[illegible]

DOTT. GUIDO FUBINI

Professore ordinario del R. Politecnico di Torino

LEZIONI

DI

ANALISI MATEMATICA

Quarta edizione interamente rifusa.

S. T. E. N.

SOCIETÀ TIPOGRAFICO-EDITRICE NAZIONALE

(già: Roux e Viarengo - Marcello Capra - Angelo Panizza)

TORINO, 1920.

(3204)

PREFAZIONE

Ecco in questo libro riassunte le lezioni che svolgo al Politecnico di Torino. Nel redigerlo sono partito dalla convinzione che l'insegnamento teorico conserverà l'importanza, che merita, soltanto quando lo si sfrondi di tutto quanto è formale, oppure d'importanza soltanto teorica. La tecnica ha bisogno di concetti matematici, ma non ha per niente bisogno, per es., della concezione più generale degli enti, che possiamo chiamare *punto* o *funzione*, o della teoria delle funzioni a derivata non integrabile.

Ridurre perciò le teorie esposte alla parte essenziale; scegliere le dimostrazioni più facili; dimenticare, per quanto possibile, ogni considerazione di indole prevalentemente critica; dare il massimo sviluppo ai procedimenti induttivi, o di intuizione *a priori;* ricordare che il libro è destinato a giovani, per cui la matematica è mezzo, e non fine; illustrare pertanto le varie teorie con esempi suggeriti anche dalla fisica e dalla meccanica: ecco lo scopo prefissomi: Il lettore dirà se io l'ho raggiunto!

Ho ridotto in questa ultima edizione il numero degli esempi ed esercizi, perchè essi meritavano uno sviluppo maggiore; ad essi il Prof. Vivanti ed io abbiamo dedicato una pubblicazione a parte. L'ordine dei capitoli mi è stato suggerito dalle esigenze del Corso di Meccanica, che richiede svolti al più presto i principii del calcolo integrale, e possibilmente della teoria delle equazioni differenziali. Ma senza alcun danno per la facile lettura dell'opera si potrebbe mutare profondamente l'ordine dei varii Capitoli: Così, per es., si potrebbero invertire i Capitoli 12 e 13, oppure i Capitoli 13, 14, oppure i Capitoli 18, 19, e così via.

Nelle successive edizioni il libro è stato quasi completamente rifatto. Ho continuato l'opera di semplificare le dimostrazioni in quasi tutti i Capitoli del libro, di scegliere esempi semplici fuori dall'ambito delle matematiche pure, di illustrare quelle che io chiamo: *locuzioni abbreviate*, così comode nelle scienze applicate, che ricorrono al Calcolo. Ho ridotto ancora più i Capitoli dedicati alle equazioni algebriche, cercando di fondere, per quanto possibile, le teorie algebriche con le infinitesimali. Nelle ultime due edizioni, oltre a molti cambiamenti particolari, ho rifatto la trattazione della teoria dei determinanti; ho portato nell'Appendice il paragrafo sulla decomposizione delle frazioni razionali, perchè in questo libro a tale teoria non si ricorre mai, neanche per la ricerca degli integrali indefiniti.

Per quanto riluttante a introdurre nella scuola idee che non siano di primissima importanza, mi sono occupato dei limiti superiore ed inferiore di una classe di numeri, della teoria generale delle serie di potenze, e, ciò che può costituire una novità per un libro elementare, delle funzioni addittive di insieme. Spero però che i metodi seguìti, nuovi per la massima parte, sieno trovati così semplici e spontanei da rendere questi nuovi capitoli utili a una più facile lettura dell'opera complessiva e all'esatta intelligenza dei principii fondamentali del calcolo.

In questa 4ª edizione sono state intercalate in carattere piccolo molte osservazioni di indole critica; cosicchè la differenza fra gli argomenti svolti per lunga tradizione nei nostri primi biennii universitari e quelli di cui qui ci occupiamo sono soltanto i eguenti:

a) minore estensione data alla teoria delle equazioni algebriche (a cui l'esperienza dell'insegnamento mi ha provato preferibile sostituire lunghe esercitazioni di matematica elementare);

b) quasi nessun sviluppo alla definizione di integrali di Riemann (che oramai, dopo gli studii del Lebesgue, ha soltanto un valore storico anche per il matematico puro);

c) minore sviluppo alla teoria delle equazioni differenziali, che nei corsi di calcolo assume troppo sovente l'aspetto di un lungo elenco di artifici.

Possa pertanto questo volume essere ancora giudicato non difficile dai giovani cui è destinato; ed essere trovato accettabile anche da un teorico puro!

CAPITOLO I.

NUMERI REALI

§ 1. — Numeri razionali positivi.

L'aritmetica dopo i numeri interi positivi [il cui studio risolve completamente il problema di *contare*] considera i numeri fratti positivi, che insieme ai numeri interi risolvono in qualche caso il problema della misura (*). Se noi, per fissare le idee ci riferiamo ai segmenti, e ne scegliamo uno determinato M come unità di misura (potremo dire come *metro*) noi diciamo che un altro segmento N è uguale ad $\frac{n}{m}$ di M, o anche che N ha per *misura* $\frac{n}{m}$, o anche che il rapporto di N ad M vale $\frac{n}{m}$

(*) Nelle scienze più svariate si presenta il problema della *misura* delle grandezze di una certa classe G. Affinchè tale problema abbia senso, è necessario che, date due grandezze a, b distinte o no di G, si possa dire sempre quando $a > b$, oppure $a = b$, oppure $a < b$. E questi simboli $>, =, <$ dovranno essere definiti in modo che $a = a$; che, se $a > b$, sia $b < a$; che, se $a = b$, $b = c$ sia $a = c$, ecc.

Date due o più grandezze distinte o no di G, si deve poter definire la loro somma in guisa che $a + b = b + a$; $a + (b + c) = a + b + c$. Si potranno così definire i multipli di una qualsiasi grandezza a; e dovrà valere il postulato di Archimede che, se b è un'altra qualsiasi grandezza di G, esista un multiplo di a che sia maggiore di b. E dovranno anche esistere tutti i sottomultipli di una grandezza qualsiasi di G. La somma di più grandezze di G dovrà essere non minore di ogni suo addendo, ecc. ecc.

Se una classe G di grandezze gode delle precedenti proprietà, per essa si potrà porre il problema della *misura*. Tali, ad esempio, sono la classe delle lunghezze dei segmenti, la classe delle grandezze degli angoli; e queste classi sono specialmente semplici, perchè l'uguaglianza delle lunghezze di due segmenti, o dell'ampiezza di due angoli si riduce alla sovrapponibilità di tali segmenti o di tali angoli. Più complesse sono altre classi di grandezze (aree delle figure piane, volumi o pesi dei (dove con n, m sono indicati interi positivi), se N è la somma di n segmentini uguali δ, ciascuno dei quali è la m^{esima} parte di M (cioè M è la somma di m segmenti uguali a δ). E la definizione di uguaglianza di due numeri fratti (si pone $\frac{n}{m} = \frac{p}{q}$ se $nq = mp$) è scelta appunto in modo tale che, se un segmento N ha per misura tanto la frazione $\frac{m}{n}$, quanto l'altra $\frac{p}{q}$, allora le due frazioni siano uguali (*).

A tutti è nota poi quale importanza abbia (specialmente per i calcoli numerici) la trasformazione di una frazione in un numero decimale. Quando noi scriviamo, p. es.

$$\frac{1}{5} = 0{,}2\,; \qquad \frac{1}{50} = 0{,}02\,; \qquad \frac{6}{5} = 1{,}2$$

noi intendiamo soltanto di scrivere in altro modo le uguaglianze:

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10}\,; \qquad \frac{1}{50} = \frac{2}{100}\,; \qquad \frac{6}{5} = \frac{12}{10}.$$

In altre parole noi abbiamo trasformato le frazioni $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{6}{5}$ in altre, il cui denominatore è il numero 10, od una delle sue potenze $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, ecc.

---

corpi solidi, ecc.). Se noi scegliamo, per fissar le idee, il problema della misura delle lunghezze dei segmenti come problema iniziale, dobbiamo in sostanza definire dei simboli (*numeri*) e definire le proprietà di questi simboli in guisa che a segmenti di ugual lunghezza corrisponda lo stesso numero, che a ogni numero corrisponda un segmento, che a segmento di lunghezza maggiore corrisponda numero maggiore, che a un segmento α somma di due segmenti β, γ corrisponda una misura somma delle misure delle lunghezze di β e γ, ecc. Il problema analogo per ogni altra classe di grandezze si propone di definire una corrispondenza, dotata di proprietà analoghe, tra le grandezze considerate, e i numeri precedentemente definiti. E' noto che tale problema della misura ammette (se risolubile) infinite soluzioni: una delle quali si definisce fissando la grandezza *unitaria* (unità di misura), cioè la grandezza a cui si farà corrispondere il numero 1.

Per certe grandezze *orientate* (debiti e crediti, altezza sopra o sotto il livello del mare, ecc.) si pone pure un analogo problema della misura: il quale richiede però la considerazione dei numeri negativi.

(*) Si dice poi che $\frac{n}{m} < \frac{p}{q}$ e $\frac{p}{q} > \frac{n}{m}$ se $nq < mp$. In tal caso il segmento che ha $\frac{n}{m}$ per misura è minore del segmento, la cui misura vale $\frac{p}{q}$.

Sarà però qui opportuno (per analogia con quanto segue) scrivere ogni numero decimale limitato come un numero decimale illimitato (con infinite cifre decimali) scrivendo:

$$\frac{1}{5} = 0,2000000... ; \quad \frac{1}{50} = 0,020000... ; \quad \frac{6}{5} = 1,200000... ;$$

ciò che, per note convenzioni, non muta il significato delle precedenti uguaglianze.

Di significato assai più riposto sono le uguaglianze tra un numero fratto generico, e il corrispondente numero decimale (che è o *periodico*, o *periodico misto*), quali, ad es., le uguaglianze:

$$\frac{4}{3} = 1,3333.....$$

$$\frac{31}{30} = 1,0333.....$$

che possiamo considerare insieme alle analoghe:

$$\frac{9}{9} = 1 = 0,9999.....$$

$$\frac{1}{5} = 0,2 = 0,19999.....$$

Per es. la $\frac{4}{3} = 1,333.....$ ci dice che il segmento N, la cui misura è $\frac{4}{3}$, è compreso:

α) tra i segmenti aventi per misura 1 o 2;

β) tra i segmenti aventi per misura 1,3 e $1,3 + 0,1 = 1,4$;

γ) tra i segmenti aventi per misura 1,33 e

$$1,33 + 0,01 = 1,34, \text{ ecc.}$$

In altre parole il segmento N di misura $\frac{4}{3}$ contiene una volta, e non due volte il segmento M.

Se da N sottraggo M il massimo numero di volte possibile (una volta), nel segmento residuo N_1 la decima parte di M è contenuta tre volte e non quattro volte. Se da N_1 sottraggo il massimo numero di volte possibile (tre volte) la decima parte di M, nel segmento residuo N_2 la centesima parte di M è contenuta tre volte e non quattro volte, e così via.

In altre parole la $\frac{4}{3} = 1,333....$ equivale alle seguenti disuguaglianze

$$\left.\begin{array}{r} 1 < \frac{4}{3} < 2 \\ 1,3 < \frac{4}{3} < 1,3 + \frac{1}{10} = 1,4 \\ 1,33 < \frac{4}{3} < 1,33 + \frac{1}{100} = 1,34 \\ 1,333 < \frac{4}{3} < 1,333 + \frac{1}{1000} = 1,334, \text{ ecc.} \end{array}\right\} \quad (1)$$

Osservazioni perfettamente analoghe valgono per la

$$\frac{31}{30} = 1,0333..., \text{ ecc.}$$

Anzi queste osservazioni ci permettono di dare un metodo per sviluppare in numero decimale un numero fratto generico $\frac{p}{q}$. Se N è, p. es., il segmento, di cui $\frac{p}{q}$ è la misura, si sottragga da N il numero massimo possibile n di volte il metro M. Questo massimo numero n è la parte intera dello sviluppo. Dal segmento residuo N_1 si sottragga il massimo numero possibile n_1 di volte la decima parte di M. Questo intero n_1 sarà la prima cifra decimale dello sviluppo. Dal segmento residuo N_2 si sottragga il massimo numero possibile n_2 di volte la centesima parte di M. Il numero n_2 sarà la seconda cifra decimale del cercato sviluppo. E così via.

Analogo, ma leggermente distinto, è il significato delle

$$\frac{1}{5} = 0,2000000..... ; \qquad \frac{1}{5} = 0,19999.....$$

La prima di queste significa che:

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leqq \frac{1}{5} < 0 + 1 = 1 \\ 0,2 \leqq \frac{1}{5} < 0,2 + \frac{1}{10} = 0,3 \\ 0,20 \leqq \frac{1}{5} < 0,20 + \frac{1}{100} = 0,21 \\ 0,200 \leqq \frac{1}{5} < 0,200 + \frac{1}{1000} = 0,201, \text{ ecc.} \end{array}\right\} \quad (2)$$

La seconda significa che:

$$\left.\begin{array}{r}0 < \frac{1}{5} \leqq 0 + 1 = 1 \\ 0{,}1 < \frac{1}{5} \leqq 0{,}1 + \frac{1}{10} = 0{,}2 \\ 0{,}19 < \frac{1}{5} \leqq 0{,}19 + \frac{1}{100} = 0{,}20 \\ 0{,}199 < \frac{1}{5} \leqq 0{,}199 + \frac{1}{1000} = 0{,}200, \text{ ecc.}\end{array}\right\} \quad (3)$$

È a tutti evidente l'analogia tra le (1), (2), (3). Unica differenza è la seguente. In ciascuna delle (1) compare due volte il segno $<$. Nelle (2) il primo dei segni $<$ è sostituito da un $\leqq$; nelle (3) il secondo dei segni $<$ è sostituito da $\leqq$.

E ciò perchè il numero $\frac{1}{5}$ è uguale al numero decimale limitato $0{,}2 = 0{,}20 = 0{,}200 = \ldots$; il quale compare, a partire da una delle (2) o delle (3) in poi, nei primi membri delle (2), nei secondi membri delle (3).

Un fatto analogo si presenta per ogni numero, che sia uguale a un numero decimale limitato. Così, p. es.:

$$0{,}52 = 0{,}520000\ldots\ldots = 0{,}51999\ldots\ldots$$

perchè, per nota convenzione aritmetica, si considerano come *uguali* due numeri decimali l'uno formato da certe cifre seguìte da infiniti zeri, l'altro formato dalle stesse cifre (tranne l'ultima cifra non nulla, che viene diminuita di 1) seguìte da infiniti 9. Per tali sviluppi decimali valgono disuguaglianze analoghe alle (2), (3), mentre per ogni numero decimale, che non sia del tipo ora studiato, valgono disuguaglianze analoghe alle (1). I primi numeri si possono scrivere in due modi distinti sotto forma di numero decimale; i secondi si possono scrivere in un sol modo come numeri decimali.

Diremo che due numeri α, β sono uguali fino alla n^{esima} cifra decimale, se la parte intera e le prime n cifre dopo la virgola nello sviluppo decimale di α (o in uno dei due sviluppi di α, se α ammette due sviluppi decimali) sono uguali alla parte intera ed alle prime n cifre dopo la virgola nello sviluppo, o in uno dei due sviluppi del numero β.

Così, p. es.:

$$\frac{13}{99} = 0{,}131313..... ; \qquad \frac{131}{999} = 0{,}131131..... ;$$

sono uguali fino alla terza decimale.

Si noti che, secondo tale convenzione, p. es.:

$$\frac{1}{9} = 0{,}1111..... \quad \text{e} \quad \frac{2}{9} = 0{,}2222..... ;$$

pure non avendo la prima decimale comune, sono entrambi uguali fino alla prima cifra decimale con

$$\frac{1}{5} = 0{,}1999..... = 0{,}2000.....$$

Notiamo che:

La lunghezza di un segmento N *commensurabile con* M (cioè la cui misura è un numero fratto) *ha una misura e una sola, che si può scrivere sotto forma di numero decimale* (periodico). E viceversa *ogni numero decimale periodico è misura della lunghezza di un segmento* N *commensurabile con* M, *e dei segmenti ad esso sovrapponibili, ma di nessun altro segmento.*

Se N_1, N_2 *sono segmenti commensurabili con* M, *altrettanto avviene del segmento somma* $N_1 + N_2$; *il quale,* come è noto, *ha per misura la somma delle misure dei segmenti* N_1, N_2.

Se N_1 *è il più grande dei due segmenti* N_1, N_2, *la misura di* N_1 *è maggiore di quella di* N_2 *e viceversa.* (È detto per brevità: misura di N_1 anzichè misura della lunghezza di N_1).

§ 2. — **Numeri irrazionali.**

Come è ben noto, le precedenti considerazioni e i precedenti risultati sono stati estesi anche ai segmenti N incommensurabili con M (p. es. alla diagonale del quadrato, il cui lato è M). Anche per tali segmenti si è definita la *misura* che è un numero che ancora gode delle proprietà testè enunciate.

Se N è un tale segmento, si sottragga da N il massimo numero possibile p di volte il metro M [cioè $pM < N < (p+1)M$]. Dal segmento residuo N_1 si sottragga il massimo numero possibile n_1 di volte la decima parte di M. Dal segmento residuo N_2 si sottragga il massimo numero n_2 di volte la centesima parte di M e così via.

Il simbolo $p, n_1 n_2 n_3 \ldots..$ ottenuto scrivendo dopo l'intero p successivamente le cifre $n_1, n_2, n_3, \ldots..$ si chiama *numero irrazionale*, e si assume come *misura* di N. Esso è un numero decimale illimitato non periodico (perchè altrimenti N sarebbe commensurabile con M).

Ogni segmento N *determina così la sua misura; segmenti uguali hanno misure uguali.*

Viceversa *due segmenti aventi misure uguali sono uguali.* Infatti, se n è un intero qualsiasi, i due segmenti contengono lo stesso numero di volte la $(10^n)^{esima}$ parte di M (cioè il segmento σ ottenuto dividendo M in 10^n parti uguali). La differenza δ dei due segmenti dati non può perciò superare σ; e ciò, qualunque sia n. Ma, se δ non è zero, io posso prendere n così grande che $\sigma < \delta$ (*). Ciò che contraddirebbe al già dimostrato. Quindi $\delta = 0$, e i due segmenti sono uguali.

Il postulato della continuità della retta ci assicura poi che: *Ogni numero decimale limitato o no è misura di un segmento* N (e soltanto dei segmenti uguali a questo).

Vi è dunque una corrispondenza biunivoca tra i segmenti N di una retta ed i numeri razionali o no (quando segmenti uguali si considerino come non distinti).

Tutti i numeri fin qui definiti diconsi *positivi.*

Di due numeri (razionali o irrazionali) positivi disuguali si dice naturalmente maggiore quello che misura segmento maggiore. È facile trasformare questa definizione. Se, per semplicità, escludiamo i numeri le cui cifre decimali sono da un certo punto in poi tutte uguali a *nove*, sostituendoli con altri, le cui cifre decimali sono da un certo punto in poi tutte uguali a zero, troviamo, come è ben noto:

Il numero p *è maggiore del numero* q *se*

1° *la parte intera di* p *supera la parte intera di* q oppure, se

2° *le parti intere di* p, q *sono uguali, ma la prima cifra decimale di* p *supera l'omologa di* q oppure, se

3° *i numeri* p, q, *sono uguali fino alle* n^{esima} *cifra decimale, ma la* $(n+1)^{esima}$ *cifra decimale di* p *supera l'omologa di* q.

Non insistiamo sulle altre ben note proprietà delle disuguaglianze.

Secondo le nostre convenzioni, il numero non è che un simbolo per indicare il rapporto di due grandezze di una stessa classe di grandezze (per cui si può porre il problema della misura). Cosicchè al *numero* e all'algebra dei numeri potremmo

(*) E ciò in virtù del postulato di Archimede.

in fondo sostituire il concetto di un tale *rapporto* e l'algebra dei *rapporti*. E come simbolo per indicare un rapporto, p. es., delle lunghezze di due segmenti potremmo addirittura assumere una figura composta con due segmenti uguali ai segmenti dati.

Ognuno capisce quanto ciò sarebbe incomodo; e lo studio dei rapporti, così come ha svolto Euclide, indica già quanta complicazione ne verrebbe alla teoria.

Ma non è detto che i simboli da noi introdotti sieno gli unici possibili. Che si possano mutare è ben evidente. Basta, p. es., pensare che nel nostro sistema (decimale) di numerazione il numero 10 (il numero delle dita delle due mani) ha un posto preponderante. Se noi gli sostituissimo un altro numero (è stato già proposto il numero 12) come base del sistema di scrittura dei numeri, sarebbe già cambiato il nostro simbolismo.

Osservazione critica. — Il presente modo di esporre la teoria dei numeri irrazionali, per quanto molto semplice sotto molti riguardi, ha però l'inconveniente che la definizione *pare* dipenda appunto dal numero 10 scelto a base del nostro sistema di numerazione. Bisognerebbe perciò definire l'uguaglianza di due numeri (che avessero anche infinite cifre dopo la virgola) scritti in due differenti sistemi di numerazione: ciò che del resto non presenterebbe alcuna difficoltà. Se p. es. si ammettesse di ricorrere alla misura dei segmenti, due tali numeri si direbbero uguali, quando sono misura di segmenti uguali. E sarebbe anche molto facile trasformare questa proprietà in una proprietà equivalente di carattere puramente aritmetico.

§ 3. — Limite superiore e inferiore. Operazioni sui numeri positivi.

α) Sia G una classe di numeri n positivi. Cerchiamo, se esiste, *il più grande* di questi numeri, che noi indicheremo con N. Evidentemente la parte intera di N dovrebbe essere la più grande delle parti intere dei numeri n. Distinguiamo due casi:

A) Tra le parti intere dei numeri n non ve n'è alcuna che sia più grande di tutte le altre; cioè, preso *ad arbitrio* un intero K, esiste almeno un numero n di G, la cui parte intera è uguale o maggiore di K. In tal caso diremo che $+\infty$ è il *limite superiore* dei numeri n di G; frase che è soltanto un modo di dire e che non vuole introdurre affatto l'infinito come nuovo ente o numero. Si suole anche dire che $+\infty$ è maggiore di ogni numero (frase che anch'essa è soltanto un modo di dire). In questo caso A la classe G *non* contiene un numero *massimo* (maggiore di tutti gli altri). Esempi di questo tipo sono le classi di tutti gli interi, o di tutti gli interi pari.

B) Tra le parti intere dei numeri n di G ve ne è una *massima*; esiste cioè un intero m, tale che *almeno* un numero n di G abbia m come parte intera, ma *nessun* numero di G abbia parte intera maggiore di m. In questo caso sia m_1 la *massima* prima cifra decimale di quei numeri di G, che hanno m come parte intera; sia m_2 la *massima* seconda cifra decimale di quei numeri di G, che hanno m per parte intera ed m_1 per prima cifra decimale; sia m_3 la *massima* terza cifra decimale di quei numeri di G, che hanno m per parte intera ed m_1, m_2 rispettivamente come prima e seconda cifra decimale. E così via. Noi chiameremo *limite superiore* dei numeri di G il numero $L = m, m_1 m_2 m_3 \ldots\ldots$, che si ottiene scrivendo dopo m le successive cifre decimali $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots$ Evidentemente il numero cercato N coincide, se esiste, con questo numero L.

B_1) Può avvenire che la classe G contenga tra i suoi numeri il numero L. *Ciò avviene evidentemente*, p. es., *se la classe* G *contiene un numero finito di numeri* n. In tal caso L è proprio il *massimo* numero di G, che noi cercavamo.

B_2) Può invece avvenire che il numero L *non* appartenga alla classe G. Ciò avviene, p. es., se G è la classe dei numeri *minori* di 2; in tal caso $L = 1{,}9999 \ldots\ldots = 2$, che *non* appartiene a G. In tal caso di nuovo la classe G *non possiede* un numero massimo (questo, se esistesse, coinciderebbe con L, che viceversa non è un numero di G, mentre invece N dovrebbe essere un numero di G).

Una classe G di numeri possiede in ogni caso un limite superiore L. Se questo appartiene alla classe G, esso è anche il massimo numero di G. Se esso non appartiene a G, la classe G non contiene un numero massimo. Se L non è $+\infty$, allora L è il minimo numero, che non sia superato da alcun numero di G; se k è un intero qualsiasi, esiste in G almeno un numero che coincide col limite superiore L fino alla k^{esima} cifra decimale inclusa (*).

Perciò sono possibili tre soli casi:

1°) **Non vi è alcun numero maggiore di tutti i numeri di G** (ossia $L = \infty$);

2°) **Tra i numeri di G ve n'è uno L massimo** (L **è finito ed appartiene a** G);

3°) **Tra i numeri positivi maggiori di ogni numero di G ve n'è uno L minimo** (L **è finito e non appartiene a** G).

Un numero decimale illimitato N è il limite superiore dei numeri decimali limitati, che se ne deducono trascurando le cifre decimali da un certo punto in poi. Così, p. es., $0{,}3333 \ldots\ldots$ è il limite superiore dei numeri $0{,}3$; $0{,}33$; $0{,}333$; ecc.

Se ogni numero m della classe G soddisfa alla $m < k$, oppure alla $m \leqq k$, oppure alla $m > k$, oppure alla $m \geqq k$ (dove k è un numero prefissato), allora il limite superiore L soddisferà rispet-

(*) Si dimostra che il limite superiore non varia, se si cambia il numero assunto come base del sistema di numerazione, servendosi delle proprietà qui enunciate per L.

tivamente nei primi due casi alla $L \leqq k$, nel terzo alla $L > k$, nel quarto alla $L \geqq k$. Notiamo in particolare che alla disuguaglianza $m < k$ per i numeri m di G corrisponde per il limite superiore L la disuguaglianza *attenuata* $L \leqq k$.

β) Se nelle precedenti considerazioni, anzichè scegliere la massima parte intera, e successivamente le massime cifre decimali, avessimo scelto la minima parte intera, e successivamente le minime cifre decimali, avremmo definito il *limite inferiore* l di G. *Nessun numero di* G *è minore del limite inferiore* l, *il quale è il più grande dei numeri che non superano alcun numero di* G. *Se tra i numeri di* G *ve ne è uno minimo, e soltanto in tale caso, il numero* l *appartiene a* G, *e coincide allora con tale numero minimo. Se* k *è un intero arbitrario, vi è in* G *almeno un numero uguale ad* l *almeno fino alla* k^{esima} *cifra decimale. Se i numeri* m *di* G *soddisfano alla* $m > h$, *allora* $l \geqq h$; ecc. ecc.

Nei casi 2° e 3° del precedente teorema L *(che è finito) è anche il limite inferiore della classe* G′ *formata dai numeri positivi maggiori di ogni numero di* G. *Il numero* L *o è il* massimo *dei numeri di* G, *perchè appartiene a* G, *oppure è il* minimo *dei numeri di* G′, *perchè appartiene a* G′.

γ) *La somma di due o più numeri positivi* n, m, ... *è il limite superiore della classe dei numeri* (*razionali*) *ottenuta sommando i numeri decimali limitati dedotti da* n, m, ... *tenendo conto soltanto di un numero finito di cifre decimali.*

Questa definizione è la più naturale estensione del teorema: *La somma di due o più numeri decimali* LIMITATI n, m, ... *è maggiore del numero ottenuto sommando quei numeri che si deducono da* n, m, ..., *trascurando le cifre decimali a partire da un certo posto in poi.*

È ben noto che da questa definizione si deduce: *Se il segmento* N *è somma di più segmenti* $N_1, N_2, \ldots$, *la misura di* N *è eguale alla somma delle misure dei segmenti* $N_1, N_2, \ldots$

Sono ben note le seguenti proprietà dell'addizione:

$$n + m = m + n \qquad \text{(proprietà commutativa)}$$
$$n + (m + p) = n + m + p \qquad \text{(proprietà associativa).}$$

In modo perfettamente analogo si definisce il prodotto (*)

(*) Ricordo che, se m, n sono le misure della base ed altezza di un rettangolo, il prodotto $m\,n$ è la misura dell'area del rettangolo, quando come unità di misura delle aree si scelga il quadrato, il cui lato è l'unità M di misura delle lunghezze.

di due o più numeri positivi; e si dimostrano poi le seguenti proprietà fondamentali della moltiplicazione:

$$n\,m = m\,n \qquad \text{(proprietà commutativa)}$$
$$n\,m\,p = n\,(m\,p) \qquad \text{(proprietà associativa)}$$
$$n\,(m+p) = n\,(m+p) \qquad \text{(proprietà distributiva).}$$

La differenza [quoziente] di due numeri n, m si definisce poi come quel numero $n - m$ $\left[\text{quel numero } \dfrac{n}{m}\right]$ che sommato con m [moltiplicato per m] riproduce il numero n.

Esistono regole di calcolo numerico per eseguire nel modo più rapido, ed evitando calcoli inutili, le operazioni elementari dell'aritmetica sui numeri decimali limitati od illimitati, quando sia prefissata l'approssimazione, che si esige dal risultato finale.

Queste regole possono essere assai utili per chi abbia da eseguire calcoli numerici. E il loro studio, di cui qui non ci possiamo occupare, perchè estraneo all'argomento di questo corso, è perciò assai raccomandabile per ogni calcolatore.

Restando nell'ambito dei numeri positivi o nulli, si può parlare della differenza $n - m$, soltanto se $n \geqq m$.

Non si può parlare del quoziente $\dfrac{n}{m}$ se $m = 0$.

Con x^n, se x è un numero positivo, ed $n > 1$ è un intero positivo, si indica il prodotto di n fattori uguali ad x. E si pone poi $x^1 = x$; e, se $x \neq 0$, $x^0 = 1$. Il simbolo 0^0 si considera privo di significato.

Se $n > 1$ è un intero positivo, con $\sqrt[n]{x}$ si indica il numero y tale che $y^n = x$ (*). Se x aumenta, aumenta tanto la $\sqrt[n]{x}$ quanto la x^n. Se m, n sono interi positivi ed $n > 1$, con $x^{\frac{m}{n}}$ si intende la $\sqrt[n]{x^m}$ Se poi p è un numero positivo qualsiasi, con x^p si intende il limite superiore delle potenze x^q, quando q sia uno dei numeri ottenuti da p, tenendo conto soltanto di un numero finito di cifre decimali (dell'esponente p).

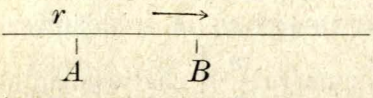
È noto che, se p, q sono numeri positivi o nulli arbitrari, allora:

$$x^p\,x^q = x^{p+q}.$$

(*) Si può dimostrare l'esistenza di y, definendo y come il limite superiore della classe formata da quei numeri z, che soddisfano alla $z^n \leqq x$.

§ 4. — Numeri reali.

Insieme ai numeri positivi l'algebra considera, come è noto, anche i numeri negativi; i quali con le seguenti convenzioni, trovano pure applicazione nel problema della misura dei segmenti.



α) Una retta r si dice orientata, se è fissato su di essa un verso che si assume come positivo (nella figura e in quanto segue da sinistra a destra). Un segmento orientato di tale retta AB si ritiene percorso nel verso dal punto A al punto B, e si ritengono distinti i segmenti (orientati) AB, BA i cui versi sono opposti.

Misura algebrica di un segmento AB di r è il rapporto di tale segmento al segmento unitario, preso col segno $+$ o col segno $-$, secondo che il verso del segmento (il verso da A a B) coincide col verso positivo o col verso negativo di r. E se noi indichiamo con uno stesso simbolo un segmento e la sua misura, e per convenzione poniamo in generale $a = -(-a)$, avremo $AB = -BA$, $AB + BA = 0$. Cioè:

La misura di un segmento cambia di segno se ne invertiamo gli estremi.

I numeri razionali o irrazionali, positivi o negativi, fin qui definiti, hanno ricevuto complessivamente il nome di *numeri reali*. Se a è un numero reale, con $|a|$ ne indichiamo il valore assoluto; indichiamo cioè con $|a|$ lo stesso numero a, se a è positivo e il numero a cambiato di segno, se a è negativo.

β) Due segmenti orientati si diranno uguali, se hanno lo stesso verso e sono uguali dal punto di vista della geometria elementare: ossia se hanno misure uguali e dello stesso segno.

Due numeri si diranno uguali se hanno uguale segno e uguale valore assoluto. I numeri negativi si considerano minori di zero e dei numeri positivi. Di due numeri negativi si considera *maggiore* quello che è *minore* in valore assoluto.

Siano dati i segmenti c, d; preso un punto qualsiasi A di r, si consideri il segmento AB uguale (e quindi anche ugualmente orientato) a c, e quindi il segmento BC uguale (e quindi anche ugualmente orientato) a d. Il segmento AC (ed ogni segmento ad esso uguale) si dirà somma dei segmenti c, d. Questa definizione coincide evidentemente con la solita, quando i segmenti c, d sono entrambi positivi.

Diremo poi somma di due numeri x, y il numero che misura il segmento somma dei due segmenti che hanno per misura x oppure y.

Si riconosce facilmente che:

1° *Il segno della somma di due numeri è uguale al segno dell'addendo, il cui valore assoluto è più grande.*

2° *Il valore assoluto della somma di due numeri è uguale alla somma o alla differenza dei valori assoluti dei due addendi, secondo che questi hanno o non hanno lo stesso segno.*

Queste proprietà potrebbero servire alla definizione puramente analitica della somma di due numeri.

Si estendono facilmente queste definizioni alla somma di più numeri, e si dimostrano le solite regole del calcolo algebrico.

Se A, B, C, sono tre punti qualsiasi di r, è per definizione:

$$AB + BC = AC = -CA, \text{ ossia } AB + BC + CA = 0.$$

Così se A_1, A_2, A_3, A_4 sono punti qualsiasi di r, è:

$$A_1 A_2 + A_2 A_3 = A_1 A_3 \; ; \quad A_1 A_3 + A_3 A_4 + A_4 A_1 = 0$$

donde: $$A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_4 + A_4 A_1 = 0.$$

Più in generale, se $A_1 A_2 \ldots.., A_n$ sono punti qualsiasi di r, è $A_1 A_2 + A_2 A_3 + \ldots.. A_{n-1} A_n + A_n A_1 = 0$.

E questa formola vale anche se i punti A non sono tutti distinti.

γ) Si definisce poi il prodotto di due o più numeri reali (fattori) quel numero che ha per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei fattori, e il segno $+$ o il segno $-$ secondo che vi è numero pari o dispari di fattori negativi.

Si definiscono poi la sottrazione e la divisione come le operazioni inverse dell'addizione e della moltiplicazione, estendendo quindi le solite regole del calcolo algebrico.

Un numero a è minore o maggiore di un altro numero b, secondochè $a - b$ è negativo o positivo.

δ) È poi evidente che se a, b sono numeri reali qualsiasi

$$|a \pm b| \leqq |a| + |b|$$
$$|a \pm b| \geqq |a| - |b|$$
$$|a \pm b| \geqq |b| - |a|$$
$$|a \, . \, b| = |a| \, . \, |b| \, .$$

Se $b \neq 0$, allora $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

ε) Se G è una classe di numeri negativi $-m$, e se L, l, sono i limiti superiore e inferiore dei numeri m, allora $-L$ e $-l$ si dicono rispettivamente il limite inferiore e superiore dei numeri di G. Queste definizioni appariranno spontanee a chi pensi che (secondo le proprietà da noi ricordate) di due numeri negativi si considera come minore quello che è maggiore in valore assoluto.

Se G è una classe che contiene sia numeri positivi p, sia numeri negativi n, si dirà limite superiore (inferiore) di G il limite superiore (inferiore) dei numeri positivi p (negativi n) che appartengono a G.

Anche in questo caso generale si può ripetere quanto per tali limiti si disse al § 3.

ζ) Se G, Γ sono due classi di numeri *reali* tali che il limite λ inferiore di G coincida con il limite superiore di Γ, noi diciamo che le classi G, Γ sono *contigue*, che G è la classe superiore e che λ è il *numero di separazione* delle due classi. In tal caso nessun numero di G può essere inferiore ad alcun numero di Γ; e, preso un intero positivo k arbitrario, esiste tanto in G che in Γ almeno un numero che coincide con λ fino alla k^{esima} decimale. I due numeri così scelti in G e in Γ differiranno al più per $\frac{2}{10^k}$.

Viceversa, se nessun numero della classe G è inferiore ad un numero della classe Γ, e se per ogni numero intero positivo k esistono un numero di G e un numero di Γ, la cui differenza non supera $\frac{2}{10^k}$, è ben evidente che le classi G, Γ sono contigue, e che G è la classe superiore.

η) La teoria delle potenze e delle radici rapidamente riassunta al § 3 si estende con qualche modificazione ai numeri negativi. Così, se x è negativo, ed n intero positivo, la x^n è positiva se n è pari, negativa se n è dispari. Se ne deduce che, se n è pari ed x è negativo, il simbolo $\sqrt[n]{x}$ si deve considerare come sprovvisto di significato nell'attuale campo dei numeri reali.

E se, pure essendo n pari, la x è positiva, il simbolo $\sqrt[n]{x}$ ha un doppio significato. Perchè se y è un numero positivo tale che $y^n = x$, cosicchè $y = \sqrt[n]{x}$, anche $-y$ soddisfa alla analoga uguaglianza $(-y)^n = x$, cosicchè anche $-y$ si può considerare come radice n^{esima} della x. Salvo però avvertenza contraria, col simbolo $\sqrt[n]{x}$ indicheremo sempre la radice positiva.

Se n è dispari, $\sqrt[n]{x}$ ha sempre uno e uno solo significato. Secondo tali convenzioni non si parlerà mai di uua potenza $x^{\frac{m}{n}}$, quando x è negativo, e dei due numeri interi m, n il secondo è pari. Nè parleremo mai di una potenza x^p se x è negativo, p è irrazionale.

Se n è un numero negativo, poniamo $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$.

Vale anche nel caso attuale la formola

$$x^p x^q = x^{p+q}$$

in tutti i casi in cui i simboli x^p, x^q hanno un significato.

θ) Se tre numeri a, x, y sono legati dalla $a^x = y$, noi diremo che x è il logaritmo di y in base a, e scriveremo $x = \log_a y$. La base a si suppone positiva e quasi sempre maggiore di 1 (anzi assai spesso uguale a 10). Si dimostra:

1° Ogni numero positivo $y \neq 0$ ha un logaritmo e uno solo, che è uguale a zero per $y = 1$, è uguale ad 1 per $y = a$, e che cresce (se $a > 1$) al crescere di y. I numeri negativi non hanno logaritmo.

2° Se $b \neq 1$, allora $\log_a y = \log_a b \log_b y$.

3° $\mathrm{Log}_a (y_1 y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2$

$$\log_a \frac{y_1}{y_2} = \log_a y_1 - \log_a y_2 ; \qquad \log_a (y_1^m) = m \log_a y_1.$$

CAPITOLO II.

APPLICAZIONI GEOMETRICHE

§ 5. — **Misura (algebrica) degli angoli.**

α) È uso universale misurare gli angoli, assumendo ad unità di misura il grado: che di solito si definisce come la novantesima parte di un angolo retto (e soltanto da pochissimi come la centesima parte di un angolo retto). La sessantesima parte del grado dicesi minuto primo, la sessantesima parte di un minuto primo dicesi minuto secondo.

Se poi vogliamo parlare di misura algebrica degli angoli posti nel piano del foglio col vertice in O, dovremo cominciare ad assumere come positivo uno dei versi secondo cui può rotare un raggio di origine O intorno ad O mantenendosi nel piano del foglio: e in generale assumeremo come verso positivo il verso contrario a quello secondo cui si muoverebbero gli indici di un orologio posto nel piano del foglio col quadrante rivolto al lettore; questo verso è quello che trasporta (nel caso della fig. 1) il raggio a sul raggio b attraverso l'angolo acuto. L'angolo descritto da un raggio (semiretta) a, che ruota attorno alla propria origine O, sarà considerato come positivo o come negativo secondo che la rotazione è avvenuta nel verso scelto come positivo o nel verso opposto; alla misura (p. es. in gradi) di quest'angolo premetteremo nei due casi rispettivamente il segno $+$ o il segno $-$. L'angolo ab [oppure (a, b)] di due raggi a, b, aventi l'origine comune O, sarà poi per definizione l'angolo di cui primo raggio a deve rotare intorno ad O per sovrapporsi al secondo raggio b.

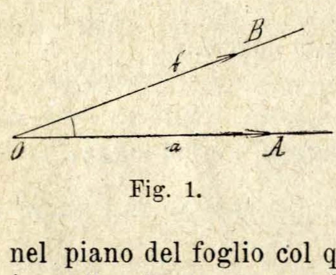


Fig. 1.

Quest'angolo non è determinato, ma anzi ha infiniti valori: infatti, se un giro positivo di α gradi porta a in b, un giro negativo di $360^\circ - \alpha$ porta ancora a in b; e, poichè un giro di $\pm k\, 360^\circ$ (k essendo un qualsiasi intero positivo) porta a in a, anche un giro positivo di $k\, 360^\circ + \alpha$, oppure un giro negativo di $360^\circ - \alpha + k\, 360^\circ$ porta a in b. Quindi, se α è la misura (algebrica) di (a, b) in gradi, $\alpha + h\, 360^\circ$ sono altrettanti valori della misura dello stesso angolo, qualunque sia l'intero h positivo o negativo; e viceversa, se α è un valore di (a, b) tutti gli altri valori di (a, b) differiscono da α per un multiplo di $\pm 360^\circ$. Noi considereremo naturalmente questi infiniti valori come equivalenti, ossia considereremo come equivalenti due angoli α e β, quando la loro differenza è un multiplo di 360° e scriveremo in tal caso $\alpha \equiv \beta$, e anche talvolta $\alpha = \beta$.

Se è nota la posizione di un raggio a uscente da O, la posizione di ogni altro raggio b uscente da O è determinata, quando si conosca un valore dell'angolo (a, b). È poi evidente che se a, b sono due raggi aventi la stessa origine O e se con un giro di α gradi intorno ad O (essendo α numero positivo o negativo qualunque) il raggio a si sovrappone a b, con un giro uguale ma di segno contrario il raggio b si sovrappone ad a, cosicchè:

$$(a, b) \equiv -(b, a) \quad \text{ossia} \quad \widehat{ab} + \widehat{ba} \equiv 0.$$

Se a, b, c sono tre raggi posti nello stesso piano ed aventi la stessa origine O, se un giro di α gradi porta a nel raggio b, e un giro di β gradi porta b nel raggio c, allora un giro di $\alpha + \beta$ gradi porterà a in c: quindi

$$(a, b) + (b, c) \equiv (a, c)\ ;\ (a, b) + (b, c) + (c, a) \equiv 0,$$
$$(a, b) \equiv (c, b) - (c, a)\ ;\ (b, a) \equiv (c, a) - (c, b).$$

In generale se $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_{n-1}, a_n$ sono raggi posti nello stesso piano ed uscenti da O si avrà:

$$(a_1, a_2) + (a_2, a_3) + \ldots\ldots + (a_{n-1}, a_n) + (a_n, a_1) \equiv 0.$$

β) Se A, B sono due punti, per raggio AB intenderemo sempre il raggio uscente da A e contenente B.

Siano ora r, r' due rette, su ciascuna delle quali è fissato il verso positivo, che si incontrino in un punto O: se R, R' sono due punti di r, r' tali che i segmenti OR, OR' siano positivi, l'angolo (r, r') sarà per definizione l'angolo dei raggi OR, OR'.

Se r, r' non s'incontrano, e se OR, $O'R'$ sono due segmenti positivi di r, r', per angolo (rr') s'intende l'angolo del raggio OR col raggio OS parallelo ad r' ed avente la stessa orientazione di r' (vale a dire tale che i segmenti $O'R'$, OS cadano da una stessa banda della retta OO').

Se r indica una retta, su cui è fissato un certo verso come positivo, si suole indicare con $-r$ la stessa retta, in cui si sia invertito il verso considerato come positivo; sono evidenti allora le seguenti uguaglianze:

$$(r, r') + (r', -r) \equiv (r, -r) \equiv 180^\circ$$
$$\text{ossia } (r, r') \equiv 180^\circ + (-r, r').$$

Similmente si trova:

$$(r, r') \equiv 180^\circ + (r, -r') \qquad (-r, -r') \equiv (r, r').$$

γ) Come unità di misura degli angoli è però teoricamente preferibile un'altra unità di misura, che sarà ora definita e che verrà sempre adottata in questo libro.

Sia α un angolo qualsiasi di vertice C: si descriva una circonferenza avente il centro C, il raggio R arbitrario, e sia β la lunghezza dell'arco di circonferenza sotteso dall'angolo (al centro) α. Il rapporto $\frac{\beta}{R}$ è uguale alla lunghezza di detto arco, quando si assuma come unità di misura delle lunghezze il raggio R. Questo rapporto non varia al variare di R (perchè archi di cerchi concentrici sottesi da uno stesso angolo al centro hanno lunghezze proporzionali al raggio del cerchio su cui giacciono) ed è proporzionale all'angolo α. Noi assumeremo questo rapporto come misura dell'angolo α e chiameremo radiante l'angolo che in questo sistema di misura ha per misura 1; il radiante sarà quindi l'angolo che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio. Se $\alpha = 360^\circ$, l'arco di cerchio corrispondente è uguale all'intera circonferenza e ha per lunghezza $\beta = 2\pi R$; quindi l'angolo di 360°, misurato in radianti, ha per misura

$$\frac{2\pi R}{R} = 2\pi.$$

Due angoli sono equivalenti se le loro misure in gradi differiscono per un multiplo di 360°. Poichè in radianti l'angolo di 360° ha per misura 2π, due angoli saranno equivalenti, se le loro misure in radianti differiscono per un multiplo di 2π.

Un angolo piatto ha in gradi la misura $\frac{360}{2} = 180$; in radianti esso ha quindi per misura π; l'angolo retto ha per misura $\frac{\pi}{2}$, l'angolo di 45° ha per misura $\frac{\pi}{4}$.

Se x, y sono le misure di uno stesso angolo rispettivamente in radianti e in gradi, si avrà:

$$\frac{x}{y} = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}.$$

L'angolo di un radiante vale in gradi $180 : \pi = 57{,}2957795$, cioè vale minuti secondi $206264{,}8 \ldots\ldots$; perciò, se φ è la misura in radianti di un angolo e α'' la sua misura in minuti secondi sarà con grande approssimazione $\varphi : \alpha'' = 1 : 206265''$.

δ) Se x è la misura di un angolo acuto in radianti (quindi $0 < x < \frac{\pi}{2}$) allora si ha:

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x.$$

Sia AOB l'angolo x e sia OC la retta simmetrica di OB rispetto ad OA; sarà $COB = 2x$. Sia BAC il cerchio di centro O e di raggio 1. Sarà (fig. 2) arco $AB =$ arco $CA = x$; arco $CAB = 2x$; segmento $AH = \operatorname{tg} x$; segmento $MB = CM = \operatorname{sen} x$; segmento $CB = 2 \operatorname{sen} x$.

Poichè: segmento $CB <$ arco CAB, sarà $2 \operatorname{sen} x < 2x$, ossia $\operatorname{sen} x < x$.

D'altra parte: area triangolo $OHK = OA.AH = \operatorname{tg} x$; area settore $OCAB = \frac{OA}{2}$. Arco $CAB = x$.

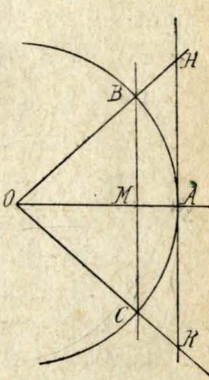


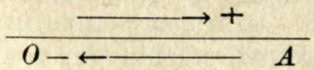
Fig. 2.

Poichè: area triangolo $OHK >$ area settore $OCAB$, sarà $\operatorname{tg} x > x$. Le disuguaglianze così ottenute dimostrano completamente il nostro teorema.

Se y è l'ampiezza in gradi di un angolo, la cui misura in radianti è x, sarà $x = \frac{\pi}{180} y$; perciò $\operatorname{sen} y < \frac{\pi}{180} y < \operatorname{tg} y$.

§ 6. — **Coordinate di un punto di una retta.**

α) Sia r una retta orientata, su cui cioè si è scelto come positivo, p. es., il verso da sinistra a destra.



Fissiamo sopra la retta un punto O, che chiameremo l'origine; la posizione di un punto qualsiasi A di r è determinata quando si conosca la misura del segmento OA in valore assoluto e in segno (il quale segno sarà $+$ oppure $-$ secondo che A si trova a destra od a sinistra di O): così, se p. es. $OA = +3$, il punto A è quel punto di r, posto a destra dell'origine O che ne dista il triplo dell'unità di lunghezza; se $OA = -5$, A è quel punto di r posto a sinistra di O, la cui distanza da O è il quintuplo dell'unità di lunghezza.

In generale la misura del segmento OA si chiama la coordinata di A e si indica di solito con una delle lettere x, y, z...

L'origine O è l'unico punto della retta r che abbia la coordinata nulla; poichè un punto di r ha una coordinata perfettamente individuata, e viceversa ad ogni valore della coordinata corrisponde uno (e un solo) punto di r, vi è una corrispondenza *biunivoca senza eccezione* tra i valori della coordinata ed i punti di r.

β) Se A, B sono due punti di r, le cui coordinate sono rispettivamente x_1, x_2 sarà:

$$OA = x_1, \quad OB = x_2, \quad AO = -x_1, \quad BO = -x_2.$$

Ma $AB = OB - OA$; quindi la misura del segmento AB, i cui estremi A, B hanno rispettivamente le coordinate x_1, x_2, è $x_2 - x_1$ (in valore assoluto e in segno).

Se $x_2 - x_1$ è positivo, ossia se $x_2 > x_1$, allora il segmento AB è positivo, ossia A giace a sinistra di B; se invece $x_2 - x_1$ è negativo, ossia $x_2 < x_1$, allora A giace a destra di B; ciò che è intuitivo per la definizione stessa di coordinata. I punti del segmento AB sono i punti, le cui coordinate sono comprese tra x_1 ed x_2; se p. es. $x_1 < x_2$, essi sono i punti x per cui $x_1 \leqq x \leqq x_2$.

Se $A_1, A_2, \dots A_n$ sono punti di r di coordinate $x_1, x_2, \dots, x_n$, avrà luogo l'identità:

$$(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3) + \dots + \\ + (x_n - x_{n-1}) + (x_1 - x_n) = 0$$

che equivale alla $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n + A_nA_1 = 0$ dimostrata nel § 4, β (pag. 13).

γ) Noi spesso identificheremo un valore della variabile x col punto di coordinata x; così, p. es., diremo il punto a anzichè dire il numero a; viceversa diremo talvolta il numero a per indicare il punto A, tale che il segmento OA abbia per misura a.

La relazione biunivoca, da noi così determinata tra i numeri dell'aritmetica ed i punti di una retta, permette di trasformare proprietà geometriche in teoremi aritmetici e viceversa.

§ 7. — **Aree e volumi.**

Quando si studia in geometria elementare il problema della misura dell'area o del volume di una figura piana (*) o solida, si sceglie un poligono o un poliedro come unità di misura; il quale (secondo l'uso universale) è il quadrato o il cubo, il cui lato è l'unità di misura delle lunghezze.

Osservazioni. — Nonostante la scrittura in doppia colonna, il rigore richiede che la trattazione qui svolta per i volumi segua quella svolta nella prima colonna per le aree delle figure piane.

Nelle matematiche elementari è definita l'*area* di ogni poligono (**) che è un numero positivo soddisfacente alle seguenti proprietà:

1°) *Poligoni uguali hanno aree uguali.*

2°) *Se il poligono* P *è somma dei poligoni* P_1, P_2, *l'area di* P *è somma delle aree dei poligoni* P_1, P_2. Da cui segue:

3°) *Se il poligono* P_1 *è contenuto in* P, *l'area di* P_1 *non supera l'area di* P.

Possiamo noi definire *l'area* di figure piane più generali dei poligoni? Ecco il problema che vogliamo esaminare. Naturalmente dobbiamo porre una *definizione* che conservi all'area di figure piane più generali dei poligoni le proprietà su accennate per le aree dei poligoni: proprietà del resto comuni alle

Nelle matematiche elementari è definito il *volume* di ogni pluricilindro (***) che è un numero positivo soddisfacente alle seguenti proprietà:

1°) *Pluricilindri uguali hanno volumi uguali.*

2°) *Se il pluricilindro* P *è somma dei pluricilindri* P_1, P_2, *il volume di* P *è somma dei volumi di* P_1, P_2. Ne segue:

3°) *Se il pluricilindro* P_1 *è contenuto in* P, *il volume di* P_1 *non supera il volume di* P.

Possiamo noi definire *i volumi* di solidi più generali dei pluricilindri? Ecco il problema che vogliamo esaminare. Naturalmente dobbiamo porre una *definizione* che conservi al volume delle figure solide più generali dei pluricilindri le proprietà su accennate per i volumi dei pluricilindri: proprietà del resto

(*) Qui e nel seguito usiamo la parola *figura piana* (sarebbe più preciso dire *dominio connesso*) (cfr. l'oss. critica in fine del § 7).

Nei casi più comuni delle applicazioni si tratta di figure limitate da tratti di rette, cerchi, ellissi, ecc.

Osservazioni analoghe valgono per i *solidi* di cui ci occuperemo.

(**) Vedremo che sovente potremmo parlare soltanto di *plurirettangoli* (cioè poligoni somma di un numero finito di rettangoli parziali). Ciò che rende più evidente ancora l'analogia tra i due problemi: quello della misura delle aree, quello della misura dei volumi.

(***) Si potrebbe anche parlare di piramidi, o di poliedri. Ma per noi basta parlare di pluricilindri (cioè di un solido somma di un numero finito di cilindri).

misure delle grandezze di una specie qualunque.

Osserviamo che, se F è una figura piana, la quale contiene un poligono p ed è a sua volta contenuta in un altro poligono P, e se F possiede un'area che goda di proprietà analoghe alle precedenti, bisognerà che tale area di F sia definita come un numero non minore dell'area di p, nè maggiore dell'area di P.

Guidati da questa osservazione noi converremo di parlare di area di una figura piana F soltanto se esistono tanto dei poligoni p tutti contenuti in F, quanto dei poligoni P contenenti F (*).

E per area di F intenderemo un numero che non sia minore delle aree di un p, nè maggiore delle aree di un P. In altre parole l'area di F dovrà *almeno* essere uguale al *limite superiore* λ delle aree dei p e *al più* essere uguale al *limite inferiore* Λ delle aree dei P. (È evidentemente $\lambda \leqq \Lambda$).

Ma noi vogliamo che l'area di F sia completamente determinata da F (**). Il caso *più elementare* in cui questo avviene (Peano-Jordan) è il caso che $\lambda = \Lambda$, ossia che le aree dei p e quelle dei P formino due classi contigue. In questo caso (che è l'unico considerato in questo

comuni alle misure delle grandezze di una specie qualsiasi.

Osserviamo che, se F è una figura solida qualsiasi, la quale contiene un pluricilindro p ed è a sua volta contenuta in un altro pluricilindro P, e se F possiede un volume che goda di proprietà analoghe alle precedenti, bisogna che tale volume di F sia definito come un numero non minore del volume di p, nè maggiore del volume di P.

Guidati da questa osservazione noi converremo di parlare di volume di una figura solida F soltanto se esistono tanto dei pluricilindri p tutti contenuti in F, quanto dei pluricilindri P contenenti F (*).

E per *volume* di F intenderemo un numero che non sia minore del volume di un p, nè maggiore del volume di alcun P. In altre parole il volume di F dovrà *almeno* essere uguale al *limite superiore* λ dei volumi dei p e *al più* essere uguale al *limite inferiore* Λ dei volumi dei P. (È evidentemente $\lambda \leqq \Lambda$).

Ma noi vogliamo che il volume di F sia completamente determinato da F (**). Il caso *più elementare* in cui questo avviene (Peano-Jordan) è il caso che $\lambda = \Lambda$ ossia che i volumi dei p e quelli dei P formino due classi contigue. In questo caso (che è l'unico considerato

(*) Cioè ogni punto interno a p è interno ad F, ed ogni punto interno ad F è interno a P.

(**) Naturalmente se è prefissata l'unità di misura.

libro) le precedenti osservazioni bastano a definire completamente l'*area* di F *come il numero* $\lambda = \Lambda$ *di separazione tra la classe delle aree dei* p, *e la classe delle aree dei* P.

Noi parleremo dunque di area di una figura F, soltanto se esistono poligoni p contenuti in F, e poligoni P contenenti F; e se inoltre le classi delle loro aree sono contigue. Il numero $\lambda = \Lambda$ di separazione delle due classi si dirà *l'area di* F.

Questa definizione non è che la naturale estensione della definizione, che nelle matematiche elementari si dà per l'*area* σ di un *cerchio* S. Ivi infatti tale area σ viene definita come il numero che separa le classi contigue formate dalle aree dei poligoni p tutti interni a S, e dei poligoni P che comprendono il cerchio S all'interno (*).

in questo libro) le precedenti osservazioni bastano a definire completamente il *volume* di F *come il numero* $\lambda = \Lambda$ *di separazione tra la classe dei volumi dei* p, *e la classe dei volumi dei* P.

Noi parleremo dunque di volume di una figura F, soltanto se esistono pluricilindri p, contenuti in F, e pluricilindri P contenenti F; e se inoltre le classi dei loro volumi sono contigue. Il numero $\lambda = \Lambda$ di separazione delle due classi si dirà *il volume di* F.

Questa definizione non è che la naturale estensione della definizione che nelle matematiche elementari si dà per il *volume* σ di una *sfera* S. Ivi infatti tale volume σ viene definito come il numero che separa le classi contigue formate dai volumi dei pluricilindri p tutti interni ad S, e dei pluricilindri P che comprendono la sfera S all'interno (**).

(*) Si noti ancora che nel caso del cerchio S i poligoni p si suppongono inscritti in S, i poligoni P circoscritti. E ciò perchè i poligoni inscritti in S sono interni ad S, i poligoni circoscritti ad S contengono S all'interno. Nel caso generale non si può più parlare di poligoni inscritti e circoscritti; perchè (anche ammessa l'esistenza di tali poligoni) i poligoni p inscritti possono essere non tutti interni a S, e i poligoni P circoscritti possono non contenere S tutto all'interno, come dimostrano le seguenti figure 3-4.

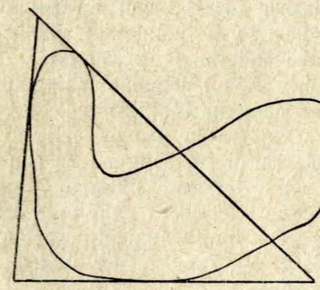


Fig. 3.

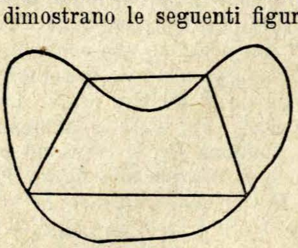


Fig. 4.

(**) Veramente nei trattati elementari ci si limita a considerare generalmente dei pluricilindri inscritti o circoscritti (cfr. Nota precedente).

È poi evidente che l'*area* così definita gode delle proprietà enunciate sopra a pag. 21 (*).

Queste proprietà sono del resto insite nel fatto, che le precedenti considerazioni trattano il problema della misura di una classe particolare di grandezze.

Se invece fosse $\Lambda > \lambda$, il numero Λ si potrebbe chiamare l'area *esterna*, il numero λ l'area *interna* della figura considerata. Questi due numeri godono, come è evidente, di alcune, ma non di tutte le proprietà dell'*area* nel senso elementare (sopra definito) della parola. Noi lo proveremo nel modo esposto in fine al §.

È poi evidente che il *volume* così definito gode delle proprietà enunciate sopra a pag. 21 (*).

Queste proprietà sono del resto insite nel fatto, che le precedenti considerazioni trattano il problema della misura di una classe particolare di grandezze.

Se invece fosse $\Lambda > \lambda$, il numero Λ si potrebbe chiamare il volume *esterno*, il numero λ il volume *interno* della figura considerata. Questi due numeri godono, come è evidente, di alcune, ma non di tutte le proprietà del *volume* nel senso elementare (sopra definito) della parola.

Sia C un cilindro avente per base una figura piana F e per altezza un segmento di misura h (**). Chiameremo *volume* di C un numero *maggiore* dei volumi dei prismi di uguale altezza h aventi per base un poligono p (prismi che sono contenuti in C)

(*) Infatti sia F, p. es., una figura piana somma di due figure F_1, F_2 senza punti interni comuni. Tra i poligoni p interni ad F vi sono quelli (ad uno o più pezzi), che sono somma di un poligono p_1 relativo ad F_1, e di un poligono p_2 relativo ad F_2. Quindi il limite *superiore* λ delle aree dei poligoni p vale *almeno* la somma dei limiti superiori λ_1, λ_2 delle aree dei poligoni p_1, p_2, cioè $\lambda \geqq \lambda_1 + \lambda_2$. Sia P_1 un poligono che contiene F_1 all'interno, e P_2 un poligono analogo per F_2; sia π la parte comune. Il poligono $P_1 + P_2 - \pi$ contiene F all'interno, ed è perciò un poligono P relativo ad F. La sua area non supera la somma delle aree dei poligoni P_1, P_2. Perciò, sommando insieme l'area di un poligono P_1 con l'area di un poligono P_2, si trova un numero, che non è inferiore all'area di qualche poligono P relativo alla figura F. Quindi il limite inferiore Λ delle aree dei poligoni P non può superare la somma $\Lambda_1 + \Lambda_2$ dei limiti analoghi per F_1, F_2. Perciò $\Lambda_1 + \Lambda_2 \geqq \Lambda \geqq \lambda \geqq \lambda_1 + \lambda_2$. Poichè $\lambda_1 = \Lambda_1$, $\lambda_2 = \Lambda_2$ per ipotesi, sarà $\Lambda_1 + \Lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = \Lambda = \lambda$, come volevasi provare.

(**) È noto che, se π è il piano della figura F, allora C è il luogo dei punti posti da una stessa banda di π, i quali distino da π non più di h, e che abbiano per proiezione su π un punto di F.

e *minore* dei volumi dei prismi di uguale altezza h e aventi per base un poligono P (prismi contenenti C). I volumi di tali prismi sono dati dal prodotto di h rispettivamente per l'area della base p e P. Quindi, con le notazioni precedenti, il volume di C sarà non minore di λh e non maggiore di Λh. Se la base F ha un'area, se cioè $\lambda = \Lambda$, il volume di C sarà $\lambda h = \Lambda h$, cioè sarà dato dal *prodotto dell'area della base per la misura dell'altezza*. Noi considereremo nel seguito soltanto cilindri la cui base ha un'area. Diremo *pluricilindro* un solido, che si possa decomporre in un numero finito di cilindri, e suo volume la somma dei volumi dei cilindri parziali.

Ecco una proprietà delle aree, che vale anche per le aree esterna ed interna. *Se i punti comuni a due figure piane* F_1, F_2 *formano un segmento rettilineo* r, *ed* F_1, F_2 *giacciono da bande opposte rispetto ad* r, *l'area esterna* (interna) *della figura* $F = F_1 + F_2$ *vale la somma delle aree esterne* (interne) *delle* F_1, F_2.

Per l'area interna si osservi che un poligono p tutto interno ad F è diviso da r in due poligoni p_1, p_2 interni rispettivamente a F_1, F_2. E viceversa la somma di due tali poligoni p_1, p_2 si può considerare come un poligono p (eventualmente non connesso) interno ad F. Tanto basta per asserire che il limite superiore dell'area dei p (area interna di F) vale la somma dei limiti superiori delle aree dei p_1, p_2 (cioè delle aree interne di F_1, F_2).

Una dimostrazione analoga vale per le aree esterne. Si osservi a tal fine che l'area esterna di F_i (per $i = 1,2$) si può definire come il limite inferiore delle aree dei poligoni P_i contenenti F_i all'interno e posti rispetto ad r dalla stessa banda di F_i. Per tali poligoni P_1, P_2 e per i poligoni P contenenti F all'interno si possono svolgere considerazioni analoghe alle precedenti relative a p, p_1, p_2.

Osservazioni critiche.

Il concetto intuitivo di *dominio* si può precisare nel modo seguente, in cui per brevità ci riferiremo a *dominii* piani (cfr. la prima nota a piè di pag. 21).

Sia C una classe di punti. Sia A un punto di questa classe. Noi diremo che esso è *interno* a C, se esiste un cerchio di centro A, i cui punti appartengono tutti a C; diremo che un punto B non appartenente a C è *esterno* a C, se esiste un cerchio di centro B, nessun punto del quale appartiene a C.

Diremo che un punto L del piano appartiene al *contorno* di C, se in ogni cerchio di centro L esistono sia punti che appartengono, sia punti che non appartengono a C.

Diremo che una classe C di punti del piano è un *dominio* se:

α) Ogni punto di C o è interno a C, o appartiene al contorno di C.
β) Ogni punto che non appartiene a C è esterno a C.
γ) Esiste almeno un punto interno a C.

Diremo che il dominio è *connesso*, se, scelti ad arbitrio due suoi punti interni E, F si può trovare un numero finito di cerchi $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ tali che:

α) Due cerchi consecutivi hanno infiniti punti comuni (cioè le loro periferie si incontrano in due punti).
β) Il primo cerchio contiene E, l'ultimo contiene F.
γ) I punti di ogni cerchio sono tutti *interni* a C.

I poligoni, i cerchi, ecc. della geom. elementare sono dominii connessi; l'insieme di due cerchi esterni l'uno all'altro è un dominio non connesso. Le precedenti definizioni si possono porre per ogni dominio connesso.

I poligoni p saranno quei poligoni, i cui punti (esclusi al più i punti del perimetro) sono tutti punti *interni* al dominio considerato. I poligoni P saranno quei poligoni che contengono ogni punto interno o posto sul contorno del dominio considerato. La differenza di due poligoni P, p è un poligono (dominio limitato da segmenti) che contiene tra i suoi punti tutti i punti del contorno del dominio dato. Il dominio dato avrà un'area, se esisterà almeno un poligono P (ciò che si esprime dicendo che il dominio dato è finito) e se le aree dei poligoni P, p formeranno due classi contigue. Ciò avviene soltanto quando i poligoni che contengono tutti i punti del suo contorno hanno aree, il cui limite inferiore è nullo.

CAPITOLO III.

I NUMERI COMPLESSI

§ 8. — Coordinate di un punto nel piano.

Assai spesso avviene che si voglia determinare con numeri la posizione di un punto sopra una superficie. Così, p. es., la posizione di un punto M sulla superficie terrestre si determina assegnandone la longitudine e la latitudine, che si potranno chiamare le coordinate di M.

La posizione di un punto M, posto sul pavimento di una stanza poligonale, si può determinare assegnandone le distanze da due pareti concorrenti, ecc.

α) Vogliamo vedere come si possa, mediante una coppia di numeri, determinare la posizione di un punto M su un piano assegnato.

Molteplici metodi possono servire a tale scopo: il più semplice è quello delle cosidette coordinate cartesiane.

Siano $x'x$ ed $y'y$ due rette distinte (fig. 5) (*assi coordinati*) concorrenti in un punto O (*origine*), su cui sia fissato il verso positivo, p. es. quello da x' ad x e quello da y' ad y. Ad uno dei due assi, generalmente all'asse $x'x$, si dà il nome di asse delle *ascisse*, all'altro asse $y'y$ il nome di asse delle *ordinate*; e si suppone che l'angolo $\omega = (xy)$ sia congruo ad un angolo positivo minore di 180°. Per determinare la posizione M di un punto del piano, basterà determinare la posizione dei punti P, Q, intersezioni degli assi con le parallele agli assi stessi

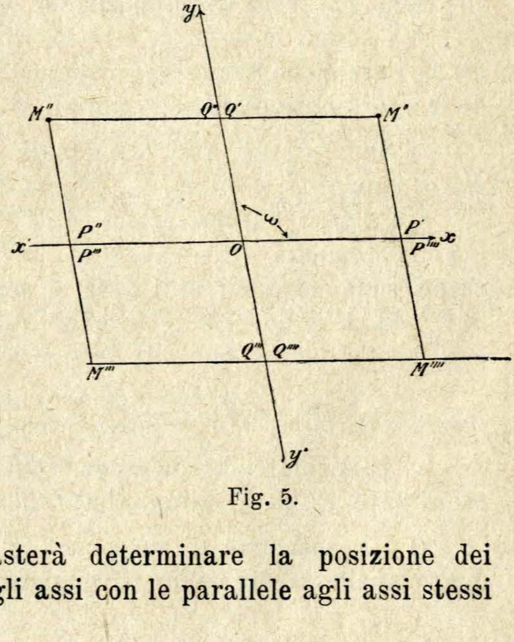


Fig. 5.

tirate da M, ossia dare le misure dei segmenti OP, OQ in valore assoluto e in segno. Queste misure, che si dicono le coordinate di M, si indicano rispettivamente con x, y ed hanno ricevuto il nome di *ascissa* e di *ordinata* del punto M.

Viceversa è ben chiaro che, scelti due numeri qualunque a, b, esiste uno ed un solo punto del piano il quale abbia a per *ascissa* e b per *ordinata*. Infatti si costruiscano il punto P ed il punto Q sui due assi, in guisa che sia in valor assoluto ed in segno $OP = a$, $OQ = b$; il punto M d'incontro delle parallele tirate da P, Q rispettivamente alla rette Oy, Ox è il punto cercato.

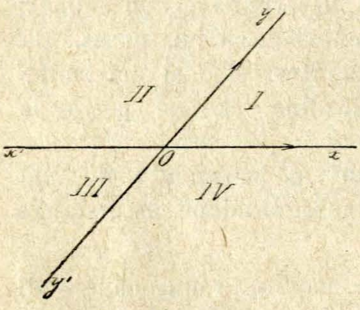


Fig. 6.

I raggi Ox, Oy, Ox', Oy' dividono il piano in 4 regioni, che portano rispettivamente i nomi di I, II, III, IV quadrante (fig. 6). Un punto del I quadrante ha positive entrambe le coordinate; un punto del II quadrante ha positiva l'ordinata, negativa l'ascissa; un punto del III ha negative entrambe le coordinate; un punto del IV ha positiva l'ascissa, negativa l'ordinata.

I punti della retta $x'x$ hanno nulla l'ordinata, quelli della $y'y$ hanno nulla l'ascissa, l'origine O ha nulle entrambe le coordinate.

Sono poi vere le proposizioni reciproche.

Se l'angolo $\omega = (x, y)$ è retto, come supporremo quasi sempre, gli assi si dicono cartesiani ortogonali. In tal caso i valori assoluti delle coordinate di M sono uguali alle distanze di M dai due assi.

β) Supposti gli assi ortogonali, siano M' ed M'' due punti di coordinate x', y' ed x'', y''. Siano P', P'' le proiezioni di M', M'' su $x'x$; e Q', Q'' le proiezioni di M', M'' su $y'y$. Il segmento PQ è evidentemente l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, i cui cateti sono paralleli agli assi, e sono rispettivamente uguali a $P'P''$ ed a $Q'Q''$. La misura di questi cateti è perciò $x'' - x'$ e $y'' - y'$; per il teor. di Pitagora dunque:

$$PQ^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2.$$

In particolare la distanza OP dall'origine al punto P di coordinate (x, y) è data dalla $OP^2 = x^2 + y^2$.

γ) La posizione di un punto P in un piano si può individuare anche mediante un altro sistema di coordinate: il sistema delle coordinate polari. Si scelgano ad arbitrio nel piano un punto O e un raggio Ox uscente da O. Si assumano poi come coordinate di un punto P del piano la distanza OP (considerata come positiva), a cui si dà il nome di *raggio vettore*, e l'angolo dei raggi Ox, OP, a cui si dà il nome di *anomalia* (fig. 7). Il primo s'indica generalmente con ρ, la seconda con θ. Le coordinate cartesiane x, y di P, quando si assumano come assi coordinati la retta Ox e la retta normale Oy (tale che l'angolo xy sia retto), sono le proiezioni di OP sopra Ox ed Oy: cosicchè si ha:

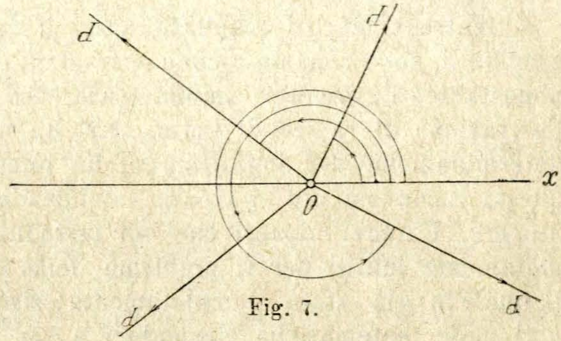


Fig. 7.

$$x = \rho \cos(x\rho) = \rho \cos\theta\,;$$

$$y = \rho \cos(y\rho) = \rho \cos(yx + x\rho) = \rho \operatorname{sen}(x\rho) = \rho \operatorname{sen}\theta.$$

Per il punto O (origine) si ha $\rho = 0$, mentre θ è indeterminato.

Per tutti gli altri punti θ è determinato a meno di multipli di 360°, ossia di 2π radianti.

Dalle precedenti formole si trae anche:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\theta = \frac{x}{\rho}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\rho},$$

(dove il radicale si considera come positivo); queste formole servono a trovare ρ e θ quando siano date x, y.

Questi metodi si possono perfezionare ed estendere allo spazio; è però ufficio della geometria analitica svolgere la teoria delle coordinate, e dimostrarne le importantissime applicazioni. Noi, nel seguito di questo libro, supporremo noti al lettore i principî fondamentali di questa scienza.

§ 9. — Definizione di numero complesso e delle operazioni sui numeri complessi.

α) Nell'aritmetica e nell'algebra elementare si è man mano esteso il concetto di numero, introducendo dopo i numeri interi positivi i numeri fratti, i numeri irrazionali, i numeri negativi.

Con questi successivi ampliamenti si era risoluto completamente il problema della misura delle grandezze (cfr. i Cap. 1° e 2°), si era resa possibile ogni sottrazione, ogni divisione per un numero non nullo, ogni estrazione di radice da un numero positivo, ecc.

Mentre si è così ampliato assai il campo delle operazioni eseguibili, sono rimaste alcune operazioni che non sono eseguibili, nonostante l'avvenuto ampliamento del concetto di numero: l'estrazione di radice di indice pari da un numero negativo, la determinazione del logaritmo di un numero negativo, ecc. A questo inconveniente si ripara estendendo ancora il concetto di numero. I nuovi numeri che noi introdurremo, sono però completamente inutili per il problema della misura delle grandezze, il quale è già stato completamente risoluto dai numeri già noti dalle matematiche elementari e che noi abbiamo chiamato numeri reali.

Noi diremo numero *complesso*, ed indicheremo con (a, b) una coppia di numeri reali a, b, che si seguano nell'ordine ora scritto.

Due numeri complessi (a, b) ed (a', b') si diranno uguali allora soltanto che $a = a'$, $b = b'$.

Il numero complesso $(a, 0)$ s'intenderà come uguale al numero reale a (*).

Il numero complesso $(0, b)$ si dirà puramente immaginario e s'indicherà con ib, indicando poi col solo simbolo i il numero $(0, 1)$, che chiameremo l'unità immaginaria.

Due numeri (a, b) ed $(a, -b)$ si diranno *complessi coniugati*.

Somma dei numeri complessi (a, b), (a', b') *si chiamerà il numero complesso* (a + a', b + b'); questa definizione non contrasta con quella adottata per i numeri reali. Infatti, se (a, b) e (a', b') sono reali, ossia se $b = b' = 0$, la loro somma (nel senso testè definito) è proprio uguale ad $(a + a', 0)$, cioè ad $a + a'$. Si potrà perciò porre $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$ ed in particolare $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + ib$. Perciò di solito il numero complesso (a, b) si indica con $a + ib$.

La nostra definizione di somma di due numeri complessi si può quindi anche enunciare nel modo seguente: la somma dei numeri $a + ib$, $a' + ib'$ uguaglia $(a + a') + i(b + b')$.

La somma di due numeri $a + ib$, $a - ib$ immaginari coniugati è il numero reale $2a$.

(*) Ciò equivale a convenire che un numero reale a si possa indicare col nuovo simbolo (a, o); convenzione ben lecita, perchè (a, o) è un simbolo affatto nuovo.

In generale, se $a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \ldots\ldots, a_n + ib_n$ sono n numeri complessi, noi diremo che

$$(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n) + i\,(b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n)$$

è la loro somma.

Così pure si chiamerà differenza dei due numeri complessi $a + ib$, $a' + ib'$ quel numero $(a - a') + i\,(b - b')$ che, sommato con $a' + ib'$, riproduce il numero $a + ib$.

È ben evidente da quanto precede che per la somma e la sottrazione di uno o più numeri complessi valgono le ordinarie regole del calcolo algebrico.

Porremo, per definizione, uguale a -1 *il prodotto di* i *per* i, *ossia il quadrato di* i *ed uguale ad* ia *il prodotto di* i *per il numero reale* a (*).

Prodotto di due numeri complessi a + ib, c + id *si chiamerà il numero che si ottiene facendo la moltiplicazione con le abituali regole dell'algebra.*

Si avrà così *per definizione:*

$$(a + ib)(c + id) = ac + ibc + ida + i^2bd\,;$$

ossia, poichè per definizione $i^2 = -1$,

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i\,(bc + ad).$$

Se $b = d = 0$, il prodotto così definito coincide proprio con ac; la nostra definizione non è dunque contraddittoria con la definizione dell'algebra elementare. E, se $b = 0$, e $c + id = i$ (se è cioè $c = 0$, $d = 1$), tale prodotto di i per il numero reale a si riduce appunto ad ia, come richiede anche la convenzione preliminare.

Si noti che il prodotto di due numeri $a + ib$, $a - ib$ immaginari coniugati vale $a^2 + b^2$, ed è perciò sempre reale positivo (nullo soltanto se $a = b = 0$).

Prodotto di tre numeri complessi è per definizione il prodotto che si ottiene moltiplicando il prodotto dei primi due fattori per il terzo: facilmente si estende la definizione al prodotto di n fattori.

Si dimostra facilmente:

1° Il prodotto di più numeri complessi è indipendente dall'ordine dei fattori.

(*) Che ciò sia logicamente lecito è ben evidente. Per es. *il prodotto di* i *per* i è una frase nuova, che per la prima volta incontriamo. Siamo padroni di darle quel significato che più ci piace, così come siamo padroni di introdurre un nuovo vocabolo nella lingua italiana, dandogli un significato a nostro arbitrio.

2° Il prodotto di un numero complesso N per la somma S di più numeri complessi è uguale alla somma dei prodotti di N per ciascuno degli addendi di S.

3° Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_m$ e $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_n$ sono più numeri complessi, il prodotto $\alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_m \beta_1 \beta_2 \ldots\ldots \beta_n$ si ottiene moltiplicando il prodotto $\alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_m$ per il prodotto $\beta_1 \beta_2 \ldots\ldots \beta_n$.

Valgono cioè anche per la moltiplicazione dei numeri complessi le regole del calcolo algebrico elementare.

Quoziente dei numeri a + ib, c + id *si dirà quel numero* x + iy *il cui prodotto con* c + id *riproduce il numero* a + ib *quando* x + iy *esista e sia determinato.*

I numeri x ed y sono perciò definiti dalle equazioni $\left\{\begin{array}{l} xc - yd = a \\ xd + yc = b \end{array}\right\}$, le quali determinano x ed y soltanto se $c^2 + d^2$ è differente da zero (*), ossia se c e d non sono entrambe nulli, ossia se il divisore $c + id$ è differente da zero; questa limitazione (che il divisore sia differente da zero) è la stessa che si presenta nel campo dei numeri reali.

β) I numeri reali si rappresentano coi punti di una retta, i numeri complessi $a + ib$ si rappresentano assai spesso coi punti di un piano, ove sia fissato un sistema di coordinate x, y cartesiane ortogonali (figura 8): il punto A, che ha per ascissa a e per ordinata b, si assume come immagine del numero $a + ib$. Se O è l'origine delle coordinate cartesiane, se indicansi con ρ e θ le coordinate $\rho = OA$ e $\theta = (x, \rho)$ polari di A, sarà:

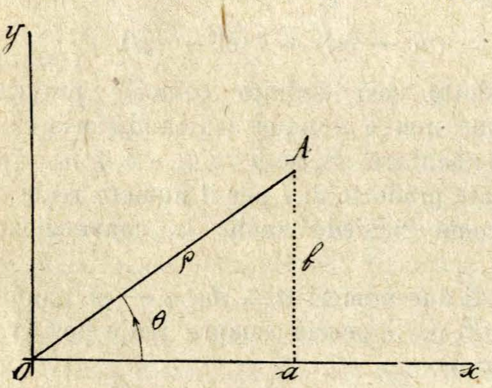


Fig. 8.

$$a = \rho \cos\theta, \quad b = \rho \operatorname{sen}\theta, \quad \rho = \left| \sqrt{a^2 + b^2} \right|, \quad \cos\theta = \frac{a}{\rho},$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}; \text{ e quindi } a + ib = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

(*) Risolvendo, si trova infatti

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Se $c^2 + d^2 = 0$, ossia se $c = d = 0$, allora dovrebbe essere anche $a = b = 0$. E in tal caso le x, y sono indeterminate.

I numeri ρ e θ si dicono rispettivamente *il modulo* e *l'argomento* di $a + ib$.

Se $a + ib = 0$, allora soltanto è anche $\rho = 0$ e l'argomento θ è completamente indeterminato; il modulo di ogni altro numero $a + ib$ è positivo e l'argomento è determinato a meno di multipli di 2π. L'argomento di un numero reale vale *zero* oppure π, secondo che il numero è positivo, o negativo. Il suo modulo coincide col valore assoluto. Pertanto, per ragioni di analogia, se z è un qualsiasi numero anche complesso, con $|z|$ se ne indica il modulo.

Due numeri immaginari coniugati hanno lo stesso modulo ed hanno argomenti uguali, ma di segno opposto.

Il prodotto di due numeri complessi

$$\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta), \quad \rho'(\cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta')$$

uguaglia:

$$\rho\rho'(\cos\theta\cos\theta' - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta') + i\,\rho\rho'(\cos\theta\operatorname{sen}\theta' + \operatorname{sen}\theta\cos\theta') =$$
$$= \rho\rho'\,\{\cos(\theta + \theta') + i\operatorname{sen}(\theta + \theta')\}.$$

Se ne deduce facilmente che:

Il prodotto di due o più numeri complessi ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti.

Ne segue che: *Il quoziente di due numeri complessi* (di cui il divisore sia differente da zero), *ha per modulo il quoziente dei moduli e per argomento la differenza degli argomenti.*

γ) Siano $a_1 + ib_1$, $a_2 + ib_2$ due numeri complessi, ne siano A_1, A_2 i punti immagine, sia A_3 il quarto vertice del parallelogramma di cui A_1, A_2 sono vertici opposti e l'origine O è un terzo vertice; dico che A_3 è il punto immagine del numero somma dei numeri $a_1 + ib_1$, $a_2 + ib_2$ (fig. 9) (*). Infatti l'ascissa di A_3 uguaglia la proiezione di OA_3 sopra Ox, ossia la somma delle proiezioni di

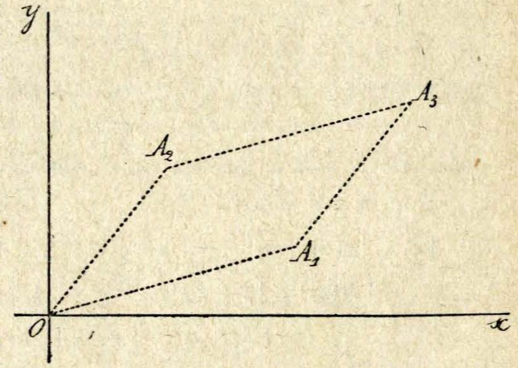


Fig. 9.

(*) Se noi consideriamo un numero complesso come definente la forza rappresentata dal segmento che congiunge l'origine O al punto A immagine del numero complesso, si deduce dall'enunciato del testo che l'operazione di *somma* di due numeri complessi corrisponde a trovare la *risultante* delle due forze corrispondenti. Come i numeri reali x servono a misurare le forze uscenti da un punto e

OA_1, A_1A_3. Poichè OA_2 ed A_1A_3 sono segmenti uguali ed ugualmente orientati, la proiezione di A_1A_3 è uguale a quella di OA_2; e quindi l'ascissa di A_3 uguaglia la somma delle proiezioni di OA_1, OA_2 sopra Ox, ossia la somma $a_1 + a_2$ delle ascisse a_1, a_2 di A_1, A_2: in modo simile si prova che l'ordinata di A_3 è $b_1 + b_2$.

Il lato OA_3 del triangolo OA_1A_3 è minore od uguale alla somma $OA_1 + A_1A_3$ (l'uguaglianza avviene solo se il punto A_1 appartiene al segmento OA_3). Ma poichè $A_1A_3 = OA_2$ ed i segmenti OA_1, OA_2, OA_3 sono i moduli dei numeri complessi dati e della loro somma, avremo che: *Il modulo della somma di due (o più) numeri non supera la somma dei moduli, non è inferiore alla differenza dei moduli.* Questo teorema è la generalizzazione di un teorema già dato per i numeri reali.

δ) Se n è un intero positivo, con x^n indicheremo, anche se x è complesso, il prodotto di n fattori uguali ad x (ponendo poi $x^0 = 1$ se $x \neq 0$, e $x^1 = x$) e con x^{-n} il quoziente $\frac{1}{x^n}$ (se $x \neq 0$).

Se m *è intero, il modulo di* x$^{\mathrm{m}}$ *vale* $|\mathrm{x}|^{\mathrm{m}}$ (cioè il modulo della x innalzato alla m^{esima} potenza); *e l'argomento di* x$^{\mathrm{m}}$ *vale il prodotto di* m *per l'argomento della* x.

Sia $P(z)$ un polinomio nella z e precisamente

$P(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_m z^m$ (le b numeri *non tutti nulli*).

Sia b_h la prima delle b differente da zero. Sarà

$$P(z) = 1 + b_h z^h + [b_h z^h] z \left(\frac{b_{h+1}}{b_h} + \frac{b_{h+2}}{b_h} z + \ldots + \frac{b_m}{b_h} z^{m-h-1} \right).$$

Sia A la massima delle $\left| \frac{b_{h+1}}{b_h} \right|, \left| \frac{b_{h+2}}{b_h} \right|, \ldots, \left| \frac{b_m}{b_h} \right|$. Siano r, θ modulo e argomento di b_h, e siano ρ, δ modulo e argomento della z. Sarà

$$b_h z^h = r \rho^h \{ \cos(\theta + h\delta) + i \operatorname{sen}(\theta + h\delta) \},$$

cosicchè $b_h z^h$ sarà un numero reale negativo, se $\theta + h\delta = \pi$, cioè se $\delta = \frac{\pi - \theta}{h}$.

Sarà in tale ipotesi

$$|P(z)| \leqq |1 + b_h z^h| + |b_h z^h| |z| \left| \frac{b_{h+1}}{b_h} + \frac{b_{h+2}}{b_h} z + \ldots + \frac{b_m}{b_h} z^{m-h-1} \right|$$

$$|P(z)| \leqq |1 - r\rho^h| + r \rho^{h+1} A (1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{m-h-1})$$

$$|P(z)| \leqq |1 - r\rho^h| + A r \frac{\rho^{h+1}(1 - \rho^{m-h})}{1 - \rho}.$$

---

aventi la direzione dell'asse delle x (in un verso o nell'altro), così i numeri complessi $x + iy$ possono servire a definire (e potremmo forse dire, ampliando il significato della parola, a misurare) le forze uscenti da un punto O e poste nel piano xy, in guisa che alla forza *risultante* di due o più forze date corrisponda il numero complesso *somma* dei numeri complessi corrispondenti alle singole forze componenti. I numeri complessi trovano importantissime applicazioni nello studio delle correnti alternate: p. es. alle estensioni delle leggi di Ohm e di Kirchhoff.

Supponiamo ρ così piccolo che

$$r\rho^h < 1 \qquad \text{cosicchè } 1 - r\rho^h \text{ è positivo}$$
$$\rho < 1 \qquad \text{cosicchè } 1 - \rho^{m-h} \text{ è minore di } 1$$
$$\frac{A\rho}{1-\rho} < 1 \qquad \text{cosicchè } r\rho^h > Ar\frac{\rho^{h+1}}{1-\rho}.$$

Da (1) si dedurrà

$$P(z) \leqq 1 - r\rho^h + Ar\frac{\rho^{h+1}(1-\rho^{m-h})}{1-\rho} < 1 - r\rho^h + Ar\frac{\rho^{h+1}}{1-\rho} < 1.$$

Possiamo dunque dare alla z un valore tale che $|P(z)| < 1$.
Moltiplicando $P(z)$ per un numero $k \neq 0$, e mutando z in $z - \alpha$ si trova:
Se un polinomio P (z) *ha per* z $= \alpha$ *un valore* k $\neq 0$, *esiste qualche valore di* z *per cui il polinomio assume un valore, che in modulo è minore di* $|$ P $(\alpha)|$.

Senza parlare delle potenze più generali (ad esponente fratto, irrazionale o anche complesso) noi parleremo ancora soltanto di $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ per $n > 1$ intero positivo. Con tale simbolo noi indicheremo ogni numero complesso, la cui n^{esima} potenza sia uguale ad x.

Siano ρ, θ il modulo e l'argomento della x; cosicchè $x = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$. Siano analogamente r, δ modulo e argomento di $\sqrt[n]{x}$. Per definizione

$$\{r(\cos\delta + i \operatorname{sen}\delta)\}^n = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

ossia:

$$r^n(\cos n\delta + i \operatorname{sen} n\delta) = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

Cosicchè $r^n = \rho$, ed $n\delta$ differisce da θ per un multiplo di 2π. Cioè *il modulo* r *di* $\sqrt[n]{x}$ *uguaglia il valore* (aritmetico) *della radice* n^{esima} *del modulo* ρ *della* x. *E l'argomento* δ *di* $\sqrt[n]{x}$ *vale* $\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, *dove* θ *è l'anomalia della* x *e* k *è un intero.*

Così avremo:

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\rho}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right\} = \sqrt[n]{\rho}\left\{\cos\frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{n}\right\}\varepsilon_k$$

dove si è posto:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}.$$

Ora al variare di k ($k =$ intero) quanti valori può ricevere la quantità ε_k qui definita?

Si osservi che, se h e k sono due numeri interi, sarà $\varepsilon_k = \varepsilon_h$ allora ed allora soltanto che:

$$\cos\frac{2h\pi}{n} = \cos\frac{2k\pi}{n}, \qquad \operatorname{sen}\frac{2h\pi}{n} = \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n};$$

il che accade solo quando $\frac{2k\pi}{n}$ e $\frac{2h\pi}{n}$ differiscono per un multiplo di 2π,

$$\left(\frac{2k\pi}{n} - \frac{2h\pi}{n} = \text{multiplo di } 2\pi\right),$$

ossia quando:

$$k - h = \text{multiplo di } n;$$

e però, dando a k gli n valori $0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1$, si otterranno radici distinte, mentre i valori $n, n+1, \ldots, 2n-1$ di k riprodurranno le stesse radici nello stesso ordine, e così via periodicamente. Del pari, dando a k i valori $-1, -2, \ldots, -n$, si riprodurranno le stesse radici in ordine inverso, e così via periodicamente.

Dunque: *Un numero reale o complesso ha* n *radici* n$^{\text{esime}}$ *fra reali e complesse, che si ottengono moltiplicando una di esse per ciascuno dei numeri* ε_k, *ossia per ciascuna delle radici* n$^{\text{esime}}$ *di* 1. Infatti supponendo $x = 1$, cioè $\rho = 1$ e $\theta = 0$, $x^{\frac{1}{n}}$ si riduce ad ε_k.

La formola che ci dà i numeri ε_k, ossia le n radici n^{esime} dell'unità, è

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n},$$

dove basta dare a k gli n valori $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Questa formola mostra che i punti corrispondenti alle n radici n^{esime} dell'unità sono distribuiti sulla circonferenza avente l'origine per centro e per raggio l'unità, e dividono la circonferenza in n parti eguali; vale a dire tali punti sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in essa.

Basta infatti osservare che i numeri $\varepsilon_0 = \varepsilon_n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ hanno tutti per modulo l'unità, e che l'argomento di uno qualunque di essi differisce dall'argomento del suo successivo per un angolo uguale a $\frac{2\pi}{n}$ radianti, cioè all'n^{esima} parte di $360°$ (2π radianti).

Per esempio, i valori di $\sqrt[3]{1}$ sono:

$$1, \quad \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\eta = \cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

È evidente che η è immaginario coniugato di ε e che

$$\frac{1}{\eta^2} = \eta = \varepsilon^2 = \frac{1}{\varepsilon}.$$

E si può anche provare geometricamente che il punto di ascissa $x = 1$ e ordinata $y = 0$, il punto $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e il punto $x = -\frac{1}{2}$ ed $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sono i tre vertici di un triangolo equilatero inscritto nel cerchio col centro nell'origine e raggio 1.

Negli esercizi calcoleremo per via puramente algebrica le ε per i casi $n = 3, 4, 5$ (es. 33 a pag. 61).

Oss. È appena necessario ricordare che da tutto questo si deduce in particolare che, nel campo dei numeri complessi, si può estrarre la radice quadrata anche da un numero negativo $n = -|n|$ e che tale radice quadrata ha i valori $\pm i\sqrt{|n|}$.

Non ci occuperemo per ora delle potenze il cui esponente è un numero complesso, nè della estensione della teoria dei logaritmi ai numeri negativi o complessi.

§ 10. — **Equazioni di 2°, 3° e 4° grado.**

Le formole (equivalenti) ben note

$$x = -\frac{p}{4} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \qquad \bigg| \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

che dànno le radici di un'equazione di secondo grado

$$x^2 + px + q = 0 \qquad \bigg| \qquad ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

acquistano significato generale (anche se $\frac{p^2}{4} - q$ o $b^2 - 4ac$

sono negativi) nel campo dei numeri complessi. Se x_1, x_2 sono tali radici è noto che valgono le identità:

$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$	$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
$x_1+x_2=-p$	$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$
$x_1 x_2=q$	$x_1 x_2=\frac{c}{a}$

La teoria dei numeri complessi permette di risolvere in generale anche le equazioni di terzo e quarto grado. Noi, come esempio e più che altro a titolo di utile esercitazione, ci occuperemo qui delle equazioni di terzo grado, riassumendo nel modo più rapido uno dei metodi di risoluzione delle equazioni di quarto grado.

Sia data l'equazione di terzo grado

$$x^3+a_1 x^2+a_2 x+a_3=0.$$

Posto $x=y-\frac{a_1}{3}$, l'equazione si trasforma in un' equazione del tipo:

$$y^3+py+q=0;$$

la quale, posto $y=u+v$, diventa

$$u^3+v^3+(3\,uv+p)(u+v)+q=0,$$

cosicchè, se poniamo inoltre $uv=-\frac{p}{3}$(*), la nostra equazione si riduce alla

$$u^3+v^3=-q.$$

Ma è pure $u^3 v^3=-\frac{p^3}{27}$; e quindi u^3, v^3 sono le radici dell'equazione:

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0$$

ossia:

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}, \quad v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.$$

(*) Ciò è lecito; perchè dei numeri u, v è finora soltanto prefissata la somma y; e quindi si può anche scegliere ad arbitrio il valore del prodotto $u\,v$.

Estraendo le radici cubiche, si traggono i valori di u, v e si trova:

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Ciascuna di queste radici cubiche ha tre valori; scelto, p. es., per la prima uno di essi arbitrariamente tra i tre possibili, il valore da darsi alla seconda radice cubica è completamente determinato da ciò che il prodotto delle due radici cubiche (ossia uv) deve uguagliare $-\frac{p}{3}$.

Siano a, b due valori dei nostri radicali, il cui prodotto uguaglia $-\frac{p}{3}$. Se $\varepsilon \neq 1$ è una radice cubica di $+1$, la terza radice cubica di 1 sarà (come si è visto al § 9) $\frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon^2$. I tre valori del primo radicale saranno: a, εa, $\varepsilon^2 a$; i valori corrispondenti del secondo saranno b, $\varepsilon^2 b$, εb, quindi la nostra equazione avrà le tre radici $a + b$, $\varepsilon a + \varepsilon^2 b$, $\varepsilon^2 a + \varepsilon b$ generalmente distinte. Se $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, allora posso supporre chiaramente (*) $a = b$, e delle tre radici almeno le seconde due sono uguali tra loro.

Siano p, q reali; se $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ posso supporre a, b reali; delle tre radici, una è quindi reale, le altre due immaginarie coniugate. Invece, se $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ [per il che è necessario che $\frac{p^3}{27}$ sia minore di $-\frac{q^2}{4}$, e quindi che p sia negativo $(p = -|p|)$], le radici sono tutte e tre reali, nonostante che $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ sia immaginario, come ora proveremo. Posto:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -r^2 \qquad (r \text{ reale}),$$

la nostra formola diventa:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + ir} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - ir}.$$

(*) Almeno, se p, q sono reali. Il lettore esamini il caso generale.

Si scriva ciascuno dei due radicandi sotto forma trigonometrica, ponendo:

$$\rho^2 = \frac{q^2}{4} + r^2 = -\frac{p^3}{27}, \qquad \cos\theta = -\frac{q}{2\rho}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{r}{\rho};$$

si avrà:

$$y = \sqrt[3]{\rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)} + \sqrt[3]{\rho(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)}.$$

I tre valori della prima radice cubica sono:

$$\sqrt[3]{\rho}\left\{\cos\frac{\theta}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}\right\}, \quad \sqrt[3]{\rho}\left\{\cos\frac{\theta+2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\theta+2\pi}{3}\right\},$$

$$\sqrt[3]{\rho}\left\{\cos\frac{\theta+4\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\theta+4\pi}{3}\right\}.$$

I tre valori della seconda radice cubica sono:

$$\sqrt[3]{\rho}\left\{\cos\frac{\theta}{3} - i\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}\right\}, \quad \sqrt[3]{\rho}\left\{\cos\frac{\theta+2\pi}{3} - i\operatorname{sen}\frac{\theta+2\pi}{3}\right\},$$

$$\sqrt[3]{\rho}\left\{\cos\frac{\theta+4\pi}{3} - i\operatorname{sen}\frac{\theta+4\pi}{3}\right\}.$$

Si osservi che ogni valore di y si ottiene sommando un valore del primo radicale con un valore del secondo, scelti in guisa che il loro prodotto sia reale. Si avranno dunque le tre radici:

$$y_1 = \sqrt[3]{\rho}\left\{\left(\cos\frac{\theta}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}\right) + \left(\cos\frac{\theta}{3} - i\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}\right)\right\} = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta}{3}$$

$$y_2 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta+2\pi}{3}; \qquad y_3 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta+4\pi}{3},$$

dove:

$$\sqrt[3]{\rho} = \sqrt{-\frac{p}{3}} = \sqrt{\frac{|p|}{3}} \quad \text{(perchè } p \text{ dev'essere negativo).}$$

Queste formole si possono dedurre per via elementare.

Infatti, posto $z = \dfrac{y}{2\sqrt[3]{\rho}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{y}{\sqrt{-p}}$, l'equazione diventa:

$$-4\,\frac{2p\sqrt{-p}}{3\sqrt{3}}\,z^3 + 2p\,\frac{\sqrt{-p}}{\sqrt{3}}\,z + q = 0 \quad \text{ossia:}$$

$$4z^3 - 3z - q\,\frac{3\sqrt{3}}{2p\sqrt{-p}} = 0.$$

Ora dalla $\cos\theta = \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{\theta}{3} + \frac{\theta}{3}\right)$ si deduce:

$$\cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}\,.$$

Mutando θ in $\theta + 2k\pi$ (dove k è un intero), si trova:

$$4\cos^3\frac{\theta + 2k\pi}{3} - 3\cos\frac{\theta + 2k\pi}{3} - \cos\theta = 0$$

che si riduce alla precedente equazione quando si ponga:

$$z = \cos\frac{\theta + 2k\pi}{3}\,; \quad \cos\theta = \frac{3\sqrt{3}\,q}{2p\sqrt{-p}} = -\frac{3\sqrt{3}\,q}{2\,|p|\sqrt{|p|}} = -\frac{q}{2\rho}\,.$$

È facile riconoscere che, se x_1, x_2, x_3 sono le tre radici della nostra equazione, valgono le identità:

$$\begin{aligned}
x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\\
a_1 &= -(x_1 + x_2 + x_3)\\
a_2 &= x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1\\
a_3 &= -x_1 x_2 x_3,
\end{aligned}$$

formole che sono affatto analoghe a quelle testè ricordate relative alle equazioni di secondo grado (Cfr. anche il § 14).

Equazioni di quarto grado (*).

Per risolvere l'equazione di quarto grado

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0,$$

si indichino con c_1, c_2, c_3, c_4 le quattro radici (Cfr. il § 14), e si ponga:

$$z_1 = c_1 c_2 + c_3 c_4 \quad ; \; z_2 = c_1 c_3 + c_2 c_4 \quad ; \; z_3 = c_1 c_4 + c_2 c_3.$$

Sia $z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ l'equazione di terzo grado, che ha le radici z_1, z_2, z_3. I coefficienti di questa equazione non cambiano, come è facile verificare, permutando le c ossia sono funzioni *simmetriche* delle c, che si possono subito calcolare quando sono date le a (Cfr. il seg. § 14).

Risolvendo tale equazione di *terzo* grado, si troveranno i valori delle z. Poichè $(c_1 c_2)(c_3 c_4) = a_4$ e $c_1 c_2 + c_3 c_4 = z_1$, delle $c_1 c_2$ e $c_3 c_4$ si conoscono somma e prodotto, e quindi si possono calcolare, risolvendo un'equazione di secondo grado, sia $c_1 c_2$ che $c_3 c_4$. Dalle equazioni (Cfr. il § 14)

$$\begin{aligned}
c_1 c_2 (c_3 + c_4) + c_3 c_4 (c_1 + c_2) &= -a_3\\
(c_3 + c_4) + \qquad (c_1 + c_2) &= -a_1
\end{aligned}$$

si possono poi generalmente ricavare $c_3 + c_4$ e $c_1 + c_2$. Delle c_1, c_2 (come anche delle c_3, c_4) si conosceranno così somma e prodotto; e pertanto si possono dedurre i valori di tutte le c.

(*) Le righe seguenti si potranno studiare soltanto dopo letto il § 14 a pag. 48 e seg.; lo studio delle equazioni di 4° grado trova però ben scarse applicazioni.

CAPITOLO IV.

POLINOMII ED EQUAZIONI ALGEBRICHE

§ 11. — Calcolo combinatorio. Prodotti di binomii e formola del binomio.

α) Ricordiamo rapidamente una ben nota formola di calcolo combinatorio.

Sia $\binom{n}{h}$ il numero delle *combinazioni* di n oggetti ad h ad h, cioè il numero dei modi possibili, in cui possiamo scegliere un gruppo di h elementi tra $n \geqq h$ elementi prefissati. Per $h = 1$ è evidentemente $\binom{n}{1} = n$. Se poi G_{h-1} è un gruppo di $h - 1$ elementi scelti tra i dati, noi potremo dedurne un gruppo G_h di h elementi, aggiungendo a G_{h-1} uno dei residui $n - (h - 1)$ elementi; otteniamo così da ogni G_{h-1} proprio $n - (h - 1)$ gruppi G_h. Operando però in tal modo sui vari G_{h-1}, otteniamo ogni G_h precisamente h volte, perchè ogni G_h contiene h gruppi G_{h-1} Perciò il numero $\binom{n}{h}$ dei G_h è uguale al prodotto di $\frac{n - (h - 1)}{h}$ per il numero $\binom{n}{h-1}$ dei G_{h-1}. Quindi

$$\binom{n}{1} = n = \frac{n}{1}; \; \binom{n}{2} = \frac{n-1}{2}\binom{n}{1} = \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2};$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n-2}{3}\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}; \text{ ecc.}$$

$$\binom{n}{h} = \frac{n(n-1)(n-2) \ldots [n - (h-1)]}{\underline{|h}} \qquad (1)$$

che si può scrivere $\binom{n}{h} = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|h}\;\underline{|n-h}}\cdot$ Ne risulta in particolare $\binom{n}{h} = \binom{n}{n-h}$ (*).

Il numeratore $n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-h+1)$ della (1) dà il numero delle disposizioni di n oggetti ad h ad h cioè il numero dei modi con cui si possono scegliere ed ordinare h oggetti tra n oggetti dati, quando si considerino come distinti due gruppi, anche se differiscono soltanto per l'ordine in cui si susseguono i dati oggetti. Infatti il primo oggetto di una di tali disposizioni si può scegliere ad arbitrio tra gli n oggetti dati; il secondo si potrà poi scegliere tra i residui $n-1$; scelti i primi due oggetti, il terzo si può scegliere tra i residui $n-2$; e così via; lo h^{esimo} ultimo oggetto della disposizione si può scegliere tra $n-h+1$ oggetti.

Così il denominatore $\underline{|h} = h(h-1)(h-2)\ldots\ldots(h-h+1)$ è il numero delle disposizioni di h oggetti ad h ad h, cioè è il numero delle *permutazioni* di h oggetti.

La formola precedente dimostra dunque che, come si può dimostrare direttamente nel modo più semplice, *il numero* $\binom{n}{h}$ *delle combinazioni di* n *oggetti ad* h *ad* h *è uguale al quoziente ottenuto dividendo il numero delle disposizioni di* n *oggetti ad* h *ad* h *per il numero delle permutazioni di* h *oggetti* (**).

β) Siano $x, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ numeri qualsiasi. Consideriamo il prodotto:

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots\ldots(x+a_n).$$

L'algebra elementare insegna che questo prodotto è uguale alla somma di tutti i prodotti P ottenuti moltiplicando tra di loro un addendo del binomio $x+a_1$, un addendo del binomio $x+a_2, \ldots\ldots$, un addendo del binomio $x+a_n$. Tra questi prodotti P ve ne saranno alcuni che non contengono la x (o, come si dice, che contengono il solo fattore x^0), altri che contengono il fattore x e non il fattore x^2, altri che contengono il fattore x^2 e non il fattore x^3, ecc., altri che contengono il fattore x^n. Per formare quelli dei prodotti P, che contengono il fattore x^h e non il fattore x^{h+1} $(0 \leqq h \leqq n)$, si dovrà scegliere in h dei binomii $x+a_1, x+a_2, \ldots\ldots, x+a_n$ il primo addendo x, e negli altri $n-h$ binomii si dovrà scegliere il secondo addendo, per fare poi il prodotto degli n addendi così scelti. Ognuno di questi prodotti P sarà dunque il prodotto di x^h per un prodotto di $n-h$ fattori scelti tra le n quantità $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$. La somma di questi prodotti P sarà dunque il prodotto di x^h per la

---

(*) Questa uguaglianza diventa intuitiva per chi consideri che ogni gruppo di h elementi determina un gruppo di $n-h$ elementi: quello formato con gli $n-h$ elementi residui. E viceversa. Dunque tanti sono i gruppi di h elementi, quanti i gruppi di $n-h$ elementi.

(**) Infatti, permutando nei $\underline{|h}$ modi possibili gli h oggetti di ogni combinazione, si ottengono *tutte* le disposizioni.

somma b_{n-h} di tutti i possibili prodotti ad $n-h$ ad $n-h$ delle n quantità $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$.

Si avrà così:

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots\ldots(x+a_n) = x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + b_{n-1}x + b_n$$

dove il coefficiente b_k di x^{n-k} $(k=1,2,\ldots\ldots,n)$ è la somma degli $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ prodotti, che si ottengono moltiplicando a k a k in tutti i modi possibili le $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$. Se $a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_n = a$, questi prodotti sono tutti uguali ad a^k. E perciò:

$$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1}ax^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} + \ldots\ldots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}x + \binom{n}{n}a^n.$$

Come si riconosce dal teor. di questo § 11 a pag. 43, i coefficienti del 2° membro equidistanti dagli estremi sono uguali tra di loro, ciò che si poteva prevedere *a priori*, osservando che il 1° e quindi anche il 2° membro non mutano scambiando x con a. Se nella formola iniziale poniamo $-a_i$ al posto di a_i troviamo, indicando ancora con b_h la somma degli $\binom{n}{h}=\binom{n}{n-h}$ prodotti ad h ad h delle n quantità $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$:

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n) =$$
$$x^n - b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + (-1)^h b_h x^{n-h} + \ldots\ldots + (-1)^n b_n.$$

§ 12. — Divisione di due polinomii.

Siano $M(x)$, $N(x)$ due polinomii della variabile x, i cui gradi sieno rispettivamente m, n. Sarà:

$$M(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + a_{m-1}x + a_m,$$
$$N(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + b_{n-1}x + b_n,$$

(dove a, b sono costanti).

Dividendo $M(x)$ per $N(x)$ con le regole dell'algebra elementare si troverà un quoziente $Q(x)$ ed un resto $R(x)$, entrambi polinomii nella x.

Il grado di $R(x)$ è inferiore a quello del divisore $N(x)$. E si ha identicamente:

$$M(x) = N(x)\ Q(x) + R(x) \ (*).$$

(*) Il problema di determinare $Q(x)$ ed $R(x)$ è per definizione quello di determinare i due polinomii in guisa che questa uguaglianza sia una identità, e che il

Se $m \geqq n$, Q è un polinomio di grado $m - n$; se $m < n$, allora Q è identicamente nullo ed $R = M$. In particolare, se $m = n$, allora Q è di grado nullo, cioè non dipende da x, o, come si suol dire, è una costante.

Viceversa, se p. es. $m \geqq n$, e se Q ed R sono due polinomii, che soddisfano identicamente alla precedente uguaglianza, se il grado di R non supera quello di N, allora Q è di grado $m - n$ ed i due polinomii Q ed R sono precisamente il quoziente ed il resto che si ottengono dividendo M per N.

(Tutti questi risultati sono una facile estensione dei teoremi analoghi per i numeri intieri).

Se $R(x) = 0$, il polinomio $N(x)$ si dice essere un divisore di $M(x)$. In tale caso, se k è una costante qualsiasi non nulla, anche $k\,N(x)$ è un divisore di M perchè si ha:

$$M(x) = k\,N(x)\left[\frac{1}{k}\,Q(x)\right].$$

Ogni polinomio di grado zero si riduce ad una costante k ed è un divisore di $M(x)$, perchè dividendo $M(x)$ per k si ottiene il quoziente $\frac{1}{k}\,M(x)$ ed un resto nullo. I polinomii di grado zero (le costanti) hanno quindi nell'attuale teoria un ufficio analogo a quello che il numero 1 ha nella teoria dei divisori dei numeri intieri.

Se noi applichiamo gli stessi metodi che si adoprano nella aritmetica nello studio dei divisori dei numeri intieri troviamo:

Un polinomio, che sia divisore comune dei due polinomii M (x) *e* N (x) *è un divisore anche del resto ottenuto dividendo* M *per* N; *e viceversa un polinomio che è divisore di questo resto, e divide il polinomio* N (x), *divide anche l'altro polinomio* M (x).

---

grado di $R(x)$ non superi quello del divisore $N(x)$. Quest'ultima convenzione è necessaria per rendere univocamente determinato il problema.

Si noti che *altre* sono le convenzioni dell'aritmetica. Nell'aritmetica dei numeri fratti (come nell'algebra delle frazioni) non si parla del resto (che si suppone nullo). Nell'aritmetica dei numeri interi positivi si rende univocamente determinata la divisione, imponendo al *resto* di non superare il divisore (così che non si dice mai p. es. che, dividendo 22 per 7, si ha 2 per quoziente, 8 per resto). Così che il risultato ottenuto nella divisione algebrica di due polinomii può contrastare con tale convenzione aritmetica, quando ai coefficienti e alla x si diano particolari valori interi positivi. Il lettore lo può riconoscere, osservando che il quoziente e il resto ottenuti dividendo $x^2 + (b - a^2)$ per $x - a$ sono rispettivamente $x + a$ e b; e ponendo p. es. $x = 5$, $a = 4$, $b = 3$.

Dividiamo $M(x)$ per il polinomio $N(x)$, sia $R(x)$ il resto della div.
» $N(x)$ » » » $R(x)$, sia $R_1(x)$ » » » 2ª »
» $R(x)$ » » » $R_1(x)$, sia $R_2(x)$ » » » 3ª »
» $R_1(x)$ » » » $R_2(x)$, sia $R_3(x)$ il resto;

così continuiamo fino a che si trovi un resto nullo; si dimostra (come si dimostra in aritmetica per i numeri intieri) che l'ultimo resto ottenuto differente da zero (lo stesso polinomio $N(x)$ se $R(x) = 0$) è un divisore comune di $M(x)$, $N(x)$ ed è anzi il *M. C. D.* (*) di questi polinomii, perchè ogni divisore comune di M, N è un divisore anche di quest'ultimo resto e viceversa.

Se questo massimo comune divisore è di grado zero (è costante), i due polinomii M, N si dicono primi tra loro.

Se si vogliono cercare i divisori $mx + n$ di primo grado di un polinomio $P(x)$, si osserva che, se $\left[x - \left(-\frac{n}{m}\right)\right] = x - \alpha$ $\left(\text{essendo } \alpha = -\frac{n}{m}\right)$ è un divisore di $P(x)$, anche $mx + n$ è un divisore di $P(x)$ e viceversa.

La ricerca dei divisori di primo grado equivale alla ricerca dei divisori del tipo $x - \alpha$, di cui parleremo nei seguenti paragrafi.

§ 13. — Regola di Ruffini.

Vogliamo dividere il polinomio

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

per $x - \alpha$. Il quoziente sarà un polinomio

$$Q(x) = q_0 x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + \dots + q_{n-1}$$

di grado $n - 1$; il resto sarà un polinomio di grado zero, cioè un numero R indipendente da x. Calcoliamo quoziente e resto. Sarà identicamente

$$P(x) = (x - \alpha)\, Q(x) + R.$$

Cioè, confrontando i coefficienti delle varie potenze della x:

$$a_0 = q_0;\ a_1 = q_1 - \alpha q_0;\ a_2 = q_2 - \alpha q_1;\ \dots;\ a_{n-1} = q_{n-1} - \alpha q_{n-2};\ a_n = R - \alpha q_{n-1}.$$

(*) Tale massimo comun divisore è determinato a meno di un fattore costante.

Le quali formole equivalgono alle seguenti che consentono il più semplice e rapido calcolo dei coefficienti q_i e del resto R:

$$\begin{aligned} q_0 &= a_0 \\ q_1 &= a_1 + \alpha\, q_0 \\ q_2 &= a_2 + \alpha\, q_1 \\ &\ldots\ldots \\ q^s &= a_s + \alpha\, q_{s-1} \\ &\ldots\ldots \\ q_{n-1} &= a_{n-1} + \alpha\, q_{n-2} \\ R &= a_n + \alpha\, q_{n-1}. \end{aligned}$$

Cioè: *I primi coefficienti* a_0, q_0 *sono uguali; e per* $s \geqq 1$ *ogni* q_s *è uguale al coefficiente omologo* a_s *aumentato dal prodotto di* α *per il precedente coefficiente* q_{s-1}. *Posto* $R = q_n$, *questa proposizione è vera anche per* $s = n$.

Le precedenti formole dimostrano che:

$$q_0 = a_0 \quad ; \quad q_1 = a_0\,\alpha + a_1 \quad ; \quad q_2 = a_0\,\alpha^2 + a_1\,\alpha + a_2$$

$$q_s = a_0\,\alpha^s + a_1\,\alpha^{s-1} + \ldots\ldots + a_{s-1}\,\alpha + a_s$$

$$R = q_n = a_0\,\alpha^n + a_1\,\alpha^{n-1} + \ldots\ldots\, a_{n-1}\,\alpha + a_n.$$

L'ultima delle quali, si enuncia così:

Il resto ottenuto nella divisione di un polinomio $P(x)$ *per* $x - \alpha$ *si ottiene scrivendo* α *al posto della* x *in* $P(x)$. Cosicchè: *Il polinomio* $P(x)$ *è divisibile per* $x - \alpha$ *allora e allora soltanto che* α *soddisfa alla* $P(\alpha) = 0$, *cioè che* α *è radice dell'equazione* $P(x) = 0$.

Caso particolare di queste formole sono le identità:

$$x^n - a^n = (x - a)\,(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}\,x + a^{n-1})$$

per n intero positivo

e per m intero *dispari*

$$x^m + a^m = (x + a)\,(x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2\,x^{m-3} - \ldots\ldots - a^{m-2}\,x + a^{m-1}).$$

Se nella penultima formola poniamo $x = 1$, $a = q$, troviamo

$$1 + q + q^2 + \ldots\ldots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

che è una formola ben nota nella teoria delle progressioni geometriche.

§ 14. — **Relazioni tra coefficienti e radici di un'equazione algebrica.**

α) Dedurremo più tardi dalla teoria delle funzioni continue in più variabili il teorema fondamentale dell'algebra (teorema di GAUSS).

Ogni polinomio $\mathrm{P}(\mathrm{x}) = \mathrm{a}_0 \mathrm{x}^{\mathrm{n}} + \mathrm{a}_1 \mathrm{x}^{\mathrm{n}-1} + \ldots + \mathrm{a}_{\mathrm{n}-1} \mathrm{x} + \mathrm{a}_{\mathrm{n}}$ *di grado* n *nella* x *è decomponibile in uno e in un solo modo nel prodotto di* a_0 *e di* n *fattori di primo grado* $\mathrm{x} - \alpha_1, \mathrm{x} - \alpha_2, \ldots\ldots \mathrm{x} - \alpha_{\mathrm{n}}$ *dove le* α *sono numeri distinti o no, reali o complessi.*

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = \\ = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n). \qquad (1)$$

[Ricordo che, dicendo che $P(x)$ è di grado n, si è detto anche che $a_0 \neq 0$].

Questa decomposizione in fattori ha qualche analogia con la decomposizione di un numero intero in fattori primi. Nell'algebra dei polinomii, che noi studiamo, i polinomii di primo grado hanno così un ufficio analogo a quello che i numeri primi hanno nell'aritmetica dei numeri interi.

Gli n *numeri* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{\mathrm{n}}$ (*) *sono tutte e sole le radici dell'equazione* $\mathrm{P}(\mathrm{x}) = 0$ (perchè $P(x)$ può essere nullo soltanto se uno dei fattori $x - \alpha$ è nullo).

Ciò che rende intuitivo il teor. del RUFFINI relativo al caso in cui il polinomio $P(x)$ è divisibile per un binomio $x - \alpha$.

Le formole del § 11 (pag. 44) ci dicono allora che:

La somma delle radici α *vale* $-\frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a}_0}$.

La somma dei prodotti ottenuti moltiplicando a due a due le radici α *vale* $\frac{\mathrm{a}_2}{\mathrm{a}_0}$.

La somma dei prodotti ottenuti moltiplicando ad h *ad* h (se $h \leqq n$) *le radici* α *vale* $(-1)^{\mathrm{h}} \frac{\mathrm{a}_{\mathrm{h}}}{\mathrm{a}_0}$.

Il prodotto delle n *radici* α *vale* $(-1)^n \frac{\mathrm{a}_{\mathrm{n}}}{\mathrm{a}_0}$.

Questi teoremi sono la generalizzazione di quelli ricordati nel § 10 per le equazioni di secondo e terzo grado.

(*) Ricordo che le α possono anche essere non tutte distinte.

β) Dal teorema sopra enunciato si deduce anche che, se $P(x)$ è un polinomio di (apparente) grado n, e se l'equazione $P(x) = 0$ ammette più di n radici, allora $P(x)$ è identicamente nullo, e *ogni numero è radice della* P (x) = 0 (in altre parole *tutti i coefficienti di* P (x) *sono nulli*).

Se due polinomii $P(x)$, $Q(x)$ sono uguali *per tutti i valori* della x, allora l'equazione $P(x) - Q(x) = 0$ ammette infinite radici (perchè ogni numero ne è radice). Quindi il polinomio $P(x) - Q(x)$ ha nulli tutti i suoi coefficienti; cioè *il grado di* P (x) *è uguale al grado di* Q (x); ed ogni potenza della x ha coefficienti uguali in $P(x)$ e in $Q(x)$: in una parola i polinomii $P(x)$, $Q(x)$ *sono identicamente uguali*.

Più precisamente due polinomii $P_1(x)$, $P_2(x)$ di grado $n-1$ sono uguali identicamente, se assumono gli stessi valori in n punti distinti $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$. Cioè è completamente determinato un polinomio $P(x)$ di grado $n-1$, quando sieno dati i valori $P(a_1), P(a_2), \ldots\ldots, P(a_n)$, che esso assume in n punti distinti $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$. Ed è facile intuire e verificare che un tale polinomio è dato dalla

$$P(x) = P(a_1)\frac{(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)} +$$

$$+ P(a_2)\frac{(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)} +$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad +$$

$$+ P(a_n)\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(a_i)\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})(x-a_{i+2})\ldots(x-a_n)}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})(a_i-a_{i+2})\ldots(a_i-a_n)}.$$

γ) Alle formole di § 14, α, possiamo dare un altro aspetto notevole (Newton). Se noi nel secondo e terzo membro di (1) poniamo $x + h$ al posto della x, i coefficienti di h nelle espressioni che se ne deducono saranno uguali. Si trova così con facile calcolo che:

$$\begin{aligned} & n\, a_0\, x^{n-1} + (n-1)\, a_1\, x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} = \\ & = a_0 (x-\alpha_2)(x-\alpha_3) \ldots\ldots (x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_n) + \\ & + a_0 (x-\alpha_1)(x-\alpha_3) \ldots\ldots (x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_n) + \\ & + \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ & + a_0 (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots\ldots (x-\alpha_{n-2})(x-\alpha_n) + \\ & + a_0 (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots\ldots (x-\alpha_{n-2})(x-\alpha_{n-1}) = \\ & = \frac{P(x)}{x-\alpha_1} + \frac{P(x)}{x-\alpha_2} + \ldots\ldots + \frac{P(x)}{x-\alpha_n}. \qquad (2) \end{aligned}$$

Se noi calcoliamo i quozienti dell'ultimo membro di (2) con le regole del § 13 troviamo:

$$n\,a_0\,x^{n-1}+(n-1)\,a_1\,x^{n-2}+\ldots..+2\,a_{n-2}\,x+a_{n-1}=$$
$$=a_0x^{n-1}+(a_0\alpha_1+a_1)x^{n-2}+(a_0\alpha_1^2+a_1\alpha_1+a_2)\,x^{n-3}+\ldots+(a_0\alpha_1^{n-1}+a_1\alpha_1^{n-2}+\ldots+a_{n-1})+$$
$$+a_0x^{n-1}+(a_0\alpha_2+a_1)x^{n-2}+(a_0\alpha_2^2+a_1\alpha_2+a_2)\,x^{n-3}+\ldots+(a_0\alpha_2^{n-1}+a_1\alpha_2^{n-2}+\ldots+a_{n-1})+$$
$$+\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+a_0x^{n-1}+(a_0\alpha_n+a_1)x^{n-2}+(a_0\alpha_n^2+a_1\alpha_n+a_2)\,x^{n-3}+\ldots+(a_0\alpha_n^{n-1}+a_1\alpha_n^{n-2}+\ldots+a_{n-1})=$$
$$=n\,a_0\,x^{n-1}+(a_0\,s_1+n\,a_1)+(a_0\,s_2+a_1\,s_1+n\,a_2)\,x^{n-3}+\ldots+$$
$$+(a_0\,s_{n-1}+a_1\,s_{n-2}+\ldots+a_{n-2}\,s_1+n\,a_{n-1}),$$

dove con s_h ho indicato la somma $\alpha_1^h+\alpha_2^h+\ldots+\alpha_n^h$ delle h^{esime} potenze delle radici α. Se ne deduce, confrontando primo e terzo membro:

$$a_0\,s_1+a_1=0$$
$$a_0\,s_2+a_1\,s_1+2\,a_2=0$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n\,s_{n-1}+a_1\,s_{n-2}+\ldots+a_{n-2}\,s_1+(n-1)\,a_{n-1}=0.$$

Le quali formole permettono di calcolare successivamente le $s_1, s_2, s_3, \ldots.., s_{n-1}$. Moltiplicando $P(x)$ per $x^h\,(h=0,1,2,\ldots..)$, sostituendo nel prodotto una delle α al posto di x (col che tale prodotto si annulla) e sommando tali prodotti si trova: (posto $m=n+h=n, n+1, n+2, \ldots..$)

$$a_0\,s_m+a_1\,s_{m-1}+\ldots..+a_{n-1}\,s_{m-n+1}+a_n\,s_{m-n}=0\;(m\geqq n)$$

che permette di calcolare successivamente $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots..$

Cosicchè: *Si possono calcolare le* s_h *appena sono noti i coefficienti* a_i *dell'equazione* $P(x)=0$.

δ) *Si calcoli la somma* $s_{\alpha,\beta}$ *dei prodotti ottenuti moltiplicando la potenza* α^{esima} *di una radice di una data equazione per la potenza* β^{esima} *di un'altra radice.*

Basta osservare che il prodotto $s_\alpha\,s_\beta=s_{\alpha,\beta}+s_{\alpha+\beta}$ se $\alpha\neq\beta$, e che $s_\alpha\,s_\alpha=s_{2\alpha}+2\,s_{\alpha,\alpha}$.

Cosicchè $s_{\alpha,\beta}=s_\alpha\,s_\beta-s_{\alpha+\beta}$, se $\alpha\neq\beta$, e $s_{\alpha,\alpha}=\dfrac{1}{2}\,(s_\alpha\,s_\alpha-s_{2\alpha})$.

Le formole di Newton permettono così di esprimere in ogni caso $s_{\alpha,\beta}$ per mezzo dei coefficienti dell'equazione. In modo analogo si deduce all'esame del prodotto $s_\alpha\,s_\beta\,s_\gamma$ che: *La somma* $s_{\alpha,\beta,\gamma}$ *dei prodotti ottenuti moltiplicando la* α^{esima} *potenza d'una radice di una equazione per la* β^{esima} *potenza d'una seconda radice, e la* γ^{esima} *potenza d'una terza radice è esprimibile razionalmente* (*) *mediante i coefficienti dell'equazione stessa.*

In modo simile si definiscono e si insegnano a calcolare le $s_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$, ecc., ecc.

Tanto le s_α che le $s_{\alpha,\beta}$, $s_{\alpha,\beta,\gamma}$, ecc., sono funzioni simmetriche delle radici d'una equazione (cioè non cambiano di valore, quando tali radici si permutino tra di loro in un modo qualsiasi). Ed è facile persuadersi che ogni *polinomio simmetrico delle radici di un'equazione* si ottiene come combinazione lineare delle somme s_α, $s_{\beta,\gamma}$, $s_{\alpha,\beta,\gamma}\ldots..$ testè calcolate, ed è quindi esso stesso *calcolabile razionalmente mediante i coefficienti dell'equazione* (senza che sia necessario risolverla).

Così, p. es., se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sono le quattro radici di una equazione di quarto grado, l'espressione:

$$5\,\alpha_1\,(\alpha_2^2\,\alpha_3^2+\alpha_3^2\,\alpha_4^2+\alpha_4^2\,\alpha_2^2)+5\,\alpha_2\,(\alpha_3^2\,\alpha_4^2+\alpha_4^2\,\alpha_1^2+\alpha_1^2\,\alpha_3^2)+$$
$$+5\,\alpha_3\,(\alpha_4^2\,\alpha_1^2+\alpha_1^2\,\alpha_2^2+\alpha_2^2\,\alpha_4^2)+5\,\alpha_4\,(\alpha_1^2\,\alpha_2^2+\alpha_2^2\,\alpha_3^2+\alpha_3^2\,\alpha_1^2)+$$
$$+4\,\alpha_1^2\,(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)+4\,\alpha_2^2\,(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_1)+4\,\alpha_3^2\,(\alpha_4+\alpha_1+\alpha_2)+$$
$$+4\,\alpha_4^2\,(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=5\,s_{1,2,2}+4\,s_{2,1}=5\,(s_1\,s_{2,2}-s_{2,3})+4\,s_{2,1}=$$
$$=5\left(s_1\,\frac{s_2^2-s_4}{2}-\Big[s_2\,s_3-s_5\Big]\right)+4\left(s_2\,s_1-s_3\right).$$

(*) Vale a dire con sole addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni.

Il suo calcolo è ridotto a quello di s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, che noi sappiamo eseguire per mezzo delle formole di Newton. Ma, naturalmente, speciali artifici potrebbero abbreviarlo di gran lunga.

§ 15. — Radici razionali di un'equazione a coefficienti razionali.

Data un'equazione di grado superiore al quarto, è generalmente impossibile ridurne la risoluzione alla estrazione di radici, come avviene per le equazioni di 2°, di 3°, ed anche di 4° grado. Svariatissimi metodi sono stati trovati per calcolare con approssimazione tali radici; ma questi metodi hanno ben scarsa importanza per l'ingegnere. Per noi tale ricerca rientrerà nello studio più generale della risoluzione approssimata di un'equazione anche non algebrica (*).

Cionostante vogliamo aggiungere un'osservazione specialmente semplice. Poniamo che i coefficienti dell'equazione:

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0 \qquad (1)$$

siano numeri razionali (cioè numeri interi o fratti). Senza diminuire la generalità possiamo supporli interi, perchè, qualora fra di essi ve ne fossero dei fratti, basterebbe moltiplicare ambo i membri dell'equazione per il minimo multiplo comune dei denominatori dei coefficienti fratti, per ottenere un'altra equazione (avente le stesse radici della prima) ed a coefficienti tutti interi.

Supposto adunque che le a siano numeri interi, noi dimostreremo che, *se la nostra equazione possiede una radice razionale* $\frac{\alpha}{\beta}$ (α, β interi primi tra di loro) *allora* α *è un divisore* di a_n, β *un divisore* di a_0. Infatti in tali ipotesi si ha: $a_0 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + a_1 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \frac{\alpha}{\beta} + a_n = 0$, che si può scrivere (moltiplicando per β^n):

$$a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} \beta + a_2 \alpha^{n-2} \beta^2 + \dots + a_{n-1} \alpha \beta^{n-1} + a_n \beta^n = 0,$$

ossia:

$$a_0 \alpha^n = -\beta \left\{ a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} \beta + \dots + a_n \beta^{n-1} \right\}$$

oppure:

$$a_n \beta^n = -\alpha \left\{ a_0 \alpha^{n-1} + a_1 \alpha^{n-2} \beta + \dots + a_{n-1} \beta^{n-1} \right\}.$$

Poichè le a_i, α, β sono numeri interi, le quantità tra $\{\ \}$ nei secondi membri di queste equazioni sono numeri interi; e perciò questi secondi membri sono rispettivamente divisibili per α e per β. Altrettanto avverrà quindi dei primi membri; ossia $a_0 \alpha^n$ è divisibile per β, $a_n \beta^n$ per α.

(*) Rinvio ai trattati di algebra complementare chi volesse approfondire tali studii (di cui noi daremo un breve cenno in un venturo paragrafo).

Nel trattato di *Nomographie* del D'Ocagne lo studioso troverà molti metodi grafici per eseguire tali calcoli; metodi, che ricorrono all'uso di una bilancia o del galvanometro, si trovano svolti in GHERSI, *Matematica dilettevole e curiosa* (edita da Hoepli).

Ma, poichè α e β sono primi tra loro, α^n è primo con β, β^n con α. Se ne deduce tosto che a_0 è divisibile per β, a_n divisibile per α. c. d. d.

Ponendo $\beta = 1$ in questo teorema si ha:

COROLL. *Le radici intere della nostra equazione a coefficienti* a *interi sono tutte divisori del termine noto* a_n.

Se $a_0 = 1$ dal precedente teorema si trae:

COROLL. *Se* $a_0 = 1$, *la nostra equazione non può avere radici fratte, ma soltanto al più radici intere.*

Questi teoremi riducono a pochi tentativi la ricerca delle radici intere o fratte di una equazione algebrica. E si potrebbero aggiungere altri teoremi dello stesso tipo, che abbrevierebbero ancora la ricerca.

§ 16. — **Polinomii a coefficienti reali.**

Supponiamo che i coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ del polinomio

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

sieno numeri reali. Cionostante le radici α possono essere numeri complessi (come è ben noto già dalla teoria delle equazioni di secondo grado). Sia $\beta + i\gamma$ una tale radice. Sarà

$$P(\beta + i\gamma) = a_0(\beta + i\gamma)^n + a_1(\beta + i\gamma)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(\beta + i\gamma) + a_n = 0.$$

Il numero complesso coniugato sarà pure nullo.

Tale numero si deduce dal precedente cambiando i in $-i$. Ma questo cambiamento non muta i coefficienti $a_0, a_1, \ldots$, che sono *reali*. Dunque questo numero immaginario coniugato, che è ancora nullo, vale:

$$P(\beta - i\gamma) = a_0(\beta - i\gamma)^n + a_1(\beta - i\gamma)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(\beta - i\gamma) + a_n = 0.$$

E questa uguaglianza dimostra che anche $\beta - i\gamma$ è radice dell'equazione $P(x) = 0$.

Tra i fattori lineari $x - \alpha$, in cui è decomposto $P(x)$ figurano perciò entrambi i fattori $[x - (\beta + i\gamma)]$ e $[x - (\beta - i\gamma)]$: il cui prodotto è il fattore *reale di secondo grado* $p_1(x) = (x - \beta)^2 + \gamma^2 = x^2 - 2\beta x + (\beta^2 + \gamma^2)$. E il polinomio $P(x)$ è divisibile per questo fattore. Il quoziente $P_1(x)$ sarà ancora polinomio a coefficienti reali. E, se la equazione $P_1(x) = 0$ possiede qualche radice immaginaria (che sarà pure radice di $P(x) = 0$), allora $P_1(x)$ sarà ancora divisibile per un polinomio $p_2(x)$ di secondo grado a coefficienti reali. Sarà perciò $P_1(x) = p_2(x) P_2(x)$, e quindi $P(x) = p_1(x) p_2(x) P_2(x)$, dove $P_2(x)$ è ancora un polinomio. E così via. Se ne deduce:

Ogni polinomio P (x) *a coefficienti reali si può scomporre nel prodotto di polinomii di primo o di secondo grado a coeffi-*

cienti reali. I fattori di primo grado corrispondono alle radici reali della P (x) = 0. *I fattori di secondo grado corrispondono alle radici complesse.* Anzi ognuno di questi fattori individua una coppia di radici immaginarie coniugate.

Se il polinomio è di grado *dispari*, evidentemente esso non può essere prodotto di soli fattori di secondo grado. Quindi:

Ogni equazione di grado dispari a coefficienti reali possiede almeno una radice reale.

Sarà bene enunciare esplicitamente la osservazione iniziale: *Se* P (x) = 0 *è un'equazione a coefficienti reali che possiede una radice complessa, essa possiede anche la radice immaginaria coniugata.* Essa si può, per quanto abbiamo qui dimostrato, generalizzare così: *Se un'equazione* P (x) *a coefficienti reali possiede* r *radici complesse uguali a un numero* $\alpha + i\beta$, *essa possiede anche* r *radici uguali al numero complesso coniugato* $\alpha - i\beta$. In tal caso tra i precedenti fattori ve ne sono r uguali ad $(x - \alpha)^2 + \beta^2$.

§ 17. — **Sistemi di equazioni algebriche.**

α) Se $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ sono due equazioni algebriche, che hanno comune la radice α, allora $x - \alpha$ è divisore sia di $f(x)$ che di $g(x)$ e quindi anche del loro massimo comun divisore; cioè α è radice dell'equazione ottenuta uguagliando a zero tale M. C. D. E reciprocamente, una radice di questa ultima equazione è radice comune delle $f(x) = 0$, $g(x) = 0$. Se tale M. C. D. è una costante (differente da zero), se cioè $f(x)$, $g(x)$ sono primi tra di loro, le equazioni $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ non avranno radici comuni.

β) Si può scrivere in vari modi la condizione necessaria e sufficiente affinchè le equazioni $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ abbiano almeno una radice comune.

Se p. es. $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_m$ sono le radici della $g(x) = 0$, basta esprimere che è nulla una almeno delle $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_m)$, ossia che il loro prodotto

$$f(\alpha_1)\, f(\alpha_2) \,\ldots\ldots\, f(\alpha_m) = 0.$$

Il primo membro di questa equazione, essendo un polinomio *simmetrico* delle radici della $g(x) = 0$, si può calcolare (§ 14, δ) senza risolvere questa equazione. *Tale polinomio* (che si può calcolare anche in altri modi, p. es., esprimendo che almeno una delle radici di $f(x) = 0$ soddisfa alla $g(x) = 0$), *il cui annullarsi è condizione necessaria e sufficiente affinchè le due equazioni abbiano almeno una radice comune, si dice il risultante delle due equazioni*: esso è un polinomio formato coi coefficienti a_i e b_i delle due equazioni.

γ) *Sistemi di due equazioni algebriche intere a due incognite.* Uguagliando a zero un polinomio in più variabili si ha un'equazione algebrica a più incognite, ed i gruppi dei valori delle incognite, che soddisfano l'equazione, sono le soluzioni di essa. Date due equazioni algebriche in due incognite x, y, consideriamo il loro sistema, e cerchiamo le loro soluzioni comuni.

Siano:

$$f(x, y) = 0 \quad , \quad g(x, y) = 0$$

le due equazioni; la prima di grado n, la seconda di grado m nella x. Ordinate secondo le potenze decrescenti di x, esse prendono la forma

$$f(x, y) = \varphi_0(y)\, x^n + \varphi_1(y)\, x^{n-1} + \varphi_2(y)\, x^{n-2} + \ldots + \varphi_n(y) = 0$$
$$g(x, y) = \psi_0(y)\, x^m + \psi_1(y)\, x^{m-1} + \psi_2(y)\, x^{m-2} + \ldots + \psi_m(y) = 0$$

dove le φ e le ψ sono polinomii nella y.

Se una coppia di valori di x ed y, p. es., $x = \alpha$, $y = \beta$, soddisfa entrambe le equazioni, allora, immaginando in esse posto $y = \beta$, si hanno due equazioni nella sola x, che avranno per radice comune il valore $x = \alpha$; cosicchè per $y = \beta$ sarà nullo il risultante R di queste due equazioni in x. Si noti che, per calcolare R, nelle due date equazioni si considera come incognita la sola x; cosicchè questo loro risultante R sarà un polinomio $R(y)$ nella sola y, perchè dipenderà solo dalle $\varphi_i(y)$, $\psi_j(y)$, coefficienti delle date equazioni.

Se $x = \alpha$, $y = \beta$ soddisfano le due equazioni, la $R(y) = 0$ ammette β come radice. Viceversa ogni valore β di y che annulli $R(y)$, sostituito nelle due equazioni date, le riduce a due equazioni in x aventi almeno una radice a comune, che si calcola servendosi dell'algoritmo del M. C. D. Si trovano così tutte le coppie di valori di y ed x soddisfacenti alle due date equazioni.

L'equazione $R(y) = 0$ dicesi l'equazione risultante dalla eliminazione di x dalle due date equazioni. In generale, però, per calcolare $R(y)$, o per risolvere il dato sistema di equazioni, è opportuno ricorrere ad artifici che variano da caso a caso, e che solo la pratica può suggerire.

δ) Vediamo come il problema di trovare le radici $z = x + iy$ reali o complesse dell'equazione

$$f(x) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

a coefficienti $a_j = b_j + ic_j$ reali o complessi (x, y, c_j, b_j numeri reali) si riduca al problema di trovare le radici reali di un'equazione a coefficienti reali. La nostra equazione diventa nelle attuali ipotesi:

$$(b_0 + ic_0)(x + iy)^n + (b_1 + ic_1)(x + iy)^{n-1} + \ldots +$$
$$+ (b_{n-1} + ic_{n-1})(x + iy) + (b_n + ic_n) = 0.$$

Sviluppando ed eseguendo tutte le operazioni, il primo membro si ridurrà in fine al tipo

$$P(x, y) + iQ(x, y),$$

ove P e Q saranno polinomii nelle x, y a coefficienti reali, onde l'equazione precedente diventerà:

$$P(x, y) + iQ(x, y) = 0$$

e si scinderà nelle due:

$$P(x, y) = 0 \quad ; \quad Q(x, y) = 0.$$

Siamo così ridotti alla risoluzione di un sistema di due equazioni in due incognite, che si potrà fare col metodo dato in γ). Ogni soluzione reale $x = x_0$, $y = y_0$ di questo sistema dà una radice $x_0 + iy_0$ dell'equazione proposta, e viceversa.

Esercizi.

1° Dati n punti, tre qualunque dei quali non sono mai in linea retta, quante sono le rette che contengono due di tali punti?

RIS. $\binom{n}{2}$.

2° Quante sono le estrazioni possibili distinte al gioco del lotto?

RIS. $\binom{90}{5}$.

3° Quante sono le estrazioni possibili al gioco del lotto, in cui k ($k < 5$) dei numeri estratti sono prefissati a priori?

RIS. Dei 5 numeri estratti, k sono prefissati; i restanti $5 - k$ devonsi scegliere tra i residui $90 - k$ numeri. Il numero cercato è perciò $\binom{90-k}{5-k}$. Per $k = 2, 3, 4$ si ottiene il numero dei casi, in cui è possibile vincere un ambo, un terno, una quaterna secca. Tale numero diviso per il numero (eserc. 2°) $\binom{90}{5}$ delle possibili estrazioni dà la cosidetta *probabilità* di vittoria.

4° Dati $n < 90$ numeri interi positivi non maggiori di 90, in quante estrazioni del lotto può avvenire che k dei numeri estratti, e *non più* di k siano tra gli n numeri dati?

Poichè k dei numeri estratti sono da scegliere tra gli n numeri dati e gli altri $5 - k$ tra i residui $90 - n$, il numero cercato è $\binom{n}{k}\binom{90-n}{5-k}$.

5° Dati n interi positivi non maggiori di 90, in quante estrazioni del lotto può avvenire che *almeno* $h < 5$ dei numeri estratti sieno fra gli n numeri dati?

Si devono sommare, se p. es. $n \geqq 5$, il valore delle estrazioni di cui all'esercizio 4°, relativi ai valori $k = h$, $k = h + 1, \ldots\ldots$, $k = 5$.

6° Dimostrare che $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$.

RIS. 1ª. Si verifichi direttamente.

RIS. 2ª. Si osservi che tra le $\binom{n}{m}$ combinazione degli n elementi $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ ad m ad m ve ne sono $\binom{n-1}{m}$ che non contengono a_1 ed $\binom{n-1}{m-1}$ che lo contengono.

7° Dimostrare che $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-2}{m-1} + \ldots\ldots + \binom{m-1}{m-1}$; (Cfr. eserc. 6°).

8° Sviluppare $(x + a + b)^n$.

RIS. Si ponga $c = a + b$ e si sviluppi, sostituendo poi alle singole potenze di c lo sviluppo corrispondente di $(a + b)$, $(a + b)^2$, ecc. Si trova che il coefficiente di $x^p a^q b^r$ (p, q, r interi positivi di somma n) è $\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|p}\,\underline{|q}\,\underline{|r}}$, come si può provare anche direttamente.

9° La somma dei coefficienti dello sviluppo di $(x + a)^n$ vale 2^n: la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(x - a)^n$ vale zero.

RIS. Infatti tali somme sono uguali ai valori di $(x \pm a)^n$ per $x = a = 1$.

10° Sviluppare $(2x \pm 3a)^n$ e calcolare la somma dei coefficienti dello sviluppo.

11° Dimostrare che i numeri contenuti nelle orizzontali del quadro

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \end{array}$$

sono ordinatamente i coefficienti dello sviluppo di $(x+a)^0$, $(x+a)^1$, $(x+a)^2$, $(x+a)^3$, ecc. Si noti che il termine di posto h della riga di posto k si ottiene sommando i termini di posto h ed $h-1$ della riga precedente $(1 < h < k)$.

12° Calcolare il numero $\left[{n \atop h}\right]$ delle combinazioni con ripetizione (in cui cioè uno stesso elemento può essere ripetuto una o più volte) di n elementi ad h ad h?

Ris. Quelle di tali combinazioni che non contengono il primo degli n elementi dati sono (se $n > 1$) in numero di $\left[{n-1 \atop h}\right]$. Quelle che lo contengono sono in numero di $\left[{n \atop h-1}\right]$, quando sia posto $\left[{n \atop o}\right] = 1$. Dunque si ha $\left[{n \atop h}\right] = \left[{n-1 \atop h}\right] + \left[{n \atop h-1}\right]$. Queste proprietà, insieme alle $\left[{1 \atop h}\right] = 1$, $\left[{n \atop 1}\right] = n$ bastano a definire $\left[{n \atop h}\right]$. Dunque $\left[{n \atop h}\right] = \binom{n+h-1}{h}$, perchè $\binom{n+k-1}{h}$ gode (esercizio 6°) di tutte queste proprietà.

13° Dalla $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$ si deducano, sviluppando il primo membro con la formola del binomio, i valori di $\cos n\theta$ e $\operatorname{sen} n\theta$.

Ris.

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta \operatorname{sen}^2\theta + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta \operatorname{sen}^4\theta - \ldots\ldots$$

$$\operatorname{sen} n\theta = \operatorname{sen}\theta \left\{ \binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta \operatorname{sen}^2\theta + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\theta \operatorname{sen}^4\theta - \ldots\ldots \right\},$$

che si possono scrivere anche in altro modo ricordando che

$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta;\ \operatorname{sen}^4\theta = (1-\cos^2\theta)^2, \text{ ecc.}$$

14° In modo simile dalla

$$(\cos a_1 + i \operatorname{sen} a_1)(\cos_2 + i \operatorname{sen} a_2) \ldots (\cos a_n + i \operatorname{sen} a_n) =$$
$$= \cos[a_1 + a_2 + \ldots a_n] + i \operatorname{sen}[a_1 + a_2 + \ldots + a_n]$$

si possono dedurre le formole di addizione più generali per calcolare $\cos[a_1 + a_2 + \ldots + a_n]$ e $\operatorname{sen}[a_1 + a_2 + \ldots + a_n]$.

15° Il lettore deduca in modo analogo dalla

$$\cos^r x \operatorname{sen}^s x = k \{ [\cos x + i \operatorname{sen} x] + [\cos x - i \operatorname{sen} x] \}^r .$$
$$. \{ [\cos x + i \operatorname{sen} x] - [\cos x - i \operatorname{sen} x] \}^s$$
$$\left(\frac{1}{k} = 2^{r+s} i^s\right)$$

che $\cos^r x \operatorname{sen}^s x$ si può esprimere come funzione lineare di seni e di coseni di multipli dell'angolo x.

16° Dimostrare che

$$i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i, \quad i^{4n} = 1,$$

per tutti i valori dell'intero n.

17° Calcolare $\sqrt{i}$.

Ris. È $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$. Quindi $\pm\sqrt{i} = \cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$.

18° Calcolare per via trigonometrica $\sqrt[n]{1+i}$, $\sqrt[n]{i}$, $\sqrt[n]{i}$, $\sqrt[n]{-1}$, per ogni valore dell'intero positivo n.

19° Porre sotto forma trigonometrica i numeri

$$2 + 2\sqrt{-3}, \quad \frac{2+3i}{3+2i}, \quad 5 + 5i.$$

20° Calcolare per via trigonometrica le radici n^{esime} di ± 1 per $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

21° Semplificare le espressioni

$$\frac{2+5i}{3+\sqrt{-3}} + \frac{2-5i}{3-\sqrt{-3}}; \quad \frac{1+i}{2+\sqrt{-5}} - \frac{1-i}{2-\sqrt{-5}};$$

$$\frac{3}{5+6i} + \frac{3}{5-6i}; \quad \frac{1+i}{2+\sqrt{-4}} + \frac{1+i}{2-\sqrt{-4}};$$

$$\frac{1+i}{2+\sqrt{-4}} \, \frac{1-i}{2-\sqrt{-4}}; \quad \frac{1+i}{2-3i}; \quad \frac{2+3i}{1-i};$$

$$3(x+iy)^3 + 3(x-iy)^3 + 4i(x+iy)^2 - 4i(x-iy)^2.$$

22° L'equazione $x^n - 1 = 0$ ha per radici $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$, cioè le radici n^{esime} dell'unità. Queste radici soddisfano dunque alle:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_n = 0\ ;\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + ... + \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n = 0$$

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 + ... + \varepsilon_{n-2} \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n = 0\ ;\ ....\ ;$$

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 .... \varepsilon_{n-1} + ... + \varepsilon_2 \varepsilon_3 .... \varepsilon_n = 0\ ;\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 .... \varepsilon_n = (-1)^{n+1}.$$

23° Calcolare i coefficienti di un'equazione di 4° grado, che ha per radici 0, 1, -1, 2.

RIS. L'equazione è $x\,(x^3 - 2\,x^2 - x + 2) = 0$.

24° Calcolare la somma delle prime, o delle seconde, o delle terze potenze delle radici dell'equazione

$$x^4 - 2\,x^3 + 4\,x^2 - 1 = 0.$$

RIS. Dalle $s_1 - 2 = 0$, $s_2 - 2\,s_1 + 8 = 0$, $s_3 - 2\,s_2 + 4\,s_1 = 0$ si trae $s_1 = 2$, $s_2 = -4$, $s_3 = -16$.

25° Trovare le radici razionali di $x^3 - \frac{7}{2} x_2 + \frac{7}{2} x - 1 = 0$.

Moltiplicando per 2 l'equazione diventa

$$2\,x^3 - 7\,x^2 + 7\,x - 2 = 0.$$

Se $\frac{\alpha}{\beta}$ è una radice razionale, mutando, caso mai, i segni di α, β (ciò che non muta la nostra radice) possiamo renderne il denominatore β positivo. Il numero β è da scegliersi tra i divisori positivi di $a_0 = 2$, cioè vale 1 oppure 2; il numero α, essendo un divisore positivo o negativo di $a_3 = -2$, potrà avere uno dei valori $\pm 1, \pm 2$. Le eventuali radici razionali sono dunque da cercarsi tra i numeri $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$; ± 2. Si trova che 1, 2, $\frac{1}{2}$ sono effettive radici.

26° Risolvere l'equazione $x^3 + x^2 + 2\,x + 2 = 0$ (cercando dapprima le sue radici razionali).

Una tale equazione (per cui $a_0 = 1$) non ha radici fratte; si trova che -1 è una radice intera. Dividendo il primo membro per $x + 1$, l'equazione si riduce ad $x^2 + 2 = 0$, che determina le altre due radici $\pm i\sqrt{2}$.

27° L'equazione $x^3 + 2\,x^2 + x + 2 = 0$ ha i come radice. Risolvere l'equazione.

Essa avrà $-i$ come seconda radice. Il primo membro diviso per $(x+i)(x-i)=x^2+1$ dà $x+2$ per quoziente. La terza radice è -2.

28° Si decomponga in fattori reali il polinomio

$$P(x)=x^6-2x^5+2x^4-x^2+2x-2,$$

sapendo che l'equazione $P(x)=0$ ha le radici $1, -1, i, 1-i$. Si noti che $(x-i)(x+i)=x^2+1$;

$$[x-(1-i)][x-(1+i)]=x^2-2x+2.$$

Quindi:

$$P(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2-2x+2).$$

29° Come si cercano le radici comuni alle due equazioni

$$f(x)=x^3-2x^2+x-2=0, g(x)=x^2-4=0\,?$$

Ris. Uguagliando a zero il Massimo C. Divisore delle $f(x)$, $g(x)$ si ha un'equazione, le cui radici sono tutte e sole le radici comuni alle due equazioni.

Le due equazioni

$$\begin{aligned} x^3-2x^2+x-2&=0\\ x^2-4&=0 \end{aligned}$$

hanno dunque l'unica radice comune 2, perchè $x-2$ è il Massimo C. Divisore dei primi membri.

30° Per un' equazione $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ sono date le somme s_1, s_2, s_3 delle prime, delle seconde, delle terze potenze delle radici. Si determinano i coefficienti a_1, a_2, a_3. (Basta ricordare le formole di Newton, in cui questi coefficienti si riguardino come incognite).

31° Si calcoli

$$\alpha_1^4\alpha_2\alpha_3+\alpha_2^4\alpha_1\alpha_3+\alpha_3^4\alpha_1\alpha_2+3\,(\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_2^2\alpha_1+\alpha_1^2\alpha_3+\alpha_3^2\alpha_1+\alpha_2^2\alpha_1+\alpha_2\alpha_1^2)$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono le radici di $x^3+x+1=0$.

Si noti che la somma $s_{4,1,1}$ dei primi tre termini vale $s_4\,s_{1,1}-s_{5,1}$.

32° Si risolvano le equazioni

$$x^4+3x^3+x^2-3x-2=0 \quad , \quad x^5-x^3+x^2-1=0$$
$$x^3-x^2+4x-4=0,$$

cercandone prima di tutto le radici razionali.

33° Trovare direttamente le radici quadrate, cubiche, quarte, quinte, di ± 1; cioè si risolvano direttamente le equazioni

$$x^2 \pm 1 = 0 \quad ; \; x^3 \pm 1 = 0 \quad ; \; x^4 \pm 1 = 0 \quad ; \; x^5 \pm 1 = 0.$$

Basta osservare che

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \quad ; \; x^2 + 1 = x^2 - i^2 = (x-i)(x+i)$$

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) \quad ; \; x^3 + 1 = (x+1)(x^2-x+1)$$

$$x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$$

$$x^4 + 1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}\,x)^2 =$$

$$= (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)$$

$$(x^5 - 1) = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

e che per $x \neq 0$ si ha $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^2 \{ z^2 + z - 1 \}$ ove $z = x + \dfrac{1}{x}$

$$(x^5 + 1) = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

e che per $x \neq 0$ si ha $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = x^2 \{ z^2 - z - 1 \}$ ove $z = x + \dfrac{1}{x}$.

Si confrontino i risultati ottenuti per questa via coi risultati ottenuti per via trigonometrica.

34° Quando avviene che le due equazioni

$$x^3 + px + q = 0 \quad , \; x^2 + bx + c = 0$$

hanno una radice comune?

35° Analoga domanda per le

$$x^3 + px + q = 0 \quad , \; x^4 + a = 0.$$

36° Trovare se esistono radici comuni alle

$$x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 3 = 0 \qquad x^4 + 4x^2 + 3 = 0.$$

37° Date le somme s_1, s_2, s_3 di tre numeri, dei loro quadrati, dei loro cubi, si trovi la somma s_4 delle loro quarte potenze. Si cominci col calcolare l'equazione di cui i tre numeri sono radici.

38° Data un'equazione algebrica a coefficienti razionali, come se ne determinano le eventuali radici del tipo $a\sqrt{-1}$, dove a è un numero razionale? Si faccia poi tale ricerca per l'equazione

$$x^4 + x^3 + 5x^2 + 4x + 4 = 0.$$

39° Costruire un polinomio di terzo grado, che sia uguale ad 1 per $x = 1, 2, 3, 4$.