Capitolo XIV.

Eliminazione.

§.1. Risultante di due equazioni intere ad una incognita.

Ora ritorniamo alla teoria generale, considerando equazioni intere a coefficienti qualunque, reali o complessi.

Consideriamo due equazioni intere dei gradi n ed m;

$$[1] \quad \begin{cases} f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0, & = a_0(x-\alpha_1)(x \\ g(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_{m-1} z + b_m = 0. & b_0(x-\beta_1)(x \end{cases}$$

La prima ha n radici e la seconda ne ha m, ed in generale le radici dell'una sono distinte dalle radici dell'altra.

Ma può darsi in particolare che le due equazioni abbiano qualche radice comune. Naturalmente affinchè ciò accada è necessario che i coefficienti delle due equazioni non sieno del tutto indipendenti tra loro, bensì legati da una relazione espressa dall'annullarsi di una certa funzione dei detti coefficienti:

$$F(a_0, a_1, \ldots, a_n;\ b_0, b_1, \ldots, b_m) = 0.$$

La funzione F si chiama il risultante delle due equazioni [illegible]

sempre in fattori deve accadere che una radice di tutte 1^a e una [illegible] =

faccio il prod. $f(x) \cdot g(x)$ allora c'è una radice doppia. fatto che [illegible]

[illegible] $f(x) \cdot g(x)$ [illegible] tutte le [illegible]

Ossia: risultante di due equazioni intere ad una incognita è quella funzione dei coefficienti delle due equazioni il cui annullarsi è condizione necessaria e sufficiente affinchè le due equazioni abbiano una radice comune.

Vi sono molti metodi per la ricerca del risultante; ma noi ci limiteremo ad esporre il metodo di Sylvester.

Se le due equazioni [1] hanno una radice comune, questa sarà evidentemente radice comune a tutte le $m+n$ equazioni seguenti:

$$f(z)=0,\ zf(z)=0,\ z^2f(z)=0, \ldots, z^{m-1}f(z)=0,$$
$$g(z)=0,\ zg(z)=0,\ z^2g(z)=0, \ldots, z^{n-1}g(z)=0,$$

ossia alle $m+n$ equazioni

$$\left.\begin{array}{ll}
a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots\ldots+a_{n-1}z+a_n & =0\\
a_0z^{n+1}+a_1z^n+a_2z^{n-1}+\ldots\ldots+a_nz & =0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_0z^{m+n-1}+a_1z^{m+n-2}+\ldots\ldots+a_nz^{m-1} & =0\\
b_0z^m+b_1z^{m-1}+\ldots\ldots+b_{m-1}z+b_m & =0\\
b_0z^{m+1}+b_1z^m+b_2z^{m-1}+\ldots\ldots+b_mz & =0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
b_0z^{m+n-1}+b_1z^{m+n-2}+\ldots\ldots+b_mz^{n-1} & =0
\end{array}\right\} \quad [2]$$

Consideriamo queste equazioni come $m+n$ equazioni lineari rispetto alle $m+n-1$ incognite

$$z,\ z^2,\ z^3, \ldots\ldots z^{m+n-1}.$$

$D.D' = (\alpha_1-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)$ e $\dfrac{D''}{D.D'} = (\alpha_1-\beta_1)\ldots$ se due $\alpha=\beta$ $\dfrac{D''}{D.D'}$
incomm. $D \cdot D' = 0$ impossib. $D'' D'$ coeff. [illegible] e poi sostituire i [illegible]
Va bene se non radici multiple. Posso quindi togliere prima:

Poichè esse coesistono per ipotesi, dovrà essere soddisfatta la condizione di coesistenza di $m+n$ equazioni lineari con $m+n-1$ incognite, la quale è l'annullarsi del determinante di ordine $m+n$ formato dai coefficienti e dai termini noti delle equazioni stesse:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots\ldots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots\ldots & a_n & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & b_{m-1} & b_m \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & b_m & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_0 & b_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad [3]$$

Ciò risulta dal teorema generale di Rouchè-Capelli (pag. 36). Per essere più chiari, possiamo anche riferirci ad un caso particolare interessante di detto teorema e da noi espressamente notato (pag. 39).

Se nei termini a_n e b_m della prima e della $(m+1)^{esima}$ equazione [2] introduciamo un fattore t, otteniamo un sistema lineare omogeneo di $m+n$ espressioni in altrettante incognite.

$$t, z, z^2, \ldots, z^{m+n-1};$$

e, per le [2] stesse, questo sistema è soddisfatto dai valori

$$1, z, z^2, \ldots, z^{m+n-1}$$

di dette incognite, valori che non son tutti nulli (il primo essendo 1); dunque necessariamente è nullo il determinante formato dai coefficienti. E con ciò si ritrova la [3].

L'annullarsi del determinante [3] è dunque condizione necessaria affinchè le due equazioni abbiano una radice comune.

È facile ricordare quel determinante: il suo ordine è la somma $m+n$ dei gradi delle due equazioni, i coefficienti di ciascuna equazione entrano in tante orizzontali quanto è il grado dell'altra equazione.

Per esempio, per le due equazioni

$$[1'] \quad \begin{cases} f(z) = a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0 \\ g(z) = b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3 = 0 \end{cases}$$

la [3] diventa

$$[3'] \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Or resterebbe a dimostrare che la [3] è condizione sufficiente affinchè le [1] abbiano una radice comune.

Per maggior chiarezza e semplicità, ragioneremo sulle [1'] e [3'].

Infatti, aggiungendo all'ultima colonna del determinante [3'] le prime quattro moltiplicate rispettivamente per

$$z^4, z^3, z^2, z,$$

la [3'] diventa, per le [1'],

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_0 & a_1 & f(z) \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & zf(z) \\ a_0 & a_1 & a_2 & 0 & z^2 f(z) \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & g(z) \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & zg(z) \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando secondo l'ultima verticale si ottiene una relazione del tipo

$$Af(z) + Bz\,f(z) + Cz^2 f(z) + Dg(z) + Ezg(z) = 0$$

ove A, B, C, D, E sono i complementi algebrici degli elementi dell'ultima verticale, e però sono indipendenti da z) ossia

$$f(z)(A + Bz + Cz^2) + g(z)(D + Ez) = 0$$

Ora $f(z)$ è una funzione di secondo grado e però è decomponibile nel prodotto di due fattori lineari; questi dividono il prodotto

$$f(z)(A + Bz + Cz^2)$$

e quindi anche l'altro

$$-g(z)(D + Ez)$$

che gli è eguale identicamente; ma il fattore $D + Ez$ è di primo grado, quindi uno almeno dei detti fattori lineari dovrà dividere l'altro fattore $g(z)$. Dunque $f(z)$ e $g(z)$ avranno un fattore comune, e quindi le equazioni [1'] avranno una radice comune . c.d.d.

Concludendo: il determinante [3] è il risultante delle due equazioni [1].

Ottenuto il criterio per decidere quando è che due equazioni [1] hanno una radice (almeno) comune, resta a cercare una regola che dia il modo di determinare le radici comuni a due equazioni. Metodo più breve ma non vale per le lettere [illegible] più [illegible] il caso che sia nullo il coeff. [illegible]

Osservando che le equazioni [1] ammettono una radice comune α solo quando le due funzioni $f(z)$ e $g(z)$ ammettono il fattore lineare comune $z-\alpha$ e che (pag. 289) i fattori lineari comuni ad $f(z)$ e $g(z)$ sono tutti e soli quelli del loro massimo comun divisore, possiamo subito affermare che: le radici comuni alle due equazioni [1] sono le radici dell'equazione che si ottiene eguagliando a zero il massimo comun divisore delle due funzioni $f(z)$ e $g(z)$.

Esempio — Il risultante delle due equazioni del terzo grado

$$z^3-7z+6=0,$$
$$z^3-4z^2+z+6=0$$

è il determinante del sesto ordine.

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -7 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Sottraendo l'ultima orizzontale dalla terza e la quarta dalla prima, si ha

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 6 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & -7 & 6 & 0 \\ 4 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ 1 & -4 & 1 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \\ 4 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

aggiungendo alla quarta verticale il doppio della terza, si ha

$$D = 6 . \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -7 & -8 \\ 4 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 6.4. \begin{vmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 4 & -8 & 0 \\ 1 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 24. \begin{vmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 4 & -8 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -24.8 \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Essendo nullo il risultante, le due equazioni date hanno almeno una radice comune. Per cercarla, calcoliamo il massimo comun divisore tra i primi membri delle due equazioni:

	1	$z-2$	z
$z^3 \quad -7z+6,$	z^3-4z^2+z+6	z^2-2z	$z-2$
$4z^2-8z$	$-2z^2+z+6$	0	
dividendo per 4	$-3z+6$		
z^2-2z	dividendo per -3		
	$z-2$		

Le radici comuni sono le radici dell'equazione

$$z-2=0$$

che si ottiene eguagliando a zero il massimo comun divisore.

Dunque le due equazioni date hanno l'unica radice comune 2. Esse, divise per $z-2$, diventano

$$z^2+2z-3=0, \quad z^2-2z-3=0$$

e danno le rimanenti radici delle equazioni date: $1, -3$ e $-1, 3$.

§. 2. Ancora sul discriminante di una equazione.

Possiamo ora dare un'altra espressione del discriminante di una equazione intera (cfr. pagina 277)

$$f(z)=a_0 z^n+a_1 z^{n-1}+\dots+a_{n-1} z+a_n=0,$$

considerandolo come il risultante dell'equazione e dell'altra

$$f'(z)=na_0 z^{n-1}+(n-1)a_1 z^{n-2}+\dots+a_{n-1}=0.$$

Infatti questo risultante è nullo solo quando le due equazioni $f(z)=0$, $f'(z)=0$ hanno una radice comune α, cioè solo quando la prima ha una radice (almeno) doppia α.

Avremo così il discriminante sotto forma di determinante di ordine $n+(n-1)=2n-1$, mentre che l'altra espressione da noi trovata era un determinante di ordine n, cioè di ordine minore; però usando la seconda forma non abbiamo bisogno di calcolare le somme delle potenze simili $s_0, s_1, s_2, \dots s_{2n-2}$ delle radici dell'equazione. Per es. il discriminante dell'equazione del 3°grado.

$$f(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0$$

da noi già calcolato (pag. 281) è il risultante di questa equazione e dell'altra.

$$f'(z) = 3a_0 z^2 + 2a_1 z + a_2 = 0;$$

quindi, per la [3], è

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 3a_0 & 2a_1 & a_2 \\ 0 & 3a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 3a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

§ 3. Sistemi di due equazioni intere a due incognite.

Eguagliando a zero una funzione intera di più variabili si ha una equazione intera a più variabili, e i gruppi dei valori delle incognite che soddisfanno l'equazione sono le soluzioni di essa.

Date due equazioni intere a due incognite x, y, consideriamo il loro *sistema*, cioè occupiamoci delle loro *soluzioni comuni*. $x=\alpha$, $y=\beta$ sodd. f. 1ª e 2ª.

$f(\alpha\beta) = \varphi(\alpha\beta) = 0$

Sieno

$$f(x,y) = 0 \quad , \quad g(x,y) = 0$$

le due equazioni; la prima di grado n, la seconda di grado m.

Ordinate secondo le potenze discendenti di x, esse prendono la forma

$$f(x,y)=\varphi_0 x^n+\varphi_1(y)x^{n-1}+\varphi_2(y)x^{n-2}+\dots+\varphi_n(y)=0,$$

$$g(x,y)=\psi_0 x^m+\psi_1(y)x^{m-1}+\psi_2(y)x^{m-2}+\dots+\psi_m(y)=0,$$

dove φ_0 è costante, φ_1 funzione intera di primo grado in y, φ_2 funzione intera di secondo grado in y, etc.; e lo stesso dicasi di $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$

Se una coppia di valori di x e y soddisfa entrambe le equazioni, immaginando in esse sostituito questo valore di y, si hanno due equazioni in y, che avranno per radice comune il valore di x compagno al detto valore di y; quindi sarà nullo il risultante di queste due equazioni in x.

Dunque se nelle due date equazioni si considera come incognita la sola x, e di essa si calcola il risultante, questo sarà una funzione intera di y, la quale eguagliata a zero fornirà una equazione in y soddisfatta dal detto valor di y. Sia tale funzione $R(y)$.

Viceversa: ogni valore di y che annulli $R(y)$, sostituito nelle due equazioni date, le riduce a due equazioni in x aventi almeno una radice a comune che si calcola come è detto al §. 1; quindi nasce una coppia di valori di y e x soddisfacente alle due date equazioni.

L'equazione $R(y)=0$ dicesi la equazione risultante dalla eliminazione di x dalle due date equazioni.

Scrivo: $-y^2+xy+(x^2-1$

[redacted]

Esempio – Sia il sistema

$$[1]\quad \begin{cases} x^2+xy-y^2-1=0 \\ x^2+2xy-2y^2-1=0 \end{cases}$$

altrimenti

Sia x, y una coppia di numeri che soddisfi al sistema. Se immaginiamo posto nelle due equazioni questo valor di y, le [1] considerate come equazione in x, avranno una radice comune, che sarà il valor di x compagno al detto valor di y; quindi sarà nullo il risultante di queste due equazioni in x, cioè sarà [§1, formole [3]].

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & y & -y^2-1 \\ 1 & y & -y^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 2y & -2y^2-1 \\ 1 & 2y & -2y^2-1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Questa è l'equazione risultante. Sottraendo la quarta orizzontale del determinante dalla seconda, si ha:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & y & -y^2-1 \\ 0 & -y & y^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2y & -2y^2-1 \\ 1 & 2y & -2y^2-1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$\begin{vmatrix} 1 & y & -y^2-1 \\ -y & y^2 & 0 \\ 1 & 2y & -2y^2-1 \end{vmatrix} = 0$$

estraendo il fattore y dalla seconda orizzontale e dalla seconda verticale, si ha

$$y^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -y^2-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2y^2-1 \end{vmatrix}=0$$

ossia

[2] $$y^2(-y^2+1)=0.$$

Questa equazione si scinde nelle altre due

$$y^2=0 \quad , \quad y^2-1=0$$

quindi ha la radice doppia 0 e le radici semplici 1 e -1.

Ponendo $y=0$ nelle [1], queste si riducono entrambe a $x^2=1$ e però ammettono due radici comuni $x=\pm 1$; dunque due soluzioni del sistema sono

[3] $$x=1,\ y=0 \quad ; \quad x=-1,\ y=0.$$

Ponendo $y=1$ nelle [1], queste diventano

$$x^2+x-2=0 \quad , \quad x^2+2x-3=0$$

che ammettono una radice $x=1$, che è la radice dell'equazione che si ottiene eguagliando a zero il massimo comun divisore $x-1$ dei loro primi membri.

Infine ponendo $y=-1$, le [1] diventano

$$x^2-x-2=0 \ , \quad x^2-2x-3=0$$

ed hanno la radice comune $x=-1$.

Dunque altre due soluzioni del sistema [1] sono

[4] $$x=1,\ y=1; \quad x=-1,\ y=-1.$$

Osservazione - In questo esempio abbiamo voluto applicare strettamente il metodo generale spiegato innanzi. Ma in pratica esso riesce lungo e, quan do si può, si cerca di evitarlo.

Per esempio, le [1] sottratte membro a membro, danno l'equazione

$$xy - y^2 = 0 \qquad \text{o} \qquad y(x-y) = 0$$

che si scinde nelle altre.

$$y = 0 \quad , \quad x = y.$$

Per $y=0$ le [1] si riducono entrambe a $x^2=1$ e danno $x = \pm 1$; così ritroviamo le due soluzioni [3].

Per $x=y$, le [1] si riducono ancora a $x^2=1$ e danno

$$x = y = \pm 1;$$

così si ritrovano le soluzioni [4]

§. 4. Risoluzione di una equazione intera a coefficienti complessi.

Ci siamo finora occupati della ricerca delle radici reali di una equazione

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

a coefficienti reali. Or vogliamo dare un cenno sul procedimento da seguire per determinare le radici complesse di una equazione a coefficienti reali o le radici, reali e complesse, di una equazione a coefficienti complessi.

Sieno dunque $a_0, a_1, \dots, a_n$ reali o complessi. Una radice qualunque dell'equazione sarà del tipo

$$z = x + iy$$

con x e y reali (e sarà $y = 0$ se la radice è reale). Essa soddisferà l'equazione

$$a_0(x+iy)^n + a_1(x+iy)^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Sviluppando le varie potenze di $x+iy$, il primo membro si ridurrà infine al tipo

$$P(x,y) + iQ(x,y),$$

ove P e Q saranno funzioni intere di x, y a coefficienti reali; onde l'equazione precedente diventerà

$$P(x,y) + iQ(x,y) = 0$$

e si scinderà nelle altre due

$$P(x,y) = 0, \quad Q(x,y) = 0.$$

Siamo così ridotti alla risoluzione di questo sistema di due equazioni intere a due incognite, risoluzione che si farà col metodo spiegato nel § precedente.

Ogni soluzione x, y di questo sistema darà una radice $x+iy$ dell'equazione proposta

Capitolo XV.

Decomposizione delle frazioni razionali.

Sia

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

una frazione razionale: il numeratore $f(x)$ ed il denominatore $\varphi(x)$ saranno polinomi nella x.

Se il grado di $f(x)$ è non minore del grado di $\varphi(x)$ si può eseguire la divisione di $f(x)$ per $\varphi(x)$, ottenendo così un quoziente $Q(x)$ ed un resto $R(x)$ il cui grado è inferiore al grado di $\varphi(x)$; e sarà

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{\varphi(x)}.$$

Potremo dunque limitarci a studiare le frazioni in cui il grado del numeratore sia inferiore al grado del denominatore.

Quando studieremo una tale frazione la supporremo sempre ridotta ai minimi termini, cioè supporremo che i suoi termini non ammettano fattori lineari comuni.

Sia

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

una tale frazione, e sia n il grado di φ.

Se a è il coefficiente di x^n in φ, dividendo per a numeratore e denominatore, ci si può ridurre al caso in cui tale coefficiente sia eguale all'unità.

E se

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

sono le radici dell'equazione

$$\varphi(x) = 0,$$

sarà

$$\varphi(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

Tra queste radici ve ne siano proprio h eguali ad un certo numero α. Sarà

$$\varphi(x) = (x-\alpha)^h P(x),$$

dove $P(x)$ è un polinomio, di grado $n-h$ che non contiene $x-\alpha$ tra i suoi fattori, ossia che non è divisibile per $x-\alpha$. È cioè

$$P(\alpha) \neq 0.$$

Ora qualunque sia la costante A, vale la identità

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x)}{(x-\alpha)^h P(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^h} + \frac{f(x) - A P(x)}{(x-\alpha)^h P(x)}$$

ossia

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^h} + \frac{\frac{f(x) - A P(x)}{x-\alpha}}{(x-\alpha)^{h-1}\, P(x)}.$$

Il secondo termine del secondo membro ha per numeratore

$$\frac{f(x)-AP(x)}{(x-\alpha)}\ \text{di grado } 1°\ \text{del Denom}$$

e questa espressione è un polinomio soltanto se

$$f(x)-AP(x)$$

è divisibile per $x-\alpha$, e però soltanto se si annulla per $x=\alpha$, ossia se (Ruffini)

$$f(\alpha)-AP(\alpha)=0$$

oppure se

$$\boxed{A}=\frac{f(\alpha)}{P(\alpha)\neq 0\ (\text{ipotesi})}$$

Ora si noti che A era una costante arbitraria, e noi la sceglieremo proprio eguale a $\frac{f(\alpha)}{P(\alpha)}$, ciò che è lecito, perchè $P(\alpha)\neq 0$.

Così la nostra eguaglianza diventa V. esemp.

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)^h}+\frac{f_1(x)}{(x-\alpha)^{h-1}P(x)},$$

dove

$$f_1(x)=\frac{f(x)-AP(x)}{x-\alpha}$$

è un polinomio.

E se, come abbiamo supposto, f è di grado inferiore a φ, anche f_1 è di grado inferiore a $(x-\alpha)^{h-1}P(x)$.

Applicando a

$$\frac{f_1(x)}{(x-\alpha)^{h-1}P(x)}$$

lo stesso procedimento, troviamo (se $h-1>0$)

$$\frac{f_1(x)}{(x-\alpha)^{h-1}P(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^{h-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-\alpha)^{h-2}P(x)},$$

dove A_1 è una costante ed f_2 è un polinomio di grado inferiore a quello di $(x-\alpha)^{h-2}P(x)$.

Così continuando (se $h-2>0$), troviamo infine

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^h} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^{h-1}} + \cdots + \frac{A_{h-1}}{x-\alpha} + \frac{f_h(x)}{P(x)},$$

dove f_h è un polinomio di grado inferiore a quello di $P(x)$ ed A_{h-1} una costante.

Ora $P(x)$ ha gli stessi fattori lineari di $\varphi(x)$ eccettuato $x-\alpha$. E noi potremo applicare ad

$$\frac{f_h(x)}{P(x)},$$

lo stesso ragionamento applicato testè a $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, e così continuare.

Troveremo così, dette

$$\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$$

le radici di $\varphi(x)=0$ e

$$h, k, \ldots, l$$

i loro gradi di multiplicità:

$$\left.\begin{aligned} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = & \frac{A}{(x-\alpha)^h} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^{h-1}} + \cdots + \frac{A_{h-1}}{x-\alpha} + \\ & + \frac{B}{(x-\beta)^k} + \frac{B_1}{(x-\beta)^{k-1}} + \cdots + \frac{B_{k-1}}{x-\beta} + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{E}{(x-\varepsilon)^l} + \frac{E_1}{(x-\varepsilon)^{l-1}} + \cdots + \frac{E_{l-1}}{x-\varepsilon} \end{aligned}\right\} \quad [1]$$

Questo è il modo più comodo di decomposizione di una frazione razionale in frazioni semplici.

In pratica per calcolare le costanti

$$A, A_1, \dots, A_{h-1}, B, B_1, \dots, B_{k-1}, \dots\dots, E, E_1, \dots\dots, E_{l-1},$$

si scriva senz'altro la formola precedente, si moltiplichino i due membri per $\varphi(x)$; le equazioni che si ottengono eguagliando i coefficienti delle potenze omologhe di x nei due membri sono equazioni lineari nelle $A, A_1, \dots, E_{l-1}$, la cui risoluzione determina queste costanti.

Altrimenti: si dànno ad x tanti valori particolari quante sono le costanti: si avranno altrettante equazioni lineari che risolute daranno queste costanti. Questo secondo modo ha il vantaggio di dare equazioni lineari molto semplici, la cui scelta dipende dall'abilità di chi opera.

Naturalmente tutto ciò richiede la previa risoluzione dell'equazione

$$\varphi(x)=0.$$

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2+x+7 & x^2-4x+3 \\ \hline -x^3+4x^2-3x & x+6 \\ 6x^2-2x+7 & \\ -6x^2+24x-18 & \\ \hline 22x-11 & \end{array}$$

Esempio 1°. Sia la frazione razionale

$$\frac{x^3+2x^2+x+7}{x^2-4x+3}.$$

Il grado del numeratore supera il grado del denominatore. Eseguendo la divisione si ha per quoziente $x+6$ e per resto $22x-11=11(2x-1)$, quindi

$$\frac{x^3+2x^2+x+7}{x^2-4x+3}=(x+6)+11\cdot\frac{2x-1}{x^2-4x+3}$$

Basta dunque decomporre in frazioni semplici

$$\frac{2x-1}{x^2-4x+3}.$$

L'equazione

$$x^2-4x+3=0$$

ha due radici semplici 1, 3, quindi porremo

$$\frac{2x-1}{x^2-4x+3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}$$

$(x-1)\,(x-3)$

Per determinare le costanti A e B, moltiplichiamo ambo i membri per x^2-4x+3, otteniamo

$$2x-1=A(x-3)+B(x-1), \qquad [2]$$

onde, eguagliando i coefficienti di x e i termini indipendenti da x nei due membri, abbiamo due equazioni lineari in A e B.

$$2=A+B, \qquad 1=3A+B$$

$B=2-A$

$1=3A+2-A$

$1=2A+2$

$2A=-1$

$A=-\frac{1}{2}$

che risolute danno

$$A=-\frac{1}{2}\;, \qquad B=\frac{5}{2}.$$

Queste si ottengono anche immediatamente dalla [2], ponendovi successivamente $x=1$ e $x=3$. Si intuiscono a mente

Dunque

$$\frac{2x-1}{x^2-4x+3}=\frac{-1}{2(x-1)}+\frac{5}{2(x-3)},$$

e però

$$\frac{x^3+2x^2+x+7}{x^2-4x+3}=x+6+\frac{11}{2}\left(\frac{5}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right).$$

Esempio 2°. Sia la frazione razionale

$$\frac{x^2+1}{x^3-3x-2}$$

Qui il grado del numeratore è minore del grado del denominatore.

L'equazione

$$x^3-3x-2=0$$

ha la radice semplice 2 e la radice doppia -1, quindi porremo

$$\frac{x^2+1}{x^3-3x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{B_1}{(x+1)^2}.$$

Moltiplicando per

$$x^3-3x-2=(x-2)(x+1)^2,$$

avremo

$$x^2+1=A(x+1)^2+B(x+1)(x-2)+B_1(x-2).$$

Se in questa identità poniamo successivamente $x=2$ e $x=-1$, otteniamo subito

$$A=\frac{5}{9}\quad,\qquad B_1=-\frac{2}{3};$$

poi ponendo $x=0$ otteniamo

$$1=A-2B-2B_1$$

da cui, sostituendo i valori precedenti

$$B=\frac{4}{9}.$$

Dunque

$$\frac{x^2+1}{x^3-3x-2}=\frac{5}{9(x-2)}+\frac{4}{9(x+1)}-\frac{2}{3(x+1)^2}.$$

Esempio 3° - Sia la funzione razionale

$$\frac{x^3}{x^4-1}.$$

Il grado del numeratore è minore del grado del denominatore. Le radici dell'equazione $x^4-1=0$ sono le radici quarte dell'unità.

$$1, -1, i, -i,$$

quindi possiamo scrivere

$$\frac{x^3}{x^4-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-i}+\frac{D}{x+i},$$

da cui, moltiplicando per x^4-1,

$$x^3=A(x+1)(x-i)(x+i)+B(x-1)(x-i)(x+i)+$$
$$+C(x-1)(x+1)(x+i)+D(x-1)(x+1)(x-i).$$

Ponendo successivamente $x=1, -1, i, -i$, si ha subito

$$A=B=C=D=\frac{1}{4},$$

epperò

$$\frac{x^3}{x^4-1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-i}+\frac{1}{x+i}\right).$$

Negli ultimi due termini comparisce l'immaginario: per eliminarlo basta sostituire a quei due termini la loro somma

$$\frac{1}{x-i}+\frac{1}{x+i}=\frac{2x}{(x-i)(x+i)}=\frac{2x}{x^2+1};$$

allora

$$\frac{x^3}{x^4-1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)+\frac{x}{2(x^2+1)}.$$

Nel caso in cui qualcuna delle radici

$$\alpha, \beta, \dots, \varepsilon$$

di $\varphi(x)=0$ sia immaginaria, nella [1] compariscono quantità immaginarie (cfr. l'esempio precedente).

Ma, se f e φ sono polinomii a coefficienti reali, questo inconveniente si può eliminare nel seguente modo.

Sia α una radice complessa e β la immaginaria coniugata dell'equazione $\varphi(x)=0$. Sia $h=k$ la multiplicità comune. Il trinomio

$$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+px+q$$

è un trinomio a coefficienti reali, chè

$$p=-(\alpha+\beta)\ , \qquad q=\alpha\beta\ ;$$

esso eguagliato a zero, dà un'equazione a radici complesse coniugate. Sarà

$$\varphi(x)=(x^2+px+q)^h\,Q(x),$$

dove $Q(x)$ è un polinomio a coefficienti reali e

$$Q(\alpha)\neq 0\ ,\qquad Q(\beta)\neq 0\ .$$

Evidentemente

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x)}{(x^2+px+q)^h\,Q(x)}=\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^h}+\frac{f(x)-(ax+b)Q(x)}{(x^2+px+q)^h\,Q(x)}$$

ossia

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^h}+\frac{\dfrac{f(x)-(ax+b)Q(x)}{x^2+px+q}}{(x^2+px+q)^{h-1}\,Q(x)}$$

qualunque siano le costanti a e b.

Affinchè il numeratore

$$\frac{f(x)-(ax+b)\,Q(x)}{x^2+px+q}$$

dell'ultima frazione sia un polinomio, bisogna che

$$f(x)-(ax+b)Q(x)$$

sia divisibile per

$$x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta),$$

ossia che si annulli per $x=\alpha$ ed $x=\beta$:

$$\begin{cases} f(\alpha)-(a\alpha+b)\,Q(\alpha)=0, \\ f(\beta)-(a\beta+b)\,Q(\beta)=0. \end{cases}$$

Queste sono due equazioni di primo grado nelle a, b, considerate come incognite. Si possono scrivere

$$\begin{cases} \alpha Q(\alpha)a+Q(\alpha)b=f(\alpha) \\ \beta Q(\beta)a+Q(\beta)b=f(\beta) \end{cases}$$

onde, risolvendole con la regola di Cramer dànno

$$a=\frac{\begin{vmatrix} f(\alpha) & Q(\alpha) \\ f(\beta) & Q(\beta) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha Q(\alpha) & Q(\alpha) \\ \beta Q(\beta) & Q(\beta) \end{vmatrix}}, \qquad b=\frac{\begin{vmatrix} \alpha Q(\alpha) & f(\alpha) \\ \beta Q(\beta) & f(\beta) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha Q(\alpha) & Q(\alpha) \\ \beta Q(\beta) & Q(\beta) \end{vmatrix}}$$

ossia

$$a=\frac{\begin{vmatrix} f(\alpha) & Q(\alpha) \\ f(\beta) & Q(\beta) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{vmatrix} Q(\alpha)Q(\beta)}, \qquad b=\frac{\begin{vmatrix} \alpha Q(\alpha) & f(\alpha) \\ \beta Q(\beta) & f(\beta) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{vmatrix} Q(\alpha)Q(\beta)}. \; (*)$$

(*) Si noti che il denominatore

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{vmatrix} Q(\alpha)Q(\beta)\neq 0,$$

perchè $\alpha\neq\beta$ e, come già dicemmo

$$Q(\alpha)\neq 0, \; Q(\beta)\neq 0$$

Le due quantità a, b così definite sono reali, perchè se mutiamo i in $-i$

$$\alpha \text{ e } \beta,\ Q(\alpha) \text{ e } Q(\beta)\ ,\ f(\alpha) \text{ e } f(\beta)$$

si trasformeranno rispettivamente nelle quantità immaginarie coniugate

$$\beta \text{ e } \alpha\ ,\ Q(\beta) \text{ e } Q(\alpha)\ ,\ f(\beta) \text{ e } f(\alpha),$$

e quindi, come si vede subito dalle formole precedenti, il mutare i in $-i$ lascia inalterate le a, b. E quindi le a, b sono reali.

Si ha così con questi valori di a, b:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x)}{(x^2+px+q)^h Q(x)} = \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^h} + \frac{f_1(x)}{(x^2+px+q)^{h-1} Q(x)},$$

dove $f_1(x)$ è un polinomio, che è evidentemente di grado inferiore rispetto al grado di

$$(x^2+px+q)^{h-1} Q(x) .$$

Ripetendo più volte lo stesso procedimento, si trova infine.

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^h} + \frac{a_1x+b_1}{(x^2+px+q)^{h-1}} + \dots + \frac{a_{h-1}x+b_{h-1}}{x^2+px+q} + \frac{f_h(x)}{Q(x)},$$

dove le

$$a,\ b,\ a_1,\ b_1,\ \dots\dots,\ a_{h-1},\ b_{h-1}$$

sono costanti reali, $f_h(x)$ è di grado inferiore a $Q(x)$, e l'ultimo denominatore $Q(x)$ non contiene più il fattore

$$x^2+px+q.$$

In modo analogo si può procedere per le altre coppie di radici immaginarie coniugate.

E si trova infine che ogni frazione razionale reale si può decomporre nella somma di un polinomio e di più frazioni reali del tipo

$$\frac{A}{(x-\alpha)^h}\ , \qquad \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}\ .$$

I denominatori di queste ultime frazioni sono tutti fattori del denominatore della frazione inizialmente considerata. I termini x^2+px+q sono prodotti di fattori lineari immaginarii coniugati.

Per la determinazione pratica delle costanti A, a, b che figurano nei numeratori delle frazioni precedenti vale l'osservazione fatta più sopra.

Esempio 1° Sia la frazione razionale

$$\frac{x^5-2x+1}{x^5+2x^3-2x^2+x-2}\ .$$

Il grado del numeratore è eguale al grado del denominatore. Eseguendo la divisione si ha per quoziente 1 e per resto

$$-2x^3+2x^2+x+3\ ;$$

quindi

$$\frac{x^5+2x+1}{x^5+2x^3-2x^2+x-2}=1+\frac{-2x^3+2x^2+x+3}{x^5+2x^3-2x^2+x-2}\ ,$$

e però basta scomporre in frazioni semplici la frazione

$$\frac{-2x^3+2x^2+x+3}{x^5+2x^3-2x^2+x-2}$$

in cui il grado del numeratore è inferiore a quello del denominatore.

Essendo, come è facile verificare,

$$x^5+2x^3-2x^2+x-2=(x-1)(x^2+1)(x^2+x+2)$$

il denominatore eguagliato a zero ha per radici quelle delle equazioni

$$x-1=0\,, \qquad x^2+1=0\,, \qquad x^2+x+2=0.$$

La prima ha la radice reale 1, le altre due hanno radici immaginarie coniugate (semplici); quindi porremo

$$\frac{-2x^3+2x^2+x+3}{x^5+2x^3-2x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{cx+d}{x^2+x+2}\,, \qquad [3]$$

dove A, a, b, c, d, sono costanti da determinare.

Liberando da fratti, si ha

$$-2x^3+2x^2+x+3=A(x^2+1)(x^2+x+2)+(ax+b)(x-1)(x^2+x+2)$$
$$+(cx+d)(x-1)(x^2+1) \qquad [4]$$

Sviluppando il secondo membro risulta

$$-2x^3+2x^2+x+3=A(x^4+x^3+3x^2+x+2)+ax^4+ax^2-2ax+bx^3+bx-2b$$
$$+cx^4-cx^3+cx^2-cx+dx^3-dx^2+dx-d$$

ed ordinando rispetto ad x

$$-2x^3+2x^2+x+3=(A+a+c)x^4+(A+b-c+d)x^3+$$
$$+(3A+a+c-d)x^2+(A-2a+b-c+d)x+(2A-2b-d);$$

eguagliando i coefficienti delle potenze omologhe di x nei due membri, si ha per determinare le costanti il si stema di equazioni lineari

$$\begin{cases} A+a+c=0 \\ A+b-c+d=-2 \\ 3A+a+c-d=2 \\ A-2a+b-c+d=1 \\ 2A-2b-d=3. \end{cases}$$

Sottraendo la quarta dalla seconda, si ha

$$2a=-3, \qquad \text{o} \qquad a=-\frac{3}{2},$$

quindi le precedenti, esclusa la quarta, diventano

$$\begin{cases} A+c=\frac{3}{2} \\ A+b-c+d=-2 \\ 3A+c-d=\frac{7}{2} \\ 2A-2b-d=3. \end{cases}$$

La prima dà

$$c=\frac{3}{2}-A$$

e la seconda e terza sommate dànno

$$b=\frac{3}{2}-4A,$$

quindi sostituendo nella terza e nella quarta, si ha

$$\begin{cases} 2A-d=2 \\ 10A-d=6; \end{cases}$$

queste sottratte dànno

$$A=\frac{1}{2},$$

quindi per le precedenti

$$d=-1, \quad c=1, \quad b=-\frac{1}{2}.$$

Dunque, sostituendo in [3], si ha

$$\frac{-2x^3+2x^2+x+3}{x^5+2x^3-2x^2+x-2}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3x+1}{2(x^2+1)}+\frac{x-1}{x^2+x+2}. \quad [5]$$

Ma a questa formola si può giungere in modo più rapido ed elegante.

Infatti se in [4] si pone $x=1$ si ha subito

$$4=8A \qquad \text{ossia } A=\frac{1}{2} \qquad [6]$$

Or poniamo per x uno dei due valori radici dell'equazione

$$x^2+1=0$$

quindi poniamo

$$x^2=-1 \quad , \quad x^3=-x;$$

otteniamo

$$3x+1=(ax+b)(x-1)(x+1);$$

ma

$$(x-1)(x+1)=x^2-1=-2,$$

quindi

$$ax+b=-\frac{3x+1}{2}.$$

Questa eguaglianza, considerata come equazione in x, è di primo grado: ma essa ammette due radici, quelle di $x^2+1=0$, epperò è un'identità.

Infine poniamo per x una delle radici della equazione

$$x^2+x+2=0,$$

quindi poniamo

$$x^2=-x-2 \quad , \quad x^3=-x^2-2x=2-x;$$

otteniamo

$$x-5=(cx+d)(x-1)(-x-1);$$

ma

$$(x-1)(-x-1)=1-x^2=x+3,$$

quindi

$$cx+d=\frac{x-5}{x+3}=\frac{(x-5)(x-2)}{(x+3)(x-2)}=\frac{x^2-7x+10}{x^2+x-6}=\frac{-8x+8}{-8}=x-1. \quad \boxed{8}$$

Questa eguaglianza, dimostrata per due valori particolari di x dev'essere un'identità.

Sostituendo in $\boxed{3}$ i valori $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$, si ritrova la $\boxed{5}$

Esempio 2°. Sia la frazione razionale

$$\frac{x+1}{x^7-x^6-2x^4+2x^3+x-1}.$$

Il grado del numeratore è minore del grado del denominatore.

Il denominatore si può scrivere, come è facile verificare

$$(x-1)^3(x^2+x+1)^2 \qquad \boxed{9}$$

quindi, eguagliato a zero, dà un'equazione che ha la radice reale tripla 1 e due radici complesse coniugate doppie che sono quelle dell'equazione

$$x^2+x+1=0.$$

Dunque la frazione data si potrà scomporre in somma di frazioni semplici nel seguente modo

$$\frac{x+1}{x^7-x^6-2x^4+2x^3+x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{(x-1)^3}+ \qquad \boxed{10}$$

$$+\frac{ax+b}{x^2+x+1}+\frac{a_1x+b_1}{(x^2+x+1)^2}.$$

Per determinare le costanti

$$A, A_1, A_2, a, b, a_1, b_1$$

liberiamo dai fratti, moltiplicando per [9]; con ciò otteniamo l'identità

$$x+1=A(x-1)^2(x^2+x+1)^2+A_1(x-1)(x^2+x+1)^2+A_2(x^2+x+1)^2+$$
$$+(ax+b)(x-1)^3(x^2+x+1)+(a_1x+b_1)(x-1)^3. \qquad [11]$$

Sviluppando il secondo membro ed ordinando rispetto ad x e poi eguagliando i coefficienti delle potenze omologhe nei due membri si avrebbero sette equazioni lineari dalle quali potremmo ricavare i valori delle 7 costanti incognite.

Ma preferiamo procedere altrimenti.

Ponendo nella [11] $x=1$, si ha subito

$$A_2=\frac{2}{9} \qquad [12]$$

Or poniamo per x una delle due radici dell'equazione

$$x^2+x+1=0; \qquad [13]$$

allora la [11] diventa

$$x+1=(a_1x+b_1)(x-1)^3,$$

da cui

$$a_1x+b_1=\frac{x+1}{(x-1)^3}=\frac{(x+1)(x+2)^3}{(x-1)^3(x+2)^3}=\frac{(x+1)(x+2)^3}{(x^2+x-2)^3}=\frac{(x+1)(x+2)^3}{-27};$$

ma

$$(x+1)(x+2)^3=(x^2+3x+2)(x^2+4x+4)=$$
$$=(2x+1)(3x+3)=3(2x^2+3x+1)=3(x-1),$$

quindi

$$a_1x+b_1=\frac{3(x-1)}{-27}=-\frac{x-1}{9}. \qquad [14]$$

Sostituendo in [11] i valori [12] e [14] e moltiplicando per 9, si ha

$$9A(x-1)^2(x^2+x+1)^2+9A_1(x-1)(x^2+x+1)^2+9(ax+b)(x-1)^3(x^2+x+1)=$$
$$9(x+1)-2(x^2+x+1)^2+(x-1)^4.$$

I primi due termini del secondo membro sviluppati dànno:

$$9x+9-2(x^4+x^2+1+2x^3+2x^2+2x)=-2x^4-4x^3-6x^2+5x+7=$$
$$=-(x-1)(2x^3+6x^2+12x+7),$$

quindi l'eguaglianza precedente, divisa per $x-1$, diventa

$$9A(x-1)(x^2+x+1)^2+9A_1(x^2+x+1)^2+9(ax+b)(x-1)^2(x^2+x+1)=$$
$$-(2x^3+6x^2+12x+7)+(x-1)^3,$$

e per $x=1$, dà

$$A_1=-\frac{1}{3}; \qquad [15]$$

sostituendovi questo valore di A_1, essa diventa

$$9A(x-1)(x^2+x+1)^2+9(ax+b)(x-1)^2(x^2+x+1)=$$
$$=3x^4+4x^3+3x^2-6x-4+(x-1)^3.$$

$x-1$ divide il primo membro, e divide anche il secondo » 10
perchè questo si annulla per $x=1$; quindi, fatta » 14
la divisione, si ha

$$9A(x^2+x+1)^2+9(ax+b)(x-1)(x^2+x+1)= \qquad » 16$$
$$=3x^3+7x^2+10x+4+(x-1)^2$$

Ponendo $x=1$, si ha » 21

$$A=\frac{8}{27}; \qquad [16] \qquad » 25$$

sostituendo questo valore di A, la precedente diventa

$$27(ax+b)(x-1)(x^2+x+1) = -8x^4-7x^3-3x^2+14x+4+3(x-1)^2;$$

e divisa per $x-1$, dà

$$27(ax+b)(x^2+x+1) = -8x^3-15x^2-18x-4+3(x-1);$$

questa per $x^2+x=0$ ossia per $x^2=-x$, e quindi per $x^3=-x^2=x$, diventa

$$27(ax+b) = -8x-7,$$

da cui

$$ax+b = -\frac{8x+7}{27}. \qquad [17]$$

Per le [12], [14], [15], [16], [17], la [10a] diventa

$$\frac{x+1}{x^7-x^6-2x^4+2x^3+x-1} = \frac{8}{27}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{(x-1)^3} -$$

$$-\frac{8x+7}{27(x^2+x+1)} - \frac{x-1}{9(x^2+x+1)^2}.$$

INDICE delle materie.

Capitolo I.

Disposizioni, permutazioni e combinazioni.

Disposizioni di n elementi a m a m . . . . Pag. 3
Permutazioni di n elementi . . . . » 4
Combinazioni di n elementi a m a m . . . . . » 8

Capitolo II.

Determinanti e sistemi di equazioni lineari

Definizione di determinante . . . . » 10
Proprietà elementari dei determinanti . . . . » 14
Sviluppo di un determinante secondo una linea o colonna – Corollari . . . . » 16
Sistema di n equazioni lineari non omogenee ad n incognite . . . . » 21
Regola di Cramer . . . . » 25

Caratteristica di una matrice ad m righe e n colonne .... Pag. 26
Forme lineari in n variabili .... » 29
Sistema di m equazioni lineari con n incognite - Teorema di Rouché - Capelli .... » 36
Esempî - Sistemi di equazioni lineari omogenee. 38
Teoremi sulla caratteristica di una matrice .... » 44
Prodotto di determinanti .... » 45
Osservazioni ed esempî .... » 51
Prodotto di due matrici .... » 55
Determinanti reciproci .... » 57

Capitolo III.

Le funzioni.

Definizione di intervallo .... » 59
Definizione ed esempi di funzioni .... » 60
Funzioni continue - Definizione .... » 67
Teorema di Weierstrass .... » 71
Teorema sulla continuità della somma di funzioni continue .... » 71
Id. per il prodotto .... » 74
Id. per la reciproca di una funzione continua .... » 76
Id. per il quoziente .... » 77
Id. per le funzioni di funzioni .... » 77

No

Teorema:

$(1+y)^t \geq 1+ty$ .... Pag. 78

Cambiamento di base nei logaritmi .... » 81

Capitolo IV.

Teoria dei limiti

Definizione di limite .... » 84

Esempî di limiti .... » 88

Applicazioni: somma di una progressione geometrica indefinita .... » 89

Limite di $sen\,x$ e $cos\,x$ per $x=0$ .... » 91

Lemma sul limite di una funzione compresa tra due funzioni aventi lo stesso limite ... » 92

Limite di $x\,sen\frac{1}{x}$ per $x=0$ .... » 94

Teoremi sul limite:

della somma di funzioni .... » 97

del prodotto » » .... » 99

del quoziente » » .... » 99

Osservazioni sull'estensione dei precedenti teoremi ad alcuni casi speciali .... » 99

Postulato della continuità della retta .... » 101

Funzioni crescenti, decrescenti e costanti .... » 103

Teorema sul limite di una funzione che non fa oscillazioni .... » 103

Permutabilità dei simboli $\int$ e lim per una funzione continua .... Pag 106

Calcolo di varii limiti notevoli:

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{» } 108$$

$(1+\frac{1}{n}$

$$\lim_{x=1} \frac{x-1}{\log_e x} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{» } 110$$

$$\lim_{x=0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{» } 114$$

Capitolo V.

Le serie.

Definizione di serie - Serie convergenti, divergenti e indeterminate .... » 115

Serie a termini positivi .... » 116

Teoremi sulla loro convergenza:

una serie a termini positivi non è mai indeterminata; .... » 116

una serie avente i suoi termini minori (maggiori) dei termini di un'altra serie convergente (divergente) è pur essa convergente (divergente); .. » 117

criterio del rapporto di un termine al precedente .... » 119

criterio di Raabe; .... » 122

criterio della radice n^a di a_n . . . . Pag. 123
Proprietà commutativa delle serie convergenti a termini positivi . . . . » 123
Serie a termini positivi e negativi . . . . » 124
Teoremi sulla convergenza assoluta di una serie; serie assolutamente convergenti . . . . » 126
Teorema: il termine n^o di una serie convergente è infinitesimo per $n = \infty$ . . . . » 126
Serie di funzioni; definizione di serie totalmente convergente in un intervallo . . . . » 127
Il limite di una serie totalmente convergente è uguale alla serie dei limiti . . . . » 129
Serie di potenze: cerchio di convergenza . . . . . . » 129

Capitolo VI.

Numeri complessi.

Definizione di numeri complessi . . . . » 131
Rappresentazione geometrica dei numeri complessi e loro riduzione a forma trigonometrica . . » 133
Somma di più numeri complessi . . . . » 134
Sottrazione id id . . . . » 137
Prodotto id id . . . . » 138
Divisione id id . . . . » 141
Formola di Moivre . . . . » 141

Operazioni sui moduli o valori assoluti ..... Pag. 145
Limiti di numeri complessi .... » 146
Serie id id .... » 147
Funzione esponenziale di variabile complessa. » 148
Teorema: $\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=e^x$ .... » 149
Formola di Eulero .... » 151
Logaritmi di numeri complessi .... » 151
Potenze di numero complesso con esponente complesso » 152
Radici $\underline{n}$-esime di un numero .... » 154

Capitolo VII.

Funzioni di più variabili .... » 155
Funzioni continue di più variabili .... » 156
Funzioni complesse di variabile reale .... » 157
Dimostrazione del teorema di Weierstrass per le funzioni continue di una sola variabile... » 157

Capitolo VIII.

Derivate e differenziale primo di una funzione.

Problemi che conducono al concetto di derivata... » 162
Definizione di incremento, rapporto incrementale, derivata di una funzione ...... » 165

Tangente a una curva piana: significato geometrico della derivata . . . . Pag. 166
Derivate di $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x, $\log x$, x^m . . . . » 171
Paragone tra infinitesimi . . . . » 176
Differenziali e loro significato geometrico . . . . . » 178
Derivata della somma di due o più funzioni . . » 182
» del prodotto " " " " 184
» del quoziente " " " " 189
Teorema di derivazione delle funzioni inverse . » 191
Derivata di $\operatorname{arc\,sen} x$, $\operatorname{arc\,cos} x$, $\operatorname{arc\,tg} x$ . . . . . » 195
Regola di derivazione delle funzioni di funzione » 198
Derivata della funzione $\varphi(x)^{\psi(x)}$ . . . . » 203
Quadri delle regole di derivazione e delle derivate delle funzioni elementari . . . . » 208
Derivate successive . . . . » 209

Capitolo IX.

Proprietà delle derivate.

Funzioni crescenti e decrescenti . . . . » 210
Teoremi sul segno della derivata di una funzione crescente o decrescente . . . . » 21[illegible]
Massimi e minimi: definizioni . . . . » 21[illegible]
Teorema sull'annullarsi della derivata in un punto di massimo e di minimo . . . » 215

Qualche problema sui massimi e minimi . . . Pag. 217
Teorema di Rolle . . . . » 218
Teorema della media . . . . » 220
Sua interpretazione geometrica e meccanica . . » 221
Teorema sulla continuità di una funzione derivabile . . . . » 223
Funzioni aventi derivata nulla . . . . » 224

Capitolo X.

Formole di Mac Laurin e Taylor.

Definizioni dei differenziali e delle derivate successive . . . . » 226
Lemma: se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ si annullano per $x=0$, si ha $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(\theta x)}{g'(\theta x)}$ . . . » 227
Prima formola di Mac Laurin:
$$F(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta x)$$ . . . . . » 229
Formola di Mac-Laurin . . . . » 231
Resto di Lagrange . . . . » 232
Formola di Taylor . . . . » 233
Applicazioni: sviluppo in serie di sen x, cos x, e^x » 233
Formola del binomio di Newton . . . . » 236
Formola di Taylor per le funzioni intere . . . . » 239

Divisione per $z-\alpha$ della funzione intera $P(z)$ ...... Pag. 240.
Regola di Ruffini .... » 241
Sviluppo di $P(x+h)$ nelle potenze di h mediante la regola delle divisioni successive di Ruffini-Horner .... » 244

Capitolo XI.

L'annullarsi di una funzione complessa equivale all'annullarsi di una funzione reale di due variabili .... » 246
Teorema di Weierstrass per le funzioni continue di due variabili .... » 247

Capitolo XII.

Equazioni intere a un'incognita.

Definizioni: grado, coefficienti, radici o soluzioni di un'equazione intera .... » 251
Lemma 1°: comunque dato k, per z maggiore di un certo numero si ha $|f(z)|>k$. ..... » 252
Lemma 2°: se $f(\alpha)\neq 0$, vi ha un z tale che $|f(z)|<|f(\alpha)|$ .... » 253
Teorema di d'Alembert sull'esistenza di una radice dell'equazione intera $f(z)=0$ .... » 255

Scomposizione di una funzione intera in fattori lineari . . . . Pag. 257
Radici semplici e multiple . . . . » 259
Condizione perchè una radice sia r-pla . . . . » 260
Condizione affinchè due funzioni intere siano identicamente eguali . . . . » 263
Relazioni tra i coefficienti e le radici . . . . . . » 263
Formule di Girard . . . . » 266
Funzioni simmetriche . . . . » 268
Somma delle potenze simili delle radici . . . . » 269
Formule di Girard - Newton . . . . » 271
Loro prosecuzione per esponenti negativi . . . » 275
Discriminante di un'equazione . . . . » 277
Sua espressione mediante le somme delle potenze simili delle radici . . . . » 279
Massimo comun divisore di due funzioni intere di una variabile . . . . » 284
Regola per trovarlo ed esempi . . . . » 286
Massimo comun divisore tra una funzione e la sua prima derivata . . . . » 289
Equazioni dotate di radici multiple; regola per abbassarne il grado . . . . » 289

Capitolo XIII.

Equazioni intere a coefficienti reali.

Radici complesse coniugate . . . . » 294

Scomposizione di una funzione intera a coefficienti reali in fattori lineari e di secondo grado . . . . Pag. 298
Equazioni intere a coefficienti razionali:
ricerca delle radici intere; . . . . » 299
ricerca delle radici fratte; . . . . » 304
Limiti superiori e inferiori delle radici reali . . » 312
Regola di Newton . . . . » 314
Sul numero delle radici reali che cadono in un dato intervallo . . . . » 316
Teorema: se $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 0$, tra α e β cade un numero dispari di radici, etc . . . . » 316
Separazione delle radici reali; regola di Waring-Lagrange-Cauchy . . . . » 319
Esempi.

Capitolo XIV.

Eliminazione.

Risultante di due equazioni intere ad un'incognita. . . . . » 330
Metodo di Sylvester . . . . » 331
Le radici comuni a due equazioni $f(z)=0$ e $g(z)=0$ si ottengono eguagliando a zero il massimo comun divisore di $f(z)$ e $g(z)$. » 335

Discriminante di un'equazione calcolato come risultante della equazione e della sua prima derivata . . . . Pag 337
Sistemi di due equazioni intere a due incognite . . . . » 338
Risoluzione di un'equazione intera a coefficienti complessi . . . . » 342

Capitolo XV.

Decomposizione delle frazioni razionali. » 344

Capitolo XVI

Prime applicazioni del calcolo differenziale.

§. 1. Forme indeterminate.

Quando è data una funzione $f(x)$ continua in un certo intervallo e si fa tendere x ad un punto a dell'intervallo, ove $f(x)$ è continua, è noto che (p. 106) si ha $\lim\limits_{x=a} f(x) = f(a)$, cioè il limite di $f(x)$ per $x=a$ eguaglia il valore di $f(x)$ per $x=a$. Per calcolare un tal limite non è dunque necessario ricorrere ad artifizî speciali. Così per es. $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Qualche volta però si deve cercare il lim. di una funzione continua in un punto a, dove la funzione o non è continua o non è definita, mentre però in tutti i punti di un intorno del punto a (eccetto il punto a stesso) la $f(x)$ è continua e definita.

Es. Abbiasi da trovare il lim. per $x=0$ della funzione $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ che non è definita per $x=0$, perchè posto nella funzione data lo zero al posto di x, si ottiene l'espressione indeterminata $\frac{0}{0}$ che non ha alcun significato: noi invece abbiamo dimostrato che $\lim\limits_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ esiste ed uguaglia 1.

Si abbia il quoziente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ in cui tanto $f(x)$ che $\varphi(x)$ sono funzioni continue e si voglia trovare il limite per $x=a$ di quel quoziente, supponendo che sia $\varphi(x) \neq 0$ per tutti i valori di x diversi da a e che sia $\varphi(a)=0$; cioè supponendo che il quoziente dato sia funzione continua della x in ogni segmento, che non comprende il punto a.

Distinguiamo due casi:

1° La funzione $f(x)$ per $x=a$ tenda ad un certo lim. M diverso da zero, cioè

$$\lim_{x=a} f(x)=f(a)=M\neq 0;$$

allora per $x=a$ il numeratore del quoziente dato tende ad M, il denominatore tende a zero, quindi $\lim_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty$.

2° Il numeratore $f(x)$ tenda esso pure a zero per $x=a$, cioè sia $f(a)=0$. Il lim. del quoziente dato per ogni altro valore di x diverso da a, si ottiene evidentemente ponendo al posto di x il suo valore dato; se poniamo invece a al posto di x abbiamo una espressione della forma indeterminato $\frac{0}{0}$. Per trovare il limite in questo caso, bisogna ricorrere ad un metodo offerto dal teorema di Cauchy. Se $f(a)$ e $\varphi(a)$ sono entrambi uguali a zero si può porre:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f'(x')}{\varphi'(x')}$$

in cui x' è un punto che non conosciamo precisamente, ma che sappiamo essere interno all'intervallo (a,x). Quando x tende ad a, anche x' tende ad a evidentemente; ora se per es. il lim. del quoziente $\frac{f'(x')}{\varphi'(x')}$ per $x'=a$ esiste ed uguaglia A, allora anche il lim. della funzione $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ (la quale funzione per l'uguaglianza precedente uguaglia $\frac{f'(x')}{\varphi'(x')}$), esiste è finito ed uguaglia A.

Si potrà così enunciare la *Regola di de l'Hospital*.

Se si ha il quoziente di due funzioni continue, derivabili che si annullano entrambe per $x=a$ e di cui la funzione denominatore e la sua derivata non si an-

PAGINE MANCANTI: da 383 a 390

il valore di una funzione in un punto, cui corrisponde un massimo, sia uguale od anche minore del valore che ha in un punto cui corrisponde un minimo e ciò perchè: il valore massimo o minimo di una funzione in un certo punto dipende dal valore della funzione in quel punto in relazione coi valori che essa ha nei soli punti appartenenti ad un certo intorno di esso e non in relazione coi valori della funzione negli altri punti dell'intervallo. Così per es. nel caso della figura il valore della funzione in A', cui corrisponde un minimo, è maggiore del valore che la funzione ha nel punto D, cui corrisponde un massimo.

Si abbia ora una $f(x)$ definita in un certo intervallo, e sia a un punto interno a questo intervallo; supponiamo che le successive derivate di $f(x)$ calcolate nel punto a non siano tutte nulle; nel caso fossero tutte nulle saremmo in presenza di funzioni speciali che noi escludiamo a priori dalle nostre considerazioni.

Poniamo sia $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$. Poniamo che questa derivata n^{ma} sia una funzione continua: allora, se in a la $f^{(n)}(x) \neq 0$ ha un certo segno, si può fissare un intorno del punto a $(a-K, a+K)$ tale che in questo la funzione $f^{(n)}(x)$ sia pure diversa da zero ed abbia lo stesso segno di $f^{(n)}(a)$. Si consideri un punto $a+h$, dove $(h) \leq K$ interno all'intervallo $(a-k, a+K)$ in cui la $f^{(n)}(x)$ ha il segno di $f^{(n)}(a)$. Applicando la formola di Taylor, si ha:
$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{\underline{|2}} f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{\underline{|n-1}} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{\underline{|n}} f^{(n)}(a+\theta h).$$

Nel nostro caso questa formola si riduce a

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^n}{\underline{|n}}f^{(n)}(a+\theta h) \text{ dove } (0<\theta<1).$$

Ora distinguere<ins></ins>mo i 4 casi:

secondo che n è pari ed $f^{(n)}(a)$ è $\begin{cases}\text{positivo (1° caso)}\\ \text{negativo (2° caso).}\end{cases}$

secondo che n è dispari ed $f^{(n)}(a)$ è $\begin{cases}\text{positivo (3° caso)}\\ \text{negativo (4° caso)}\end{cases}$

Osserviamo che il punto $a+\theta h$ è interno all'intervallo $(a-K, a+K)$ quindi $f^{(n)}(a+\theta h)$ ha il segno di $f^{(n)}(a)$, quindi il segno della differenza $f(a+h)-f(a)$ uguaglia il segno del prodotto $\frac{h^n}{\underline{|n}}f^{(n)}(a)$ per l'ultima uguaglianza.

1° Caso: Il numero n è pari ed $f^{(n)}(a)$ è positivo. Il denominatore $\underline{|n}$ è positivo, il fattore $f^{(n)}(a)$ è positivo, il fattore h^n, essendo n pari, è sempre positivo, il prodotto considerato è dunque positivo, perciò sarà anche

$$f(a+h)-f(a)>0.$$

2° Caso: n è pari, $f^{(n)}(a)$ è negativo.

Il denominatore $\underline{|n}$ è positivo,

il fattore $f^{(n)}(a)$ è negativo,

il fattore h^n è positivo, quindi nel prodotto dato c'è un solo fattore negativo ed il prodotto stesso sarà negativo. Sarà perciò:

$$f(a+h)-f(a)<0.$$

3° Caso: n è dispari, $f^{(n)}(a)$ è positivo.

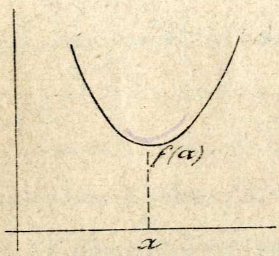
Il denominatore $\underline{|n}$ è positivo, il fattore $f^{(n)}(a)$ è positivo, il fattore h^n è una potenza di h con esponente dispari, perciò ha il segno di h. Tutto il prodotto ha il segno di h, perciò anche $f(a+h)-f(a)$ ha il segno di h.

4° Caso: n dispari, $f^{(n)}(a)$ è negativo. Il denominatore $\underline{|n}$ è positivo, il fattore $f^{(n)}(a)$ è negativo, h^n ha lo stesso segno di h, quindi tutto il prodotto avrà segno contrario a quello di h, perciò anche $f(a+h)-f(a)$ ha segno contrario a quello di h.

1° Caso. Si è trovato

$$f(a+h)-f(a)>0.$$

Ciò vuol dire che $f(a+h)>f(a)$ cioè che i valori che la funzione assume in punti abbastanza vicini al punto a sono maggiori del valore che la funzione ha nel punto a.

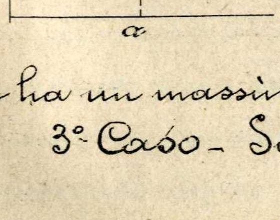


In questo caso nel punto a la funzione ha un *minimo*.

2° Caso - Si è trovato

$$f(a+h)-f(a)<0,$$

cioè $f(a+h)<f(a)$ il che vuol dire che i valori della funzione in punti abbastanza vicini ad a sono più piccoli del valore che la funzione ha nel punto a.

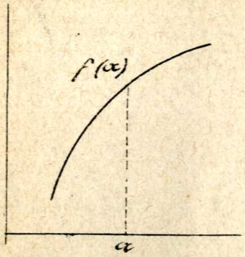


Ma per definizione ciò vuol dire che nel punto a quella funzione ha un massimo.

3° Caso - Si è trovato che

$$f(a+h)-f(a)$$

ha il medesimo segno di h, cioè che quella differenza è positiva se h è positiva, è negativa se h è negativa. Se h è positiva, il punto h è a destra di a, ed essendo allora la differenza $f(a+h)-f(a)$ positiva, vuol dire che i valori che la funzione assume in punti a destra di a e abbastanza vicini ad a, sono più grandi del valore che la funzione ha nel punto a. Se h è negativo, $f(a+h)-f(a)$ è negativo, e ciò vuol dire che i valori che la funzione assume in punti a sinistra di a e abbastanza vicini ad a, sono più piccoli dei valori che la funzione ha nel punto a. Si dice allora, come è noto, che la funzione nel punto a è *crescente*.



4° Caso – Per questo caso si vede (analogamente al caso precedente) che la funzione nel punto a è *decrescente*.

Riassumendo: Se la funzione $f(x)$ nel punto a possiede tutte le derivate che ci possono occorrere, finite e continue, allora se la prima derivata (nel punto a) diversa da 0 è di ordine pari, la funzione data ha un massimo o un minimo in quel punto a; ha un minimo se la prima derivata diversa da 0 è positiva, ha un massimo se la prima derivata diversa da 0 è negativa; se la prima derivata diversa da 0 è di ordine dispari, la funzione data è crescente o decrescente in quel punto a: è crescente se quella prima derivata diversa da 0 è positiva, è decrescente se quella prima derivata diversa da 0 è negativa.

Da ciò risulta evidentemente che affinchè una funzione possa ammettere un massimo o un minimo occorre anzitutto che la sua prima derivata sia nulla, perchè, se questa derivata fosse diversa da 0, e poichè il suo ordine 1 è un numero dispari, la funzione sarebbe in a crescente o decrescente.

Es. Proponiamoci il problema di trovare il massimo e il minimo della somma di due numeri di cui è noto il prodotto.

Sia
$$xy = 1;$$
avremo
$$y = \frac{1}{x}$$
per cui
$$x + y = x + \frac{1}{x}.$$

Perchè una funzione ammetta un massimo o un minimo, la sua prima derivata deve essere nulla. La derivata prima di $x + \frac{1}{x}$ è $1 - \frac{1}{x^2}$, deve dunque essere
$$1 - \frac{1}{x^2} = 0$$
da cui
$$x^2 = 1$$
onde
$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$$

La derivata seconda della funzione $x + \frac{1}{x}$ è $\frac{2}{x^3}$. Per $x = 1$ questa derivata è eguale a 2, perciò essendo d'ordine pari (2) e positiva la prima derivata diversa da zero, la funzione data per $x = 1$ ammette un minimo che è 2. Per $x = -1$ la seconda derivata della funzione $x + \frac{1}{x}$ diventa -2; essendo dunque la prima derivata diversa da zero, di ordine pari e negativa, per $x = -1$ la funzione data ammette un massimo che è -2.

La somma $x + y$ ha dunque un solo massimo che è -2 (per $x = 1$) e un solo minimo che è 2 (per $x=-1$). Questo risultato può sembrare a prima vista paradossale, perchè il massimo è minore del minimo. Ciò si spiega dal fatto che la funzione $x+\frac{1}{x}$ non è continua in tutto l'intervallo da -1 a 1, essendovi in questo intervallo il punto 0 in cui la funzione non è definita. Rigorosamente si deve dunque dire che la funzione data si sdoppia in due altre: una definita a destra e l'altra definita a sinistra del punto $x=0$; la funzione a destra del punto $x=0$ ammette un solo minimo che è 2 nel punto $x=1$, quella a sinistra del punto $x=0$ ammette un solo valore massimo che è -2 nel punto $x=-1$.

Data una funzione $f(x)$, per vedere come si comporti la funzione in un punto a interno all'intervallo, ove essa è definita, si comincia ad esaminare il valore della prima derivata della funzione $f(x)$ in quel punto a. Se questa derivata è diversa da 0 allora secondo che essa derivata è maggiore di 0 o minore di 0, la funzione in quel punto a è corrispondentemente crescente o decrescente. Se la derivata prima della funzione data nel punto a è uguale a 0, allora bisogna esaminare la seconda derivata in quel punto a. Se questa è diversa da 0, allora se è maggiore di 0 la funzione ha un minimo in quel punto a, se è minore di 0 la funzione ha un massimo nel punto a. Se anche la seconda derivata è 0, allora bisogna esaminare la terza derivata ecc.

Sfuggono a questo studio le funzioni che sono nulle insieme a tutte le loro derivate nel punto a.

§. 3 - Punto comune a due curve.

Siano $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ due curve; le funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$ siano, nell'intervallo, he consideriamo, finite e continue insieme a tutte le derivate di cui avremo bisogno; e per $x = a$ sia

$$f(a) = \varphi(a);\ f'(a) = \varphi'(a); \ldots\ldots$$
$$f^{(m-1)}(a) = \varphi^{(m-1)}(a);\ f^{(m)}(a) \neq \varphi^{(m)}(a).$$

La funzione
$F(x) = f(x) - \varphi(x)$ sarà per $x = a$ nulla; e la prima delle sue derivate differenti da zero sarà la derivata di ordine m.

Se m è un numero dispari, allora $F(x)$ sarà crescente o decrescente nel punto $x = a$; e poichè per $x = a$ si ha $F(x) = 0$, se la funzione $F(x) = f(x) - \varphi(x)$ è positiva a sinistra del punto $x = a$, essa sarà negativa a destra del punto $x = a$; se essa è negativa a sinistra del punto $x = a$, sarà positiva alla sua destra. In altre parole $f(x) - \varphi(x)$ cambia di segno, quando x (p. es. crescendo) passa per il valore $x = a$. Quindi le curve $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ si attraversano nel punto a.

Se m è un numero pari, allora $F(x)$ ha per $x = a$ un massimo, se $f^{(m)}(a) < \varphi^{(m)}(a)$, un minimo, se $f^{(m)}(a) > \varphi^{(m)}(a)$. Poichè $F(x)$ si annulla per $x = a$, essa nel primo caso sarà negativa in un intorno del punto $x = a$, nel secondo caso sarà positiva in un tal intorno.

Quindi le curve $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, pure avendo comune un punto di ascissa $x = a$ non si attraversano in tale punto; la differenza $f(x)-\varphi(x)$ in un intorno di $x=a$ avrà il segno di $f^{(m)}(a)-\varphi^{(m)}(a)$.

§. 4. Concavità convessità flessi.

Supponiamo che

$$\varphi(x)=f'(a)x+[f(a)-af'(a)] = f(a)+f'(a)(x-$$

La linea $y=\varphi(x)$ sarà evidentemente la retta tangente alla curva $y=f(x)$ nel punto a. E sarà:

$$f(a)=\varphi(a) \quad ; \quad f'(a)=\varphi'(a).$$

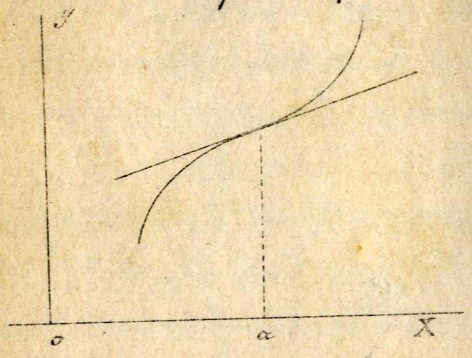
Tutte le derivate di $\varphi(x)$ di ordine superiore al primo saranno nulle per $x=a$. Indichiamo con $f^{(m)}(a)$ il primo dei numeri

$$f''(a)\,,\,f'''(a)\,,\,\ldots\ldots\ldots$$

diverso da zero nel punto a. Sarà

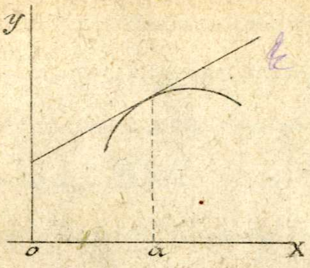
$$f(a)=\varphi(a)\,;\,f'(a)=\varphi'(a);\,\ldots\ldots;f^{(m-1)}(a)=\varphi^{(m-1)}(a);f^{(m)}(a)\neq\varphi^{(m)}(a).$$

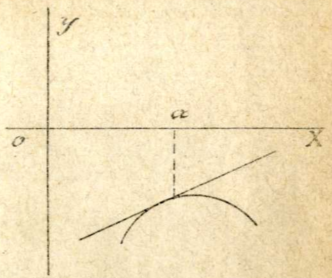
1° Caso) m dispari. In tal caso la curva $y=f(x)$ interseca la sua tangente $y=\varphi(x)$ nel punto a. Si suol dire che $x=a$ è un flesso per la curva $y=f(x)$.



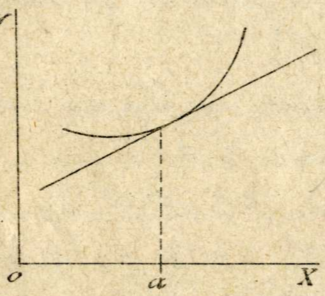
2° Caso) m pari. Allora la curva $y=f(x)$ non interseca la sua tangente $y=\varphi(x)$ nel punto $x=a$. Se $f^{(m)}(a)-\varphi^{(m)}(a)=f^{(m)}(a)<0$, allora $f(x)-\varphi(x)<0$ in un intorno del punto $x=a$. La curva $y=f(x)$ e la sua tangente si comporteranno quindi nel modo segnato nelle figure qui accanto ove sono considerati distintamente i due sottocasi $f(a)>0$, $f(a)<0$.

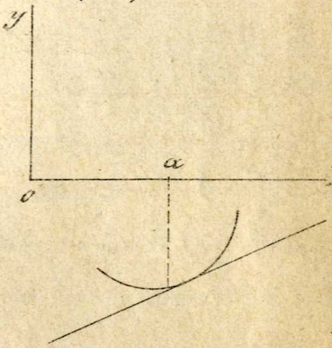
Se invece $f^{(m)}(a)>0$, la curva $y=f(x)$ e la sua tangente





si comportano nel modo qui accanto rappresentato, perchè in un intorno del punto $x=a$ è $f(x)-\varphi(x)>0$.



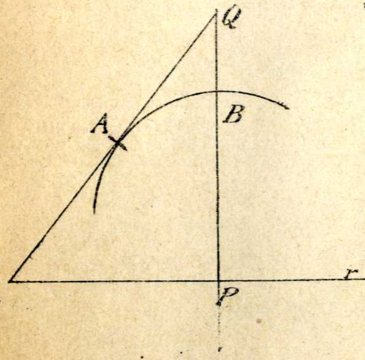


Nel primo e nel quarto caso, nei casi cioè in cui $f(a)$ ed $f^{(m)}(a)$ hanno segno opposto, ossia $f(a)f^{(m)}(a)<0$, la curva $y=f(x)$ si dice volgere per $x=a$ la concavità all'asse delle x; in un punto a ove $f(a)f^{(m)}(a)>0$, la curva $y=f(x)$ si dice volgere per $x=a$ la convessità all'asse delle x.

In particolare:

Se $f(a)f''(a)<0$, la curva $y=f(x)$ volge nel punto $x=a$ la concavità all'asse delle x; essa volge invece la convessità se $f(a)f''(a)>0$. Se per $x=a$ è $f''(a)=0$ e $f'''(a)\neq 0$, allora la curva $y=f(x)$ ha un flesso per $x=a$.

Osservazione - Le precedenti locuzioni vengono giustificate da ciò che una curva C si dice presentare in un punto A la sua concavità (la sua convessità) a una



retta r, se esiste un pezzetto di C contenente A all'interno, che soddisfa alla seguente condizione: Se B è un qualsiasi punto di questo pezzetto, se P è il piede della perpendicolare calata da B su r, e Q è il punto, ove questa perpendicolare incontra la retta tangente a C in A, allora è in valore assoluto $|PQ| > |PB|$, ($|PQ| < |PB|$).

Se dunque la retta r coincide con l'asse delle x (e il nostro pezzetto di curva cade tutto da una stessa parte dell'asse delle x), allora PQ e PB sono in valore assoluto e in segno le ordinate di Q e di B. Se dunque A cade al disopra dell'asse delle x, e il pezzetto di curva considerato è abbastanza piccolo, i segmenti PQ, PB sono positivi, e si ha quindi:

$$|PQ| > |PB| \quad \text{se } PQ > PB \text{ ossia } PQ - PB > 0$$
$$|PQ| < |PB| \quad \text{se} \qquad PQ - PB < 0.$$

Se invece A cade al disotto dell'asse delle x, allora $|PQ| = -PQ$, $|PB| = -PB$, e si ha $|PQ| > |PB|$, se $PQ - PB < 0$, e $|PQ| < |PB|$, se $PQ - PB > 0$.

Vale il teorema:

Se AB è un arco di curva $y = \varphi(x)$, e se $\varphi''(x)$ è finita, non è mai nulla e conserva lo stesso segno nell'arco considerato, allora l'arco AB è tutto interno al triangolo rettilineo ADB formato dalla corda AB e dalle tangenti in A e in B.