CAPITOLO VIII.

DERIVATE, DIFFERENZIALI

§ 47. — Velocità ad un istante, velocità di reazione, intensità di corrente, coefficiente di dilatazione, calore specifico.

α) Studiamo un fenomeno dei più semplici: la caduta di un grave che parte senza velocità iniziale. L'esperienza insegna che il numero y dei metri percorsi in x minuti secondi di libera caduta vale $\frac{1}{2}gx^2 = 4,905\,x^2$ $(g = 9,81)$.

Da tale formola resta analiticamente individuata la funzione y della x, così da poterne calcolare il valore per ogni valore positivo della x. E si trova che dopo

$3''$ il grave ha percorso metri	$y = 4,905.\ (3)^2$	$= 44,145$
$3,1$	$y = 4,905.\ (3,1)^2$	$= 44,145 + 2,992$
$3,01$	$y = 4,905.\ (3,01)^2$	$= 44,145 + 0,295$
$3,001$	$y = 4,905.\ (3,001)^2$	$= 44,145 + 0,0294$

Ora è ben noto che la velocità media in un intervallo di tempo è data dal quoziente tra la lunghezza del segmento percorso in tale intervallo e il tempo impiegato a percorrerlo.

Siccome nell'intervallo $(3''\,;\,3'',1)$ si sono percorsi m. 2,992, la velocità media in questo intervallo di tempo $\left(\frac{1}{10}\right.$ di minuto secondo$\left.\right)$ vale $\dfrac{2,992}{\left(\frac{1}{10}\right)} = 29,92$.

Nell'intervallo $(3''\,;\,3'',01)$ la velocità media varrà analogamente $\dfrac{0,295}{\left(\frac{1}{100}\right)} = 29,5$; la velocità media nell'intervallo $(3''; 3,001)$ sarà $\dfrac{0,0294}{\left(\frac{1}{1000}\right)} = 29,4$.

Noi potremo continuare il calcolo per intervalli di tempo ancor più piccoli: ciò che naturalmente non avrebbe alcun significato fisico, sia perchè 4,905 è un numero solamente approssimato, sia perchè non sono sperimentalmente apprezzabili frazioni di secondo tanto piccole. Checchè sia di ciò, noi troveremmo che la velocità media in un intervallo di tempo che comincia dopo il terzo secondo, diminuisce con l'ampiezza dell'intervallo e finisce, per intervalli di tempo inferiori p. es. al millesimo di secondo, con l'essere sensibilmente uguale a 29,4..... Ma si suole parlare, tanto in fisica che nel linguaggio comune, della velocità che ha il grave p. es. all'istante $x = 3$ (dopo $3''$ di libera caduta); si suole dire anche volgarmente: il grave dopo $3''$ aveva la velocità di tanti metri al minuto secondo. È ben chiaro il significato che uno sperimentatore darebbe a una simile frase: *velocità del grave all'istante* $x = 3''$. Supposto, per fissare le idee, che il millesimo di secondo sia il minimo intervallo di tempo, che egli sappia apprezzare e misurare coi mezzi sperimentali che ha a sua disposizione, egli chiamerebbe la velocità media del grave nell'intervallo $(3''; 3'', 001)$ la velocità all'istante $x = 3$.

Così un macchinista di un treno, che difficilmente può apprezzare intervalli di tempo inferiori al minuto secondo, potrà dire che, p. es., alle ore 4 egli aveva raggiunto la velocità di 100 km. all'ora (cioè m. $\frac{100.000}{3600} =$ m. 27,77 al minuto secondo) se nell'intervallo di tempo trascorso dalle ore 4 alle ore 4 più un minuto secondo egli ha percorso m. 27,77. Questa definizione diremo così, sperimentale della frase: *velocità all'istante* x è sufficiente in pratica.

Dal punto di vista della teoria essa darebbe origine a gravi difficoltà, p. es., per il fatto che il minimo intervallo di tempo apprezzabile varia da caso a caso, può variare col perfezionarsi dei metodi di misura; mentre invece noi vogliamo una definizione che, pur trascendendo i bisogni della pratica, sia adottabile in ogni caso. Riprendendo lo studio della caduta di un grave, notiamo che lo spazio y percorso in x secondi vale $\frac{1}{2} gx^2$, mentre lo spazio $y + k$ percorso nei primi $x + h$ secondi vale $\frac{1}{2} g(x+h)^2$. Lo spazio k percorso nell'intervallo di tempo $(x, x+h)$ vale dunque:

$$k = \frac{1}{2} g(x+h)^2 - \frac{1}{2} gx^2 = gxh + \frac{1}{2} gh^2.$$

Cosicchè la velocità *media* in tale intervallo di tempo è

$$\frac{k}{h} = gx + \frac{1}{2} gh.$$

Quanto più perfetto è il metodo di misura, tanto più piccoli sono gli intervalli di tempo, che si sanno apprezzare.

Ora, quanto più piccolo è l'intervallo di tempo $(x, x + h)$ ossia quanto più piccolo è h, tanto più piccolo è il termine $\frac{1}{2} gh$. Anzi questo termine è sperimentalmente trascurabile se h è molto piccolo. Per questa ragione diciamo che la velocità all'istante x vale gx: cioè poniamo per definizione tale velocità uguale al

$$\lim_{h=0} \frac{k}{h} = \lim_{h=0} \frac{\frac{1}{2} g (x + h)^2 - \frac{1}{2} gx^2}{h} = gx.$$

Così p. es. la velocità all'istante $x = 3$ vale $3\,g = 3.9{,}81 = 29{,}4.....$ (che è in perfetto accordo coi valori sopra determinati).

Come si vede, questa velocità gx varia con x, è una nuova funzione della x. E da questo risultato deduciamo anzi il ben noto teorema di Galileo che le velocità sono proporzionali al tempo x di libera caduta.

β) Applichiamo le considerazioni precedenti al caso generale. Sia M un punto mobile con legge qualsivoglia, p. es. su una retta orientata OX. Dopo un certo numero x di minuti secondi la distanza $y = OM$ sia uguale a un certo numero $f(x)$ di metri (y funzione di x). Quale significato avrà la frase: velocità di M all'istante $x = a$?

Usiamo un procedimento analogo al precedente.

Dopo a secondi la distanza OM è $f(a)$;

" $a + h$ " $f(a + h)$.

Dunque nell'intervallo $(a, a + h)$ di h minuti secondi lo spazio percorso è $k = f(a + h) - f(a)$. La velocità media in tale intervallo di tempo è quindi

$$\frac{k}{h} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Noi chiameremo velocità di M all'istante a il limite (se un tal limite esiste) del precedente rapporto per $h = 0$. Questo limite varierà generalmente al variare dell'istante a considerato. E per indicare che a può ricevere uno qualsiasi dei valori dati alla x, noi indicheremo a con la stessa lettera x, dicendo così che la velocità all'istante x è quella funzione $F(x)$ della x, che è definita dalla

$$F(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

se un tale limite esiste.

γ) Se noi immaginiamo noto *a priori* il significato della frase: « *velocità all'istante* x », possiamo usare un'altra forma di ragionamento, che ci servirà anzi come modello per altri problemi analoghi.

Se la velocità $F(x)$ si mantenesse costante nell'intervallo $(x, x+h)$, lo spazio $f(x+h) - f(x)$ percorso in tale intervallo di tempo sarebbe proprio uguale al prodotto $h\,F(x)$ della velocità $F(x)$ per il tempo h impiegato a percorrerlo. Ma $F(x)$ può variare (se, come capita in pratica, $F(x)$ è funzione continua) nel dato intervallo da un valore minimo m ad un valore massimo M. Lo spazio percorso sarà quindi compreso tra hm ed hM, che misurano rispettivamente gli spazi percorsi nel caso che la velocità abbia costantemente il valore minimo m o il valore massimo M (*). Quindi $f(x+h) - f(x) = h\,\mu$, dove μ è un valore compreso tra m ed M, ossia è il valore $F(x+\lambda)$ che F assume in un certo punto $x+\lambda$ (a noi generalmente ignoto) dell'intervallo $(x, x+h)$ ($|\lambda| \leqq |h|$). Dalla $f(x+h) - f(x) = hF(x+\lambda)$ si trae:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = F(x+\lambda),$$

donde, passando al limite per $h = 0$, e ricordando che λ tende a zero per $h = 0$, si ha appunto:

$$F(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

δ) In generale, se y è una grandezza variabile col tempo x, che è una funzione $y = f(x)$ di x, il limite precedente si chiama la *velocità di variazione* di y. Così, se y è la quantità di una certa sostanza che si è formata o si è decomposta in una certa reazione chimica, tale limite ha il nome di *velocità di reazione*. Se y è la quantità di elettricità passata in un dato circuito all'istante x, tale limite ha il nome di *intensità di corrente*.

(*) Che a velocità maggiore corrisponda spazio percorso maggiore è un postulato direttamente suggerito dalla intuizione.

Se x indica invece la temperatura, ed y è, p. es., la lunghezza di una certa sbarra alla temperatura x, tale limite si chiama il *coefficiente di dilatazione* (*della sbarra*).

Se y è la quantità di calore necessaria per portare alla temperatura x la massa 1 di un certo corpo, quel limite si chiama il *calore specifico* di quel corpo.

Insomma quasi tutte le scienze, che si propongono problemi di misura, conducono alla considerazione di quel limite per i problemi più svariati.

§ 48. — **Retta tangente a una curva.**

Come possiamo definire la retta tangente a una curva in un punto A in modo conforme alla nostra intuizione?

Le seguenti figure dimostrano che non si può definire tale tangente, dicendo che essa è la retta che ha il solo punto A comune con la curva, oppure che essa è la retta che ha con la curva a comune il punto A, ma che non attraversa la curva in A (figure 12-13).

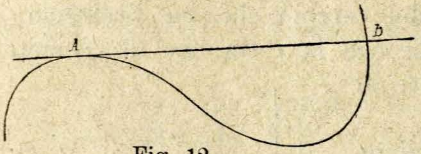

Fig. 12.

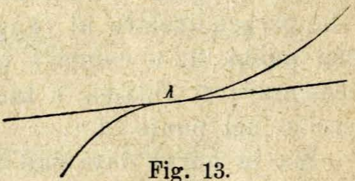

Fig. 13.

Noi partiremo dall'osservazione che la retta che congiunge due punti A, B *molto vicini* di una curva si confonde sensibilmente con la retta, che la nostra intuizione dice tangente alla curva nel punto A. Così che un abile disegnatore potrebbe chiamare retta tangente a una curva in un suo punto A la retta AB (fig. 14), essendo B il punto della nostra curva più vicino al punto A, tale che la retta AB possa venire da lui tracciata con l'approssimazione richiesta (se il punto B fosse troppo vicino al punto A, il tracciare con la precisione voluta la retta AB gli presenterebbe difficoltà insormontabili). Una tale definizione non è però accettabile da un matematico, il quale prescinde da ogni possibile disegno, e non può tener conto della maggiore o minore abilità di un disegnatore.

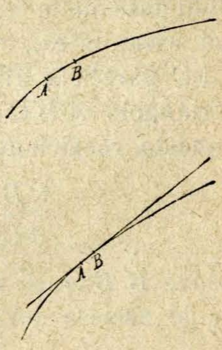

Fig. 14.

Noi, assumendo come punto di partenza i fatti intuitivi ora accennati, porremo la definizione seguente:

Tangente a una curva nel punto A *è la posizione limite* (se questa posizione esiste) *di una secante* AB *congiungente il punto* A *con un altro punto* B *della curva, quando il punto* B *tende ad* A (*).

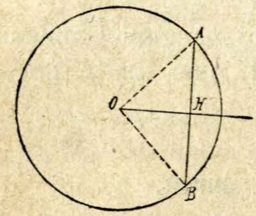

Fig. 15.

Bisogna dimostrare che questa definizione coincide nel caso del cerchio con la definizione data dalla geometria elementare.

Sia dato un punto A su un cerchio di centro O. Preso un altro punto B su tale cerchio, tiriamo la retta AB; essa sarà la perpendicolare tirata da A alla bisettrice OH dell'angolo $A\,(O)\,B$ (fig. 15).

Facciamo avvicinare il punto B al punto A; allora l'angolo BOA tende a zero, e la bisettrice OH di questo angolo tende al raggio OA. La retta AB, che è sempre perpendicolare alla bisettrice OH, si avvicinerà alla perpendicolare alla retta OA nel punto A, e si ha così che la posizione limite della retta AB, ossia la tangente al cerchio nel punto A, nel senso ora definito, è la perpendicolare al raggio del cerchio che ha l'estremo in quel punto A, e coincide quindi con la retta che in geometria elementare si chiama « tangente al cerchio nel punto A ».

Sia la curva data dall'equazione $y = f(x)$. Il coefficiente angolare della retta AB è la tangente dell'angolo ω che la direzione positiva dell'asse delle x fa con un raggio di essa, p. es., col raggio AB. Sia AC parallela all'asse delle x. Dal triangolo ABC (fig. 16) si ha che questo coefficiente angolare vale in grandezza e segno

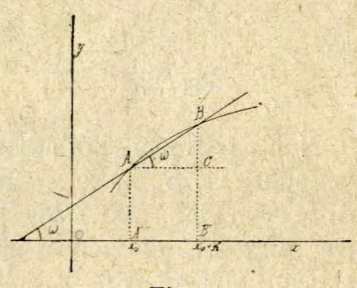

Fig. 16.

$$\frac{CB}{AC} = \frac{B'B - B'C}{OB' - OA'} = \frac{B'B - A'A}{OB' - OA'},$$

dove $B'B$ e $A'A$, OB' ed OA' sono rispettivamente le ordinate e le ascisse dei punti B, A.

(*) Qui si tratta di una facile estensione del concetto di limite. Noi diciamo che la retta AB tende a una posizione AP, se l'angolo di AB ed AP tende a zero. Dicendo poi che B si avvicina ad A, vogliamo dire che, se la curva è rappresentata da una equazione $y = f(x)$, noi cerchiamo la posizione limite di AB per $x_2 = x_1$ (essendo x_1, x_2 le ascisse di A e di B).

Siano x_0 ed $x_0 + h$ le ascisse OA', OB' dei punti A, B. Le corrispondenti ordinate $A'A$, $B'B$ saranno $f(x_0)$, $f(x_0 + h)$, cosicchè il coefficiente angolare della nostra retta è

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

come del resto si poteva trarre direttamente da note formole di Geometria analitica.

E per la definizione precedente avremo che il coefficiente angolare della retta tangente in A esiste ed è uguale a

$$\lim_{h=0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

se questo limite esiste. Se noi vogliamo tener conto che x_0 può avere un valore qualsiasi dell'intervallo che si considera, possiamo scrivere x al posto di x_0, e dire così:

La retta tangente alla curva $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ *nel punto di ascissa* x *ha per coefficiente angolare il* $\lim_{h=0} \frac{\mathrm{f}(\mathrm{x} + \mathrm{h}) - \mathrm{f}(\mathrm{x})}{\mathrm{h}}$.

§ 49. — **Derivata.**

α) Sia $f(x)$ una funzione reale.

Nei due precedenti §§ si è presentato il rapporto

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{(x + h) - x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Il denominatore e il numeratore sono il primo la differenza di due valori della variabile indipendente x, l'altro la differenza dei due valori corrispondenti della funzione $f(x)$. Perciò si suol anche porre (ricordando la lettera iniziale della parola: *differenza*)

$$h = (x + h) - x = \Delta x,$$
$$f(x + h) - f(x) = \Delta f.$$

Il primo sarà detto *incremento* della x, l'altro *incremento* della $f(x)$. Il rapporto

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

viene perciò anche chiamato *rapporto incrementale*.

In entrambi i problemi precedentemente trattati, si è trovato necessario di calcolare il

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h=0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Questo limite, se esiste ed è finito, ha ricevuto il nome di derivata della funzione $f(x)$ nel punto x; esso è una funzione di x, che si suole indicare con $f'(x)$.

Se è posto $y = f(x)$, questo limite, se esiste, si indica brevemente anche con y' senz'altro, o con y'_x, se si vuol mettere in evidenza la variabile x rispetto alla quale si deriva (*).

Se il punto x che si esamina è all'estremo sinistro (destro) dell'intervallo, in cui $f(x)$ è definita, è sottinteso che h tende a zero per valori positivi (negativi): se invece il punto x è interno a tale intervallo, si dice che la funzione $f(x)$ ha in tal punto la derivata $f'(x)$ soltanto se il $\lim\limits_{\Delta x=0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ esiste, ed è sempre lo stesso, sia che h tenda a zero per valori positivi, sia che h tenda a zero per valori negativi.

Di più, quando diremo che esiste la derivata $f'(x)$, noi supporremo sempre che il nostro limite abbia valore finito (sebbene si parli talvolta anche di *derivate infinite*). I risultati dei precedenti paragrafi si possono perciò anche enunciare così:

1° Se $y = f(x)$ è lo spazio percorso da un punto M mobile su una retta in x unità di tempo, allora la derivata $y' = f'(x)$ di $f(x)$ ci dà la velocità del punto M all'istante x (dopo che sono trascorse x unità di tempo).

2° La retta tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto di ascissa x ha per coefficiente angolare $y' = f'(x)$.

Così, p. es., la derivata di $y = a x^2$ ($a =$ cost.) è

$$\lim_{h=0} \frac{a(x+h)^2 - a x^2}{h} = \lim_{h=0} \frac{2axh + ah^2}{h} =$$

$$= \lim_{h=0} (2ax + ah) = 2ax.$$

Quindi: Se un punto in x minuti secondi percorre ax^2 metri, la sua velocità (misurata in metri secondi) dopo x secondi è

(*) Cioè la variabile, alla quale si è dato l'incremento *arbitrario* h, che si fa tendere a zero. L'arbitrarietà di h è naturalmente limitata dalla sola condizione che i punti $x, x+h$ appartengono al campo, in cui la $f(x)$ è definita.

$2ax$. (Da ciò si deduce il risultato del penultimo paragrafo ponendo $a = \frac{1}{2} g = 4{,}905$).

La retta tangente alla parabola $y = ax^2$ nel punto di ascissa x, ha per coefficiente angolare $2ax$.

β) Un teorema di importanza specialmente teorica è il seguente:

Se una funzione f(x) *ha in un punto* x_0 *derivata (finita), essa è continua in tale punto.*

Infatti dalla

$$\lim_{h=0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

si trae

$$\lim_{h=0} [f(x_0+h) - f(x_0)] = \lim_{h=0} h \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h=0} h \lim_{h=0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 0 . f'(x_0) = 0$$

ossia

$$\lim_{h=0} f(x_0 + h) = f(x_0). \qquad \text{c. d. d.}$$

Il teorema reciproco non è vero: esistono funzioni continue senza derivata, per quanto tutte le funzioni, che può incontrare il tecnico nei suoi studi, sieno derivabili nei punti non singolari (*).

γ) Chiuderemo questo paragrafo con alcune osservazioni sulla equazione della retta tangente ad una curva. Si tratta di osservazioni evidenti, sebbene talvolta io mi sia accorto della difficoltà incontrata da molti studenti a scrivere tale equazione in modo corretto.

Il punto di ascissa x_0 sulla curva $y = f(x)$ ha per ordinata $y_0 = f(x_0)$. [Con $f(x_0)$ si indica, come è noto, il valore di $f(x)$ quando alla variabile x si dà il valore x_0]. Il coefficiente angolare della tangente corrispondente è $f'(x_0)$ (**). Ora, affinchè la retta passante per il punto (x_0, y_0) e un altro punto (x, y) abbia il coefficiente angolare $f'(x_0)$ è condizione necessaria e sufficiente che $y - y_0 = (x - x_0) f'(x_0)$. Questa è dunque l'equazione della retta tangente alla curva $y = f(x)$ in quello dei suoi punti, che ha per ascissa x_0. Si noti:

1° La y che figura in questa equazione è l'ordinata di un punto mobile sulla tangente ed è perciò *completamente distinta* dalla $y = f(x)$, ordinata di un punto mobile sulla data curva.

2° Siccome il punto (x_0, y_0) appartiene per ipotesi alla nostra curva, la y_0 è precisamente il valore assunto dalla $f(x)$, quando alla variabile x si dà il valore x_0. Così pure $f'(x_0)$ è il valore di $f'(x)$ nel punto $x = x_0$.

Così, p. es., l'equazione della tangente alla curva $y = ax^2$ nel punto di ascissa x_0 è $(y - y_0) = 2ax_0(x - x_0)$, ossia (poichè $y_0 = a x_0^2$) è $y + y_0 = 2 a x_0 x$.

(*) È facile riconoscere che una funzione può essere continua in un punto $y = a$, senza essere derivabile in tale punto. Basti pensare alle funzioni $f(x)$ tali che la curva $y = f(x)$ abbia per $x = a$ un punto *angolare*.

Ma sono stati dati esempi di funzioni continue in tutto un intervallo, sprovviste di derivata in *ogni* punto di tale intervallo.

(**) E non già $f'(x)$. Si osservi del resto che la $y - y_0 = (x - x_0) f'(x)$ *non* è generalmente l'equazione di una retta, e tanto meno della retta tangente, perchè non è neanche lineare (di primo grado) nelle x, y.

δ) Sia data una curva $y = f(x)$ definita in un intorno destro o sinistro di ∞; poniamo, p. es., nell'intorno $(a, +\infty)$ di ∞. La retta tangente nel punto di ascissa x_0 ha per equazione

$$y - y_0 = (x - x_0)\, f'(x_0) \text{ ossia } y = x\, f'(x_0) + [f(x_0) - x_0\, f'(x_0)].$$

Se per $x_0 = \infty$ le $f'(x_0)$ e $f(x_0) - x_0 f'(x_0)$ hanno limiti finiti m, n la retta che ha per equazione $y = mx + n$ si dirà *asintoto* della curva, nel punto di ascissa infinita (e si considererà come la posizione limite della tangente considerata per $x_0 = \infty$).

Così pure, se $f(x)$ è definita per $x \neq a$, e se, quando x_0 è in un intorno di a, si ha $f'(x_0) \neq 0$, allora l'equazione della tangente nel punto di ascissa x_0 si può scrivere:

$$\frac{y}{f'(x_0)} - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x - x_0.$$

Se è $\lim\limits_{x_0 = a} f(x_0) = \infty$, $\lim\limits_{x_0 = a} f'(x_0) = \infty$, $\lim\limits_{x_0 = a} \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0$ (*), allora la retta che ha l'equazione $x - a = 0$ [che si deduce dalla precedente passando al limite per $x_0 = a$] si chiama ancora un *asintoto* della nostra curva *nel punto di ascissa* a.

Così, p. es., la curva $xy = 1$ ha per tangente nel punto di ascissa x_0 la retta

$$y - \frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0).$$

Passando al limite per $x_0 = 0$ e per $x_0 = \infty$ si trova che asintoti di tali curve sono le rette $x = 0$, $y = 0$, ossia gli assi coordinati.

Esempi.

1° Sia $y = f(x)$ una funzione continua e non negativa per $a \leqq x \leqq b$. Consideriamo la figura piana (fig. 17) racchiusa tra l'asse delle x, la curva $y = f(x)$, e le perpendicolari all'asse delle ascisse innalzate dal punto A di ascissa a e dal punto B di ascissa variabile $x > a$.

Ad una tale figura daremo il nome di *rettangoloide*.

(*) Si potrebbe dare a queste condizioni (non tutte tra loro indipendenti) una forma che almeno apparentemente fosse meno restrittiva.

Dimostreremo altrove che questa figura possiede un'area (che cioè le sue aree esterna ed interna sono uguali).

Ed anche senza ammettere tale teorema, il lettore noti che le seguenti considerazioni (da noi svolte per l'*area* di tale rettangoloide) *valgono del resto tanto per l'area esterna che per l'area interna* (cfr. § 7, pag. 25).

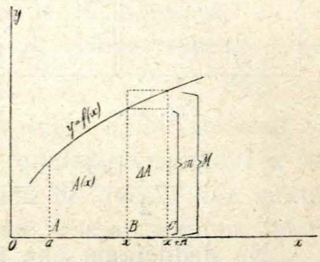

Fig. 17.

Tale area sarà una funzione $A(x)$ dell'ascissa variabile x. Noi non sappiamo per ora calcolare tale area, qualunque sia la funzione $f(x)$, ma, come ora vedremo, sappiamo in ogni caso calcolarne la derivata $A'(x)$.

Per calcolare tale derivata, diamo alla x un incremento positivo h (ad identico risultato si giunge con ragionamenti analoghi se $h < 0$).

L'incremento $\Delta A = A(x+h) - A(x)$ ricevuto dalla nostra area sarà l'area del rettangoloide limitato dall'asse delle x, dalla nostra curva, e dalle ordinate dei punti B e C di ascisse x ed $x+h$. Se in questo intervallo la $f(x)$ conservasse un valore costante, la curva $y = f(x)$, sarebbe in questo intervallo un segmento parallelo all'asse della x; la nostra figura sarebbe un rettangolo di base h e di altezza $y = f(x)$, cosicchè la sua area ΔA sarebbe uguale ad $hf(x)$. Ma $f(x)$ può variare nel nostro intervallo da un minimo m ad un massimo M; cosicchè la nostra figura contiene all'interno il rettangolo di base h ed altezza m, ed è contenuta nel rettangolo di base h ed altezza M. La sua area ΔA è perciò compresa tra i numeri hm ed hM, ossia sarà uguale ad $h\mu$, essendo μ il valore assunto dalla $f(x)$ in un punto $x+\lambda$ dell'intervallo $(x, x+h)$. Dalla

$$\Delta A = hf(x+\lambda)$$

abbiamo

$$\frac{\Delta A}{h} = f(x+\lambda)$$

cosicchè

$$A'(x) = \lim_{h=0} \frac{\Delta A}{h} = \lim_{h=0} f(x+\lambda) = \lim_{\lambda=0} f(x+\lambda) = f(x).$$

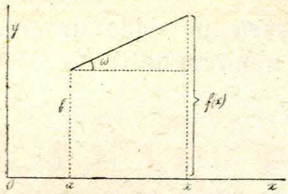

Fig. 18.

α) Sia, p. es., la curva $y = f(x)$ (fig. 18) la retta uscente del punto di ascissa a ed ordinata b col coefficiente angolare m; sia cioè $f(x) = b + m\,(x - a)$ dove $m = \operatorname{tg}\omega$, essendo ω il solito angolo della retta con l'asse delle x. L'area della nostra figura (un trapezio) è

$$\frac{b + f(x)}{2}(x - a) = b\,(x - a) + \frac{m}{2}(x - a)^2.$$

Ne deduciamo che la derivata di

$$b\,(x - a) + \frac{m}{2}(x - a)^2$$

è $b + m\,(x - a)$: ciò che si può dimostrare direttamente col metodo di pag. 162.

β) Sia ora la curva $y = f(x)$ un arco di cerchio col centro nell'origine e raggio R. Dalla equazione $x^2 + y^2 = R^2$ di questo cerchio si trae $y = f(x) = +\sqrt{R^2 - x^2}$ (fig. 19). L'area racchiusa tra l'asse delle x, il cerchio, l'ordinata (di lunghezza nulla) di ascissa $-R$ e l'ordinata di ascissa variabile x è data da

$$(\pi - \alpha)\,R\,\frac{R}{2} + \frac{xy}{2},$$ dove α (cfr. fig. 19)

è l'arco minore di π che ha per coseno $\dfrac{x}{R}$,

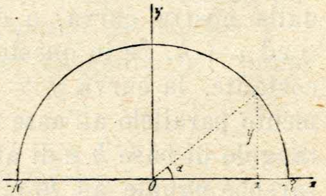

Fig. 19.

o, come si suol dire, $\alpha = \arccos\dfrac{x}{R}$ ed $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Quindi la derivata di

$$\left(\pi - \arccos\frac{x}{R}\right)\frac{R^2}{2} + \frac{1}{2}\,x\sqrt{R^2 - x^2}\quad (0 \leqq \operatorname{arc}\cos x \leqq \pi)$$ è

uguale a $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

γ) Infine, se $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e quindi la curva $y = \dfrac{1}{x}$ è un'iperbole equilatera con gli assi coordinati per asintoti, noi sappiamo (§ 38, es. 3°, pag. 128) che $A(x) = \log_e \dfrac{x}{a}$. Quindi la derivata di $\log_e \dfrac{x}{a}$ e in particolare di $\log_e x$ vale $\dfrac{1}{x}$.

2^o Sia dato un solido S. Esista e sia $y = f'(x)$ il volume di quella porzione di S che è racchiusa tra un certo piano fisso π, e un piano parallelo π' posto alla distanza x dal precedente. L'*area* della sezione s fatta da π' in S esista, e sia una funzione $F(x)$ continua della x. Dimostreremo che $f'(x) = F(x)$.

Oss. Ammettiamo il teorema che il volume dello strato di S, che è compreso tra due piani π_1 e π_2 qualsiasi paralleli a π sia compreso tra i prodotti della distanza di questi due piani per i valori massimo e minimo dell'area d'una sezione fatta in S da un piano parallelo a π_1 od a π_2. Questo teorema, che troveremo più tardi dimostrato in generale, è evidente se, p. es., S è una sfera, o un ellissoide avente π per piano di due assi, o una piramide avente la base parallela a π e tale che il piede dell'altezza sia interno alla base, ecc. A tutti questi solidi il nostro ragionamento è quindi applicabile senza necessità di ammettere alcun teorema non dimostrato.

Ris. Se π', π'' sono due piani paralleli a π, il volume $f(x+h) - f(x)$ dello strato limitato in S da π' e da π'' è, per l'osservazione precedente, compreso tra hM ed hm, se con M e con m indichiamo rispettivamente il massimo ed il minimo valore di $F(x)$ nell'intervallo $(x, x+h)$.

E col metodo tante volte usato si deduce

$$f'(x) = \lim_{h \Rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = F(x).$$

L'allievo controlli questo risultato nei casi su citati che S sia una sfera, od una piramide, calcolando effettivamente $f(x)$ e $F(x)$.

Varie e molteplici sono le applicazioni della definizione di derivata di una funzione $f(x)$ e in moltissimi problemi la considerazione di $f'(x)$ si presenta spontanea. Perciò assai importanti sono i problemi fondamentali del calcolo:

1^o Trovare la derivata di una funzione data.

2^o Trovare le funzioni, che hanno una derivata assegnata.

Del primo si occupa il calcolo differenziale, del secondo il calcolo integrale.

§ 50. — Estensione alle funzioni complesse.

α) Se $y = f(x) = u(x) + iv(x)$ è una funzione *complessa* della variabile reale x, chiameremo derivata di x e indicheremo con $y' = f'(x)$ ancora il

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

quando questo limite esiste ed è finito. Ciò che avviene allora e allora soltanto che esistono e sono finite le $u'(x)$, $v'(x)$; ed è in tal caso

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x).$$

β) In casi *estremamente particolari* si conviene talvolta di considerare delle variabili complesse Z come funzioni di un'altra variabile pure complessa z; tale convenzione si pone per una Z che sia uguale a una serie convergente, di cui lo $(n+1)^{esimo}$ termine sia il prodotto di una costante k_n per z^n o per $\frac{1}{z^n}$ (o più generalmente per $[z - \alpha]^n$, dove α è una costante). Di ciò parleremo più a lungo in altro capitolo. Qui ci basterà considerare il caso particolare che i termini di tale serie dopo lo $(n+1)^{esimo}$ siano nulli, ossia brevemente che Z sia un polinomio:

$$(1) \qquad Z = a_n + a_{n-1} z + a_{n-2} z^2 + \ldots + a_0 z^n = P(z).$$

Anche nel campo delle variabili complesse chiameremo derivata e indicheremo con Z' il limite del rapporto incrementale (se esiste). Per la funzione (1) tale derivata *esiste e si calcola, come se si trattasse di variabili reali*. Infatti

$$Z' = \lim_{h=0} \frac{P(z+h) - P(z)}{h} = \sum_{j=1}^{n} a_j \lim_{h=0} \frac{(z+h)^j - z^j}{h}.$$

Si noti che h si deve considerare come un numero complesso $m + in$. Il limite per $h = 0$ significa il limite per $m = n = 0$. Si noti che

$$\frac{(z+h)^j - z^j}{h} = \frac{(z+h)^j - z^j}{(z+h) - z} = (z+h)^{j-1} + z(z+h)^{j-2} + z^2(z+h)^{j-3} + \ldots + z^{j-1}.$$

E per $h = 0$ questa espressione ha per limite proprio jz^{j-1} (tanto se le a e le z sono reali, quanto se sono complesse), cosicchè in ogni caso

$$Z' = P'(z) = na_0 z^{n-1} + (n-1) a_1 z^{n-1} + \ldots + 2 a_{n-2} z + a_{n-1}.$$

Salvo avvertenza contraria in quanto segue ci riferiremo esclusivamente a variabili reali.

§ 51. — Derivate fondamentali.

α) Sia $y =$ cost. (p. es. $y = 3$, oppure $y = 5$). Vale a dire la y non varii al variare della x. Gli incrementi Δy della y saranno sempre nulli; è quindi costantemente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, e perciò anche $y' = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

Ciò che del resto è geometricamente intuitivo, poichè $y =$ cost. è una retta parallela all'asse delle x.

Le sue tangenti coincidono quindi con essa, e perciò hanno coefficiente angolare y' nullo.

β) Si trovi la derivata di $y = \operatorname{sen} x$.

Il rapporto incrementale è $\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$; e perciò

$$y' = \lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h} =$$

$$= \operatorname{sen} x \lim_{h=0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} =$$

$$= 0. \operatorname{sen} x + 1. \cos x = \cos x.$$

Si ricordi che al § 37, p. 122-123, si è dimostrato $\lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$, $\lim_{h=0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0$.

γ) Si trovi la derivata di $y = \cos x$.

In modo analogo al precedente si trova:

$$y' = \lim_{h=0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h=0} \frac{\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x}{h} =$$

$$= \cos x \lim_{h=0} \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x \lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = - \operatorname{sen} x.$$

δ) Si trovi la derivata di $y = a^x$ $(a > 0)$.

Si ha

$$y' = \lim_{h=0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h=0} \frac{a^x (a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{h=0} \frac{a^h - 1}{h} =$$

$$= a^x \log_e a \text{ (cfr. § 38, pag. 127).}$$

In particolare la derivata di $y = e^x$ è uguale a

$$y' = e^x \log_e e = e^x.$$

ε) Si trovi la derivata di $y = \log_a x$ $(a > 0)$ $(x > 0)$.

Si ha $y' = \lim_{h=0} \dfrac{\log_a (x + h) - \log_a x}{h}$.

Posto $h = \dfrac{x}{m}$, ossia posto $m = \dfrac{x}{h}$, se ne deduce:

$$y' = \lim_{m=\infty} \frac{\log_a \left(x + \frac{x}{m}\right) - \log_a x}{x : m} = \frac{1}{x} \lim_{m=\infty} m \log_a \frac{x + \frac{x}{m}}{x} =$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{m=\infty} \log_a \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \log_a e.$$

In particolare, se $a = e$, si ha che la derivata di $y = \log_e x$ è $y' = \dfrac{1}{x}$: ciò che del resto avevamo già trovato (pag. 166, es. 1°, γ) per via geometrica.

λ) Derivare $y = x^n$ (n intero positivo).

Ris. Si noti che

$$(x + h)^n = x^n + nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} h^2 x^{n-2} + \ldots\ldots$$

Si troverà $y' = nx^{n-1}$.

η) Derivare $y = \sqrt{x}$.

Si ha

$$y' = \lim_{h=0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim \frac{(x+h) - x}{h \{ \sqrt{x+h} + \sqrt{x} \}}.$$

Si trova $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

θ) Derivare $y = \operatorname{tg} x$.

Ris. Il rapporto incrementale è

$$\frac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x}{h} = \frac{1}{\cos x \cos(x+h)} \, \frac{\operatorname{sen} h}{h}.$$

Si trova $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Derivare $x = \operatorname{cotg} x$.

Si trova $y' = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$.

La derivata di $y = sh\, x$ vale $ch\, x$; e quella di $y = ch\, x$ vale $sh\, x$ (e *non* $-sh\, x$) (cfr. pag. 133).

§ 52. — **Infinitesimi e infiniti.**

α) Se α ed h sono numeri piccoli, allora secondo che il rapporto $\dfrac{\alpha}{h}$:

1° è piccolissimo;
2° è estremamente grande;
3° non è nè piccolissimo, nè grandissimo;

noi diciamo rispettivamente che:

1° α è di un ordine di piccolezza maggiore di quello di h;
2° α è di un ordine di piccolezza minore di quello di h;
3° α ed h sono di uno stesso ordine di piccolezza.

Così, p. es., per chi si occupa di lunghezze di qualche chilometro, tanto un millimetro, che la lunghezza d'onda della luce rossa, sono lunghezze piccole. La seconda è però molto più piccola della prima, e perciò diciamo che essa è di un ordine di piccolezza maggiore.

Così, p. es., quando diciamo che le lunghezze d'onda di un raggio verde e di un raggio azzurro sono dello stesso ordine di piccolezza, vogliamo dire che il loro rapporto non è nè un numero enorme, nè un numero piccolissimo.

Tutte queste locuzioni hanno naturalmente un significato poco preciso, perchè poco preciso è il significato delle parole: « piccolissimo », « grandissimo ». Noi, però, partendo dalle idee intuitive contenute in dette frasi, poniamo le seguenti definizioni precise.

Sia h un infinitesimo, cioè una variabile che tenda a zero, e supponiamo che non assuma il valore zero (*).

Sia poi β un altro infinitesimo che tenda a zero con h. Consideriamo il rapporto $\frac{\beta}{h}$ e poi il

$$\lim_{h=0} \frac{\beta}{h},$$

se h è la variabile indipendente, e β funzione di h.

Se invece x fosse la variabile indipendente, e β ed $\alpha = h$ fossero funzioni della x infinitesime per $x = b$, alla considerazione di questo limite si sostituerebbe quella del

$$\lim_{x=b} \frac{\beta}{h} = \lim_{x=b} \frac{\beta}{\alpha}.$$

Secondo che questo limite

1° non esiste;

2° esiste ed è una quantità finita e diversa da zero;

3° esiste ed è zero;

4° esiste ed è infinito;

noi diremo rispettivamente che:

1° *i due infinitesimi* β *e* h *non sono paragonabili;*

2° β *ed* h *sono infinitesimi dello stesso ordine;*

3° β *è un infinitesimo d'ordine superiore ad* h;

4° β *è un infinitesimo d'ordine inferiore ad* h.

Esempi.

1° h e $\beta = h \operatorname{sen} \frac{1}{h}$ sono (per $h = 0$) infinitesimi non paragonabili, perchè $\lim_{h=0} \frac{\beta}{h} = \lim_{h=0} \operatorname{sen} \frac{1}{h}$ *non esiste*, poichè, mentre h tende a zero, $\operatorname{sen} \frac{1}{h}$ oscilla sempre da $+1$ a -1 e da -1 a $+1$;

(*) Può darsi che h sia la variabile indipendente, od anche che h sia funzione di un'altra variabile x, che tenda a zero, p. es., per $x = b$. In questo secondo caso non potrebbe però essere, p. es., $h = (x - b) \operatorname{sen} \frac{1}{x-b}$, perchè h assumerebbe infinite volte il valore zero, mentre x si avvicina a b (cioè in ogni intorno del punto $x = b$).

2° h e $\beta = \operatorname{sen} h$ sono per $h = 0$ infinitesimi dello stesso ordine, perchè $\lim\limits_{h=0} \frac{\beta}{h} = \lim\limits_{h=0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$;

3° Se $\beta = h^2$, è $\lim\limits_{h=0} \frac{\beta}{h} = \lim\limits_{h=0} h = 0$; cosicchè (per $h = 0$) β è un infinitesimo d'ordine superiore ad h;

4° Se $\beta = \sqrt{h}$, β per $h = +0$ è infinitesimo d'ordine inferiore ad h, perchè $\lim\limits_{h=+0} \frac{\beta}{h} = \lim\limits_{h=0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim\limits_{h=+0} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty$.

Evidentemente se α è un infinitesimo d'ordine superiore a β, e β è di ordine superiore a γ, allora α è di ordine superiore a γ, perchè

$$\lim \frac{\alpha}{\gamma} = \lim \frac{\alpha}{\beta} \lim \frac{\beta}{\gamma} = 0.$$

Se esiste un numero positivo k tale che il rapporto $\frac{a}{h^k}$ abbia un limite finito e diverso da zero, allora α è infinitesimo dello stesso ordine di h^k. Si suol dire allora che *α è un infinitesimo di ordine k* (rispetto ad h). Per esempio, $\operatorname{sen} h$ è un infinitesimo di 1° ordine per l'es. 2°; h^k $(k > 0)$ è un infinitesimo di ordine k; $1 - \cos h$ è un infinitesimo di 2° ordine, perchè:

$$\lim_{h=0} \frac{1 - \cos h}{h^2} = \lim_{h=0} \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{h}{2}}{h^2} = \frac{1}{2} \lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{h}{2}}{\left(\frac{h}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{h=0} \left\{ \frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right\}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{1}{2}} \right\}^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot$$

Quest'ultima definizione non è contraddittoria con le precedenti.

β) Considerazioni affatto simili valgono per gli infiniti, ossia per le quantità che tendono a ∞.

Se α, β sono quantità che tendono contemporaneamente a ∞, si dirà che:

1° *α e β non sono paragonabili;*

2° *α e β sono infiniti dello stesso ordine;*

3° α *è infinito di ordine superiore a* β;
4° α *è infinito di ordine inferiore a* β *secondo che:*

$$1^\circ)\ \lim \frac{\alpha}{\beta} \text{ non esiste,}$$

$$2^\circ)\ \lim \frac{\alpha}{\beta} \text{ è finito e diverso da zero,}$$

$$3^\circ)\ \lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty,$$

$$4^\circ)\ \lim \frac{\alpha}{\beta} = 0.$$

Le considerazioni precedenti hanno un grande interesse, perchè in molti problemi è lecito trascurare gli infinitesimi di ordine superiore. Eccone qui un primo esempio. Un altro esempio assai più importante sarà dato più avanti.

Se α, β, γ, δ *sono funzioni della* x *infinitesime per* $x = b$, *se* γ, δ *sono rispettivamente di ordine superiore ad* α *e* β, *allora per trovare il*

$$\lim_{x=b} \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

si possono trascurare questi infinitesimi γ, δ *di ordine superiore, ossia*

$$\lim \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} = \lim \frac{\alpha}{\beta}. \qquad (*)$$

Infatti

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{1+\frac{\gamma}{\alpha}}{1+\frac{\delta}{\beta}}.$$

Poichè $\lim \frac{\gamma}{\alpha} = \lim \frac{\delta}{\beta} = 0$, è $\lim\limits_{x=b} \frac{1+\frac{\gamma}{\alpha}}{1+\frac{\delta}{\beta}} = 1$, c. d. d.

(*) Si potrebbe anche supporre che γ e δ fossero entrambi di ordine superiore rispetto ad α oppure a β.

Basta osservare che $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} = \frac{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\beta}}{1+\frac{\delta}{\beta}} = \frac{1+\frac{\gamma}{\alpha}}{\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\delta}{\alpha}}$, ecc.

§ 53. — Differenziali.

α) Poichè $f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, si avrà, posto $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = \varepsilon$, che $\lim_{h=0} \varepsilon = 0$. Cioè ε è infinitesimo per $h = 0$. La ε è stata definita per tutti i valori di $h \neq 0$ (perchè h figura al denominatore delle precedenti formole) (*). Noi converremo di porre $\varepsilon = 0$ quando $h = 0$. E la ε resterà così definita per ogni valore possibile di h. Si ha per definizione

$$\Delta f = f(x+h) - f(x);\ \Delta x = h;\ \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Donde $\Delta f = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Delta x = [f'(x) + \varepsilon] \Delta x = \Delta x f'(x) + \varepsilon \Delta x$.

E, posto $\varepsilon \Delta x = \alpha$, si ha

$$\Delta f = f'(x) \Delta x + \alpha \tag{1}$$

dove α è un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad h, perchè $\lim_{h=0} \frac{\alpha}{h} = \lim_{h=0} \frac{\varepsilon \Delta x}{h} = \lim_{h=0} \varepsilon = 0$. Invece $f'(x) \Delta x$ (se $f'(x) \neq 0$), è un infinitesimo dello stesso ordine di h.

Allora si potrà dire, per l'uguaglianza (1), che l'incremento Δf ricevuto dalla funzione $f(x)$ è uguale al prodotto della derivata della funzione $f(x)$ per l'incremento Δx della variabile, più un infinitesimo α di ordine superiore (rispetto ad $h = \Delta x$).

La prima parte del secondo membro della (1), cioè $f'(x) \Delta x$, si suole indicare col simbolo df e si chiama il *differenziale* della funzione $f(x)$; cioè il *differenziale di una funzione* f (x) *è uguale alla derivata della funzione moltiplicata per l'incremento della variabile.*

Il differenziale dipende dunque non solo dalla x, ma anche dall'incremento $h = \Delta x$ della variabile x e, se $f'(x) \neq 0$, è un infinitesimo dello stesso ordine di h.

La (1), che può anche scriversi $\Delta f = df + \alpha$, sdoppia Δf nella somma df e di α: i quali (se $f' \neq 0$), sono rispettivamente di ordine uguale e superiore a Δx. Essa vale anche per $\Delta x = 0$, poichè per $\Delta x = 0$ è $\alpha = \varepsilon \Delta x = 0$.

(*) Supposto naturalmente in più che $x + h$ appartenga all'intervallo, ove esiste la $f(x)$.

β) Vediamo che cosa rappresenta geometricamente il differenziale. Sia data una curva di equazione

$$y = f(x).$$

Siano NM, QS le ordinate dei punti M e S della curva che corrispondono ai valori x e $x + h$ della variabile (fig. 20).

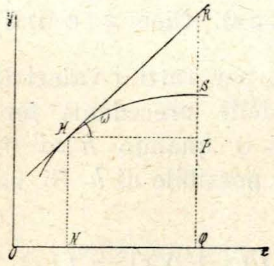

Fig. 20.

Sia P il punto d'incontro della SQ con la parallela per M all'asse delle x; sia poi R il punto d'incontro della SQ con la tangente alla curva nel punto M, ed ω sia l'angolo formato da questa tangente con la MP, ossia con l'asse x. L'incremento h che riceve la variabile indipendente x sarà

$$\Delta x = NQ = MP.$$

Abbiamo visto che la derivata $f'(x)$ della funzione $f(x)$ è uguale al coefficiente angolare della tangente alla curva, ossia che

$$f'(x) = \text{tang}\,\omega;$$

ma il differenziale è

$$df = f'(x)\,\Delta x;$$

quindi

$$df = \Delta x \text{ tang}\,\omega.$$

Ora Δx misura il cateto MP del triangolo rettangolo MPR, quindi $df = \Delta x$ tang $\omega = PR$. Dunque *il differenziale è rappresentato dal segmento* PR *compreso tra la parallela condotta per il punto* M *all'asse delle* x *e* **la tangente** *alla curva nel punto* M.

L'incremento Δf che riceve la funzione quando alla variabile x si dà l'incremento h, sarà dato dalla differenza tra il valore della funzione nel punto $x + h$, valore che nella figura è rappresentato dal segmento QS e il valore della funzione nel punto x (valore che nella figura è rappresentato dal segmento NM); dunque

$$\Delta f = QS - NM = QS - QP = PS;$$

cioè l'incremento Δf *che riceve la funzione* f (x), *quando si dà alla variabile* x *l'incremento* Δx, *è rappresentato dal segmento* PS *compreso tra la parallela all'asse delle* x *condotta per il punto* M *di ascissa* x *e* **la curva** y = f (x).

Se $f(x) = x$, la derivata di x è 1; e quindi

$$df = dx = 1 .\ \Delta x = \Delta x,$$

cioè *il differenziale di* x *è uguale all'incremento di* x.

Si potrà così scrivere in generale:

$$df = f'(x)\, dx,$$

cioè *il differenziale della funzione* f(x) *è uguale alla sua derivata moltiplicata per il differenziale della variabile indipendente* x.

Se ne deduce $\qquad f'(x) = \dfrac{df}{dx},$

cioè *la derivata di una funzione* $f(x)$ *è uguale al rapporto tra il differenziale della funzione e quello della variabile indipendente* x.

§ 54. — **Metodi abbreviati di esposizione.**

In molti trattati (specialmente di scienze applicate) si scrive spesso df al posto di Δf. Rigorosamente ciò è lecito, soltanto se $df = \Delta f$ cioè (§ 53, pag. 176) *se la curva coincide con la sua tangente,* ossia è una retta ed f è quindi una funzione lineare di x.

Il sostituire df a Δf equivale così a sostituire nell'intervallo $(x, x + dx)$ alla curva $y = f(x)$ la sua tangente nel suo punto di ascissa x, ossia a considerare la $f(x)$ come una funzione lineare $mx + n$ della x in tale intervallo, in altre parole a considerare in un tale intervallo $f'(x)$ come una costante m.

Il sostituire df a Δf equivale a trascurare un infinitesimo di ordine superiore rispetto a dx: e già abbiamo detto che in qualche studio il trascurare siffatti infinitesimi non conduce ad errori.

Il procedere in questo modo permette di esporre molti ragionamenti in modo specialmente semplice e rapido; così si può procedere senza tema d'errori, quando si riguardino tali esposizioni soltanto come procedimenti abbreviati, che hanno significato logico solo quando si può dar loro quella forma precisa, a cui conducono le nostre definizioni.

Il modo più semplice di chiarire questi metodi abbreviati di locuzione sarà quello di trattare con essi alcuni degli esempi svolti ai §§ 47, 49. Sia (§ 47, pag. 158), p. es., $y = f(x)$ lo spazio percorso da un punto mobile all'istante x. Se ne determini la velocità $F(x)$ allo stesso istante. Nell'intervallo infinitesimo $(x, x + dx)$ si può *considerare come costante la velocità* $F(x)$ cosicchè lo spazio $f(x + dx) - f(x) = df$ percorso in detto intervallo sarà uguale al prodotto $F(x)\, dx$ della velocità $F(x)$

per il tempo dx impiegato a percorrerlo; cosicchè $\frac{df}{dx} = F(x)$, ossia la velocità $F(x)$ vale la derivata di $f(x)$.

A chi volesse considerare questo procedimento come un ragionamento vero e proprio, si obbietterebbe che due sono gli errori commessi:

α) quello di considerare $F(x)$ costante nell'intervallo $(x, x+dx)$;

β) quello di porre $f(x+dx) - f(x) = df$, anzichè

$$f(x+dx) - f(x) = \Delta f;$$

ossia di confondere il differenziale df con l'incremento Δf.

Il ragionamento rigoroso fatto al § 47 dimostra che *questi due errori si compensano*, almeno nel caso che *$F(x)$ sia funzione continua*. Si noti che considerare $F(x)$ come costante, o supporre $\Delta f = df$ equivale a scambiare la curva $y = f(x)$ con la sua tangente nel punto x; cosicchè in quanto precede si è scambiata due volte la curva con la sua tangente: ciò che rende intuitivo il perchè i due errori si siano compensati.

Es. Sia $A(x)$ l'area del rettangoloide racchiuso dalla curva

$$y = f(x) \, [f(x) \geqq 0],$$

dall'ordinata di ascissa a, dall'ordinata variabile di ascissa x, e dall'asse delle x.

Si voglia trovare $A'(x) = \frac{dA}{dx}$.

Nell'intervallo infinitesimo $(x, x+dx)$ la $f(x)$ *si può considerare come costante*; cosicchè *l'incremento*

$$dA = A(x+dx) - A(x),$$

che riceve l'area A nel passare dall'ordinata di ascissa x all'ordinata di ascissa $x+dx$, si può considerare come un rettangolo di base dx ed altezza $f(x)$. È quindi

$$dA = f(x)\,dx, \quad A'(x) = \frac{dA}{dx} = f(x).$$

Valgono anche per questo esempio osservazioni analoghe a quelle fatte per il precedente.

§ 55. — **Derivazione di una somma.**

α) La funzione $f(x)$ sia uguale alla somma

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots\ldots + \varphi_n(x)$$

delle n funzioni φ_i, che supponiamo derivabili.

Cerchiamo la derivata della $f(x)$. Supporremo $n = 2$. La dimostrazione vale però affatto analoga in generale.

Si ha per definizione

$$f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h=0} \left\{ \frac{\{ \varphi_1(x+h) + \varphi_2(x+h) \} - \{ \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \}}{h} \right\} =$$

$$= \lim_{h=0} \left\{ \frac{\varphi_1(x+h) - \varphi_1(x)}{h} + \frac{\varphi_2(x+h) - \varphi_2(x)}{h} \right\} =$$

$$= \lim_{h=0} \frac{\varphi_1(x+h) - \varphi_1(x)}{h} + \lim_{h=0} \frac{\varphi_2(x+h) - \varphi_2(x)}{h} = \varphi'_1(x) + \varphi'_2(x).$$

Donde:

La derivata della somma di due o più funzioni, che posseggono derivata (finita), esiste ed è uguale alla somma delle derivate di queste funzioni.

Questo teorema vale anche per funzioni complesse (cfr. § 50).

β) Oss. 1ª. Un caso particolare del precedente teorema è evidentemente il seguente:

Le derivate di $y = \varphi(x)$ e di $y = \varphi(x) +$ cost. *sono uguali* (poichè la derivata di $y =$ cost. è nulla) (naturalmente, se esistono).

Si propone al lettore di illustrare geometricamente questo teorema, osservando che dalla curva $y = f(x)$ si passa alla $y = f(x) +$ cost. mediante una traslazione.

Nel caso che y sia lo spazio percorso da un punto mobile all'istante x, quale significato assume quest'osservazione?

Oss. 2ª. Un teorema affatto analogo al precedente vale per la differenza di due funzioni; in particolare la derivata di $-f(x)$ è $-f'(x)$.

§ 56. — Derivata del prodotto di due o più funzioni.

Siano $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ due funzioni derivabili (e *quindi continue*). Vogliamo trovare la derivata della funzione prodotto

$$f(x) = \varphi(x)\,\psi(x).$$

Essa sarà uguale al limite per $h = 0$ del rapporto incrementale

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\varphi(x+h)\,\psi(x+h) - \varphi(x)\,\psi(x)}{h}.$$

Aggiungendo e togliendo al numeratore $\varphi(x)\psi(x+h)$, tale rapporto diventa

$$\frac{\varphi(x+h)\psi(x+h)-\varphi(x)\psi(x+h)+\varphi(x)\psi(x+h)-\varphi(x)\psi(x)}{h}$$

che si può scrivere sotto la forma:

$$\psi(x+h)\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}+\varphi(x)\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}.$$

Il primo addendo è il prodotto di due fattori. Per $h=0$, il primo fattore tende a $\psi(x)$, perchè $\psi(x)$ è funzione continua; il secondo è il rapporto incrementale della funzione $\varphi(x)$, e quindi il suo limite per $h=0$ è la derivata $\varphi'(x)$ (che per ipotesi esiste ed è finita). Dunque il limite del primo addendo è $\psi(x)\,\varphi'(x)$. Analogamente si trova che il limite del secondo addendo è $\varphi(x)\psi'(x)$. Cosicchè il limite di tutta l'espressione, cioè la derivata della funzione $f(x)$, sarà

$$f'(x)=\varphi'(x)\psi(x)+\varphi(x)\psi'(x);$$

da cui il

TEOREMA. *La derivata della funzione* f (x) *prodotto di due altre funzioni* φ (x) e ψ (x) *che hanno la derivata finita, esiste e si ottiene moltiplicando la funzione* ψ (x) *per la derivata della funzione* φ (x), *poi moltiplicando* φ (x) *per la derivata della funzione* ψ (x) *e sommando i prodotti così ottenuti.*

Se uno dei fattori è costante, se p. es. $\varphi(x)=m$, essendo m una costante qualsiasi, allora $\varphi'(x)=0$; e la derivata di $m\,\psi(x)$, si riconosce uguale a $m\,\psi'(x)$.

Cioè: *la derivata del prodotto* $m\,\psi(x)$ $(m=\text{cost.})$ *è* $m\,\psi'(x)$.

Questo teorema vale anche per funzioni complesse.

OSSERVAZIONE.

Se $f(x)=\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,\varphi_3(x)$, dove φ_1, φ_2, φ_3 sono funzioni derivabili, si ha:

$$f(x)=\psi(x)\,\varphi_3(x) \text{ dove si è posto } \psi(x)=\varphi_1(x)\,\varphi_2(x).$$

Quindi:

$$\psi'(x)=\varphi'_1(x)\,\varphi_2(x)+\varphi_1(x)\,\varphi'_2(x)$$
$$f'(x)=\psi'(x)\,\varphi_3(x)+\psi(x)\,\varphi'_3(x).$$

Sostituendo a $\psi(x)$, $\psi'(x)$ i valori dedotti dalle precedenti formole, si ha infine:

$$f'(x) = \varphi'_1(x)\varphi_2(x)\varphi_3(x) + \varphi_1(x)\varphi'_2(x)\varphi_3(x) + \varphi_1(x)\varphi_2(x)\varphi'_3(x).$$

Studiando in modo simile i prodotti di n funzioni derivabili, si ha:

La derivata del prodotto di n *funzioni derivabili esiste ed è la somma degli* n *prodotti ottenuti moltiplicando la derivata di uno dei fattori per gli altri* n — 1 *fattori.*

Questo teorema vale anche per funzioni complesse.

§ 57. — **Derivata del quoziente di due funzioni.**

Ora cerchiamo la derivata di $y = \frac{1}{\psi(x)}$, supponendo che $\psi(x)$ sia una funzione differente da zero avente derivata finita. Avremo

$$y' = \lim_{h=0} \frac{\frac{1}{\psi(x+h)} - \frac{1}{\psi(x)}}{h} = \lim_{h=0} \frac{\psi(x) - \psi(x+h)}{h\,\psi(x)\,\psi(x+h)} =$$

$$= \lim_{h=0} \frac{-1}{\psi(x)\,\psi(x+h)} \cdot \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h},$$

che è il limite del prodotto di due fattori.

La $\psi(x)$ è continua, perchè la sua derivata esiste (ed è finita); quindi $\psi(x+h)$ tende a $\psi(x)$ per $h = 0$, e perciò $\psi(x)\,\psi(x+h)$ tende a $[\psi(x)]^2$; dunque il limite del primo fattore è $-\frac{1}{[\psi(x)]^2}$.

Il secondo fattore è il rapporto incrementale della funzione $\psi(x)$ e il suo limite per $h = 0$ è la derivata $\psi'(x)$ (che esiste ed è finita); quindi:

$$y' = -\frac{1}{[\psi(x)]^2}\psi'(x);$$

cioè *per derivare la funzione* $\frac{1}{\psi(\mathrm{x})}$ *si divide la derivata della funzione* $\psi(\mathrm{x})$ *per il quadrato della funzione stessa e si cambia segno al quoziente.*

Ora, per il teorema sulla derivazione del prodotto di due funzioni, se $f(x)$ e $\psi(x)$ sono due funzioni continue aventi derivata finita, se $\psi(x) \neq 0$, e si pone $y = \frac{f(x)}{\psi(x)} = f(x)\frac{1}{\psi(x)}$, si ha:

$$y' = f'(x)\frac{1}{\psi(x)} - f(x)\frac{\psi'(x)}{[\psi(x)]^2},$$

ossia

$$y' = \frac{f'(x)\psi(x) - f(x)\psi'(x)}{[\psi(x)]^2};$$

cioè si ha il

TEOREMA. *La derivata del quoziente* $\frac{f(x)}{\psi(x)}$ *di due funzioni continue* ($\psi(x) \neq 0$) *che hanno derivata finita è una frazione il cui denominatore è il quadrato della funzione denominatore* $\psi(x)$, *e il cui numeratore si ottiene sottraendo dal prodotto della derivata* $f'(x)$ *del numeratore* $f(x)$ *per il denominatore* $\psi(x)$ *il prodotto della derivata* $\psi'(x)$ *del denominatore per il numeratore* $f(x)$.

Questo teorema vale anche per funzioni complesse.

ESEMPI.

1° La derivata di $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ è $\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$, cioè è $\frac{1}{\cos^2 x}$.

2° Nello stesso modo si prova che la derivata di $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ vale $-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$.

Questa formola si può anche dimostrare ricordando che $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, e usando poi del primo risultato di questo paragrafo.

§ 58. — Regola di derivazione delle funzioni inverse.

α) Tra le due variabili x ed y esista una corrispondenza *biunivoca*, in guisa cioè che ad ogni valore della x in un certo intervallo α corrisponda uno ed un solo valore della y di un certo altro intervallo β, e viceversa. Vale a dire la y si possa considerare come funzione $f(x)$ della x (per x appartenente all'intervallo α) e viceversa la x si possa considerare come funzione $\varphi(y)$ della y (per y appartenente all'intervallo β). In altre parole in tali intervalli le

$$y = f(x) \quad , \quad x = \varphi(y)$$

definiscano una stessa curva. Queste funzioni si diranno *inverse* l'una dell'altra. Così, p. es., avviene della coppia di funzioni

$$y = \log_a x \quad , \quad x = a^y \quad (a > 0 \, ; \, a \neq 1)$$

$$[\text{intervallo } \alpha = (0, +\infty)] \qquad [\text{intervallo } \beta = (-\infty, +\infty)]$$

$$y = \sqrt[n]{x} \qquad x = y^n \,(n \text{ intero positivo dispari})$$

$$[\text{intervallo } \alpha = (-\infty, +\infty)] \qquad [\text{intervallo } \beta = (-\infty, +\infty)]$$

$$y = \sqrt[n]{x} \qquad x = y^n \,(n \text{ intero positivo pari})$$

$$[\text{intervallo } \alpha = (0, \infty)] \qquad [\text{intervallo } \beta = (0, +\infty)].$$

(In questi intervalli si debbono trascurare gli estremi, eccetto l'estremo 0 dell'ultimo esempio).

Nell'ultimo esempio si suppone $x > 0$, affinchè il simbolo $\sqrt[n]{x}$ non sia privo di significato; e si suppone $y = \sqrt[n]{x} > 0$, perchè altrimenti a un valore della x corrisponderebbero due valori distinti per la y.

Supposte continue entrambe le $f(x)$, $\varphi(y)$, e supposto che $f'(x)$ esista e sia differente da zero, si vuol calcolare $\varphi'(y)$. Evidentemente per ipotesi l'incremento Δx dato alla x individua l'incremento Δy dato alla y; e viceversa. Di più (per la supposta continuità delle f, φ) gli incrementi Δx, Δy tendono contemporaneamente a zero (*). Ora:

$$\varphi'(y) = \lim_{\Delta y = 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y = 0} \frac{1}{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} \cdot$$

Poichè $\lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ esiste ed è uguale a $f'(x) \neq 0$, se ne deduce:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \cdot$$

Cioè, nelle nostre ipotesi, *la derivata* $\varphi'(y)$ *è il numero reciproco di* $f'(x)$; *e viceversa*. Così, p. es., si verifica, posto

(*) Le ipotesi si possono ridurre. Così, p. es., nel Capitolo dedicato alla teoria delle funzioni implicite si vedrà che, se $y = f(x)$ possiede una derivata $f'(x)$ differente da zero per $x = a$, e se $b = f(a)$, allora esiste una funzione x della y, uguale ad a per $y = b$ $\left(\text{che ha in tale punto per derivata proprio } \frac{1}{f'(a)}\right)$, che è quindi continua per $y = b$ e soddisfa alla $y = f(x)$. Si noti che: *Se* y *è funzione continua della* x *nell'intervallo* α, *se essa è sempre crescente o sempre decrescente, allora la* x *è funzione continua della* y *nell'intervallo* β *corrispondente*.

$y = \log_a x$, $x = a^y$, che le due derivate $y'_x = \frac{1}{x} \log_a e$ e $x'_y = a^y \log_e a$ sono reciproche, perchè $a^y = x$, $\log_a e \log_e a = 1$.

Esercizi.

1° Si derivi $y = \sqrt[n]{x}$.

RIS. Si ha $x = y^n$, $x'_y = ny^{n-1}$, $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{ny^{n-1}} =$
$= \frac{1}{n \sqrt[n]{x}^{(n-1)}}$, cosicchè la derivata di $y = x^{\frac{1}{n}}$ vale:

$$y' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1} \quad (x \neq 0).$$

2° Si derivi $y = x^{\frac{m}{n}}$.

RIS. È $y = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$, donde $y' = m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$.

3° Si derivi $y = x^{-\frac{m}{n}}$.

RIS. È $y = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$, donde $y' = \frac{-1}{x^{\frac{2m}{n}}} \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} = -\frac{m}{n} x^{-\frac{m}{n}-1}$.

4° (Da tutte queste formole si trae che) la derivata di $y = x^n$ per ogni valore *razionale* di n vale $y' = nx^{n-1}$. Più avanti estenderemo questa importante formola anche al caso di n *irrazionale*. (Il lettore esamini il caso $x \leqq 0$).

β) Sia $y = \operatorname{sen} x$. La curva immagine è la cosidetta *sinusoide*. Se ne ricava che $x = \operatorname{arcsen} y$ (x = arco, che ha il seno uguale ad y). Osserviamo però che, dato il valore y ($|y| \leqq 1$) del seno, l'arco x corrispondente non è univocamente determinato, ma ha infiniti valori, come è ben noto, e come si può verificare

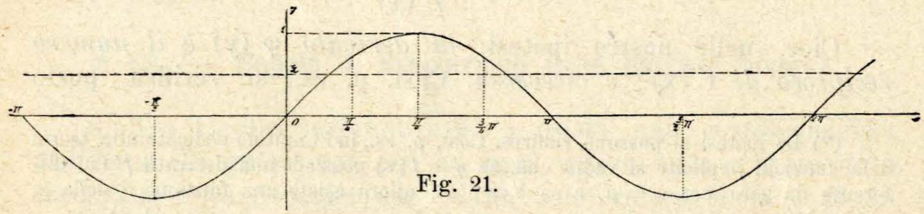

Fig. 21.

dalla figura 21. Questa rende ben evidente che, p. es., al valore $y = \frac{1}{2}$ del seno corrispondono infiniti valori dell'arco x. La corrispondenza si rende biunivoca, se noi ci limitiamo a considerare, p. es., i valori della x compresi tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$. Ad ogni valore possibile y di sen x (cioè ad ogni valore y dell'intervallo $[-1, +1]$ corrisponderà allora un solo valore di x; e viceversa. Sarà allora

$$x'_y = (\operatorname{arcsen} y)'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(\operatorname{sen} x)'_x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\text{per } |y| \neq 1.$$

L'ambiguità di segno dovuta al radicale $\sqrt{1-y^2}$ è dovuta all'arbitrarietà con cui possiamo scegliere l'arco di sinusoide che rende biunivoca la corrispondenza tra x, y. Se adottiamo la convenzione fatta più sopra, siccome $\sqrt{1-y^2}$ è scritto al posto $\cos x$, e $\cos x$ per $|x| < \frac{\pi}{2}$ è positivo, si dovrà dare al radicale il segno $+$. Scambiando il significato delle lettere x, y, si ha: Se $y = \operatorname{arcsen} x$, $|y| < \frac{\pi}{2}$, è $y' = +\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

γ) In modo simile si prova che, se $y = \arccos x$, e quindi $x = \cos y$, e se $0 < y < \pi$, allora $y'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Ciò che si può controllare, osservando che nelle attuali convenzioni $\arccos x + \operatorname{arcsen} x = \frac{\pi}{2} = \text{cost.}$ e quindi $\arccos x = \text{cost} - \operatorname{arcsen} x$, cosicchè $\arccos x$ ed $\operatorname{arcsen} x$ devono avere derivate uguali e di segno opposto.

δ) Vogliamo derivare la funzione $y = \operatorname{arctg} x$ inversa della $x = \operatorname{tg} y$. Anche qui, se si vuole rendere determinata la y e biunivoca la corrispondenza tra le x, y, si deve limitare in qualche modo la variabilità della y, p. es., supponendo $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Del resto le varie possibili determinazioni della y si ottengono aggiungendo a una di esse un multiplo di π, cioè una costante, e perciò hanno la stessa derivata. Si ha poi

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 y}\right)} = \frac{1}{1+\operatorname{tang}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

OSSERVAZIONE.

Si può dimostrare direttamente che $(\text{arcsen } x)'_x = + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\text{arccos } x)'_x = - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\text{arctg } x)'_x = \frac{1}{1+x^2}$.

RIS. Dimostriamo, p. es., l'ultima formola. Ricordo che:

$$\text{tg } (\text{arctg } \alpha - \text{arctg } \beta) = \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}, \text{ ossia:}$$

$$\text{arctg } \alpha - \text{arctg } \beta = \text{arctg} \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}.$$

Se ne deduce:

$$(\text{arctg } x)'_x =$$

$$= \lim_{h=0} \frac{\text{arctg } (x+h) - \text{arctg } x}{h} = \lim_{h=0} \frac{\text{arctg} \frac{h}{1 + x(x+h)}}{h} =$$

$$= \lim_{h=0} \frac{1}{1 + x(x+h)} \lim_{k=0} \frac{\text{arctg } k}{k}, \text{ dove } k = \frac{h}{1 + x(x+h)}.$$

Se ne deduce: $(\text{arctg } x)'_x = \frac{1}{1+x^2} \cdot 1 = \frac{1}{1+x^2}$.

§ 59. — Derivazione delle funzioni di funzioni.

Sia y una funzione di una funzione z della x. Sia cioè

$$y = f(z) \quad , \quad z = \varphi(x).$$

Vale a dire, quando la x varia in un certo intervallo, sia individuato il valore della variabile z; e questo valore della z individui alla sua volta il valore di y (§ 29, γ, pag. 97).

Supponiamo che esistano le derivate $y'_z = f'(z)$ e $z'_x = \varphi'(x)$ della y rispetto alla z, e della z rispetto alla x. Si vuol trovare la derivata y'_x della y (considerata come funzione della x) rispetto alla x.

L'incremento Δx dato alla x individua il corrispondente incremento Δz ricevuto dalla z; e questo individua l'incremento Δy della y.

Sarà (ricordando che $\lim\limits_{\Delta x = 0} \Delta z = 0$)

$$y'_x = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} =$$

$$= f'(z)\, \varphi'(x) = y'_z z'_x. \quad (*)$$

Cioè: *Se* y *è funzione derivabile della* z, *e la* z *è funzione derivabile della* x, *la derivata* y'_x *della* y *rispetto alla* x *uguaglia il prodotto della derivata di* y *rispetto alla* z *per la derivata della* z *rispetto alla* x.

OSSERV. Sia $y = f(z)$, $z = \varphi(x)$; e tanto la y che la z si possano considerare come funzioni della x. Sarà quindi *per definizione* in tale ipotesi

$$dy = y'_x\, dx \quad (1); \qquad dz = z'_x\, dx \quad (2)$$

Ma è $y'_x = y'_z z'_x$. Quindi la (1) equivale alla $dy = y'_z z'_x\, dx$, che per (2) si può scrivere:

$$dy = y'_z\, dz. \quad (3)$$

Questa formola, vera *per definizione* se z è la variabile indipendente, è vera dunque *anche se* z *non è la variabile indipendente* (ma invece le y, z sono pensate funzioni di una terza variabile x).

Si noti che, per il teorema di derivazione delle funzioni inverse, essa è vera anche se la stessa y si assume a variabile indipendente, e si considera z come funzione di y.

In tal caso infatti, essendo $y'_z = \dfrac{1}{z'_y}$, tale formola si riduce alla $dz = z'_y\, dy$.

APPLICAZIONE.

Siano $x = x(t)$, $y = y(t)$ le coordinate di un punto, che al variare della t descrive una curva. Siano $x(t)$, $y(t)$ funzioni con derivata finita; e si possa in un certo intorno del punto $t = \alpha$ con-

(*) Questa dimostrazione cessa di essere valida, se per valori di $\Delta x \neq 0$ è $\Delta z = 0$. Ma si osservi che $\Delta y = y'_z \Delta z + \varepsilon \Delta z$, dove $\lim \varepsilon = 0$. Quindi in ogni caso

$$y'_x = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} y'_z \frac{\Delta z}{\Delta x} + \lim_{\Delta x = 0} \varepsilon \frac{\Delta z}{\Delta x} = y'_z z'_x.$$

siderare (*) y come funzione di x. Sarà $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)\,dt}{x'(t)\,dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$.
L'equazione della retta tangente sarà

$$y - y(\alpha) = [x - x(\alpha)]\,\frac{y'(\alpha)}{x'(\alpha)},$$

ossia $[y - y(\alpha)] : y'(\alpha) = [x - x(\alpha)] : x'(\alpha)$; questa equazione si può dimostrare direttamente, anche senza ammettere che y si possa considerare come funzione della x, e senza usare il linguaggio differenziale. L'allievo applichi tale formola p. es. alla curva $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$ (che coincide con l'ellisse $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$). (Cfr. Cap. 19, § 117).

§ 60. — **Derivata logaritmica.**

Sia $y = \log f(x)$, dove $f(x)$ è una funzione positiva derivabile. Posto $z = f(x)$, è $y = \log z$, dove $z = f(x)$. Sarà

$$y'_x = \frac{1}{z}\,z'_x = \frac{1}{f(x)}\,f'(x).$$

Cioè :

La derivata del logaritmo di una funzione derivabile f(x) > 0 *o, come si suol dire, la derivata logaritmica di* f(x) *si ottiene dividendo la derivata* f'(x) *di* f(x) *per la stessa funzione* f(x).

Viceversa sia

$$y = e^{\varphi(x)}, \text{ ossia } \varphi(x) = \log y.$$

Sarà $y = e^z$ dove $z = \varphi(x)$; e quindi $y'_x = y'_z\, z'_x = e^z\, \varphi'(x)$ ossia $y'_x = y\, \varphi'(x)$.

(Se il logaritmo di una funzione è derivabile), la derivata della funzione è uguale alla derivata del suo logaritmo moltiplicata per la funzione stessa.

Quest'ultimo teorema è spesso molto utile, perchè è talvolta più facile derivare il logaritmo di una funzione che la funzione stessa.

Se ne deduce che la derivata di e^{cx} vale ce^{cx}. Questa formola *vale anche se la costante* c *è complessa* (così che risulta

(*) Cioè si possa considerare t come funzione della x [inversa della $x = x(t)$]. La y sarà funzione di t, funzione della x, che si considererà come funzione della x.

ancora una volta l'opportunità della definizione di Eulero). Infatti, se

$$c = a + ib$$

allora

$$e^{cx} = e^{ax} (\cos bx + i \operatorname{sen} bx).$$

Derivando con le regole abituali si prova facilmente l'asserto.

ESEMPI.

1° Si derivi $y = x^n$.

RIS. $\log y = n \log x$, $(\log y)'_x = \frac{n}{x}$, $y'_x = x^n \frac{n}{x} = nx^{n-1}$.

Questo *risultato fondamentale* era stato già da noi dimostrato per n razionale (pag. 184 del § 58, eserc. 4°). Il lettore esamini il caso di $x \leqq 0$.

2° Si derivi $y = [f(x)]^n$.

RIS. $\log y = n \log f(x)$; $(\log y)'_x = n [\log f(x)]'_x = n \frac{f'(x)}{f(x)}$,

donde $y'_x = ny \frac{f'(x)}{f(x)} = n [f(x)]^{n-1} f'(x)$. Si esamini il caso di $f(x) \leqq 0$.

Con altro e più semplice metodo si ponga $z = f(x)$. Sarà $y = z^n$, $z = f(x)$ donde $y'_x = nz^{n-1} z'_x = n [f(x)]^{n-1} f'(x)$.

Anche questa formola fondamentale ci era già nota per il caso di n intero positivo (eserc. 2° del § 56, pag. 181).

3° Si derivi $y = [f(x)]^{\varphi(x)}$.

Si ha $\log y = \varphi(x) \log f(x)$; e perciò

$$y'_x = f^\varphi [\varphi(x) \log f(x)]'_x = f^\varphi \left\{ \varphi \frac{f'(x)}{f(x)} + \varphi'(x) \log f(x) \right\}.$$

RIASSUNTO.

Si possono riassumere così i precedenti risultati:

TEOREMA.

Se y è una funzione della x, che si può calcolare con somme, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, innalzamenti a potenza, consultazioni di tavole logaritmiche e trigonometriche, altrettanto avviene generalmente per y'.

Il calcolo di y' si esegue con le regole riassunte dai quadri seguenti:

QUADRO DELLE REGOLE DI DERIVAZIONE.

FUNZIONE	DERIVATA
$y=\varphi(x)\pm\psi(x)$	$y'=\varphi'(x)\pm\psi'(x)$
$y=\varphi(x)\psi(x)$	$y'=\varphi'(x)\psi(x)+\varphi(x)\psi'(x)$
$y=\dfrac{1}{\varphi(x)}$	$y'=-\dfrac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}$
$y=\dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)}$	$y'=\dfrac{\psi'(x)\varphi(x)-\psi(x)\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}$
$y=f(x), x=\varphi(y)$	$f'(x)\varphi'(y)=1$
$y=f(z), z=\varphi(x)$	$y'_x=f'(z)\varphi'(x)=y'_z z'_x$
(1) $y=\log_e z$; (2) $y=e^z$ (*)	(1) $y'=\dfrac{1}{z}z'$; (2) $y'=e^z z'_x=yz'_x$
$y=\varphi(x)^{\psi(x)}$	$y'=\varphi(x)^{\psi(x)}\left[\psi'(x)\log\varphi(x)+\psi(x)\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right]$

QUADRO DELLE DERIVATE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI.

FUNZIONE	DERIVATA
$y=$ costante	$y'=0$
$y=x^m$	$y'=mx^{m-1}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y=\operatorname{sen} x$	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	$y'=-\operatorname{sen} x$
$y=\operatorname{tang} x$	$y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y=\cot x$	$y'=-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$
$y=\log x$	$y'=\dfrac{1}{x}$
$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x}\log_a e$
$y=a^x$	$y'=a^x\log_e a$
$y=e^x$	$y'=e^x$
$y=\operatorname{arc}\begin{smallmatrix}\operatorname{sen}\\ \cos\end{smallmatrix} x$	$y'=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\operatorname{arc\,tang} x$	$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$

(*) Cioè $z=\log y$.

ALTRE DERIVATE NOTEVOLI ($a = \text{cost}$).

$y = \text{cost};$	$y' = 0$	$y = \sqrt[n]{x};$	$y' = \dfrac{1}{n} \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$y = [f(x)]^n;$	$y' = n\,[f(x)]^{n-1} f'(x)$	$y = \sqrt{x};$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a};$	$y' = \dfrac{a}{x^2 + a^2}$	$y = \sqrt[n]{f(x)};$	$y' = \dfrac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$
$y = \operatorname{arcsen}\dfrac{x}{a};$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$y = \sqrt{f(x)};$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)$
$y = a\,\varphi(x);$	$y' = a\,\varphi'(x)$		

§ 61. — Derivate successive.

α) Sia $v(x)$ la velocità di un punto mobile M all'istante x. Il movimento si dice uniformemente accelerato, se la velocità riceve incrementi uguali in tempi uguali; e in tal caso il rapporto $\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$, dove Δv è l'incremento ricevuto dalla velocità in un intervallo di tempo di ampiezza Δx, si dice l'*accelerazione* del movimento.

Nel caso generale tale rapporto assume il nome di *accelerazione media* nell'intervallo $(x, x + \Delta x)$ di tempo considerato. E, per ragioni analoghe a quelle svolte negli esempi di pag. 157 e seg., il suo limite per $\Delta x = 0$, ossia $v'(x) = \lim\limits_{\Delta x = 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ si dice *accelerazione* all'istante x. L'accelerazione si presenta così come la derivata della velocità $v(x)$ rispetto al tempo x.

Ora, se $y = f(x)$ è lo spazio percorso dal nostro punto M all'istante x, è $v(x) = f'(x)$. Quindi l'accelerazione è data dalla derivata della derivata $f'(x)$ di $f(x)$.

β) In generale la derivata della derivata f' di una funzione $y = f(x)$ si indica con y'' o con $f''(x)$ e si chiama derivata seconda di $y = f(x)$. Questa è una nuova funzione di x, che a sua volta può ammettere una derivata che si chiama derivata terza di y e si indica con y''' o con $f'''(x)$. E così via. In generale y può ammettere una derivata n^{esima} o dell'ordine n che si indica con $y^{(n)}$ o con $f^{(n)}(x)$.

La $y' = f'(x)$ si chiama anche prima derivata di y.

Con $d^2 y$ si indica il prodotto di $f''(x)$ per dx^2.

Con $d^n y$ » » » $f^{(n)}(x)$ » dx^n.

Il simbolo $d^n y$, testè definito, riceve il titolo di differenziale n^{esimo}.

Osserviamo che $d^n y = y^{(n)} dx^n$ è il differenziale di

$$d^{(n-1)} y = y^{(n-1)} dx^{n-1}$$

quando per un momento si consideri dx come costante (*). Infatti in questa ipotesi la derivata di $d^{(n-1)} y$, ossia di $y^{(n-1)} dx^{n-1}$ è $y^{(n)} dx^{n-1}$, e il suo differenziale è $y^{(n)} dx^n$.

Con queste convenzioni, la derivata $y^{(n)}$ si può scrivere nella forma $\frac{d^n y}{dx^n}$.

γ) Abbiamo detto (§ 59, pag. 187) che, se $y = f(x)$, allora

$$dy = f'(x)\, dx,$$

anche se x non è la variabile indipendente.

Un teorema analogo non vale per i differenziali di ordine superiore al primo; tutte le volte che si introducono nel calcolo tali differenziali, bisogna *prefissare quale è la variabile indipendente scelta, e non più mutarla nel resto del calcolo.* Basti ricordare che il differenziale secondo $d^2 x$ della variabile indipendente x è nullo, perchè la derivata seconda della x rispetto alla x è nulla.

Esempio.

Calcolare le derivate successive del polinomio:

$$p(x) = a_0 + a_1 (x - \alpha) + a_2 (x - \alpha)^2 + \ldots.. + a_n (x - \alpha)^n.$$

Si trova:

$$p'(x) = a_1 + 2\, a_2 (x - \alpha) + 3\, a_3 (x - \alpha)^2 + \ldots.. + n a_n (x - \alpha)^{n-1}$$
$$p''(x) = \underline{|2}\, a_2 + 3.2\, a_3 (x - \alpha) + \ldots.. + n(n-1)\, a_n (x - \alpha)^{n-2}$$

. . . .

$$p^{(i)}(x) = \underline{|i}\, a_i + 2.3.4 \ldots.. (i+1)\, a_{i+1} (x - \alpha) +$$
$$3.4 \ldots. (i+2)\, a_{i+2} (x - \alpha)^2 + \ldots. + (n-i+1)(n-i+2) \ldots. n a_n (x - \alpha)^{n-i}$$

. . . .

$$p^{(n-1)}(x) = \underline{|n-1}\, a_{n-1} + 2.3.4 \ldots.. (n-1)\, n a_n (x - \alpha).$$
$$p^{(n)}(x) = \underline{|n}\, a_n.$$

E le derivate successive, dalla $(n+1)^{esima}$ in poi, sono nulle.

(*) Cioè si considera dx come indipendente dalla x, ossia come avente uno stesso valore in ogni punto x, e perciò come avente derivata nulla rispetto alla x.

CAPITOLO IX.

TEOREMI FONDAMENTALI SULLE DERIVATE E LORO PRIME APPLICAZIONI

§ 62. — Proprietà fondamentali delle derivate.

Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo (a, b). Sia c un punto *interno* a tale intervallo.

α) DEFIN. *Si dice che la funzione* f (x) *è crescente nel punto* c, *se esiste un numero positivo* k *tale che, per ogni numero* h *positivo minore di* k, *valga la:*

$$f(c-h) < f(c) < f(c+h).$$

[OSS. Altri impongono soltanto che

$$f(c-h) \leqq f(c) \leqq f(c+h)].$$

Con notazioni analoghe la $f(x)$ si dice *decrescente* nel punto c, se:

$$f(c-h > f(c) > f(c+h).$$

[Altri impongono soltanto $f(c-h) \geqq f(c) \geqq f(c+h)$].

OSS. *Se nel punto* c *la funzione riceve il suo massimo o il suo minimo valore, ivi la funzione non è nè crescente nè decrescente* (quando però si addotti la nostra prima definizione).

LEMMA. *Se* f' (c) *esiste ed è positivo, la* f (x) *è crescente nel punto* c. *Se* f' (c) < 0, *la funzione è decrescente nel punto* c. *Quindi, se nel punto* c *la* f (x) *raggiunge il suo massimo, o il suo minimo valore, e se* f' (c) *esiste ed è finita, allora* f' (c) $= 0$.

Dimostriamo, p. es., la prima parte.

Poichè $f'(c) = \lim_{h=+0} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h=+0} \dfrac{f(c-h)-f(c)}{-h}$,

dalla $f'(c) > 0$ segue (§ 32, oss. 6, pag. 109) che esiste un numero k tale che, per $0 < h < k$, i rapporti

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \text{ e } \frac{f(c-h)-f(c)}{-h}$$

sono positivi (*). Cioè $f(c+h) - f(c)$ è positivo; $f(c-h) - f(c)$ è negativo: cioè $f(c-h) < f(c) < f(c+h)$, c. d. d.

β) Il teorema fondamentale del calcolo, di cui, si può dire, tutti gli altri sono conseguenza, è un teorema intuitivo. Sia $y = f(x)$ una curva C dotata di tangente in ogni punto interno all'intervallo (a, b). La sola ispezione della figura 22 dimostra l'esistenza su C di un punto (nella figura quello di ascissa c) interno all'intervallo, in cui la tangente alla curva è parallela alla corda congiungente i punti della curva di ascissa a, b. Queste due rette formeranno perciò angoli uguali con l'asse delle x, e avranno quindi ugual coefficiente angolare; sarà cioè:

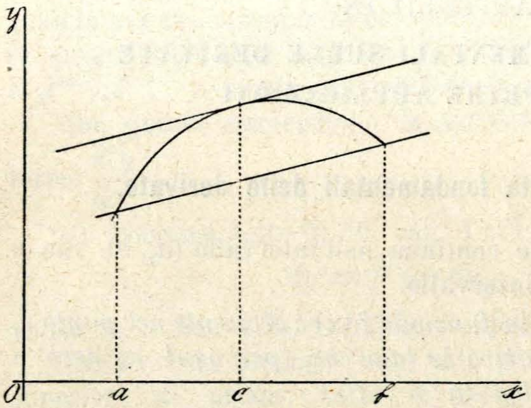

Fig. 22.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Posto $b = a + h$, $c = a + k$, i numeri k, h hanno lo stesso segno, e il valore assoluto di k è minore di quello di h. Posto dunque $\frac{k}{h} = \theta$, ossia $k = h\,\theta$, è $0 < \theta < 1$; e la nostra formola si scrive:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a + \theta h)\ ,\quad (0 < \theta < 1).$$

Cioè *un rapporto incrementale per la funzione* f (x) *è uguale alla derivata in un punto intermedio.* Al limite (per $h = 0$) esso diventa poi proprio la derivata nel punto $x = a$.

Questo importantissimo teorema si deve considerare intuitivo e in parte a noi già noto anche per le seguenti ragioni.

Noi sappiamo infatti che, se $f(x)$ è lo spazio percorso da un mobile all'istante x, allora $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ rappresenta la

(*) Prefissato un $\varepsilon > 0$ arbitrario, esiste un k tale che per $0 < h < k$ tali rapporti sono compresi (pag. 107) tra $f'(c) - \varepsilon$ e $f'(c) + \varepsilon$; cioè [se è stato scelto $\varepsilon < f'(c)$] tra due quantità positive, e quindi sono essi stessi positivi.

velocità media nell'intervallo $(a, a + h)$, mentre $f'(a + \theta h)$ rappresenta la velocità all'istante intermedio $a + \theta h$. La formola precedente dice dunque soltanto che la velocità media in un certo intervallo di tempo è uguale alla velocità in un qualche istante intermedio. E ciò è ben chiaro: Se, p. es., un treno percorre 300 km. in cinque ore, cioè con una velocità media di 60 km. all'ora, potrà darsi benissimo che in qualche istante il treno sia fermo, in qualche altro abbia velocità di 80, di 100 km. all'ora; ma esiste certamente almeno un istante del viaggio, in cui la velocità del treno è proprio uguale alla velocità media di 60 km. all'ora (almeno se ammettiamo che la velocità varii in modo continuo, cioè sia una funzione continua del tempo x. La dimostrazione, che daremo, prova però che il nostro teorema vale anche in casi più generali).

Anzi, se ricordiamo quanto abbiamo detto al § 47, troviamo che la penultima formola di esso (pag. 158) coincide proprio con quella che abbiamo ora scritta; appena si pongano a e k al posto di x e di λ, e si ricordi che F è uguale alla derivata della $f(x)$. Si può dire dunque che noi abbiamo enunciato il teorema di cui qui ci occupiamo, ancora prima di definire la derivata di una funzione (almeno nel caso particolare che questa derivata sia continua).

γ) Si voglia ora dimostrare il nostro teorema in modo generale e rigoroso. E cominciamo a supporre $f(a) = f(b)$. In questo caso la nostra proposizione assume la seguente forma precisa (teorema di *Rolle*).

Se f (x) *è una funzione continua definita nell'intervallo* (a, b) *tale che* f (a) = f (b), *e se possiede derivata* (finita) *in tutti i punti interni a questo intervallo, esiste in esso almeno un punto* c, *per cui* f' (c) = 0.

Nell'enunciato di questo teorema non si ammette nè che $f'(x)$ sia continua, nè che $f'(x)$ esista agli estremi dell'intervallo (a, b). Si potrebbe anche ammettere che nei punti interni a questo intervallo la $f'(x)$ fosse infinita, purchè di segno determinato.

Per il teorema di Weierstrass la $f(x)$ assume almeno in un punto A di questo intervallo il valore massimo M, e almeno in un punto B il valore minimo m. Se questi due punti sono entrambi agli estremi a, b, allora, siccome $f(a) = f(b)$, sarà $M = m$. Essendo uguali i valori massimo e minimo della $f(x)$, la $f(x)$ avrà in tutto l'intervallo valore costante, e quindi in *qualsiasi* punto c interno all'intervallo stesso sarà $f'(c) = 0$.

Rimane ora a studiare l'altro caso che la funzione acquisti il suo valore massimo o minimo in un punto c interno ad (a, b); ma in tal caso il lemma precedente dimostra che ivi $f'(c) = 0$.

Poichè c è *interno* ad (a, b), potremo scrivere:

$$c = a + \theta(b - a) \quad (0 < \theta < 1)$$

dove θ è compreso tra 0 ed 1 (i numeri 0 ed 1 esclusi).

Se si pone $b = a + h$, sarà $c = a + \theta h$ (*).

GENERALIZZAZIONI.

Siano $f(x)$, $\varphi(x)$ due funzioni derivabili nell'intervallo (a, b). E sia $\varphi(a) \neq \varphi(b)$; in altre parole la $\varphi(x)$ assuma valori differenti agli estremi dell'intervallo (a, b).

Costruiamo la funzione

$$F(x) = f(x) + k\,\varphi(x),$$

dove k è una costante, che noi sceglieremo in guisa che $F(a) = F(b)$, ossia che

$$f(a) + k\,\varphi(a) = f(b) + k\,\varphi(b);$$

da cui si trae $k = -\dfrac{f(a) - f(b)}{\varphi(a) - \varphi(b)}$; formola che è lecito scrivere, perchè per ipotesi il denominatore $\varphi(a) - \varphi(b) \neq 0$.

Quindi la funzione

$$F(x) = f(x) - \frac{f(a) - f(b)}{\varphi(a) - \varphi(b)}\,\varphi(x)$$

è una funzione derivabile (perchè $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono derivabili) e assume valori uguali per $x = a$ e per $x = b$.

Perciò, per il teorema di Rolle, esiste almeno un punto dell'intervallo (a, b) in cui la derivata $F'(x)$ è zero; questo punto

---

(*) Il teorema può non essere vero se non sono soddisfatte le ipotesi enunciate, cioè se la $f(x)$ ha in qualche punto interno ad (a, b) derivata infinita non determinata di segno o indeterminata.

Il lettore se ne convincerà facilmente pensando a una linea $y = f(x)$ composta di due segmenti di rette concorrenti in un punto di ascissa c, nel quale la $f(x)$ raggiunga, p. es., il suo massimo valore; oppure pensando a una linea $y = f(x)$ composta di due archi di cerchi concorrenti in un punto di ascissa c, nel quale posseggano una stessa tangente perpendicolare all'asse delle x, nel caso che in tale punto la y raggiunga, p. es., il suo massimo valore. Nel primo caso la y' non è per $x = c$ determinata, nel secondo la y' non è finita. In tali casi, secondo le nostre convenzioni, noi diciamo che y' non esiste.

Un'osservazione analoga si presenterà nel paragrafo 70, ove studieremo i punti di massimo o di minimo di una funzione $f(x)$.

sarà un punto

$$c = a + \theta (b - a), \tag{1}$$

dove $0 < \theta < 1$.

Il punto c soddisferà quindi alla:

$$F'(c) = 0 \quad \text{ossia} \quad f'(c) - \frac{f(a) - f(b)}{\varphi(a) - \varphi(b)} \varphi'(c) = 0,$$

per cui si avrà:

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{\varphi(a) - \varphi(b)} \varphi'(c). \tag{2}$$

Questa formola fondamentale costituisce il **teorema di Cauchy.**

Se $\varphi(x) = x$, $\varphi'(c) = 1$, la (2) diventa

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(\cancel{b})}{b - a}; \quad a$$

e se $b = a + h$, diventa

$$f'(c) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

ossia, essendo per (1) $c = a + \theta h$:

$$f'(a + \theta h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{3}$$

Questa formola costituisce appunto il **teorema della media di Lagrange,** da cui siamo partiti, e che nel caso $f(a+h) = f(a)$ si riduce al teorema di Rolle.

§ 63. — **Prime applicazioni del teorema della media.**

α) Si può dimostrare semplicemente il teorema di Heine (pag. 135) per una funzione $f(x)$ definita in un intervallo (a, b) nel caso che la sua derivata $f(x)$ sia limitata, che cioè esista una costante H tale che $|f'(x)| < H$. Se $\varepsilon > 0$ è un numero arbitrario, sia α un qualsiasi intervallo parziale di ampiezza non superiore ad $\frac{\varepsilon}{H}$. Siano γ_1, γ_2 due punti di α, ove la $f(x)$ assume il massimo e il minimo dei valori, che $f(x)$ assume in α. L'oscillazione $f(\gamma_1) - f(\gamma_2)$ di $f(x)$ in α vale $(\gamma_1 - \gamma_2) f'(\gamma)$, dove γ è un punto intermedio tra γ_1 e γ_2. Poichè $|\gamma_1 - \gamma_2| \leqq \frac{\varepsilon}{H}$ e $|f'(\gamma)| < H$, tale oscillazione non supera ε. c. d. d.

β) La formola $f'(c) = \dfrac{f(a) - f(b)}{\varphi(a) - \varphi(b)} \varphi'(c)$ diventa (se $\varphi'(c) \neq 0$)

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Se si suppone senz'altro $\varphi'(x) \neq 0$ nei punti *interni* all'intervallo (a, b), allora non soltanto nel punto (incognito) c sarà $\varphi'(c) \neq 0$, ma sarà anche soddisfatta l'altra ipotesi iniziale $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Infatti, se fosse $\varphi(a) = \varphi(b)$, esisterebbe, per il teorema di Rolle, almeno un punto x_1 interno all'intervallo, ove si avrebbe $\varphi'(x_1) = 0$.

Se $f(a) = \varphi(a) = 0$, allora, posto $b = x$, $c = x_1$, se ne deduce:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)} \tag{1}$$

[x_1 appartenente all'intervallo (a, x)].

Cioè :

Se le funzioni continue e derivabili $f(x)$, $\varphi(x)$ *sono nulle per* $x = a$, *e nei punti interni all'intervallo* (a, x) *la* $\varphi'(x)$ *è differente da zero, allora il rapporto* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *è uguale al rapporto delle derivate prime in un punto* x_1 *interno all'intervallo* (a, x).

Al variare della x in un intorno α di a, la x_1 percorrerà un certo insieme γ di valori dello stesso intorno (cfr. Nota a pag. 200).

Se esiste il $\lim\limits_{x=a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, esisterà anche il $\lim\limits_{x_1=a} \frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)}$, e quindi per la (1) *esisterà anche il* $\lim\limits_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$; cioè il *limite del rapporto delle* $f(x)$, $\varphi(x)$ *per* $x = a$ *esisterà, e sarà uguale al limite del rapporto delle loro derivate prime* $f'(x)$, $\varphi'(x)$.

Se anche le derivate prime di f, φ sono nulle nel punto a, e se $\varphi'' \neq 0$ quando $x \neq a$, potremo, applicando di nuovo lo stesso teorema, scrivere l'uguaglianza

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{f''(x_2)}{\varphi''(x_2)}$$

dove x_2 è un punto intermedio tra a ed x_1 e quindi anche intermedio tra a ed x.

Così continuando troviamo infine che, *se esistono le derivate delle* f, φ *fino a quelle di ordine* $n+1$, *se le* f, φ *e le prime loro* n *derivate sono nulle per* $x = a$ (*mentre le* φ', φ'', ..., $\varphi^{(n)}$, $\varphi^{(n+1)}$ *sono differenti da zero per* $x \neq a$), *allora*

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{\varphi^{(n+1)}(\xi)},$$

dove ξ *è un punto intermedio tra* a *ed* x.

Se ne deduce una celebre formola dovuta pure a Lagrange conservando le ipotesi fatte per $f(x)$ e ponendo $\varphi(x) = (x-a)^{n+1}$ col che le ipotesi fatte per $\varphi(x)$ risultano soddisfatte. Poichè

$\varphi^{(n+1)}(x) = \underline{|n+1}$ si deduce il seguente teorema d'importanza fondamentale:

Se f (x) *possiede le prime* n + 1 *derivate, e se* f (x) *insieme alle prime* n *derivate è nulla nel punto* a, *allora*

$$f(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{\underline{|n+1}} f^{(n+1)}(\xi),$$

dove ξ *è un punto intermedio tra* a *ed* x.

Osservazione. Se ne deduce in tal caso

$$\frac{1}{\underline{|n+1}} f^{(n+1)}(\xi) = \frac{f(x)}{(x-a)^{n-1}}.$$

Poichè $\lim\limits_{x=a} \xi = a$ sarà, *se* $f^{(n+1)}(x)$ *è continua nel punto* a, *e se* $f(a) = f'(a) = \ldots f^{(n)}(a) = 0$:

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(a)}{\underline{|n+1}}.$$

Questa formola vale anche nella *ipotesi che esista la* (n + 1)$^{\text{esima}}$ *derivata di* f (x) *nel punto* a *e sia determinata e finita* (senza che sia necessario ammetterne la continuità). Infatti si trova, come sopra,

$$\frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(x_1)}{\underline{|n+1}(x_1-a)} \qquad (x_1 \text{ intermedio tra } a \text{ ed } x).$$

Poichè $f^{(n)}(a) = 0$, sarà, posto $x_1 - a = h$,

$$\frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{1}{\underline{|n+1}} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

Da cui, passando al limite per $h = 0$, si trae subito il teorema enunciato.

In particolare, poichè $\dfrac{1}{\underline{|n+1}}$ è positivo, e poichè $\dfrac{f(x)}{(x-a)^{n+1}}$ ha, per x abbastanza prossimo ad a, il segno del suo limite per $x = a$, se ne deduce che, per x prossimo ad a, la $\dfrac{f(x)}{(x-a)^{n+1}}$ *ha il segno di* $f^{(n+1)}(a)$, se questa derivata è determinata e finita e se $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0$.

Posto $x = a + h$, si vede che, per h abbastanza piccolo, nelle nostre ipotesi coincidono i segni di $\dfrac{f(a+h)}{h^{n+1}}$ e di $f^{(n+1)}(a)$, cioè coincidono i segni di $f(a+h)$ e di $h^{n+1} f^{(n+1)}(a)$.

Noi abbiamo dato in questo paragrafo un procedimento per calcolare il limite di un quoziente in qualche caso, in cui non sono applicabili i teoremi del § 35, pag. 115-116. Ad altri casi analoghi sono applicabili le seguenti osservazioni.

OSSERVAZIONI.

1° Si è dimostrato che se $\lim\limits_{x=a} f(x) = \lim\limits_{x=a} \varphi(x) = 0$, e se esiste il $\lim\limits_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)}$ esiste anche il $\lim\limits_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, ed è uguale al precedente (*). Un teorema analogo vale se $\lim\limits_{x=a} f(x) = \lim\limits_{x=a} \varphi(x) = \infty$. Lasciando ai trattati di calcolo la dimostrazione completa (piuttosto delicata) di tale teorema, noi la esporremo nell'ipotesi che $\lim\limits_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ esista, sia finito e diverso da zero. Poichè nelle nostre ipotesi è

$$\lim_{x=a} \frac{1}{\varphi(x)} = \lim_{x=a} \frac{1}{\varphi(x)} = 0, \text{ sarà } \lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=a} \frac{\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)} = \lim_{x=a} \frac{\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'} =$$

$$= \lim_{x=a} \frac{f'(x)}{f'(x)} \left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]^2 = \lim_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} \left\{ \lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right\}^2.$$

Moltiplicando primo e ultimo membro per $\left\{ \lim\limits_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} \right\}^2$ si ottiene appunto $\lim\limits_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x=a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

2° Questi teoremi valgono anche per $a = \infty$, cioè se i termini della frazione tendono per $x = \infty$ entrambi a 0, oppure ad ∞. Posto infatti $x = \frac{1}{z}$, si ha:

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{z=0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z=0} \frac{\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\right]'_z}{\left[\varphi\left(\frac{1}{z}\right)\right]'_z} = \lim_{z=0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \lim_{z=0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x=} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

3° Talvolta con questi teoremi si riesce a calcolare il limite di un prodotto che si presenta nella forma $0.\infty$, ossia il limite del prodotto di due fattori $f(x)$, $\varphi(x)$ di cui uno tende a zero, l'altro a ∞. Basterà scrivere il prodotto $f(x)\,\varphi(x)$ nella forma $\frac{f(x)}{\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)} = \frac{\varphi(x)}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)}$, e poi applicare a questi quozienti il metodo precedente.

4° Si deve talvolta trovare il limite di una potenza, che si presenta nella forma 1^{∞}, oppure 0^0, oppure $+\infty^0$, ecc., vale a dire di una potenza, la cui base tende ad 1, e l'esponente ad ∞, oppure di cui base ed esponente tendono entrambi a zero, ecc. In tal caso si cerca dapprima col metodo dell'esercizio 3° il limite L del logaritmo di una tale potenza. Il limite della potenza sarà e^L.

5° Si deve talvolta cercare il limite di una differenza $f(x) - \varphi(x)$, che si presenta nella forma $\infty - \infty$, perchè entrambi i termini tendono ad ∞. In tal caso si scrive $f(x) - \varphi(x)$ nella forma di un prodotto $f(x)\left[1 - \frac{\varphi(x)}{f(x)}\right] = \varphi(x)\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)} - 1\right]$, cercando poi di applicare i metodi precedenti.

(*) Il teor. reciproco non è generalmente vero. Infatti noi abbiamo dimostrato che $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}$ ove x_1 è un certo punto intermedio tra a ed x. Non è detto però che, al variare di x, la x_1 assuma *tutti* i valori di un intorno di a e che non ne salti qualcuno; cosicchè studiando i valori di $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ si studierebbero alcuni, ma non tutti i valori che il rapporto delle loro derivate assume in un intorno del punto a. E quindi nulla si può concludere per il limite di tale rapporto senza studi più minuti.

γ) *Interpolazione.*

Capita molte volte di dover trovare un numero $\varphi(x)$ approssimato del valore che $f(x)$ assume nei punti x di un intervallo (a, b), quando si conoscano i valori $f(a)$ ed $f(b)$ che la $f(x)$ assume nei punti a, b. Ciò capita in pratica specialmente per il calcolo delle funzioni logaritmiche e trigonometriche: così, p. es., se $f(x) = \log x$, se dalle tavole logaritmiche sono dati i valori di log 1000 e di log 1001, e si deve scrivere un valore approssimato del logaritmo di 1000,5.

La formola, p. es., che si usa, come è ben noto, è la seguente:

$$\varphi(x) = f(a) + \frac{x-a}{b-a}[f(b) - f(a)]$$

(dove, nel caso che si ricorra a tavole numeriche, la $f(b) - f(a)$ dicesi la differenza tavolare).

Quale errore si commette usando tale formola, cioè scrivendo $\varphi(x)$ al posto di $f(x)$?

Si noti che in virtù del teorema della media,

$$\varphi(x) = f(a) + \frac{x-a}{b-a}[f(b) - f(a)] = f(a) + (x-a) f'(c) =$$

$$= f(b) + \frac{x-b}{a-b}[f(a) - f(b)] = f(b) + (x-b) f'(c)$$

dove c è un punto intermedio tra a e b. Così pure in virtù del teorema della media $\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(\xi)$, cosicchè $f(x) = f(a) + (x-a) f'(\xi)$; e similmente

$$f(x) = f(b) + (x-b) f'(\eta)$$

dove ξ è un punto intermedio tra a ed x e quindi anche tra a e b, ed η è un altro punto dell'intervallo (a, b).

Quindi l'errore $|f(x) - \varphi(x)|$ commesso scrivendo $\varphi(x)$ al posto di $f(x)$ vale $|x-a|\,|f'(c) - f'(\xi)| = |x-b|\,|f'(c) - f'(\eta)|$. E, se $f(x)$ possiede derivata seconda, tale errore vale $|(x-a)(c-\xi) f''(\xi_1)| = |(x-b)(c-\eta) f''(\eta_1)|$ dove, secondo il teorema della media, ξ_1 è intermedio tra c e ξ, mentre η_1 è intermedio tra c ed η. Cosicchè ξ_1 ed η_1 sono punti di (a, b). Se dunque $|f''(x)|$ in (a, b) non supera la costante M, allora, poichè $|c - \xi| < |b - a|$ e $|(c - \eta)| < |b - a|$, tale errore non supererà $|(x-a)(b-a) M|$, nè $|(x-b)(b-a) M|$ e quindi neanche il più piccolo di questi due, che è certo non superiore a $\frac{1}{2}(b-a)^2 M$.

Il lettore applichi questo risultato alle usuali tavole logaritmiche.

Oss. Si noti che, sostituendo la $\varphi(x)$ alla $f(x)$, si è sostituito alla $f(x)$ un polinomio di primo grado che in due punti (nei punti $x = a$, $x = b$) assume lo stesso valore di $f(x)$. Si potrebbe generalizzare il metodo, sostituendo, p. es., ad $f(x)$ un polinomio di grado $n - 1$, che in n punti assumesse lo stesso valore che la $f(x)$. Per la determinazione di tale polinomio cfr. i §§ 14 pag. 49, 27 pag. 90.

δ) *Criterio di convergenza di Cauchy.*

Sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo $(1, +\infty)$, che ha la derivata $f'(x)$ sempre positiva; al crescere di x la $f'(x)$ diminuisca. Se a, b sono due valori di x, se $a < b$, allora $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ è uguale al valore di $f'(x)$ in un punto dell'intervallo (a, b); tale frazione è dunque *positiva* minore di $f'(a)$, maggiore di $f'(b)$. In particolare $f(b) - f(a)$ è positivo, $f(b) > f(a)$. Cosicchè $f(x)$ cresce quando cresce il valore dato ad x, e tende quindi a un limite per $x = +\infty$. Di più, ponendo $a = m, b = m + 1$, oppure $a = m - 1, b = m$, si trova:

$$f(m+1) - f(m) < f'(m) < f(m) - f(m-1).$$

Scrivendo queste disuguaglianze per $m = 2, 3, 4, \ldots\ldots, n$, e sommando si trova:

$$f(n+1) - f(2) < f'(2) + f'(3) + \ldots\ldots + f'(n) < f(n) - f(1).$$

Quindi la serie

$$f'(1) + f'(2) + f'(3) + \ldots\ldots$$

converge o *diverge* secondo che $\lim_{x=+\infty} f(x)$ è finito o infinito, perchè la somma dei suoi primi n termini è compresa tra

$$f(n+1) + [f'(1) - f(2)] \text{ e } f(n) + [f'(1) - f(1)],$$

e tende per $n = \infty$ a un limite finito soltanto quando altrettanto avviene per $f(n)$, $f(n+1)$.

Ponendo $f(x) = \log x$, oppure $f(x) = \log \log x$, oppure $f(x) = \log \log \log x$ si dimostra subito, p. es., che le serie

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{4 \log 4} + \ldots\ldots, \text{ ecc.}$$

sono divergenti. Nella seconda si è cominciato dal termine corrispondente ad $x = 2$ perchè per $x = 1$ la $f(x) = \log \log x$ non ha derivata finita.

ε) *Funzioni a derivata nulla.*

Ricordiamo il teorema:

Una funzione costante ha derivata identicamente nulla.

Dimostriamo il teorema reciproco, d'importanza fondamentale: *Una funzione* f (x), *la cui derivata è identicamente nulla, è costante.*

Infatti siano a e $b = a + h$ due punti qualsiasi dell'intervallo, ove la $f(x)$ è definita. Per il teorema della media di Lagrange, il rapporto

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

è uguale alla derivata $f'(x)$ in un punto intermedio, ed è quindi nullo, perchè $f'(x)$ è nulla dappertutto. Il suo numeratore è quindi nullo; cioè $f(a) = f(b)$. La funzione $f(x)$, riprendendo lo stesso valore in due punti qualsiasi a, b, è quindi una costante. c. d. d.

Questo teorema è geometricamente intuitivo. Dire che $f'(x)$ è *sempre* nullo è asserire che le tangenti alla curva $y = f(x)$ sono *tutte* parallele all'asse delle x. Dire che $f(x)$ è costante equivale ad asserire che la curva $y = f(x)$ è una retta o un segmento, i cui punti distano ugualmente dall'asse delle x, ossia che tale curva è un segmento parallelo all'asse delle x. Il teorema geometricamente significa dunque:

Se le tangenti della curva y = f (x) *sono tutte parallele all'asse delle* x, *tale curva è una retta o un segmento parallelo all'asse delle* x.

Meccanicamente questo teorema è pure evidente, e ci dice che *un punto il quale si muove su una retta* (ed ha all'istante

x una distanza $y = f(x)$ da un punto fisso M della rete stessa) *ed ha la velocità* $f'(x)$ *sempre nulla, sta fermo* (perchè resta ad una distanza y costante dal punto M). Ciò non è una osservazione banale; essa è piuttosto un'osservazione che conferma l'accordo tra l'idea *intuitiva* di velocità e la definizione matematica da noi datane.

Se due funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$ hanno in ogni punto di un certo intervallo ugual derivata finita, esse differiscono in esso di una costante. La loro differenza ha infatti per derivata la differenza delle derivate che è nulla, ed è quindi costante (Cfr. § 74, γ).

§ 64. — Radici multiple di un'equazione.

Sia a una radice dell'equazione algebrica, o non algebrica $f(x) = 0$. Nei casi più comuni esiste una costante positiva h tale che $f(x)$ sia infinitesimo di ordine h rispetto ad $x - a$, ossia che, posto $\frac{f(x)}{(x-a)^h} = \varphi(x)$, la $\varphi(x)$ abbia per $x = a$ un limite, che indicheremo con $\varphi(a)$, finito e diverso da zero. In tal caso diremo che $x = a$ è una radice di ordine h per l'equazione $f(x) = 0$.

Se $h = 1$, la radice si dirà *semplice*; se $h > 1$ è un intero positivo, la radice a si dirà *multipla*.

Se $h > 1$, *se* $f(x)$ *e* $\varphi(x)$ *sono derivabili anche nel punto* $x = a$ (*), dalla $f(x) = (x-a)^h \varphi(x)$ si deduce derivando che $f'(x) = (x-a)^{h-1}\theta(x)$ dove $\theta(x) = h\varphi(x) + (x-a)\varphi'(x)$ ha per $x = a$ un limite finito e diverso da zero. Quindi:

Nelle nostre ipotesi per la $f(x)$, *una radice di ordine* $h > 1$ *per la equazione* $f(x) = 0$ *è radice di ordine* $h - 1$ *per l'equazione* $f'(x) = 0$.

Viceversa, se a *è radice della* $f(x) = 0$, *ed è anche radice di ordine* $h - 1 > 0$ *per la* $f'(x)$, sarà:

$$\frac{f(x)}{(x-a)^h} = \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^h} = \frac{f'(x_1)}{h(x_1 - a)^{h-1}}$$

(dove x_1 è un punto intermedio tra a ed x).

Per ipotesi esiste il limite per $x_1 = a$ del terzo membro (finito e diverso da zero). Altrettanto avverrà del primo; cioè $f(x) = 0$ *avrà* a *come radice di ordine* h.

(*) La $\varphi(x)$ vale per definizione $\frac{f(x)}{(x-a)^h}$ per $x \neq a$, e vale $\lim_{x=a} \frac{f(x)}{(x-a)^h}$ nel punto $x = a$. L'ipotesi del testo è soddisfatta se p. es. $f(x)$ è razionale, oppure è una serie di potenze.

In particolare:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè a *sia radice della* f(x) = 0 *di ordine maggiore di* 1 *è che* a *sia radice della* f(x) = 0, *e sia radice* (di ordine positivo) *della* f′(x) = 0.

Questo teorema ha particolare importanza nel caso dei polinomi $P(x)$. Se $P(x) = \alpha_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$, uno dei numeri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, p. es. α_1, sarà radice della $P(x) = 0$ di ordine h, soltanto se h *è un intero positivo*, e se tra i numeri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ve ne sono h uguali ad α_1. Il fattore corrispondente $x - \alpha_1$ compare $h - 1$ volte in $P'(x)$, $h - 2$ volte in $P''(x), \ldots$, una volta in $P^{(h-1)}(x)$, nessuna volta in $P^{(h)}(x)$. È facile dedurne:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè α_1 sia radice di ordine h per un'equazione algebrica $P(x) = 0$ è che h sia un intero, e che α_1 sia radice delle $P(x) = 0$, $P'(x) = 0, \ldots, P^{(h-1)}(x) = 0$ e non sia radice della $P^{(h)}(x) = 0$.

Questo ultimo teorema vale anche se α_1 è un numero complesso ed anche se i coefficienti di $P(x)$ sono complessi.

Se ne deduce anche:

Il massimo comun divisore di P(x) *e* P′(x) *contiene tutti e soli i fattori multipli del polinomio* P(x); *e precisamente contiene* h — 1 *volte un fattore multiplo di ordine* h. *Se* Q(x) *è il quoziente di* P(x) *per tale massimo comun divisore, l'equazione* Q(x) = 0 *ha per radici semplici tutte e sole le radici di* P(x) = 0.

Si può, del resto, dedurre da quanto precede un metodo più completo per approfondire l'esame di una equazione algebrica dotata di radici multiple. E noi, per semplicità, lo esporremo in un caso particolare.

Consideriamo un'equazione dotata di radici multiple, p. es., la:

$$0 = f(z) = (z - a)(z - b)(z - c)^2 (z - d)^2 (z - e)^3 (z - f)^4$$

Il massimo comune divisore $\varphi(z)$ tra la $f(z)$ e la sua prima derivata $f'(z)$ è:

$$\varphi(z) = (z - c)(z - d)(z - e)^2 (z - f)^3.$$

Del pari il massimo comune divisore tra $\varphi(z)$ e $\varphi'(z)$ è:

$$\varphi_1(z) = (z - e)(z - f)^2.$$

Così il massimo comune divisore tra $\varphi_1(z)$ e $\varphi'_1(z)$ è:

$$\varphi_2(z) = (z - f);$$

infine il M. C. D. tra $\varphi_2(z)$ e $\varphi'_2(z)$ è:

$$\varphi_3(z) = 1.$$

Ciò posto, si formino i quozienti:

$$\psi(z) = \frac{f(z)}{\varphi(z)} = (z - a)(z - b)(z - c)(z - d)(z - e)(z - f);$$

$$\psi_1(z) = \frac{\varphi(z)}{\varphi_1(z)} = (z - c)(z - d)(z - e)(z - f);$$

$$\psi_2(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} = (z - e)(z - f);$$

$$\psi_3(z) = \frac{\varphi_2(z)}{\varphi_3(z)} = z - f.$$

Indi si formino i quozienti:

$$X(z)=\frac{\psi(z)}{\psi_1(z)}=(z-a)(z-b); \qquad X_1(z)=\frac{\psi_1(z)}{\psi_2(z)}=(z-c)(z-d);$$

$$X_2(z)=\frac{\psi_2(z)}{\psi_3(z)}=z-e; \qquad X_3(z)=\frac{\psi_3(z)}{1}=z-f.$$

Uguagliando a zero questi quattro quozienti si hanno quattro equazioni: la prima ha per radici le radici semplici della proposta $f(z)=0$, la seconda ha per radici le radici doppie, la terza ha per radici le triple e la quarta ha per radici le radici quadruple di $f(z)$, ma tutte come radici semplici.

Il metodo qui applicato vale in generale; e, generalmente, si ottiene il risultato seguente.

Sia data un'equazione intera ad un'incognita:

$$f(z)=a_0 z^n+a_1 z^{n-1}+\ldots..+a_{n-1}z+a_n=0.$$

Della $f(z)$ e della sua prima derivata $f'(z)$ si calcoli il massimo comune divisore; indi di questo e della sua prima derivata si calcoli M. C. D. e così si prosegua fino ad ottenere una costante. Ciò fatto si divida $f(z)$ per il primo massimo comune divisore trovato, indi si divida questo primo M. C. D. per il secondo massimo comune divisore e così via fino a dividere il penultimo M. C. D. trovato per l'ultimo. Finalmente si divida il primo quoziente per il secondo, il secondo per il terzo e così via fino a dividere l'ultimo per l'unità. I quozienti ottenuti uguagliati a zero avranno per radici le radici semplici, doppie, ecc. dell'equazione data, tutte come radici semplici.

Esempio.

Consideriamo l'equazione:

$$f(z)=z^6-z^5-7z^4+9z^3+10z^2-20z+8=0.$$

Cercando il massimo comune divisore tra $f(z)$ ed $f'(z)=6z^5-5z^4-28z^3+$ $+27z^2+20z-20$, si trova:

$$\varphi(z)=z^3-3z+2.$$

Ora $\varphi'(z)=3z^2-2$, il M. C. D. tra $\varphi'(z)$ e $\varphi(z)$ è:

$$\varphi_1(z)=z-1$$

e il M. C. D. tra $\varphi_1(z)$ e $\varphi'_1(z)$ è:

$$\varphi_2(z)=1.$$

Ora, dividendo ciascuna delle funzioni $f(z)$, $\varphi(z)$, $\varphi_1(z)$ per la seguente, si hanno le funzioni:

$$\psi(z)=\frac{f(z)}{\varphi(z)}=z^3-z^2-4z+4; \qquad \psi_1(z)=\frac{\varphi(z)}{\varphi_1(z)}=z^2+z-2;$$

$$\psi_2(z)=\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}=z-1.$$

Infine eseguendo le divisioni $\psi(z):\psi_1(z)$; $\psi_1(z):\psi_2(z)$; $\psi_2(z):1$ si ottengono rispettivamente i quozienti:

$$z-2, \qquad z+2, \qquad z-1,$$

i quali, posti uguali a zero, dànno le equazioni:

$$z-2=0, \qquad z+2=0, \qquad z-1=0,$$

che hanno per radici rispettivamente le radici semplici, doppie, triple della proposta (ma tutte come semplici). Dunque l'equazione proposta ha una radice semplice 2, una radice doppia -2, una radice tripla 1.

Osservazione. — L'equazione $f(z)=0$ avrà radici tutte semplici, soltanto se il primo massimo comun divisore (quello tra $f(z)$ e $f'(z)$) è una costante: questa osservazione dà, come già dicemmo, il più semplice modo per riconoscere se una equazione ha radici multiple, senza ricorrere al discriminante.

Esercizi.

1º Riconoscere coi metodi precedenti se e quando avviene che una delle seguenti equazioni ha una radice doppia, o tripla, o ecc.

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$
$$x^4 + p x^2 + q x + r = 0$$
$$\cos x - p = 0$$
$$e^x - p = 0$$
$$\log x - p = 0$$

dove le a_i, p, q, r sono costanti.

2º Risolvere le seguenti equazioni, tutte dotate di radici multiple.

$$x^7 + 3x^6 + 5x^5 + 7x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 3x + 1 = 0$$

(radici $\pm i$ doppie e -1 tripla);

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = 0$$

(radici 2 e -1 doppie).

§ 65. — Derivazione per serie.

TEOR. *Se la serie*

$$(1) \qquad u_1(x) + u_2(x) + \ldots\ldots$$

è convergente nell'intervallo $a \leq x \leq b$, *se esiste la derivata di ogni suo termine, se la serie delle derivate*

$$(2) \qquad u'_1(x) + u'_2(x) + u'_3(x) + \ldots\ldots$$

è totalmente convergente in (a, b), *allora* (2) *rappresenta proprio la derivata di* (1). Cioè *la derivata di* (1) *si può ottenere derivando termine a termine.*

Sia L_n il limite superiore dei valori di $|u_n(x)|$. Per ipotesi la serie $L_1 + L_2 + L_3 + \ldots$ è convergente. Consideriamo i valori assoluti dei rapporti incrementali

$$(3) \qquad \left| \frac{u_n(x+h) - u_n(x)}{h} \right|,$$

quando x ed $x + h$ variano nell'intervallo (a, b). Per il teorema della media, la quantità (3) vale $|u'_n(x + \theta h)| \leq L_n$. Quindi (3) non può superare L_n. E quindi la serie

$$(4) \qquad \frac{u_1(x+h) - u_1(x)}{h} + \frac{u_2(x+h) - u_2(x)}{h} + \frac{u_3(x+h) - u_3(x)}{h} + \ldots\ldots$$

è *totalmente* convergente. Il suo limite per $h = 0$ è dunque uguale alla serie ottenuta passando al limite termine a termine. Perciò il limite di (4) per $h = 0$ vale

$$(2) \qquad u'_1(x) + u'_2(x) + u'_3(x) + \ldots\ldots$$

Ora, se $u(x)$ è la somma di (1), la (4) vale $\dfrac{u(x+h) - u(x)}{h}$.

Dunque la serie (2) è il $\lim\limits_{h=0} \dfrac{u(x+h) - u(x)}{h}$ cioè vale $u'(x)$.

CAPITOLO X.

SERIE DI POTENZE

§ 66. — Cerchio di convergenza.

Diciamo *serie di potenze* una serie del tipo

$$(1) \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots\ldots$$

dove le a_n sono costanti, x si considera variabile.

Non escludiamo che le a, x possano anche essere numeri complessi. Tali serie sono la più naturale generalizzazione dei polinomi.

TEOR. *Se* (1) *converge per* $x = \alpha \neq 0$, *e se* β *è un numero positivo minore di* $|\alpha|$, *allora la serie* (1) *converge totalmente nel campo definito dalla*:

$$|x| \leq \beta.$$

Se (1) *non converge per* $x = A$, *essa non può convergere per nessun valore di* x, *di modulo superiore ad* A.

DIM. Se (1) converge per $x = \alpha$, allora (§ 42, ε, pag. 142)

$$\lim_{n=\infty} |a_n \alpha^n| = 0.$$

Si potrà trovare un numero positivo k maggiore di tutte le $|a_n \alpha^n|$ (*). Ora per $|x| \leq \beta$ si ha

$$|a_n x^n| = \left| a_n \alpha^n \frac{x^n}{\alpha^n} \right| = |a_n \alpha^n| \left| \frac{x^n}{\alpha^n} \right| < k \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|^n.$$

Poichè $\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < 1$, i termini di (1) hanno nel campo $|x| \leq \beta$ dei valori, il cui limite superiore non può superare rispettivamente k, $k \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|$, $k \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|^2$, ... ; le quali costanti non sono che i

(*) Infatti, preso un numero $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si troverà un m tale che per $n > m$ sia $|a_n \alpha^n| < \varepsilon$. Sarà soddisfatta la condizione del testo, se si assume come numero k un numero maggiore della più grande tra le seguenti quantità:

$$|a_0|, |a_1 \alpha|, |a_2 \alpha^2|, \ldots\ldots, |a_m \alpha^m|, \varepsilon.$$

termini di una progressione geometrica *convergente*. Quindi è dimostrata la prima parte del teorema.

E la seconda parte se ne deduce immediatamente. Se infatti (1) convergesse per un valore in modulo più grande di A, allora (1) sarebbe *assolutamente* convergente per $x = A$ (secondo quanto abbiamo ora dimostrato). Ciò che è contro l'ipotesi.

Sia R il limite superiore dei moduli di quei valori di x per cui la serie (1) converge. Sarà $R = 0$ soltanto se (1) converge solo per il valore $x = 0$. Sarà $R = \infty$ se esistono valori della x di modulo grande a piacere, per cui la (1) converge.

Supponiamo $R \neq 0, \infty$.

Sia k un qualsiasi numero positivo minore di R. Esisterà un valore x_0 di x tale che $k < |x_0|$, che $|x_0| < R$, e che per $x = x_0$ la (1) sia convergente. Per il nostro teorema la serie sarà totalmente convergente nel campo definito dalla $|x| \leqq k$.

In modo analogo si prova che per un valore x_1 della x tale che $|x_1| > R$ la serie (1) *non converge.*

Osserviamo che il luogo dei punti x per cui $|x| \leqq k$ è un cerchio che ha per centro l'origine e per raggio k.

Riassumendo, concludiamo:

Per ogni serie (1) *esiste un numero positivo* R *tale che, se* x *varia dentro un qualsiasi cerchio, che ha per centro l'origine e per raggio un numero* k *minore di* R, *ivi la serie è totalmente convergente*

Invece la (1) *non può convergere per i valori di* x *tali che il punto immagine sia esterno al cerchio che ha per centro l'origine e raggio* R.

Questo cerchio (che ha per centro l'origine e per raggio R) si dirà il *cerchio di convergenza* di (1).

Nei punti interni la (1) *converge, nei punti esterni non converge.*

Naturalmente, se $R = 0$, non si può parlare di cerchi interni al cerchio di convergenza (che è ridotto al solo centro). E, se $R = \infty$, non si può parlare di punti esterni al cerchio di convergenza. Salvo questa limitazione, il precedente teorema è vero in ogni caso.

Nulla si può dire in generale per il comportamento di (1) *sulla periferia del cerchio di convergenza.*

Poichè $\sum a_n x^n$ converge e quindi ha uno e un solo valore per ogni numero x reale o complesso, interno al cerchio di convergenza, noi potremo dire e diremo che, dentro tale cerchio, tale serie è *funzione della variabile* x *reale o complessa* (*).

Poichè le nostre serie sono la più naturale estensione dei polinomi, la precedente definizione è la più naturale generalizzazione delle definizioni date al § 50, pag. 168.

§ 67. — **Derivate di una serie di potenze.**

Consideriamo la serie

(2) $a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + \ldots\ldots + n\,a_n\,x^{n-1} + \ldots\ldots$,

che si deduce derivando (1) termine a termine. Io dico che anche la (2) *converge totalmente in ogni regione tutta interna al cerchio di convergenza della* (1). Infatti sia γ il massimo valore della $|x|$ in tale regione. Sia α un numero per cui $|\alpha| > \gamma$ ed $|\alpha| < R$. La (1) convergerà per $x = \alpha$. Esisterà quindi, come dicemmo, una costante k tale che $k \geqq |a_n\,\alpha^n|$ per tutti i valori di n.

Quindi, quando x si muove in guisa tale che $|x| \leqq \gamma$:

$$|na_n x^{n-1}| \leqq |na_n \gamma^{n-1}| = \left|na_n \alpha^n \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{n-1}\right| \leqq \left|\frac{k}{\alpha}\right| n \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|^{n-1} =$$

$$= \left|\frac{k}{\alpha}\right| nq^{n-1}, \text{ dove è posto } q = \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right| < 1.$$

La serie

(3) $$\sum_n \left|\frac{k}{\alpha}\right| nq^{n-1} = \left|\frac{k}{\alpha}\right| + 2\left|\frac{k}{\alpha}\right| q + 3\left|\frac{k}{\alpha}\right| q^2 + 4\left|\frac{k}{\alpha}\right| q^3 + \ldots\ldots$$

converge, perchè il rapporto

$$\frac{nq^{n-1}\left|\frac{k}{\alpha}\right|}{(n-1)\,q^{n-2}\left|\frac{k}{\alpha}\right|} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) q$$

di un termine al precedente tende per $n = \infty$ a $q < 1$.

(*) Per dare almeno un cenno del perchè si considerino come funzioni di una variabile complessa x soltanto i polinomi e le serie di potenze, ricorderò l'enunciato di un celebre e meraviglioso teorema di Cauchy:

Se y *è un numero (reale o complesso) che ha un valore determinato per ogni valore reale o complesso di una variabile* x, *quando il punto immagine di* x *è interno ad una regione* R, *se cioè la* y *è in* R *funzione della* x, *e se esiste ed è continua la sua derivata prima* y', *allora, se* α *è un qualsiasi punto di* R, *la* y *è sviluppabile in serie di potenze di* x — α. *E tale sviluppabilità vale in tutti i punti interni al massimo cerchio che ha per centro il punto* α *e non contiene punti esterni ad* R.

Il lettore, che si diletta di questioni teoriche, confronti questo semplice teorema coi teoremi ben più complicati che troveremo più avanti per la sviluppabilità in serie di potenze di una funzione di variabile *reale* x.

Dunque, poichè, per quanto si è dimostrato, i termini di (2) non superano nelle nostre ipotesi ($|x| \leqq \gamma$) i corrispondenti di (3), la (2) convergerà *totalmente.*

In virtù del teorema dato al § 65 di derivazione per serie se ne deduce quindi (almeno se le a_i e la x sono reali) che:

La derivata di una serie (1) *di potenze nei punti interni al cerchio di convergenza è uguale alla serie ottenuta derivando* (1) *termine a termine.*

E questo teorema vale anche *se i coefficienti della serie sono complessi e se consideriamo valori complessi della* x (corrispondenti a punti interni al cerchio di convergenza) (cfr. § 50, β, pag. 168).

Infatti un rapporto incrementale di un termine $a_n x^n$ della (1) vale, anche se x ed a_n sono numeri complessi:

$$a_n \frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h)-x} = a_n \{ (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2} x + \ldots + (x+h) x^{n-2} + x^{n-1} \}.$$

Il suo modulo non supera in nessun caso pertanto $|n a_n X^{n-1}|$, se X è il maggiore dei due moduli $|x|$ ed $|x+h|$. Poichè, anche per a_n ed x complessi, la $n a_n x^{n-1}$ è la derivata di $a_n x^n$ (§ 50), si trova che il modulo del rapporto incrementale, anche in questo caso generale, non può superare il massimo modulo della derivata prima. Possiamo dunque *per le nostre serie di potenze* ripetere nel caso più generale le considerazioni svolte al § 65 per le funzioni reali di variabile reale.

Applicando il teorema or ora citato alla serie (2), e così continuando, si prova facilmente:

Tutte le derivate della funzione definita da una serie (1) *di potenze esistono entro il cerchio di convergenza; e si ottengono semplicemente derivando termine a termine.*

§ 68. — **Formole di Mac-Laurin e di Taylor.**

Se dunque poniamo entro il cerchio di convergenza

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots..$$

sarà

$$f'(x) = a_1 + 2 a_2 x + \ldots..$$

$$f''(x) = \underline{|2} \, a_2 + 3 \, . \, 2 \, a_3 x + \ldots..$$

$$f'''(x) = \underline{|3} \, a_3 + 4 \, . \, 3 \, . \, 2 \, a_4 x + \ldots..$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x) = \underline{|n} \, a_n + (n+1) \, n \, (n-1) \ldots.. 3 \, . \, 2 \, a_{n+1} x + \ldots..$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ponendo $x = 0$, ne deduciamo

$$f(0) = a_0;\quad f'(0) = a_1;\quad f''(0) = \lfloor 2\, a_2;\quad f'''(0) = \lfloor 3\, a_3;\ \ldots\ldots\ f^{(n)}(0) = \lfloor n\, a_n;\ \text{ecc.}$$

ossia

$$a_0 = f(0);\quad a_1 = \frac{f'(0)}{\lfloor 1};\quad a_2 = \frac{f''(0)}{\lfloor 2};\ \ldots\ldots;\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{\lfloor n};\ \text{ecc.}$$

Quindi:

$$(4)\quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}\,x + \frac{f''(0)}{\lfloor 2}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{\lfloor 3}\,x^3 + \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{\lfloor n}\,x^n + \ldots\ldots$$

Cioè:

Se f (x) *è una funzione definita da una serie di potenze della* x, *tale serie di potenze è la serie* (4).

Questo celebre teorema si chiama teorema di Mac-Laurin. Esso costituisce, tra l'altro, il punto di partenza del calcolo infinitesimale per le funzioni di variabile complessa. (Cfr. il teorema citato in nota al § 66, pag. 209).

Una prima conseguenza molto importante è che, se una funzione $f(x)$ è sviluppabile in serie di potenze, questa serie è certo il secondo membro di (4); cioè due serie *differenti* di potenze della x non possono avere la stessa somma $f(x)$.

Uno studio affatto analogo si può compiere per le funzioni $f(x)$ definite da una serie di potenze della variabile $x - \alpha$ ($\alpha =$ cost.), cioè da una serie

$$(5)\quad f(x) = a_0 + a_1(x - \alpha) + a_2(x - \alpha)^2 + \ldots\ldots$$

Si troverebbe anche qui un *cerchio di convergenza, il quale però ha per centro il punto* x $= \alpha$, *anzichè il punto* x $= 0$. Si troverebbe pure che *la* (5) *è derivabile termine a termine, cosicchè la* (5) *coincide con*

$$(6)\quad f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1}(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{\lfloor 2}(x-\alpha)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{\lfloor n}(x-\alpha)^n + \ldots$$

La (6) *ha il nome di serie di Taylor.* Del resto la (6) si deduce dalla (4), ponendo $x - \alpha$ al posto della x.

Come caso estremamente particolare delle serie di potenze noi abbiamo i polinomi $P_n(x)$ di grado n. Ad essi è dunque applicabile il nostro risultato: essi sono, cioè, sviluppabili in serie (6): anzi in tal serie saranno naturalmente nulli i coefficienti dei termini di grado superiore ad n. Ciò che si può verificare, osservando che un polinomio di grado n ha nulle tutte le derivate di ordine superiore ad n. Per ogni polinomio $P_n(x)$ di grado n vale dunque (posto $P = P_n$) la:

$$(7)\quad P_n(x) = P(\alpha) + \frac{P'(\alpha)}{1}(x-\alpha) + \frac{P''(\alpha)}{\lfloor 2}(x-\alpha)^2 + \ldots\ldots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{\lfloor n}(x-\alpha)^n.$$

Il lettore verifichi direttamente che (7) è una identità, sviluppando i singoli termini del secondo membro con la formola del binomio.

§ 69. — Sviluppabilità di una funzione in serie di potenze.

Ci proponiamo ora un problema intimamente connesso al precedente risultato, cioè il problema seguente:

Se f (x) *è una funzione reale prefissata della variabile reale* x, data in un intorno del punto $x = \alpha$, *come si può riconoscere se essa è sviluppabile in serie* (di Taylor) *di potenze della variabile* x — α?

Se tale sviluppo è lecito, allora in un intorno di α dovrebbe, come sappiamo, valere la:

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{x-\alpha}{1}f'(\alpha) + \ldots\ldots + \frac{(x-\alpha)^n}{\lfloor n}f^{(n)}(\alpha) + \ldots\ldots$$

che equivale (per definizione di serie) alla

$$\lim_{n=\infty}\left[f(x) - \left\{f(\alpha) + \frac{x-\alpha}{1}f'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{\lfloor 2}f''(\alpha) + \ldots\ldots + \frac{(x-\alpha)^n}{\lfloor n}f^{(n)}(\alpha)\right\}\right] = 0.$$

La quantità tra [ ] si chiama *resto*, e si indica con R_n. È dunque

$$(8)\quad R_n(x) = f(x) - P_n(x) \text{ dove } P_n(x) = f(\alpha) + \frac{x-\alpha}{1}f'(\alpha) + \ldots\ldots + \frac{(x-\alpha)^n}{\lfloor n}f^{(n)}(\alpha).$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè f (x) *sia sviluppabile in un certo intervallo in serie di potenze è che la* f (x) *possegga ivi tutte le derivate e che il limite del resto* $\mathrm{R_n}$ *per* $\mathrm{n} = \infty$ sia nullo (*).

Esistono formole notevoli, che permettono di scrivere R_n sotto forma più semplice. La più importante per il teorico è la *formola di Cauchy*. La più semplice, che basta per noi, *è dovuta a Lagrange*. Di essa ora ci occuperemo, facendo la *sola* ipotesi che $f(x)$ in un intorno di α possegga le prime $n + 1$ derivate.

Se noi confrontiamo la (7) valida per ogni polinomio $P_n(x)$ col polinomio $P_n(x)$ definito in (8), troviamo che per questo polinomio valgono le:

$$P_n(\alpha) = f(\alpha);\ P'_n(\alpha) = f'(\alpha);\ P''_n(\alpha) = f''(\alpha);\ \ldots;\ P_n^{(n)}(\alpha) = f^{(n)}(\alpha);$$

cosicchè:

$$R_n(\alpha) = 0;\ R'_n(\alpha) = 0;\ R''_n(\alpha) = 0;\ \ldots\ldots;\ R_n^{(n)}(\alpha) = 0;$$

d'altra parte la $(n + 1)^{esima}$ derivata di $P_n(x)$ è dappertutto nulla, perchè $P_n(x)$ è di grado n. E quindi si ha:

$$R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

Applicando alla $R_n(x)$ il teorema di Lagrange del § 63, pag. 199, troviamo così:

$$(8^{\text{bis}})\qquad R_n(x) = \frac{(x - \alpha)^{n+1}}{\underline{|n + 1}}\, R_n^{(n+1)}(\xi) = \frac{(x - \alpha)^{n+1}}{\underline{|n + 1}}\, f^{(n+1)}(\xi),$$

dove ξ è un punto intermedio tra α ed x.

Notiamo le seguenti due forme, che si possono dare alle (8), (8^{bis}), ponendo $\alpha = 0$, oppure $x = \alpha + h$:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{\underline{|2}} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{\underline{|n}} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{\underline{|n+1}} f^{(n+1)}(x\theta)$$

$$f(\alpha + h) = f(\alpha) + hf'(\alpha) + \frac{h^2}{\underline{|2}} f''(\alpha) + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{h^n}{\underline{|n}} f^{(n)}(\alpha) + \frac{h^{n+1}}{\underline{|n+1}} f^{(n+1)}(\alpha + \theta h).$$

Formole tutte che valgono, purchè nell'intervallo considerato esistano e siano finite le prime n + 1 *derivate di* f (x).

(*) Il teorema di Cauchy, citato in nota al § 66, ci dice che queste condizioni sarebbero certamente soddisfatte in un certo cerchio, *se* f (x) *fosse* funzione della variabile *complessa* x con derivata *prima* finita e continua!!

Ponendo $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ si trova

$$(9)\quad \begin{cases} f(\alpha+h) = f(\alpha)+hf'(\alpha+\theta h) = f(\alpha)+hf'(\alpha)+\dfrac{h^2}{|\underline{2}}f''(\alpha+\theta h) \\ \qquad = f(\alpha)+hf'(\alpha)+\dfrac{h^2}{|\underline{2}}f''(\alpha)+\dfrac{h^3}{|\underline{3}}f'''(\alpha+\theta h) = \ldots\ldots \end{cases}$$

La prima formola coincide col teorema della media di Lagrange. Si avverta che i numeri θ, che compaiono nel 2°, nel 3°, nel 4°..... membro, sono generalmente distinti l'uno dall'altro (pure essendo tutti compresi tra 0 ed 1).

Se $f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots\ldots = f^{(n)}(\alpha) = 0$, tale formola si riduce al citato teorema di Lagrange del § 63.

Esempi.

1° Per ottenere la forma, sotto cui Cauchy scrisse il resto R, poniamo in (8) b al posto di x ed x al posto di α. Otterremo:

$$f(b) = f(x) + \frac{b-x}{1}f'(x) + \frac{(b-x)^2}{|\underline{2}}f'(x) + \ldots\ldots \frac{(b-x)^n}{|\underline{n}}f^{(n)}(x) + R_n$$

donde:

$$R_n = f(b) - [f(x) + \frac{b-x}{1}f'(x) + \ldots\ldots + \frac{(b-x)^n}{|\underline{n}}f^{(n)}(x)].$$

Consideriamo R_n come funzione $R_n(x)$ della x. Si ha:

$$R_n(b) = 0,\ R_n(x) = R_n(x) - R_n(b) = (x-b)R'_n(y),$$

dove y è (per il teorema della media) un punto interno all'intervallo (b, x). Quindi, poichè (come dimostra un facile calcolo)

$$R'_n(x) = -\frac{(b-x)^n}{|\underline{n}}f^{(n+1)}(x),$$

si ha:

$$R_n(x) = -(x-b)\frac{(b-y)^n}{|\underline{n}}f^{(n+1)}(y).$$

Questa formola è dovuta a Cauchy. Se poniamo $b = x+h$, e quindi $y = x+\theta h$ $(0 < \theta < 1)$ si otterrà:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{|\underline{2}}f''(x) + \ldots\ldots + \frac{h_n}{|\underline{n}}f^{(n)}(x) + R_n,$$

ove

$$R_n = h^{n+1}\frac{(1-\theta)^n}{|\underline{n}}f^{(n+1)}(x+\theta h)$$

dove naturalmente figura un θ affatto distinto da quello che compare nella formola di Lagrange.

Teorema 2° *A* (di Bernstein). ***Condizione necessaria affinchè*** f(x) ***sia sviluppabile in serie di Taylor nell'intervallo*** $0 \leqq x < R$ ***è che*** f(x) ***sia in tale intervallo differenza di due funzioni*** $\varphi_1(x)$ ***e*** $\varphi_2(x)$, ***che ivi non sono negative insieme a tutte le loro derivate.***

Infatti, se $f(x) = \sum_n a_n x^n$, si può indicare con $\varphi_1(x)$ [*con* $-\varphi_2(x)$] rispettivamente la somma di quei termini della nostra serie, che hanno coefficiente positivo [*negativo*]; oppure porre

$$\varphi_1(x) = \sum |a_n| x^n, \qquad \varphi_2(x) = \sum (|a_n| - a_n) x^n.$$

TEOREMA 2° *B* (di Bernstein). *La precedente condizione necessaria è anche sufficiente.*

Sia infatti $\varphi(x)$ una funzione positiva in $0 \leqq x < R$ con tutte le sue derivate. Se $0 < h < R$, nell'intervallo $h \leqq x < R$ si avrà

$$\varphi^{(n)}(x) \geqq \varphi^{(n)}(h) \qquad (\text{perchè } \varphi^{(n+1)} \geqq 0),$$

donde, integrando

$$\varphi^{(n-1)}(x) \geqq \varphi^{(n-1)}(x) - \varphi^{(n-1)}(h) \geqq (x-h)\,\varphi^{(n)}(h)$$

$$\varphi^{(n-2)}(x) \geqq \varphi^{(n-2)}(x) - \varphi^{(n-2)}(h) \geqq \frac{(x-h)^2}{\underline{|2}}\,\varphi^{(n)}(h)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi''(x) \qquad \geqq \qquad \geqq \frac{(x-h)^{n-2}}{\underline{|n-2}}\,\varphi^{(n)}(h).$$

Cioè, posto $\frac{h}{x} = \theta$, dove θ è compreso tra 0 ed 1, sarà:

$$\varphi^{(n)}(\theta x) \leqq \frac{\varphi''(x)}{(1-\theta)^{n-2}\,x^{n-2}}\,\underline{|n-2}.$$

Posto:

$$\Phi_n(\theta, x) = x^n \frac{(1-\theta)^{n-1}}{\underline{|n-1}}\,\varphi^{(n)}(\theta x),$$

si ha (*Cauchy*) che (per un valore, generalmente ignoto, di θ) la $\Phi_n(\theta, x)$ rappresenta il resto della serie di Taylor relativa alla funzione $\varphi(x)$. Ora, per il nostro risultato,

$$\Phi_n(\theta, x) \leqq x^2\,\varphi''(x)\,\frac{1-\theta}{n-1}$$

e tende per $n = \infty$ a zero (ciò che basta ad assicurare la sviluppabilità di $\varphi(x)$ in serie di Taylor). Essendo $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ sviluppabili in serie di Taylor, altrettanto avverrà di

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

Anzi il resto della corrispondente serie di Taylor, scritto nella forma di Cauchy, sarà uguale alla differenza tra le $\Phi_n(\theta, x)$ corrispondenti a $\varphi_1(x)$ ed a $\varphi_2(x)$.

Tale *resto di Cauchy* sarà dunque minore di

$$x^2 \frac{1-}{n-1}\,[\varphi_1''(x) + \varphi_2''(x)] \leqq$$

$$\leqq \frac{r^2}{n-1}(1-\theta)[\varphi_1''(r) + \varphi_2''(r)] \qquad (\text{se } x \leqq r < R),$$

e perciò, prendendo n abbastanza grande, si può rendere minore di un numero ε piccolo a piacere. Basta prendere $n - 1 \geqq \frac{r^2[\varphi_1''(r) + \varphi_2''(r)]}{\varepsilon}$. Il secondo membro di questa disuguaglianza non dipende da θ; cioè l'espressione del *resto di Cauchy* si può rendere, scegliendo n abbastanza grande, minore di un numero ε prefissato (piccolo a piacere) *contemporaneamente* per tutti i valori di θ compresi tra 0 ed 1.

TEOREMA 3° (di Pringsheim). *L'espressione trovata del resto di Cauchy converge pertanto* **uniformemente** *a zero, quando* x *varia in un qualsiasi intervallo* $0 \leqq x \leqq r$, *dove* $r < R$, *e* θ *varia arbitrariamente nell'intervallo* (0, 1).

Un risultato analogo **non vale** *per il resto di Lagrange;* il quale perciò presenta nelle applicazioni il difetto che talvolta non si può affermare esser nullo il suo limite, perchè non si conosce il valore esatto di θ. L'ignorare tale valore non ha invece importanza per il resto di Cauchy.

3° Dimostrare che:

$$f(x)=f(0)+xf'(x)-\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{|n}f^{(n)}(x)+R_n,$$

ove:

$$R_n=(-1)^{n+2}\frac{x^{n+1}}{|n+1}f^{(n+1)}(\theta x).$$

E scrivere R_n sotto una forma analoga a quella di Cauchy.

Ris. Si ponga $f(0)=f(x-x)$.

4° Dimostrare che:

$$f\left(\frac{x}{1+x}\right)=f(x)-\frac{x^2}{1+x}f'(x)+\dots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(1+x)^n}\frac{f^{(n)}(x)}{|n}+R_n,$$

ove:

$$R_n=\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{(1+x)^{n+1}}\frac{1}{|n+1}f^{(n+1)}\left(x-\theta\frac{x^2}{1+x}\right).$$

Ris. Si ponga $\frac{x}{1+x}=x+h$, ossia $h=-\frac{x^2}{1+x}$.

4° Applicheremo quanto abbiamo detto allo sviluppo in serie di qualche funzione. Vediamo, p. es., di sviluppare in serie di Taylor la funzione sen x.

Occorre anzitutto cercare le successive derivate di $f(x)=\text{sen}\,x$ e calcolarne il valore per $x=0$. Si ha:

$$\begin{array}{llll}
f'(x)= & \cos x, & \text{per cui } f'(0)= & 1\\
f''(x)= & -\text{sen}\,x, & \text{per cui } f''(0)= & 0\\
f'''(x)= & -\cos x, & \text{per cui } f'''(0)= & -1\\
f''''(x)= & \text{sen}\,x, & \text{per cui } f''''(0)= & 0\\
\dots & & &
\end{array}$$

Essendo $f^{(4)}(x)=f(x)$ sarà $f^{(5)}(x)=f'(x)$..... ; cosicchè le derivate di $f(x)=\text{sen}\,x$ si riproducono periodicamente a quattro a quattro, ed in particolare si riprodurranno a quattro a quattro i valori che le successive derivate assumono per $x=0$ e che noi abbiamo precedentemente calcolati. Per la formola di Mac-Laurin, supposto $n=2m$, cioè n pari, abbiamo:

$$\text{sen}\,x=x-\frac{1}{|3}x^3+\frac{1}{|5}x^5-\frac{1}{|7}x^7+\dots\mp\frac{1}{|2m-1}x^{2m-1}+R_n(x)$$

dove $R_n(x)=\pm\frac{x^{2m+1}}{|2m+1}\cos(\theta x)$ soddisfa certamente alla $|R_n|\leq\left|\frac{x^{2m+1}}{|2m+1}\right|$, poichè $|\cos(\theta x)|\leq 1$. Per passare dalla formola di Mac-Laurin alla serie, basterà dimostrare che R_n tende a zero quando $n=2m$ tende all'infinito; ciò è evidente perchè già abbiamo visto (esempio 1° di pag. 151) che:

$$\lim_{n=\infty} \frac{x^n}{\lfloor n} = 0.$$

Si ha dunque:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5} - \frac{x^7}{\lfloor 7} + \frac{x^9}{\lfloor 9} - \ldots..$$

In modo analogo si dimostra che:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^4}{\lfloor 4} - \frac{x^6}{\lfloor 6} + \ldots..$$

Il resto della serie di Taylor per la funzione e^x vale $\frac{x^n}{\lfloor n} e^{\theta x}$, ove $e^{\theta x}$ è compreso tra $e^0 = 1$ ed e^x (perchè θ è compreso tra 0 ed 1, e di due potenze di e è maggiore quella con esponente maggiore). Quindi $e^{\theta x}$ non supera il più grande dei due numeri 1 ed e^x (*) (che non varia con n). D'altra parte $\frac{x^n}{\lfloor n}$ tende a zero per $n = \infty$. Quindi e^x è sviluppabile in serie di Taylor, perchè il resto R_n tende a zero per $n = \infty$. Si trova:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \ldots..$$

Quest'ultima serie si dice esponenziale, e serve a calcolare un numero $y = e^x$, di cui sia dato il logaritmo neperiano x.

5° Si sviluppi in serie di Taylor $y = (1 + x)^m$. Poichè

$$y^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

sarà

$$y = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{\lfloor 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{\lfloor 3} x^3 + \ldots..$$

quando il limite del resto sia nullo. Se m è intero positivo, allora, per ogni valore della x, la precedente serie si riduce a un polinomio, perchè $y^{(n)} = 0$ per $n > m$, ed il resto stesso è nullo già per $n = m + 1$. Si ritorna in tal caso alla nota for-

(*) Se $x > 0$, e^x è più grande di 1; invece, se $x < 0$, è $e^x < 1$.

mola del binomio di Newton. Se m non è intero positivo, si dimostra che il resto tende a zero, e che il precedente sviluppo in serie è legittimo se $|x| < 1$ (e non se $|x| > 1$; il caso $|x| = 1$ non ci interessa) (*).

Tale serie dicesi *binomiale*.

Questo risultato si può provare direttamente nel seguente modo. Dal § 45, pag. 151, sappiamo che la serie precedente converge per $|x| < 1$. Sia $f(x)$ il suo valore. Sarà:

$$f'(x) = m \left\{ 1 + \frac{m-1}{1} x + \frac{(m-1)(m-2)}{\underline{|2}} x^2 + \ldots. \right\} \quad (\text{per } |x| < 1).$$

Cosicchè si trova facilmente che:

$$(1+x) f'(x) = mf(x), \text{ ossia } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{1+x}, \text{ ossia } \frac{d \log |f|}{dx} = \frac{d \log |1+x|^m}{dx}.$$

Quindi $\log |f| - \log |1+x|^m = \log \left| \frac{f}{(1+x)^m} \right|$ ha derivata nulla, cioè è costante. Dunque $\left| \frac{f(x)}{(1+x)^m} \right|$ è costante, ossia (poichè è uguale ad 1 per $x = 0$) vale 1. Dunque $f(x)$ non è mai nullo; e, poichè è positivo per $x = 0$, sarà positivo in tutto il campo $|x| < 1$, ove $f(x)$ è definito. Dunque $|f(x)| = f(x)$. Per $|x| < 1$ anche $(1+x)^m > 0$. Quindi $\frac{f(x)}{(1+x)^m} = \left| \frac{f(x)}{(1+x)^m} \right| = 1$, cioè

$f(x) = (1+x)^m$. c. d. d.

6° Per sviluppare in serie $y = \log(1 + x)$ si noti che

$$y' = (1+x)^{-1},\ y'' = -(1+x)^{-2}, \text{ ecc.},$$
$$y^{(n)} = (-1)^{n+1} \underline{|n-1} (1+x)^{-n}.$$

Lo sviluppo in serie sarà:

$$(1) \qquad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots..,$$

purchè il *resto tenda a zero*. Senza studiare il resto possiamo provare direttamente la (1) per $|x| < 1$. [Nel caso $|x| > 1$ si può dimostrare similmente che la serie precedente non converge; il caso di $x = \pm 1$ non ci interessa]. Se $|x| < 1$, il valore asso-

---

(*) Questo sviluppo in serie può essere talvolta utile per calcolo di $\sqrt[r]{N}$, se $N > 0$. Detto h un intero positivo tale che $\frac{N}{10^{hr}}$ sia compreso tra 0 e 2, si ponga $\frac{N}{10^{hr}} = 1 + x$, dove sarà $|x| < 1$. Sarà $\sqrt[r]{N} = 10^h (1+x)^m$, dove è posto $m = \frac{1}{r}$. Si può allora applicare la formola precedente. Il calcolo è specialmente rapido, se $|x|$ è piccolo.

E' forse inutile avvertire che è sempre sottinteso di dare alla x valori tali che esista un valore *reale* di $(1+x)^m$ (ciò che avviene se $|x| < 1$) e che tra i valori, di cui $(1+x)^m$ può essere suscettibile, si sceglie quello *reale* e *positivo*.

luto del rapporto di un termine al precedente nella serie (1), cioè $\left| \frac{x^n}{n} : \frac{x^{n-1}}{n-1} \right| = \left| x \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right|$ tende per $n = \infty$ ad $|x| < 1$. Cosicchè la serie del secondo membro di (1) converge. Se $\varphi(x)$ ne è la somma, si trova derivando:

$$\varphi'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \ldots\ldots;$$

il secondo membro è una progressione geometrica decrescente, il cui rapporto è $-x$, e la cui somma vale dunque $\frac{1}{1+x} = \frac{d}{dx}[\log(1+x)]$. Dunque $\varphi(x) - \log(1+x)$ ha derivata nulla, ed è quindi costante. Ma per $x = 0$ tale differenza è nulla. Dunque $\varphi(x) - \log(1+x)$ è sempre nulla. E, come si doveva provare, $\varphi(x) = \log(1+x)$.

Questa serie serve al calcolo diretto dei logaritmi dei numeri $1 + x$, ove $|x| < 1$, ossia dei numeri minori di 2. Ora, preso un qualsiasi numero positivo k, almeno uno dei due numeri k, $\frac{1}{k}$ è minore di 2. E quindi per mezzo della serie precedente si può calcolare uno dei numeri $\log k$, $\log \frac{1}{k}$ e quindi anche l'altro, perchè questi due numeri sono uguali e di segno contrario, cosicchè, se uno di essi è noto, è noto anche l'altro. Ma si possono trovare serie assai più comode per il calcolo numerico. Posto in (1) $-x$ al posto di x, si trae:

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots\ldots \quad (|x| < 1);$$

la quale, sottratta dalla (1), dà:

$$\log\frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x) = 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right\} \quad (|x| < 1).$$

Posto $\frac{1+x}{1-x} = z$, ossia $x = \frac{z-1}{z+1}$, sarà $|x| < 1$ per $z > 0$, cosicchè per *ogni numero positivo* **z** si avrà:

$$(2) \quad \log z = 2\left\{\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\ldots\right\}.$$

Così, p. es., se si pone $z = 2$, si trova:

$$\log 2 = \frac{2}{3}\left\{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \ldots\ldots\right\}.$$

Se, tenendo conto, p. es., dei soli primi 8 termini, poniamo:

$$\log 2 = \frac{2}{3}\left\{1 + \frac{1}{3}\,\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{15}\left(\frac{1}{9}\right)^7\right\},$$

commettiamo l'errore (in difetto)

$$\frac{2}{3}\left\{\frac{1}{17}\left(\frac{1}{9}\right)^8 + \frac{1}{19}\left(\frac{1}{9}\right)^9 + \ldots\right\} = \frac{2}{3.9^8}\left\{\frac{1}{17} + \frac{1}{19}\,\frac{1}{9} + \frac{1}{21}\,\frac{1}{9^2} + \ldots\right\} <$$

$$< \frac{2}{3.9^8}\,\frac{1}{17}\left\{1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \ldots\right\} = \frac{2}{3.17.9^8}\,\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{975725676} = 0{,}000000001\ldots$$

Un tale errore è già dunque estremamente piccolo; e ancor minore lo si renderebbe, se aumentassimo il numero dei termini di cui si tien conto.

Si calcoli log 5. Si trova

$$\log 5 = \log 4 + \log\frac{5}{4} = 2\log 2 + \log\frac{5}{4}\,.$$

Essendo noto log 2, basterà calcolare

$$\log\frac{5}{4} = 2\left\{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5 + \ldots\right\}$$

ancor più comoda della precedente al calcolo numerico, come il lettore può verificare con metodo simile. I logaritmi fin qui calcolati sono in base e. Per trovare i logaritmi decimali si ricordi che $\log_{10} z = M \log_e z$, ove $M = \dfrac{1}{\log_e 10} = \dfrac{1}{\log_e 2 + \log_e 5}$ si trova facilmente, in virtù dei precedenti calcoli numerici, uguale a 0,434294481 ..... e si dice *modulo* dei logaritmi decimali.

Si ha così $\log_{10} z = 2M\left\{\dfrac{z-1}{z+1} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3 + \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\right\}$.

Il calcolo delle tavole logaritmiche viene poi facilitato da altri artifici: p. es., dall'osservazione che $\log_{10} 10^n = n$, che il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori, che $\log(n+1) = \log n + \log\dfrac{n+1}{n}$; cosicchè, noto $\log n$, si calcola tosto $\log(n+1)$ quando si conosca $\log\dfrac{n+1}{n}$; il quale ultimo logaritmo viene espresso da (2) sotto forma di serie rapidamente convergente, specialmente se n è un numero non troppo piccolo, ed è la cosidetta *differenza tavolare,* il cui ufficio è così noto a chi abbia consultato tavole di logaritmi (pag. 201, § 63, γ).

7° In modo affatto analogo si prova che per

$$|x| < 1, \ -\frac{\pi}{4} < y < \frac{\pi}{4},$$

vale la:

$$y = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots..$$

Basta osservare che per $|x| < 1$ la serie al secondo membro converge ed ha $\frac{1}{1+x^2}$ per derivata, e che per $x = 0$ essa si annulla come $\operatorname{arctg} x$. Da tale serie si deducono formole notevoli per il calcolo di π.

Così osservando che $\frac{\pi}{6} = \operatorname{artg} \frac{1}{\sqrt{3}}$ e che $\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$, si trova, ponendo $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\pi = 2\sqrt{3} \left\{ 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots.. \right\}$$

Un metodo ancor più comodo per il calcolo numerico di π è il seguente. Sia α l'angolo, la cui tangente è $\frac{1}{5}$. Sarà

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{5}{12}$$

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha} = 1 + \frac{1}{119}.$$

Essendo $\operatorname{tg} 4\alpha > 1$, sarà $4\alpha > \frac{\pi}{4}$. Esisterà un angolo positivo β tale che

$$\beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}.$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{239}.$$

Sarà allora:

$$\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta = 4 \operatorname{arctg} \frac{2}{10} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$$

donde, ponendo nella nostra serie successivamente $x=\frac{2}{10}$, $x=\frac{1}{239}$ si trova:

$$\frac{\pi}{4}=4\left\{\frac{2}{10}-\frac{1}{3}\,\frac{2^3}{1000}+\frac{1}{5}\,\frac{2^5}{100.000}-\ldots\right\}-$$
$$-\left\{\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5-\ldots\right\},$$

la quale formola ha servito al calcolo di π fino alla 704$^{\text{esima}}$ cifra decimale. Come esercizio, il lettore ne deduca il valore di π con due cifre decimali esatte.

8° Analogamente si osservi che:

$$(\operatorname{arcsen} x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}};$$

che per $|x|<1$ si può sviluppare in serie binomiale:

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}(-x^2)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{1\,.\,2}(-x^2)^2+$$
$$+\ldots=1+\frac{x^2}{2}+\frac{1\,.\,3}{2^2\,\underline{|2}}x^4+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2^3\,\underline{|3}}x^6+\ldots$$

Si trova per $|x|<1$ con metodo analogo al precedente che:

$$\operatorname{arcsen} x=x+\frac{x^3}{2\,.\,3}+\frac{1\,.\,3}{2^2\,\underline{|2}}\,\frac{x^5}{5}+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2^3\,\underline{|3}}\,\frac{x^7}{7}+\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2^4\,\underline{|4}}\,\frac{x^9}{9}+\ldots$$