

Capitolo III

Tangenti e normali di una curva

§. 1.^a Curva riferita ad assi cartesiani ortogonali

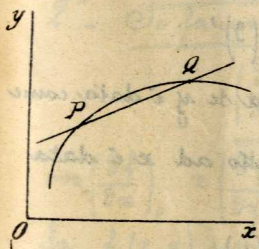
Una curva riferita a due assi cartesiani x, y si può rappresentare in uno dei seguenti modi:

1.^a Esprimendo una delle coordinate, (ad es. la y) in funzione dell'altra (x): $y = y(x)$.

2.^a Osservando una relazione $f(x, y) = 0$ tra le coordinate x e y , ossia un'equazione tra x e y .

3.^a Esprimendo x e y in funzione di un parametro t : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

Tangente



La tangente alla curva in un suo punto generico $P(x_0, y_0)$ è la posizione limite della congiungente il punto P ad un altro punto $Q(x_1, y_1)$ quando Q , muovendosi sulla curva, tende a coincidere con P .

Supponiamo data la curva mediante la rappresentazione parametrica $x = x(t)$, $y = y(t)$ ed il punto P corrisponda a un certo valore t_0 del parametro t . Le coordinate di P saranno $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$; e quelli di Q :

$x_1 = x(t_0 + \Delta t)$, $y_1 = y(t_0 + \Delta t)$; l'equazione della retta PQ sarà

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}, \text{ ossia, dividendo per } \Delta t \text{ i denominatori di ambo i membri, } \frac{x-x_0}{\Delta t} = \frac{y-y_0}{\Delta t}$$

Quando l'incremento Δt tende a 0 il punto Q tende al punto P. La tangente alla curva nel punto P sarà dunque rappresentata dall'equazione

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x-x_0}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y-y_0}{\Delta t} \quad (1)$$

ma il $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x-x_0}{\Delta t}$ ossia il $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$ è la derivata x'_0 di $x(t)$ nel punto P (t_0) ed analogamente $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y-y_0}{\Delta t} = y'_0$;

quindi la (1) può scriversi $\frac{x-x_0}{x'_0} = \frac{y-y_0}{y'_0} \quad (2)$

Da questa si ricava $\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{y'_0}{x'_0} = \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 = \left(\frac{dy}{dt} \right)_0 : \left(\frac{dx}{dt} \right)_0 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 \cdot \left(\frac{dt}{dx} \right)_0 =$

$= \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 \cdot (3)$ la quale ci dice che il coefficiente angolare della tangente è uguale alla derivata prima di y rispetto ad x . Essa si può anche scrivere

$$y - y_0 = y'_0 (x - x_0) \quad (3)'$$

Se la curva è rappresentata dalla $f(x, y) = 0$, ossia se y è data come funzione implicita della x , la derivata di y rispetto ad x è data dalla

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad (4)$$

ove $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono rispettivamente le derivate parziali della $f(x, y)$ rispetto ad x e ad y : supponiamo infatti d'aver ricavato dalla $f(x, y) = 0$ x e y come funzioni di un certo parametro t : $x = x(t)$, $y = y(t)$. Per ogni valore di t sarà identicamente

$$f[x(t), y(t)] = 0$$

quindi la derivata della $f[x(t), y(t)]$ rispetto a t sarà pure nulla per ogni valore di t , ossia

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0$$

da cui $\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = - \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$ cioè

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} \quad (4)$$

Allora l'equazione della tangente assumerà la forma

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 : \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0$$

ossia $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 (y - y_0) = 0 \quad (5)$

Riepilogando : 1° Se la curva è data mediante la $y = y(x)$ l'equazione della tangente nel punto (x_0, y_0) è :

$$y - y_0 = y'_0 (x - x_0) \quad (I)$$

ove y'_0 è la derivata della $f(x)$ presa nel punto di ascissa x_0 .

2° Se la curva è data mediante la $f(x, y) = 0$, l'equazione è

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 (y - y_0) = 0 \quad (II)$$

ove $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0$ e $\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0$ indicano rispettivamente le derivate parziali della $f(x, y)$ rispetto ad x e y prese nel punto (x_0, y_0) .

3° Se la curva è rappresentata dalla $x = x(t), y = y(t)$ l'equazione della tangente nel punto corrispondente al valore t_0 del parametro è

$$\frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0} \quad (III)$$

ove x' e y' sono le derivate rispetto a t delle funzioni $x(t)$ e $y(t)$ prese nel punto considerato.

_____ Normale _____

La normale ad una curva in un punto P è la perpendicolare alla tangente in quel punto.

Sappiamo che se due rette sono perpendicolari, il coefficiente angolare dell'una è il reciproco cambiato di segno del coefficiente angolare dell'altra, quindi supposta la curva rappresentata dall'equazione $y = f(x)$, il coefficiente angolare della normale sarà $-\frac{1}{y'}$, dove y' è il coefficiente angolare della tangente. L'equazione della normale nel punto (x_0, y_0) assumerà la forma

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = - \frac{1}{y'_0} \quad (IV)$$

Se la curva è definita mediante l'equazione $f(x, y) = 0$, si avrà come equazione della normale

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 (y - y_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 (x - x_0) = 0 \quad (V)$$

Se la curva è data mediante l'equazioni parametriche $x = x(t)$, $y = y(t)$ si ha

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = - \frac{x - x_0}{y'_0} \quad (VI)$$

Esempio - Tangente e normale ad una ellisse.

Supposta l'ellisse riferita agli assi, ed indicate con a e b le lunghezze dei semia assi, la sua equazione sarà:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (1)$$

L'equazione della tangente nel punto (x_0, y_0) all'ellisse in un suo punto generico $P(x_0, y_0)$ si può ottenere risolvendo la (I) rispetto ad y :
 $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ derivando il secondo membro rispetto ad x , ed applicando la (I).

2° - Applicando direttamente la (II) si ha come equazione della tangente: $\frac{2x_0}{a^2} (x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2} (y - y_0) = 0$ ossia dividendo per 2 e sviluppando $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 0$ da cui
 $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$ e poichè $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, in quanto il punto $P(x_0, y_0)$ appartiene all'ellisse:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

3° - Se l'ellisse è rappresentata mediante le equazioni parametriche

$x = a \sin t$ $y = b \cos t$, applicando la (III) otteniamo:

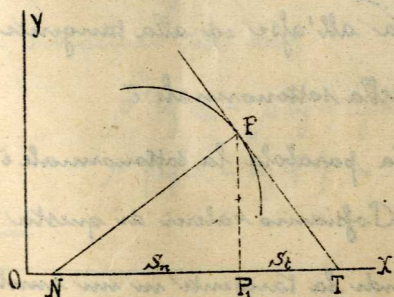
$$\frac{x - a \sin t_0}{a \cos t_0} = \frac{y - b \cos t_0}{-b \sin t_0} \text{ ossia } -bx \sin t_0 + ab \sin^2 t_0 =$$

$$= ab \cos^2 t_0 \text{ ossia } bx \sin t_0 + ay \cos t_0 = ab (\cos^2 t_0 + \sin^2 t_0) = ab$$

quindi $\frac{x \sin t_0}{a} + \frac{y \cos t_0}{b} = 1$ ma $\sin t_0 = \frac{x_0}{a}$, $\cos t_0 = \frac{y_0}{b}$
 quindi l'equazione diventa

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

— Sottotangente e sottonormale —



Supponiamo di aver condotto la tangente e la normale ad una curva in un suo punto generico P . Indichiamo con P_1 la proiezione ortogonale di P sull'asse delle x , con T

ed N rispettivamente le intersezioni della tangente e della normale col medesimo asse. La sottotangente e la sottonormale sono rispettivamente rappresentate, in valore assoluto, dalle lunghezze dei segmenti $P_1 T = S_t$ e $P_1 N = S_n$.

Dai triangoli rettangoli TPP_1 , NPP_1 si ricava, essendo $\widehat{TPP_1} = \widehat{NPP_1} = \varphi$, $S_t = \frac{y}{\tan \varphi}$; $S_n = y \tan \varphi$

ossia
$$S_t = \frac{y}{y'} \quad S_n = y y' \quad (VII)$$

ove $y' = f'(x)$ se la curva è rappresentata dall'equazione $y = f(x)$;
 $y' = - \frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y}$ se la curva è data dalla $f(x, y) = 0$; $y' = \frac{dy/dt}{dx/dt}$

se la curva è rappresentata parametricamente mediante le
 $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Converremo di assumere come segno di S_t ed S_n il segno di $\frac{y}{y'}$ che è uguale a quello di $y y'$. Ne segue che S_t , S_n saranno positive o negative secondo che P_1 è alla destra o alla sinistra di T , (supposto l'osservatore in T rivolto verso il semipiano delle y positive)

Notiamo infine la relazione:

$$S_t S_n = y^2$$

Esempio 1° - Parabola riferita all'asse ed alla tangente nel vertice $y^2 = 2px$. L'espressione della sottonormale è

$S_n = y y' = y \cdot \frac{p}{y} = p$ ossia: nella parabola la sottonormale è costante ed uguale al semiparametro. Possiamo valerci di questa

proprietà per costruire la normale e quindi la tangente in un punto

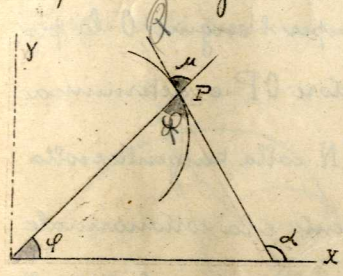
$\sin = 0.54$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
 $x = \rho \cos \varphi$
 $y = \rho \sin \varphi$
 $\rho = \frac{x}{\cos \varphi} = \frac{y}{\sin \varphi}$

della parabola.

§ 2°) - Curva riferita a coordinate polari.

Tangente - Rappresentata in coordinate polari una curva, proponiamoci di determinare gli angoli (tra loro supplementari) che la tangente ad essa in un suo punto generico P forma



col raggioettore passante per P. - Se α è l'angolo che la tangente in P forma con l'asse polare si ha (indicando con μ uno conveniente di detti angoli) : $\alpha = \varphi + \mu$

ossia $\mu = \alpha - \varphi$. Riferiamo i punti della curva a coordinate cartesiane assumendo come assi x, y rispettivamente l'asse polare e la perpendicolare a questo nel polo, ed applicando le note formule:

$x = \rho \cos \varphi$
 $y = \rho \sin \varphi$
con ρ e φ funzione di t

In coordinate cartesiane si ha:

$\text{tg } \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}$

ora, essendo ρ una funzione (esplicita ed implicita) di φ , anche y ed x si potranno riguardare come funzioni di φ ; quindi

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} : \frac{dx}{d\varphi} = \frac{\rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi}{\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi} = \text{tg } \alpha$

da cui:

$\rho' \text{tg } \alpha \cos \varphi - \rho \sin \varphi \text{tg } \alpha = \rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi$

ossia, dividendo per $\cos \varphi$:

$\rho' \text{tg } \alpha - \rho \text{tg } \varphi \text{tg } \alpha = \rho' \text{tg } \varphi + \rho$
 $\rho' (\text{tg } \alpha - \text{tg } \varphi) = \rho (1 + \text{tg } \alpha \text{tg } \varphi)$

da cui

$\text{tg } \alpha = \frac{\text{tg } \varphi}{1 + \text{tg } \alpha \text{tg } \varphi}$

ovv $\mu = \alpha - \text{tg } \alpha \text{tg } \varphi$

$$\alpha - \varphi = \mu$$

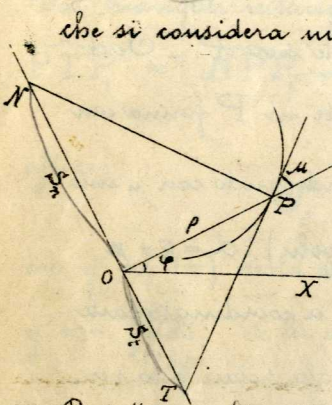
ossia

$$\rho' = \rho \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi} = \rho \frac{1}{\operatorname{tg} (\alpha - \varphi)} = \frac{\rho}{\operatorname{tg} \mu}$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\rho}{\rho'}$$

(1 punto = 100 centesimi)
(VIII)

Sottotangente e sottonormale polari Dettato sopra la curva



che si considera un punto P, conduciamo per l'origine O la perpendicolare al raggio vettore OP e determiniamo le intersezioni T, N colla tangente e colla normale. La sottotangente e la sottonormale sono rispettivamente date in valore assoluto alla

lunghezza dei segmenti $OT = S_t$ $ON = S_n$

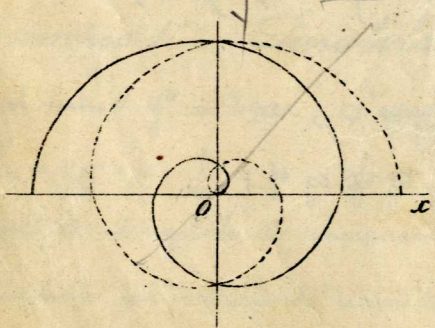
Dai triangoli rettangoli OPT, OPN si ricava in valore assoluto

$$S_t = \rho \operatorname{tg} \mu = \frac{\rho^2}{\rho'} \quad S_n = \rho \cotg \mu = \rho' \left(\frac{\rho}{\operatorname{tg} \mu} \right) = \rho' \cotg \mu$$

Assumeremo come segno della sottotangente e della sottonormale il segno di ρ' (coincidente con quella di $\frac{\rho^2}{\rho'}$). $S_t S_n = \rho^2$ cioè hanno = segno

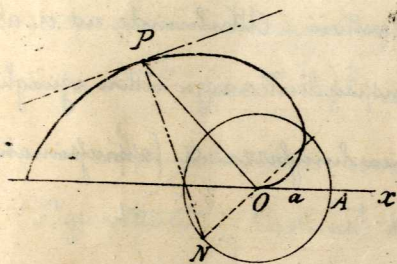
Applicazioni

1) Spirale di Archimede — La sua equazione in coordinate polari è $\rho = a \varphi$. Agli vettori proporzionali all'angolo



Assegnato un segmento arbitrario a e fissato un sistema (O, r) di coordinate polari si può facilmente costruire per punti la curva costruendone prima direttamente il punto corrispondente

ad un dato argomento (diverso da 0) e ricorrendo poi alla proporzionalità diretta intercedente fra le anomalie ed i raggi vettoriali dei punti della curva. Attribuen-do ad es. all'anomalia il valore π la lunghezza del corrispondente raggio vettore si eguaglierà la lunghezza della semicirconferenza di raggio ρ e si potrà determinare con



approssimazione assumendo ad es. co-

me valore di π il rapporto $\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}$

La curva risulta simmetrica rispetto alla perpendicolare condotta nel polo all'asse polare. (*) Per costruire la

tangente alla curva in un suo punto qualsiasi P osserviamo che la sottornormale $\rho_n = \rho'$ è costante ed uguale ad a , quindi, tracciato il cerchio di centro O e raggio a , la congiungente il punto P con una conveniente (N) delle intersezioni del cerchio con la perpendicolare al raggio vettore OP, è la normale alla curva. La perpendicolare a questa nel punto P è la tangente cercata.

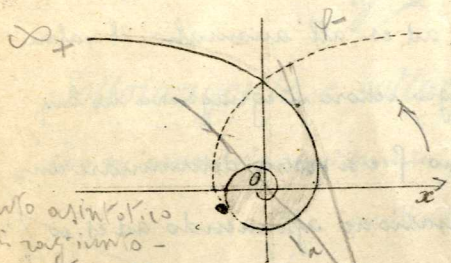
2) Spirale iperbolica. — $\rho = \frac{a}{\varphi}$; $\varphi = a$

(*) In generale per una curva riferita a coordinate polari ρ, φ , se cambia il segno di ρ ~~ma~~ non il valore assoluto col cambiar del segno di φ la curva ammette come asse di simmetria ortogonale la perpendicolare all'asse polare condotta nel polo; se invece ρ non cambia né in valore assoluto né nel segno, la curva ammette come asse di simmetria ortogonale l'asse polare.

$\varphi = \pi \quad \rho = \frac{2}{\pi} \pi C = a$

60 -
 0 raggi di un'inviluppo. I raggi: $\frac{a}{\rho}$ - $\frac{1}{\rho}$ un raggio con un'inviluppo in a (inviluppo) - $\frac{1}{\rho}$ un raggio con un'inviluppo in a (inviluppo).
 Assegnato un segmento arbitrario A e fissato un sistema (ρ, φ) di coordi.

nate polari, si può facilmente costruire per punto la curva costruendone



prima il punto corrispondente ad una data anomalia, e poscia ricorrendo alla proprietà

inversa, intercedente fra le anomalie e i raggi vettori. Attribuito ad es. all'a-

nomalia il valore π , la lunghezza del corrispondente raggio vettore eguagliare

il raggio della semicirconferenza avente una lunghezza a (approssimativa-
 mente $\frac{7}{22}$ di a).

Al tendere di φ a zero per valori positivi o negativi, ρ tende rispettiva-

mente a $+\infty$ ed a $-\infty$, e col crescere di φ ρ diminuisce indefinitamen-

te in valore assoluto. La curva si avvolge in infinite spire attorno al pun-

to 0 (punto asintotico) senza mai passarvi. La curva ha ancora, come

asse di simmetria ortogonale la perpendicolare condotta pel polo all'asse

polare. Osserviamo che $\rho^2 = \frac{a^2}{\varphi^2} = \frac{a^2}{\varphi^2} : \left(-\frac{a}{\varphi^2}\right) = -a$ onde la tan-

gente alla curva in un suo punto qualsiasi si costruisce con procedi-

mento analogo a quello dell'esercizio precedente.

3) Spirale logaritmica - $\rho = a e^{m\varphi}$

Per $\varphi = 0$ si ha $\rho = a$; al tendere di φ a $+\infty$ ρ tende pure (sup-

posto $a > 0$) a $+\infty$; quando φ tende a $-\infty$, ρ tende a 0. La

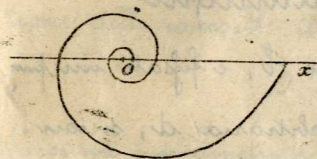
curva si avvolge in ∞ spire attorno ad 0 senza mai passarvi. —

Ci proponiamo ora di costruire, fissato il sistema di coordinate pola-

ri di riferimento, l'arco finito di spirale congiungente due punti P_1

e P_2 corrispondenti a date anomalie φ_1 e φ_2 . Avremo per ∞ (omessa)

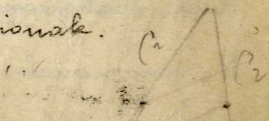
Disponendo dei coefficienti a, m , si può, fissato il sistema di riferimento, O, X , supporre che la curva passi per due punti assegnati P_1, P_2 , fissando anzi le anomalie (fra le ∞ possibili) che conducono ai raggi OP_1, OP_2 . I raggi vettoriali corrispondenti saranno $\rho_1 = ae^{m\varphi_1}$, $\rho_2 = ae^{m\varphi_2}$. All'anomalia $\varphi_3 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ corrisponderà un raggio vettore $\rho_3 = ae^{m\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}} = a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} e^{\frac{m\varphi_1}{2}} e^{\frac{m\varphi_2}{2}} (ae^{m\varphi_1} \cdot ae^{m\varphi_2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\rho_1 \rho_2}$ ossia alla media aritmetica di due anomalie date, corrisponde la media geometrica dei relativi raggi vettoriali. Costruiti due punti $P_1(\rho_1, \varphi_1)$, $P_2(\rho_2, \varphi_2)$ della curva possiamo dunque costruire un terzo $P_3(\rho_3, \varphi_3)$ appartenente ad una determinata delle bisettrici degli angoli costituite dalle rette



OP_1, OP_2 . Analogamente si potranno poi costruire i punti corrispondenti alle asisse $\frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2}$, $\frac{\varphi_3 + \varphi_2}{2}$, ecc. --- dell'arco

P_1, P_2 .

Per ottenere punti della curva non appartenenti all'arco considerato P_1, P_2 si potrà procedere nel seguente modo: indicato con $P_n(\rho_n, \varphi_n)$ uno dei punti dianzi costruiti, (ad es. quello più prossimo a P_2) si costruisca il raggio simmetrico di OP_n rispetto ad OP_2 , relativo cioè all'anomalia $\varphi_2 + (\varphi_2 - \varphi_n) = 2\varphi_2 - \varphi_n$. Il raggio vettore corrispondente a detta anomalia sarà uguale ad $ae^{2\varphi_2 - \varphi_n} = \frac{ae^{2\varphi_2}}{ae^{\varphi_n}} = \frac{\rho_2^2}{\rho_n}$: si potrà quindi facilmente ottenere una costruzione di terza proporzionale.

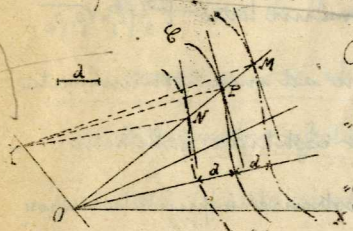


Dalla (VIII) si deduce

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{ae^{m\varphi}}{ame^{m\varphi}} = \frac{1}{m} ; \text{ ossia}$$

Nella spirale logaritmica è costante l'angolo della tangente col raggio settore; in altri termini: La spirale logaritmica taglia sotto angolo costante tutti i raggi settori. Essa è l'unica curva che goda della proprietà di tagliare sotto angolo costante le rette di un fascio; come casi particolari di essa abbiamo il cerchio (quando $m=0$) e la retta (quando il fascio sia improprio).

4) Concoide di una curva qualunque.



Data una linea qualsiasi b , e fissati un punto O ed una lunghezza arbitraria d , si congiunge O con un punto variabile P di b e si

portino sulla OP , a partire da P nei due sensi, due segmenti PM , PN , di lunghezza d . Il luogo dei punti M ed N dicesi concoide della linea b rispetto al punto O .

Se la b ha, in coordinate polari, un'equazione $\rho = f(\varphi)$, l'equazione della concoide sarà

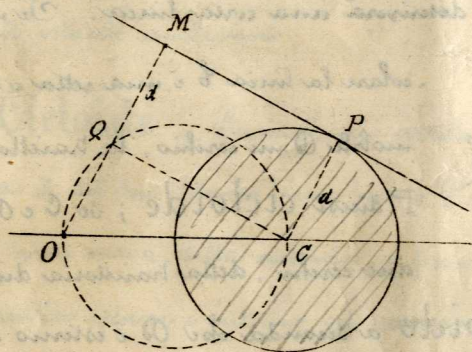
$$\rho = f(\varphi) \pm d.$$

Costruita la tangente alla curva b in un suo punto qualsiasi P , le tangenti nei corrispondenti punti M ed N alla concoide si costruiscono immediatamente osservando che le sottonormali alla curva data ed alla concoide rispettivamente nel punto P e nei punti M , N , sono uguali in quanto che sono date dalle derivate prime del

$$S_n = \rho' = f'(\varphi) \text{ sempre } \neq 0$$

caso presente, la conoide è costruita rispetto ad un punto della circonferenza, essa prende il nome di cardiode propria allungata od accorciata secondo che si ha rispettivamente $d = 2r$, $d < 2r$, $d > 2r$.

La cardiode si può anche ottenere come podaria di un cerchio rispetto ad un punto, ossia come luogo dei piedi delle perpendicolari condotte da questo punto alle tangenti al cerchio.



Sia O il punto fisso e

C il centro del cerchio.

Condurremo la perpendicolare OM alla tangente in un punto P

del cerchio e sia Q il piede della perpendicolare

condotta da C alla OM .

Osserviamo che Q sta sulla circonferenza di diametro OC ; inoltre i punti M, P, Q, O sono vertici di un rettangolo per cui

$QM = PQ = r$ = al raggio r del cerchio dato. Variando P sul cerchio e con esso la tangente, il segmento QM si manterrà costantemente uguale a r e il punto M descriverà una conoide del cerchio di diametro OC rispetto al punto O .

Proponiamoci ora di trovare l'area della porzione di piano racchiusa da una cardiode propria $\rho = 2r (\cos \varphi + 1)$ applicando la nota formula

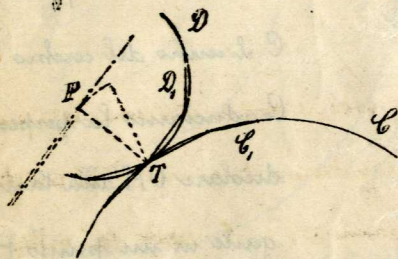
$$\text{Area} = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi ; \quad \text{avremo :}$$

Eserc. An.

Disp. 9

$$\begin{aligned} \text{Area} &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi \rho^2 d\varphi = \int_0^\pi 4 r^2 (\cos \varphi + 1)^2 d\varphi = 4 r^2 \int_0^\pi (\cos^2 \varphi + 2 \cos \varphi + 1) d\varphi \\ &= 4 r^2 \int_0^\pi \cos^2 \varphi d\varphi + 4 r^2 \int_0^\pi d\varphi + 8 r^2 \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi = 2 r^2 \int_0^\pi (1 + \cos 2\varphi) d\varphi + \\ &+ 4 r^2 \int_0^\pi d\varphi + 8 r^2 \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi = 2 \pi r^2 + 4 \pi r^2 = 6 \pi r^2. \end{aligned}$$

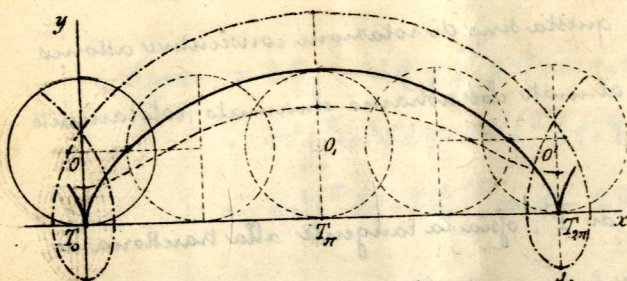
7 - Immaginiamo una linea piana $\mathcal{O}$ che rotoli senza strisciare sopra un'altra linea $\mathcal{C}$ dello stesso piano. Un punto P rigidamente connesso alla linea mobile $\mathcal{O}$ descriverà una certa linea. Se in parti-



colare la linea $\mathcal{C}$ è una retta e la linea mobile $\mathcal{O}$ un cerchio, la traiettoria di P dicesi *cicloide*; se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{O}$ sono due cerchi, detta traiettoria dicesi

epicicloide od *ipocicloide* a seconda che $\mathcal{O}$ è esterno od interno a $\mathcal{C}$. Supponendo invece che la linea mobile $\mathcal{O}$ sia una retta, la curva descritta da un punto di questa retta si dice *evolvente* della linea fissa $\mathcal{C}$. Precisiamo il significato dell'espressione "la linea $\mathcal{O}$ rotola senza strisciare sopra la linea $\mathcal{C}$ ". Consideriamo due spezzate $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{O}_1$ iscritte rispettivamente in $\mathcal{C}$ e $\mathcal{O}$ e riferite fra loro in guisa che i lati dell'una siano eguali ai corrispondenti lati dell'altra. Supponiamo inizialmente che due vertici corrispondenti coincidano e facciamo rotare $\mathcal{O}_1$ attorno a questo vertice comune sino a che due lati corrispondenti di $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{O}_1$ che escono da questo vertice vengano a coincidere; facciamo in seguito rotare nello stesso modo la spezzata $\mathcal{O}_1$ attorno al vertice consecutivo a quello considerato, e così via.

Quando si fanno tendere a zero le lunghezze dei lati delle due spezzate



portiamo approssimativa-

mente sulla x a partire dal

punto di contatto T_0 un

segmento $T_0 T_{2\pi}$ uguale alla

lunghezza dell'intera circonferenza. Il punto $T_{2\pi}$ è la posizione assun-

ta da T_0 dopo un'intera rotazione della circonferenza; e sul raggio

$O'T_{2\pi}$ starà P' nuova posizione assunta da P . Costruiamo analo-

gamente le posizioni assunte da P per una rotazione metà della

precedente ($\varphi = \pi$), poscia le posizioni corrispondenti ai valori $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$\frac{3\pi}{2}$ e così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

lunghezza dell'intera circonferenza. Il punto $T_{2\pi}$ è la posizione assun-

ta da T_0 dopo un'intera rotazione della circonferenza; e sul raggio

$O'T_{2\pi}$ starà P' nuova posizione assunta da P . Costruiamo analo-

gamente le posizioni assunte da P per una rotazione metà della

precedente ($\varphi = \pi$), poscia le posizioni corrispondenti ai valori $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$\frac{3\pi}{2}$ e così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Così via.

Quindi la sottornormale S_n data da $y y'$ risulterà uguale ad $a \sin \varphi$, ossia al segmento compreso fra la proiezione ortogonale di P' sull'asse delle x ed il punto S' (proiezione ortogonale di O' sullo stesso asse).

Calcoliamo l'area delimitata da un arco completo di cicloide propria ($a = r$) e dall'asse x (chiamando arco completo di cicloide propria l'arco compreso fra due successive intersezioni di questa coll'asse x)

$$\text{Area} = \int_0^{2\pi r} y \, dx.$$

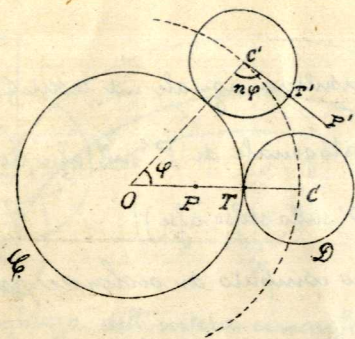
Dalle (1) si ricava $y = r - r \cos \varphi$, $dx = (r - r \cos \varphi) d\varphi$ per cui sostituendo:

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_0^{2\pi} (r - r \cos \varphi)^2 d\varphi = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi - 2r^2 \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi + r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2. \end{aligned}$$

L'area richiesta è quindi tre volte l'area del cerchio generatore.

9 - Epicicloide e ipocicloide - Abbiamo visto che, se un cerchio O rotola senza strisciare su di un altro cerchio C , un punto P rigidamente connesso al cerchio mobile O descrive una linea detta *epicicloide* od *ipocicloide* secondo che O è interno od esterno a C .

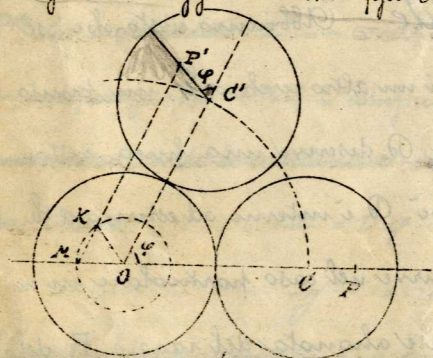
Vediamo come si costruiscono queste curve nel caso particolare in cui il raggio r del cerchio O sia una parte aliquota del raggio R del cerchio C . Sia O il centro di C , e C' quello di O . Il moto di O si può scomporre in una rotazione attorno al centro fisso O ed in una rotazione attorno al punto C' , posizione assunta da C , per effetto



della prima rotazione. Sia T in un certo istante il punto di tangenza dei due cerchi ed immaginiamoci che il punto P sia sul raggio CT. Se n è il rapporto dei raggi

R ed r di C e D , si ha $R = n r$, $2 \pi R = 2 \pi n r$, ossia n esprime pure il rapporto fra le lunghezze delle due circonferenze C e D , quindi due archi di egual lunghezza rispettivamente di C e di D sono compresi da angoli al centro ϕ ed $n \phi$. Se ϕ è l'angolo $C'OC$, l'angolo $OC'T'$ formato dalla retta OC' colla nuova posizione $C'T'$ assunta dal raggio CT sarà $= n \phi$; portando su $C'T'$ un segmento $C'P' = CP$ avremo la nuova posizione P' assunta da P . Dando a ϕ dei convenienti valori potremo così costruire per punti la curva.

10 - Un caso particolare notevole della epicycloide si ha quando sono eguali i raggi del cerchio fisso e del cerchio mobile. Dimostriamo che

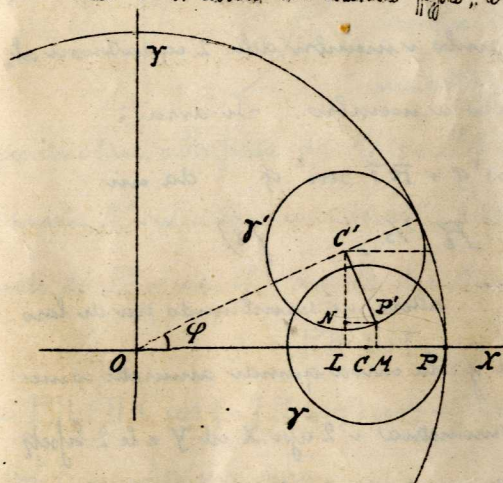


in tal caso si ottengono le tre cardioidi propria, accorciata od allungata a seconda che il punto P appartiene al cerchio mobile oppure è interno od esterno al fisso.

In un certo istante il punto P si trovi sulla congiungente i centri dei due cerchi O, C , e dopo una rotazione ϕ esso si trovi in P' . Tracciamo il cerchio di centro O e raggio CP , il quale tagli in M la retta

OC ; congiungiamo P' con M ed O con l'intersezione K di $P'M$ con il cerchio diametri tracciato. Se rette OC' ed MP' saranno parallele, in quanto i due segmenti OM , $C'P'$ sono eguali ed hanno eguale inclinazione (φ) sulla OC' . Essendo inoltre KOM un triangolo isosceli, si ha $MKO = \varphi$, per cui anche OK , $C'P'$ sono parallele. Allora $OKPC'$ è un parallelogrammo e KP' è esattamente $= OC' = 2r$; il luogo dei punti P' è dunque la cardioide, rispetto al punto M , del cerchio di centro O e raggio OM .

11 - Un caso notevole di ipocicloide è la curva descritta da un punto del cerchio mobile, quando il raggio di questo sia $\frac{1}{4}$ del raggio del cerchio fisso. Sia O il centro del cerchio fisso, quello del cerchio mobile γ in un ar-



lo istante. Assumendo come assi cartesiani X e Y la retta OC e la perpendicolare ad essa in O , proponiamo di trovare le equazioni parametriche della curva descritta da un punto P del cerchio γ supposto coincidente, nella posizione considerata

del cerchio γ , col punto di contatto del cerchio stesso col cerchio fisso. Si assume come parametro l'angolo φ descritto dalla retta OC nel movimento di γ . - Considerata un'arbitraria posizione γ' di γ e le corrispondenti posizioni C', P' assunte da C e P , se L ed M sono le proiezioni ortogonali di C' e P' sull'asse delle x , N la proiezione ortogonale di P' sulla $C'L$, le coordinate x e y di P' sono :

$$x = OM = OL + LM = OL + NP'; \quad y = P'M = NL = C'L - C'N.$$

Indicando con R il raggio del cerchio fisso sarà $\frac{R}{4}$ il raggio del cerchio mobile e si avrà: $OL = OC' \cos \varphi = \frac{3}{4} R \cos \varphi$; $NP' = C'P' \cos \widehat{C'P'N} = \frac{R}{4} \cos 3\varphi$,

(conducendo per C' una parallela all'asse delle x si vede subito che

$$\widehat{C'P'N} = 4\varphi - \varphi - 3\varphi), \quad C'L = \frac{3}{4} R \sin \varphi, \quad C'N = \frac{R}{4} \sin 3\varphi; \quad \text{per cui:}$$

$$x = \frac{R}{4} (3 \cos \varphi - \cos 3\varphi); \quad y = \frac{R}{4} (3 \sin \varphi - \sin 3\varphi).$$

Ricordando ora che $\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi$; $\sin 3\varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi$,

avremo:

$$\begin{cases} x = R \cos^3 \varphi \\ y = R \sin^3 \varphi \end{cases} \quad (1)$$

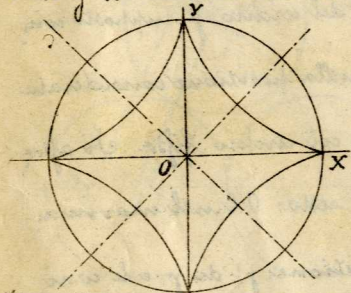
che sono le equazioni parametriche cercate. Per ottenere l'equazione cartesiana della curva, eleviamo ambo i membri delle 2 equazioni alla potenza $\frac{2}{3}$ e sommiamo membro a membro. Si avrà:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}} \cos^2 \varphi + R^{\frac{2}{3}} \sin^2 \varphi \quad \text{da cui}$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}, \quad (2)$$

equazione cercata. Questa non si altera né scambiando tra di loro

x ed y né cambiando di segno x ed y : la curva quindi ammette come



assi di simmetria i 2 assi X ed Y e le 2 bisettrici degli angoli da essi formati. La curva

è inoltre tutta interna al cerchio di raggio R .

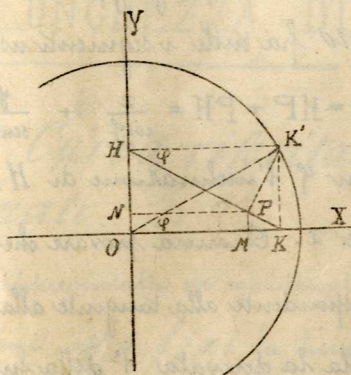
Essa si chiama *asteroide*.

Il coefficiente angolare della tangente alla curva nel punto $P'(x, y)$ corrispondente al valore del parametro si ricava dalle (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = - \frac{3R \sin^2 \varphi \cos \varphi}{3R \cos^2 \varphi \sin \varphi} = - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = - \operatorname{tg} \varphi.$$

È dunque uguale a φ l'angolo formato dalla tangente nel punto P colla direzione negativa dell'asse delle x . L'inclinazione della normale sull'asse x sarà allora $\frac{\pi}{2} - \varphi$. Si ritrova facilmente partendo da tale osservazione la costruzione generale indicata al N. 7 della normale alla curva in P :

12/- L'asteroide si può anche definire nel modo seguente:



fissato un cerchio di raggio R e centro O , ed assunto come assi cartesiani X e Y due suoi diametri perpendicolari, si conducano per un punto generico K' della circonferenza le parallele agli assi; ne risulterà un rettangolo $K'HOK$. Il piede P della perpendicolare abbassata da K' su HK descrive un asteroide col variare del punto K' sul cerchio considerato. Infatti, indicando con x e y le coordinate di P , e con φ l'angolo $K'OM$ avremo:

$$x = PH \cos \varphi, \quad y = PK \sin \varphi;$$

ma $PH = HK' \cos \varphi = (R \cos \varphi) \cos \varphi = R \cos^2 \varphi$; $PK = KK' \sin \varphi = (R \sin \varphi) \sin \varphi = R \sin^2 \varphi$; per cui sarà

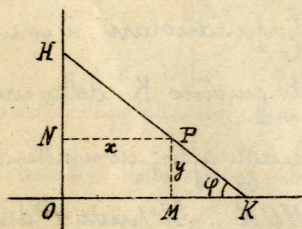
$$\begin{cases} x = R \cos^3 \varphi \\ y = R \sin^3 \varphi \end{cases} \quad (1)$$

e queste equazioni coincidono perfettamente con le equazioni (1) del N. precedente.

La retta HK forma un angolo φ col senso negativo dell'asse delle x ; essa

è dunque la tangente alla curva nel punto P . E poichè evidentemente $HK = OK' = R$, possiamo dire che il segmento di tangente condotto in un punto qualunque dell'asteroide è compreso tra gli assi X ed Y è costante ed uguale al raggio del cerchio circoscritto.

Questo segmento HK di tangente uscente da P , di lunghezza R , compreso tra gli assi X ed Y è inoltre il minimo fra tutti i segmenti uscenti dal punto P . Si ha infatti: $HK = HP + PH = \frac{x}{\cos \varphi} + \frac{y}{\sin \varphi}$,



indicando con φ l'inclinazione di HK sull'asse delle x . Occorrerà provare che il valore di φ corrispondente alla tangente alla curva in P annulla la derivata 1^a della funzione

ne $\frac{x}{\cos \varphi} + \frac{y}{\sin \varphi}$ rispetto a φ . (Sarà d'altra parte sufficiente provare tale relazione poichè effettivamente tale funzione ammette un minimo e non un massimo.) Dovrà dunque aversi per detto valore di φ :

$$\frac{x \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} - \frac{y \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} = 0$$

vale a dire

$$\frac{x \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{y \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$$

ossia

$$\frac{x}{\cos^3 \varphi} = \frac{y}{\sin^3 \varphi} \quad (\alpha)$$

Ora effettivamente indicando con φ l'inclinazione della tangente in P all'asteroide sull'asse della x uguale al valore del parametro che corrisponde al punto P) si ha $\frac{x}{\cos^3 \varphi} = \frac{y}{\sin^3 \varphi} = R$, quindi ecc.

L'asteroide si potrà dunque considerare come il luogo dei punti del piano per

ognuno dei quali il segmento di lunghezza minima passante per esso ed avente i suoi estremi su due date rette X, Y fra loro ortogonali, hanno la stessa lunghezza R .

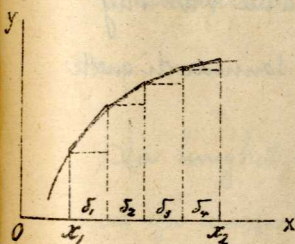
Capitolo IV.

LUNGHEZZA DI CURVE PIANE

§. 1° - *Curva riferita ad assi cartesiani ortogonali.*

1° - Rappresentata in coordinate cartesiane una curva mediante l'equazione $y = f(x)$, la lunghezza dell'arco di curva compreso tra due punti A e B di ascisse x_1 e x_2 è data dalla formula

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (I)$$



• Dividiamo infatti l'arco AB in un certo numero di parti ed in ciascuno degli archi parziali ne consideriamo un punto ad arbitrio ed il segmento della tangente in quel punto che è compreso tra le ordinate degli estremi di quell'arco parziale. Queste ordinate determinino sull'asse delle x degli intervalli $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Siano inoltre $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ le inclinazioni sull'asse delle x dei segmenti di tangente considerati. La lunghezza di ciascuno di quei segmenti sarà l'ipotenusa di un triangolo rettangolo in cui la lunghezza di un cateto è δ_i e l'angolo

adiacente d_i , quindi sarà $= \frac{\delta_i}{\cos \alpha_i}$. La somma di queste lunghezze è $\sum \frac{\delta_i}{\cos \alpha_i} = \sum \delta_i \sec \alpha_i = \sum \delta_i \sqrt{1 + \tan^2 \alpha_i}$;

ed osservando che $\tan \alpha_i$ non è altro che il valore y' della derivata di y rispetto ad x in un punto interno a δ_i si avrà:

$$\sum \frac{\delta_i}{\cos \alpha_i} = \sum \delta_i \sqrt{1 + y'^2}$$

Se col tendere degli intervalli δ_i a 0 la somma dei segmenti di tangenti considerati tende ad un limite finito, indipendente dal modo con cui si fanno tendere a 0 le δ_i , detto limite si assume come lunghezza dell'arco di curva AB. D'altra parte, supposta continua la y' , si ha

$$\lim_{\delta_i \rightarrow 0} \sum \delta_i \sqrt{1 + y'^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

quindi ecc.

Con ragionamento abbreviato ma non rigoroso si giunge alla formula (I) immaginando AB diviso in ∞ archi infinitesimi e sostituendo a ciascuno di essi la corda corrispondente che è ipotenusa d'un triangolo rettangolo di cateti dx e dy ed ha una lunghezza espressa da $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ ossia da $dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. La lunghezza totale L sarà la somma di queste lunghezze ∞ infinitesime, quindi:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

2° - Se la curva è rappresentata parametricamente mediante le equazioni $x = x(t)$, $y = y(t)$ conviene assumere nella (I) come variabile d'integrazione la t . Basterà ricordare che $dx = \frac{dx}{dt} dt$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$ la (I) assumerà la forma

$$L = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)^2} \cdot \frac{dx}{dt} dt,$$

ove t_1, t_2 indicano i valori del parametro t corrispondenti agli estremi A o B dell'arco; ovvero:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (II)$$

Applicazioni

1) *Lunghezza dell'asteroide*, rappresentato dalle equazioni parametriche $x = r \cos^3 \varphi$, $y = r \sin^3 \varphi$.

Si ha, applicando la (II): a 1 parte.



$$L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$$

Ora $\frac{dx}{d\varphi} = -3r \cos^2 \varphi \sin \varphi$; $\frac{dy}{d\varphi} = 3r \sin^2 \varphi \cos \varphi$; quadrando e sommando si ottiene: $\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = 9r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 9r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$ per cui:

$$L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} d\varphi = 12r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi;$$

e ricordando che $\int f(x) f'(x) dx = \frac{f(x)^2}{2}$:

$$L = 12r \left[\frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 12r \cdot \frac{1}{2} = 6r$$

La lunghezza totale dell'asteroide è quindi 6 volte il raggio del cerchio ad esso circoscritto.

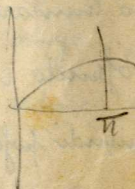
2) *Lunghezza di un arco completo di cicloide propria*.

$$x = r\varphi - r \sin \varphi, \quad y = r - r \cos \varphi.$$

Procedendo come al N° precedente abbiamo:

$$\frac{dx}{d\varphi} = r - r \cos \varphi, \quad \frac{dy}{d\varphi} = r \sin \varphi; \text{ da cui}$$

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = r^2 - 2r^2 \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi =$$



$$= r^2 + r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - 2r^2 \cos \varphi = 2r^2 (1 - \cos \varphi) ; \text{ per cui}$$

$$L = 2 \int_0^\pi \sqrt{2r^2 (1 - \cos \varphi)} d\varphi = 4r \int_0^\pi \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}} d\varphi = 4r \int_0^\pi \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi =$$

$$8r \int_0^\pi \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{1}{2} d\varphi = 8r \left[-\cos \frac{\varphi}{2} \right]_0^\pi = 8r$$

La lunghezza L è quindi 8 volte quella del raggio del cerchio mobile.

3) *Lunghezza dell'ellisse* rappresentata dalle equazioni parametriche $x = a \sin \varphi$, $y = b \cos \varphi$.

$$L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} d\varphi =$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 \varphi) + b^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \sin^2 \varphi} d\varphi =$$

$$= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{b^2 - a^2}{a^2} \sin^2 \varphi} d\varphi$$

Supposto che a rappresenti il semiasse maggiore e b il semiasse minore dell'ellisse ed indicata con e l'eccentricità dell'ellisse si ha:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2 \quad \text{Quindi potremo scrivere:}$$

$$L = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

Se $e = 0$ (cerchio) sappiamo a priori l'integrazione; si ottiene $L = 2\pi a$ (lunghezza della circonferenza di raggio a). In generale dobbiamo però limitarci ad una integrazione per serie.

Quando $e < 1$, $\sin \varphi \leq 1$ il prodotto $e^2 \sin^2 \varphi$ è sempre positivo e < 1 , quindi possiamo applicare la formula che dà lo sviluppo in serie di $(1+x)^m$ (pag. 35); otteniamo:

$$\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{1 \cdot 2} (-e^2 \sin^2 \varphi)^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (-e^2 \sin^2 \varphi)^3 +$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (-e^2 \sin^2 \varphi)^4 + \dots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2.4} e^4 \sin^4 \varphi - \frac{1.3}{2.4.6} e^6 \sin^6 \varphi - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} e^8 \sin^8 \varphi - \dots$$

Nell'ipotesi $e < 1$ questa serie è totalmente convergente (pag. 35); possiamo quindi integrarla termine a termine:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi - \frac{1}{2} e^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \, d\varphi - \frac{1}{2.4} e^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi \, d\varphi - \frac{1.3}{2.4.6} e^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \varphi \, d\varphi - \dots$$

ove, essendo (pag. 32): $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \varphi \, d\varphi = \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\dots 1}{n(n-2)(n-4)\dots 2} \cdot \frac{\pi}{2}$

avremo che la lunghezza dell'ellisse sarà data dalla seguente serie:

$$L = 2\pi a \left[1 - \frac{1}{2} e^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2.4} e^4 \cdot \frac{3.1}{4.2} - \frac{1.3}{2.4.6} e^6 \cdot \frac{5.3.1}{6.4.2} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} e^8 \cdot \frac{7.5.3.1}{8.6.4.2} - \dots \right]$$

ossia

$$L = 2\pi a \left[1 - \frac{1}{2^2} e^2 - 3 \cdot \frac{1}{(2.4)^2} e^4 - 5 \cdot \frac{(1.3)^2}{(2.4.6)^2} e^6 - 7 \cdot \frac{(1.3.5)^2}{(2.4.6.8)^2} e^8 - \dots \right]$$

Lunghezza d'una curva in coordinate polari.

Oduta una curva in coordinate polari mediante l'equazione $\rho = \rho(\varphi)$, la lunghezza d'un arco di questa curva i cui estremi A, B corrispondano ai valori φ_1 e φ_2 dell'anomalia è data dalla formola

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} \, d\varphi \quad (III)$$

Questa formola si ricava dalla (II) relativa a coordinate cartesiane mediante le note formole di passaggio da coordinate cartesiane ortogonali a coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

Da queste si deduce

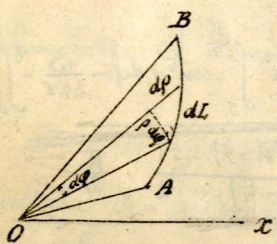
$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{d\rho}{d\varphi} \cos \varphi - \rho \sin \varphi, \quad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{d\rho}{d\varphi} \sin \varphi + \rho \cos \varphi;$$

quadrando e sommando si ha:

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2$$

da cui la (III).

Per ottenere con procedimento intuitivo la formola (III) si può immaginare l'arco AB diviso in ∞ archi infinitesimi. Indicando con



dL la lunghezza di uno di essi e con dp e $dφ$ gli incrementi infinitesimi subiti rispettivamente dal raggio vettore e dall'anomalia nel passaggio dall'uno all'altro estremo dell'arco, si avrà

che dL si potrà considerare come l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti dp e $p dφ$, onde sarà $dL^2 = dp^2 + p^2 dφ^2$ ossia
 $dL = \sqrt{p^2 dφ^2 + dp^2} = \sqrt{p^2 + \left(\frac{dp}{dφ}\right)^2} dφ$; integrando a. i. m. si ha precisamente $L = \int \sqrt{p^2 + \left(\frac{dp}{dφ}\right)^2} dφ$.

Esempio - Troviamo la lunghezza della cardioide propria di equazione $ρ = 2r \cos φ + 2r = 2r(\cos φ + 1)$

Essendo $\frac{dp}{dφ} = -2r \sin φ$ si ha: $4r^2(1 + 2\cos φ + \cos^2 φ) =$
 $p'^2 = 4r^2 \sin^2 φ$

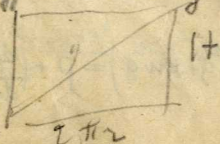
$$\begin{aligned} p^2 + \left(\frac{dp}{dφ}\right)^2 &= 4r^2 \cos^2 φ + 8r^2 \cos φ + 4r^2 + 4r^2 \sin^2 φ = \\ &= 4r^2 (\cos^2 φ + \sin^2 φ) + 8r^2 \cos φ + 4r^2 = 8r^2 (1 + \cos φ) = 16r^2 \frac{1 + \cos φ}{2} = \\ &= 16r^2 \sin^2 \frac{φ}{2} \end{aligned}$$

della curva sarà:

$$L = \int_0^{2\pi} 4r \sin \frac{φ}{2} dφ = 8r \int_0^{2\pi} \sin \frac{φ}{2} dφ = 8r \left[-\cos \frac{φ}{2} \right]_0^{2\pi} = 16r$$

Se sono date parametriche in tre variabili

$x = r \cos φ$ $y = r \sin φ$ $z = h φ$
 quindi si calcola in diagonale



$$\int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dφ = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \cos^2 φ + r^2 \sin^2 φ + h^2} dφ = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + h^2} dφ = 2\pi \sqrt{r^2 + h^2}$$

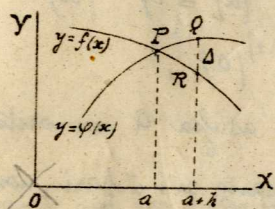
Capitolo V

CONTATTO DI LINEE PIANE

Cerchio osculatore

Curvatura

1- Si abbiano due curve rappresentate, in coordinate cartesiane ortogonali, dalle equazioni $y = f(x)$ ed $y = g(x)$. - Se le due curve hanno a comune un punto P di ascissa a sarà $f(a) = g(a)$.



Diamo ora ad x un incremento h : le ordinate K dei punti Q ed R delle due curve che corrispondono al valore $a+h$ dell'ascissa saranno espresse, per la formula di Taylor, da:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h)$$

$$g(a+h) = g(a) + hg'(a) + \frac{h^2}{2!} g''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} g^{(n)}(a + \theta' h)$$

dove $0 < \theta < 1$, $0 < \theta' < 1$. Indicando con Δ la differenza $f(a+h) - g(a+h)$ abbiamo:

$$\Delta = h [f'(a) - g'(a)] + \frac{h^2}{2!} [f''(a) - g''(a)] + \dots + \frac{h^n}{n!} [f^{(n)}(a + \theta h) - g^{(n)}(a + \theta' h)] \quad (1)$$

Se $f'(a) \neq g'(a)$ le due curve non hanno a comune in P la tangente, ossia non si toccano in P ; se invece $f'(a) = g'(a)$ le due curve ammettono in P la stessa tangente. Se si ha inoltre $f''(a) \neq g''(a)$ si dice che le due curve hanno in P un contatto semplice o del 1° ordine. In tal caso, annullandosi il 1° termine del 2° membro della (1) per h abbastanza

piccolo il segno di Δ rimane invariato quando cambia di segno, e le due curve non si attraversano. Supposto invece $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$, $f(a) = g''(a)$, $f''(a) \neq g'''(a)$, Δ cambia di segno col mutare del segno di h , e le curve si attraversano; si dice in tal caso che esse ammettono in P un contatto del 2° ordine od osculazione, ecc.

In generale: Se per $x=a$ assumono valori uguali le due funzioni f, g ed analogamente le loro derivate prime, seconde ecc. fino alla $(i+1)$ esima esclusa, ossia se

$$f(a) = g(a), \quad f'(a) = g'(a), \quad \dots \dots \dots f^{(i)}(a) = g^{(i)}(a) \\ f^{(i+1)}(a) \neq g^{(i+1)}(a),$$

si dice che le curve ammettono nel punto di ascissa a un contatto di ordine i . In tale punto le curve si attraversano se i è pari, non si attraversano se i è dispari.

2. - Il sistema di curve rappresentate da un'equazione $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_i)$ nella quale ai parametri $c_1, c_2, \dots, c_i$ si attribuiscono tutti i possibili gruppi di valori si dice "di dimensione i ", oppure " ∞^i ", quando gli i parametri $c_1, c_2, \dots, c_i$ sono essenziali, ossia ogni curva del sistema non corrisponde ad ∞ gruppi di valori dei parametri stessi.

Per esempio: L'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ rappresenta, quando ad a e b si attribuiscono tutte le possibili coppie di valori, ∞^2 ellissi aventi a comune gli assi (ellissi coassiali). Il sistema di tutti i cerchi di un piano è di dimensione 3, od " ∞^3 ", poichè, riferiti i cerchi medesimi a due assi cartesiani ortogonali, si ha come equazione

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0 \quad \text{nella quale } \alpha, \beta, \gamma \text{ sono i parametri essenziali.}$$

parametri ξ, η rappresentanti le coordinate del centro ed il raggio sono essenziali.

3. Ciò premesso, proponiamoci di cercare, fra le curve di un dato sistema ∞^i , rappresentato dalla $y = f(x, c_1, c_2, \dots, c_i)$ quelle eventuali curve che hanno in un punto fissato P di ascissa a di una curva data $y = f(x)$ un contatto di ordine $i - 1$. — Il problema equivale a determinare i parametri $c_1, c_2, \dots, c_i$ in modo che essi soddisfino alle i equazioni.

$$(2) \quad \begin{cases} f(a) = f(a, c_1, c_2, \dots, c_i) \\ f'(a) = f'(a, c_1, c_2, \dots, c_i) \\ \dots\dots\dots \\ f^{(i-1)}(a) = f^{(i-1)}(a, c_1, c_2, \dots, c_i) \end{cases}$$

Abbiamo così un sistema di i equazioni nelle i incognite $c_1, c_2, \dots, c_i$ ed evidentemente non è possibile imporre un contatto di ordine maggiore. — Se il sistema è risolvibile, i valori trovati per $c_1, c_2, \dots, c_i$, sostituiti nella $y = f(x, c_1, \dots, c_i)$ ci daranno l'equazione della curva cercata del sistema.

Può darsi, come caso speciale, che la curva corrispondente ai valori trovati per i parametri $c_1, c_2, \dots, c_i$ abbia con la curva data $y = f(x)$ un contatto di ordine superiore a quello richiesto (quando, p.es. le (2) portassero di conseguenza la $f^{(i)}(a) = f^{(i)}(a, c_1, \dots, c_i)$; in tal caso la curva trovata si dice iperosculatrice a quella data).

4. — Supponiamo che la $y = f(x, c_1, \dots, c_i)$ rappresenti il sistema degli ∞^3 cerchi di un piano, vale a dire d'equazione del tipo

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = r^2 \quad (3)$$

(ove i tre parametri ξ , η ed r rappresentano rispettivamente le coordinate del centro ed il raggio dei cerchi)

Data in quel piano una curva $y = y(x)$ determiniamo il cerchio del sistema che ha con la curva in un punto P un contatto del 2° ordine.

Se $y = y(x, \xi, \eta, r)$ è l'equazione ricavata dalla (3) che esprime, per ogni terna di valori attribuiti ai parametri ξ, η, r , la y mediante la x , occorrerà determinare i tre parametri ξ, η, r , in modo che siano verificate, per l'ascissa x del punto P , le equazioni

$$(4) \quad \begin{cases} y(x) = y(x) \\ y'(x) = y'(x) \\ y''(x) = y''(x) \end{cases}$$

Derivando ambo i membri della (3) rispetto ad x tenendo conto che y è funzione di x , otteniamo $2(x - \xi) + 2(y - \eta)y'(x) = 0$; che, divisa per 2, per la (4) si può scrivere

$$(x - \xi) + (y - \eta)y' = 0 \quad (5)$$

Derivando ancora si ottiene analogamente:

$$1 + y'^2 + (y - \eta)y'' = 0 \quad (6)$$

Dal sistema delle (5) - (6) si ricava facilmente:

$$x - \xi = \frac{1 + y'^2}{y''} y' \quad ; \quad y - \eta = - \frac{1 + y'^2}{y''} \quad (7)$$

da cui

$$\xi = x - \frac{1 + y'^2}{y''} y' \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} \quad (8)$$

Inadrando e sommando le (7) si ricava poi facilmente:

$$r^2 = \frac{(1 + y'^2)^2 y'^2}{y''^2} + \frac{(1 + y'^2)^2}{y''^2} = \frac{(1 + y'^2)^2}{y''^2} (y'^2 + 1) = \frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2} \quad \text{da cui:}$$

$$r = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \quad (9)$$

Il cerchio così determinato, di centro $O(\xi, \eta)$ e raggio r prende il nome di cerchio osculatore nel punto P alla curva data $y = y(x)$. Il centro O è evidentemente situato sulla normale alla curva data nel punto P poiché il cerchio deve toccare in P la tangente alla curva stessa.

Inoltre nel punto P attraversa in generale la curva, avendo con questa un contatto di ordine 2 (e quindi pari) allorché non risulta iperosculatore alla curva.

5. - Esprimiamo le coordinate del centro ed il raggio del cerchio osculatore nel caso in cui la curva data sia rappresentata parametricamente dalle equazioni $x = x(t)$, $y = y(t)$. Indichiamo brevemente con x', y', x'', y'' le derivate $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}$; allora le derivate prima e seconda di y rispetto ad x che compaiono nelle (8) e (9) verranno espresse da:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{y'}{x'} \right) \frac{1}{x'} = \frac{x'y'' - x''y'}{x'^2} \frac{1}{x'}$$

$$= \frac{x'y'' - x''y'}{x'^3}, \text{ per cui sostituendo si avrà facilmente}$$

$$\xi = x - \frac{x'^2 + y'^2}{y''x' - x''y'} y' ; \quad \eta = y + \frac{x'^2 + y'^2}{y''x' - x''y'} x' \quad (10)$$

$$r = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{y''x' - x''y'} \quad (11)$$

6. - Le coordinate ξ ed η del centro del cerchio osculatore alla curva data $y = y(x)$ in un punto P si possono esprimere in funzione del raggio del cerchio osculatore stesso e dei costanti direttori della tangente e

della normale alla curva nel punto P. La (11) infatti si può scrivere

$r = \frac{x'^2 + y'^2}{y''x' - x''y'} \sqrt{x'^2 + y'^2}$ da cui $\frac{x'^2 + y'^2}{y''x' - x''y'} = \frac{r}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$ Osserviamo ora che, indicato con s la lunghezza dell'arco di curva compreso fra un'origine fissata ed un punto variabile P della curva si ha

(V. Cap. IV) : $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ onde si avrà $\frac{x'^2 + y'^2}{y''x' - x''y'} = r \frac{dt}{ds}$, e le (10) diventano

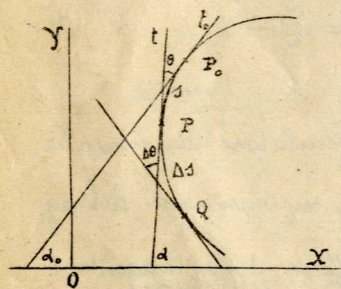
$$\xi = x - r \frac{dt}{ds} \cdot \frac{dy}{dt}, \quad \eta = y + r \frac{dt}{ds} \cdot \frac{dx}{dt};$$

ossia

$$\xi = x - r \frac{dy}{ds}, \quad \eta = y + r \frac{dx}{ds} \quad (12)$$

Indicato con α uno conveniente degli angoli che la tangente alla curva $y = y(x)$ forma con l'asse della x , si ha: $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$. Ma $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ quindi $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$, per cui $\frac{dx}{ds} = \cos \alpha$; analogamente si trova: $\frac{dy}{ds} = \sin \alpha$.

7. — Consideriamo sopra la curva data un punto fisso P_0 ed un punto variabile P; siano α_0 ed α rispettivamente gli angoli che le tangenti t_0 e t alla curva in P_0 e P formano con l'asse delle x . Indichiamo



no con s la lunghezza dell'arco $P_0 P$ e con θ l'angolo delle tangenti t_0 e t . Consideriamo un secondo punto Q sulla curva ed indichiamo rispettivamente con $\Delta s, \Delta \theta$ gli incrementi che ricevono s e θ nel passaggio dal punto P al punto Q, ossia rispettivamente l'arco PQ l'angolo delle tangenti in P e Q

in Q . Supposto θ espresso in radianti e dette ancora Δs e $\Delta \theta$ le misure dell'arco e dell'angolo considerati, il rapporto $\frac{\Delta \theta}{\Delta s}$ si dice curvatura media della linea nel tratto PQ . Quando Q si muove sulla linea avvicinandosi indefinitamente a P , Δs e $\Delta \theta$ tendono a zero. Se il rapporto $\frac{\Delta \theta}{\Delta s}$ tende ad un limite determinato esso costituisce la derivata $\frac{d\theta}{ds}$ di θ rispetto ad s nel punto considerato P . Detto limite chiamasi curvatura della linea nel punto P . La linea sia definita dalle equazioni parametriche

$$x = x(t), \quad y = y(t);$$

essendo $\theta = \alpha - \alpha_0$ sarà $\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$

Ora $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}$ (indicando brevemente con x' ed y' le derivate $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$); e derivando rispetto a t : $\frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{y''x' - x''y'}{x'^2}$;

essendo $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{y'^2}{x'^2} = \frac{x'^2 + y'^2}{x'^2}$ si trova subito:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{y''x' - x''y'}{x'^2 + y'^2} \quad \text{Inoltre si ha (Cap. IV)} \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2}; \text{ quindi}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \quad (13)$$

Se la curva che si considera è un cerchio di raggio R , l'angolo φ che le tangenti ad esso negli estremi di un arco PQ qualunque formano tra loro è uguale all'angolo al centro corrispondente all'arco considerato; e si ha: $\frac{\varphi}{\text{arco } AB} = \frac{\varphi}{R\varphi} = \frac{1}{R}$; ossia la curvatura in ogni punto di un cerchio è uguale all'inverso del raggio. Ora si chiama raggio di curvatura di una linea in un punto, il raggio R del cerchio la cui

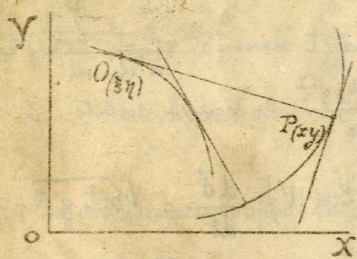
curvatura è quella della linea nel punto considerato. Si avrà quindi:

$$R = \frac{(x''^2 + y''^2)^{3/2}}{y'' x' - x'' y'} \quad (14)$$

la quale, essendo identica alla (11) ci dice che il raggio di curvatura di una linea in un punto è uguale al raggio del cerchio osculatore alla linea in quel punto. Il cerchio osculatore si chiama perciò anche cerchio di curvatura, ed il suo centro prende pure il nome di centro di curvatura.

§ — Il luogo geometrico dei centri di curvatura di una linea si chiama evolvente della linea stessa.

Vogliamo ora dimostrare che l'evolvente ha per tangenti le normali alla linea data, ossia che è l'involuppo delle normali alla linea data. Riferita



la linea e l'evolvente a un sistema di assi cartesiani basterà a tal uopo dimostrare che il coefficiente angolare della tangente alla linea in un punto $P(x, y)$ è il reciproco cambiato

di segno del coefficiente angolare della tangente all'evolvente condotta nel corrispondente punto $O(\xi, \eta)$, (centro di curvatura della linea in P) ossia che:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = - \frac{1}{dy/dx} = - \frac{dx}{dy}$$

Supposte ξ ed η espresse in funzione di s avremo

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\eta}{ds} : \frac{d\xi}{ds} \quad \text{per cui derivando le (12) ri}$$

spetto ad s otteniamo.

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{dx}{ds} - \frac{dR}{ds} \frac{dy}{ds} - R \frac{d^2 y}{ds^2}$$

(15)

Dimostriamo ora che:

$$\frac{dx}{ds} = R \frac{d^2 y}{ds^2} \quad \frac{dy}{ds} = -R \frac{d^2 x}{ds^2}$$

Infatti supponendo nella (11) x ed y espresse in funzione del parametro s otterremo

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 y}{ds^2} \frac{dx}{ds} - \frac{d^2 x}{ds^2} \frac{dy}{ds}}{\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

ma poiché $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ossia $1 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2$ la nostra espressione

diventa $\frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{ds^2} \frac{dx}{ds} - \frac{d^2 x}{ds^2} \frac{dy}{ds} \quad (\alpha)$

d'altra parte derivando $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$ rispetto ad s otteniamo

$$2 \frac{dx}{ds} \frac{d^2 x}{ds^2} + 2 \frac{dy}{ds} \frac{d^2 y}{ds^2} = 0 \quad \text{da cui}$$

$$\frac{dx}{ds} \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \frac{d^2 y}{ds^2} = 0 \quad (\beta)$$

Se consideriamo le (α) e (β) come un sistema nelle due equazioni lineari

in derivate seconde $\frac{d^2 x}{ds^2}$, $\frac{d^2 y}{ds^2}$ potremo ricavare quest'ultime in funzione delle derivate prime e di R ,

$$\begin{cases} \frac{dy}{ds} \left[\frac{d^2 x}{ds^2} \right] + \frac{dx}{ds} \left[\frac{d^2 y}{ds^2} \right] = \frac{1}{R} \\ \frac{dx}{ds} \left[\frac{d^2 x}{ds^2} \right] + \frac{dy}{ds} \left[\frac{d^2 y}{ds^2} \right] = 0 \end{cases} \quad \text{dove}$$

applicando la regola di Cramer

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R} & \frac{dx}{ds} \\ 0 & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dx}{ds} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{R} \frac{dy}{ds}}{-1}; \quad \frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{-\frac{1}{R} \frac{dx}{ds}}{-1} \quad \text{da cui}$$

$$\frac{dy}{ds} = -R \frac{d^2 x}{ds^2}; \quad \frac{dx}{ds} = R \frac{d^2 y}{ds^2}$$

Applicando tali relazioni le (13) diventano $\frac{d\xi}{ds} = - \frac{dR}{ds} \cdot \frac{dy}{ds}$,
 $\frac{dy}{ds} = \frac{dR}{ds} \cdot \frac{dx}{ds}$ (13')

Ossia, dividendo membro a membro :

$$\frac{dy}{d\xi} = - \frac{dx/ds}{dy/ds} = - \frac{dx}{dy}. \quad \text{Questa quindi dimostra il nostro teorema.}$$

Dalle formule (13') possiamo inoltre dedurre un'altra importante relazione fra una linea e la sua evolvente.

Indicando con σ la lunghezza di un arco di evolvente della linea data, compreso fra un'origine fissata ed un punto variabile O sull'evolvente medesima, si avrà per la nota formula (II)

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

qualunque sia il parametro t mediante il quale siano espresse ξ ed y .

In particolare

$$\frac{d\sigma}{ds} = \sqrt{\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} \quad \text{ossia}$$

$$\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2$$

Ma d'altra parte quadrando e sommando le (13') si ottiene

$$\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dR}{ds}\right)^2 \left\{ \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \right\} = \left(\frac{dR}{ds}\right)^2$$

onde confrontando quest'ultima con l'espressione ottenuta sopra

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dR}{ds}\right)^2$$

Da cui fatta astrazione del segno : $\frac{d\sigma}{ds} = \frac{dR}{ds}$ e integrando fra due dati limiti s_1 a s_2 si ha

$$\sigma_1 - \sigma_2 = R_1 - R_2$$

ove $\sigma_1, \sigma_2, R_1, R_2$ sono rispettivamente le lunghezze degli archi di evolvente

e i raggi di curvatura corrispondenti ai valori δ_1 e δ_2 del parametro δ .

Quest'ultima formula ci dice che la lunghezza di un arco di evolvente è uguale in valore assoluto alla differenza dei raggi di curvatura della linea data, corrispondenti agli estremi di tale arco.

Da questa proprietà si deduce un mezzo assai semplice per costruire una curva avente una data evolvente:

Se un filo flessibile ed inestensibile avente un estremo fisso sull'evolvente è ravvolto su di essa, allorché si svolge il filo stesso in guisa che ogni istante la parte svolta si disponga lungo una retta tangente all'evolvente stessa, l'estremità libera del filo descrive una curva che ha per evolvente l'evolvente data. Tale curva chiamasi *evolvente della linea data*. Essa non è però completamente definita da tale linea.

—— Applicazioni. ——

1. *Evolvente della ellisse* - Vogliamo trovare la rappresentazione parametrica in coordinate cartesiane dell'evolvente di una ellisse rappresentata dalle equazioni parametriche $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$.

Se assumiamo come assi coordinati gli assi della ellisse, si otterrà l'equazione della sua evolvente eliminando x e y fra le equazioni dell'ellisse e le (10) che danno le coordinate del centro di curvatura.

Derivando rispetto a φ otteniamo:

$$x' = -a \sin \varphi$$

$$x'' = -a \cos \varphi$$

$$y' = b \cos \varphi$$

$$y'' = -b \sin \varphi$$

poiché

$$x'^2 + y'^2 = a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi, \quad y''x' - x''y' = ab \sin^2 \varphi + ab \cos^2 \varphi = ab$$

per le (10) risulterà

$$\begin{cases} \xi = a \cos \varphi - \frac{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}{ab} b \cos \varphi = \cos \varphi \frac{a - a^2 \sin^2 \varphi - b^2 \cos^2 \varphi}{a} \\ \eta = b \sin \varphi - \frac{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}{ab} a \sin \varphi = \sin \varphi \frac{b^2 - a^2 \sin^2 \varphi - b^2 \cos^2 \varphi}{b} \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} \xi = \cos^3 \varphi \frac{a^2 - b^2}{a} \\ \eta = \sin^3 \varphi \frac{b^2 - a^2}{b} \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} a \xi = (a^2 - b^2) \cos^3 \varphi \\ b \eta = (b^2 - a^2) \sin^3 \varphi \end{cases} \quad (1)$$

le quali sono le equazioni parametriche cercate.

Tali equazioni (1) sono analoghe a quelle dell'asteroide

$$\begin{cases} x = r^3 \cos^3 \varphi \\ y = r^3 \sin^3 \varphi \end{cases} \quad (2)$$

Dimosteremo anzi che la curva da esse rappresentata (evolvente dell'ellisse) è aff. fine all'asteroide. Infatti dividendo membro a membro le (1) per le (2) si ottiene

$$\frac{\xi}{x} = \frac{a^2 b^2}{r^3 a}$$

$$\frac{\eta}{y} = \frac{b^2 a^2}{r^3 b}$$

Ma due equazioni del tipo $\begin{cases} \xi = kx \\ \eta = h'y \end{cases}$ rappresentano una affinità tra due sistemi piani, supposti i punti dei piani medesimi riferiti a coppie di assi corrispondenti nell'affinità, quindi ecc.

nello stesso modo seguito per l'asteroide deduciamo dalle (1) le due equazioni cartesiane dell'evolvente dell'ellisse

$$(a\xi)^{2/3} + (b\eta)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}.$$

Questa curva è simmetrica rispetto agli assi coordinati (assi dell'ellisse) ai quali è tangente nei punti ove li incontra.

2. *Evoluta della cicloide propria* - rappresentata dalle equazioni parametriche $x = r\varphi - r \sin \varphi$, $y = r - r \cos \varphi$.

Operando come al N. precedente si ottiene

$$x'^2 + y'^2 = 2r^2(1 - \cos \varphi) \quad \text{onde} \quad \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} = \frac{2r^2(1 - \cos \varphi)}{r^2(\cos \varphi - 1)} = -2$$

$$x'y'' - x''y' = r^2(\cos \varphi - 1)$$

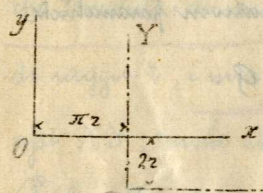
Perciò l'evoluta della cicloide è rappresentata dal sistema delle due equazioni

$$\xi = r\varphi - r \sin \varphi + 2r \sin \varphi = r\varphi + r \sin \varphi.$$

$$\eta = r - r \cos \varphi - 2(r - r \cos \varphi) = -r + r \cos \varphi.$$

fra le quali si potrebbe eliminare la variabile φ e ottenere quindi una relazione fra ξ e η che rappresenterebbe l'equazione dell'evoluta.

Se ora riferiamo tale evoluta a due assi paralleli ai primitivi e distanti rispettivamente $-2r$ e πr da questi, le coordinate Ξ e H dei punti



$$\Xi = \xi - \pi r = r\varphi - r\pi + r \sin \varphi$$

$$H = \eta + 2r = r + r \cos \varphi \quad \text{e se indicia}$$

mo con l'angolo $\varphi - \pi$ da cui $\varphi = \psi + \pi$ avremo

$$\Xi = r\psi - r \sin \psi \quad H = r - r \cos \psi.$$

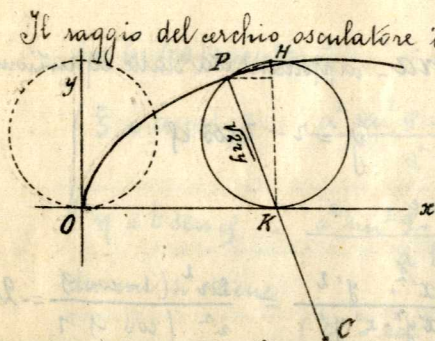
Cioè l'evoluta della cicloide è una nuova cicloide congruente alla prima e precisamente deducibile da questa mediante una traslazione le cui componenti secondo i primitivi assi coordinati sono πr e $-2r$.

Troviamo ora l'espressione del raggio osculatore. Ricordando l'espressione

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{y''x' - y'x''} = \frac{x'^2 + y'^2}{y''x' - y'x''} \sqrt{x'^2 + y'^2} \quad \text{per i risultati ottenuti}$$

sopra si ha

$$R = -2 \sqrt{2r \cdot r(1 - \cos \varphi)} = -2 \sqrt{2r y}$$



Il raggio del cerchio osculatore in un punto P è dunque uguale al doppio del segmento medio proporzionale fra il diametro del cerchio generatore e l'ordinata del punto considerato. Se teniamo presente la costruzione della normale in un

punto qualunque della cicloide (V. pag 67) si deduce immediatamente che il raggio di curvatura in un punto qualunque P della cicloide, è doppio della normale geometrica in quel punto, onde il punto C simmetrico di P rispetto al punto K (di contatto del cerchio generatore colla retta) sarà il centro di curvatura della linea in P ed al variare del quale (come abbiamo dimostrato sopra) il punto C descrive una nuova cicloide congruente alla primitiva.

3. Evoluta dell'asteroide - rappresentata dalle equazioni parametriche

$$x = r \cos^3 \varphi, \quad y = r \sin^3 \varphi.$$

Procedendo come ai N precedenti troviamo

$$x'^2 + y'^2 = 9r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \quad x'y'' - x''y' = -9r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \quad \text{per cui}$$

$$\begin{cases} \xi = r \cos^3 \varphi + y' \\ \eta = r \sin^3 \varphi - x' \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} \xi = x + y' \\ \eta = y - x' \end{cases}$$

Il raggio del cerchio osculatore in un punto è dato da

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{y''x' - x''y'} = \frac{x'^2 + y'^2}{y''x' - x''y'} \sqrt{x'^2 + y'^2} = -1 \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

quindi in valore assoluto

$$R = 3r \sin \varphi \cos \varphi = \frac{3}{2} \sin 2\varphi.$$

Riferita l'asteroide a due assi cart. ortogonali XY, detto r il raggio del cerchio circoscritto ad essa, PK il segmento di normale in P compreso

fra il punto P stesso e il punto K in cui detta normale incontra il cerchio, K'

la proiezione di K sull'asse delle x e Q l'angolo variabile $K O X$ si ha:

$$K K' = r \sin \varphi, \quad K P = K K' \cos \varphi = r \sin \varphi \cos \varphi$$

e per l'espressione ottenuta sopra

$$R = 3 K P.$$

Dunque per costruire il centro del cerchio osculatore in un punto P dell'asteroide basta portare tre volte (in senso conveniente) il segmento di normale PK compreso

fra il punto P stesso e la circonferenza nella quale l'asteroide è iscritta.

Possiamo ora dedurre dalla figura con semplici considerazioni geometriche che l'evolvente di un'asteroide riferita ai suoi assi XY è iscritta in un cerchio di raggio r, e una nuova asteroide di assi ξ, η , bisettrici degli angoli degli assi XY, simile alla primitiva ed inscritta in un cerchio di raggio doppio.

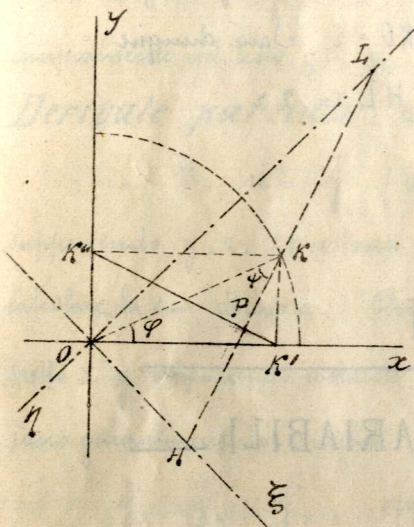
Prolunghiamo la normale in un punto P dell'asteroide fino ad incontrare in L l'asse η e in H l'asse ξ : dico che al variare del punto P, il segmento di normale HL compreso fra gli assi ξ, η involuppa una nuova asteroide inscritta in un cerchio di raggio 2r.

Basterà a tal uopo dimostrare che il segmento HL fra gli assi ξ, η al variare di P si mantiene costantemente uguale a 2r (V. pag. 14).

Poiché $\varphi = \angle K H$ e $\varphi = \angle K O X$ si ha:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\varphi = 2\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right); \text{ ora } \varphi = \angle K O L + \angle L K,$$

$$\text{ma } \angle K O L = \frac{\pi}{4} - \varphi, \text{ dunque } \angle L K = \frac{\pi}{4} - \varphi.$$



Il triangolo KOL essendo quindi isoscele, si deduce $LK = KO = r$.

Ma d'altra parte essendo pure isoscele il triangolo OKH (avendo gli angoli alla base entrambi uguali a $\frac{\pi}{4} + \varphi$) si ha $KH = KO = r$. Sarà dunque

$$LH + KH = 2KO = 2r \quad \text{ossia} \quad HL = 2r,$$

come appunto si voleva dimostrare.

Capitolo VI

— FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI —

Diciamo che u è una funzione di più variabili $x, y, z, \dots$ e scriviamo $u = f(x, y, z, \dots)$ se esiste almeno un sistema di valori di $x, y, z, \dots$ per i quali la u assume un determinato valore. L'insieme di tali sistemi di valori definiscono il campo di esistenza della u .

Diciamo poi che u è una funzione delle variabili $x, y, z, \dots, t$ definita implicitamente dalla relazione $f(x, y, z, \dots, t, u) = 0$, se esiste una funzione $u = \varphi(x, y, z, \dots, t)$ per la quale la relazione suddetta sia soddisfatta.

Se z è una funzione di due variabili x, y , e se si assumono x, y, z come coordinate cartesiane nello spazio, la $z = f(x, y)$ rappresenta l'equazione di una superficie, che si può considerare come l'immagine geometrica della funzione f . Nel caso che le variabili indipendenti siano più di due ossia effettivamente la rappresentazione geometrica. Alle funzioni di due o più variabili si possono estendere i concetti di funzioni continue, di limiti, etc. rispettivi teoremi relativi alle funzioni di una variabile sola.

Ricorderemo ora brevemente il concetto di derivata di una funzione a più variabili ed i teoremi fondamentali ad essi relativi, (tutti svolti e dimostrati ampiamente nel testo):

Derivate parziali - Sia u una funzione di più variabili

$$u = f(x, y, z, \dots, t);$$

supponendo $y, z, \dots, t$ costanti, la u sarà funzione della sola x e si potrà calcolare la sua derivata. Analogamente si può derivare la funzione rispetto a y supponendo costanti le altre variabili ecc. Tali derivate si indicano generalmente coi simboli

$$f'_x, f'_y, f'_t \quad \text{oppure} \quad \frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \dots, \frac{df}{dt}$$

e si chiamano **derivate parziali** della f ordinatamente rispetto alla x , alla y , ..., alla t .

Ora ciascuna delle funzioni $f'_x, f'_y, \dots, f'_t$ può a sua volta derivarsi rispetto a $x, y, \dots, t$; si ottengono così le **derivate parziali del 2° ordine**.

$$\text{P. es. coi simboli } f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{xz}, \dots, \text{ovv. } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \dots$$

indichiamo rispettivamente le derivate seconde della f fatte o due volte rispetto ad x , oppure prima rispetto a x e poi rispetto a y , oppure prima rispetto a x poi rispetto a z ecc. Queste ultime si dicono anche **derivate seconde miste**.

Analogamente le derivate seconde possono derivarsi rispetto a ciascuna delle variabili, ottenendo così le **derivate parziali del 3° ordine**, e così via.

Qui diamo però che non tutte le derivate dello stesso ordine sono diverse; si dimostra infatti che, supposte tali derivate finite e continue, l'ordine delle operazioni di derivazione non influisce sul valore della derivata; cosicchè sarà

p. es $f''_{xy} = f''_{yx}$, "eca...".

Teorema della media - Se $f(x, y)$ è una funzione di due variabili definita in un certo campo, e derivabile in questo campo sia rispetto a x , che rispetto a y si ha:

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = h f'_x(x+\theta h, y) + k f'_y(x+h, y+\theta' k).$$

In generale per funzioni a più di 2 variabili si ha:

$$f(x+h, y+k, \dots, t+n) - f(x, y, \dots, t) = h f'_x(x+\theta h, y, \dots, t) + k f'_y(x+h, y+\theta' k, \dots, t) + \dots + n f'_t(x+h, y, \dots, t+\theta'' n)$$

Dal teorema della media deduciamo che il **differenziale** della funzio-

ne $f(x, y)$, ove f'_x e f'_y siano continue, è dato da $df = f'_x dx + f'_y dy$ od

$$\text{anche } df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

In generale per funzioni a più di due variabili si ha

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial f}{\partial t} dt.$$

Se poi nella $f(x, y)$ supponiamo x e y entrambe espresse in funzioni di un parametro t , ammettiamo che $x(t)$, $y(t)$ siano funzioni derivabili, la derivata della f rispetto a t è data dall'espressione:

$$\frac{df}{dt} = f'_x \frac{dx}{dt} + f'_y \frac{dy}{dt} \quad \text{od anche} \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Per funzioni a più di due variabili si ha la formula analoga più generale

$$\frac{df}{dt} = f'_x \frac{dx}{dt} + f'_y \frac{dy}{dt} + \dots + f'_u \frac{du}{dt}$$

Derivazione di funzioni implicite - [Vedi pag. 52] Se in una funzione $f(x, y)$ immaginiamo sostituita alla y la funzione $y(x)$ derivante dall'equazione $f(x, y) = 0$, essa risulta identicamente nulla per ogni

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!} \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(\xi, \eta)\right]_{\substack{\xi = x+h\theta \\ \eta = y+k\theta}}$$

Applicazioni

Es. I^a. Determinare le eventuali coppie di valori di x ed y che rendono massimo o minimo il polinomio

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

e la condizione a cui debbono soddisfare i coefficienti di questo affinché esso ammetta effettivamente un massimo od un minimo.

Le coppie di valori per x e y che possono rendere la nostra funzione massima o minima devono cercarsi fra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2ax + by + d = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = bx + 2cy + e = 0 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} 2ax + by = -d \\ bx + 2cy = -e \end{cases} \quad \text{da cui}$$

se $\begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} \neq 0$ applicando la formula di Kramer si ha

$$x_0 = \frac{bc - 2dc}{4ac - b^2}, \quad y_0 = \frac{db - 2ae}{4ac - b^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2ax + by + d, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= bx + 2cy + e, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2c \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= b \end{aligned}$$

Ora perché la funzione proposta abbia un massimo ed un minimo deve essere inoltre nel punto (x_0, y_0)

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0^2 > 0 \quad \text{ossia} \quad 4ac - b^2 > 0$$

Affinché la $f(x, y)$ ammetta un massimo od un minimo occorre quindi che sia verificata la condizione $4ac - b^2 > 0$ ossia $b^2 - 4ac < 0$

In altri termini: "Condizione necessaria e sufficiente affinché il

polinomio $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$
 ammetta un massimo od un minimo e che il trinomio formato dai
 suoi termini di 2° grado sia indecomponibile in fattori lineari reali.
 E precisamente secondo che a ovvero c è ≤ 0 si ha un massimo od un
 minimo.

Es. II° - Determinare per quali coppie di valori delle va-
 riabili indipendenti x e y diventa massima o minima
 la funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 3y + 1.$$

Le coppie che possono rendere massima o minima la nostra funzione sono
 tra le soluzioni del sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 3 = 0$$

da cui

$$\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

le quali sono

$$(1) \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\text{Ora } f''_{xx} f''_{yy} - [f''_{xy}]^2 = 6x \cdot 6y = 0$$

Onde le coppie che rendono rispettivamente massima e minima la fun-
 zione proposta sono le coppie (4) e (1). Le altre (2) e (3) sono da escludersi per-
 ché per esse

$$f''_{xx} f''_{yy} - [f''_{xy}]^2 < 0.$$

Es. III° - Trovare il massimo della funzione $x^m y^n z^p$ in
 cui m, n, p sono numeri positivi assegnati, supposto di at-
 tribuire alle variabili x, y, z soltanto valori positivi legati
 dalla relazione $x + y + z = 1$ ove 1 è una costante assigna-

positiva.

Si ha: $L = 1 - x - y$. Occorrerà quindi determinare il massimo della funzione $f(xy) = x^m y^n (1-x-y)^p$. Se per una certa coppia di valori di x e y la $f(xy)$ ammette un massimo dovranno tali valori verificare le equazioni:

$$\text{da cui: } \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &\equiv m x^{m-1} y^n (1-x-y)^p - x^m y^n p (1-x-y)^{p-1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &\equiv n y^{n-1} x^m (1-x-y)^p - x^m y^n p (1-x-y)^{p-1} = 0 \end{aligned} \quad \text{ossia}$$

$$x^{m-1} y^n (1-x-y)^{p-1} [m(1-x-y) - p x] = 0$$

$$x^m y^{n-1} (1-x-y)^{p-1} [n(1-x-y) - p y] = 0$$

Le soluzioni $x = y = L = 0$ di questo sistema debbono escludersi per le ipotesi fatte, onde le coppie di valori di x e y che danno il massimo della funzione devono trovarsi fra le soluzioni del sistema:

$$m(1-x-y) = p x \quad \text{da cui}$$

$$n(1-x-y) = p y$$

$$\frac{x}{m} = \frac{1-x-y}{p}, \quad \frac{y}{n} = \frac{1-x-y}{p} \quad \text{onde ricordando che } 1-x-y=L$$

$$\text{si ha: } \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{L}{p}$$

Concluderemo quindi che se esiste un massimo per la funzione proposta $x^m y^n L^p$, esso si ha assumendo le basi x, y, L proporzionali agli esponenti m, n, p . E d'altra parte evidente che nelle ipotesi fatte il prodotto $x^m y^n L^p$ assume un massimo per una terna di valori positivi delle x, y, L , quindi ecc. Si poteva giungere più rapidamente ai medesimi risultati prendendo il logaritmo della funzione $f(xy)$:

$$\log f(xy) = m \log x + n \log y + p \log (1-x-y)$$

e determinando, nelle ipotesi già fatte, il massimo della somma

$$m \log x + n \log y + p \log (1-x-y).$$

Generalizzazione del calcolo integrale a funzioni di più variabili. - Come possiamo calcolare la derivata parzia-

le di una funzione a due o più variabili, rispetto a una di esse, tenendo fisse le altre; così possiamo calcolare l'integrale di una funzione a due o più variabili rispetto a una di queste, supponendo in tale integrazione costanti le rimanenti. Volendo p. es. $\int f(x, y) dx$ rispetto ad x , si riguar-

dà in tale integrazione la y come una costante. In generale otterremo una funzione di x , e y , ma se tale integrale si calcola fra due limiti a e b , costanti, oppure funzioni di y otterremo un'espressione dipendente dalla sola y , cioè una funzione della sola y .

N^{ro} 1 / - Derivazione sotto il segno di integrale.

Dato l'integrale $I = \int_a^b f(x, y) dx$, abbiamo visto nel corso che se a e b sono costanti indipendenti da x e da y , la derivata di I rispetto a y è data da

$$(1) \quad \frac{dI}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$$

e che se a e b sono due funzioni $t(y)$ e $z(y)$ della sola y tale derivata è data da

$$(2) \quad \frac{dI}{dy} = \left[\int_x^t f(x, y) dx \right]_y' = \int_x^t f_y'(x, y) dx - f(x, y) x_y' + f(t, y) t_y'$$

Questa è uguale cioè alla somma algebrica di 3 termini di cui il 1° si ottiene derivando sotto il segno, il 2° è la funzione da integrare in cui al posto della x si mette il limite superiore, moltiplicata per la derivata

parziale di tale limite rispetto a y , e il 3° è la stessa funzione in cui al posto di x si mette il lim. superiore, moltip. per la derivata parziale di tal lim. rispetto ad y .

Es I° - Dato l'integrale $I = \int_a^b \cos(xy) dx$ in cui a e b sono costanti indipendenti da y , verificare direttamente la relazione (1).

Operando direttamente troviamo

$$I = \frac{1}{y} \int_a^b \cos(xy) y dx = \left[\frac{1}{y} \sin(xy) \right]_a^b = \frac{1}{y} (\sin by - \sin ay)$$

onde sotto $\frac{dI}{dy} = \frac{-1}{y^2} \{ \sin by - \sin ay \} + \frac{1}{y} \{ b \cos by - a \cos ay \}$

Applicando la (1) si ha: $\frac{dI}{dy} = \int_a^b \frac{\partial \cos(xy)}{\partial y} dx = \int_a^b x (-\sin xy) dx$

e calcolando quest'ultimo integrale per parti otteniamo

$$\int_a^b x (-\sin xy) dx = \left[x \frac{\cos xy}{y} \right]_a^b - \int_a^b \frac{\cos xy}{y} dx =$$

$$= \frac{b \cos by + a \cos ay}{y} - \left[\frac{1}{y^2} \sin xy \right]_a^b = \frac{1}{y} (b \cos by - a \cos ay) - \frac{1}{y^2} (\sin by - \sin ay)$$

Quadreremo così lo stesso risultato ottenuto sopra.

Es II° - Dato l'integrale $I = \int_{-1}^{+1} e^{xy} dx$ verificare la relazione (1)

Procedendo come all'es. precedente otteniamo che

$$I = \left[\frac{1}{y} e^{xy} \right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{y} (e^y - e^{-y}) \text{ da cui } \frac{dI}{dy} = -\frac{1}{y^2} (e^y - e^{-y}) + \frac{1}{y} (e^y + e^{-y})$$

Applicando la (1) si ha:

$$\frac{dI}{dy} = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial e^{xy}}{\partial y} dx = \int_{-1}^{+1} x e^{xy} dx = \left[\frac{x e^{xy}}{y} \right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \frac{e^{xy}}{y} dx =$$

$$\frac{1 - e^y}{y} - \left[\frac{e^{xy}}{y^2} \right]_{-1}^{+1} = \frac{e^y + e^{-y}}{y} - \frac{e^y - e^{-y}}{y^2}$$

risultato coincidente con quello ottenuto prima.

Es III^a Per un integrale del tipo $I = \int_a^b f(x) \varphi(y) dx$ la relazione

(1) si verifica immediatamente. Posto infatti $\int f(x) dx = F(x)$, si ha:

$$I = \varphi(y) \int_a^b f(x) dx = \varphi(y) [F(b) - F(a)]$$

per cui

$$\frac{dI}{dy} = \varphi'(y) \{F(b) - F(a)\} \quad \text{Lo stesso resul}$$

tato si ottiene applicando la (1)

$$\frac{dI}{dy} = \int_a^b f(x) \varphi'(y) dx = \varphi'(y) \int_a^b f(x) dx = \varphi'(y) \{F(b) - F(a)\}$$

Es IV^a - Dato l'integrale $I = \int_1^y \frac{y}{x} dx$ verificare direttamente la relazione (2).

$$\text{Abbiamo } I = \int_1^y \frac{y}{x} dx = y [\log x]_1^y = y \log y \quad \text{dove } \frac{dI}{dy} = \log y + 1$$

Applicando la (2) si ha:

$$\frac{dI}{dy} = \int_1^y \frac{\partial(\frac{y}{x})}{\partial y} dx + \left(\frac{y}{y} \cdot 1\right) - \left(\frac{y}{1} \cdot 0\right) = \int_1^y \frac{1}{x} dx + 1 = \log y + 1$$

Es V - Dato l'integrale $I = \int_{-y}^{+y} \lg(x+y) dx$ verificare la (2).

$$\text{Si ha } I = - \int_{-y}^{+y} \frac{-\sin(x+y)}{\cos(x+y)} dx = - [\log \cos(x+y)]_{-y}^{+y} = - \log \cos 2y.$$

$$\text{Per cui } \frac{dI}{dy} = - \frac{1}{\cos 2y} (-\sin 2y) 2 = 2 \lg 2y$$

Si ottiene lo stesso risultato applicando la (2)

$$\frac{dI}{dy} = \int_{-y}^{+y} \frac{1}{\cos^2(x+y)} dx + \lg 2y = [\lg(x+y)]_{-y}^{+y} + \lg 2y = 2 \lg 2y.$$

N^o 2) Un altro problema fondamentale riguardante le funzioni a due variabili è il seguente:

Date due funzioni $M(x, y)$, $N(x, y)$ di x e y , trovare,

Es. An. II sp. 14^a

quando esiste, una $F(x, y)$ tale che

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) \quad (1)$$

vale a dire che

$$dF = M(x, y) dx + N(x, y) dy \quad (2)$$

Affinchè tale funzione esista, cioè affinchè la (2) sia un differenziale esatto è necessario e sufficiente che $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. (Vedi testo p.)

In tal caso la $F(x, y)$ si trova mediante due successive integrazioni o quadrature. Infatti per la prima delle condizioni (1) abbiamo (considerando y costante)

$F = \int M(x, y) dx + Q(y)$ ove $Q(y)$ è una costante rispetto alla variabile d'integrazione x , ma dipendente in generale dalla y . Ora perchè sia anche soddisfatta la seconda delle (1) dobbiamo determinare $Q(y)$ in modo che

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + Q'(y) = N(x, y) \text{ da cui}$$

$$Q'(y) = N(x, y) - \int M(x, y) dx$$

Dalla quale si può ricavare $Q(y)$ mediante un'integrazione in quanto il 2° membro di tale eguaglianza risulta, ove sia verificata la

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \text{ funzione della sola } y.$$

Es. I. - Date le due funzioni $\begin{cases} M(x, y) = ax + by \\ N(x, y) = bx + cy \end{cases}$ determinare se esiste una funzione $F(x, y)$ tale che

$$\frac{\partial F}{\partial x} = ax + by ; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = bx + cy.$$

Si ha $\frac{\partial M}{\partial y} = b$, $\frac{\partial N}{\partial x} = b$ Dunque la $F(x, y)$ esiste ed è data

da $F = \int (ax + by) dx + q(y) = \frac{ax^2}{2} + bxy + q(y)$ ove $q(y)$ è una funzione di y da determinarsi in modo che

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{ax^2}{2} + bxy + q(y) \right) = bx + cy, \text{ ossia che } bx + q'(y) = bx + cy \text{ donde}$$

$$q'(y) = cy \text{ ossia } q(y) = \int cy dy = \frac{cy^2}{2} + K.$$

La $F(x, y)$ cercata sarà dunque data da

$$F = \frac{1}{2} (ax^2 + 2bxy + cy^2) + K'.$$

Es. II. Date le due funzioni $M = \frac{y}{x^2y^2+1}$, $N = \frac{x}{x^2y^2+1}$ cercare se esiste quella funzione $F(x, y)$ per la quale $\frac{\partial F}{\partial x} = M$, $\frac{\partial F}{\partial y} = N$.

Poichè

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{x^2y^2+1-2y^2x^2}{(x^2y^2+1)^2} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{x^2y^2+1-2y^2x^2}{(x^2y^2+1)^2} \quad \text{la}$$

$F(x, y)$ esiste ed è data da

$$F = \int \frac{y}{x^2y^2+1} dx + q(y) = \text{arctg } xy + q(y)$$

ove $q(y)$ è la solita costante da determinarsi in modo che

$$\frac{\partial}{\partial y} (\text{arctg } xy + q(y)) = \frac{x}{x^2y^2+1} \quad \text{da cui } q'(y) = 0 \text{ ossia } q(y) = K.$$

Sarà allora $F = \text{arctg } xy + K'$

Oss. - Un caso particolare importante in cui esiste certamente una funzione $F(x, y)$ avente per derivate parziali rispetto ad x e y le funzioni M ed N si ha quando M ed N siano rispettivamente funzioni della sola x e della sola y .

Sarà infatti, evidentemente $F(x, y) = \int M(x) dx + \int N(y) dy$, la funzione cercata. Possiamo dunque, in altri termini, affermare che l'espressione

$M(x) dx + N(y) dy$ è certamente in differenziale esatto:

data $\frac{1}{y} dx + \frac{1}{x} dy$ allora $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} \right) = -\frac{1}{y^2}$ $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}$