmique c'est la circonférence entière qui est prise pour unité (*fig.* 13); AB est un cylindre partagé dans sa hauteur par des bandes parallèles d'une largeur convenable sur lesquelles les

*1 Nous en avons fait construire dans la longueur d'un mètre environ avec l'unité logarithmique $=0^{mèt.},30$ trois fois répétées, elles sont à curseur, et sont extrêmement commodes surtout pour le calcul des surfaces agraires et des terrassements; on peut ajouter d'un seul coup plusieurs logarithmes et obtenir en conséquence un produit de plusieurs facteurs (K).

divisions sont tracées; le fond supérieur du cylindre est mobile, et avec lui la première division qu'est de logarithmes des nombres; la bande suivante est occupée par les logarithmes des sinus et des cosinus, et la troisième par les logarithmes des tangentes et des cotangentes, la quatrième par les logarithmes des nombres; ces trois bandes font corps ensemble, et une alidade fixée à l'autre fond du cylindre est disposé pour parcourir les divisions, elle est garnie d'un fil très fin, tendu suivant une génératrice du cylindre; sur le fond plat du cylindre, où l'alidade tourne, on a tracé de plus une division en parties égales (1000 avec vernier de 10), au moyen de laquelle on peut avoir numériquement les logarithmes tabulaires, ainsi qu'une division de sinus carré entre $60^{sec.}$ et $140^{sec.}$, et une division de sinus verse naturels; c'est en faisant tourner le cercle supérieur, et l'alidade qu'on opère; on peut s'aider à lire au moyen d'une loupe, que nous avons l'habitude de fixer sur le porte-crayon pour plus de commodité.

117. Pour expliquer l'usage des échelles logarithmiques avec la clarté nécessaire, on commencera par celles qui exigent l'usage du compas comme étant plus faciles à bien comprendre, elles sont représentées dans la figure 14. Mais avant de donner des exemples il est nécessaire de mettre sous les yeux du lecteur les remarques suivantes:

1° Tous les logarithmes se comptent de gauche à droite sur les échelles, et c'est toujours de l'un des

points A, B, C, etc. (*fig.* 11) qu'il faut partir; on retient de mémoire le nombre d'unité dont se compose la caractéristique du logarithme que l'on veut employer, et on prend avec le compas la partie décimale pour l'usage; lesdits points sont marqués dans la figure 14 pour des chiffres gothiques;

2° Il convient parfois d'employer le complément arithmétique d'un logarithme, et on voit facilement que cela revient à prendre en arrière du point de départ sur l'échelle au lieu de le prendre en avant;

3° Ajouter un logarithme à un autre pour obtenir le produit de deux quantités, c'est porter *en avant* l'ouverture du compas qui représente le logarithme de l'une des quantités données en partant du point où termine sur l'échelle le logarithme de l'autre, et on voit par la marche de la numération que le mot *en avant* signifie ici *de gauche à droite;* retrancher c'est l'opposé;

4° Ajouter un logarithme c'est la même chose que retrancher son complément, et viceversa;

5° Pour avoir le logarithme du carré d'un nombre ou d'un sinus, etc. il n'y a qu'à doubler au compas la longueur qui représente le logarithme de ce nombre, ou de ce sinus, etc.; mais quand il s'agit d'extraire la racine carrée, il faut, en prenant la moitié au compas, faire attention à la caractéristique, car si celle-ci est un nombre pair on doit prendre simplement la moitié de la longueur qui représente le logarithme du carré donné; mais si la caractéristique est impaire, alors il faut ajouter

la moitié de l'unité de l'échelle, ce qui peut se faire facilement par l'échelle des parties égales qui est tracée au bas du cadre, ou bien on remarquera que tout logarithme, dont la caractéristique est un nombre pair porte à son complément, la caractéristique impaire et viceversa, et comme on peut opérer indifféremment sur le logarithme ou sur son complément, il conviendra d'opérer sur celui des deux dont la caractéristique est paire.

118. Ces remarques suffiront pour le moment pour arriver aux résultats qu'on se propose ici d'obtenir; examinons maintenant la disposition des échelles représentées dans la figure 14.

La première ligne de division au bas du cadre est de parties égales, la longueur 1, 2 y est prise pour unité et y est divisée en mille parties égales.

119. L'échelle qui suit, considérée dans la numération inférieure, présente tous les logarithmes des dixaines entières comprises entre 10 et 1000: on aurait dû subdiviser encore de manière à avoir les logarithmes des unités comprises dans les mêmes limites, mais les divisions auraient été trop rapprochées. On a donc divisé en dixièmes d'unité entre 10 et 20 en 10^{mes} d'unité, pris deux à deux entre 20 et 40, et en demie unité entre 40 et 100; ces mêmes subdivisions répétées dans la région suivante ont produit les unités une à une entre 100 et 200, deux à deux entre 200 et 400, cinq à cinq entre 400 et 1000.

120. La même longueur étant prise pour unité, on a gradué sur la seconde échelle logarithmique les logarithmes sinus des angles compris entre $1^{gr.}$ et $199^{gr.}$, c'est ce qui est indiqué par la numération supérieure. On a suivi pour la gradation de la subdivision une progression analogue à celle qu'on a suivi pour l'échelle précédente, ce qui est au reste facile à comprendre sur la figure: les points marqués des chiffres gothiques indiquent l'origine des parties décimales, des logarithmes, ces nombres sont des caractéristiques ainsi que leurs analogues dans les autres échelles; mais il est à observer que les caractéristiques 6, 7, 8 qui sont placées en dehors de l'extrémité à gauche des échelles 1^{re}, 2^{me}, 3^{me}, ainsi que la caractéristique 9 placée à l'extrémité à gauche de l'échelle n° 5, supposent à ces échelles le complément qui leur manque pour faire une unité logarithmique comptée en arrière depuis la caractéristique suivante; on ne doit donc pas, en opérant, partir de celles-là avec le compas, mais il faut opérer par complément: les caractéristiques ne sont là que pour rappeler à l'opérateur l'ordre qu'occupe le logarithme qu'il va employer.

121. Les mêmes divisions servent pour les cosinus, parce qu'on a sin. a = cosin. $100^{gr.} - a$; on a donc numéroté d'après cette règle à la partie inférieure la même échelle, et il en est résulté les logarithmes cosinus des arcs compris entre $0^{gr.}$, et $99^{gr.}$, et entre $301^{gr.}$, et $400^{gr.}$; ce sont là les arcs inscriptibles sur cette échelle dont les cosinus sont positifs.

122. On a par la théorie des fonctions circulaires:

$$\text{sin. } a = -\text{sin. } 200 + a,$$
$$\text{cos. } a = -\text{cos. } 200 + a;$$

d'où l'on conclut que, pour tout arc qui ne se trouve pas sur les échelles, on peut l'augmenter de $200^{gr.}$, ce qui le ramène nécessairement à un arc inscrit sur l'échelle et opérer comme précédemment, pourvu qu'on se rappelle que son sinus ou son cosinus est négatif.

123. Il manque encore à ces échelles les arcs compris entre $0^{gr.}$, et $1^{gr.}$, et entre $199^{gr.}$ et $200^{gr.}$ pour les sinus, et leurs correspondants pour les cosinus; mais on fait observer ici, que dans ces limites là les fonctions circulaires qui nous occupent peuvent être considérées comme proportionnelles à l'arc, d'où il suit que si on pose $m = \frac{\text{sin. } a}{a}$ on peut considérer m comme constant, et log. sin. a = log. a + log. m, on pourra donc prendre sur l'échelle des nombres les logarithmes des degrés et minutes dont on voudra le logarithme sinus et on l'augmentera du logarithme de m; mais cette opération se trouve toute faite dans la fig. 14, parce que on a marqué sur l'échelle le point correspondant au logarithme m, et sur la numération supérieure on a coté les caractéristiques convenables à ce même point: donc pour prendre les logarithmes sinus et cosinus, dont il est question, on n'aura qu'à partir de ces points.

Un coup d'œil sur la numération supérieure de la

deuxième échelle, suffit pour voir comment elle rend les logarithmes sinus qui manquent à la troisième: on n'a pas apposé une troisième numération pour le cosinus afin de ne pas trop embarrasser l'échelle, mais avec un peu d'exercice tout opérateur pourra s'en passer.

124. Sur la quatrième échelle on a gradué de la même manière, et avec les mêmes principes les logarithmes des tangentes depuis $1^{gr.}$ jusqu'à $50^{gr.}$ (numération supérieure), et les cotangentes de $50^{gr.}$ à $99^{gr.}$ (numération inférieure); mais on a

$$\text{tang.} = \frac{1}{\text{cotang.}},$$

d'où tire

$$\text{log. cotang.} = \text{compl. log. tang.};$$

il est donc évident que cette échelle donne les log. des tang. et des cotang. depuis $1^{gr.}$ jusqu'à $99^{gr.}$.

125. Depuis zéro jusqu'à $1^{gr.}$, et de $99^{gr.}$ à $100^{gr.}$ l'échelle des nombres, numération supérieure, suffit d'après les mêmes considérations qu'au § 123.

126. Pour les autres quadrants on n'a qu'ajouter $100^{gr.}$, $200^{gr.}$, $300^{gr.}$ à la numération de l'échelle pour que l'arc donné y rentre; mais il faut se souvenir que si pour trouver l'arc donné on ajoute à la numération de l'échelle $100^{gr.}$ ou $300^{gr.}$, la tangente et la cotangente cherchées sont négatives, tandis que si on ajoute $200^{gr.}$ elles sont positives.

127. Pour faciliter aux opérateurs la règle des signes

on a tracé sur la même planche deux figures qui l'indiquent tant pour les sinus et les cosinus que pour les tangentes et les cotangentes.

128. Ces échelles suffiraient à la rigueur pour tous les cas échéants dans le relèvement d'après la nouvelle méthode, mais on peut abréger l'opération par laquelle on obtient la valeur de d par le moyen de l'échelle cinquième; cette échelle, ou pour mieux dire cette portion d'échelle, donne, en comptant de droite à gauche, les compléments des logarithmes des sinus carrés de tous les angles compris entre $60^{gr.}$ et $140^{gr.}$, et ce sont là les limites dont on ne sort presque jamais en pratique; c'est sur cette échelle qu'on prend au compas ce qu'on doit retrancher du logarithme de S pour arriver à la valeur de d.

SECTION XII.

Usage de l'échelle logarithmique pour transformer les nombres générateurs en coordonnées polaires *1 *et en coordonnées rectangulaires.*

129. D'après ce qui vient d'être dit, rien n'est plus facile que d'arriver aux résultats qu'on s'est proposé d'obtenir, savoir: de déduire des nombres générateurs les coordonnées rectangulaires de chaque point; cependant on va éclaircir encore ceci par un exemple.

Soit un cas de relèvement représenté par les nombres générateurs suivants, et rendu sensible en perspective dans la figure 15:

POINT OBSERVÉ	S	θ	φ	
M	156,3	38,55	85,36	

La mire étant telle que $2\sin.\frac{\alpha}{2} = 0{,}02$.

Il s'agit d'obtenir

$d = S\,\overline{\sin.}^2\varphi$ . . . . . $+ 133{,}0$,
$x = d\sin.\theta$ . . . . . $+ 75{,}6$,
$y = d\cos.\theta$ . . . . . $+ 109{,}2$,
$z = d\cot.\varphi - \frac{1}{2}S = + 31{,}05 - 1{,}56 = + 29{,}89$.

*1 On a vu au § 98, que les nombres générateurs sont S, θ, φ, tels qu'ils résultent de l'observation, et que le système polaire consiste en d distance horizontale; θ, corrigé s'il y a lieu pour le ramener au méridien vrai; et φ qui n'a pas besoin de correction si l'instrument est bien rectifié.

Pour arriver à ces résultats on opérera ainsi qu'il suit: sur l'échelle n° 5 on prendra par une ouverture de compas le complément du logarithme de $\overline{\sin.}^2$ 85,36, c'est depuis l'extrémité à droite de l'échelle jusqu'à la division susdite, on cherchera sur l'échelle n° 2 la division 156,3, et on y portera en déduction l'ouverture de compas prise sur l'échelle n° 5, il restera 133,0 comme ci-dessus pour la valeur de d.

L'échelle n° 3, numération supérieure, donnera depuis son extrémité à droite jusqu'à la division correspondante à 38,55 une ouverture de compas, qui correspondera au complément arithmétique du log. sinus 38,55: cette ouverture de compas sera encore portée sur l'échelle n° 2 en déduction de 133,0 qui est la valeur de d trouvée ci-dessus, et il restera 75,6 pour la valeur de x.

La même échelle n° 3 en considérant la numération inférieure, fournira de même une ouverture de compas correspondante à 38,55, ce sera le complément arithmétique de log. cos. 38,55; ce sera encore en déduction de 133,0 sur l'échelle qu'il faudra le porter, et il en résultera 109,2 pour la valeur de y.

Le logarithme de cot. φ pourra être pris sur l'échelle n° 4, soit par complément, soit par logarithme:

si c'est par logarithme qu'on veut opérer, l'ouverture de compas devra se prendre depuis la caractéristique 9 jusqu'à la division 85,36, on portera alors cette ouverture en addition à 133,0 sur l'échelle n° 2, et on tombera sur 310,5; mais comme la caractéristique pour 133,0 est 2, et pour cot. 85,36 elle est 9, ainsi la somme de ces deux caractéristiques indiquera que la caractéristique du résultat est 1; c'est pour cela qu'au lieu de 310,5 on écrira 31,05 *1. La quantité $\frac{1}{2}$S, d'après la règle du § 43, revient à autant de centimètres qu'il y a de parties en S; elle sera donc 156 centimètres, savoir: $1^{mèt.},56$ qui, déduite de 31,05, donnera définitivement, pour la valeur de z, $29^{mèt.},89$ comme ci-dessus.

Quant aux signes de ces quantités on n'a qu'à les régler d'après les figures relatives tracées sur la planche même.

130. L'échelle logarithmique est d'un secours continuel dans tout ce qui se rapporte aux opérations de relèvement, et nivellement par la nouvelle méthode, mais les opérations jusqu'ici décrites doivent suffire pour faire comprendre l'esprit de la chose, de manière que les ingénieurs ne trouveront aucune difficulté à la solution matérielle sur l'échelle logarithmique de tous les

*1 Il est impossible, en pratique, de se tromper sur la position de la virgule que la caractéristique détermine, pour peu qu'on réfléchisse à la nature du résultat qu'on doit obtenir.

problèmes qui se présenteront par la suite. Quant au praticien qui ne voudra pas approfondir les théories, il trouvera dans un autre chapitre des exemples et des types de disposition d'opérations qui les lui rendront tout aussi faciles.

131. On ne s'étendra pas ici sur la manière de se servir des échelles à coulisse, et des cylindres logarithmiques plus faciles à comprendre sur l'instrument même, d'après ce qui a été dit des échelles fixes ci-dessus décrites, que par une longue explication, où on ne pourrait que répéter la plupart des mêmes choses; mais on conçoit qu'elles sont susceptibles d'une précision beaucoup plus grande, soit pour l'exactitude et la netteté des divisions tracées sur métal, qui permettent de pousser plus loin la subdivision, soit parce que les mêmes divisions peuvent y être observées à la loupe, et se lisent comme on lit les verniers des instruments dont elles égalent l'exactitude.

L'échelle en carton, telle que la figure 14 la représente, pourra toujours suffire aux relèvements que l'on fait avec le petit pantomètre, tandis que l'échelle à coulisse ou le cylindre logarithmique ne laisseront rien à désirer pour les opérations, même les plus délicates, ainsi que pour le calcul des aires.

132. On verra par les models de tenue de ces opérations, que l'on trouvera dans un autre chapitre, combien l'application de ce moyen est clair et facile, et on verra alors qu'il sera possible d'oublier les formules ma-

thématiques, ou même de ne les avoir jamais connues; car des pratiques matérielles suffiront toujours à l'opérateur pour obtenir toute la rapidité et l'exactitude désirable dans l'exécution de tous les travaux relatifs à la nouvelle méthode du relèvement et du nivellement.

La pratique de l'enseignement de cette méthode à des élèves de tous les degrés d'instruction m'a démontré, qu'il y a bien plus de difficulté à l'insinuer avec toutes les démonstrations aux ingénieurs, qui sont, par leurs études antérieure, à la portée de les saisir, qu'à former des opérateurs avec des élèves du dernier ordre, dont l'instruction antérieure ne va pas au-delà des premiers rudiments de d'arithmétique et du dessin linéaire, mais alors il faut substituer aux expressions mathématiques des expressions parlées, souvent impropres, mais telles à matérialiser les idées qu'on veut exprimer; ainsi à de tels élèves on ne parlera point de *fonctions circulaires*, on ne leur fera point *calculer des coordonnées*, mais on leur enseignera *à observer des* S, *des* θ, *des* φ, *à faire et à défaire des* x, *des* y, *des* z, *etc.*; ainsi, au lieu de substitutions numériques à faire dans des équations algébriques, on leur donnera des états à remplir, dans lesquels certaines colonnes doivent contenir les données du problême, tandis que d'autres sont destinées aux résultats que l'échelle logarithmique fournit.

Voilà la méthode qui m'a toujours parfaitement réussi et qui, entre autres, a amené les résultats dont on a parlé au § 13.

CHAPITRE V.

PROBLÊMES DIVERS DONT LA SOLUTION EST NÉCESSAIRE A L'APPLICATION DE LA NOUVELLE MÉTHODE DES RELÈVEMENTS ET NIVELLEMENTS, ET LEURS SOLUTIONS PRATIQUES SUR L'ÉCHELLE LOGARITHMIQUE.

SECTION XIII.

Problémes divers dont la solution est nécessaire à l'application de la nouvelle méthode de relèvement et nivellement.

PROBLÊME PREMIER.

133. Les coordonnées polaires horizontales de deux points étant données par rapport à une orientation quelconque, exacte ou arbitraire, trouver la longueur de la projection horizontale de la ligne qui les joint, ainsi que sa direction en azimut rapportée à la même orientation.

134. Du point O (*fig.* 16) et par une orientation quelconque, exacte, ou arbitraire, qui place le diamètre zéro

de l'instrument dans la direction *NO*, on a observé deux points M′, M″ par observation complète; on demande:

1° La longueur M′M″, qu'on désignera par D;

2° L'angle azimutal M″M′*n*, qu'on désignera par Θ, formé par le coté M′M″, et par une parallèle au diamètre zéro menée par le point M′.

135. Du point M″ j'abaisse la normale M″S sur le rayon *O*M′; j'appelle *p* cette normale, et *q* la sous-normale, et je désigne par ω l'angle M″M′T formé par le coté inconnu M″M′, et par le prolongement du rayon *O*M′; si θ′, θ″ sont les angles respectifs observés en O entre le diamètre zéro, et les points M′, M″, et si Δθ indique leur différence *1, les distances des points M′, M″

*1 Comme on aura souvent besoin d'indiquer des différences de coordonnées on adoptera cette forme abrégée pour la notation, ainsi $\overset{m}{\Delta}\overset{n}{X}$ signifiera $X^m - X^n$; mais quand, comme ici, on n'aura à employer dans le calcul qu'une seule différence, on supprimera les index et alors ΔX sera pris pour X′—X″, et non pas, qu'on y prenne garde, pour X″—X′: on lira cette expression comme ceci: *delta* X *m n*, ou bien *différence en* x *depuis* m *jusqu'à* n. Pareillement quand la distance dans le sens de chacun des trois axes entre deux points donnés *m*, *n* doit résulter de la somme des distances partielles respectives de plusieurs points intermédiaires, on notera par $\overset{m}{\Sigma}\overset{n}{x}$ la somme de toutes les *x* partielles depuis le point *m* jusqu'au point *n*, et on lira cette expression: *somme en* x *depuis* m *jusqu'à* n, ou bien *sigma x m n*.

L'azimut d'une ligne c'est l'angle qu'elle fait avec le méridien, mais cet angle peut être observé à chacune des extrémités de la ligne, et les deux observations, en fesant abstraction de la courbure de la terre, différeront de 200$^{gr.}$; nous adopterons donc pour noter l'azimut du point *n*, observé depuis *m*, l'expression $\overset{m}{\theta}\overset{n}{}$, qui signifie pour nous l'*azimut* de *n* sur l'horizon de *m*.

au point *O* étant respectivement *d*′, *d*″, on aura évidemment

$$p = d'' \sin. \Delta\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8);$$

$$q = d' - d'' \cos. \Delta\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9);$$

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{p}{q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10);$$

$$\Theta = \theta' + \omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11);$$

$$D = \frac{p}{\sin. \omega} = \frac{q}{\cos. \omega} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12);$$

ce qui donne le troisième coté du triangle, dont deux cotés et l'angle compris ont été observés, et fait connaître en même temps sous quel angle azimutal le point M″ serait vu du point M′, si on y transportait l'instrument, tout en gardant l'orientation du diamètre zéro telle qu'elle était au point O. Les quantités *p*, *q* ce sont des nombres subsidiaires qui facilitent la résolution du problême au moyen des échelles logarithmiques *1.

PROBLÊME 2.

136. Les coordonnées rectangulaires de deux points étant données, trouver l'azimut et la longueur de la projection horizontale de la ligne qui les joint.

137. Soit (*fig.* 17) deux points M′, M″, dont les coordonnées horizontales sont respectivement X′, Y′; X″, Y″;

*1 Le problême, qui est le premier dans l'ordre des opérations du relèvement suivant la même méthode, sera mieux compris dans la pratique, si on commencera par s'exercer à la solution du problême deuxième.

soit aussi Θ l'azimut de la ligne M'M'' compté du nord par l'ouest sur l'horizon de M'; D la distance cherchée. On voit d'abord que

$$\Theta = 200 + \text{angle } m\text{M'M''},$$

et on sait par la théorie des fonctions circulaires que

$$\text{tang.}\,\Theta = \text{tang.}\,\Theta \pm 200,$$

on a de plus

$$m\,\text{M''} = \text{X'} - \text{X''} = \Delta\text{X}$$
$$m\,\text{M'} = \text{Y'} - \text{Y''} = \Delta\text{Y}$$

cela posé, le triangle rectangle mM'M'' donne immédiatement

$$\text{tang.}\,\Theta = \frac{\Delta\text{X}}{\Delta\text{Y}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13),$$

ce qui détermine l'angle azimutal cherché.

Le même triangle donne encore

$$\text{D} = \frac{\Delta\text{X}}{\sin.\,\Theta} = \frac{\Delta\text{Y}}{\cos.\,\Theta} \quad \ldots\ldots \quad (14).$$

138. Quand on opérera par les logarithmes, il conviendra de choisir celle des deux valeurs de D, dont le numérateur est le plus grand.

PROBLÈME 3.

139. Les coordonnées de deux stations étant données par rapport aux axes principaux, ainsi que l'azimut sous lequel un point a été observé sur l'horizon de chacune d'elles, trouver les coordonnées dudit point.

140. Soit (*fig.* 18) M un point dont on a observé les azimuts aux stations *I*, *II*; soient les données du problême respectivement représentées par

ORDRE PROGRESSIF		COORDONNÉES			ANGLES OBSERVÉS		
stations	points	à la méridienn.	à la perpendic.	au niveau de la mer	azimut	distance zénit.	
I	.....	X'	Y'	Z'			
	M	.....	Y''	.....	θ'	φ'	
II	.....	X''	.....	Z''			
	M	.....	.....	.....	θ''	φ''	

soient x, y les coordonnées inconnues du point M par rapport à la station *I*, on écrira d'après la notation adoptée,

$$(\text{X'} - \text{X''}) = \Delta\text{X}$$
$$(\text{Y'} - \text{Y''}) = \Delta\text{Y}$$
$$(\theta' - \theta'') = \Delta\theta$$

Le triangle *I m* M donnera

$$\text{cot.}\,\theta' = \frac{y}{x}, \text{ et } y = x\,\text{cot.}\,\theta'.$$

Le triangle *II n* M, dans lequel on a

$$\text{M}n = y + \Delta\text{Y}, \quad n\,II = x + \Delta\text{X},$$

donne aussi

$$\text{cot.}\,\theta'' = \frac{y + \Delta\text{Y}}{x + \Delta\text{X}}$$

d'où l'on tire facilement

$$y = x \cot. \theta'' + \Delta X \cot. \theta'' - \Delta Y;$$

égalant cette valeur de y à celle trouvée plus haut, on en tirera

$$x = \frac{\Delta X \cot. \theta'' - \Delta Y}{\cot. \theta - \cot. \theta''} \quad \ldots\ldots\ldots (15),$$

cette formule serait peu propre au calcul logarithmique par les tables; mais pour l'échelle elle se trouve au contraire fort commode. On peut d'ailleurs la transformer ainsi qu'il suit:

141. Le dénominateur $\cot. \theta - \cot. \theta''$ peut être écrit ainsi:

$$\cot.(\theta'' + \Delta\theta) - \cot. \theta'' = \frac{\cos.(\theta'' + \Delta\theta)}{\sin.(\theta'' + \Delta\theta)} - \frac{\cos. \theta''}{\sin. \theta''};$$

en développant et en réduisant au même dénominateur il vient

$$\frac{\sin. \Delta\theta}{\sin.(\theta'' + \Delta\theta) \sin. \theta''};$$

en remettant $\sin. \theta'$ au lieu de $\sin.(\theta'' + \Delta\theta)$, et introduisant cette expression dans l'équation (11), il vient

$$x = -\Delta X \frac{\sin. \theta'}{\sin. \Delta\theta} \cos. \theta'' + \Delta Y \frac{\sin. \theta'}{\sin. \Delta\theta} \sin. \theta'' \ldots (16),$$

formule qui est fort facile à calculer par logarithmes, et qui se plie aussi très bien aux opérations avec l'échelle logarithmique.

142. La détermination de l'abscisse étant ainsi effectuée, on obtiendra y par la formule suivante, qui n'a pas besoin de démonstration

$$y = x \cot. \theta' \ldots\ldots\ldots (17).$$

On pourra avoir un contrôle de l'exactitude du calcul en déterminant par la même formule la valeur de y par rapport à la station *II* et ajoutant y''.

143. Les coordonnées horizontales étant maintenant déterminées et les azimuts respectifs étant connus, on trouvera les distances D′, D″ du point observé à chacune des deux stations par la formule (14) du § 137; on pourra ensuite déterminer la troisième coordonnée z relativement à chacune des deux stations, ce qui fournira encore un contrôle de l'exactitude, soit du calcul, soit de l'observation, même par rapport aux coordonnées horizontales, quand les différences de niveau seront considérables.

La formule à employer pour cela est évidemment

$$z = D \cot. \varphi \ldots\ldots\ldots (18),$$

ce qui n'a pas besoin de démonstration *1.

*1 On peut remarquer ici combien il est avantageux d'employer un instrument qui donne l'altimétrie en même temps que la planimétrie, quand même l'altimétrie ne serait pas nécessaire au but spécial de l'opération; en effet, quand on opère en planimétrie seulement, un point déterminé par intersection ne peut être vérifié que par une deuxième intersection, c'est-à-dire par un troisième rayon dirigé au même point d'une troisième station: au contraire si on recueille à chaque station les éléments de l'altimétrie, on conçoit d'abord que deux stations suffisent non seulement pour déterminer un point par intersection, mais encore pour en avoir la vérification.

144. Si d'une station *I*, dont la position ne fût pas connue, on avait observé (l'orientation étant exacte) deux points, trigonométriques ou non, connus par leurs coordonnées, on pourrait arriver par les mêmes formules à la détermination des coordonnées de la station par rapport à l'un des points donnés: l'opérateur verra facilement quelles sont les quantités à inscrire au tableau, et quel est l'ordre à suivre en tel cas dont l'application est très fréquente.

PROBLÈME 4.

145. L'orientation du diamètre zéro de l'instrument dans une station étant approximative, ou bien donnée par l'aimant, on a observé un point trigonométrique fort éloigné, et on s'est rattaché en même temps par une observation complète à un point bien déterminé; on demande une vérification de l'orientation et, au besoin, la correction que l'on doit y apporter.

146. Soit (*fig.* 19) X^{Δ} Y^{Δ} *1 les coordonnées d'un point

*1 Nous indiquerons par le petit signe Δ mis en guise d'exposant, que telle coordonnée, azimut ou autre élément d'un problème appartient à un point trigonométrique, ainsi X^{Δ} sera l'abscisse ou la distance d'un point trigonométrique à la méridienne.

Pareillement le signe $\square$ désignera un point relevé non trigonométrique; le même signe, mis en guise d'exposant, désignera les quantités qui appartiennent à ce point, c'est-à-dire les éléments de la position dudit point.

trigonométrique A, qu'on suppose fort éloigné; Θ^{Δ} l'azimut dudit point observé de la station *I*; X^0 Y^0 les coordonnées approchées de la station déduites du point de rattachement au moyen de l'orientation approximative. Il suffira de trouver l'azimut de la ligne qui joint la position approximative de la station et le point trigonométrique par la règle du problème premier et le comparer à Θ^{Δ}; s'il y a accord parfait c'est une preuve que la station est bien orientée; dans le cas contraire la différence représente la correction azimutale de la station, car on sent que, si le point trigonométrique est fort éloigné, la petite incertitude existante sur la position de la station n'influira pas sensiblement sur l'azimut sous lequel le point trigonométrique est vu.

147. Cette correction approchera d'autant plus de la vérité que le point trigonométrique sera plus éloigné en comparaison du point de rattachement; mais si on craignait que cette première correction ne fût pas assez approchée, on n'aurait qu'à refaire, après l'avoir appliquée ainsi qu'on le pratique dans tout autre calcul par la méthode des approximations successives. Dans les cas ordinaires, quand même le point trigonométrique ne serait pas plus éloigné que huit à dix fois le rayon du point de rattachement, la première correction suffit; la répétition de l'opération, après avoir apporté la première correction aux coordonnées de la station, est d'ailleurs si facile et si prompte que l'on pourra pousser l'approximation aussi près du vrai que l'on voudra.

PROBLÈME 5.

148. Les positions de deux points trigonométriques étant données ainsi que les azimuts exacts observés sur l'horizon d'un point de station, on peut, par les formules du problème deuxième, déterminer les coordonnées de ce dernier point; mais si les points trigonométriques sont fort éloignés, l'échelle logarithmique ne fournit pas une exactitude suffisante; on propose donc le problème suivant pour les cas où la solution pourrait en être utile.

149. Deux points trigonométriques A, B sont donnés de position par leurs coordonnées X′, Y′; X″, Y″. Ces points ont été observés d'une station O, où ils se présentent par deux azimuts $0'$, $0''$ fort proches de deux des points cardinaux consécutifs, on demande les coordonnées X, Y de la station (on suppose ici qu'elle est bien orientée).

150. Soit A, B (*fig.* 20) les points trigonométriques donnés; O la station. Soit $x'y'$, $x''y''$ les coordonnées inconnues des points A, B par rapport à la station; c'est encore par la méthode des approximations successives que l'on peut arriver à la solution du problème.

151. De la circonstance particulière que $0'$ et $0''$ sont fort proches de chacun des axes, il suit que deux des quatre coordonnées inconnues sont fort petites comparablement aux deux autres (dans le cas de la figure c'est x', et y''); on commencera donc par attribuer à x' une valeur par estime, que j'indiquerai par x'_a (les index

a, b, c etc. appliqués inférieurement désignent les approximations successives), et on posera $x''_a = \Delta X + x'_a$; au moyen de celui-ci et de $0''$ on pourra alors calculer y''_a par la formule

$$y''_a = x''_a \cot. 0'',$$

et l'on sent que, malgré l'approximation grossière que l'on peut avoir mis dans l'estime de x'_a, on n'aura à craindre sur la valeur de y''_a ainsi déterminée, qu'une erreur beaucoup moindre: on pose maintenant

$$y'_a = \Delta Y + y''_a,$$

et par la formule

$$x' = y' \text{ tang. } 0' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

on détermine une valeur de x', que je désignerai par x'_b, et qui sera déjà très approchée: ce premier cercle d'opérations étant accompli, on en fera un second en partant de x'_b qui, pour peu qu'on aie eu de tact dans la première supposition, conduira à une valeur x'_c à très peu de chose près égale à x'_b, ce qui prouvera que l'opération a bien réussi.

152. L'exactitude à laquelle on peut arriver par ce procédé, n'a pas de bornes, si on se soumet à répéter l'épreuve un nombre suffisant de fois, on pourra par conséquent toujours l'amener au point désiré; la série des valeurs que l'on obtiendra, convergera d'autant plus vers le vrai, que les azimuts seront plus proches des deux axes.

PROBLÈME 6.

153. D'une station quelconque, dont la position est inconnue et où l'orientation du diamètre zéro est donné par l'aimant, et est par cela incertaine, ou bien où elle est même tout-à-fait inconnue, on a observé des angles azimutaux comptés d'un axe arbitraire, sous lesquels on aperçoit trois points trigonométriques; trouver l'orientation vraie, c'est-à-dire l'azimut vrai de l'axe arbitraire.

154. Soit O (*fig.* 21) la position inconnue d'une station de laquelle on a observé, en partant de l'axe arbitraire O*n*, les angles azimutaux θ', θ'', θ''' des points trigonométriques A, B, C, dont les coordonnées sont X'Y', X''Y'', X'''Y'''.

155. Si *n* coïncidait avec N, c'est-à-dire si l'orientation arbitraire se trouvait par hasard exacte, on pourrait appliquer à ce cas les considérations du problème troisième, ce qui, en ne considérant que les points A, B, conduirait à une équation comme la (16), que l'on pourra écrire ainsi :

$$x = \frac{-\Delta X \sin.\theta' \cos.(\theta' + \Delta\theta'') + \Delta Y \sin.\theta' \sin.(\theta' + \Delta\theta'')}{\sin.\Delta\theta''}.$$

Par les mêmes considérations appliquées aux points A, C, on arriverait à l'expression analogue

$$x = \frac{-\Delta X \sin.\theta' \cos.(\theta' + \Delta\theta''') + \Delta Y \sin.\theta' (\theta' + \Delta\theta''')}{\sin.\Delta\theta'''}.$$

Égalant ces deux valeurs de x, développant et réduisant, il vient

$$\cot.\theta' = \frac{\Delta Y \cot.\Delta\theta'' - \Delta Y \cot.\Delta\theta''' + \Delta X}{-\Delta X \cot.\Delta\theta'' - \Delta X \cot.\Delta\theta''' - \Delta Y} \quad \ldots (20),$$

que l'on peut écrire aussi en mettant le dénominateur à la place du numérateur et viceversa, et écrivant tang.θ' au lieu de cot.θ'. Cette formule sert à déterminer la valeur que prendrait θ' si l'orientation devenait exacte, et par suite à trouver la correction de l'orientation, comme on s'était proposé.

Quoiqu'on ne puisse pas la décomposer en facteurs, cette expression n'est pas longue à calculer par les logarithmes, elle présente surtout de la facilité si on opère à l'échelle logarithmique, et conduit assez promptement au résultat, comme on le démontrera par des exemples dans la section suivante.

PROBLÈME 7.

156. Résoudre le problème précédent dans le cas où la station est faite en proximité de l'alignement qui joint deux des points trigonométriques donnés.

157. Soit à résoudre le problème précédent pour le cas où le point de station O (*fig.* 22) se trouve fort proche de l'alignement, qui joint deux points trigonométriques observés, tels que A, C; on pourra dans ce cas arriver à la connaissance de l'orientation exacte de

la station, ainsi que de ses coordonnées par la méthode des approximations successives, ainsi qu'il suit:

Dans le triangle AOC on a l'angle en $O = \Delta\vartheta'''$, très obtus par supposition; par conséquent les angles en A et en C seront très aigus; notant ces angles par α', α''' et par d', d''' les distances OA, OC, on aura par des propriétés connues

$$\alpha' + \alpha''' = 200^{gr.} - \Delta\vartheta''' \quad \ldots\ldots\ldots (21),$$

$$\frac{d'''}{\sin.\alpha'} = \frac{d'}{\sin.\alpha'''};$$

mais les arcs α', α''' étant ici fort petits, on pourra les substituer à leur sinus et écrire simplement

$$\frac{d'''}{\alpha'} = \frac{d'}{\alpha'''};$$

cette équation combinée avec l'équation (21) et résolue par rapport à α, donnera

$$\alpha' = \frac{(200^{gr.} - \Delta\vartheta''')d'''}{d' + d'''} \quad \ldots\ldots\ldots (22).$$

Il est facile à voir qu'on a à peu de chose près $d' + d''' = AC$, quantité connue, puisque les coordonnées des points A, C sont données; et qu'il suffit de connaître, par une approximation grossière, la valeur de d' et d''' pour arriver si près de la vérité dans la détermination d'α, qu'il ne reste presque rien à désirer.

158. Si maintenant Θ représente l'azimut connu de

la ligne AC *1, on aura pour le cas de la figure, et si l'orientation arbitraire s'est trouvée exacte,

$$\vartheta''' = \Theta - 200^{gr.} + \alpha,$$

ce qui n'a pas besoin de démonstration.

159. Dans le cas où $\alpha' + \alpha''$ arriverait à $10^{gr.}$ ou $15^{gr.}$, il faudrait un peu plus d'approximation dans l'estime de d' et d'''; mais on pourrait toujours opérer comme il a été dit avec une estime quelconque pour une première approximation, déterminer ensuite les coordonnées du point O par l'azimut approché qui en résulterait, et cela par la règle du problême troisième ou du problême quatrième, d'où l'on pourrait déduire avec une nouvelle approximation des nouvelles valeurs des quantités ci-devant déterminées; on serait sûr alors d'être arrivé aussi près de la vérité qu'on puisse le désirer. La détermination des coordonnées exactes de la station s'opérerait ensuite comme il a déjà été enseigné en combinant entr'eux les points A, B, ou bien B, C.

PROBLÈME 8.

160. Sur une orientation approchée on a déterminé les coordonnées rectangulaires d'un point, trouver la

*1 On connait toujours les azimuts des points trigonométriques vus les uns des autres; on a d'ailleurs les coordonnées, et on peut de la différence des coordonnées déduire l'azimut d'après les règles connues.

correction de ces coordonnées d'après la connaissance de la correction d'orientation.

161. Soit (*fig.* 23) le point M qui a été déterminé par une orientation approximative d'après laquelle il se présente en *m*. Soit θ l'azimut observé; x, y des coordonnées déterminées avec l'azimut θ; soit respectivement $\partial\theta$, ∂x, ∂y les corrections à appliquer à ces trois quantités, corrections qui, dans la figure, correspondent respectivement aux quantités M*m*, M*n*, *mn*. Vu la petitesse de l'arc $\partial\theta$ dans le petit triangle M*mn*, curviligne et rectangle en *n*, on pourra considérer le coté M*n* comme rectiligne et perpendiculaire au rayon O*m*; d'après cela ledit triangle sera semblable au triangle O*mp*, ce qui, en suivant la notation adoptée, conduira facilement à

$$\left.\begin{aligned}\partial x &= +y \sin.\partial\theta\\ \partial y &= -x \sin.\partial\theta\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (23)\ *1.$$

Ces deux équations feront connaître les corrections à appliquer à toutes les coordonnées d'un système de points, dont l'orientation devrait subir une correction donnée.

PROBLÈME 9.

162. La projection horizontale d'une ligne de pente du terrain étant donnée, ainsi que les cotes de niveaux

*1 On remarquera que ces deux corrections sont toujours de signe contraire, et que $\partial\theta$ est ici exprimé en arc et non en grades.

de ses extrémités, déterminer la projection d'un point de cette ligne qui se trouve à une hauteur donnée.

163. Soit M′M″ (*fig.* 24) les projections horizontales des points *a*, *b* appartenant au terrain, dont la surface est ici supposée présenter une pente uniforme; Z′, Z″ les cotes de niveau *am′*, *bm″* des deux points donnés; soit proposé de trouver la projection *c* d'un point C, dont la cote de hauteur est donnée $=Z'+h$; soit encore M′M″$=$D. En menant l'horizontale *ab*, on aura évidemment par les triangles semblables

$$AC = M'C = \frac{Dh}{\Delta Z} \ldots\ldots\ldots (24).$$

164. Si les coordonnées horizontales X′Y′, X″Y″ des points M′, M″ étaient données, et si on demandait les coordonnées du point C, on pourrait agir directement sur chacune des coordonnées suivant la même formule en y mettant successivement ΔX et ΔY au lieu de D, ce qui est évident; en effet, lorsque trois points sont en ligne droite dans l'espace, les différences successives de leurs coordonnées sont proportionnelles; si donc on pose $\frac{h}{\Delta Z}=n$, et si x, y sont les coordonnées du point cherché par rapport au point M′, on aura

$$M'c = nD, \quad x = n\Delta X, \quad y = n\Delta Y \ldots (25).$$

La recherche des coordonnées du point C se réduit donc à multiplier respectivement ΔX et ΔY par $\frac{h}{\Delta Z}$, et ajouter les résultats respectivement à X′ et à Y′.

PROBLÊME 10.

165. Les angles d'un polygone étant donnés par leurs coordonnées polaires horizontales, déterminer l'aire du polygone.

166. Soit un polygone a, b, c, d, e (*fig.* 25), dont tous les sommets des angles ont été déterminés du point O pour observation complète, on demande l'aire dudit polygone.

Il est évident, par la figure elle-même, que l'aire demandée est égale à la somme algébrique des aires de tous les triangles qui, ayant pour sommet commun le point O, ont pour base chacun des cotés du polygone *1; le problême se réduit donc à trouver l'aire d'un triangle, dont deux cotés et l'angle compris sont donnés, aire qui, comme tout le monde sait, est égale à la moitié du produit des deux cotés par le sinus de l'angle qu'ils comprennent.

167. Désignant donc respectivement par d^a, d^b ..... etc., θ^a, θ^b ..... etc. les distances et les azimuts observés du point O, on aura

$$A = \frac{1}{2} d^a \cdot d^b \sin. \overset{a}{\Delta}\overset{b}{\theta} + \frac{1}{2} d^b \cdot d^c \sin. \overset{b}{\Delta}\overset{c}{\theta} + \ldots\ldots \text{etc.}$$

$$+ \frac{1}{2} d^n \cdot d^a \sin. \overset{n}{\Delta}\overset{a}{\theta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26).$$

*1 Si le point O était pris dans l'intérieur du polygone, toutes les aires partielles seraient de même signe; étant extérieur comme dans la figure, les signes résulteront du signe du sinus de l'angle au sommet qui entre comme élément du calcul de l'aire de chaque triangle, à la condition de suivre le périmètre dans tout son pourtour; si le point O était lui-même un sommet d'angle du polygone, on économiserait dans le calcul deux triangles parce qu'on aurait d^o nul.

Quand on passe aux nombres c'est le signe de sin. $\Delta\theta$ qui règle le signe algébrique de chaque terme de la formule.

168. Si un grand nombre de polygones coérents avaient été relevés par rayonnement d'une seule station, tous les triangles, dont la base est un coté commun à deux polygones, seraient employés deux fois, ce qui abrègerait de beaucoup les calculs.

PROBLÊME 11.

169. Les coordonnées rectangulaires des angles d'un polygone étant données, trouver l'aire de ce polygone.

170. Soit a, b, c, d, e (*fig.* 25) un polygone quelconque dont on connaît les coordonnées des angles, il est d'abord évident que l'aire du polygone A est égale à la somme des aires des trapèzes qui, tel que aa', ee', ont leur base sur l'axe ON, et traversent le polygone donné, moins la somme des aires de tous ceux qui, tel que aa', $b'b$, s'en tiennent entièrement en déhors.

171. Désignons par X′Y′, X″Y″, etc. les coordonnées des angles du polygone a, b, c etc., les aires des trapèzes seront d'après les règles de la géométrie et d'après la notation ici adoptée:

$$\frac{1}{2}\left(\Sigma \overset{\prime}{X}\overset{\prime\prime}{\Delta Y}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\Sigma \overset{\prime\prime}{X}\overset{\prime\prime\prime}{\Delta Y}\right) \ldots\ldots \frac{1}{2}\left(\Sigma \overset{n-1}{X}\overset{n}{\Delta Y}\right) \ldots\ldots (27),$$

et on trouvera que pour un polygone de cinq cotés, par exemple, disposé comme la figure 25, il viendra

$$A=\frac{1}{2}\left[\left(\Sigma X\,\Delta Y\right)''+\left(\Sigma X\,\delta Y\right)'''+\left(\Sigma X\,\Delta Y\right)^{IV}+\left(\Sigma X\,\delta Y\right)^{V}+\left(\Sigma X\,\Delta Y\right)'\right] \quad (28),$$

et il n'y aura qu'à avoir égard aux signes pour savoir quelles sont les aires à ajouter et quelles à retrancher.

172. Ce mode de calcul qui paraît un peu long, quand il ne s'agit que d'une seule figure, est au contraire très expéditif quand on a un grand nombre de figures coérentes à évaluer, parce que chacun des cotés des figures est alors commun à deux figures coérentes, comme on l'a déjà remarqué pour les triangles dans le problême précédent; par conséquent chaque trapèze, une fois calculé, est ensuite employé deux fois.

173. En écrivant dans la formule (26) au lieu de la notation par Δ et par Σ, par nous adoptées, son équivalente ordinaire algébrique, et développant et réduisant, il vient

$$A=\frac{1}{2}\left[(Y''-Y^{n})X'+(Y'''-Y)X''+\text{ etc.}\ldots\ldots\ldots+(Y'\quad Y^{n-1})X^{n}\right] \quad (29).$$

174. Mais cette formule, donnée par Puissant *1, qui ne contient pas d'ailleurs un moindre nombre de termes, ne présente pas au même degré l'avantage cité au § 163.

*1 Propositions de géométrie, etc.

Dans chacune de ces deux formules on peut changer X en Y et réciproquement, ce qui change entièrement les nombres sur lesquels on doit opérer, et conduit en dernier résultat à la même valeur cherchée de A; c'est donc là le véritable moyen pour avoir dans l'application, surtout au cadastre, un contrôle infaillible des opérations pratiques par lesquelles on détermine les aires des polygones *1.

*1 On verra plus loin que c'est en cela qui se fonde la vérification du calcul des aires dans la nouvelle méthode, et que de toutes les solutions connues du problême des aires pour le cadastre, celle du § 171, vérifiée de cette manière, est en pratique la plus avantageuse sous tous les rapports.

L'arpenteur ordinaire travaillant pour le particulier, qui n'a le plus souvent qu'un petit nombre de parcelles à évaluer, pourra se tenir à la solution du problême 10, toutefois il n'aura pas d'autres motifs pour passer aux coordonnées rectangulaires; mais il ne jouira pas en cette manière de l'avantage du second calcul vérificatif du premier, avantage précieux dans les opérations de grande étendue.

SECTION XIV.

Solutions des problèmes précédents par l'échelle logarithmique ordinaire.

175. On va donner maintenant la solution pratique de tous les problèmes précédents, au moyen de l'échelle logarithmique, ainsi que des types d'opération pour faciliter aux praticiens les moyens d'y parvenir; ceci ne saurait se faire avec clarté que par des exemples numériques; on tachera néanmoins d'énoncer les règles de la manière la plus simple et la plus facile à retenir, à fin que le praticien, qui ne veut pas approfondir le calcul théorique, puisse facilement les graver dans sa mémoire; on supposera cependant que celui-ci connaisse les rudiments de l'algèbre et notamment la règle des signes, soit pour les opérations algébriques ordinaires, soit pour les fonctions circulaires, chose qu'il pourrait apprendre très matériellement sans entrer dans le mérite théorique.

PROBLÊME 1^er^, § 133, *fig.* 17.

176. Les coordonnées polaires horizontales de deux points étant données par rapport à une orientation quelconque exacte ou arbitraire, trouver la longueur de la projection horizontale de la ligne qui les joint, ainsi que sa direction en azimut rapportée à la même orientation.

177. Soient les données du problème comme le tableau suivant:

ORDRE PROGRESSIF		d	θ	
stations	points			
O	M′	75,2	30,00	
	M″	65,5	59,50	
$\Delta\theta =$			370,50 *1	

178. Pour obtenir d'abord p, formule (8), on prend $\Delta\theta$ sur la troisième échelle, numération supérieure, et comme 370,50 ne s'y trouve pas, on prend pour 170,50; mais le résultat sera négatif (§ 122); l'ouverture de compas obtenue, portée dans son sens depuis 65,5, donne

$$p = -29^{\text{mèt.}},2.$$

179. La même échelle, numération inférieure, donnera, par une semblable opération, pour le second terme

*1 On remarquera ici, une fois pour toutes, qu'on ne considérera jamais des angles négatifs, et que quand une soustraction numérique n'est pas possible dans le sens indiqué par la formule algébrique, on ajoutera une circonférence, $400^{\text{gr.}}$, à l'angle qui se trouve trop petit, ce qui rendra la soustraction possible; dans le cas ci-dessus on a donc

$$\Delta\theta = 430^{\text{gr.}} - 59^{\text{gr.}},50 = 370^{\text{gr.}},50.$$

du second nombre de la formule (9), le nombre $58^{mèt.},1$ qui, soustrait de $75^{mèt.},20$, donnera

$$q = +17^{mèt.},1.$$

180. Prenant sur l'échelle deuxième l'interval depuis $17^{mèt.},1$ jusqu'à $29^{mèt.},2$, et portant sur l'échelle quatrième, eu égard aux signes *1, on aura, formule (10),

$$\omega = 133^{gr.},67,$$

ajoutant ϑ', formule (11), il vient

$$\Theta = 163^{gr.},67.$$

181. Pour avoir la longueur du coté M'M'', on prend maintenant, formule (12), sur l'échelle troisième $133^{gr.},67$, et on opère sur p si on a pris la numération supérieure, ou sur q si on a pris la numération inférieure, ce qui donne dans l'un comme dans l'autre cas

$$D = 33^{mèt.}9.$$

Il va sans dire que l'ouverture de compas prise dans un sens sur l'échelle n° 3, doit être portée pour ceci en sens invers sur l'échelle n° 2, puisqu'il s'agit d'un dénominateur.

182. On verra dans la partie pratique du relèvement que ce problême est d'un usage très fréquent, et qu'il sert sur le terrain à vérifier les points de rattachement

*1 Voir la note à la fin du § 135 et le tableau régulateur des signes dans le problême suivant.

des stations, et à transmettre, quand on en a besoin, l'orientation de station à station.

PROBLÊME 2, § 136, *fig.* 17.

183. Les coordonnées rectangulaires de deux points étant données, trouver l'azimut et la longueur de la projection horizontale de la ligne qui les joint.

184. Soient donnés les deux points M', M'', qui se trouvent placés comme il suit:

POINTS	X	Y	
M'	+136,2	+185,4	
M''	+ 47,3	+ 35,8	
les différences viennent.....	+ 88,9	+149,6	

On cherche $\left\{\begin{array}{l}\overset{M'_M''}{\Theta}, \text{ azimut de M'' sur l'horizon de M';}\\ D, \text{ distance horizontale entre les mêmes points.}\end{array}\right.$

On emploie pour Θ la formule (13).

185. La règle pratique pour opérer sur l'échelle logarithmique peut s'expliquer ainsi qu'il suit:

1° Il faut commencer par remarquer dans quel quart de cercle doit se trouver l'azimut cherché, et savoir d'avance s'il en dépasse ou non la moitié. On parvient à cette connaissance par les règles du tableau suivant:

TABLEAU RÉGULATEUR DES SIGNES

dans la recherche de l'azimut d'une ligne par la différence des coordonnées de ses extrémités.

SIGNES DE		L'azimut se trouve si				
		ΔX<ΔY		ΔX>ΔY		
ΔX	ΔY	entre	et	entre	et	
—	—	0	50	50	100	
—	+	150	200	100	150	
+	+	200	250	250	300	
+	—	350	400	300	350	

Quelques jours d'usage suffisent à imprimer cela dans la mémoire, tellement que l'on n'est plus sujet à se tromper; d'ailleurs, presque toujours, la figure, ou la mémoire des localités supplée à toutes les règles (dans l'exemple ci-dessus on voit que l'azimut cherché doit se trouver entre 200 et 250);

2° On prend avec le compas sur l'échelle logarithmique des nombres, l'interval compris de la division numérotée ΔY à la division numérotée ΔX, ayant égard au sens dans lequel on procède (dans notre exemple c'est de 149,6 à 88,9, et c'est en sens rétrograde), on porte l'interval ainsi obtenu dans le même sens sur l'échelle quatrième, ayant égard à la caractéristique, et

on trouve dans la division supérieure ou inférieure les nombres de grades cherchés, convenable au cas pour lequel on opère; c'est sur la numération supérieure si les dixaines de grade doivent, d'après la règle précédente, résulter moins de 5, et sur l'inférieure, dans le cas contraire (pour l'exemple que l'on a ici proposé, il viendra donc $\Theta = 234^{gr},08$).

186. L'azimut Θ étant connu, pour trouver ensuite la distance D, on n'aura qu'à calculer D par la formule (14), ce qui se fait en prenant sur l'échelle troisième le log. sinus de Θ, sans égard au signe et en le retranchant du log. de ΔX; si on opère par le complément du logarithme du même sinus, on doit l'ajouter: on peut encore opérer par le cosinus en le combinant avec ΔY, ce qui est identique à la partie homologue du problème précédent, et consiste en quelque sorte *à défaire un* x ou *un* y.

Cette opération, dans l'exemple qui nous occupe, conduira à $D = 171,1$.

PROBLÈME 3, § 139, *fig.* 18.

187. Les coordonnées de deux stations étant données par rapport aux axes pincipaux, ainsi que l'azimut sous lequel un point a été observé sur l'horizon de chacune d'elles, trouver les coordonnées dudit point.

Soient les données du problème comme dans le tableau suivant:

ORDRE PROGRESSIF		COORDONNÉES			ANGLES OBSERVÉS		
stations	points	X	Y	Z	θ	φ	
I	.....	+ 90,0	+202,3	30,0			
	M	.....	.....	.....	72,97	90,86	
II	.....	+130,0	+152,0	35,8			
	M	.....	.....	.....	26,96	87,75	
les différences viennent....		— 40,0	+ 50,3	— 5,8			

188. La première formule à employer est la (15); on opérera donc de la manière suivante:

1° On prend sur l'échelle des cotangentes la cot. $6''$, et on en multiplie ΔX; du résultat obtenu on retranche ΔY, cela donne le numérateur de la formule, qui vient dans notre cas, en suivant la règle ordinaire des signes,

$$-88,8-50,3=-139,1;$$

2° On cherche après cela les cotangentes de $6'$ et de $6''$ en parties du rayon $=1$, c'est-à-dire que l'on ajoute leur log. au log. de l'unité sur l'échelle des nombres; ces deux nombres ainsi obtenus, on retranche le second du premier, le reste sera le dénominateur de la formule, et dans notre cas il vient

$$0,454-2,215=-1,761.$$

On prendra ensuite sur l'échelle des nombres l'interval compris depuis la division correspondante au dénominateur jusqu'à celle correspondante au numérateur, ayant égard au sens dans lequel on procède, et on évaluera le résultat en le portant sur l'échelle depuis la caractéristique convenable; dans l'exemple qui nous occupe c'est de $-1,761$ à $-139,1$, et il vient

$$x=+78,8.$$

189. On obtiendrait le même résultat si on opérerait par la formule (17); mais on laissera l'épreuve à faire comme exercice à l'opérateur.

190. On détermine ensuite y par la formule

$$y=x \text{ tang. } 6',$$

ce qui ne présente aucune difficulté: on indiquera donc ici seulement le résultat qui est

$$y=+35,8.$$

On peut encore contrôler l'opération en cherchant la valeur de y', telle qu'elle viendrait par rapport à la station *II*, en y employant pour x'' sa valeur $x'+\Delta X$, ce qui donne dans notre cas

$$78,8-40,0=38,8,$$

et par l'azimut $6''$ on obtient $6''+86,1$. On voit que, si l'on a bien opéré, on doit retrouver

$$\Delta y=\Delta Y,$$

ce qui se vérifie exactement dans l'exemple traité.

191. Il nous reste a déterminer la troisième coordon-

née z, et pour cela on commencera par résoudre la seconde partie du problême deuxième, par rapport à la station *I*, il en résultera

$$d = 86,7.$$

Ensuite on cherchera sur les cotangentes l'angle φ', que l'on combinera avec d, comme il a été enseigné au § 129, ce qui dans notre exemple conduira simplement à

$$z = +12^{\text{mèt.}},5,$$

puisque le terme $\frac{1}{2}$S n'existe pas ici.

192. Pour avoir une preuve d'exactitude du résultat ainsi que de l'observation, on calculera encore z de la station *II*. L'exemple qu'on a sous les yeux donnera $d = 94,1$, et par suite $z = +18,3$, qui vérifie exactement l'équation

$$\Delta z = \Delta Z,$$

ce qui prouve l'exactitude de toute l'opération.

193. Si on désire ensuite de rapporter ces coordonnées partielles aux axes principaux, on a qu'à les ajouter aux coordonnées de la station à laquelle elles appartiennent, et on obtiendra en dernier résultat

$$X = x + X' = +168,8;$$
$$Y = y + Y' = +238,1;$$
$$Z = z + Z' = +42,5.$$

194. Si les observations avaient été faites au point M inconnu, les points connus *I*, *II* étant marqués par un signal, ou étant des points trigonométriques, on y aurait eu des azimuts et des distances zénitales réciproques à celles du tableau; le calcul aurait été le même, et aurait amené à des résultats exactement réciproques: on voit donc que la même méthode sert à déterminer la position absolue d'une station faite dans un point inconnu quand on y connaît l'orientation, ce qui a souvent lieu, comme on le montrera plus loin.

PROBLÊME 4, § 145, *fig.* 19.

195. L'orientation du diamètre zéro de l'instrument dans une station étant approximative, ou bien donnée par l'aimant, on a observé un point trigonométrique fort éloigné, et on s'est rattaché en même temps à un point bien déterminé par une observation complète, on demande une vérification de l'orientation et, au besoin, la correction que l'on doit y apporter.

196. Ce problême est de ceux qu'on doit résoudre par la méthode des approximations successives; mais on obtiendra presque toujours du premier coup une solution suffisamment exacte, lorsque l'opérateur aura eu l'adresse de bien choisir sur le terrain ses points et ses directions.

197. Soient donc, suivant la notation adoptée, et indiquant par $^{\Delta}$ le point trigonométrique, et par $^{\square}$ le point de rattachement de la station, les données du problême comme dans le tableau suivant, les observations étant faites à la station en question avec l'orientation approximative, et les données trigonométriques rapportées aux axes principaux.

ORDRE PROGRESSIF stations	points	S	θ	?	d	x	y	z	X	Y	Z
									cherchée	*cherchée*	*cherchée*
I	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
	□	140,0	52,10	100,00	140,0	+67,8	+122,2	—1,4	+6297,8	+1608,4	
									+2500,0	+2800,0	
	△		321,16	101,45					+6230,0	+1486,0	
									—3750	+1314,0	
									321,56		
									321,16		
									0,40		
						+68,4	+121,9				
									+6229,4	+1486,5	

Ceci donne pour les coordonnées approchées de la station ..... de celle-ci au point trigonométrique ..... comme il a été dit au

Différence de celle-ci au point trigonométrique sur l'ho-

En traitant ces différences de coordonnées, co

§ 185, il vient pour l'azimut du point trigon

rizon de la station .....

L'observation a donné .....

D'où on en conclut la correction azimutale ad

Cette correction appliquée donne .....

Ce qui amène définitivement les coordonnés de la station par .....

198. Qu'on apporte maintenant aux coordonnées de la station, les corrections auxquelles donne lieu la nouvelle rectification de l'orientation, et on arrivera à

$$X = 6229{,}2, \quad Y = 1486{,}4.$$

199. Si on doutait que l'opération faite ne fût pas assez exacte, on pourrait tenter une seconde approximation en partant de ces coordonnées; mais on aurait lieu de voir que la différence qu'on trouverait entre la première et la seconde approximation, pour l'exemple qu'on a sous les yeux, arriverait à peine à 18″ centésimales, quantité tout-à-fait négligeable dans ce genre d'opérations *1.

PROBLÈME 5, § 140, *fig.* 20.

200. Deux points trigonométriques A, B sont donnés de position par leurs coordonnées X′, Y′; X″, Y″. Ces points ont été observés d'une station O, où ils se présentent par deux azimuts θ', θ'' fort proches de deux des points cardinaux consécutifs, on demande les coordonneés X, Y de la station.

*1 Les arpenteurs, qui ne sont guère accoutumés au calcul, auront quelques difficultés d'admettre ces méthodes, et j'en ai connus quelques-uns, même parmi les plus habiles et les plus haut parvenus, qui, accoutumés à appeler *exactitude mathématique* celle dont les aberrations résidues échappent à leur sens dans leurs opérations graphiques, ont prétendu que les relèvements numériques par les instruments gradués constituent une *méthode d'approximation*, et non pas une *méthode exacte*. Nous espérons que, malgré l'opinion de ces honorables messieurs, non-seulement tout homme de l'art consciencieux, mais encore tout homme de bon sens admettra, que rien de ce que l'homme fait n'est *mathématiquement parfait*, mais que, par les méthodes numériques, on est toujours maître de pousser l'approximation aussi près du vrai qu'on voudra.

201. Les données du problème soient comme dans le tableau suivant:

ORDRE PROGRESSIF stations	points	θ	X	Y	
O	.....	.....	.....	.....	.....
	A	5,22	+2790,0	+6510,3	
	B	96,30	+4514,8	+3895,0	
différences			−1724,8	+2615,3	

202. On commencera supposer estime $x^A = +300^{mèt.}$; on peut se décider dans cette première estime par des considérations faciles à faire sur la figure, ce qui donne

$$x^B = x^A + \overset{A}{\Delta}\overset{B}{X} = 2024,8;$$

de cette valeur d'x^B et de l'azimut observé en B, on peut conclure par la formule (19) $y'' = +118,0$, et par suite

$$y' = y'' + \overset{A}{\Delta}\overset{B}{Y} = 3733,3;$$

ici par la même formule (19) on peut encore déterminer x^A en employant cette valeur de y' et l'azimut observé, $5^{gr},22$, ce qui donne $x^A = 307,1$.

203. On a ainsi accompli un cercle d'opérations; on peut suivre la même marche pour en faire un second, dont les résultats approcheront beaucoup plus de la vérité; on se bornera ici à indiquer la valeur de x' qui va en résulter, et on laisse à l'opérateur le soin de l'essayer lui-même: cette valeur est de 307,2.

PROBLÈME 6, § 153, *fig.* 15.

204. D'une station quelconque, dont la position est inconnue et où l'orientation du diamètre zéro est donné par l'aimant, et est par cela incertaine, ou bien où elle est même tout-à-fait inconnue, on a observé des angles azimutaux comptés d'un axe arbitraire, sous lesquels on aperçoit trois points trigonométriques; trouver l'orientation vraie, c'est-à-dire l'azimut vrai de l'axe arbitraire.

205. Soit un cas de ce problème à résoudre, dont les données sont enregistrées dans le tableau suivant :

ORDRE PROGRESSIF stations	points	lettres de la figure	θ	X	Y	
I		O	.....	.....	.....	
	'	A	16,50	+3150,0	+4205,5	
	''	B	150,00	+5756,7	+ 126,2	
	'''	C	258,00	+1259,3	+ 840,0	

206. On déduira premièrement de ce tableau les différences des coordonnées et des azimuts qui sont comprises dans la formule (20), que l'on transcrit ici, exprimée en tang. θ';

$$\text{tang. } \theta' = \frac{-\Delta X \cot. \Delta\theta'_{-''} - \Delta X \cot. \Delta\theta''_{-'''} - \Delta Y}{+\Delta Y \cot. \Delta\theta'_{-''} - \Delta Y \cot. \Delta\theta''_{-'''} + \Delta X}.$$

Ces différences on les ordonnera comme dans le tableau suivant :

DÉSIGNATION des différences	Δθ	NUMÉRATEUR ΔX	signes de la formule	PRODUITS positifs	PRODUITS négatifs	ΔY	signes de la formule	PRODUITS positifs	PRODUITS négatifs
	"								
	286,50	—2606,7	—	+ 560,0		+4079,5	+	+ 875,0	
	"								
	158,50	+1891,7	—	+2480,0		+5565,5	—	+4408,0	
	"								
		+4497,4	—	+ 715,8		— 713,8	+	+4497,4	
				+5753,8				+9780,4	

207. On prend ensuite dans le compas sur l'échelle des cotangentes la cot. de $\Delta\theta''$ et on la combine avec $\Delta X''$, et avec $\Delta Y''$, ce qui, eu égard à la règle des signes, produit 560,0, 875,0, qu'on écrit à leur place; on en fait de même par rapport à $\Delta X'''$ et $\Delta Y'''$ en y employant la cotang. de $\Delta\theta'''$, et on obtient les nombres 2480,0 et 4408,0 qu'on écrit respectivement au-dessous des premiers. C'est ensuite $\Delta X''''$ qui doit être écrit dans la colonne des produits provenants des ΔY, et $\Delta Y''''$ dans celle de ceux provenants des ΔX; après cela on fait la somme algébrique de chacune des deux colonnes, et on obtient le numérateur et le dénominateur de la fraction qui exprime la tangente de l'azimut vrai; pour obtenir θ, on n'a donc qu'à prendre sur l'échelle des nombres la distance comprise du dénominateur au numérateur; dans le cas de l'exemple, c'est de 9780,4 à 3753,8, et cette ouverture de compas, portée dans son sens sur l'échelle des tangentes, indiquera l'angle $16^{gr},25$ qui sera l'azimut vrai du point M′ sur l'horizon de la station; mais cet azimut a été observé avec l'orientation approchée par $16^{gr},50$: on voit donc que la correction azimutale à appliquer est dans ce cas $= -0^{gr},25$. Mais nous posons en règle pratique de ne point admettre d'angle négatif, ou d'employer à leur lieu et place leur complément à 400^{gr}; ce sera donc $399^{gr},75$ la quantité à ajouter à tous les azimuts qui auront été observés de la station en question.

PROBLÈME 7, § 156, *fig.* 22.

208. Résoudre le problème précédent dans le cas où la station est faite en proximité de l'alignement qui joint deux des points trigonométriques donnés.

209. Le problème 7ème est identique avec le 6ème, dont il n'est qu'un cas particulier; il est susceptible par conséquent de la même solution; mais quand ce cas particulier a lieu, ce qui n'est pas rare, on peut arriver un peu plus promptement au résultat par la méthode des approximations successives.

210. Soit donc à déterminer la correction d'orientation dans le cas représenté par le tableau suivant:

ORDRE PROGRESSIF stations	points	lettres de la figure	X	Y	θ
I		O	.....	.....	.....
	′	A	+2387,0	+4500,0	38,90
	″	B	+4636,8	+2255,7	115,27
	‴	C	+ 145,2	+1040,0	235,40

211. Si par estime on a jugé

$$oA = \frac{3}{4} oC,$$

on pourra écrire, d'après la notation adoptée au § 157,

$$\alpha''' = \frac{3}{4}\alpha',$$

on a d'autre part $\Delta\theta = 203{,}50$, et $\alpha' + \alpha''' = 3^{gr},50$, d'où l'on tire

$$\alpha' = 2^{gr},00;$$

d'autre part l'azimut Θ du point C sur l'horizon du point A, d'après la règle du problème premier, se trouve 236,60, ajoutant α', il vient 238,60, ce qui pour une première approximation indiquerait une correction azimutale de $0^{gr},30$.

212. Celle-ci étant appliquée aux azimuts observés, on peut calculer les coordonnées du point O par la règle du problème deuxième, et elles viendront

$$x = +1014{,}1, \qquad y = 1462{,}3,$$

et par suite

$$X = +1373{,}1, \qquad Y = 3037{,}7.$$

Maintenant que l'on connaît avec cette première approximation les coordonnées du point O, rien n'est plus facile que d'obtenir les rayons OM′, OM″, et tenter, si on le juge à propos, une seconde approximation, qui donnerait ici:

$$x = +1014{,}1, \qquad y = 1463{,}8,$$
$$X = +1373{,}1, \qquad Y = 3036{,}2.$$

Une troisième approximation ne pourrait produire qu'une variation de quelques secondes sur l'orientation cherchée, et n'arriverait pas à faire varier d'un décimètre les coordonnées, et si pour la première estime on s'aide

de la feuille graphique qu'on a ordinairement sous les yeux, la première approximation est toujours suffisante.

PROBLÈME 8, § 160, *fig.* 23.

213. Sur une orientation approchée on a déterminé les coordonnées rectangulaires d'un point, trouver la correction de ces coordonnées d'après la connaissance de la correction d'orientation.

214. De la station *O* on a calculé provisoirement les coordonnées d'un point M sur une orientation magnétique et par cela douteuse, et on a eu

$$x = +145{,}2, \qquad y = +87{,}3;$$

on a trouvé ensuite par une des méthodes ci-devant données que l'orientation devait être corrigée de $+0^{gr},27$. On demande la correction à apporter aux coordonnées.

On prendra pour cela sur l'échelle le sinus de $0^{gr},27$ et on l'ajoutera à $87^{mèt},3$ sur l'échelle des nombres, cela produira $+0^{mèt},37$, ce sera la correction en x, et avec la même ouverture du compas on opérera sur 145,2; ayant égard au signe de la formule, et on aura $-0{,}33$, d'où les coordonnées corrigées deviendront

$$x = +145{,}6, \qquad y = +87{,}0.$$

PROBLÈME 9, § 162, *fig.* 24.

215. La projection horizontale d'une ligne de pente du terrain étant donnée, ainsi que les cotes de niveaux

de ses extrémités, déterminer la projection d'un point de cette ligne qui se trouve à une hauteur donnée.

216. La solution de ce problème exige rarement une exactitude supérieure à celle du graphicisme, parce que c'est ordinairement pour le tracé des courbes horizontales qu'il y a lieu d'en faire l'application; la solution théorique est la même, soit qu'on vise à la plus grande exactitude, soit qu'on désire seulement une exactitude comparable aux opérations du compas, la seule différence est en ce que la distance D, qui sépare les deux points donnés, doit dans le premier cas être déterminée en nombres d'après les coordonnées des deux points, et on peut, dans le second cas, la mesurer sur le plan à l'échelle et au compas, ce qui abrège, quoique de bien peu, l'opération.

217. Soit donc proposé le cas suivant:

POINTS	Z	D
M′	39,2	139,7
M″	116,5	
différence . . .	— 77,3	

On demande à connaître, sur la projection horizontale qui joint les deux points, le lieu de la projection d'un

point C appartenant au terrain, dont la cote de hauteur soit de 60 mètres, on aura

$$M'C = 139,7 \times \frac{20,8}{77,3} = 37,^{mèt.}4,$$

ce qui s'obtient sur l'échelle logarithmique en prenant l'interval depuis 77,3 jusqu'à 20,8, et l'ajoutant à 139,7.

218. Si les points M′, M″ étaient donnés par leurs coordonnées comme dans l'exemple suivant:

POINTS	X	Y	Z
M′	+546,9	+ 945,7	84,2
M″	+727,3	+1024,2	146,3
différences . . .	—180,4	— 78,5	— 62,1

et si on demandait les coordonnées horizontales d'un point gissant à 100 mètres d'hauteur sur la ligne qui joint dans l'espace les deux points donnés, on prendrait sur l'échelle logarithmique des nombres, la distance de 62,1 à 15,8 (qui est ce qui manque à Z′ pour arriver à 100), et cette distance combinée avec ΔX et ΔY produirait

$$x^c = 45,9, \qquad y^c = +\ 20,0,$$

et par suite

$$X^c = 773,2, \qquad Y^c = 965,7,$$

ce seraient là les coordonnées du point du terrain dont la cote de hauteur est de 100 mètres.

PROBLÈME 10, § 165, *fig.* 25.

219. Les angles d'un polygone étant donnés par leurs coordonnées polaires horizontales, déterminer l'aire du polygone.

220. Soit un polygone dont les sommets des angles relevés du point O ont donné les résultats enregistrés dans les cinq premières colonnes du tableau suivant, dans lequel le point A est écrit deux fois pour plus de clarté dans l'ordre des différences $\Delta\theta$.

ORDRE PROGRESSIF stations	points	LETTRES de la figure	DONNÉES DÉDUITES de l'observation d	θ	$\Delta\theta$	PRODUITS positifs ect.	ares	mèt.	négatifs ect.	ares	mèt.
0	.....	.....	.....	.....	.....						
	′	A	45,0	76,00	4,20	0	2	52			
	″	B	85,0	71,80	27,35	0	32	27			
	‴	C	91,6	44,45	16,95	0	24	09			
	ıv	D	69,5	27,50	374,70	.....	.....	.....		10	56
	v	E	39,5	52,80	376,80	.....	.....	.....		6	39
	′	A	45,0	76,00							
						0	58	88	0	16	95
	Sommes					0	16	95			
	différence des sommes					0	41	93			
	$\frac{1}{2}$ *différence*					0	20	96			

On forme d'abord les différences successives indiquées

par la formule et on trouve $\Delta\theta = 4^{gr}.20$, $\Delta\theta = 27,55$, ... etc. $\Delta\theta = 376,80$ qu'on inscrit dans la colonne $\Delta\theta$; on observera ici que les trois premiers produits seront positifs et les autres seront négatifs, parce qu'il en est ainsi des sinus des $\Delta\theta$ respectifs; on obtient ensuite lesdits produits en opérant ainsi qu'il suit :

On prend avec le compas sur l'échelle troisième, numération supérieure, le sinus $4^{gr},20$ (c'est ici depuis la caractéristique 9 que cela se fait), l'ouverture résultante on la porte dans son sens depuis $85^{mèt.},0 = d''$ sur l'échelle $2^{ème}$, l'autre pointe du compas tombe sur 56,20, nombre auquel on ne fait pas attention, mais en y arrêtant le compas on allonge jusqu'à la caractéristique la plus proche (ici 2); l'ouverture résultante, portée dans son sens depuis $45,0 = d'$, donne le produit recherché qu'on lit sur l'échelle en 252 mètres quarrés ou soit 2 ares, 52 mètres.

On trouve de la même manière tous les autres produits qu'on écrira à leur colonne, on fait les sommes des produits positifs et des produits négatifs, et la demi-différence de ces deux sommes est l'aire recherchée qui revient dans le cas proposé à $0^{ect.},20^{ares},96^{mèt.}$.

221. Si on avait un grand nombre de figures à calculer toutes relevées du point O, alors on calculerait à la suite les uns des autres tous les triangles de la mappe donnée, et après que tous les cotés de toutes les parcelles auraient été ainsi traités, il ne resterait qu'à faire

séparément la somme *algébrique* de tous les résultats qui appartiennent à une même parcelle ou polygone, en observant toutefois que l'aire de certaines parcelles résultera positive, tandis que celle de certaines autres résultera négative; mais il n'y aura jamais équivoque si, en prenant les différences $\Delta\theta$ et en considérant les cotés de chaque parcelle, on suivra l'ordre convenable; au reste l'inspection seule de la mappe fera toujours connaître à vue d'œil quelles sont les aires à ajouter et quelles à retrancher pour chaque cas particulier.

PROBLÈME 11, § 169, *fig.* 25.

222. Les coordonnées rectangulaires des angles d'un polygone étant données, trouver l'aire de ce polygone.

223. Soit à déterminer l'aire d'un polygone dont les coordonnées rectangulaires des angles sont celles du tableau suivant, on demande cette aire calculée d'après la formule (27), § 171, et ensuite, pour contrôle, la même calculée en substituant X à Y et viceversa. Le tableau suivant indique mieux, qu'une longue description, la marche de l'opération.

COORDONNÉES			CALCUL PAR ΣX ET ΔY				CALCUL PAR ΣY ET ΔX			
angles du polygone	X	Y	sommes en X	différence en Y	PRODUITS positifs	PRODUITS négatifs	sommes en Y	différence en X	PRODUITS positifs	PRODUITS négatifs
a	+ 96,3	+ 16,5								
			+138,8	— 20,0	» » »	0,27,76	+ 53,0	+ 53,8	0,28,51	» » »
b	+ 42,5	+ 36,5								
			+ 67,3	— 50,9	» » »	0,34,25	+123,9	+ 17,7	0,21,93	» » »
c	+ 24,8	+ 87,4								
			+ 78,8	— 32,6	» » »	0,25,69	+207,4	— 29,2	» » »	0,60,56
d	+ 54,0	+120,0								
			+157,0	+ 22,0	0,34,54	» » »	+218,0	— 49,0	» » »	1,06,82
e	+103,0	+ 98,0								
			+199,3	+ 81,5	1,62,43	» » »	+114,5	+ 6,7	0,07,67	» » »
a	+ 96,3	+ 16,5								
					1,96,97	0,87,70			0,58,11	1,67,38
					0,87,70					58,11
					1,09,27					1,09,27

224. Dans les trois premières colonnes on a l'indication des angles du polygone et de leurs coordonnées. La quatrième colonne est destinée aux sommes successives $X' + X''$, $X'' + X'''$, ... etc. jusqu'à $X^n + X'$. La cinquième colonne reçoit les différences successives en Y dans le même ordre. Les troisième et neuvième colonnes sont destinées aux sommes en Y et aux différences en X.

225. En formant ces sommes et ces différences il faut avoir égard aux signes algébriques, et c'est pour faciliter la formation de la dernière ligne de sommes et de différences qu'on repète à la fin le premier angle du polygone.

Après avoir ainsi disposé tout le calcul, on procède par l'échelle logarithmique, ou par les tables, ou si l'on veut par la multiplication ordinaire à la formation des produits, que l'on écrit dans leurs colonnes respectives, comme le tableau indique. On fait ensuite la somme algébrique de ces produits, et ce qu'on obtient est le double de l'aire cherchée, qui, dans notre cas, revient $1^{ect.},9^{ares},27^{mèt.q.}$, tant d'une manière que de l'autre est ce qui prouve l'exactitude du calcul; la moitié de ce résultat $0^{ect.},54^{ares},63^{mèt.}$ est l'aire du polygone proposée.

226. Si on préférait l'emploi de la formule (29), § 173, il faudrait organiser le tableau à-peu-près de la même manière, si ce n'est que les différences y sont alternatives, et que les colonnes, sommes en X, sommes en X y

sont supprimées; c'est au choix du géomètre d'employer l'une ou l'autre formule; elles conduisent exactement au même résultat et, quand il s'agit d'un seul polygone, elles exigent le même nombre d'opérations; mais, nous le répétons, la première est préférable quand on a un grand nombre de figures coérentes à calculer, parce qu'elle réduit à moitié le nombre d'opérations à faire par toute autre méthode.

CHAPITRE VI.

OPÉRATIONS DE CAMPAGNE POUR LE RELÈVEMENT ET NIVELLEMENT COMPLET D'UNE ÉTENDUE DONNÉE.

SECTION XV.

Relèvement et nivellement complet d'un terrain dont tous les points sont visibles d'un seul point de station.

227. Le géomètre qui doit procéder au relèvement d'une étendue de terrain limitée à la portée de l'instrument, et tellement découvert que l'on puisse, d'une seule station, apercevoir tous les points sur lesquels, si on opérerait par la méthode ordinaire, il faudrait placer un jalon, doit d'abord considérer si son travail est destiné à se rattacher à d'autres relèvements, ou bien s'il ne doit consister qu'en une opération isolée: dans le premier cas il y aura ou non des points visibles de la station sous la portée de l'instrument, qui auront été préalablement déterminés, soit par d'autres relèvements, soit

par voie trigonométrique; l'orientation exacte sera alors nécessaire dans le second cas, il suffira toujours d'une orientation approchée, telle que l'aiguille aimantée peut la fournir; il sera même permis de ne faire aucun cas de l'orientation et de diriger le diamètre zéro de l'instrument d'une manière quelconque; mais il sera toujours bon de tenir compte de l'orientation donnée par l'aiguille, puisque cela est si facile à faire et contribue à donner une idée plus exacte de la localité.

228. Après avoir placé l'instrument sur son pied et l'avoir orienté et nivellé, le géomètre examine d'un coup d'œil le terrain sur lequel il doit opérer, et donne au portemire les instructions qu'il juge convenables (L): le portemire se rend successivement sur tous les points indiqués par le géomètre, et s'y tient avec la mire jusqu'à ce qu'il lui soit signalé de passer outre. Le géomètre fait sur chaque point l'observation complète, comme on l'a expliqué dans la section IX, et son aide inscrit dans le carnet les nombres générateurs résultants chacun à leur colonne.

Il est bon de prescrire un ordre que l'on suivra autant que possible, par exemple, de commencer toujours par le nord et d'avancer en tournant par l'est ou par l'ouest, en commençant par les points les plus éloignés et se reserrant peu à peu en spirale par un second et même par un troisième *tour d'horizon*, de manière que le portemire, à la fin de l'opération, vienne se trouver près de la station.

Tous les points doivent être désignés au carnet par un numéro d'ordre, et on doit en outre s'attacher à bien décrire, quoique le plus succintement possible, le point observé.

229. Le carnet peut être préparé par le modèle n° I, ou bien comme le modèle n° II à la fin du volume; l'un est à préférer pour les opérations de peu d'étendue dont on ne se propose pas de rapporter les coordonnées à une origine unique; l'autre est particulièrement propre aux grands relèvements surtout pour le cadastre.

Dans les trois premières colonnes, modèle n° I, on désigne par son numéro, ou sa lettre, et par une description écrite très laconique la station et les points; les deux suivantes contiennent la lecture du micromètre; les trois suivantes, les nombres générateurs; la page de droite s'explique d'elle-même d'après la notation adoptée.

230. Après avoir ainsi opéré, le géomètre trace à vue un croquis de toute la localité avec tous les points qu'il a à relever, et il cote chaque point du numéro d'ordre inscrit au registre.

Cette opération n'est pas aussi difficile qu'elle le paraît d'abord, parce que le géomètre peut s'aider en cela des angles et des distances qu'il vient d'observer et placer les points d'après ces données; il peut même s'aider d'une espèce de carrelage circulaire, comme on le voit dans le modèle n° III, tracé à l'avance, à l'encre claire ou mieux lithographié en couleurs.

Si les coordonnées rectangulaires étaient déjà faites,

on pourrait aisément construire aussi sur papier carrelé ordinaire; mais si l'aide n'a pas eu le temps de former les coordonnées rectangulaires de chaque point pendant que la stadia va d'un point à l'autre, c'est au premier des deux moyens que l'on doit avoir recours.

231. On a dit aussi que l'une des propriétés du nouveau pantomètre est de fournir, en même temps qu'on le relève, le canevas du relèvement, c'est-à-dire de piquer sur une feuille de papier des points qui sont entre eux dans le même rapport que leurs homologues sur le terrain. Si l'instrument qu'on emploie à ce mécanisme, on est dispensé de l'estime pour la pose desdits points; mais toujours faut-il décrire entre les points susdits les accidents du terrain, comme limite de propriété, chemins, canaux, etc., c'est là qu'on a nommé *type eidographique*.

232. Si quelque partie du terrain présentait des détails tellement menus que le géomètre ne jugeait pas convenable de tout observer au pantomètre, c'est son aide qui doit en faire à part un croquis, où il cotera les dimensions qu'il aura mesuré au mètre; bien entendu qu'il ne s'agit ici que de quelques détails de maison ou autres dimensions isolées, n'impliquant rien sur l'ensemble de l'opération.

233. L'opération sur le terrain étant ainsi accomplie, on n'a qu'à remplir au cabinet les colonnes restantes et on a par là tout ce qu'il faut pour résoudre toutes les questions, pour satisfaire à tous les besoins qui peuvent

avoir déterminé le relèvement du terrain proposé, et si on en veut ensuite avoir un dessin au net à une échelle quelconque, on peut le construire avec promptitude en plaçant sur le papier, d'après les coordonnées rectangulaires, les points un à un, et figurant ensuite le terrain d'après le type *eidographique*, ce qui revient absolument à ce que l'on ferait pour un relèvement exécuté à l'équerre d'arpenteur, à cela près, que l'on a ici de plus les cotes de niveau que l'équerre ne donne pas, et on obtient un degré d'exactitude bien supérieur à celui que l'équerre peut donner, et une rapidité dont on peut à peine se former une idée.

234. On montrera plus loin comment il faut opérer pour se rattacher à des points déjà donnés, accessibles ou non, de la station.

SECTION XVI.

Même relèvement dans le cas où deux stations se rendent nécessaires.

235. Si l'étendue ou la disposition du terrain sont telles que deux stations soient nécessaires, voici comment on peut alors procéder.

236. On commence par exécuter la première station tout comme on a expliqué dans la section précédente, et on a soin de se ménager deux points au moins, qui soient ensuite visibles de la seconde station.

Ces points devront être choisis de manière que la distance qui les sépare se trouve aussi grande que possible; soit que l'angle compris entre les rayons qui y sont dirigés puisse être très ouvert, soit que les deux points se trouvent l'un fort proche et l'autre fort éloigné de chacune des stations (fig. 27).

237. Après avoir accompli tout le travail possible de la première station, on transporte l'instrument sur le point choisi; pour la seconde on s'y oriente avec attention, et l'on observe ensuite les deux points ci-dessus choisis, qui doivent servir à rattacher une station à l'autre; c'est en quelque sorte ce qu'on apelle le *coup d'arrière* dans les nivellements ordinaires. On sent qu'un seul coup d'arrière suffirait si on avait l'orientation exacte; mais il vaut toujours mieux en avoir deux pour être sûrs de ne pas avoir à revenir sur ses pas.

238. On peut après cela continuer le relèvement de la seconde station jusqu'à travail accompli, tout comme si cette station eut été seule à faire, et en obtenir séparément le type eidographique, et ce n'est que dans la mise au net dans le cabinet que l'on s'occupe d'assembler les deux types en un seul dessin, si le dessin est nécessaire au but que l'on se propose; car dans le cas contraire on se borne à réduire les coordonnées des points à un seul système d'axes, comme on le montrera par la suite: mais si le géomètre veut s'assurer à l'instant même de l'exactitude des observations qui lient les deux stations entre elles, voici comment il s'y prend:

239. Examinons d'abord les conditions géométriques du quadrilatère ABmn (fig. 27), résultant des deux stations A, B, et des deux points m, n: si on considère la projection horizontale on y connaît deux angles A, B, et les quatre cotes; on a donc dans ce sens une condition de plus que de besoin pour le construire, c'est-à-dire qu'on a un moyen de vérification; mais ce quadrilatère existe dans l'espace, et par cela la troisième coordonnée z de chaque angle serait déjà donnée, si outre la projection horizontale on avait l'inclinaison de trois des cotés; or cette inclinaison (l'angle φ) est donné pour les quatre cotés, donc on a une deuxième condition de plus qu'il ne faudrait pour la détermination complète du quadrilatère dans l'espace; c'est-là un deuxième moyen qu'on a pour découvrir une erreur si elle existe.

Si on considère ensuite les conditions algébriques qui lient les coordonnées aux nombres générateurs, on verra facilement qu'une compensation d'erreurs est très peu probable, parce que chacun des élémens, l'azimut excepté, entre dans la détermination des trois coordonnées: d'où il suit, que si une erreur d'observation existe dans chacune des deux stations sur quelqu'un des nombres générateurs, il peut bien y avoir lieu à une compensation, dans le sens de l'un des axes; mais, à moins de quelque cas très rare, il est presqu'impossible que cette compensation aie lieu dans les trois sens.

240. Si a, b, c ..... m représentent les angles d'un polygone quelconque formé dans l'espace, et si

$$x^b, y^b, z^b, \quad x^c, y^c, z^c, \ldots\ldots \text{ etc.}$$

sont respectivement les coordonnées du point b par rapport au point a, du point c par rapport au point b ... etc. jusqu'à x^m, y^m, z^m pour les coordonnées du point m par rapport au point $m-1$, et x^a, y^a, z^a pour les coordonnées du point a par rapport au point m, on aura évidemment

$$\Sigma x = 0,$$
$$\Sigma y = 0,$$
$$\Sigma z = 0.$$

Cette condition dans le quadrilatère que l'on considère ici est très facile à vérifier, puisqu'on n'a qu'à changer de signe alternativement, les coordonnées qui résultent

de l'observation, et faire la somme algébrique dans les trois sens. On pourra donc dans un instant s'assurer sur le terrain même, si la deuxième station est exactement déterminée par rapport à la première, en vérifiant numériquement les trois conditions ci-dessus.

241. Mais ce mode de vérification exige qu'on aie préalablement calculé les coordonnées rectangulaires des points de rattachement par rapport à chacune des deux stations; on trouvera donc généralement plus commode de procéder d'une autre manière que voici:

242. Le même quadrilatère peut être considéré comme composé de deux triangles, dans chacun desquels deux cotés et l'angle compris sont connus, et dont le troisième coté est la distance qui sépare les deux points de rattachement; on peut immédiatement obtenir cette distance d'abord par rapport à la première, puis par rapport à la deuxième station en résolvant le problême premier du chapitre cinquième, section treizième; il est évident que les deux calculs doivent conduire au même résultat tant pour la longueur du troisième coté qui y est identique, que pour son orientation Θ; or si la distance en question résulte identique et l'orientation aussi, on a la preuve certaine que tout est bien si la distance seule vient identique, et l'orientation Θ diffère du premier au second calcul, la différence est la correction d'orientation à apporter à la deuxième station pour en rendre le diamètre zéro parallèle à celui de la première; mais si la distance résultait différente, alors on aurait certaine-

ment commis une erreur matérielle dans quelques-uns des élémens de l'observation, et il faudrait revenir sur ses pas pour vérifier et corriger.

243. Voyons maintenant quelles sont les erreurs probables : en premier lieu, les observations peuvent être très exactes, mais l'aiguille aimantée pourrait bien n'avoir pas fourni une orientation identique dans les deux stations en rendant leurs axes parallèles; alors c'est seulement l'angle Θ qui diffère d'un calcul à l'autre; mais si la distance D venait à résulter différente, ce serait une preuve qu'il y a eu erreur dans les observations, et il faudrait vérifier et refaire en conséquence.

244. Si la discordance des résultats dévoile seulement une différence d'orientation, on peut, si l'on n'a pas commencé le relèvement, retoucher à l'instrument; mais on trouvera presque toujours convenable d'achever l'opération dans l'orientation où l'on se trouve, fut-elle entièrement arbitraire, sauf à apporter aux coordonnées la correction relative avant de les employer. C'est sur le terrain que le temps est précieux, et il convient de réserver au cabinet tout ce qui n'est pas absolument indispensable de faire sur les lieux. Il est prudent cependant de faire toujours les opérations vérificatives ci-dessus avant de quitter le terrain, afin de s'assurer de ne pas avoir à revenir sur ses pas.

SECTION XVII.

Relèvement isolé composé de plusieurs stations.

245. On a vu comment on peut arriver à assembler deux stations de relèvement, et on conçoit que les coordonnées partielles de tous les points peuvent ensuite être réduites à trois axes principaux, de la même manière que les géomètres sont dans l'usage de réduire à une même horizontale tous les points d'un même nivellement.

Pour procéder graduellement du simple au composé on va examiner maintenant le cas où un relèvement isolé de moyenne étendue donnerait lieu à un ensemble de sept à huit stations.

246. Le géomètre doit dans ce cas choisir ses stations et ses points de rattachement, de manière à ce que chaque station soit rattachée à celles qui l'avoisinent par deux points, si cela se peut, en prenant au besoin quelque point subsidiaire; on n'est pas gêné à commencer plus dans un endroit que dans un autre, pourvu qu'à travail complet on aie un nombre suffisant de points de rattachement pour faire toutes les combinaisons possibles de vérification. Avant de quitter chaque station, le géomètre effectue les vérifications numériques indiquées au § 240, ou bien celles du § 242, et il ne quitte son terrain qu'assuré de l'exactitude de tous les rattachements.

247. On anticipera ici un peu, sur ce qui fera l'objet du chapitre suivant, pour indiquer l'esprit de conduite de ces opérations, afin qu'on en comprenne dès à présent l'importance. La figure 27 représente un ensemble de stations A, B, C, D etc., et de points de rattachement entre ces stations; on y voit trente-six rayons qui composent le réseau formant entre eux des figures de quatre ou de six cotés; si on joint ensuite par des lignes les stations entre elles, on obtient un réseau de triangles; on obtiendrait un autre réseau de triangles si on voulait joindre par des droites les points de rattachement des stations de proche en proche.

248. Si les conditions précédemment énoncées ont été vérifiées sur le terrain, il est clair qu'en appliquant à l'un quelconque des polygones, qu'on peut imaginer à volonté dans la figure 27, le mode de vérification indiqué au § 240, on doit le trouver exact, car ces polygones ne se composent que d'éléments déjà vérifiés exacts; mais comme il est impossible en pratique d'obtenir l'exactitude mathématique, on est convenu d'une limite de tolérance, au-dessous de laquelle les résultats sont considérés comme bons. Or on pourrait craindre que les moindres déviations partielles comprises dans les limites de tolérance convenue, n'arrivassent parfois à altérer l'ensemble, de manière à le rendre quelque part fautif, c'est pour s'assurer que cela n'a pas lieu, et pour prévenir en quelque sorte l'accumulation des moindres déviations résidues, ainsi que pour déterminer avec pleine assurance de succès les

coordonnées relatives des stations entre elles, que la vérification des conditions géométriques des figures qui résultent de l'ensemble de plusieurs stations est nécessaire.

Ceci doit suffire pour persuader le géomètre opérateur sur le terrain, de l'importance de bien rattacher tous les élémens de son travail en tous sens, et on trouvera dans le chapitre suivant tous les détails sur la manière d'effectuer ces sortes de vérifications et d'en tirer parti pour arriver si près du vrai mathématique, qu'on n'aie jamais besoin, à ouvrage achevé, de toute la tolérance que l'on se sera d'abord donné.

249. Quant à l'orientation il est évident que l'on n'est pas gêné jusqu'ici, et qu'il suffit que toutes les stations aient la même; et on a vu qu'il est facile de la transmettre d'une station à la suivante par le moyen des points de rattachement et de l'azimut du coté qui les joint; mais si les accidents du terrain s'opposent à ce qu'on emploie des rayons assez grands, et si entre deux points de rattachement la quantité que nous avons désignée par D (problême 1er) se trouve parfois petite en comparaison de la longueur des rayons, il peut se glisser des imperfections sensibles dans l'orientation, et il peut se faire qu'à la longue on arrive à de mauvais raccordements; voici entre autres un moyen souvent convenable pour se mettre à l'abri de cet inconvénient.

250. 1° On choisit un ou plusieurs points, compris ou non dans l'étendue du relèvement qu'on se propose de faire, et tels qui soient visibles de la plus part des sta-

tions, on les appellera ici *points directeurs;* de chaque station on dirigera à ces points un rayon, et, si on y passe assez près dans la marche des opérations pour y envoyer la stadia, on le fait, si non, on peut s'en dispenser;

2° On détermine les coordonnées de ce point par rapport aux trois stations les plus voisines, entre lesquelles on s'assure par de bonnes observations et par de points de rattachement bien disposés, que l'orientation a conservé le parellèlisme, ce qui se fait par les moyens indiqués au § 139, et on emploie alors pour vérifier et corriger au besoin l'orientation de toutes les autres stations, la comparaison entre l'azimut qui y aura été observé et celui résultant des coordonnées approchées de la station, comparées aux coordonnées du point directeur, comme on a enseigné au § 145; mais nous le répétons, il ne s'agit pas d'arriver à la correction d'orientation sur le terrain, car celle-ci ne se détermine qu'au cabinet; mais le géomètre doit, en opérant, recueillir toutes les données qui assurent la réussite de son opération.

251. Si la station centrale, qui, dans un relèvement à-peu-près comme on le suppose dans la figure 27, réunit toutes les autres stations ne fût pas praticable, cela ne rendrait pas défectueuse la méthode; mais ce n'est pas ici le cas de montrer comment il faudrait s'y prendre pour arriver au résultat définitif, parce que c'est au cabinet que cela doit se faire; quant aux opérations sur le terrain, elles ne diffèrent pas de ce que l'on a jusqu'ici indiqué.

SECTION XVIII.

Mode de conduire les opérations sur le terrain quand il s'agit d'une grande étendue, et que l'on doit cadrer entre des points trigonométriques.

252. Quand un relèvement doit avoir une étendue médiocre, comme par exemple, de 500 à 1000 ectares, on peut encore se conduire comme on l'a enseigné dans la section XVII, en multipliant suffisamment les points directeurs. On peut même (car l'exactitude de l'instrument est pour cela suffisante) laisser à quelques-unes des stations, convenablement choisies, des jalons que l'on considère ensuite comme points directeurs pour les autres stations; on obtient ainsi les éléments d'une véritable triangulation, qui se trouve toute faite à la fin du relèvement, et que l'on peut calculer par la méthode ordinaire avant de travailler à la mise au net; cette espèce de triangulation aurait un grand nombre de bases qui se controlleraient les unes les autres, et il ne serait question que d'effectuer quelques calculs avant d'arrêter les positions définitives des stations. Ce ne serait là qu'une extension du cas que l'on a considéré dans les numéros précédents, et on n'aurait qu'un plus graud nombre de combinaisons à faire pour arriver à la vérification la plus complète de toutes les opérations sans sortir du cabinet.

253. Mais quand il s'agit d'un relèvement d'une grande

étendue, soit pour cadastre, carte militaire ou autre, dans lequel on vise à une grande exactitude d'ensemble, il est indispensable d'avoir une triangulation exacte qui s'étende en tous sens, et qui procure au géomètre les points de repère, dont il a besoin pour arriver à la certitude morale de l'exactitude de ses résultats. Un avantage en cela de la nouvelle méthode sur la méthode usuelle est de n'avoir pas besoin, à beaucoup près, d'un aussi grand nombre de points trigonométriques, et de pouvoir opérer aussitôt que les signaux sont placés sans attendre que les observations des angles soient faites, sauf à ne s'occuper de la détermination définitive des coordonnées et de la mise au net, s'il le faut, qu'après l'accomplissement du travail trigonométrique.

254. Or la seule différence dans les opérations sur le terrain, que cette circonstance introduit, est qu'au lieu de créer des points directeurs, on se sert pour cela des signaux trigonométriques.

255. En opérant entre les points trigonométriques on n'est pas plus gêné pour le choix des stations et des points, que dans les relèvements qui ne prennent qu'une petite étendue, et on n'a pas plus de conditions à remplir, quant au mode de rattachement des stations entre elles; mais quand on arrive près d'un signal trigonométrique, on y envoie la mire et on le relève comme tout autre point, et si c'est un clocher, une tour ou autre édifice, au centre duquel on ne puisse pas placer la mire, on le relève par intersection, et on applique le procédé

du § 139, ayant égard de faire cela de trois stations, parmi celles qui avoisinent le plus le point trigonométrique.

256. On aura soin encore de commencer, si cela se peut, par un point trigonométrique, ou bien on résoudra les problèmes des §§ 153 et 154 par rapport aux premières stations, qu'on fera afin d'avoir de suite les coordonnées approchées de chacune des stations; mais cela est seulement nécessaire quand on est pressé de placer de suite, sur le terrain même, le figuré de son travail dans le canevas trigonométrique; car autrement, si on n'a pas commencé par le point trigonométrique, il suffit qu'on y soit arrivé avant d'entreprendre l'ouvrage du cabinet qui doit précéder la mise au net.

257. Ce qui est plus essentiel est seulement de prendre de chaque station des directions aux points trigonométriques visibles, et en cela il est bon de choisir toujours de préférence un point trigonométrique des plus éloignés que l'on aperçoive, et deux autres des plus proches; si on en voit d'avantage, on peut les prendre, si on veut, pour vérification; on verra plus tard la manière de tirer parti de ces observations, il suffit ici d'avoir indiqué la marche de l'opération sur le terrain, de manière qu'il ne reste rien d'incertain et que tout puisse être contrôlé d'après les mêmes principes.

258. Si dans quelque lieu bas ou encaissé, ou bien dans les bois, on avait des stations d'où il fût impossible de découvrir un point trigonométrique, on choi-

sirait alors un point directeur, que l'on déterminerait à l'aide des stations successives; et si le passage du cheminement dans le lieu en question, tout en ne présentant pas à la vue les points trigonométriques, permettait cependant de choisir un point directeur très éloigné, on serait dispensé d'en déterminer la position, pourvu que les changements de station eussent lieu à-peu-près sur l'alignement du point directeur, ce qui est souvent praticable.

259. Si on avait jugé convenable de faire faire au bureau central des observations magnétiques correspondantes, on tiendrait aussi compte de l'heure où l'on a orienté l'instrument en commençant la station, ainsi que de la vérification de l'orientation que l'on doit faire avant de la quitter; mais on ne tiendra pas compte sur le terrain des variations d'orientation, car, si l'exactitude à laquelle on aspire exige ces sortes de rectifications, ce n'est qu'au cabinet qu'elles doivent être faites.

CHAPITRE VII.

OPÉRATIONS DE CABINET.

SECTION XIX.

Opérations de cabinet relatives à la section quinzième, chapitre VI.

260. Après que l'opération sur le terrain est accomplie, si on n'a eu à faire qu'une seule station, et si rien ne décide à un choix particulier d'axes des coordonnées, on n'a qu'à remplir, à l'aide de l'échelle logarithmique et des formules (7), § 104, les colonnes du carnet, et l'on arrive au même résultat que l'on aurait obtenu à l'équerre d'arpenteur, si le procédé de celle-ci pouvait être pratiquement rigoureux et facile; on peut donc, *sans effectuer la mise au net*, déterminer l'aire des diverses parcelles relevées, et calculer la direction la plus convenable d'une conduite d'eau, d'un chemin, etc.

261. Si on se propose aussi de parler aux yeux avec un dessin matériellement exécuté à une échelle quelconque, on effectue cela sur une feuille carrelée en nombre

rond de mètres, à l'échelle proposée, en rapportant les points d'après les coordonnées; on imite ensuite le type eidographique fait sur le terrain, et après avoir vérifié le tout, on le passe à l'encre à la manière ordinaire.

262. Si on a deux stations au lieu d'une, on fait d'abord, par rapport aux points de rattachements, les vérifications dont on a parlé aux § 240 et suivants, et on rectifie l'orientation de la deuxième station d'après celle de la première, s'il y a lieu, c'est-à-dire qu'on apporte aux coordonnées déterminées par rapport à la deuxième station, la correction nécessaire d'après la règle des § 160 et suivants, car on se souvient que les nombres générateurs ne doivent pas être altérés de ce qu'ils ont été observés sur le terrain; et si après cela le quadrilatère formé par les deux stations, et les deux points de rattachement, ne satisfait pas exactement à la condition

$$\Sigma x = 0, \quad \Sigma y = 0, \quad \Sigma z = 0,$$

il ne s'en écartera cependant que d'une quantité si petite qu'on pourra toujours la négliger; néanmoins on pourra approcher évidemment bien plus de la vérité en adoptant pour la distance des deux stations en x, en y, et en z une moyenne qui rende

$$\Sigma x = 0, \quad \Sigma y = 0, \quad \Sigma z = 0.$$

263. On se donnera ensuite un système d'axes, auxquels on rapportera toutes les coordonnées, et si on n'est

en cela lié par aucune condition, on le choisit de manière à ce que toutes les coordonnées soient positives, ce qu'on obtient, par exemple, en fixant l'origine à l'angle à droite et au bas de la feuille sur laquelle on veut dessiner, cela revient numériquement à ajouter une quantité constante à toutes les coordonnées.

264. L'opération successive du dessin rentre absolument dans les règles ordinaires, et ne présente rien de difficile.

265. Augmentant encore le nombre des stations et passant au cas considéré dans la section XVIII, la nature des opérations du cabinet ne change pas, mais les moyens d'effectuer les vérifications sont plus nombreux, et si on veut, pour acquérir la plus haute certitude, les appliquer tous, il devient nécessaire de suivre un certain ordre, pour arriver avec promptitude au but sans se perdre dans des calculs inutiles. Voici donc de quelle manière il est convenable de procéder.

266. Premièrement on vérifie la condition des quadrilatères, dont il est parlé aux § 240 et suivants, et si on la trouve remplie dans les limites de la tolérance qu'on s'est donné, on adopte pour distance en x, en y et en z entre les stations successives, la moyenne de celle qui résulte de deux ou plusieurs points de rattachement comparés, ce qui rend alors zéro le Σx, Σy, Σz.

267. Si au contraire on découvre par là des déviations d'orientation, on cherche la correction par les méthodes précédemment enseignés, et on corrige ensuite

les positions relatives des stations qui ont présenté cette sorte de différence.

268. Tant que rien ne manifeste dans quel sens, et de quelle quantité chacune des deux déterminations de la position relative de deux stations diffère de la véritable, il est conforme à la règle des probabilités d'adopter la moyenne arithmétique; mais si une nouvelle condition vient s'introduire dans le problême, et modifier cette probabilité, il faut alors en tenir compte et adopter, au lieu de la moyenne arithmétique, celle des valeurs intermédiaires, ou même latérales, aux valeurs primitivement observées, qui réunit la plus grande probabilité: on dit ici *même latérales* (M), bien entendu dans les limites des moindres déviations qu'on est convenu de tolérer dans les opérations élémentaires. Or si on avait fait un relèvement composé de plusieurs stations, à la suite les unes des autres, ne se rattachant que deux à deux, et ne tenant et n'aboutissant à rien de déterminé, on n'aurait d'autre parti à prendre que d'adopter les moyennes successives. Mais si la suite des rattachements est telle que le cheminement se replie sur lui-même, il vient à se former entre les stations, comme dans la figure 27 des polygones, dont les coordonnées successives d'angle à angle sont données par l'opération précédente, et qui doivent eux-mêmes satisfaire à la condition

$$\Sigma x = 0, \quad \Sigma y = 0, \quad \Sigma z = 0.$$

Cette nouvelle condition étant admise à l'épreuve, on ne

pourra trouver que des différences qui seront au-dessous de la tolérance adoptée; mais on aura un moyen d'approcher d'avantage de la vérité en variant tant soit peu les moyennes déjà adoptées, de manière que cette condition se trouve remplie.

269. On aura soin de faire une semblable combinaison dans tous les sens, de manière que toutes les stations y entrent; et on sait par les règles des probabilités, que l'on sera d'autant plus près de la vérité, que les corrections à faire seront elles-mêmes plus petites, ce qui donnera encore lieu à choisir, parmi les combinaisons faites, la plus probable.

270. On pourrait appliquer à ces opérations la savante théorie des probabilités de Puissant *1; mais qu'on se souvienne qu'il ne s'agit plus ici que de différences résidues d'un ensemble d'opérations, qui, par elles-mêmes sans aucune des corrections qui nous occupent, seraient déjà supérieures à tout ce que l'on a fait jusqu'ici dans ce genre; l'opportunité de la méthode des coordonnées permet de donner à cette manière de s'approcher du vrai, quelque fraction du temps qu'on a déjà épargné par la rapidité des opérations sur le terrain, mais il serait tout-à-fait superflu de pousser la chose plus loin.

271. Si on a des points directeurs pour corriger les orientations, on les détermine avec les observations voi-

*1 Méthode générale pour obtenir les résultats moyens d'une série d'observations astronomiques.

sines, comme on a expliqué au § 250 et suivants; on forme ensuite les distances orthogonales de chaque station, au point directeur le plus éloigné qu'on a, et on s'en sert pour obtenir la correction d'orientation; ce n'est qu'après l'avoir appliquée, qu'on procède aux vérifications qui doivent suivre.

272. Après avoir arrêté ainsi toutes les distances orthogonales des stations entre elles, on se donne le système d'axe auquel on veut tout rapporter, et après avoir formé les coordonnées de tous les points, on en consigne le registre au dessinateur qui opère alors à la manière ordinaire.

273. On distinguera par la suite l'ensemble de ces vérifications par le nom de *polygonation*.

274. Les opérations de cabinet qui doivent précéder le dessin, peuvent donc se résumer ainsi:

1° La comparaison des points de rattachement pour découvrir les déviations d'orientation, s'il y en a, ainsi que les erreurs que le géomètre pourrait avoir commis sur le terrain, dans le cas où il ne les aurait pas déjà vérifié lui-même;

2° La correction des orientations, s'il y a lieu;

3° La polygonation ou fixation définitive des coordonnées des stations rapportées aux axes principaux adoptés.

SECTION XX.

Modifications que subissent les règles précédentes quand on opère entre les points trigonométriques.

275. Quand les opérations de relèvement et nivellement doivent être conduites sur une étendue considérable de pays, il est indispensable d'avoir des points trigonométriques en nombre suffisant. On trouvera plus loin l'analyse de l'approximation que l'on peut espérer d'atteindre en opérant sans points trigonométriques, et de la limite à laquelle il convient de s'arrêter pour la longueur des cotés; pour le moment on supposera qu'on opère avec le pantomètre de grandeur moyenne, et on admettra que la triangulation est bornée à des cotés moyens de 5000 mètres, c'est ce qui est convenable pour la nouvelle méthode.

276. La triangulation étant faite, ou du moins préparée par le placement des signaux sur toute l'étendue du pays dont on fait la carte, il arrivera très rarement qu'on doive se stationner dans des endroits tellement fermés que l'on ne puisse découvrir quelques points trigonométriques. Or la seule et unique modification que doivent subir les opérations sur le terrain, c'est comme on l'a indiqué à la section XVIII, de se lier aux points trigonométriques comme à tout autre point par des observations complètes, ou bien par des observations inter-

BIBLIOTECA DE LA UNIVERSIDAD

sectives; mais au cabinet, c'est bien différent pour ce qui regarde la polygonation.

277. Supposons qu'on aie relevé dans un triangle d'environ 5000 mètres de coté un réseau de 60 à 80 stations (c'est à-peu-près ce qu'il arrive de faire dans un pareil espace), et admettons qu'on doive procéder à la détermination des coordonnées définitives de toutes les stations; on s'y prendra pour cela comme il suit:

Premièrement on s'assurera par la comparaison des points de rattachement des stations, qu'aucune faute n'a été commise dans les cheminements, et de plus que toutes les orientations sont bonnes, et on rectifiera celles qui ne se trouveraient pas exactes en en cherchant la correction par les directions aux points trigonométriques observés, en donnant, pour cela, la préférence aux plus éloignés; il faut, pour y arriver, connaître les coordonnées de chaque station par rapport aux axes principaux, mais il suffit de les obtenir approximativement par des additions de proche en proche des distances orthogonales non corrigées, comme on l'a démontré précédemment, d'où l'on voit que sur le terrain il pourrait bien être indifférent de commencer ou non près d'un point trigonométrique; mais au cabinet c'est toujours en partant de quelques-uns de ceux-ci que l'on opère.

278. Après s'être assuré de l'orientation de toutes les stations et de l'exactitude des distances orthogonales successives, dans la limite de la tolérance accordée, on observera que si ΔX, ΔY, ΔZ expriment les distances

en x, en y et en z entre deux points trigonométriques, et si ces deux points sont réunis par un cheminement polygonal, dont les coordonnées successives de proche en proche sont

$$x', y', z'; \quad x'', y'', z'' \ldots\ldots \text{ etc.},$$

on devra encore avoir

$$\Sigma x = \Delta X,$$
$$\Sigma y = \Delta Y,$$
$$\Sigma z = \Delta Z.$$

279. Si la vérification des conditions, dont il a été question dans les §§ précédents, n'a dévoilé aucune erreur, cette dernière condition ne saurait se trouver mal remplie, d'où il suit que le plan tracé sans aucune considération ultérieure ne pourrait être que bon; mais puisque tout est numérique et que rien n'est si facile que de répartir, suivant les lois de la probabilité, *les différences minimes résidues* pour s'approcher ainsi beaucoup plus de la vérité, on va tâcher de le faire en s'y prenant comme il suit:

1° On choisit une station à-peu-près centrale dans l'espace relevé, et on en obtient les coordonnées par l'addition successive des distances orthogonales des stations qui composent un cheminement polygonal entre cette station et un point trigonométrique; cela conduit pour la station centrale à trois coordonnées que l'on notera par

$$\alpha', \beta', \gamma'.$$

On en fera de même en partant d'un second et d'un troisième point trigonométrique, et d'un quatrième si l'on est dans un quadrilatère, et en obtiendra d'autres valeurs

$$\alpha'', \beta'', \gamma''; \quad \alpha''', \beta''', \gamma''' \ldots\ldots \text{ etc.}$$

peu différentes des premières, et comme *les différences résidues* sont déjà dans la tolérance accordée, tolérance qui est elle-même réglée au-dessous de ce que l'on juge négligeable dans le but pour lequel on opère, on sera sûr d'atteindre au plus près possible le vrai, si on adoptera, pour les coordonnées de la station centrale la moyenne des trois ou des quatre résultats ainsi obtenus.

280. Chacune des lignes polygonales qui conduisent des points trigonométriques à la station centrale, se trouve ainsi déterminée en entier par la condition des moindres corrections qui amènent à satisfaire aux équations du § 278, et les stations du cheminement ainsi déterminées serviront ensuite comme points de départ pour d'autres déterminations; elles constituent ce que l'on désignera par *lignes polygonales de premier ordre*, et on nommera *centrale de premier ordre* la station à laquelle ces lignes polygonales aboutissent.

281. En opérant de même dans tous les triangles et dans tous les quadrilatères que le réseau trigonométrique présente, on arrive à décomposer ceux-ci, chacun en trois ou quatre aires bordées par des lignes de cheminement, dont toutes les stations sont établies de la manière la plus parfaite que les moyens dont on dispose permettent.

282. Ces aires contiendront ordinairement encore quinze ou vingt stations, parmi lesquelles il s'en trouvera quelqu'une qui pourra être considérée comme centrale dans les aires formées par les lignes polygonales du premier ordre; cette station sera traitée de la même manière qu'on a expliqué ci-dessus pour les centrales du premier ordre, en y parvenant de tous les points possibles, pourvu seulement qu'on ne fasse pas double emploi de chacune des stations intermédiaires, c'est-à-dire que chacune des stations qu'on emploie, ne fasse partie que d'un seul des cheminements que l'on choisira pour déterminer la centrale; les stations dont se compose chacun de ces cheminements de *second ordre*, on les établira d'après le principe qu'on a expliqué dans les §§ précédents.

283. Les déterminations, dont il est donnée explication ci-dessus, seront donc désignées par l'appellatif de *lignes polygonales de second ordre*, et la station à laquelle elles aboutissent, sera une *centrale de second ordre*.

284. Après la polygonation du second ordre, il ne restera généralement à déterminer que trois ou quatre stations, et souvent une seule, dans les aires où l'étendue du travail se trouvera décomposée par les opérations précédentes; et pour fixer les coordonnées de ces dernières il faudra alors conduire de petites lignes polygonales entre deux ou trois stations opposées et déjà déterminées, non sans faire entrer en ligne de compte dans la répartition des moindres différences les modifications qui pourraient être conseillées par la comparaison des sta-

tions latérales déjà déterminées, toujours d'après la condition des moindres écarts.

285. On arrivera, par les procédés que l'on vient d'indiquer à assembler le réseau total des stations, de manière que nulle part on n'aura à craindre des différences au vrai, qui ne puissent être comprises dans une tolérance cinq ou six fois plus restreinte que celle que l'on se sera d'abord donnée sur les nombres générateurs. C'est là ce que l'expérience et le raisonnement ont également démontré.

286. Tous ces calculs sont de la plus grande simplicité et n'exigent que l'emploi de l'arithmétique élémentaire; il est cependant nécessaire de mettre beaucoup d'ordre dans la tenue des cahiers, afin d'apercevoir avec beaucoup de facilité les fautes numériques que l'on pourrait y avoir commis, mais qui ne sauraient passer inaperçues, vu le nombre de combinaisons dans lequel toutes les stations doivent entrer. Il sera donc à propos de préparer à l'avance des modules imprimés tels que les nos IV et suivants, où l'on n'aura qu'à inscrire les nombres dans les colonnes respectives.

287. Le choix des stations centrales et des cheminements que l'on doit employer, peut aussi être facilité en traçant à vue une figure démonstrative de l'ensemble du réseau; la figure 29 en est un exemple. C'est avec une pareille figure sous les yeux, que l'on choisit promptement les stations et les cheminements qui conviennent pour la polygonation du premier et du second

ordre. C'est là qu'on peut reconnaître les erreurs matérielles qui pourraient avoir été commises en équivoquant sur les points de rattachement; cette figure enfin est une espèce de tableau synoptique de toutes les opérations de vérifications auxquelles on peut vouloir soumettre le travail, et un guide au jugement, par lequel on parvient à répartir les moindres différences restantes de la manière la plus conforme à la probabilité des évènemens qui peuvent les avoir motivées.

288. Quand on dirige une grande opération qu'une triangulation a précédé, on demande aux opérateurs mêmes, chacun pour leur section, le tracé de la polygonation de tout le travail de la semaine; le géomètre la trace sur des feuilles préparées pour contenir le travail d'un ou de deux mois, et envoie à la fin de chaque semaine, au bureau de la direction un calque des stations qu'il a ajoutées audit tracé durant la même semaine. Ce qui facilite aux géomètres vérificateurs la construction de la figure qu'ils doivent avoir sous les yeux.

289. L'échelle approximative qu'il convient d'adopter pour ce travail auxiliaire est de $\frac{1}{10,000}$, ou même de $\frac{1}{20,000}$, sauf quelque cas particulier dans les terrains très parcellés et reserrés, pour lesquels il peut convenir d'approcher de l'échelle de $\frac{1}{5000}$; car il ne s'agit ici que d'un croquis démontrant les rattachements des stations entre elles.

CHAPITRE VIII.

EXAMEN DU DEGRÉ D'EXACTITUDE QU'ON PEUT ATTEINDRE DANS LES OPÉRATIONS DE CE GENRE PAR LA NOUVELLE MÉTHODE ; DÉTERMINATION DU DEGRÉ DE SUBDIVISION TRIGONOMÉTRIQUE CONVENABLE, ET AUTRES CONSIDÉRATIONS RELATIVES.

SECTION XXI.

Degré d'exactitude qu'on peut atteindre dans les opérations de relèvement et nivellement par la méthode nouvelle.

290. L'observation des nombres générateurs au moyen du pantomètre peut se faire à un quatremillième près, c'est ce que l'on a établi au § 38, donc il est évident que la détermination d'un point par coordonnées rectangulaires rapportées à trois axes passant par le centre de l'instrument pourra s'obtenir à $\frac{1}{4000}$ près de la distance entre la station et le point; cela revient à dire qu'un point mathématique du terrain sera dans le relèvement représenté

par l'espace compris dans un cercle, dont le rayon serait de $\frac{1}{8000}$ de la distance du point à la station.

291. Si donc (*fig.* 30) on imagine un point dont le lieu vrai est en *m*, qui a été relevé de la station A, dont la distance est de 200 mètres, et si autour de ce lieu vrai pris pour centre on décrit un cercle avec le rayon de $\frac{200^{mèt.}}{8000}$, $0^{mèt.},025$, le lieu de ce point, d'après le relèvement, peut résulter dans un point quelconque de l'aire de ce cercle.

292. Imaginons maintenant un second point *n*, dont la distance au premier point ne soit que de 10 mètres; il y aura sur ce second point la même incertitude que sur le premier, et si par une supposition extrême en fait de probabilité, il se combinait que les deux écarts, quoique dans les limites de la tolérance, eussent lieu en sens opposés, et dans la direction *mn*, il s'ensuivrait que la distance *mn* de 10 mètres serait donnée avec une erreur en plus ou en moins de $0^{mèt.},05$, ce qui réclamerait une tolérance de $\frac{1}{200}$ au lieu de $\frac{1}{4000}$, qu'on réclame seulement sur les nombres générateurs.

293. On voit aisément que l'incertitude maximum absolue serait encore la même si la distance *mn* se trouvait plus grande ou plus petite, et que le rapport de tolérance à réclamer sur la distance *mn* ainsi déterminée, serait inversement plus petit ou plus grand.

294. Mais la combinaison supposée au § précédent est

trop loin de la probabilité moyenne pour qu'il soit permis de croire qu'un pareil hasard doive se reproduire plusieurs fois dans un relèvement, même très étendu. Il est aisé de prouver par des calculs, qu'on ne rapportera pas ici pour ne pas dépasser les bornes dans lesquelles cet ouvrage doit se tenir, que l'incertitude moyenne en pareil cas se contiendra dans la limite de $\frac{1}{5}$ à-peu-près de ce qu'on a supposé au § 292, c'est-à-dire que l'incertitude restante ne dépassera pas $0^{mèt.},02$.

295. La tolérance à accorder dans les opérations sur chaque détermination individuelle, devra donc être réglée sur le maximum qui, quoique infiniment peu probable, est cependant possible; mais la crainte d'erreurs résidues sur une grande quantité d'observations, pourra être jugée par la probabilité moyenne.

296. On doit en outre distinguer trois sortes de tolérance: la première se rapporte à la position absolue d'un point, donné par ses coordonnées aux axes passant par le centre de la station; celle-là se détermine par son rapport à la distance entre le point et la station, et en posant ce rapport $= n$, la tolérance absolue sera nd.

La seconde espèce de tolérance sera celle qui doit avoir lieu sur la position relative de deux points dont la distance est D, et dont les distances à la station sont d', d''; celle-ci pourra s'exprimer par $n(d' + d'')$, et son rapport variable suivant la distance D sera représentée par $\frac{n(d' + d'')}{D}$.

La troisième, sur la position absolue d'un point par rapport aux axes principaux, c'est celle que l'on arrivera à déterminer par l'analyse qu'il suit :

297. Si l'on considère une seule station et que l'on s'en rapporte à ses axes, l'incertitude maximum sur la position absolue de chaque point pourra, comme on a dit, être exprimée par nd; et si cette station est directement rattachée à un point trigonométrique par une observation ordinaire, dont le rayon est d_1^{Δ}, l'incertitude maximum sur la position de tout autre point p' observé de la même station, sera représentée par $nd_1^{\Delta}+nd_1^{p}$. Si ensuite une seconde station se rattache à la première par une visuelle au point p', dont la longueur est $d_2^{p'}$, l'incertitude maximum dans la position absolue d'un point q, observé de la deuxième station, sera représentée par

$$n(d_1^{\Delta}+d_1^{p}+d_2^{p}+d_2^{q});$$

et en général l'incertitude absolue maximum sur la position d'un point s déterminée par un cheminement libre qui, partant d'un point trigonométrique, arrive à la station N, d'où le point s a été observé, par différents rayons dont la somme est Σd, sera exprimée par $n\Sigma d+nd_n'$, celle de la station étant représentée par $n\Sigma d$.

298. L'expression de l'incertitude relative à la distance D, entre le point s et un autre point t observé de la même station N, n'aura pas varié, parce que l'incertitude absolue sur le premier de ces deux points étant représentée par $n\Sigma d+nd_n'$, on voit que le terme $n\Sigma d$ est

commun, et ce n'est que nd_n', qui peut dans un cas extraordinaire se trouver maximum et de signe contraire à nd_n', comme on l'a supposé au § 292.

299. Maintenant si deux cheminements partis de deux points trigonométriques différents arrivent à une même station S, et si les expressions de leur incertitude maximum représentée par $(n\Sigma d)'$, $(n\Sigma d)''$ ont lieu en sens contraire, il est clair qu'on trouvera par l'un des cheminements la station S représentée, par exemple, en S' (*fig.* 31) et par le second en S''. Or, si c'est là véritablement de chaque côté le maximum de l'écart possible, et que les cheminements soient à-peu-près égaux en longueur, il est clair que le lieu vrai du point S ne pourra se trouver que sur le milieu de la ligne $S'S''$. En adoptant donc, pour la position de la station S, la moyenne entre les résultats des deux cheminements, on approchera du vrai jusqu'à coïncidence.

300. Mais si pour considérer toujours le cas le plus défavorable, on suppose que les deux cheminements, aient pris toute leur déviation dans le même sens, de manière que le point S'' se soit confondu avec le point S', c'est-à-dire que l'on aie trouvé coïncidence parfaite, quoique dans le fait il existe une déviation maximum sur chacun des cheminements pris isolément, il est clair qu'alors l'erreur restante sur la position absolue du point S sera égale à $n\Sigma d$; et comme rien ne nous indique en quel sens cette erreur puisse avoir eu lieu, l'incertitude absolue sur la position d'une station centrale déterminée par

la moyenne entre deux cheminements, pourra atteindre le maximum même dans le cas de coïncidence parfaite entre les résultats des deux cheminements, et le lieu vrai, si cela arrive, devra se trouver sur la circonférence d'un cercle, dont le rayon serait $n\Sigma d$, en supposant, comme on l'a fait, les deux cheminements à-peu-près égaux en longueur; si l'un des deux cheminements se trouvait plus court, ce serait celui-là qui déterminerait $n\Sigma d$, puisqu'on a déjà démontré, qu'au bout d'un cheminement quelconque, l'incertitude maximum dans la position absolue d'un point ne peut pas dépasser $n\Sigma d$.

On voit assez de quelle manière cette considération doit influer sur le résultat moyen à adopter, sans qu'il soit nécessaire d'entrer ici dans des plus grands détails à cet égard. Quand au contraire on suppose que les deux cheminements prennent toute leur déviation, l'un en sens contraire à l'autre, on est alors beaucoup plus près de la certitude en adoptant la moyenne.

301. Telles sont les considérations que l'on peut faire quand on veut tout supposer contraire; mais on sent assez qu'un cheminement résulte de la répétition successive de phénomènes, qui ne laissent à chaque fois d'incertitude que nd, et que nulle cause ne lie entre elles les différentes répétitions desdits phénomènes; par suite de cela, les suppositions sur lesquelles les raisonnements précédents sont fondées, sont si peu probables, que le cas où elles viendraient se réaliser, serait vraiment extraordinaire.

302. Si l'on considère maintenant que l'établissement d'une station centrale d'après la méthode enseignée dépend toujours, au moins de trois cheminements, souvent de quatre ou plus, et presque toujours partant des points opposés, on se persuadera aisément qu'il serait absurde de supposer que sur la moyenne à laquelle on s'arrêtera, on puisse avoir encore une incertitude égale à $n\Sigma d$. L'expérience faite sur un relèvement de 3500 stations environ, a prouvé que nulle part l'incertitude restante vérifiée par la voie rigoureuse d'opérations trigonométriques exécutées avec les grands instruments n'a dépassé, la quantité $n\Sigma d$ considerée par rapport à la plus courte ligne polygonale, et qu'elle se contient dans la limite moyenne de $\frac{n\Sigma d}{5}$, ce qui est d'accord avec le calcul des probabilités, comme on le démontrera dans la seconde partie; mais pour ne pas trop anticiper sur les avantages d'une méthode qui n'a encore été sérieusement employée que dans un petit nombre d'opérations de grande étendue, on admettra ici comme limite de l'incertitude sur la détermination d'une station centrale par la moyenne de trois cheminements, la quantité

$$\frac{n\Sigma d}{3}.$$

303. Quant aux points et aux stations qui forment chacun des cheminements, on pourrait traiter la question de la même manière par rapport aux points de départ, pour arriver à prouver que leur position absolue

ne peut que s'approcher du vrai dans le même rapport en y comprenant, si l'on veut, la quantité nd (d représente ici le dernier rayon).

304. Les mêmes raisonnements peuvent s'appliquer aux polygonations du second ordre, et à la détermination des stations résidues; par conséquent il est démontré que dans la nouvelle méthode, après avoir opéré de manière à supporter une vérification qui prendra pour base une tolérance n, on peut reconnaître ensuite et répartir encore, si on veut, les déviations résidues, si bien que, à ouvrage achevé, la tolérance définitive à réclamer, se reduise à moins de $\frac{1}{3}n$, ce qu'on a pu vérifier un grand nombre de fois, soit par des comparaisons des résultats entre eux, soit par des opérations trigonométriques faites expressément avec des grands instruments, qui ont donné la connaissance certaine du vrai.

305. Tout ce que l'on a dit jusqu'ici se rapporte à l'ensemble et aux dimensions de détail qui ne sont moyennement pas moindres que la longueur des rayons de relèvement qui aboutissent à leur extrémité; mais on a vu au § 292 que les dimensions moindres ne sauraient être déterminées avec la même exactitude, et cette exactitude diminuerait encore, si au lieu de deux points pris d'une même station, la dimension de détail à déterminer devait résulter de deux points relevés de deux stations différentes, comme, par exemple, les quatre angles d'une petite maison isolée au milieu d'un champ; mais d'une

part le géomètre met en pareil cas ces objets au nombre des détails dont on a parlé au § 232; d'autre part cela prouve seulement que quand on vise à une très haute exactitude dans tous les détails de l'opération, on doit préférer de faire des stations moins étendues et en plus grand nombre. C'est la pratique et les conditions particulières a chaque localité, en rapport aussi aux buts que l'on se propose, qui doit déterminer les géomètres dans le choix qu'ils doivent faire entre l'avantage de rayonner très loin, et celui d'une plus grande exactitude, en changeant un peu plus souvent de station: au reste les incertitudes de détail dont il est ici question n'ont aucune influence sur les dimensions totales auxquelles ces détails appartiennent, ni sur l'ensemble des opérations.

306. A la rigueur, la tolérance à accorder en définitive, devrait être appliquée non pas à chacune des coordonnées, mais bien à la distance effective *dans l'espace* entre le *point vrai* et le *point apparent*, tel que le relèvement le donne, c'est-à-dire qu'il faudrait considérer comme *déviation résidue absolue* la diagonale d'un parallèlepipède dont les arrêtes seraient formés par les déviations résidues existantes dans le sens des trois coordonnées; mais il ne paraît pas utile de subtiliser jusqu'à ce point, quand surtout la valeur de n, que les instruments peuvent admettre sur les opérations élémentaires, est déjà aussi petite que les pantomètres peuvent maintenant la donner.

307. Pour preuve de fait de ce qu'on vient de lire dans les §§ précédents, on rapportera ici un exemple d'autant plus remarquable, qu'il fut le résultat d'investigations conduites dans un esprit de critique sevère contre la méthode, plutôt que dans le but d'une simple vérification, et qu'il a été pour cela choisi expressément dans la partie la plus difficile de tout un travail de vingt-mille ectares environ, dont on a déjà parlé au § 14.

Dans ce travail on s'est servi d'anciennes boussoles, d'une construction bien imparfaite qu'on avait modifié pour leur donner les propriétés du pantomètre, et qui portaient des lunettes très faibles rendues stéréogoniques, mais non pas munies du double oculaire, dont il a été fait mention au § 34; ces instruments ne comportaient pas un degré d'exactitude supérieur à un deux-centièmes de tolérance sur les nombres générateurs, et telle était la limite qu'on avait fixé aux opérateurs.

Les cheminements, en pays hérissé de tant de difficulté, furent très irréguliers, leurs points de rattachement furent la plupart défavorablement conditionnés; ces cheminements traversent des travaux de différentes époques et de différents géomètres.

308. La figure 32 représente un extrait de la *polygonation* en question; les chiffres arabes y indiquent le numéro d'ordre des points; les chiffres romaines celui des stations; les lignes ponctuées marquent des divisions du travail en sections qui furent relevées, comme on l'a déjà remarqué, en différentes époques et par différents opérateurs.

Les points A, B, C, D ont été trigonométriquement déterminés avec le plus grand soin, et plus tard on détermina de même la position du point central F, auquel aboutissent les quatre cheminements que la figure représente. Leurs coordonnées aux axes principaux sont comme dans le tableau suivant:

POINTS	X	Y	Z	*OBSERVATIONS*
A	— 9262,8	+5502,4	+245,8	L'ordre des azimuts, d'où dépendent les signes des coordonnées est du nord par l'ouest de zéro à 400 grades.
B	—10296,5	+4447,5	+478,7	
C	—10219,6	+3715,8	+650,0	
D	— 9120,0	+3289,5	+325,1	
F	— 9644,2	+4343,6	+505,5	

Les Σx, Σy, Σz de chaque cheminement respectivement ajoutés aux coordonnées du point de départ, ont produit quatre valeurs différentes des coordonnées du point central F, qui, comparées soit entre elles, soit à la détermination trigonométrique du même point, ont donné le moyen de juger de la marche des opérations.

On a ici quatre cheminements qui, partant de chacun des points trigonométriques, aboutissent au point central; on pourrait en avoir qu'un, ou deux, ou trois quelconques des quatre, ce qui représente quinze cas différents qui auraient pu avoir lieu.

Le tableau suivant présente les valeurs que pren-

draient les coordonnées du point F, en les faisant dériver de chacun de ces quinze cas, et montre par la comparaison avec la détermination trigonométrique, la déviation résidue maximum dans chaque cas en fonction de la tolérance n accordée sur les nombres générateurs, et comparée au développement du cheminement le plus court qui entre dans chacune de ces combinaisons : le développement total de ces lignes est de 5110 mètres.

	POINTS DE DÉPART	DÉVELOPPEMENTS du cheminement le plus court	COORDONNÉES DU POINT F X	Y	Z	FRACTION DE n représentant la déviation résidue
	A	1600	9644,0	4345,6	306,7	0,25
	B	1000	9644,4	4344,2	307,0	0,30
	C	1250	9643,1	4346,2	306,3	0,42
	D	1260	9641,4	4345,6	305,5	0,45
MOYENNES DE	A, B	1000	9644,2	4344,9	306,8	0,26
	A, C	1250	9643,6	4345,9	306,5	0,37
	A, D	1260	9642,7	4345,6	306,1	0,32
	B, C	1000	9643,8	4345,2	306,6	0,32
	B, D	1000	9642,9	4344,9	306,2	0,26
	C, D	1250	9642,3	4345,9	305,9	0,37
	A, B, C	1000	9643,8	4345,3	306,7	0,34
	A, B, D	1000	9643,3	4345,1	306,7	0,30
	A, C, D	1250	9642,8	4345,8	306,2	0,35
	B, C, D	1000	9643,0	4345,3	306,3	0,34
	A, B, C, D	1000	9643,2	4345,4	306,4	0,36

309. On voit donc : 1° Que le résultat obtenu par cha-

cun des cheminements simples et considérés isolément de toute combinaison, n'a donné lieu à une déviation résidue supérieure à $\frac{1}{2}n$;

2° Que la moyenne de deux quelconques ou de trois ou de quatre des cheminements considérés, s'est contenue aux environs de $\frac{1}{3}n$ à peu près;

3° Finalement, que si on observe la régularité et la concordance des quinze résultats ci-dessus, et le sens presque constant de l'erreur résidue, on serait presque tenté de croire que c'est plutôt la détermination trigonométrique qui doit être infirmée que le résultat lui-même des polygonations.

310. On remarquera encore ici que dans la figure 32 on n'a représenté que les rayons qui entrent dans les cheminements considérés, mais que ces cheminements font partie d'un réseau complet parfaitement relié en tout sens, de manière que d'autres cheminements existent, qui vont plus ou moins directement du point A au point B, de celui-ci au point C, du point C au point D, ainsi que de l'une quelconque à une autre quelconque des stations du réseau; que tous ces cheminements éprouvés par les équations de condition d'existence des figures auxquelles ils donnent lieu, et éprouvés et tout sens et par toutes les combinaisons possibles, ont constamment donné des résultats au moins aussi bons que ceux du tableau ci-dessus; on ne pourra donc à moins d'admettre le contenu des §§ 301 et suivants, comme parfaitement vé-

rifiés par l'expérience; et il est facile de voir, que des instruments plus parfaits comme le sont les pantomètres qu'on construit maintenant, pour lesquels la valeur de n dans le cas le plus défavorable n'excède pas $\frac{1}{1000}$, mettront un opérateur habile à même de garantir $\frac{1}{500}$ dans toutes les opérations, quelles que soient les difficultés du terrain : c'est là ce dont on pourrait rapporter ici de nombreux exemples pris dans les opérations les plus récentes, si celui, dont on a donné l'analyse, ne suffisait pas pour arriver à la certitude pratique des prévisions de la théorie.

TABLE.

PRÉFACE . . . . . *pag.* III

PROLÉGOMÈNES . . . . . » 1

CHAPITRE PREMIER.

Du diastimomètre de Green, connu en Italie sous le nom de *stadia*, et du perfectionnement qui en fait le meilleur moyen diastimométrique . . . . » 11

SECT. I. *Du micromètre de Green considéré dans les lunettes ordinaires* . . . . . » id.

» II. *Composition d'une lunette exempte des inconvénients des lunettes ordinaires spécifiées dans la section première* . . . . . » 15

» III. *Observations des distances inclinées, leur réduction à l'horizon, détermination des différences du niveau* . . . . . » 24

CHAPITRE II.

Composition d'un instrument propre à recevoir la nouvelle lunette diastimométrique décrite dans le chapitre précédent . . . . . » 29

SECT. IV. *Digression sur les instruments ordinaires d'arpentage. Nécessité d'introduire les instruments gradués* . . . . . » id.

» V. *Détermination des dimensions qu'il convient de donner au nouvel instrument, et des conditions auxquelles il doit satisfaire pour être en rapport avec la nouvelle lunette diastimométrique* » 36

SECT. VI. *De l'aiguille aimantée et de son emploi dans le nouvel instrument* . . . . pag. 43
» VII. *Des niveaux et autres appareils accessoires de l'instrument* . . . . . » 46

CHAPITRE III.

Rectification de l'instrument, mode d'observation pour la détermination d'un point, nombres générateurs et système polaire, passage aux coordonnées rectangulaires, formules pour obtenir ces dernières » 55
SECT. VIII. *Rectification de l'instrument* . . . » id.
» IX. *Mode d'observation pour la détermination d'un point; nombres générateurs* . . » 61
» X. *Formules pour passer des nombres générateurs ou du système polaire qui en dérive aux coordonnées rectangulaires* . . . . » 64

CHAPITRE IV.

Composition et usage de l'échelle logarithmique, connue sous le nom d'échelle de Gunter ou de règle à calcul, modifiée, pour la rendre propre aux exigeances de la nouvelle méthode du relèvement et nivellement. . . . . » 69
SECT. XI. *Composition de l'échelle logarithmique appropriée aux exigeances de la nouvelle méthode de relèvement et nivellement* . . . . » id.
» XII. *Usage de l'échelle logarithmique pour transformer les nombres générateurs en coordonnées polaires et en coordonnées rectangulaires* . . » 82

CHAPITRE V.

Problèmes divers dont la solution est nécessaire à l'application de la nouvelle méthode des relèvements et nivellements, et leurs solutions pratiques sur l'échelle logarithmique . . . . . » 87

SECT. XIII. *Problèmes divers dont la solution est nécessaire à l'application de la nouvelle méthode de relèvement et nivellement* . . . . pag. 87
» XIV. *Solutions des problèmes précédents par l'échelle logarithmique ordinaire* . . . » 108

CHAPITRE VI.

Opération de campagne pour le relèvement et nivellement complet d'une étendue donnée . . » 135
SECT. XV. *Relèvement et nivellement complet d'un terrain dont tous les points sont visibles d'un seul point de station* . . . . . « id.
» XVI. *Même relèvement dans le cas où deux stations se rendent nécessaires* . . . » 140
» XVII. *Relèvemsnt isolé composé de plusieurs stations* » 145
» XVIII. *Mode de conduire les opérations sur le terrain quand il s'agit d'une grande étendue, et que l'on doit cadrer entre des points trigonométriques* » 149

CHAPITRE VII.

Opérations de cabinet . . . . . » 153
SECT. XIX. *Opérations de cabinet relatives à la section quinzième, chapitre VI* . . . . . » id.
» XX. *Modifications que subissent les règles précédentes quand on opère entre les points trigonométriques* . . . . . » 159

CHAPITRE VIII.

Examen du degré d'exactitude qu'on peut atteindre dans les opérations de ce genre par la nouvelle méthode; détermination du degré de subdivision trigonométrique convenable, et autres considérations relatives » 167
SECT. XXI. *Degré d'exactitude qu'on peut atteindre dans les opérations de relèvement et nivellement par la méthode nouvelle* . . . . . » id.

EXPLICATION

DES PLANCHES ANNEXÉES À CET OUVRAGE.

Pl. I, *fig.* 1. Principe de la stadia.
2. Lunette géodésique ordinaire.
3. Lunette stéréogonique ou anallatique.
4. Réduction à l'horizon et détermination des hauteurs.
5. Construction graphique conduisant à la même démonstration.

Pl. II, *fig.* 6. Autre, id., plus élégante.
7. Démonstration de l'incertitude résidue d'une détermination.
8 et 9. Micromètres.
10. Coordonnées d'un point.
11. Principe de l'échelle logarithmique.

Pl. III, *fig.* 12. Échelle à coulisse.
13. Cylindre logarithmique.

Pl. IV, *fig.* 14. Échelle logarithmique au compas.

Pl. V, *fig.* 15. Démonstration prospective de la détermination complète d'un point.

16. Détermination de la distance entre deux points relevés.

17. Détermination de la distance entre deux points dont les coordonnées sont connues.

18. Détermination des coordonnées d'un point relevé par intersection.

19 et 20. Détermination des corrections de l'orientation magnétique quand il y a lieu.

Pl. VI, *fig.* 21. Problème complet des trois directions.

22. Cas particuliers du même problème.

23. Rectification des coordonnées provisoires.

24. Problème élémentaire pour le tracé des courbes de niveau.

25. Calcul des aires par les données immédiates du relèvement.

26. Calcul des aires par les coordonnées rectangulaires.

Pl. VII, *fig.* 27. Comparaison et vérification des points de rattachement.

28 et 29. Exemples de polygonations.

Pl. VIII, *fig.* 30. Considérations sur la détermination de la distance entre deux points relevés.

31. Considérations sur les cheminements isolés.

32. Exemple d'une polygonation prise du vrai, en pays très difficile, dans l'Apennin Ligustique.

Planche IX. Le pantomètre complet et la stadia.

A Plateau servant de fond à la boite.

B Planchette pour les types eidographiques.

b Alidade à tracer lesdits types.

C Triangle à griffe.

D Vis à caler.

EE Pince et vis de rappel du mouvement azimuthal de la lunette.

FF Id. id. du limbe gradué.

G Orientateur magnétique.

g,g' Levier arrêtant l'aiguille aimantée et vis de rappel de la déclinaison.

H Supports de la lunette.

I Niveau transversal.

K Niveau sphérique.

L Niveau longitudinal.

M Cercle vertical.

N La pince et vis de rappel.

O Loupes à lire.

P Lunette.

Avertissement.

Les notes qui ont des indices dans le texte ne paraîtront pas, on les a supprimées, comme n'ayant pas assez d'importance pratique pour mériter d'être placées dans cet ouvrage.

Fig. 1.

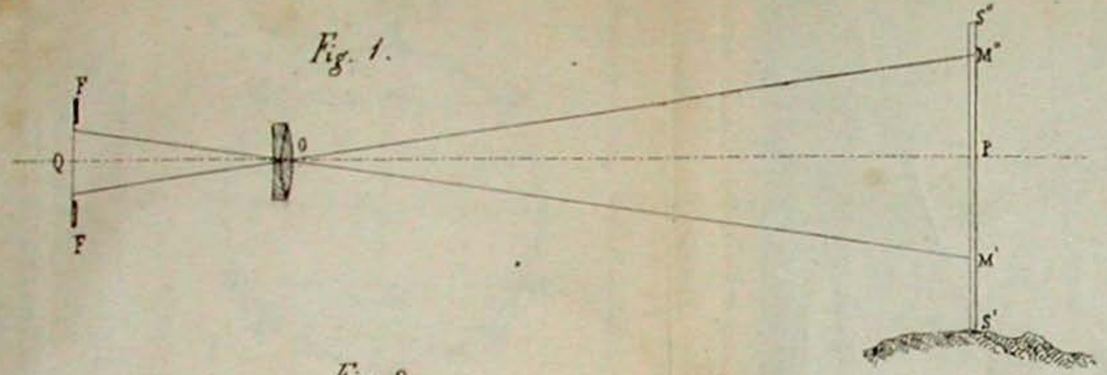


Fig. 2.

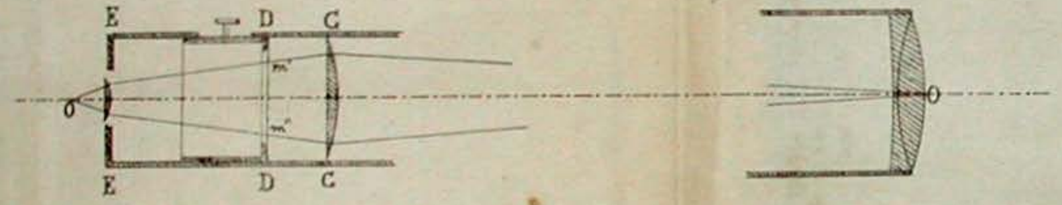


Fig. 3.

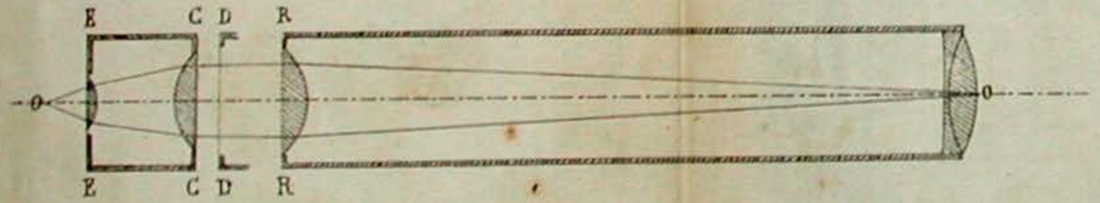


Fig. 4.

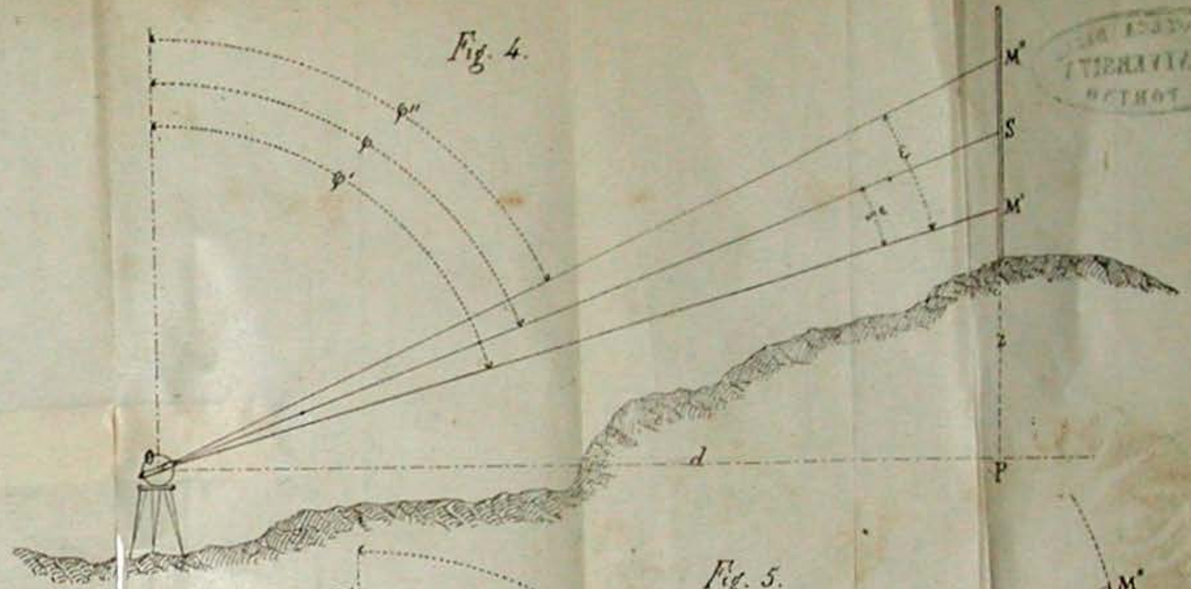


Fig. 5.

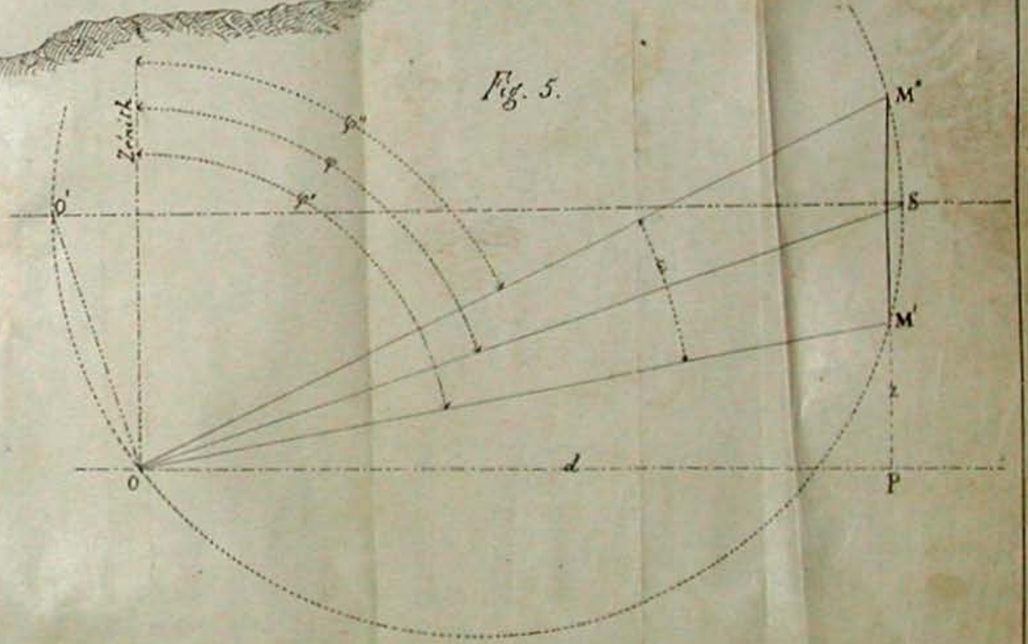


Fig. 6.

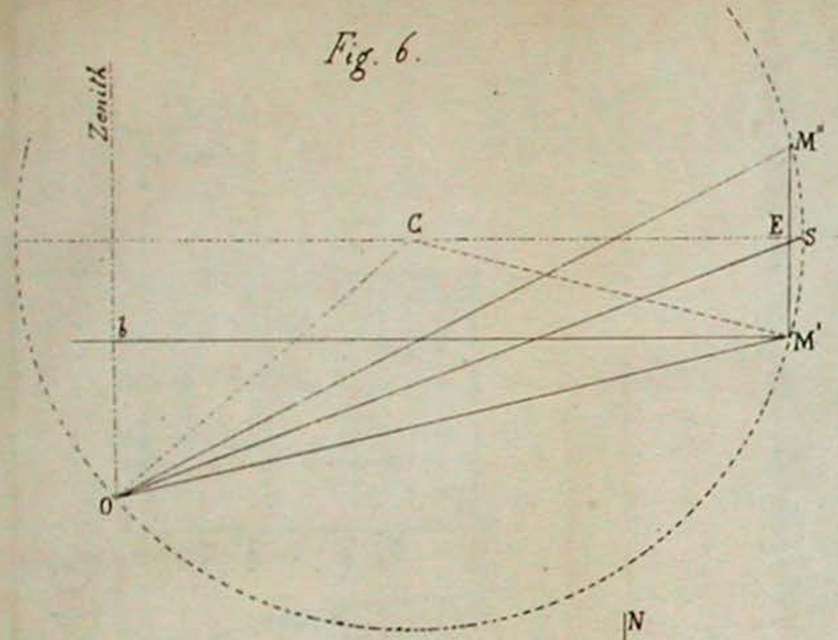


Fig. 7.

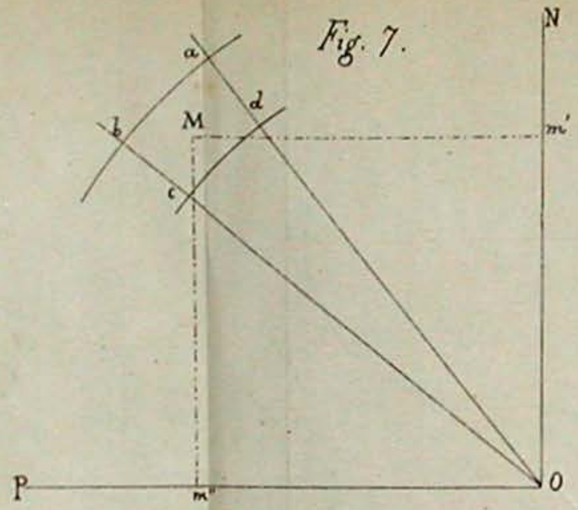


Fig. 8.

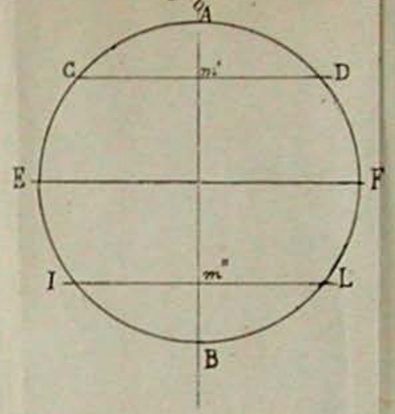
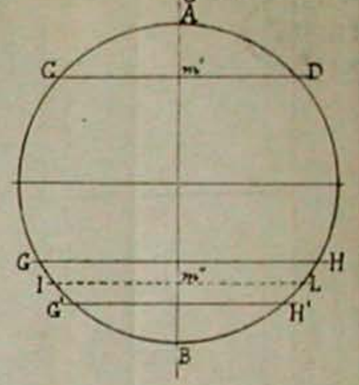


Fig. 9.



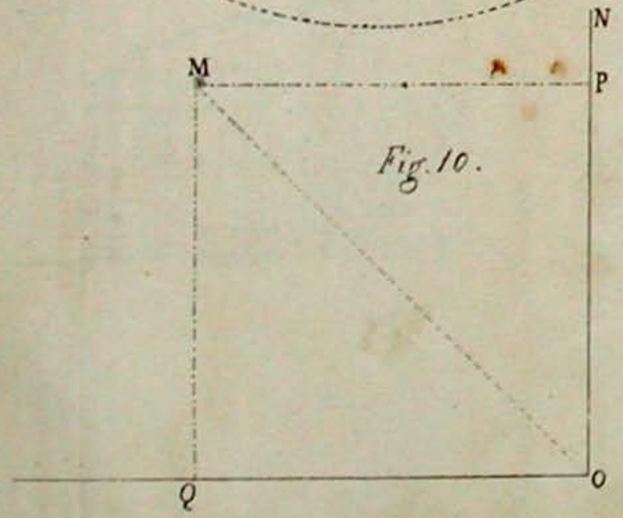


Fig. 10.

Fig. 11.

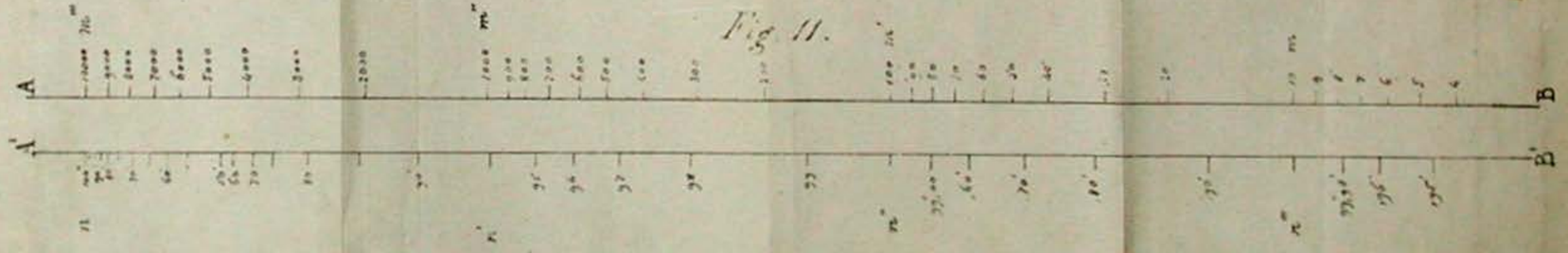
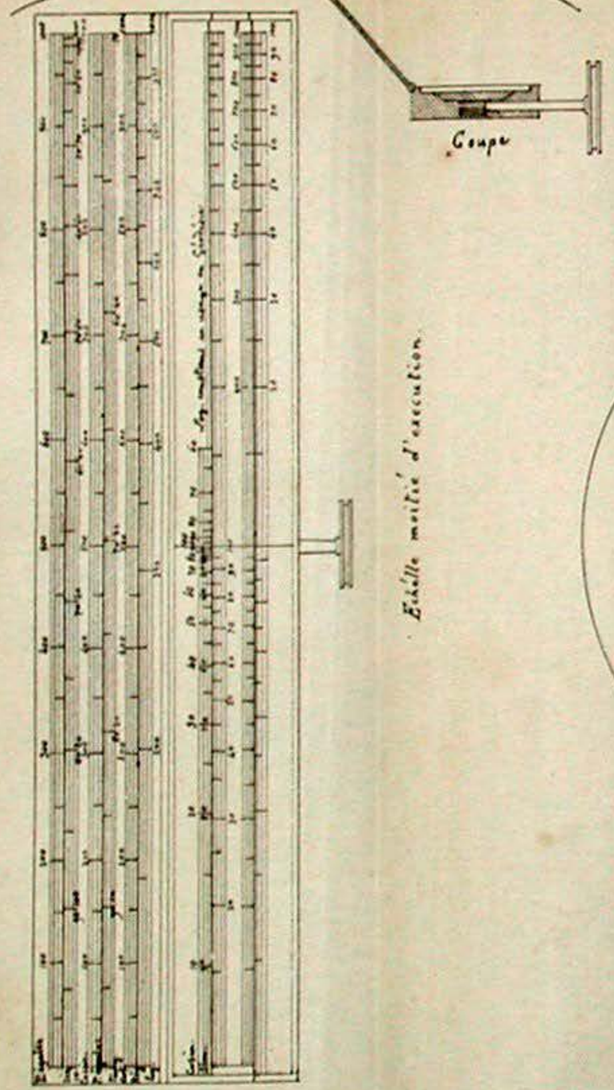


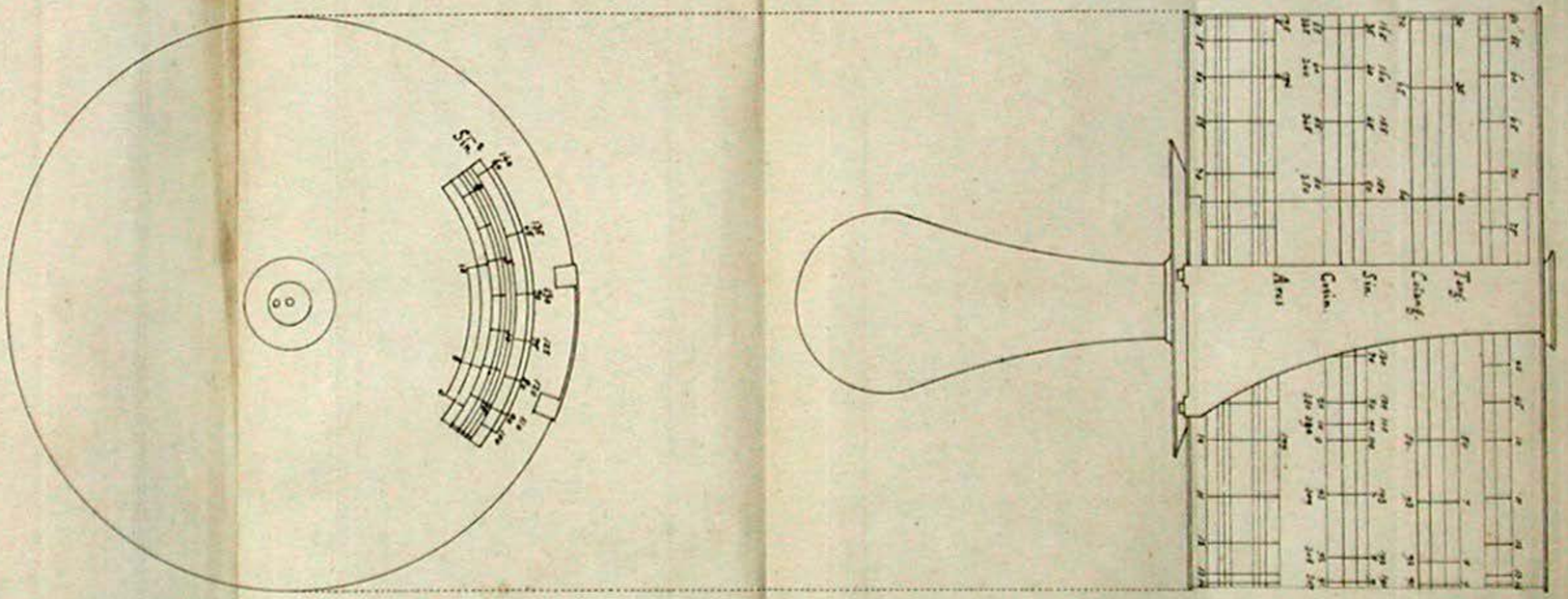
Fig. 12.



Coupe

Echelle moitié d'execution.

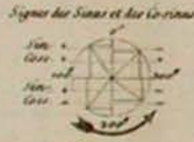
Fig. 13.

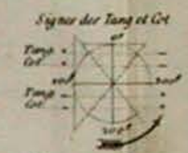


ÉCHELLES LOGARITHMIQUES CENTÉSIMALES

des Sinus, cosinus, tangentes et cotangentes et des nombres naturels

Par J. Porro (*Propriété de l'Auteur*)





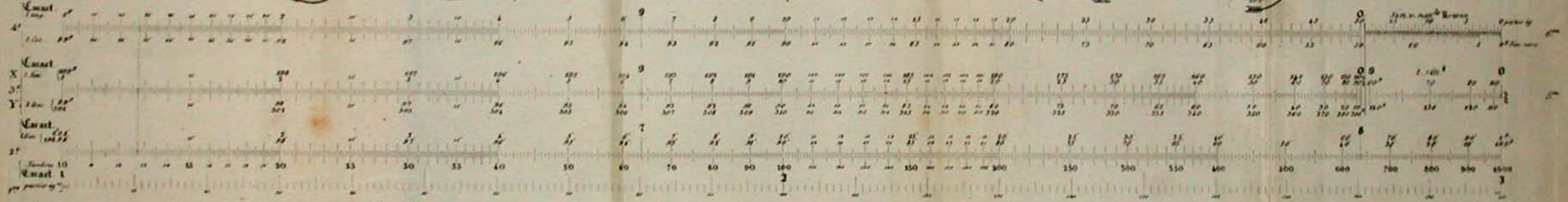


Fig. 15.

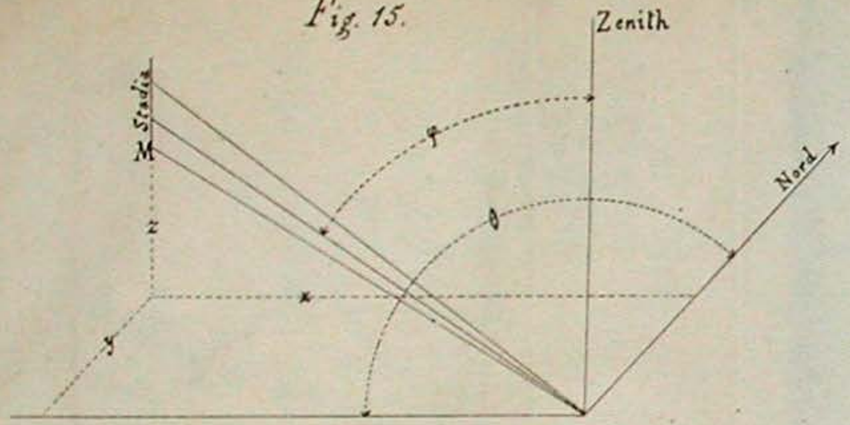


Fig. 16.
Problème I.

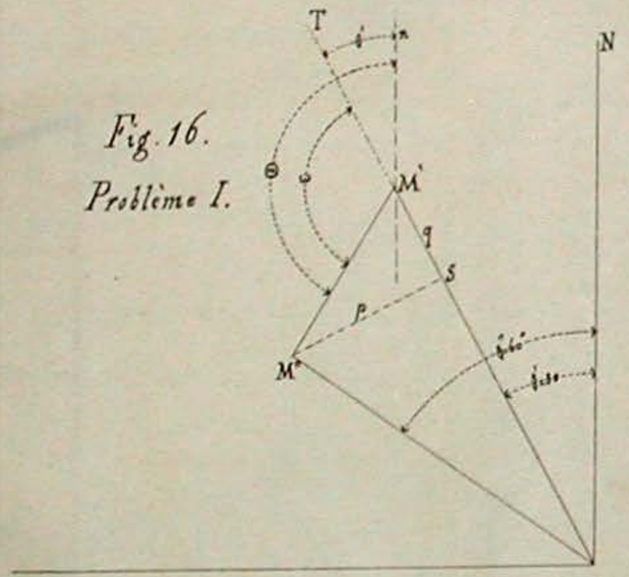


Fig. 17.
Problème II.

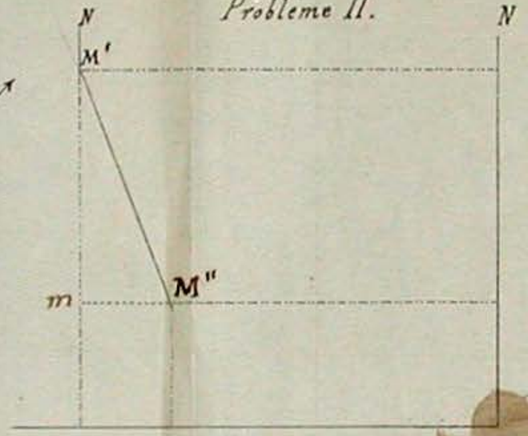


Fig. 18. Problème III.

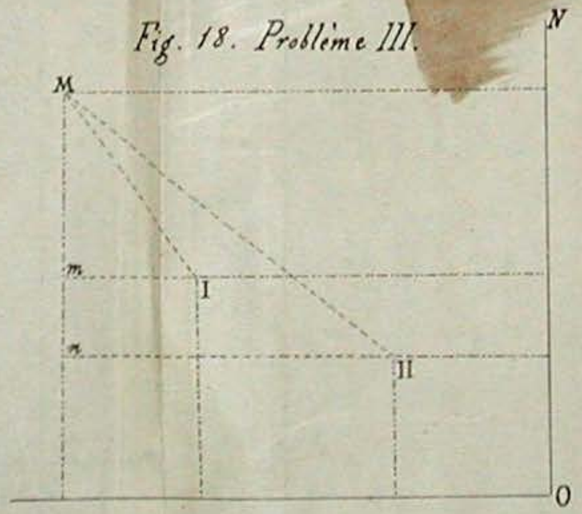


Fig. 19.
Problème IV.

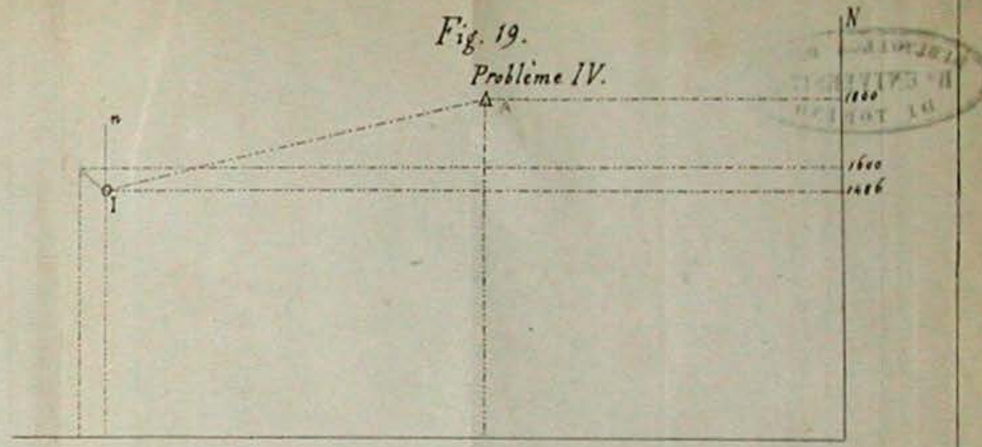


Fig. 20.
Problème V.

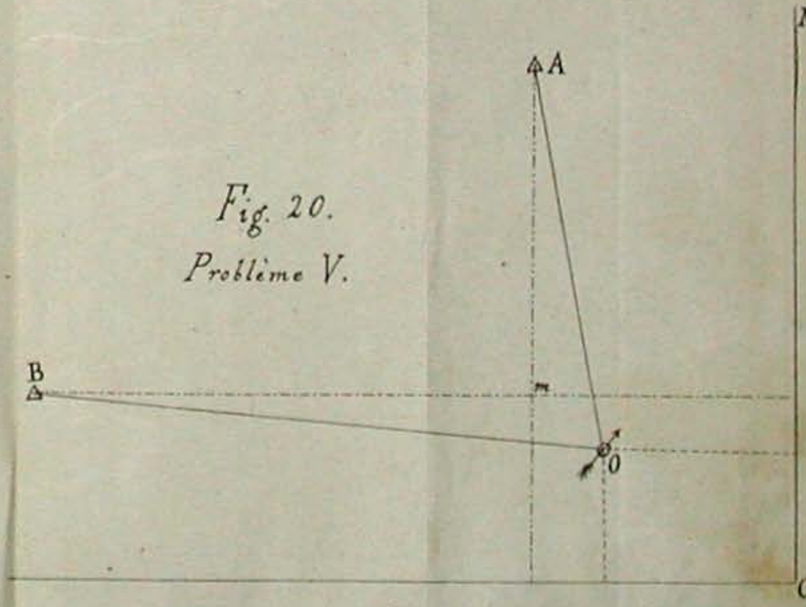


Fig. 21.
Problème VI.

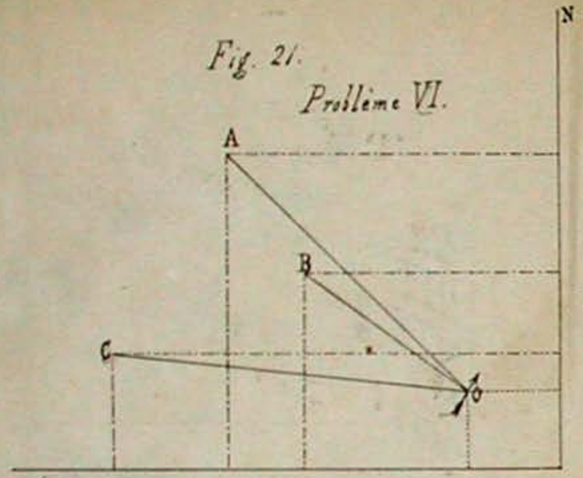


Fig. 22.
Problème VII.

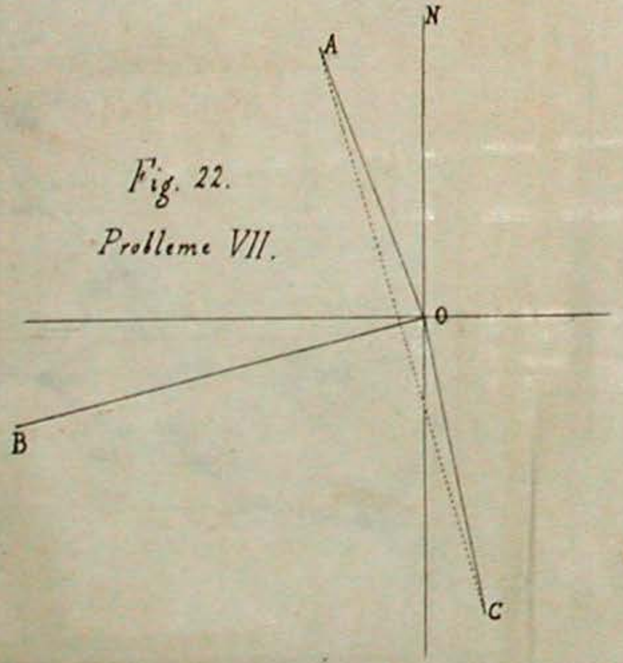


Fig. 23.
Problème VIII.

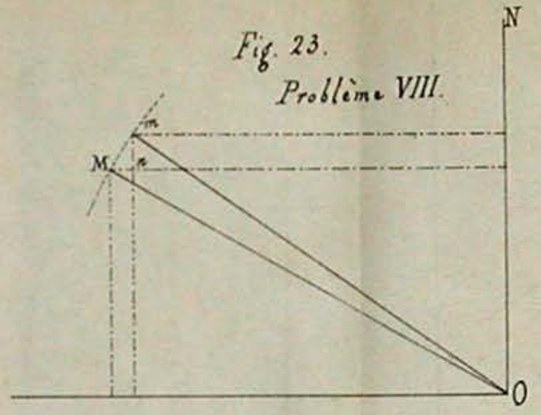


Fig. 24.
Problème IX.

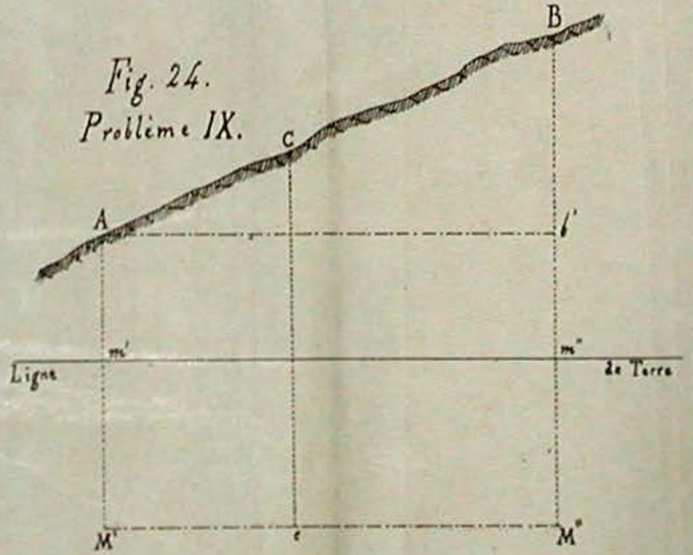
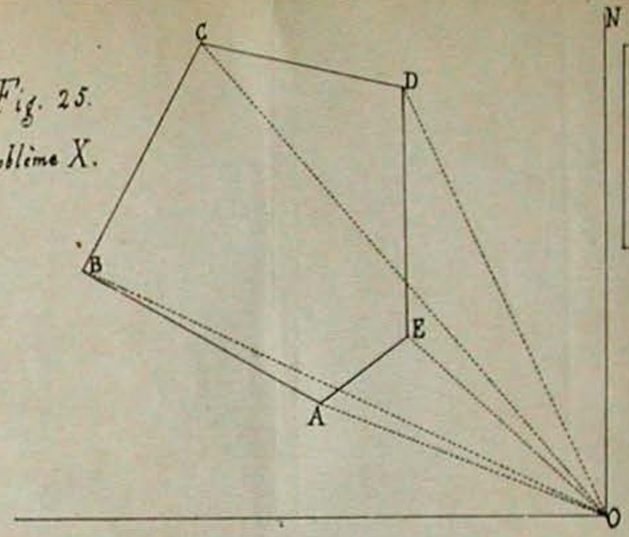


Fig. 25.
Problème X.



	λ.		δ.	
D	69	50	27	50
C	91	00	44	45
B	85	00	71	00
A	45	00	70	00
E	29	50	52	30

Fig. 26.
Problème XI.

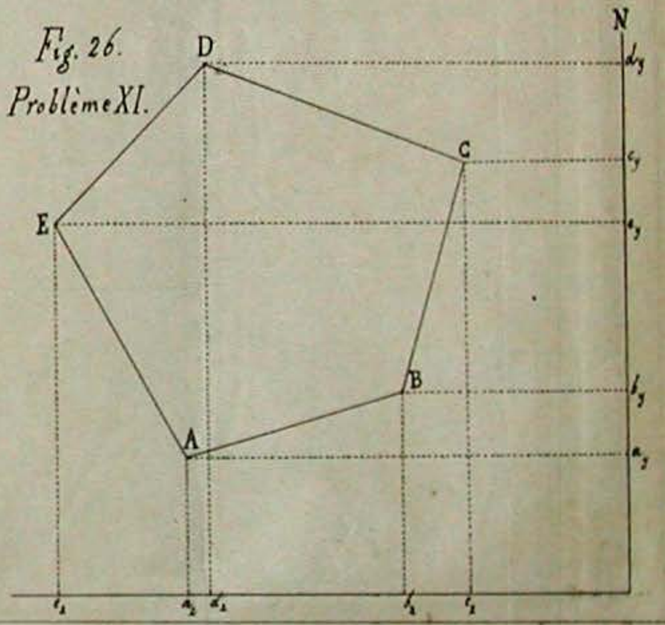


Fig. 27.

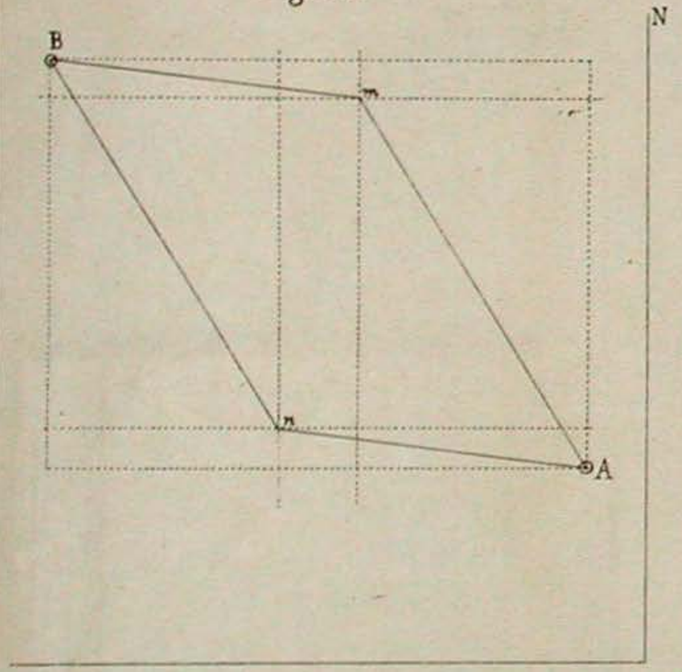


Fig. 28.

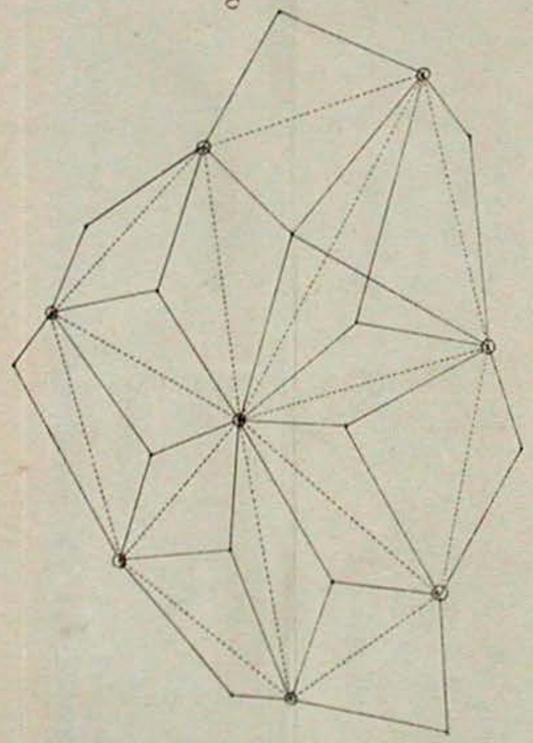


Fig. 29.

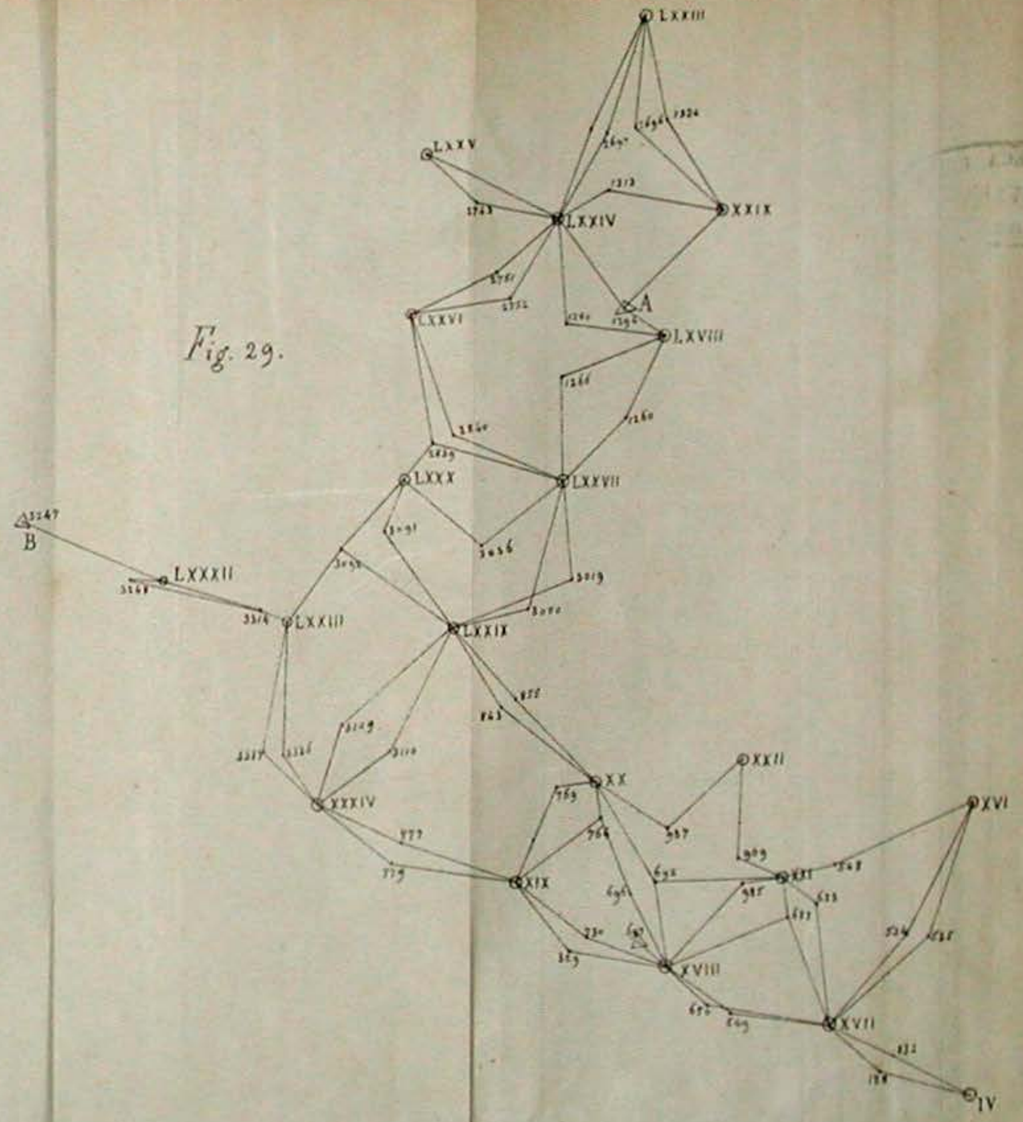


Fig. 30.

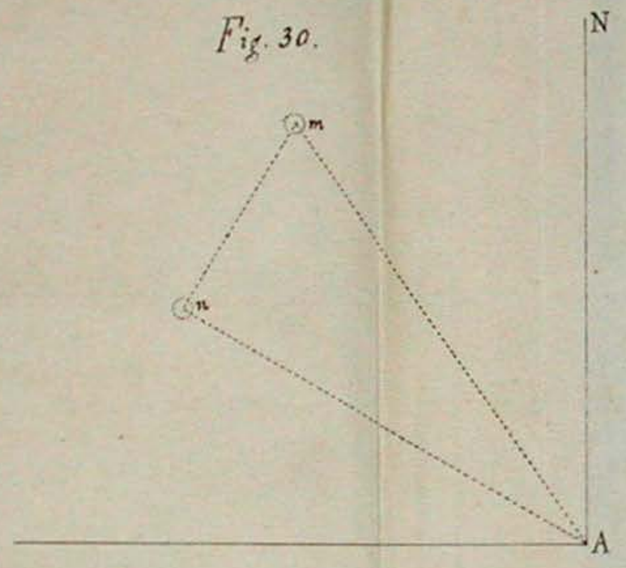


Fig. 31.

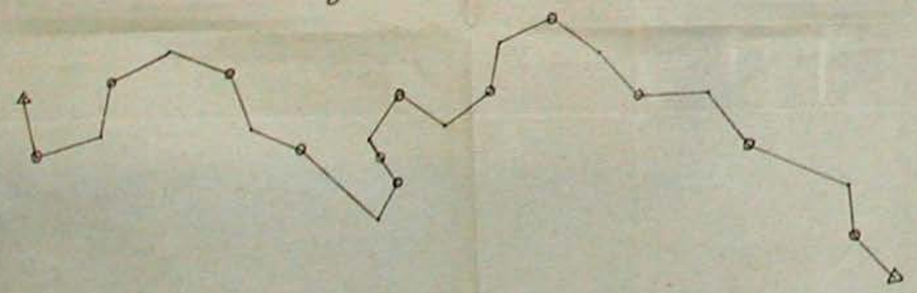


Fig. 32.

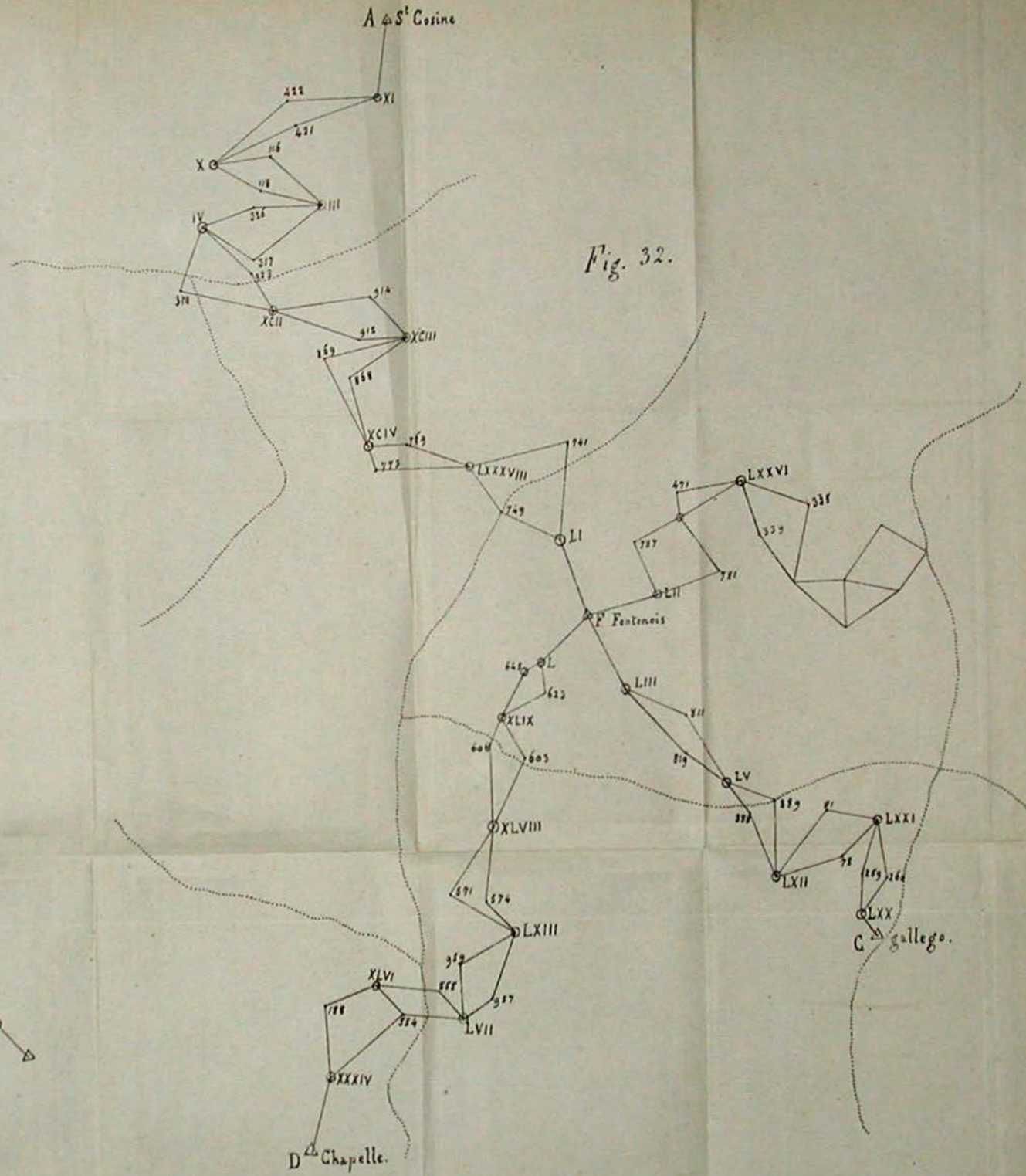
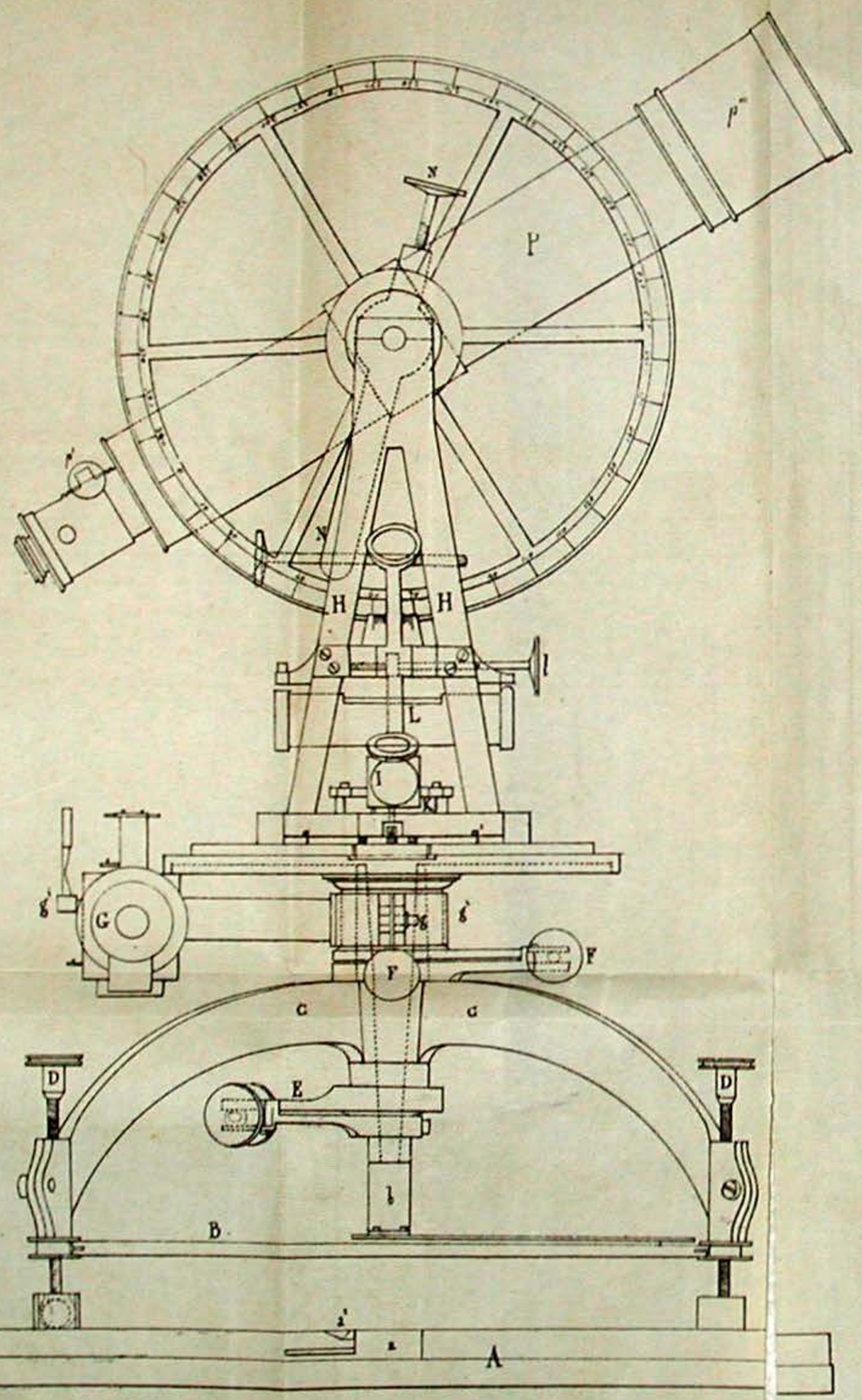
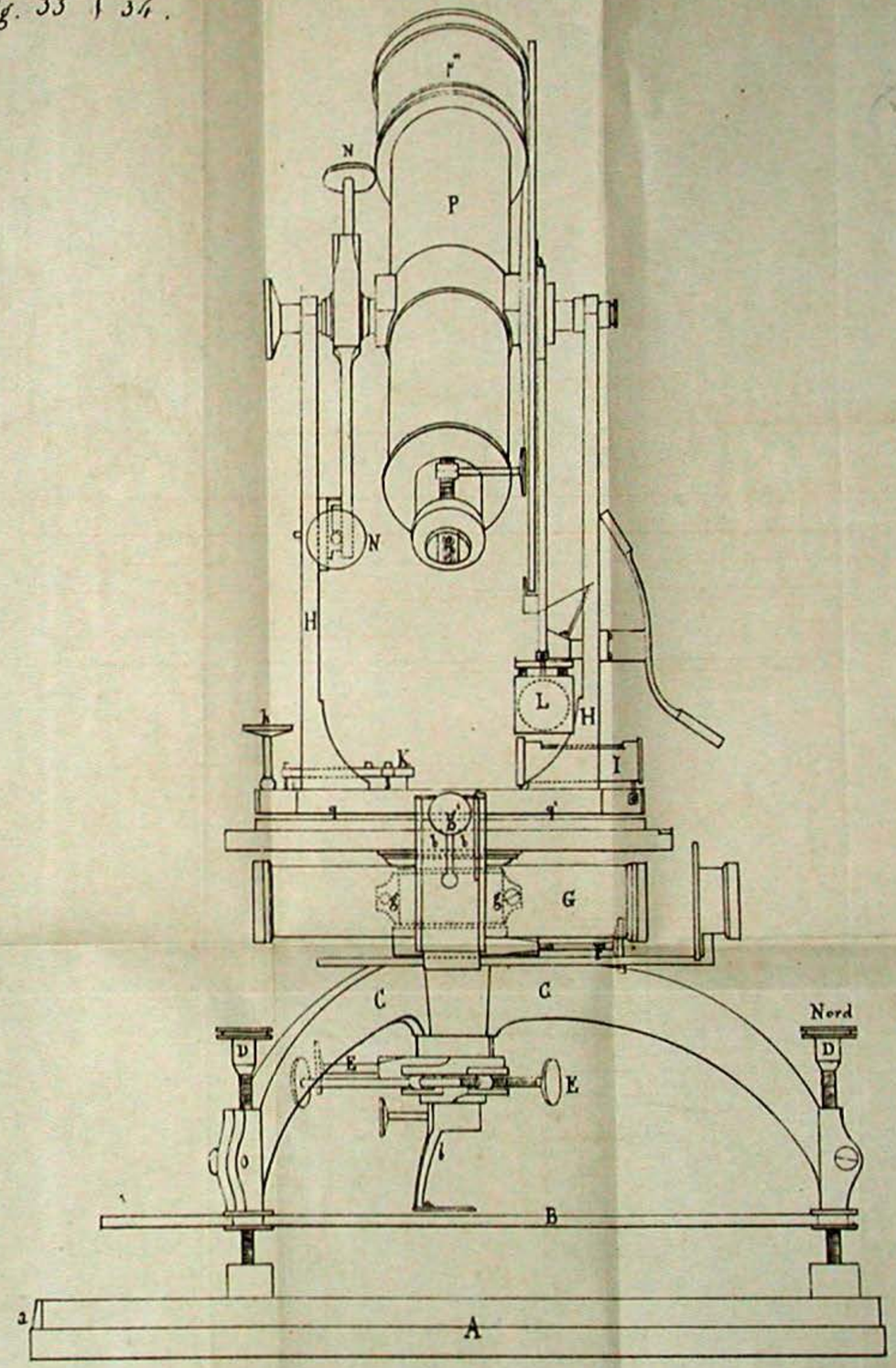


Fig. 33 et 34.





Stadia. Echelle au $\frac{1}{10}$.

Echelle moitié d'exécution.