CAPITOLO XV.

GLI INTEGRALI DEFINITI E LE FUNZIONI ADDITIVE DI INTERVALLO

§ 94. — Funzioni additive d'intervallo e loro derivate.

α) Sia $\varphi(x)$ una funzione prefissata della x in un intervallo I. Siano a, b due punti di I; la differenza (incremento) $\varphi(b) - \varphi(a)$ è un numero determinato, quando siano dati i punti a, b, o, ciò che è lo stesso, l'intervallo (a, b). Prefissata dunque la funzione $\varphi(x)$, noi potremo dire che tale differenza, che indicheremo con $S(a, b)$ **è una funzione** dell'intervallo (a, b) (*). Essa gode di una proprietà molto notevole; cioè che, se l'intervallo (a, c) è somma degli intervalli (a, b) e (b, c), allora il valore $S(a, c)$ relativo a tutto l'intervallo, cioè $\varphi(c) - \varphi(a)$, è uguale alla somma dei valori $S(a, b) = \varphi(b) - \varphi(a)$ e $S(b, c) = \varphi(c) - \varphi(b)$, che essa assume nei due intervalli parziali (a, b) e (b, c). Noi enuncieremo questa proprietà dicendo che $S(a, b)$ *è funzione additiva dell'intervallo* (a, b).

Viceversa sia $S(a, b)$ una funzione dell'intervallo (a, b); sia essa cioè un numero, che ha un valore determinato, appena sia dato l'intervallo (a, b) di I.

Essa goda della proprietà additiva: sia cioè identicamente $S(a, b) + S(b, c) = S(a, c)$. Ne seguirà supponendo $c = b$, che $S(b, b) = 0$, cioè che *una funzione additiva d'intervallo si annulla, se l'intervallo è nullo.* E quindi, ponendo poi $c = a$, e osservando che $S(a, a) = 0$, ne seguirà:

$$S(a, b) = - S(b, a).$$

Sia C una costante arbitraria; e sia c un punto fisso qualsiasi (di I), sia x un punto variabile in I. Si ponga:

$$C + S(c, x) = \varphi(x).$$

(*) Diciamo così per analogia col linguaggio abituale: Si dice che y è funzione di x, se y è determinato, appena sia nota la x.

Poichè l'intervallo (c, b) è somma degli intervalli (c, a) ed (a, b), sarà:

$$S(c, b) = S(c, a) + S(a, b)$$

ossia:

$$S(a, b) = S(c, b) - S(c, a) = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Ogni funzione S (a, b) *additiva di intervallo* (a, b) *coincide con l'incremento* φ (b) — φ (a) *di una funzione* φ (x) *della variabile* x.

Data $S(a, b)$, la $\varphi(x)$ ha chiaramente soltanto l'indeterminazione dovuta all'arbitrarietà con cui si può scegliere la costante C. Infatti due funzioni $\varphi(x)$, $\psi(x)$ che abbiano uguali incrementi nello stesso intervallo, soddisfano per ogni valore di x alla:

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \psi(x) - \psi(a), \text{ ossia:}$$

$$\varphi(x) - \psi(x) = \varphi(a) - \psi(a).$$

Esse hanno cioè una differenza costante.

In molti problemi si presenta più spontaneo lo studio di una funzione S additiva d'intervallo piuttosto che lo studio di una funzione φ, di cui la S rappresenti gli incrementi. Così p. es., se un punto si muove su una retta e la sua velocità $F(x)$ è nota in funzione del tempo, si presenta più spontanea la domanda: Che spazio $S(a, b)$ ha percorso il punto dalle ore a alle ore b? piuttosto che l'altra domanda: A che distanza $\varphi(x)$ si trova il punto all'ora x dall'origine? Infatti questa seconda domanda presuppone la scelta di un elemento sovente estraneo alla questione: l'*origine*.

Di funzioni additive di intervallo possiamo dare numerosi esempi.

Data una sbarra materiale posta sull'asse delle x, il peso di quella sua parte che ha per estremi i punti di ascissa a, b è una *funzione additiva* di tale parte di sbarra, cioè dell'intervallo (a, b). E ciò perchè il peso di un tratto (a, c) di sbarra somma dei tratti (a, b) e (b, c) è evidentemente la somma dei pesi dei tratti parziali (a, b) e (b, c): proprietà che vale, qualunque sia la posizione dei punti a, b, c, se si conviene di considerare come uguali, e di segno opposto i pesi dei tratti (a, b) e (b, a).

Se un punto materiale si muove in un dato campo di forze percorrendo un segmento (a, b) dell'asse delle x, il lavoro compiuto è una funzione additiva di (a, b).

β) Consideriamo ora il caso particolare (che basta ai nostri studii elementari) di una funzione $\varphi(x)$ a derivata $F(x)$ *continua. Il teorema della media dice che:*

$$\frac{\mathrm{S}(\mathrm{a},\mathrm{b})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}=\frac{\varphi(\mathrm{b})-\varphi(\mathrm{a})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}=\mathrm{F}(\mathrm{c}), \qquad (1)$$

ove c *è un punto* **opportunamente** *scelto interno all' intervallo* (a, b).

Se dunque a, b tendono ad uno stesso punto α, sarà anche lim $c=\alpha$, ed, essendo $F(x)$ continua, anche lim $F(c)=F(\alpha)$. Cioè:

Se l'intervallo (a, b) *tende ad un unico punto* α, *allora il limite di*

$$\frac{\mathrm{S}(\mathrm{a},\mathrm{b})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}$$

vale F (x). Perciò:

Se $\mathrm{F}(\mathrm{x})=\lim\limits_{a,b=x}\dfrac{\mathrm{S}(\mathrm{a},\mathrm{b})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}$ *è funzione continua, noi la chiameremo derivata della funzione additiva* S (a, b) *rispetto all'intervallo* (a, b). Tale derivata è *funzione della sola variabile* x, e non è più funzione di un intervallo. Evidentemente poi

$$S(a,b)=\varphi(b)-\varphi(a)=\int_a^b F(x)\,dx.$$

Cioè *una funzione additiva* S (a, b) *con derivata* F (x) (continua) *coincide con l'integrale definito* $\int_a^b \mathrm{F}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$ *di tale derivata.*

Il teorema della media, che abbiamo scritto nella forma (1), si può anche scrivere così:

$$S(a,b)=(b-a)\,F(c).$$

Se ne deduce:

Siano M *ed* m *il massimo ed il minimo valore nell'intervallo* (a, b) *della derivata* (*continua*) F (x) *della funzione* S (a, b) *additiva d'intervallo; allora* S (a, b) *è compreso tra i prodotti di* (b — a) *per* M *o per* m.

Viceversa, se il valore della funzione additiva S (a, b) *è compreso tra* (b — a) M *e* (b — a) m, *dove* M, m *sono il massimo e il minimo della funzione continua* F (x), *allora* F (x) *è la derivata di* S (a, b).

Infatti $\frac{S(a,b)}{b-a}$ è in tal caso compreso tra M ed m; cioè vale $F(c)$, ove c è un conveniente punto dell'intervallo (a, b). Perciò, se a, b tendono ad x, allora $\frac{S(a,b)}{b-a}$ tende ad $F(x)$.

§ 95. — Illustrazioni varie.

Abbiamo riconosciuto che la funzione additiva $S(a, b)$, che ha la derivata continua $F(x)$, coincide con $\int_a^b F(x)\,dx$. Questo teorema si può illustrare in molti modi:

α) Se p. es. $F(x) \geqq 0$, l'area $S(a, b)$ del rettangoloide definito dall'asse delle x, dalla curva $y = F(x)$ e dalle rette $x = a$, $x = b$ è evidentemente funzione additiva dell'intervallo (a, b) (almeno se l'area si considera positiva se $a < b$ e negativa se $a > b$). Tale rettangoloide è contenuto nel rettangolo che ha per base l'intervallo (a, b) dell'asse delle x e per altezza il massimo valore M di $F(x)$ in tale intervallo, e contiene il rettangolo di ugual base, avente per altezza il minimo valore m di $F(x)$. Perciò $S(a, b)$ è compreso tra $(b-a)M$ e $(b-a)m$, ed ha quindi $F(x)$ per derivata. Esso vale pertanto $\int_a^b F(x)\,dx$. Questo ragionamento è, in altre parole, la ripetizione di considerazioni svolte da noi altrove (pag. 165).

β) Se $F(x)$ indica la velocità che un punto mobile N su una retta r ha all'istante x, e $\varphi(x)$ indica lo spazio percorso da N, o anche la distanza ON, che N ha all'istante x da un'origine fissa O, si riconosce immediatamente che $\varphi(x) = \int F(x)\,dx$ e che quindi $\varphi(b) - \varphi(a)$ (spazio percorso dall'istante a all'istante b) è la funzione additiva, che ha $F(x)$ per derivata, e perciò vale precisamente l'integrale definito di $F(x)$ esteso all'intervallo (a, b). Basta osservare che lo spazio percorso $\varphi(b) - \varphi(a)$ gode delle due seguenti proprietà:

1) Se α è un intervallo di tempo, somma di due intervallini α_1, α_2, lo spazio percorso in α è uguale alla somma degli spazi percorsi in α_1 e in α_2; cioè lo spazio percorso è funzione additiva degli intervalli di tempo.

2) Lo spazio $\varphi(b) - \varphi(a)$ percorso da N nell'intervallo di tempo (a, b) è compreso tra gli spazi, che sarebbero percorsi

da N, quando esso fosse in tale intervallo dotato sempre della velocità minima m o massima M, che raggiunge in tale intervallo, ossia è compreso tra $(b-a)\,m$ e $(b-a)\,M$.

γ) Se $F(x)$ indica il valore della forza agente su un punto N mobile su una retta r, quando N dista x dall'origine, e se $F(x)$ è diretto secondo r, il lavoro corrispondente al passaggio di N dal punto $x=a$ al punto $x=b$ è l'integrale definito di $F(x)$ esteso all'intervallo (a, b). Infatti esso gode delle due seguenti proprietà:

1) Se un intervallo α è somma di due intervallini α_1, α_2, il lavoro corrispondente all'intervallo α è somma dei lavori corrispondenti agli intervalli α_1, α_2, cioè tale lavoro è funzione additiva degli intervalli α.

2) Tale lavoro è compreso tra i valori $(b-a)\,m$ e $(b-a)\,M$ corrispondenti al caso che la forza $F(x)$ nell'intervallo (a, b) conservasse costantemente il valore minimo m o massimo M, che raggiunge in tale intervallo.

δ) Indichiamo con ρ, θ coordinate polari; si voglia calcolare l'area A della figura racchiusa tra i raggi $\theta=a$, $\theta=b$ $(0 \leq a < b \leq 2\pi)$ e una curva $\rho = F(\theta)$. È evidente che A è funzione additiva dell'intervallo (a, b). Si osservi che, se M, m sono il massimo e il minimo di $F(\theta)$ nell'intervallo (a, b), la nostra figura comprende all'interno il settore circolare che ha per raggio m, che è limitato dalle semirette $\theta = a$ e $\theta = b$, e che quindi ha per area $\pi m^2 \dfrac{(b-a)}{2\pi} = \dfrac{1}{2}(b-a)\,m^2$. E la nostra figura è compresa nel settore limitato dalle stesse semirette, che ha per raggio M, ed ha quindi per area $\dfrac{1}{2}(b-a)\,M^2$.

L'area cercata è dunque compresa tra $\dfrac{1}{2} m^2 \Delta\theta$ e $\dfrac{1}{2} M^2 \Delta\theta$, quando si indichi con $\Delta\theta = b - a$ l'incremento ricevuto da θ nell'intervallo (a, b). E se ne deduce facilmente che l'area A in discorso ha per derivata $\dfrac{1}{2}\rho^2$, ossia che essa è data dalla:

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b \rho^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_a^b [F(\theta)]^2\, d\theta.$$

Il lettore dimostri direttamente che $\dfrac{dA}{d\theta} = \dfrac{1}{2}[F(\theta)]^2$.

Si può dedurne poi, p. es., che: *se un punto* N *si muove in un piano in modo che il raggio* ON *descriva un'area* A *proporzionale al tempo* t *impiegato, allora la forza agente su* N *è diretta verso* O. (Teorema importante, p. es., per dedurre dalle leggi di Keplero la legge di gravitazione universale di Newton).

Infatti in tal caso è $\frac{dA}{dt} = k$ ($k = \text{cost.}$), ossia $\frac{dA}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = k$, ossia $\frac{1}{2}\rho^2\frac{d\theta}{dt} = k$.

Poichè $\rho^2 = x^2 + y^2$, $\theta = \text{arctg}\,\frac{y}{x}$, questa equazione diventa:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = 2k,$$

donde, derivando:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \text{ ossia } \frac{d^2x}{dt^2} : \frac{d^2y}{dt^2} = x : y;$$

che prova il nostro teorema, perchè (come insegna la Meccanica) le componenti della forza agente su N sono proporzionali alle

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \ \frac{d^2y}{dt^2}.$$

§ 96. — **Alcune somme fondamentali.**

α) Abbiamo dunque riconosciuto l'identità del concetto *di funzione* S (a, b) *additiva avente per derivata la funzione continua* F (x) *e di* $\int_a^b$ F (x) dx.

Cosicchè se, p. es., $F(x) \geqq 0$, ed $a < b$, la $S(a, b)$ si può pensare identica all'area del rettangoloide limitato dall'arco di curva $y = F(x)$ per $a \leqq x \leqq b$, dalle rette che ne proiettano gli estremi sull'asse delle x, e dallo stesso asse delle x.

Ci serviremo tosto di questo fatto per illustrare geometricamente alcune considerazioni.

Diviso l'intervallo (a, b) in n intervallini parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$, allora il valore $S(a, b)$ della nostra funzione additiva vale la somma dei valori di S corrispondenti ai nostri intervallini δ_i: ciascuno dei quali è, per il teorema della media, compreso tra $\delta_i M_i$ e $\delta_i m_i$, se M_i, m_i sono il massimo e il minimo di $F(x)$ in δ_i, e vale $\delta_i \overline{F}_i$ ove $\overline{F}_i$ è un *conveniente* valore della $F(x)$ in δ_i. Perciò:

La $S(a, b) = \int_a^b F(x)\,dx$ **è compresa tra** $\Sigma M_i \delta_i = M_1\delta_1 + M_2\delta_2 + \ldots + M_n\delta_n$ **e** $\Sigma m_i\delta_i$. **Esistono dunque dei convenienti numeri** $\overline{F}_i$ **compresi tra** m_i **ed** M_i **tali che** $\int_a^b F(x)\,dx = \Sigma \overline{F}_i \delta_i$.

Perciò: *La* S (a, b) *è compresa tra il limite inferiore delle* Σ M δ, *e il limite superiore delle* $\Sigma\, m\, \delta$.

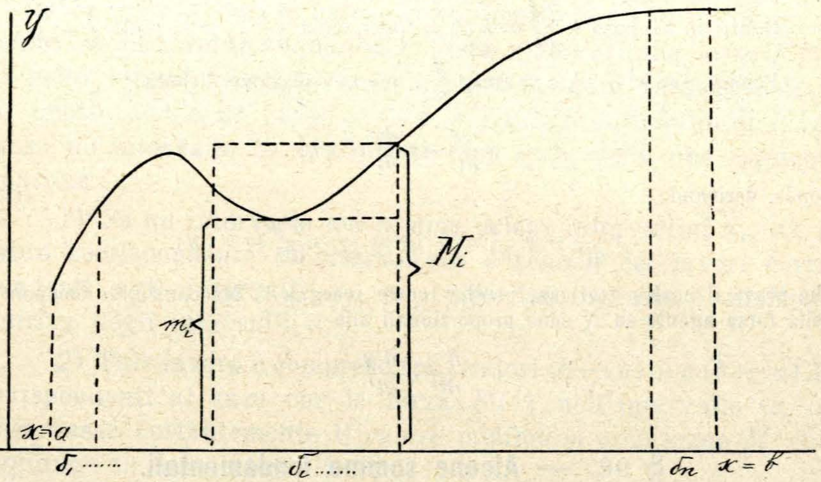

Fig. 33.

β) Sarà bene illustrare questo procedimento per le funzioni $F(x) \geqq 0$ ricorrendo all'interpretazione citata di $\int_a^b F(x)\, dx$ come area della figura piana (rettangoloide) compresa tra l'asse delle x, la curva $y = F(x)$, e le parallele all'asse delle y, i cui punti hanno per ascissa rispettivamente a oppure b.

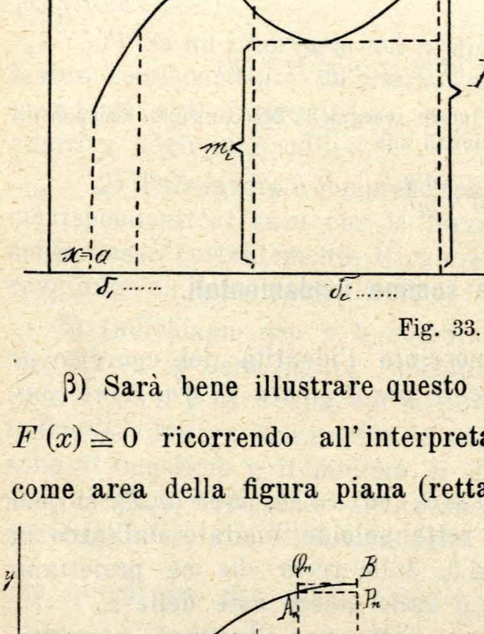

Fig. 34.

Nella fig. 33 sono disegnati per l'intervallino parziale δ_i il minimo m_i e il massimo M_i di $F(x)$.

Nella successiva fig. 34 (in cui per chiarezza si è disegnata una curva $y = F(x)$ di più semplice andamento) è reso ben evidente che un prodotto $\delta_i\, m_i$ è l'area di un rettangolo avente per base δ_i e tutto interno alla nostra figura (i rettangoli APA'_1A', $A_1P_1A'_2A'_1$, ecc.); cosicchè $\Sigma\, m_i\, \delta_i$ misura l'area di un poligono che è tutto contenuto nel nostro rettangoloide ed ha perciò un'area non maggiore di quella del nostro rettangoloide.

Invece i numeri $M_1 \delta_1$, $M_2 \delta_2$, ecc. sono l'area dei rettangoli $QA_1A'_1A'$, $Q_1A_2A'_2A'_1$, ecc., la cui somma è un poligono, che contiene il nostro rettangoloide, e la cui area è perciò non minore dell'area del rettangolo stesso.

Riesce così resa intuitiva la nostra affermazione.

Del resto tutti gli altri esempi del paragrafo precedente potrebbero servire altrettanto bene ad illustrare la nostra affermazione.

γ) Ricordiamo la precedente formola: $\int_a^b F(x)\,dx = \Sigma \overline{F}_i \delta_i$.

La lunghezza δ_i di un intervallo parziale non è che l'incremento dx subìto dalla x nel passare da un estremo all'altro. Se noi scriviamo dx al posto di δ_i, e sostituiamo al Σ greco un S maiuscolo latino, che la scrittura corrente può aver deformato nel segno $\int$, intendiamo il perchè della notazione usata per indicare gli integrali definiti.

§ 96 *bis*. — **Il metodo dei rettangoli per il calcolo approssimato degli integrali definiti.**

α) Abbiamo riconosciuto al § 96 che, diviso l'intervallo (a, b) in un numero finito di intervallini parziali δ_i, si ha:

$$\int_a^b F(x)\,dx = \Sigma \overline{F}_i \delta_i$$

ove $\overline{F}_i$ è uno dei valori assunti da $F(x)$ in δ_i, *scelto in modo conveniente*. Cosicchè, se noi, data $F(x)$, e scelti i δ_i, sapessimo scegliere tali valori $\overline{F}_i$, il calcolo dell'integrale sarebbe ridotto a operazioni elementari (somma di prodotti). Ma poichè invece in generale non sappiamo scegliere tali $\overline{F}_i$, sostituiamo ad $\overline{F}_i$ uno *qualsiasi* F_i dei valori che $F(x)$ assume in δ_i, assumendo poi la somma $\Sigma F_i \delta_i$, come valore *approssimato* del nostro integrale. È questo un procedimento molto usato; la teoria, d'accordo con l'intuizione, lo giustifica, come vedremo in β), provando che l'approssimazione raggiunta si potrà render grande a piacere, cioè che la differenza $\int_a^b F(x)\,dx - \Sigma F_i \delta_i$ si può rendere piccola a piacere in valore assoluto, prendendo tutti i δ_i abbastanza piccoli (e ciò *indipendentemente* dal modo con cui si è scelto il valore F_i di $F(x)$ in δ_i).

Ciò, che con una facile estensione del concetto di limite si scrive $\int_a^b F(x)\,dx = \lim_{\delta_i = 0} \Sigma F_i \delta_i$. L'errore commesso sostituendo F_i ad $\overline{F_i}$ viene cioè eliminato passando al limite per $\delta_i = 0$.

Tale metodo di calcolo approssimato si può chiamare *metodo dei rettangoli.*

Infatti il calcolo del nostro integrale equivale a quello dell'area del rettangoloide definito dalla curva $y = F(x)$, che ha per base il segmento (a, b). Diviso (a, b) in segmentini δ_i, il rettangoloide resta diviso in rettangoloidi parziali; all'area di uno di questi noi sostituiamo il prodotto $\delta_i F_i$, cioè l'area di un rettangolo che ha ancora δ_i per base, e che ha per altezza F_i, essendo F_i uno qualsiasi dei valori che $F(x)$ ha in δ_i.

Per F_i possiamo assumere p. es. il valore di $F(x)$ ad uno degli estremi di δ_i, oppure il massimo valore M_i od il minimo valore m_i di $F(x)$ in δ_i, oppure un numero qualsiasi compreso tra M_i ed m_i.

β) Con gli stessi metodi con cui si è provato che l'area esterna di un rettangoloide è uguale all'interna, si può dimostrare intanto che *il limite inferiore di* $\Sigma \mathrm{M} \delta$ *è uguale al limite superiore di* $\Sigma \mathrm{m} \delta$; *e che quindi entrambi sono uguali al numero* $\mathrm{S}(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \int_a^b \mathrm{F}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$, *che è compreso tra le due somme citate.*

Resta così provato che questo integrale si può perciò definire come il numero che separa le classi contigue descritte rispettivamente dalle $\Sigma \mathrm{M} \delta$, $\Sigma \mathrm{m} \delta$.

È intuitivo poi (come il lettore può riconoscere pensando all'area di un rettangoloide, e ricordando la trattazione elementare per l'area del cerchio) e si può facilmente provare (*) che

---

(*) Ciò si può dedurre dal teorema di Heine (§ 40 e § 63, pagina 197), perchè, in virtù di questo teorema, si possono scegliere i δ_i così piccoli che tutte le corrispondenti oscillazioni $M_i - m_i$ risultino minori di $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Allora sarà $|\Sigma M \delta_i - \Sigma m_i \delta_i| < \frac{\varepsilon}{b-a} \Sigma \delta_i = \varepsilon$, come volevasi provare.

Allo stesso risultato si giunge direttamente così: *Dato un sistema di intervallini* δ *e un altro sistema di intervallini* δ', *ottenuto dal precedente intercalando nuovi punti di divisione, le somme corrispondenti soddisfano alle* $\Sigma \mathrm{M} \delta \geqq \Sigma \mathrm{M}' \delta'$ e $\Sigma m \delta \leqq \Sigma m' \delta'$. E ciò, perchè il massimo M (il minimo m) di $F(x)$ in un δ non è inferiore ad alcuno dei massimi M' (non supera alcuno dei minimi m') che $F(x)$ ha negli intervallini δ', in cui è stato suddiviso l'intervallo δ considerato, mentre la lunghezza δ vale la somma delle lunghezze di questi δ'.

Sia $\varepsilon > 0$ un numero piccolo a piacere; e consideriamo, p. es., le $\Sigma m \delta$. Esisi *può rendere piccola a piacere* (minore di un $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere) *la differenza* $\Sigma M\delta - \Sigma m\delta$, *considerando degli intervallini* δ *abbastanza piccoli* [che tale differenza (con *conveniente* scelta dei δ) si possa rendere piccola, segue dal precedente teorema; la presente osservazione precisa che i δ saranno scelti convenientemente, se saranno scelti abbastanza piccoli]. *A fortiori*, se indichiamo con F uno qualunque dei valori assunti da $F(x)$

---

sterà un sistema di intervallini parziali $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ tali che, se μ è il minimo di $F(x)$ in θ, sia

$$\int_a^b F(x)\,dx \geqq \Sigma\mu\theta \geqq \int_a^b F(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}.$$

E ciò perchè $\int_a^b F(x)\,dx$ è proprio il limite superiore delle $\Sigma m\delta$ (o delle $\Sigma\mu\theta$).

Consideriamo un altro qualsiasi sistema di intervalli δ, ciascuno dei quali sia più piccolo del minimo tra gli intervalli θ e sia più piccolo anche di $\frac{\varepsilon}{2nH}$, se H è il massimo di $|f(x)|$ in (a, b). Sia δ' quel sistema di intervallini che si ottiene dividendo (a, b) in parti sia coi punti estremi dei θ, sia coi punti estremi dei δ. Poichè i δ' sono ottenuti sia dai δ che dai θ, intercalando nuovi punti di divisione,

sarà: $\Sigma m'\delta' \geqq \Sigma\mu\theta$; $\Sigma m'\delta' \geqq \Sigma m\delta$, mentre è $\int_a^b F(x)\,dx \geqq \Sigma m'\delta'$.

Ora nel passare dai δ agli intervallini δ', al più n degli intervalli δ sono stati divisi in (due) parti (perchè un δ non può contenere tutto un θ per l'ipotesi fatta) e gli intervallini δ', che si ottengono dividendo in due parti al più n intervalli δ hanno *complessivamente* una lunghezza che non può superare $n\frac{\varepsilon}{2nH}$ (perchè ogni δ non supera $\frac{\varepsilon}{2nH}$). Il contributo che essi dànno nella somma $\Sigma m'\delta'$ non può superare $nH\frac{\varepsilon}{2nH} = \frac{\varepsilon}{2}$.

Poichè gli altri intervalli δ sono contemporaneamente intervalli δ', la somma $\Sigma m'\delta'$ supererà $\Sigma m\delta$ al più di $\frac{\varepsilon}{2}$; cosicchè $\Sigma m\delta \geqq \Sigma m'\delta' - \frac{\varepsilon}{2}$.

Poichè $\Sigma m'\delta' \geqq \Sigma\mu\theta \geqq \int_a^b F(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}$, sarà $\Sigma m\delta \geqq \int_a^b F(x)\,dx - \varepsilon$. È già noto che $\int_a^b F(x)\,dx \geqq \Sigma m\delta$. Cosicchè, se i δ sono scelti abbastanza piccoli (nel modo sopra precisato), la $\Sigma m\delta$ differisce da $\int_a^b F(x)\,dx$ per meno di ε.

In modo analogo si prova che, se i δ sono abbastanza piccoli, $\Sigma M\delta$ differisce da $\int_a^b F(x)\,dx$ per meno di ε. Quindi, preso un numero $2\varepsilon > 0$ piccolo a piacere, possiamo scegliere un numero σ tale che, se tutti i δ sono minori di σ, allora $[\Sigma M\delta - \Sigma m\delta]$ sia minore di 2ε. c. d. d.

in δ, cosicchè $m \leqq F \leqq M$, allora, poichè $\int_a^b F(x)\,dx$ e $\Sigma F \delta$ sono entrambi compresi tra $\Sigma m \delta$ e $\Sigma M \delta$, avremo che:

Dato un numero ε *piccolo a piacere, posso scegliere i* δ *così piccoli che*

$$\left| \Sigma F\delta - \int_a^b F(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Cosicchè con facile estensione della definizione di limite, possiamo enunciare il seguente teorema:

Lo $\int_a^b \mathrm{F}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$ *non solo è il numero che separa le classi contigue descritte dalle* $\Sigma\,\mathrm{m}\,\delta$, $\Sigma\,\mathrm{M}\,\delta$, *ma è anche il limite di* $\Sigma\,\mathrm{F}\,\delta$ *quando tutti i* δ *tendono a zero, se* F *è un qualsiasi numero compreso tra* M *ed* m (od eventualmente uguale anche ad *M* od a *m*).

Se noi confrontiamo quest'ultimo teorema $\int_a^b F(x)\,dx = \lim\limits_{\delta=0} \Sigma F\delta$ col teorema dato in (α), pag. 315, cioè $\int_a^b F(x)\,dx = \Sigma \overline{F}\delta$, vediamo che tanto F che $\overline{F}$ rappresentano una quantità compresa tra m ed M. Ma mentre F è una quantità *arbitrariamente* scelta tra m e M, la $\overline{F}$ è un numero *convenientemente* scelto tra m ed M. Cosicchè nella

$$\int_a^b F(x)\,dx = \lim_{\delta=0} (F_1\delta_1 + F_2\delta_2 + \ldots\ldots + F_n\delta_n)$$

si potrebbe quasi dire che *il passaggio al limite* (quando tutti i δ tendono a zero) *corregge l'errore commesso scegliendo i valori intermedi* F_i in modo arbitrario tra m_i *ed* M_i.

γ) Un caso particolare della nostra formola si ottiene nel modo seguente:

Si divida l'intervallo (a, b) in n intervallini parziali δ_i, i cui estremi $a_1, = a, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_{n+1} = b$ formino una progressione aritmetica; tutti questi intervallini saranno uguali tra di loro ed avranno $\dfrac{b-a}{n}$ come lunghezza comune.

Se come F_r scegliamo il valore di $F(x)$, p. es., nell'estremo destro $a + r\dfrac{b-a}{n}$ del corrispondente intervallo δ_r, otterremo che:

$$\text{(I)} \qquad \int_a^b F(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \frac{b-a}{n} \left\{ F\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \right.$$

$$\left. + F\left(a + 2\frac{b-a}{n}\right) + F\left(a + 3\frac{b-a}{n}\right) + \ldots + F\left(a + n\frac{b-a}{n}\right) \right\}.$$

Similmente, supposto $b > a$, e posto $k = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, i punti a $ak, ak^2, \ldots, ak^{n-1}, ak^n = b$ formano una progressione geometrica e dividono l'intervallo (a, b) in intervallini che tendono a zero per $n = \infty$, ossia per $k = 1$.

Si ritrova (ricordando che $k = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$):

$$\text{(II)} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim a(k-1) \left\{ f(a) + kf(ak) + \right.$$

$$\left. + k^2 f(ak^2) + \ldots + k^{n-1} f(ak^{n-1}) \right\}.$$

Questa è in fondo la formola applicata a pag. 128, es. 3°, quando si è calcolata un'area, il cui valore è, come ora sappiamo, l'integrale definito di $\frac{1}{x}$ tra a e b.

ESEMPIO.

1° Si calcoli $\int_a^b x\,dx$ col metodo precedente della (I).

Si trova:

$$\int_a^b x\,dx = \lim_{n=\infty} \frac{b-a}{n} \sum_1^n \left[a + r\frac{b-a}{n} \right] =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{b-a}{n} \left\{ na + \frac{n(n+1)}{2} \frac{b-a}{n} \right\} = \lim_{n=\infty} \left\{ a(b-a) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)(b-a)^2 \right\} = a(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

§ 97. — **Generalizzazioni del concetto di integrale. L'integrale di Riemann.**

Negli ultimi venti anni si è generalizzata la definizione di integrale. Noi non possiamo dare neanche un'idea di questi studi recenti e teoricamente importantissimi. Vogliamo soltanto dare un brevissimo cenno della definizione di integrali di Riemann, che è più generale di quella da noi posta e che, dopo aver occupato un posto perspicuo nell'analisi, ha ora, più che altro, un valore storico.

Sia F una funzione definita in un campo I. Non supporremo F continua, ma la supporremo soltanto limitata (supporremo cioè *finito* non soltanto ogni valore di F, ma anche *finito* il limite superiore dei valori assoluti di F). Diviso I in un numero finito r di pezzi $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r$, non potremo più dire che in uno di questi la F ha un massimo o un minimo, ma soltanto che essa in ogni δ_s (per $s = 1, 2, \ldots, r$) ha un limite superiore L_s e un limite inferiore l_s finiti. Indicando con δ_s anche la misura di δ_s, costruiamo le somme:

$$\Sigma\, L_s\, \delta_s \quad (1) \qquad\qquad \Sigma\, l_s\, \delta_s. \quad (2)$$

Si può dimostrare, che, se, p. es., $\delta > 0$, ogni somma (1) supera ogni somma (2). Se le classi descritte da queste due somme sono contigue, il numero di separazione delle due classi riceve il nome di integrale secondo Riemann della F esteso al campo I.

§ 98. — Il metodo dei trapezi per il calcolo approssimato degli integrali definiti.

α) Tra le tante formole approssimate per il calcolo degli integrali definiti, ricorderemo ancora la seguente, specialmente semplice.

Supponiamo di voler calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$ (con $a < b$).

Supponiamo dapprima $f(x) \geqq 0$.

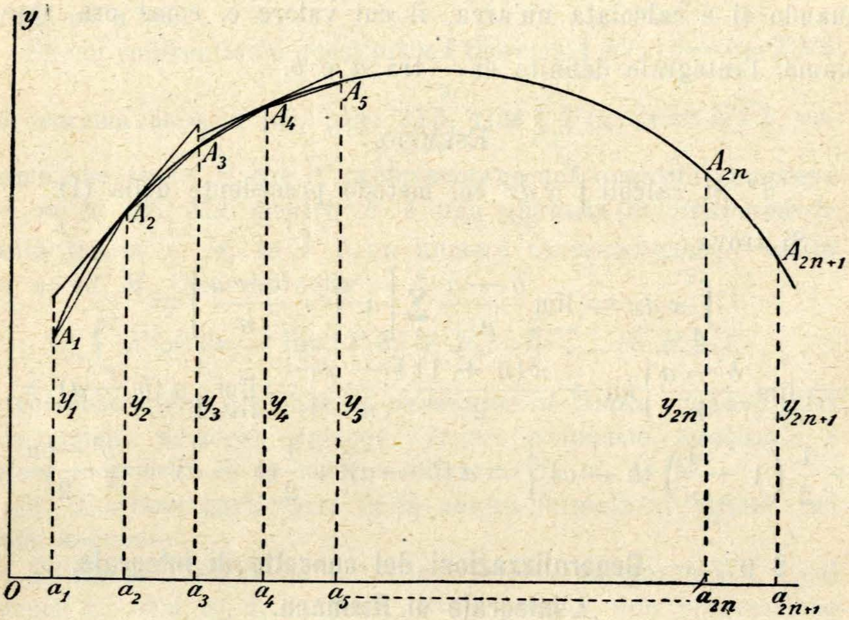

Fig. 35.

Rappresentiamo questo integrale con l'area del rettangoloide compreso tra l'asse delle x, la curva $y = f(x)$ e le ordinate

$$x = a\,;\; x = b.$$

Supponiamo che la curva $y = f(x)$ presenti la concavità (*) verso l'asse delle x; nella fig. 35 è indicato con

$$A_1\, A_{2n+1}\, a_1\, a_{2n+1}$$

(*) Supponiamo così che esistano le tangenti alla curva, che esse siano esterne al rettangoloide di cui si calcola l'area; in una parola che sia $f''(x) < 0$.

il rettangoloide, di cui vogliamo calcolare l'area. Dividiamo la base del rettangoloide in $2n$ parti uguali; indichiamo i punti di divisione con $a_1 = a, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_{2n+1} = b$ e conduciamo per tali punti le ordinate $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_{2n+1}$. Se traccio i segmenti

$$A_1 A_2, A_2 A_3, \ldots\ldots, A_{2n} A_{2n+1},$$

ottengo tanti trapezi $A_1 A_2 a_1 a_2$, $A_2 A_3 a_2 a_3 \ldots\ldots$, la cui somma ci dà un poligono tutto interno al rettangoloide $A_1 A_{2n+1} a_1 a_{2n+1}$; quindi la somma delle aree di detti trapezi ci darà un valore approssimato per difetto dell'area del rettangoloide e quindi un valore approssimato per difetto di $\int_a^b f(x)\,dx$.

Ora, se con B indico il segmento $ab = a_1 a_{2n+1}$, sarà $\frac{B}{2n}$ il valore di ognuna delle $2n$ parti uguali in cui esso è stato diviso, ossia l'altezza di ognuno dei trapezi ottenuti; le basi di questi essendo poi rispettivamente le ordinate $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_{2n+1}$, sarà:

$$\text{area } A_1 A_2 a_1 a_2 = \frac{B}{2n} \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\text{area } A_2 A_3 a_2 a_3 = \frac{B}{2n} \frac{y_2 + y_3}{2}$$

. . . .

$$\text{area } A_{2n} A_{2n+1} a_{2n} a_{2n+1} = \frac{B}{2n} \frac{y_{2n} + y_{2n+1}}{2}.$$

E l'area totale del poligono interno al rettangoloide sarà la somma delle aree precedenti

$$\frac{B}{2n} \left\{ \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \ldots\ldots + \frac{y_{2n} + y_{2n+1}}{2} \right\}.$$

Osservando che tutte le ordinate y compaiono ciascuna due volte nella formula precedente tranne y_1 e y_{2n+1}, potremo anche scrivere:

$$\frac{B}{2n} \left\{ \frac{y_1 + y_{2n+1}}{2} + y_2 + y_3 + \ldots\ldots y_{2n} \right\} \tag{1}$$

come un valore approssimato per difetto di $\int_a^b f(x)$.

Cerchiamo analogamente un valore approssimato per eccesso dell'area della nostra figura; cerchiamo cioè un poligono che comprenda all'interno tutta la figura data. A tale scopo per i punti

$$(a_2, y_2),\ (a_4, y_4), \ldots\ldots (a_{2n}, y_{2n})$$

tracciamo le tangenti alla curva (nella figura sono disegnate soltanto le prime due). Consideriamo poi il trapezio limitato dalla tangente nel punto (a_2, y_2) dalle ordinate di ascissa a_1, a_3 e dall'asse delle x. Consideriamo il trapezio limitato dalla tangente nel punto (a_4, y_4), dalle ordinate di ascissa a_3 e a_5 e dall'asse delle x; e così via fino all'ultimo trapezio limitato dalla tangente nel punto (a_{2n}, y_{2n}), dalle ordinate di ascissa a_{2n-1}, a_{2n+1} e dall'asse delle x. La somma di tutti questi trapezi costituisce appunto un poligono che comprende all'interno il nostro rettangoloide.

Cerchiamone l'area: essa è la somma delle aree di tutti i trapezi citati. Nel primo di essi l'ordinata y_2 è la parallela alle basi condotta dal punto di mezzo dell'altezza $a_1 a_3$, ed è uguale perciò alla semisomma delle basi. Poichè l'altezza $a_1 a_3$ vale $2\dfrac{B}{2n} = \dfrac{B}{n}$, l'area di detto trapezio sarà $\dfrac{B}{n} y_2$. In modo simile le aree degli altri trapezi valgono ordinatamente

$$\frac{B}{n} y_4,\ \frac{B}{n} y_6, \ldots\ldots, \frac{B}{n} y_{2n};$$

e l'area totale del nostro poligono varrà

$$\frac{B}{n}(y_2 + y_4 + y_6 + \ldots\ldots y_{2n}), \qquad (2)$$

che è quindi un valore approssimato *per eccesso* di $\int_a^b f(x)\,dx$.

Al crescere di n, cresce generalmente l'approssimazione che le formole (1), (2) dànno per il valore di questo integrale; la differenza tra (1) e (2) tende anzi a zero per $n = \infty$ (Cfr. questo § 98, ζ, pag. 324).

β) Se la curva $y = f(x)$ volgesse la convessità verso l'asse delle x, e quindi la tangente in ogni suo punto penetrasse nel rettangoloide, il ragionamento si invertirebbe, in quanto che il poligono avente per lati il segmento $a_1 a_{2n+1}$ dell'asse delle x, le ordinate y_1, y_{2n+1} degli estremi a, b e le corde $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, ..., che nel primo caso era contenuto nel rettangoloide, contiene ora invece il rettangoloide all'interno; e il suo valore (1) rappresenta quindi un valore approssimato *in eccesso* del nostro integrale.

Laddove invece il poligono avente per lati il segmento $a_1\, a_{2n+1}$, le ordinate degli estremi, a_1, a_{2n+1}, e le tangenti nei punti

$$A_2,\ A_4, \ldots\ldots, A_{2n}$$

è tutto interno al nostro rettangoloide, e la sua area (2) rappresenta un valore approssimato *in difetto* del nostro integrale.

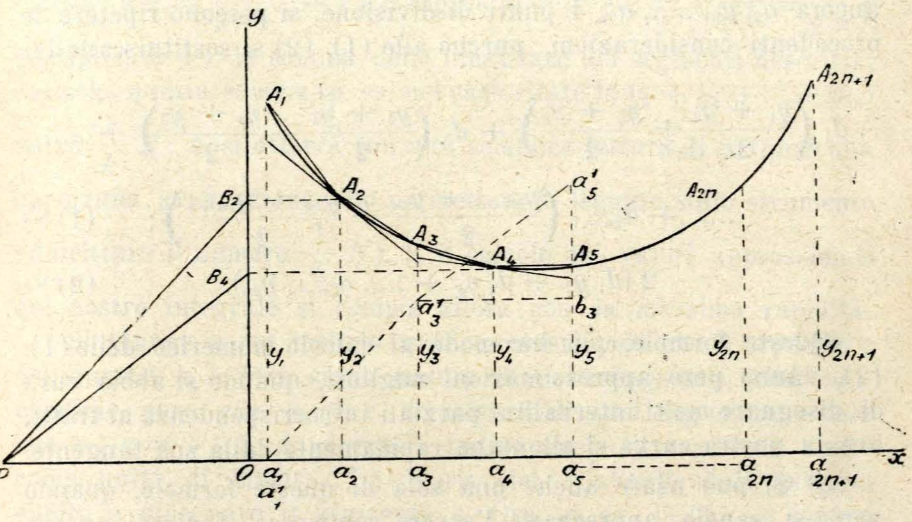

Fig. 36.

γ) Se la $f(x)$ fosse negativa nell'intervallo che si considera, si possono ripetere le considerazioni precedenti con poche modificazioni, purchè si considerino negative le aree dei poligoni considerati. In altre parole, il nostro integrale è negativo; e per il suo valore assoluto si possono ripetere le precedenti considerazioni.

δ) Se l'intervallo, a cui è esteso $\int f(x)\, dx$, fosse un intervallo, in parte del quale la $f(x)$ è positiva, e in parte del quale la $f(x)$ è negativa, o anche se in una parte dell'intervallo la $y = f(x)$ volge la concavità all'asse delle x, mentre nell'altra parte volge la convessità, allora supporremo (come avviene sempre nei casi comuni) che l'intervallo si possa dividere in un numero *finito* di intervalli parziali, in ciascuno dei quali la $f(x)$ ha un segno costante, e la $y = f(x)$ volge la concavità sempre da una stessa parte, cioè p. es., anche $f''(x)$ ha segno costante (potendo esser nulla agli estremi dell'intervallo parziale considerato). Si applicano a ciascuno di questi intervalli parziali i metodi precedenti. La somma dei valori approssimati in difetto così ottenuti, e la somma dei valori approssimati per eccesso costituiranno un valore approssimato in difetto, e un valore approssimato per eccesso del nostro integrale.

ε) Il metodo precedente si può generalizzare, dividendo (a, b) in $2\,n$ parti $d_1, d_2, d_3, \ldots\ldots, d_{2n-1}, d_{2n}$ non tutte uguali tra di loro, ma soltanto tali che $d_1 = d_2, d_3 = d_4, \ldots\ldots, d_{2n-1} = d_{2a}$. Detti ancora $a_2, a_3, \ldots\ldots, a_{2n}$ i punti di divisione, si possono ripetere le precedenti considerazioni, purchè alle (1), (2) si sostituiscano le:

$$d_1\left(\frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2}\right) + d_3\left(\frac{y_3 + y_4}{2} + \frac{y_4 + y_5}{2}\right) + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + d_{2n-1}\left(\frac{y_{2n-1} + y_{2n}}{2} + \frac{y_{2n} + y_{2n+1}}{2}\right); \qquad (1)^{\text{bis}}$$

$$2\,(d_1\,y_2 + d_3\,y_4 + \ldots\ldots\, d_{2n-1}\,y_{2n}). \qquad (2)^{\text{bis}}$$

Queste formole, più incomode al calcolo numerico delle (1), (2), dànno però approssimazioni migliori, quando si abbia cura di disegnare molti intervallini parziali in corrispondenza ai tratti, ove la nostra curva si allontana rapidamente dalla sua tangente.

ζ) Si può usare anche una sola di queste formole, quando però si sappia apprezzare l'*errore* commesso. Indicati ancora con a_s i punti di divisione (cosicchè $a_{2i\pm 1} = a_{2i} \pm d_{2i}$), posto $y_s = f(a_s)$ e $y'_s = f'(a_s)$, sarà per la formola di Taylor-Lagrange $y_{2i\pm 1} = f(a_{2i} \pm d_{2i}) = y_{2i} \pm d_{2i}\,y'_{2i} + \dfrac{1}{2}\,d^2_{2i}\,\beta_{2i\pm 1}$ dove le β sono valori intermedii di y''. Poichè $d_{2i} = d_{2i-1}$, il valore assoluto della differenza tra $(1)_{\text{bis}}$ e $(2)_{\text{bis}}$ (a cui tale *errore* non può essere superiore) non supera (supposto finito il limite superiore H di $|\,y''\,|$) $\dfrac{1}{2}\,H(d_2^2 + d_4^2 + \ldots\ldots + d_{2n}^2)$. Se, p. es., i d sono tutti uguali tra loro, e quindi a $\dfrac{B}{2\,n}$, tale *errore* non supera $\dfrac{HB^2}{8\,n}$, che *tende a zero per* $n = \infty$ (cfr. questo § 98, α, pag. 322).

η) Le (1), (2) si prestano bene ad un calcolo meccanico; le $(1)_{\text{bis}}$, $(2)_{\text{bis}}$, oltre alle più semplici (1), (2) si prestano anche a un calcolo grafico.

Si giunge a un procedimento meccanico, osservando che le somme $y_2 + y_3 + ... + y_{2n}$ e $y_2 + y_4 + y_6 + ... + y_{2n}$, che compaiono nelle (1), (2) si calcolano facilmente così: Una rotella R munita di un contagiri sia fatta rotare senza strisciare sul foglio F del disegno in guisa che il punto di contatto descriva successivamente uno o più segmenti (p. es., $y_2, y_3, ..., y_{2n}$). Il numero N dei giri compiuti da R (che si legge sul contagiri) sarà uguale ad una certa costante k (dipendente dalla data rotella; è $k = \frac{1}{2\pi r}$, se r è il raggio di R ed è $k = 1$ se $r = \frac{1}{2\pi}$) moltiplicata per la somma delle lunghezze dei segmenti descritti; cosicchè questa somma (p. es. nel caso citato la $y_2 + y_3 + ... + y_{2n}$) varrà $\frac{1}{k} N$; e si otterrà con una semplice lettura di N (anzi una opportuna graduazione può permettere di leggere sullo strumento addirittura il numero $\frac{1}{k} N$). E il calcolo dei valori approssimati del nostro integrale si compie allora con la massima rapidità.

Si giunge a un metodo grafico, osservando che il prodotto c dei numeri a, b (che siano misura di certi segmenti, che indicheremo pure con a, b) è la misura di quel segmento c tale che $c : a = b : 1$, dove con 1 indico anche il segmento scelto come unità di misura. La teoria dei triangoli simili insegna subito a disegnare il segmento c Ora, p. es., la $(2)_{\text{bis}}$ è somma di più termini, ciascuno dei quali è prodotto delle misure di due segmenti, e per cui è quindi applicabile il metodo precedente (*).

(*) Riferendoci alla fig. 36 di questo § 98, β, pag. 323, si indicheranno con P il punto dell'asse delle x, che ha per ascissa -1, con $B_2, B_4, ...$ le proiezioni di $A_2, A_4, ...$ sull'asse delle y, con $d_1, d_2, d_3, ...$ i segmenti $a_1\, a_2$, $a_2\, a_3$, $a_3\, a_4$, ... E si supponga soltanto $d_1 = d_2$, $d_3 = d_4$, ecc. (anche se $d_1, d_3, ...$ sono differenti tra loro). Indichiamo con a'_3 il punto ove la parallela tirata da a_1 a PB_2 incontra $a_3\, A_3$; con a'_5 il punto ove la parallela tirata da a'_3 a PB_4 incontra $a_5\, A_5, ...$; con a'_{2n+1} il punto ove la parallela tirata da a'_{2n-1} alla PB_{2n} incontra $a_{2n+1}\, A_{2n+1}$. Dico che *il segmento $a_{2n+1}\, a'_{2n+1}$ vale la somma* $(2)_{\text{bis}}$.

Infatti, posto $a'_1 = a_1$, si tirino da a'_{2i-1} una parallela all'asse delle x, da a'_{2i+1} la parallela all'asse delle y (nella figura è $i = 2$). Queste rette insieme alla $a'_{2i-1}\, a'_{2i+1}$ formano un triangolo simile al triangolo POB_{2i} (per $i = 1, 2, ..., n$). E se ne deduce che la differenza tra le ordinate di a'_{2i+1} e a'_{2i-1} sta a $d_{2i-1} + d_{2i}$ come $OB_{2i} = y_{2i}$ sta a $PO = 1$, ossia che tale differenza vale $2y_{2i}\, d_{2i-1}$, che è un termine di $(2)_{\text{bis}}$.

La somma di tutte queste differenze, cioè

$$(a_{2n+1}\, a'_{2n+1} - a_{2n-1}\, a'_{2n-1}) + (a_{2n-1}\, a'_{2n-1} - a_{2n-3}\, a'_{2n-3}) + ...$$
$$..... + (a_5\, a'_5 - a_3\, a'_3) + (a_3\, a'_3 - a_1\, a'_1),$$

cioè $a_{2n+1}\, a'_{2n+1}$ (il lettore ricordi che $a_1\, a'_1 = 0$) vale dunque la somma $(2)_{\text{bis}}$, come dovevasi provare.

δ) Esistono altri metodi di calcolo approssimato di tipo analogo: uno di essi consiste nel sostituire alla funzione $y = f(x)$ la funzione $y = p(x)$, dove $p(x)$ è un polinomio di grado $m - 1$, che in m punti dell'intervallo (a, b) assume lo stesso valore che $f(x)$, (per il calcolo di tale polinomio cfr. § 27, pag. 90 e pag. 48) e dove m è un intero abbastanza grande.

Oppure si può dividere l'intervallo totale (a, b) in r intervallini parziali $l_1, l_2, \ldots\ldots l_r$, applicare a ciascuno di questi intervallini il nostro metodo, sostituendo in l_i alla $f(x)$ un conveniente polinomio $p_i(x)$ di grado $m_i - 1$, che in m_i punti di l_i coincida con $f(x)$, e infine calcolare l'integrale di $p_i(x)$ esteso ad l_i e sommare gli integrali così trovati.

Il metodo dei rettangoli coincide con questo, quando si supponga $m_i = 1$.

Il metodo dei trapezi si ottiene supponendo $m_i = 2$.

Il metodo dei trapezi inscritti, da noi svolto più sopra, coincide con questo, quando suppongo $r = 2n, m_i = 2$, e ogni polinomio (di primo grado) $p_i(x)$ sia supposto uguale ad $f(x)$ agli estremi del corrispondente intervallino. Il metodo dei trapezi circoscritti si deduce dall'attuale, supponendo $r = n$, $m_i = 2$, e facendo tendere al punto di mezzo di $l_i = 2\,d_{2i} = 2\,d_{2i-1}$ i due punti di l_i, ove si suppone $f(x) = p_i(x)$. In entrambi i casi le linee $y = p_i(x)$ sono rette (corde o tangenti). Se invece $m_i = 3$, le $y = p_i(x)$ sono parabole. Supposti, p. es., gli l_i tutti uguali a $\frac{B}{r}$, posto $r = n$, supposto $f(x) = p_i(x)$ agli estremi a_{2i-1}, a_{2i+1} di l_i ed al punto di mezzo a_{2i} di l_i posto $y_s = f(a_s)$, il contributo portato da l_i (cioè l'integrale di $p_i(x)$ tra i limiti a_{2i-1}, a_{2i+1}) si calcola facilmente uguale a $\frac{B}{6\,n}[y_{2i-1} + y_{2i+1} + 4y_{2i}]$. La somma di questi contributi per $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ è un nuovo valore approssimato del nostro integrale. Anche questo metodo si può variare nei modi più molteplici.

Il lettore applichi quanto precede a qualche esempio numerico. Per altri metodi meccanici cfr. gli ultimi §§ di questo libro.

§ 99. — **Metodi e locuzioni abbreviate.**

α) Di locuzioni non precise, ma comode, e che si possono intendere soltanto come modi abbreviati di enunciare considerazioni precise ma più lunghe, abbiamo già discorso altrove (§ 54, pag. 177). Tali modi di esposizione si applicano pure nel calcolo integrale.

Per i teoremi dei paragrafi 96 e 96bis si può definire $\int_a^b F(x)\,dx$ nel modo seguente:

Si divida l'intervallo (a, b) in più intervallini parziali δ_i (la cui misura si prenderebbe negativa se $a > b$) e la cui ampiezza faremo poi tendere a zero (*).

In uno di questi intervallini la $F(x)$ avrà generalmente infiniti valori. Moltiplichiamo δ_i per uno di questi valori F_i scelto ad arbitrio.

Il $\lim\limits_{\delta=0} \Sigma \delta_i F_i$ è integrale cercato.

Ecco invece come confronto le locuzioni a cui si è accennato più sopra.

Dividiamo l'intervallo (a, b) in infiniti intervallini parziali infinitesimi δ_i (la cui misura si prenderà positiva, se, come supponiamo, $b > a$). In ciascuno di questi intervallini infinitesimi la $F(x)$ si potrà considerare come costante. La somma $\Sigma_i \delta_i F_i$ degli infiniti prodotti ottenuti moltiplicando l'ampiezza di uno di questi intervalli per il corrispondente valore di F è l'integrale di $F(x)$ da a a b.

Per dedurne che, se si considera b come variabile, la derivata di questo integrale rispetto alla b è proprio uguale a $F(b)$, si procede nel seguente modo, che noi considereremo al solito soltanto come una esposizione abbreviata. Si dia alla b un incremento infinitesimo db, che, per fissar le idee, supporremo positivo (come supponiamo positiva la differenza $b - a$). L'intervallo

$$(a, b + db) = (a, b) + (b, b + db)$$

è uguale alla somma degli intervallini δ_i e di db; perciò l'integrale relativo ad esso è uguale a $\Sigma \delta_i F_i + F(b)\, db$ [poichè in $(b, b + db)$ la $F(x)$ si può pensare conservi il valore costante $F(b)$]. L'incremento ricevuto dal nostro integrale è così $F(b)\, db$, e la sua derivata è quindi $F(b)$. c. d. d.

Per dimostrare poi, p. es., che l'area del rettangoloide $ABB'A'$ (fig. 37) è uguale al solito integrale definito, si osservi che la divisione di $A'B' = (a, b)$ in infiniti intervallini infinitesimi δ definisce la divisione del nostro rettangoloide

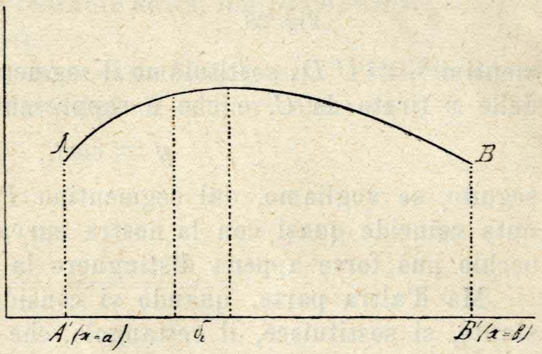

Fig. 37.

(*) Con ciò s'intende che il più lungo degli intervallini parziali abbia una misura, che facciamo tendere a zero, variando il sistema di divisioni.

in infiniti rettangoloidi parziali infinitesimi. In ciascuno di essi la y si può considerare come costante; cosicchè il lato opposto all'asse delle x si può considerare come un segmento parallelo all'asse delle x. L'area di tale rettangoloide parziale è perciò $\delta_i F_i$; e il rettangoloide totale ha quindi per area $\Sigma_i \delta_i F_i$. c. d. d.

β) Ma osserviamo un po' più precisamente le locuzioni sopra esposte. La frase *Dividiamo* (a, b) *in infiniti intervallini infinitesimi* traduce proprio la stessa idea che noi enunciamo dicendo: Dividiamo (a, b) in intervallini δ_i, che facciamo tendere a zero ossia che rendiamo infinitesimi (facendone contemporaneamente crescere il numero all'infinito).

Più istruttivo è invece l'esame della seconda parte delle precedenti definizioni e dimostrazioni. Vi si dice: *In ciascuno degli intervalli infinitesimi* δ_i la F (x) *si può considerare come costante.* Da un punto di vista empirico questa asserzione si potrebbe giustificare così (fig. 38). Se, p. es., i segmentini δ_i sono i più piccoli segmenti che noi riusciamo a disegnare, e se noi al pezzo CD della curva $y = F(x)$, che si proietta in uno di tali segmentini $\delta_i = C'D'$, sostituiamo il segmento CP parallelo all'asse delle x tirato da C, e che è rappresentato da un'equazione

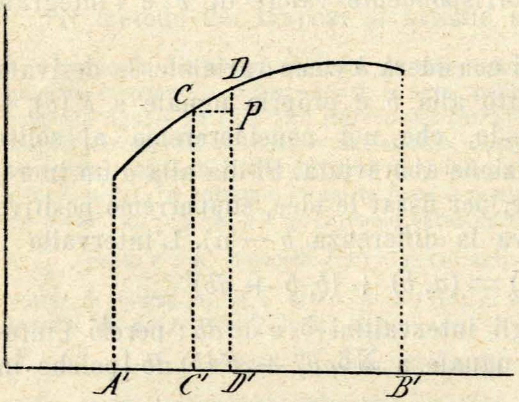

Fig. 38.

$$y = \text{cost.},$$

seguìto, se vogliamo, dal segmentino PD, la spezzata così ottenuta coincide quasi con la nostra curva, in quanto che il nostro occhio può forse appena distinguere la curva dalla spezzata.

Ma d'altra parte, quando si considera in δ_i la y come costante, si sostituisce, il rettangolo, che ha per base δ_i e per lato opposto il segmento CP, al rettangoloïde parziale che ha per base δ_i; e si trascura così il triangoletto curvilineo DPC. Vediamo come si può prevedere in modo diretto che il trascurare tali triangolini non conduce ad errori. Supponiamo per semplicità che la $F(x)$ abbia nell'intervallo (a, b) un minimo $m \neq 0$. Il triangolino DPC è evidentemente interno al rettangolo, che ha per base CP e per altezza la differenza $M_i - m_i$ tra il massimo e il minimo di $F(x)$ in δ_i; ed ha quindi un'area a_i inferiore a $(M_i - m_i)\delta_i$. Il rettangolo che ha per base δ_i e per lato opposto CP ha un'area A_i non inferiore a $m\delta_i$. Il rapporto $\frac{a_i}{A_i}$ dell'area di uno dei nostri triangolini al corrispondente rettangolo non supera quindi $\frac{M_i - m_i}{m}$.

Ora, scegliendo i δ_i abbastanza piccoli, noi sappiamo (§ 40, pag. 135, e § 63, pag. 197) che si possono rendere *tutte* le $M_i - m_i$ e perciò anche *tutti* questi rapporti minori di un numero ε prefissato ad arbitrio. Dunque *non solo le* a_i *sono infinitesimi di ordine superiore rispetto alle* A_i, *ma anzi si possono rendere i rapporti* $\frac{\mathrm{a}_i}{\mathrm{A}_i}$ **contemporaneamente** *minori di un numero* ε *prefissato ad arbitrio.*

È facile dimostrare in tale ipotesi che

$$\lim\left[\Sigma A_i - \Sigma (A_i + a_i)\right] = 0.$$

Infatti, scelti i δ_i così piccoli che $\left|\frac{a_i}{A_i}\right| < \varepsilon$, sarà anche $\left|\frac{\Sigma a_i}{\Sigma A_i}\right| < \varepsilon$; $|\Sigma a_i| < \varepsilon\,|\Sigma A_i|$; $|\Sigma (A_i + a_i) - \Sigma A_i| < \varepsilon\,|\Sigma A_i|$; e quindi, *supposto*, come nel caso nostro, *che le* $\Sigma\,\mathrm{A}_i$ *siano numeri limitati*, inferiori cioè ad una costante finita, $\lim\left[\Sigma (A_i + a_i) - \Sigma A_i\right] = 0$ come dovevasi dimostrare.

È trovato così un nuovo caso (§ 52, pag. 172), in cui è lecito trascurare gli infinitesimi di ordine superiore.

CAPITOLO XVI.

FUNZIONI ADDITIVE GENERALI E INTEGRALI MULTIPLI

§ 100. — Funzioni additive e loro derivate.

α) Se I è un intervallo, o una figura piana (*), o un solido, noi diremo che $S(\tau)$ è una *funzione additiva dei pezzi* τ (**) *di* I, *se per ogni pezzo* τ *di* I *esiste uno e un solo valore di* S; *e se in più, quando* τ *è somma di due punti* τ', τ'', *è* $S(\tau) = S(\tau') + S(\tau'')$.

Così, se I è una sbarra, o una lamina piana, o un solido pesante, il peso m di un pezzo τ di I è funzione additiva di τ.

Così, se I è una lamina, o un corpo elettrizzato, la componente, p. es., sull'asse delle x, dell'attrazione che un pezzo τ di I esercita su un punto elettrizzato M è una funzione additiva di τ.

Dall'esame della figura composta di due soli punti materiali, la Meccanica induce il seguente teorema: *Se* I *è una lamina o un corpo pesante, il peso* m *di un suo pezzo* τ *moltiplicato per una coordinata, p. es. l'ascissa* x, *del centro di gravità di* τ *è una funzione additiva* $X(\tau)$ *della* τ. Cosicchè *l'ascissa* x *del centro di gravità appare come quoziente delle* X, m: entrambe funzioni additive di τ.

Più avanti vedremo che la ricerca della lunghezza di una curva e dell'area di una superficie sghemba si riducono al calcolo di speciali funzioni additive. Bastino questi esempi ad illustrare l'importanza di tali funzioni!

(*) Si potrebbero anche considerare degli I che fossero un pezzo di una linea, o di una superficie qualsiasi, p. es., un arco I di cerchio, o un poligono sferico I.

(**) Ci limiteremo a considerare quei pezzi τ di I, che posseggono una misura (p. es., lunghezza, area, volume). Per il significato delle parole: figura piana, suo contorno, ecc., cfr. l'osservazione a pag. 25. Noi ci limiteremo sempre a figure piane o solide, il cui contorno è formato da un numero finito di linee o superficie, rappresentabili con equazioni, i cui membri sono finiti e continui con le loro derivate.

β) Il seguente esempio ha per noi una specialissima importanza. Sia $z = F(x, y)$ l'equazione di un pezzo K di superficie; sia $F \geqq 0$; sia I la proiezione di K sul piano $x\,y$.

Sia $F(x, y)$ continua. Chiamiamo *cilindroide* la figura solida limitata da K, da I (base del cilindroide) e dal cilindro proiettante il contorno di K sul contorno di I.

Ogni pezzo τ di I sarà base di un cilindroide parziale: luogo di quei punti del cilindroide iniziale, che si proiettano sul piano $x\,y$ in punti di τ. Il *volume* S (τ) *di tale cilindroide parziale* (o, se tal volume non fosse definito, il volume interno oppure il volume esterno di tale cilindroide) *è una funzione additiva di* τ.

Infatti se τ è somma dei due pezzi τ_1, τ_2, allora il cilindroide parziale di base τ è somma di cilindroidi aventi per base τ_1, oppure τ_2. (Per i volumi interni od esterni cfr. quanto si disse per l'area esterna od interna di un rettangoloide a pag. 25).

γ) Se $S(\tau)$ è una funzione additiva dei pezzi τ di I, e se τ è la misura (*) (p. es., lunghezza, area, volume, ecc.) del pezzo τ, allora può darsi che il rapporto $\dfrac{S(\tau)}{\tau}$ tenda ad un limite finito, quando tutti i punti di τ si avvicinano a un punto A di I. Se tale limite *esiste per tutti i punti* A di I, esso è una *funzione* F *delle coordinate del punto* A. (Cioè esso non è più, come $S(\tau)$, una funzione del campo τ, ma soltanto una funzione delle una, due o tre coordinate del punto A). Se questa funzione F è continua, noi la chiameremo *derivata* di S (rispetto a τ) e scriveremo $S'_\tau = F$. Se, p. es., I è una figura pesante, e se $S(\tau)$ è il peso del pezzo τ, allora F è la *densità* nel punto A.

Es. I. Se $S(\tau)$ è il volume del precedente cilindroide parziale, si dimostra (analogamente a quanto si è fatto a pag. 311 per i rettangoloidi) che la sua derivata in un punto A vale precisamente il valore in questo punto di $z = F(x, y)$.

Es. II. Così sia I una lamina o un corpo pesante; assumiamo come misura τ di un suo pezzo τ non già l'area o il volume di τ, ma precisamente il peso τ di τ (**). Sia $X(\tau)$ quella funzione additiva di τ, che è uguale al prodotto del peso τ di τ per l'ascissa x_g del suo centro di gravità. La $X(\tau) = \tau\, x_g$ è

(*) Indicheremo quasi sempre con la stessa lettera un campo, e la sua misura.

(**) Anche comunemente è molteplice il modo di definire la misura di un corpo (p. es., il volume, il peso, il prezzo di esso). In generale si può assumere come misura di τ ogni funzione additiva e positiva di τ.

una funzione additiva di τ. Notiamo che $\dfrac{X(\tau)}{\tau} = x_g$ è compresa tra il massimo e il minimo valore che ha l'ascissa x di un punto di τ. Quindi, se tutti i punti di τ tendono ad uno stesso punto A di τ, il $\lim \dfrac{X(\tau)}{\tau}$ vale precisamente l'ascissa x del punto A. Cioè x è la derivata della nostra funzione $X(\tau)$.

Es. III. Sia I una parete piana verticale di una vasca piena di acqua (un bacino di carenaggio, p. es.). La pressione che tale acqua esercita su un pezzo τ di I è quella funzione additiva di τ, la cui derivata in un punto A di I vale la distanza da A al pelo libero dell'acqua stessa.

Es. IV. Sia I una curva del piano $x\,y$; supponiamo che i punti di I siano in corrispondenza biunivoca con la loro proiezione sull'asse delle x. Assumiamo come misura τ di un pezzo τ di I la lunghezza della sua proiezione sull'asse delle x. Se $M(x, y)$ è una funzione continua delle x, y in tutta una regione contenente I all'interno, allora lo $\int M(x, y)\,dx$ esteso a un pezzo τ di I è quella funzione additiva di τ, che nei punti di I ha $M(x, y)$ per derivata.

Oss. È perfettamente lecito definire nel modo qui enunciato la misura τ di un pezzo τ di I, perchè vengono rispettate le proprietà essenziali di una *misura* (che un pezzo τ di I somma di due pezzi τ', τ'' ha per misura la somma delle misure di τ', τ'', ecc.). (Cfr. la precedente nota a piè di pagina).

§ 101. — **Estensione dei principali teoremi del calcolo differenziale.**

α) Per queste derivate si possono estendere molti teoremi di calcolo. Bisognerebbe, per restare nel campo più generale, limitare un po' il tipo di campi τ, per i quali si costruiscono i rapporti $\dfrac{S(\tau)}{\tau}$, che compaiono nella definizione di derivata. Questa generalità è però inutile a noi che *supponiamo la derivata* F *continua.* Noi estenderemo il teorema della media.

Se S(τ) *possiede derivata* F *continua in ogni punto di* I (inclusi i punti del contorno di I), *allora* $\dfrac{\mathrm{S}(\tau)}{\tau}$ *è compreso tra* *il limite superiore* L *e l'inferiore* I *dei valori della derivata* F *nei punti di* τ (*).

Se, p. es., $S(\tau)$ è il peso del pezzo τ, allora $\frac{S(\tau)}{\tau}$ è la *densità media* di τ; e tale teorema ci dice (precisamente come nel caso delle sbarre) che la *densità media* di un pezzo τ non può superare il massimo (o il limite superiore), nè essere inferiore al minimo (o limite inferiore) della densità nei varii punti del pezzo considerato.

Dimostriamo, p. es., che non può essere $\frac{S(\tau)}{\tau} = L + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$. Diviso infatti τ in due campi parziali τ_1 e τ'_1, sarebbe $S(\tau) = S(\tau_1) + S(\tau'_1)$; cosicchè

$$\frac{S(\tau)}{\tau} = \frac{S(\tau_1) + S(\tau'_1)}{\tau_1 + \tau'_1} = L + \varepsilon.$$

Poichè $\frac{S(\tau_1) + S(\tau'_1)}{\tau_1 + \tau'_1}$ non può superare la più grande delle $\frac{S(\tau_1)}{\tau_1}$, $\frac{S(\tau'_1)}{\tau'_1}$, una di queste frazioni, p. es. la $\frac{S(\tau_1)}{\tau_1}$, sarà non minore di $L + \varepsilon$. In τ_1 esisterà, come si dimostra in modo analogo, un campo τ_2 tale che $\frac{S(\tau_2)}{\tau_2} \geqq L + \varepsilon$. E così via.

È facile dare una legge di divisione dei successivi campi τ, τ_1, τ_2, ecc., in campi parziali così che esista uno e un solo punto A interno a tutti i campi τ, τ_1, τ_2, ecc. La derivata di $S(\tau)$ in A, cioè $\lim_{n=\infty} \frac{S(\tau_n)}{\tau_n}$ non potrà dunque essere inferiore ad $L + \varepsilon$; ciò che è assurdo, perchè L è il limite superiore dei valori di tale derivata in tutto τ.

β) Possiamo anche estendere la nozione di differenziale. Se F è la derivata di S, il $\lim \frac{S(\tau)}{\tau}$, quando tutti i punti di τ tendono a un punto A, o, come diremo, per $\tau = A$, vale il valore $F(A)$ della F nel punto A. Cosicchè $\lim_{\tau = A} \left[\frac{S(\tau)}{\tau} - F(A)\right] = 0$. Potremo dunque scrivere:

$$\frac{S(\tau)}{\tau} = F(A) + \varepsilon,$$

dove ε tende a zero per $\tau = A$, ossia

$$S(\tau) = F(A)\,\tau + \varepsilon\tau.$$

(*) Si potrebbe provare che $\frac{S(\tau)}{\tau}$ è proprio uguale al valore di F in un punto A di τ, se il valore di S corrispondente a uno strato (pezzo limitato da due rette o piani paralleli) di I tendesse a zero col tendere a zero dello spessore dello strato. Ma queste considerazioni hanno importanza soltanto per quegli studii più generali, a cui abbiamo accennato, che riguardano funzioni F non continue.

Il primo addendo $F(A)\tau$ si dirà il *differenziale* della S, e si indicherà con dS. Noi porremo perciò *per definizione*

$$dS = F(A)\,\tau.$$

Se $S = \tau$, se cioè S coincide addirittura con la misura di τ, la sua derivata sarà sempre uguale ad 1. Cosicchè il suo differenziale sarà dato dalla:

$$d\tau = \tau.$$

E la precedente equazione diventa:

$$dS = F(A)\,d\tau \quad , \quad \text{ossia} \quad F(A) = \frac{dS}{d\tau} \cdot$$

Anche in questo caso *la derivata si può considerare come un quoziente di differenziali.*

γ) È appena necessario avvertire che alle derivate delle funzioni additive si possono generalizzare i teoremi relativi alla derivazione di una somma, di una differenza (*). Noi ci limiteremo qui a dare un cenno della generalizzazione del teorema di derivazione di una funzione di funzione.

Siano I ed H due campi, i cui punti sono in corrispondenza biunivoca; con τ indichiamo sia i pezzi di I, che la loro misura; con k sia i pezzi di H che la loro misura. Sia $S(\tau)$ una *funzione additiva dei pezzi* τ *di* I; poichè ad ogni pezzo k di H corrisponde un pezzo τ di I, ad ogni pezzo di k di H corrisponde un valore di $S(\tau)$. *Cioè* S *si potrà considerare anche come funzione additiva dei pezzi* k *di* H.

La misura τ di quel pezzo τ di I, che corrisponde ad un pezzo k di H è anch'essa una funzione additiva di k. Supporremo che esista la sua derivata $\frac{d\tau}{dk} \cdot$

Che relazione passa *tra le derivate* $\frac{dS}{d\tau}$, $\frac{dS}{dk}$ della S, *pensata come funzione dei* τ *o dei* k?

Come per le funzioni di una sola variabile, *si dimostra che*: $\frac{dS}{dk} = \frac{dS}{d\tau}\frac{d\tau}{dk}$, o (come si può scrivere in altro modo) $S'_k = \tau'_k\, S'_\tau$, ossia che anche nel caso attuale i calcoli coi differenziali $d\tau$, dS, ecc. si effettuano con le stesse regole usate pei differenziali di una variabile, e si possono ripetere considerazioni analoghe a quelle del § 59, pag. 187.

(*) È appena da avvertire che prodotto o quoziente di due funzioni additive può non essere una funzione additiva.

δ) Diamo un'applicazione specialmente importante dell'ultima formola. I campi I ed H sieno addirittura sovrapposti; e noi conveniamo di considerarli distinti, perchè conveniamo di definire in modo differente la misura di un loro pezzo, secondo che questo pezzo è considerato come parte di τ di I, o come parte k di H. Se, p. es., $I = H$ è un corpo o una lamina pesante, come misura τ di un suo pezzo potremo assumere la sua misura geometrica (area o volume), come misura k il suo peso.

Se, p. es., $X(k)$ è quella funzione additiva di un suo pezzo k, che è uguale al prodotto del peso k del pezzo considerato per l'ascissa x del suo centro di gravità, la derivata X'_k in un punto A vale precisamente l'ascissa x di tale punto (pag. 332). D'altra parte la derivata $\frac{dk}{d\tau}$ in A è uguale alla densità ρ in questo punto. Quindi, se noi consideriamo X come funzione di τ, si ha:

$$k'_\tau = \rho\,;\ X'_\tau = k'_\tau X'_k = \rho x.$$

Quindi: *L'ascissa* x *del centro di gravità di un pezzo* τ *di* I *vale il quoziente di* $\frac{\mathrm{X}(\tau)}{\mathrm{k}(\tau)}$, *cioè di due funzioni additive la cui derivata vale rispettivamente* $\rho \mathrm{x}$ *e* ρ (se ρ è la densità).

ESEMPIO.

Sia I una massa attraente con la legge di Newton. Il potenziale dovuto a un suo pezzo τ in un punto esterno M è quella funzione additiva di τ, la cui derivata in un punto A di I vale $\frac{\rho}{r}$, se ρ è la densità, r la distanza AM.

§ 102. — Generalizzazione dei teoremi fondamentali del calcolo integrale.

Sia I un campo ad una o più dimensioni. Sia F una funzione continua delle coordinate di un suo punto. Con considerazioni analoghe a quelle dei §§ 96 e 96^{bis} (in cui si sostituisca alla considerazione dell'area di un rettangoloide quella del volume di un cilindroide, oppure quella del peso di un corpo o di una lamina pesante o un altro esempio di tipo analogo) si dimostra che:

I. *Esiste una e una sola funzione additiva* S (τ) *dei pezzi* τ *di* I, *che ha per derivata la data funzione continua* F.

II. *Il valore* S (τ) *di tale funzione corrispondente a un pezzo* τ *di* I *si può definire nel seguente modo. Scomposto il campo* τ *in campi parziali* $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots\ldots, \tau_n$, *detti* M_r *ed* m_r *il valor massimo e il valor minimo della* F *nel campo* τ_r *e detto* F_r *un qualsiasi numero compreso tra* m_r *ed* M_r, *il numero* S (τ)

α) *è il numero che separa le classi contigue generate dalle due somme* $\Sigma M\tau = M_1\tau_1 + M_2\tau_2 + \ldots\ldots + M_r\tau_r$ *e* $\Sigma m\tau = m_1\tau_1 + m_2\tau_2 + \ldots\ldots m_r\tau_r$, ($\tau_r$ *è la misura del campo parziale* τ_r *nelle convenzioni addottate*);

β) *è il limite di* $\Sigma F_r\tau_r = F_1\tau_1 + F_2\tau_2 + \ldots\ldots + F_r\tau_r$, *quando tende a zero la massima corda di ciascun pezzo* τ_r;

γ) *è proprio uguale a* $\Sigma \overline{F}_r\tau_r$, *se* $\overline{F}_r$ *è un numero* OPPORTUNAMENTE *scelto tra* m_r *ed* M_r.

Si può anche nel caso attuale estendere la definizione di integrale di Riemann per funzioni limitate.

III. *Se* I *è una regione del piano* xy *ed* $F(x, y) \geqq 0$, *allora* S (τ) *è il volume del cilindroide di base* τ, *luogo dei punti* (x, y, z) *per cui* $0 \leqq z \leqq F$, *e la cui proiezione sul piano* xy *appartiene a* τ.

Questa funzione additiva $S(\tau)$ si chiama l'integrale di F esteso al campo τ; il suo valore relativo al campo I o al campo τ si indica con $\int_I F d\tau$ o con $\int_\tau F d\tau$, estendendo così la definizione e la notazione usate per gli integrali definiti.

Se il campo I è a due sole dimensioni si suole usare la lettera σ oppure la s (iniziale della parola *superficie*) al posto della τ, se si assume come misura di un campo la sua area.

OSSERVAZIONE.

Per calcolare un integrale si può sempre ridurci al caso, che come misura di questo si addotti la misura geometrica (lunghezza, area o superficie). Se k fosse la misura adottata, e τ la misura geometrica, si osservi che $\int F dk = \int \theta\, d\tau$ se è posto $\theta = F\left(\frac{dk}{d\tau}\right)$ cioè uguale al prodotto di F per $\frac{dk}{d\tau}$, c. d. d. Se k fosse il peso, questo fattore $\frac{dk}{d\tau}$ sarebbe la *densità*.

Cominceremo dal caso di campi τ a due dimensioni.

ESEMPIO.

Così, come abbiamo già osservato a pag. 335, se I è una lamina o un corpo pesante, τ è l'area o il volume di un suo pezzo, ρ ne è la densità in un punto, allora l'ascissa del suo centro di gravità vale $\dfrac{\int_I x\rho\, d\tau}{\int_I \rho\, d\tau}$.

§ 103. — **Calcolo di un integrale superficiale.**

Se F (x, y) *è una funzione continua in una regione* σ *del piano* xy, *come si calcola lo* $\int_\sigma$ F (x, y) d σ? o meglio: *Come se ne può ridurre il calcolo a quello di integrali definiti?* Per vederlo cominceremo ad usare metodi poco rigorosi salvo a verificare poi i risultati ottenuti nel modo più preciso.

Se noi dividiamo l'area σ in pezzetti con rette parallele agli assi delle x e delle y, l'area σ verrà scomposta in rettangoli, e in altri pezzetti, il cui contorno contiene dei pezzi del contorno di σ. Se noi *supponiamo* (cfr. § 99, pag. 328) che questi ultimi pezzetti siano trascurabili (che diano cioè un contributo infinitesimo), basterà che consideriamo i rettangolini tutti interni a σ, la cui area è $\Delta x\, \Delta y$, se Δx e Δy sono rispettivamente le distanze di due delle rette da noi tirate parallelamente all'asse delle x, o all'asse delle y. Considerando dapprima i rettangoli posti p. es. in una stessa striscia parallela all'asse delle x, e poi le varie striscie, la somma $\Sigma F_i \delta_i$ dell'ultimo paragrafo diventa:

$$\sum F \Delta x \Delta y = \sum \Delta y \sum F \Delta x,$$

dove la $\Sigma F \Delta x$ è relativa ai rettangoli di una stessa striscia, mentre l'altro simbolo Σ di somma si riferisce alle varie striscie. Possiamo scegliere gli estremi di una retta (*) $y =$ cost. nel contorno di γ, e poi i valori F (**) intermedii in guisa tale che

(*) Suppongo gli estremi di una retta $y =$ cost. sul contorno di γ: ciò che è un errore perchè avendo trascurato i pezzetti posti sul contorno di γ, potrebbe darsi che gli estremi da considerare fossero interni a γ. Un'osservazione analoga si può ripetere più sotto. Noi ammettiamo *provvisoriamente* che l'errore commesso tenda a zero e sia quindi trascurabile.

(**) Suppongo che F sia il valore assunto da $F(x, y)$ su uno dei lati del nostro rettangolo paralleli all'asse delle x.

$\Sigma F \Delta x = \int F dx$. L'integrale così ottenuto dipende dal valore dato alla y; è cioè una funzione $\varphi(y)$ della y. Se essa è continua, allora $\lim_{\Delta y = 0} \Sigma \varphi(y) \Delta y = \int \varphi(y) dy$, cosicchè si avrà finalmente:

$$\int_\sigma F(x, y)\, d\sigma = \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y = 0}} \sum F \Delta x \Delta y = \int \left[\int F(x, y)\, dx \right] dy,$$

o come si suol scrivere:

$$\int_\sigma F(x, y)\, d\sigma = \int dy \int F(x, y)\, dx = \iint F(x, y)\, dx\, dy.$$

Nel cambiamento di variabili coordinate *non si può però* (come nel caso di funzioni di una sola variabile) applicare ai simboli dx, dy la regola per il calcolo dei differenziali (cfr. l'oss. 1ª del seg. § 108 a pag. 352).

Prima di dimostrare con rigore questa formola, dobbiamo intendere con precisione il suo significato. Quando noi abbiamo scritto

$$\int F(x, y)\, dx = \lim_{\Delta x = 0} \sum F \Delta x,$$

noi tenendo costante la y, cioè muovendoci su una retta AB parallela all'asse delle x (cfr. fig. 39) abbiamo trovato (a meno del fattore Δy) la somma dei contributi portati dai rettangolini contenuti nella striscia compresa tra la retta AB e la retta parallela consecutiva, su cui l'ordinata ha il valore $y + \Delta y$. Perciò la nostra integrazione è eseguita rispetto alla x (quando si considera la y come costante) in un intervallo che, al limite, coincide con AB (fig. 39). Cosicchè i limiti inferiore e superiore, tra cui si deve calcolare l'integrale $\int F(x, y)\, dx$, sono le

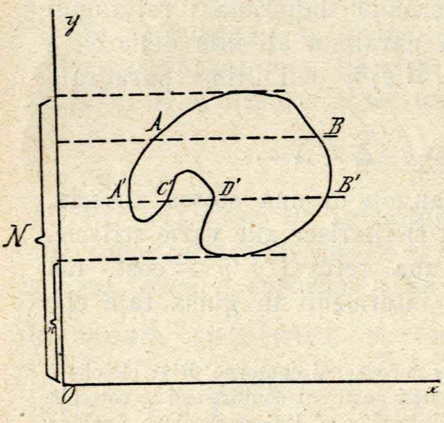

Fig. 39.

ascisse di A e di B. Chè se invece avessimo dato alla y il valore corrispondente alla retta $A'B'$ (cfr. fig. 39), il simbolo

$\int F(x, y)\, dx$ significherebbe la somma degli integrali (eseguiti considerando y come costante) estesi ai due intervalli $A'C'$, $D'B'$ che la retta $A'B'$ possiede interni all'area σ.

Il valore di $\int F(x, y)\, dx$ dipende perciò dal valore dato alla y; e cioè una funzione $\varphi(y)$ della y. E la nostra formola ci dice che noi dobbiamo integrare questa funzione rapporto ad y. Tra quali limiti si deve fare questa seconda integrazione? Poichè si deve tener conto di tutto il campo σ, essa dovrà quindi essere eseguita nell'intervallo (n, N), se n ed N sono i valori minimo e massimo della y in σ.

Se noi per fissare le idee supponiamo che il contorno di σ sia incontrato in due punti al più da una parallela a uno degli assi coordinati, le ascisse dei punti A, B dei punti ove una retta $y =$ cost. incontra il contorno di σ saranno due funzioni $\alpha(y)$ e $\beta(y)$ della y. E le ordinate dei punti C, D, ove una retta $x =$ cost. incontra il contorno di σ, saranno due funzioni $\gamma(x)$ e $\delta(x)$ della x.

Se dunque diciamo n, N ed l, L i valori minimi e massimi rispettivamente della y e della x in σ, troveremo:

$$(1) \qquad \int_\sigma F d\sigma = \int_n^N dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} F(x, y)\, dx \text{ (*)}.$$

E, scambiando i due assi, coordinati, troveremo per simmetria:

$$(2) \qquad \int_\sigma F d\sigma = \int_l^L dx \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} F(x, y)\, dy.$$

Come si vede, confrontando queste formole è lecito cambiare l'ordine delle integrazioni, purchè si cambino convenientemente i *limiti dei corrispondenti integrali*. È evidente che i limiti non dovrebbero essere cambiati nel caso che σ fosse un rettangolo coi lati paralleli agli assi coordinati (**), come il lettore può facilmente verificare facendo la figura.

(*) Si ricordi (§ 88) che se $F(x, y)$, $\alpha(y)$, $\beta(y)$ sono funzioni continue, anche $\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} F(x, y)\, dx$ è funzione continua della y e si può quindi integrare rispetto alla y.

(**) Si applichi questo risultato all'ultima formola del § 93, pag. 307. In questa formola i limiti d'integrazione sono uguali nei due membri, perchè siamo nel caso particolarissimo di un integrale doppio esteso a quel rettangolo coi lati paralleli agli assi coordinati, di cui l'origine e il punto (x, y) sono vertici opposti.

§ 104. — Interpretazione geometrica.

Supposto $F \geqq 0$, consideriamo il cilindroide limitato da quel pezzo della superficie $z = F(x, y)$, di cui σ è la proiezione sul piano xy, dal cilindro che ne proietta il contorno e da σ (base del cilindroide). Le formole precedenti hanno una notevole interpretazione geometrica. Consideriamo, p. es., la (1). Io dico che $\int F(x, y)\, dx$ *misura l'area della sezione fatta nel nostro cilindroide con un piano* $y =$ cost. Infatti, se la retta $y =$ cost. del piano xy interseca il contorno di σ in due soli punti A, B, questa sezione è evidentemente un rettangoloide limitato (fig. 40):

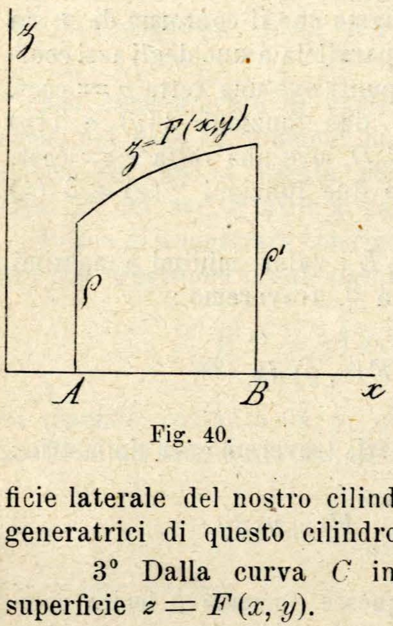

Fig. 40.

1° Dalla retta $r = AB$ parallela all'asse delle x in cui il piano secante interseca il piano xy, su cui giace la base del nostro cilindroide:

2° Dalle due rette ρ, ρ' ortogonali alla precedente, in cui il piano secante interseca il cilindro, superficie laterale del nostro cilindroide: rette che sono evidentemente generatrici di questo cilindro, e parallele all'asse delle z.

3° Dalla curva C in cui il nostro piano interseca la superficie $z = F(x, y)$.

Se noi assumiamo nel piano secante la retta r come asse delle x, e la retta in cui esso interseca il piano yz come asse delle z, la curva C avrà per equazione $z = F(x, y)$, dove alla y si attribuisca il valore costante corrispondente al nostro piano secante; e l'area del nostro rettangoloide sezione sarà perciò appunto $\int_A^B F(x, y)\, dx$, che coincide con l'integrale considerato. E altrettanto si trova se una retta $y =$ cost. del piano xy interseca il contorno di σ in più di due punti, e quindi la sezione del nostro cilindroide col piano $y =$ cost. è la somma di due o più rettangoloidi.

La formola (1) del § 103 ci dà dunque il seguente teorema, che avevamo già dimostrato in casi particolari, usando però del linguaggio del calcolo differenziale (o calcolo delle derivate) (pag. 167):

TEOR. 1°. *Il volume del nostro cilindroide si ottiene integrando rapporto alla* y *l'area della sezione fattavi con un piano* y = cost.

E questo teorema si può estendere a solidi qualunque (decomponibili in cilindroidi).

TEOR. 2°. *Scelta una retta come asse delle* y, *il volume di un tale solido è uguale all'integrale rispetto alla* y *dell'area della sezione fatta con un piano* y = cost.

Il precedente teor. 1° si può considerare come l'enunciato geometrico del teorema contenuto nella (1) del § 103, anche quando $F(x, y)$ non sia sempre positivo, purchè si considerino come negativi i volumi delle porzioni di un solido poste al disotto del piano xy e le aree delle corrispondenti sezioni con un piano $y = \text{cost}$.

§ 105. — **Dimostrazione rigorosa dei risultati precedenti.**

Per dimostrare (*), p. es., che

$$\int_\sigma F d\sigma = \int_s dx \int F(x, y)\, dy,$$

basta provare che il secondo membro è una funzione additiva di σ la cui derivata vale F.

Notiamo che l'integrale $\int F(x, y)\, dy$ del secondo membro è esteso all'intervallo λ, o alla somma λ degli intervalli che su una retta r (luogo dei punti aventi l'ascissa $x = \text{cost.}$) sono determinati da σ. E, se σ è somma di due campi parziali σ_1, σ_2, e indichiamo con λ_1 e λ_2 gli intervalli determinati sulla r da σ_1 e da σ_2, sarà $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ e quindi:

$$(1) \qquad \int_{(\lambda)} F(x, y)\, dy = \int_{(\lambda_1)} F(x, y)\, dy + \int_{(\lambda_2)} F(x, y)\, dy.$$

È da avvertire che può darsi benissimo che l'una o l'altra delle λ_1, λ_2 si annulli, cioè che r non abbia intervalli interni

(*) Nel corso di questa dimostrazione faremo, come si vedrà, alcune ipotesi sul campo σ, e sul suo contorno, che sono del resto pochissimo restrittive in pratica. Appunto perciò alcune di esse sono enunciate soltanto a piè di pagina. Questo teorema vale del resto in casi estremamente più generali di quelli qui considerati.

a σ_1 od a σ_2. In tal caso l'integrale corrispondente del secondo membro di (1) si deve naturalmente considerare come nullo.

Se ne deduce facilmente che:

$$\int dx \int_{(\sigma)} F(x, y)\, dy = \int dx \int_{(\sigma_1)} F(x, y)\, dy + \int dx \int_{(\sigma_2)} F(x, y)\, dy,$$

ossia che il valore di

$$\int dx \int F(x, y)\, dy \tag{2}$$

corrispondente ad un'area σ somma delle aree parziali σ_1, σ_2 è uguale alla somma dei valori di (2) corrispondenti alle aree σ_1, σ_2. Quindi (2) è funzione additiva di σ.

Si noti ora che, se M ed m sono il massimo ed il minimo della $F(x, y)$ nel campo σ, il valore di (2) per il campo σ è compreso tra

$$\int dx \int M dy = M \int dx \int dy,$$

$$\int dx \int m dy = m \int dx \int dy.$$

Dimostriamo ora che:

Il valore di

$$\int dx \int dy \tag{3}$$

esteso a un campo σ vale l'area di σ.

Cominciamo col supporre che σ sia incontrato in due punti al più di ogni parallela all'asse delle y. Lo $\int dy$ deve essere esteso all'intervallo (y_1, y_2) determinato da σ su una retta $x = \text{cost.}$, cioè (se $y_1 < y_2$) deve essere uguale a $y_2 - y_1$ (*). Cosicchè

$$\int dx \int dy = \int_l^L (y_2 - y_1)\, dx = \int_l^L y_2\, dx - \int_l^L y_1\, dx. \tag{4}$$

(*) Si *ammette* che y_1 ed y_2 siano funzioni *continue* della x.

Ora $\int_l^L y_2\, dx$ è l'area del rettangoloide limitato dall'asse delle x, delle due ordinate passanti per A e per B (cfr. fig. 41) e della curva ACB, mentre $\int_l^L y_1\, dx$ è l'area del rettangoloide limitato dalle stesse rette e dalla curva ADB (fig. 41).

La differenza del terzo membro di (4) vale quindi la differenza tra le aree dei due rettangoloidi, cioè l'area di σ. c. d. d.

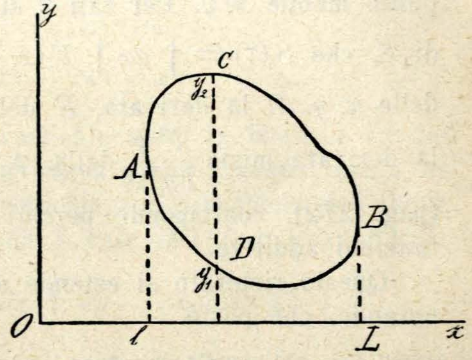

Fig. 41.

Se σ è decomponibile in più campi $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, il contorno di ciascuno dei quali è incontrato al più in due punti da una retta $x = \text{cost.}$ (come avviene nei casi più comuni) l'integrale (3) esteso a σ ha un valore che, come sappiamo, è la somma dei valori corrispondenti ai campi $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ed è quindi ancora uguale all'area di σ, c. d. d. (Per semplicità escludiamo le aree σ, che non si possono decomporre nel modo citato).

Ne segue subito il nostro teorema ; infatti il quoziente ottenuto dividendo (2) per l'area σ, cioè per (3), è compreso, per quanto già vedemmo, tra M ed m, ossia è un valore che F assume in un punto di σ. Se dunque tutti i punti di σ tendono a un punto A, tale quoziente tende al valore di F in A. Perciò F è la derivata di (2).

I^a Osservazione.

In modo simile col simbolo $\int dx \int dy \int F(x, y, z)\, dz$ esteso a un solido τ si intende, se $F(x, y, z)$ è continua, quel numero che si ottiene integrando la $F(x, y, z)$ lungo il segmento, o i segmenti che su una retta $y = \text{cost.}$, $x = \text{cost.}$ sono determinati da τ, e integrando poi l'integrale così trovato nell'area proiezione di τ sul piano xy.

Se $F = 1$, tale integrale è il volume di τ. In generale esso è quella funzione additiva di τ, che ha per derivata $F(x, y, z)$.

II^a Osservazione.

La definizione di derivata di una funzione additiva ha profonda analogia con la definizione di derivate di una funzione di una o più variabili. Tale profonda analogia si può rilevare per altra via anche dalle considerazioni seguenti.

Sia I una figura piana; e sia S una funzione additiva dei pezzi τ di I. Consideriamo quei pezzi τ, che sono rettangoli coi lati paralleli agli assi coordinati, di cui un vertice è un punto fisso di I di coordinate (a, b) e il vertice opposto è un punto mobile x, y. Per tali τ si ha, detta $F(x, y)$ la derivata di S, che $S(\tau) = \int_a^x dx \int_b^y F(x, y)\, dy$ è una funzione $\varphi(x, y)$ delle x, y. E la derivata F della *funzione* $S(\tau)$ coincide con la derivata mista $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial x}$ della φ. L'osserv. che chiude il § 80 (pag. 272), corrisponde perciò al teorema della media per le funzioni additive.

Questo risultato si estende subito ai campi a tre dimensioni notando, che posto

$$\varphi(x, y, z) = \int_a^x dx \int_b^y dy \int_c^z F(x, y, z)\, dz, \quad \text{si ha} \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = F(x, y, z).$$

Esempi.

I. *Si calcoli il volume* V *dell'ellissoide* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Calcoliamo il volume $\frac{V}{2}$ del semiellissoide posto nella regione $z > 0$. Tale semiellissoide si può considerare come un cilindroide avente per base σ sul piano xy l'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, e determinato dalla superficie $z = + c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$.

I valori tra cui varia la y di un punto di σ su una retta $x = \text{cost.}$ sono chiaramente $\pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Quindi:

$$\frac{V}{2} = \int_{-a}^{+a} dx \left[\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dy \right] =$$

$$= \frac{c}{2}\int_{-a}^{+a} \pi b \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}\, \frac{\pi\, abc}{2}.$$

In modo simile si ha

$$\frac{V}{2} = \int_{-b}^{+a} dy \left[\int_{-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}^{+\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, dx \right] = \frac{4}{3}\frac{\pi\, abc}{2}$$

donde $V = \frac{4}{3}\pi\, abc.$

II. Se l'asse delle x è verticale volto in basso, e I è una parete piana verticale di una vasca piena d'acqua, posta nel piano xy, e se l'asse delle y coincide col pelo libero dell'acqua, la spinta idraulica sostenuta da I vale (§ 100, γ, es. III°)

$$\int dy \int x\, dx = \int x\, dx \int dy \qquad \text{esteso ad } I.$$

Si applichi questa formola al caso che I sia un rettangolo o un semicerchio col diametro sull'asse delle y.

§ 106. — Volume di un solido di rotazione e teorema di Guldino.

Sia σ un campo del piano xz *non intersecante* l'asse delle z, il quale rotando attorno a tale asse generi un solido di rotazione S. Per trovarne il volume V il procedimento più rapido è quello di integrare rispetto alla z l'area della sezione ottenuta segando S con un piano $z = \text{cost.}$

Se una retta $z = \text{cost.}$ del piano xz incontra il contorno di σ al più in due punti di ascissa x_1, x_2, (porremo $x_1 < x_2$), tale sezione è la corona circolare limitata da due cerchi di raggio x_1, x_2, ed ha per area $\pi(x_2^2 - x_1^2)$, dove x_1 ed x_2 sono funzioni di z. *Il volume* V *di* S *sarà perciò* $\pi \int (x_2^2 - x_1^2)\, dz$.

Poichè $x_2^2 - x_1^2 = 2\int_{x_1}^{x_2} x\, dx$, tale volume si può indicare con

$$V = 2\pi \int dz \int x\, dx = 2\pi \int x\, d\sigma \qquad (*)$$

(*) Questa formola vale anche se il contorno di σ è incontrato in più di due punti da una retta $z = \text{cost.}$ del piano xy. Al lettore la dimostrazione, che si ottiene (nei casi più elementari) scomponendo σ in convenienti sue parti.

dove l'integrale doppio deve essere esteso al campo σ (la cui rotazione genera S). Vedemmo (§§ 101-102) che $\frac{\int x\, d\sigma}{\sigma}$ è l'ascissa x_g del centro di gravità di σ considerato come lamina omogenea, il quale centro descrive nella rotazione attorno all'asse delle z un cerchio, la cui periferia vale $2\pi x_g = 2\pi \frac{\int x\, d\sigma}{\sigma} = \frac{V}{\sigma}$. Dunque (teor. di Guldino):

Il volume V *generato dalla rotazione di un campo piano* σ *attorno a un asse complanare che non l'attraversa vale il prodotto dell'area di* σ *per la lunghezza della circonferenza descritta dal suo centro di gravità.*

Esempi.

1° Sia, p. es., dato un cerchio C nel piano xz, non intersecante l'asse delle z. Rotando attorno a quest'asse, esso genera un *toro di rivoluzione*, di cui si può facilmente col precedente teorema calcolare il volume V. Se r è il raggio del cerchio C, d la distanza del suo centro dall'asse delle z, si trova

$$V = 2\pi^2 r^2 d,$$

perchè il centro di gravità di un'area circolare coincide col suo centro.

2° Un semicerchio avente il diametro sull'asse delle z e raggio r ha per area $\frac{1}{2}\pi r^2$, e genera rotando una sfera di volume $\frac{4}{3}\pi r^3$; la distanza λ dal centro di gravità del semicerchio dall'asse delle z è dunque data dall'equazione

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{2}\pi r^2 .\ 2\pi\lambda \quad \text{cioè } \lambda = \frac{4r}{3\pi}.$$

3° Lo studioso generalizzi questa formola ad una semiellisse, ricordando la formola a noi nota del volume di un ellissoide di rotazione.

CAPITOLO XVII.

CAMBIAMENTO DI VARIABILI NELLE FORMOLE DEL CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE

§ 107. — Esempi di cambiamento di variabili in formole di calcolo differenziale.

Noi, piuttosto di dare una teoria generale, diamo alcuni esempi del come sia facile risolvere problemi di questo tipo. E supporremo senz'altro soddisfatte tutte le condizioni, che ci permetteranno di applicare i teoremi che invocheremo (p. es., derivate finite, oppure finite e continue, denominatori differenti da zero).

I. Siano $x = x(t), y = y(t)$ due funzioni di t definite nello stesso intervallo. Dalla prima di esse si possa dedurre t come funzione $t(x)$ della x. Cosicchè, sostituendo nella seconda, si possa pensare y come funzione della x.

Si calcolino y'_x, y''_x, ..., supponendo note x'_t, y'_t, x''_t, y''_t, ...
È:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t\,dt}{x'_t\,dt} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

A questa formola si potrebbe giungere (senza usare i differenziali) ricordando che per la regola di derivazione delle funzioni inverse $t'_x = \frac{1}{x'_t}$, e che $y'_x = y'_t\,t'_x$.

È:

$$y''_x = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{dy'_x}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x'_t}\frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) = \frac{y''_t\,x'_t - y'_t\,x''_t}{x'^3_t},$$

$$y'''_x = \frac{dy''_x}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{dy''_x}{dt} = \frac{1}{x'_t}\frac{d}{dt}\left(\frac{y''_t\,x'_t - y'_t\,x''_t}{x'^3_t}\right) =$$

$$= \frac{x'_t\,(y'''_t\,x'_t - y'_t\,x'''_t) - 3\,x''_t\,(y''_t\,x'_t - x''_t\,y'_t)}{x'^5_t}, \text{ ecc.}$$

II. Con le notazioni precedenti, è ben evidente che non si possono viceversa calcolare le x'_t, y'_t, x''_t, y''_t, ... quando soltanto si conoscano le y'_x, y''_x, ..., perchè tale questione è indeterminata. Il problema resta determinato se aggiungiamo qualche condizione per la variabile t, se, p. es., supponiamo t scelto in guisa che $x'^2_t + y'^2_t = 1$ (*).

Sarà :

$$x'_t = \frac{dx}{dt}\ ,\quad y'_t = \frac{dy}{dt}\ ,$$ donde (per la $x'^2_t + y'^2_t = 1$, ossia $\sqrt{dx^2 + dx^2} = dt$) si trae :

$$x'_t = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2_x}},$$

$$y'_t = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{y'_x}{\sqrt{1 + y'^2_x}}.$$

È :

$$x''_t = \frac{dx'_t}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dx'_t}{dx} = x'_t \frac{dx'_t}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2_x}} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2_x}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2_x}}\left[-(1 + y'^2_x)^{-\frac{3}{2}} y'_x y''_x\right] = -\frac{y'_x y''_x}{(1 + y'^2_x)^2}.$$

$$y''_t = \frac{dy'_t}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dy'_t}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \frac{d}{dx}\left(\frac{y'_x}{\sqrt{1 + y'^2_x}}\right) =$$

$$= \frac{y''_x}{1 + y'^2_x} - \frac{y'^2_x y''_x}{(1 + y'^2_x)^2} = \frac{y''_x}{(1 + y'^2_x)^2},\ \text{ecc.}$$

III. Sia z una funzione di x, y; le quali siano a loro volta funzioni di due variabili u, v; cosicchè z si possa considerare come funzione di u, v. Conoscendo le

$$z'_x,\ z'_y\ z''_{xx},\ z''_{xy},\ \ldots..,\ x'_u,\ x''_{uu},\ x'_v,\ \ldots..,$$

(*) Ciò equivale, come vedremo, a supporre che (x, y) sia punto generico di una curva, l'arco della quale, misurato a partire da un punto fisso, abbia la lunghezza t.

si calcolino le z'_u, z'_v, z''_{uu} ecc. È per il teor. del § 83:

$$z'_u = \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

$$z'_v = \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Queste formole si possono anche ottenere, notando che:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial x}\left[\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right] + \frac{\partial z}{\partial y}\left[\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right] =$$
$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv,$$

e confrontando con:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Così con metodo analogo:

$$z''_{uu} = \frac{\partial z'_u}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right] = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} +$$
$$+ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) =$$
$$= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial x}{\partial u}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right] +$$
$$+ \frac{\partial y}{\partial u}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\right], \text{ ecc.}$$

(Si ponga, p. es., $u = \rho$, $v = \theta$, $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta$).

Oss. È facile anche calcolare le x'_u, x'_v, y'_u, y'_v quando siano note le u'_x, u'_y, v'_x, v'_y. Infatti, pensate le x, y come funzioni delle u, v funzioni delle x, y, si ha:

$$1 = x'_x = x'_u u'_x + x'_v v'_x,$$
$$0 = x'_y = x'_u u'_y + x'_v v'_y;$$

da cui, risolvendo, si ricavano tosto le x'_u, x'_v. In modo simile si calcolano le y'_u, y'_v.

IV. Talvolta si studia una stessa curva, usando in un primo studio certe coordinate x, y, in un altro calcolo altre coordinate u, v [p. es., le coordinate polari $u = \rho$, $v = \theta$, dove

$x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta$]. Nel primo caso l'equazione della curva sia $y = f(x)$; nel secondo $u = \varphi(v)$. Si calcolino u'_v, u''_v, ecc., conoscendo le y'_x, y''_x, ecc. Naturalmente devono essere note le formole che permettono di passare dall'uno all'altro sistema di coordinate: $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$.

Sarà:

$$u'_v = \frac{du}{dv} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy}{\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} \partial y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}}{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx}}$$

$$u''_v = \frac{du'_v}{dv} = \frac{1}{\frac{dv}{dx}} \frac{du'_v}{dx} = \frac{1}{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} y'_x} \left[\frac{\partial u'_v}{\partial x} + \frac{\partial u'_v}{\partial y} y'_x\right].$$

I valori di $\frac{\partial u'_v}{\partial x}$, $\frac{\partial u'_v}{\partial y}$ si ricavano facilmente dalla precedente equazione, ecc.

Come esempio particolare studiamo le relazioni che passano tra le derivate delle $y = f(x)$, $\rho = \varphi(\theta)$, supposto che queste equazioni rappresentino la stessa curva in coordinate cartesiane e polari. È:

$$f'(x) = y'_x = \frac{\operatorname{sen} \theta \, d\rho + \rho \cos \theta \, d\theta}{\cos \theta \, d\rho - \rho \operatorname{sen} \theta \, d\theta} = \frac{\operatorname{tg} \theta \, \varphi'(\theta) + \rho}{\varphi'(\theta) - \rho \operatorname{tg} \theta};$$

$$f''(x) = y''_x = \frac{1}{\cos \theta \, \varphi'(\theta) - \rho \operatorname{sen} \theta} \left\{ \frac{\partial y'_x}{\partial \rho} \varphi'(\theta) + \frac{\partial y'_x}{\partial \theta} \right\} =$$

$$= \frac{-\rho \varphi'' + 2 \varphi'^2 + \rho^2}{[\cos \theta \, \varphi'(\theta) - \rho \operatorname{sen} \theta]^3}.$$

§ 108. — Cambiamento della variabile d'integrazione negli integrali definiti o multipli. Integrali superficiali in coordinate polari.

Per quanto riguarda gli integrali definiti nulla v'è da aggiungere alla regola di integrazione per sostituzione già esposta al § 75, β, pag. 247.

Si tratta di estendere questa regola agli integrali multipli.

Con metodo affatto analogo a quello dell'ora citato § 75, si dimostra (cfr. il § 101, γ, pag. 334):

Se I, H sono due campi in corrispondenza biunivoca continua, in modo che le funzioni additive dei pezzi τ di I si possano considerare come funzioni additive dei pezzi k di H, se F è una funzione continua dei punti di I, e quindi anche dei punti di H, allora:

$$\int_I F\,d\tau = \int_H \left(F\frac{d\tau}{dk}\right) dk. \tag{1}$$

Ma l'importanza di questo teorema si potrà vedere soltanto dalle applicazioni.

Sia I un campo finito del piano xy; per fissar le idee, l'origine (*) sia esterna al contorno od ai contorni di I; si possono determinare allora le coordinate polari ρ e θ di un punto generico di I, così che ρ e θ siano funzioni continue delle x, y e viceversa. Poniamo $\rho = X$, $\theta = Y$, considerando le X, Y come coordinate cartesiane di un punto posto in un altro piano P. Ad ogni punto di I corrisponderà allora uno e un solo punto di questo piano P. E i punti di P, che corrispondono a punti di I, riempiranno tutta una regione H di P.

(Notiamo che $x = \rho\cos\theta = X\cos Y$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta = X\,\mathrm{sen}\,Y$).

Una funzione $F(x, y)$ continua delle x, y diverrà una funzione continua $F(X\cos Y, X\,\mathrm{sen}\,Y)$ delle X, Y.

Se τ e k sono due pezzi corrispondenti di I e di H, la derivata $\frac{d\tau}{dk}$ si trova, come ora vedremo, uguale ad $X = \rho$. Cosicchè la (1) diventa:

$$\int_I F(x, y)\,d\tau = \int_H F(X\cos Y, X\,\mathrm{sen}\,Y)\,X\,dk.$$

Per i risultati dei §§ 103-105 questa formola si può scrivere:

$$\int_I dx \int F(x, y)\,dy = \int_H dX \int F(X\cos Y, X\,\mathrm{sen}\,Y)\,X\,dY =$$

$$= \int_H dY \int F(X\cos Y, X\,\mathrm{sen}\,Y)\,X\,dX$$

o anche:

$$\int dx \int F(x, y)\,dy = \int d\rho \int F(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\rho\,d\theta = \tag{2}$$
$$= \int d\theta \int F(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\rho\,d\rho.$$

(*) L'origine è un punto eccezionale per il sistema delle coordinate polari.

Prima di dimostrare che $\frac{d\tau}{dk} = \rho$, vogliamo fare alcune osservazioni:

Oss. I^a. Si noti che NON si passa dal primo al secondo o terzo membro di questa formola sostituendo a $dx = d(\rho\cos\theta)$ ed a $dy = d(\rho \operatorname{sen}\theta)$ i loro valori $\cos\theta\, d\rho - \rho \operatorname{sen}\theta d\theta$ e $\rho\cos\theta d\theta + {}$ $+ \operatorname{sen}\theta d\rho$; come potrebbe sembrare a un lettore inesperto. In questo caso il $d\tau$ che compare sotto il segno di integrazione, e NON i dx, dy si possono trasformare come differenziali veri e proprii (*).

Oss. II^a. Si possono calcolare il secondo e terzo membro della nostra formola, senza neanche pensare al campo H, in modo analogo a quello seguìto nei §§ 103-105 per calcolare il 1° membro. Per es., $\int d\theta \int F\rho\, d\rho$ si può calcolare così: Si consideri una linea $\theta = \text{cost.}$ (che è una retta uscente dall'origine). Su di essa la F diventa funzione della sola ρ; si calcoli $\int F\rho\, d\rho$ esteso al segmento, o ai segmenti che la nostra figura I determina su tale linea. Tale integrale è una funzione di θ che si integrerà tra il minimo e il massimo valore di θ in I.

(Si noti che le linee $\theta = \text{cost.}$ e $\rho = \text{cost.}$ hanno per immagine in H le rette $Y = \text{cost.}$ ed $X = \text{cost.}$ parallele agli assi coordinati).

Vogliamo ora dimostrare che $\frac{d\tau}{dk} = X = \rho$. Consideriamo un pezzo k di H limitato da due parallele all'asse delle Y, e due parallele all'asse X. Siano $X, X + \Delta X$ e $Y, Y + \Delta Y$ i corrispondenti valori delle X, Y. Tale pezzo è un rettangolo, la cui area $k = \Delta X \Delta Y$.

L'immagine di questo pezzo sul piano xy è un quadrangolo τ limitato da due cerchi col centro nell'origine e raggi $X, X + \Delta X$, e inoltre da due rette uscenti dall'origine formanti con l'asse delle x rispettivamente gli angoli $Y, Y + \Delta Y$ e quindi formanti tra loro l'angolo ΔY. La corona circolare limitata dai citati due cerchi ha per area

$$\pi \{ (X + \Delta X)^2 - X^2 \} = \pi [2 X \Delta X + (\Delta X)^2] ;$$

l'area τ di τ sarà dunque data dalla proporzione:

$$\tau : \pi [2 X \Delta X + (\Delta X)^2] = \Delta Y : 2\pi$$

(*) Si noti infatti che, se la prima integrazione si esegue, p. es., rispetto alla x, si deve considerare la y come costante; perciò, nel passare alle ρ, θ, si dovrebbe a dx sostituire il suo valore ottenuto nell'ipotesi che $dy = d(\rho \operatorname{sen}\theta) = 0$.

cosicchè:

$$\tau = \left[X \Delta X + \frac{1}{2} (\Delta X)^2\right] \Delta Y = X \Delta X \Delta Y + \frac{1}{2} (\Delta X)^2 \Delta Y .$$

Dunque

$$\frac{\tau}{k} = X + \frac{1}{2} \Delta X = \rho + \frac{1}{2} \Delta \rho.$$

Per $\Delta \rho = 0$ tale rapporto ha pure per limite ρ.

Si potrebbe dire che τ vale $X \Delta X \Delta Y$, a meno di infinitesimi di ordine superiore.

Bisognerebbe completare questa dimostrazione, considerando campi k di forma qualsiasi; noi ce ne dispensiamo ricordando solo al lettore che gli stessi metodi, con cui nel § 105 abbiamo dimostrato l'esattezza di una formola analoga in coordinate cartesiane ortogonali, potrebbero provare la formola attuale in coordinate polari (cfr. più avanti in questo stesso §).

Osservazione.

Si potrebbero anche applicare i metodi del § 103, in cui il campo era diviso in pezzi con rette parallele agli assi, cioè con linee di equazione $x =$ cost., oppure $y =$ cost. Si dovrebbe ora invece dividere il campo in pezzetti con linee $\rho =$ cost. e $\theta =$ cost. (cerchi col centro nell'origine e rette uscenti dall'origine). Prescindendo dai pezzi sul contorno, gli altri sono quadrangoli la cui area vale, come vedemmo più sopra, $\rho \, d\rho \, d\theta + \frac{1}{2} d\rho^2 \, d\theta$. Se F è la funzione da integrare, il suo integrale si trova coi metodi del § 103 uguale al limite di

$$\sum F \rho \, d\rho \, d\theta + \frac{1}{2} \sum F \, d\rho^2 \, d\theta$$

per $d\rho = d\theta = 0$. (Indico con F un valore assunto da F in un punto di ogni pezzetto). Il primo addendo si prova (§ 105) tendere ad $\iint F \rho \, d\rho \, d\theta$; il secondo addendo tende a zero; perchè, se H è il massimo di $|F|$, ed ε il massimo valore di $d\rho$, allora:

$$\left| \sum F \, d\rho^2 \, d\theta \right| < H\varepsilon \sum d\rho \, d\theta = H\varepsilon \sum d\rho \sum d\theta.$$

Ora $\Sigma d\rho$ tende alla differenza dei valori massimo e minimo, che ρ assume nel campo considerato; $\Sigma\, d\theta$ non supera 2π. Poichè ε tende a zero, segue tosto che $\Sigma F d\rho^2 d\theta$ tende a zero. c. d. d.

D'altra parte sia questo risultato, sia quello del prossimo paragrafo saranno dimostrati in futuro capitolo con metodi meno diretti, ma di una estrema semplicità.

Si può anche generalizzare il risultato del § 104 interpretando geometricamente la (2) nel seguente modo (per il caso $F \geqq 0$):

Il volume di un cilindroide, o di un solido decomponibile in un numero finito di cilindroidi si ottiene integrando rispetto a ρ *l'area della sezione eseguita con un cilindro circolare retto di asse invariabile e di raggio variabile* ρ.

Sarà un esercizio utilissimo il riconoscere come si possa ottenere facilmente una dimostrazione completa del nostro risultato con l'applicazione dello stesso metodo usato al § 105 in caso analogo.

Infatti, seguendo questa via, si riconosce tosto essere sufficiente provare che l'area di σ è data, p. es., da $\int d\theta \int \rho\, d\rho$ esteso al campo σ. Ora a pag. 342, per dimostrare il teorema analogo che tale area vale $\int dx \int dy$, siamo partiti dalla formola che dà l'area di un rettangoloide, cioè di una figura limitata dalle linee $y = 0$, $x = a$, $x = b$ e da una linea $y = f(x)$.

Per il caso attuale basterà similmente applicare la formola data al § 95 δ, per l'area della figura limitata dal punto $\rho = 0$, dalle linee $\theta = a$, $\theta = b$ e da una curva $\rho = F(\theta)$.

Formole analoghe si dimostrano per gli integrali tripli. Ricordiamo particolarmente i seguenti sistemi notevoli di coordinate nello spazio.

1° *Coordinate cilindriche* ρ, θ, z legate alle coordinate cartesiane ortogonali dalle $x = \rho\cos\theta$; $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$; $z = z$. Un tale sistema equivale ad addottare coordinate polari ρ, θ nel piano xy, conservando la terza coordinata z. Tali coordinate si chiamano *cilindriche* perchè $\rho =$ cost. è l'equazione di un cilindro circolare retto con generatrici parallele all'asse delle z. Si trova

$$\iiint F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint F(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\, \rho\, d\rho\, d\theta\, dz.$$

2° *Coordinate polari* ρ, θ, φ (*nello spazio*) legate alle coordinate cartesiane ortogonali dalle:

$$x = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi \quad ; \quad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad ; \quad z = \rho\cos\theta.$$

Il raggio vettore $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ è la distanza del punto dall'origine. L'angolo θ è la *colatitudine* (complemento della latitudine, quando si assuma il piano xy a piano equatoriale).

L'angolo φ è la longitudine (contata a partire dal piano xz come meridiano iniziale). Si trova:

$$\iiint F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint F(\rho \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \rho \cos \theta)\, \rho^2 \operatorname{sen} \theta\, d\theta\, d\rho\, d\varphi,$$

come si prova osservando che il volume racchiuso tra due sfere di raggio ρ e $\rho + d\rho$, tra due coni di colatitudine θ e $\theta + d\theta$, e tra due semipiani di longitudine φ e $\varphi + d\varphi$ vale $\rho^2 \operatorname{sen} \theta\, d\theta\, d\rho\, d\varphi$ a meno di infinitesimi d'ordine superiore.

§ 108 *bis.* — **Integrali superficiali in coordinate generali.**

I risultati di questo paragrafo saranno dimostrati più avanti in modo semplice benchè indiretto. Noi qui faremo invece delle ipotesi analoghe a quelle fatte ai §§ 103 e seg., che del resto sarebbe facile giustificare in modo diretto.

I risultati a cui giungeremo, si debbono riguardare come l'estensione del metodo di integrazione in coordinate polari a coordinate qualsiasi. Useremo, p. es., i metodi intuitivi del § 103.

Sia I un'area del piano xy; e siano X, Y due variabili: $X = X(x, y)$, $Y = Y(x, y)$, funzioni delle x, y in I.

Viceversa le x, y si possano considerare come funzioni $x(X, Y)$ ed $y(X, Y)$ delle X, Y, così che un punto di I si possa determinare tanto dando i corrispondenti valori delle x, y, quanto quelli delle X, Y.

Dividiamo I con linee $X =$ cost., $Y =$ cost., indicando con dX, dY gli incrementi che subisce la X o la Y per passare da una tale linea alla successiva; sostituiamo poi a quelli dei quadrangoli curvilinei tutti interni a I limitati da due linee consecutive $X =$ cost., e $Y =$ cost. *il quadrangolo rettilineo Q che ha gli stessi vertici.* L'area I sarà così divisa in

α) quadrangoli Q rettilinei tutti interni a I,

ed in

β) poligoni P curvilinei, parte del contorno dei quali appartiene al contorno di I.

Noi ammetteremo:

1° Il contributo portato alle nostre somme da questi ultimi poligoni P tende a zero, quando i dX, dY tendono contemporaneamente a zero.

2° Per calcolare i limiti che incontreremo (quando i dX, dY tendono contemporaneamente a zero) si possono far tendere a zero prima i dX, poi i dY o viceversa.

Uno dei quadrangoli *rettilinei* Q ha i vertici posti sulle intersezioni di una linea $X =$ cost. e $X + dX =$ cost. con due linee $Y =$ cost. e $Y + dY =$ cost. I suoi vertici A, B, C, D, saranno perciò i punti

$$\begin{aligned} A &= [x(X, Y), y(X, Y)]; \\ B &= [x(X + dX, Y), y(X + dX, Y)]; \\ C &= [x(X, Y + dY), y(X, Y + dY)]; \\ D &= [x(X + dX, Y + dY), y(X + dX, Y + dY)]. \end{aligned}$$

E la sua area sarà la somma delle aree dei triangoli ABC, BCD (*). L'area del 1° vale (per nota formola di Geometria analitica) il valore assoluto di

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x(X, Y) & y(X, Y) & 1 \\ x(X + dX, Y) & y(X, + dX, Y) & 1 \\ x(X, Y + dY) & y(X, Y + dY) & 1 \end{vmatrix}$$

(*) Suppongo per semplicità che A e D sieno da bande opposte della retta BC. Come abbiamo già detto, una dimostrazione completa sarà data più tardi.

Supposto che le x, y abbiano derivate prime e seconde finite e continue (*), e ricordando la formola di Taylor

$$x(X+dX, Y)=x(X, Y)+x'_X(X, Y)dX+\frac{1}{2}x''_{XX}(X+\theta dX, Y)dX^2\ (0<\theta<1).$$

ed analoghe, si trova che tale area vale il valore assoluto di

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x'_X(X, Y) & x'_Y(X, Y) \\ x'_X(X, Y) & y'_Y(X, Y)\end{vmatrix} dX\,dY+\frac{\alpha}{2}\,dX\,dY$$

dove α è una quantità che (se con K indichiamo una costante positiva maggiore in valore assoluto di tutti i valori delle derivate prime e seconde delle x, y) soddisfa alla

$$|\alpha|<K^2(dX+dY+dX\,dY).$$

Altrettanto trovasi per il triangolo BCD. Cosicchè l'area del quadrangolo rettilineo $ABCD$ vale il valore assoluto di

$$\left(\frac{d\,(x, y)}{d\,(X, Y)}+\beta\right)dX\,dY,$$

dove con $\dfrac{d\,(x, y)}{d\,(X, Y)}$ indico il valore in A del cosidetto *Jacobiano*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial X} & \dfrac{\partial y}{\partial X} \\ \dfrac{\partial x}{\partial Y} & \dfrac{\partial y}{\partial Y}\end{vmatrix}$$

e con β indico una quantità soddisfacente alla

$$|\beta|<K^2(dX+dY+dX\,dY). \tag{1}$$

Moltiplicando tale area per un valore F, che la funzione $F(x, y)$ assume in tale quadrangolo, e sommando tutti i prodotti così ottenuti, si trova

$$\Sigma\, F\left|\frac{d\,(x, y)}{d\,(X, Y)}\right| dX\,dY+\Sigma\,\beta\,F\,dX\,dY.$$

In virtù della (1) e con metodi analoghi a quelli dell'osserv. del § 108 si trova che il secondo addendo tende a zero, e che (cfr. § 103):

L'integrale $\int$ Fdτ *è uguale a:*

$$\int dY\int F\left|\frac{d\,(x, y)}{d\,(X, Y)}\right| dX=\int dX\int F\left|\frac{d\,(x, y)}{d\,(X, Y)}\right| dY.$$

Se $X=\rho$, $Y=\theta$, $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, allora

$$\left|\frac{d\,(x, y)}{d\,(X, Y)}\right|=\rho.$$

E si ritorna alla formola del precedente § 108.

Oss. Se noi consideriamo X, Y come coordinate cartesiane ortogonali in un altro piano P, e indichiamo con H la regione di P, che è luogo dei punti corrispondenti ai punti di I, se τ e k indicano al solito le aree di due pezzi corrispondenti di I e di H, allora il valore assoluto del precedente Jacobiano vale naturalmente la derivata $\dfrac{d\tau}{dk}$. Dimostrando direttamente questa proposizione, si avrebbe un'altra dimostrazione dei risultati di questo §.

(*) Queste condizioni si potrebbero rendere meno restrittive.

CAPITOLO XVIII.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

§ 109. — Considerazioni e definizioni fondamentali.

Il calcolo integrale si propone il seguente problema fondamentale: Conosciuta la derivata di una funzione, come si può calcolare questa funzione?

Ora possiamo proporci il seguente problema più generale: Sia y una funzione di una o più variabili indipendenti; consideriamone le derivate di primo, secondo..... ennesimo ordine, e supponiamo che sia nota soltanto qualche relazione fra la y, le variabili indipendenti e queste sue derivate. Ci domandiamo: In quanto può una tale relazione servire per determinare la funzione incognita y?

Una relazione di questo genere si chiama *una equazione differenziale*, e il problema che vi si riferisce, e che noi abbiamo enunciato, si chiama: *il problema dell'integrazione delle equazioni differenziali.*

Cominciamo a porre una distinzione fondamentale. Può avvenire che le variabili indipendenti si riducano ad una sola e quindi che la relazione data sia una relazione fra la funzione, la variabile e le derivate di ordine 1, 2,....., n della funzione rispetto all'unica variabile. Oppure può darsi che le variabili indipendenti siano più d'una; e in tal caso le derivate, che figurano nella nostra equazione, saranno derivate parziali.

Nel primo caso l'equazione differenziale si dirà *a derivate ordinarie*, nel secondo si dirà *a derivate parziali.*

Nell'uno e nell'altro caso si chiamerà *ordine* n dell'equazione quello della derivata di più alto ordine che in essa comparisce.

Può darsi che invece di una sola relazione tra le variabili, la funzione e le sue derivate ne siano date più, da considerarsi come simultanee; allora si ha ciò che si chiama *sistema di equazioni differenziali.* Può anche darsi che si abbiano sistemi di equazioni differenziali con più funzioni incognite.

L'analisi offre continui esempi di problemi, la cui risoluzione dipende da equazioni differenziali. Del resto è ben noto che anche la fisica, la meccanica, ecc. offrono innumerevoli esempi di tali problemi, perchè un gran numero di leggi fisiche si enunciano precisamente mediante equazioni differenziali. La legge di gravitazione universale, p. es., ci dà un legame tra le distanze dei centri dei corpi celesti e le rispettive accelerazioni, cioè le derivate seconde rispetto al tempo delle coordinate di tali centri. Già i problemi che abbiamo risolto ai §§ 90, 92, 93 sono altrettante integrazioni di particolari equazioni o sistemi di equazioni differenziali.

Così p. es., il problema di ricercare una funzione z di x e y tale che la sua derivata rispetto a x sia $M(x, y)$, e la sua derivata rispetto a y sia $N(x, y)$, consiste nell'integrazione del sistema di due equazioni differenziali del primo ordine a derivate parziali:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = M(x, y), \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = N(x, y). \end{cases}$$

La ricerca delle funzioni z di x e y, per cui la derivata parziale mista fatta prima rispetto a x e poi rispetto a y sia uguale a $P(x, y)$, non è altro che l'integrazione dell'equazione differenziale del secondo ordine a derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = P(x, y).$$

La ricerca delle funzioni che hanno per derivata $f(x)$ si riduce all'integrazione dell'equazione differenziale ordinaria del primo ordine:

$$\frac{dz}{dx} = f(x). \tag{1}$$

È chiaro che la (1) è l'equazione differenziale di tipo più semplice: su di essa ci siamo lungamente trattenuti, formando la sua risoluzione l'oggetto precipuo del calcolo integrale. Ma è pure ben manifesto che, se per l'integrazione della (1) ci trovavamo assai spesso nel caso di non saperla eseguire che per approssimazione, per l'integrazione di equazioni differenziali più complesse avverrà generalmente altrettanto. Noi ci limiteremo esclusivamente allo studio di particolari tipi di equazioni.

Lo studio generale delle equazioni differenziali costituisce da solo uno dei rami più estesi delle matematiche, e riceve continue applicazioni alle scienze fisiche, e in genere a tutte le scienze che hanno per oggetto enti suscettibili di misura.

§ 110. — Equazioni differenziali, la cui integrazione è ridotta a quella di un differenziale esatto.

α) Sia f una funzione delle due variabili x, y; trovare tutte le funzioni y della x che soddisfano a un'equazione del tipo

$$f(x, y) = \text{cost.} \tag{1}$$

equivale a trovare tutte le funzioni y definite implicitamente dalla (1).

È chiaro che per tutte e sole le funzioni definite implicitamente dalla (1) si ha che, sostituendo nel primo membro della (1) in luogo di y il suo valore e derivando la funzione di x che ne risulta, si ottiene lo zero. In altre parole la (*)

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2}$$

vale per tutte e sole le funzioni y *definite implicitamente dalla* (1).

La (2) è un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine: tutte le funzioni y che la risolvono sono tutte e sole quelle che soddisfano alla (1).

Si abbia ora l'equazione differenziale del tipo:

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{3}$$

la quale, moltiplicata per dx, si può scrivere:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{4}$$

Se il primo membro di (4) è un differenziale esatto, se esiste cioè una $f(x, y)$ tale che:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)\,; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y),$$

(*) Si suppongono qui, e nei seguenti §§, finite e continue tutte le funzioni, e loro derivate, che si presentano nel calcolo.

per le considerazioni precedenti tutte e sole le funzioni y della x che risolvono la (3) o la (4) sono le funzioni rappresentate implicitamente dall'equazione

$$f(x, y) = C,$$

dove C è una costante affatto arbitraria (*).

ESEMPIO.

Si voglia, ad esempio, risolvere l'equazione differenziale ordinaria del primo ordine:

$$2y + x^3 + (2x + y^2)\, y' = 0\,; \tag{5}$$

si vogliano cioè trovare tutte e sole le funzioni y della x, che la soddisfano. Poichè $y' = \dfrac{dy}{dx}$, la (5) si può scrivere moltiplicata per dx:

$$(2y + x^3)\, dx + (2x + y^2)\, dy = 0.$$

Il primo membro è un differenziale esatto, poichè:

$$\frac{\partial}{\partial y}(2y + x^3) = 2 = \frac{\partial}{\partial x}(2x + y^2).$$

Le funzioni f, per cui:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y + x^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + y^2,$$

si ottengono integrando $2y + x^3$ rapporto a x e aggiungendo una funzione di y tale che la funzione che ne risulta abbia per derivata rapporto a y la $2x + y^2$.

Sarà dunque:

$$f = 2xy + \frac{x^4}{4} + Y,$$

essendo Y tale che:

$$\left(2xy + \frac{x^4}{4} + Y\right)'_y = 2x + y^2.$$

(*) Più precisamente la C deve soddisfare a questa unica condizione che la $f(x, y) = C$ sia risolubile rispetto alla y. Così, p. es., se per $x = a$, $y = b$ le f'_x, f_y sono finite e continue, ed $f'_y \neq 0$, si può porre $C = f(a, b)$. (Cfr. § 84, β).

Ma:

$$\left(2\,x\,y + \frac{x^4}{4} + Y\right)'_y = 2\,x + Y'.$$

Dovrà dunque essere:

$$2\,x + y^2 = 2\,x + Y',$$

ossia:

$$Y' = y^2,$$

cioè:

$$Y = \frac{y^3}{3} + \text{cost.}$$

Sarà dunque:

$$f = 2\,x\,y + \frac{x^4}{4} + \frac{y^3}{3} + \text{cost.}$$

E le funzioni y di x che risolvono la (5) sono le funzioni definite implicitamente dall'equazione:

$$2\,x\,y + \frac{x^4}{4} + \frac{y^3}{3} = C.$$

dove C è una costante arbitraria.

β) Se nella (3) la M e la N sono rispettivamente funzioni della sola x e della sola y, il primo membro della (4) è certamente un differenziale esatto (§ 90, β). Le funzioni f che hanno per differenziale il primo membro della (4) sono espresse da:

$$\int M\,dx + \int N\,dy + \text{cost.}$$

e le funzioni y che soddisfano l'equazione differenziale proposta sono quelle definite implicitamente dall'equazione:

$$\int M\,dx + \int N\,dy = \text{cost.}$$

Simili equazioni differenziali si dicono a variabili separate (cfr. § 90, β, pag. 299).

Così, ad esempio, si abbia da integrare l'equazione differenziale ordinaria del primo ordine:

$$-\operatorname{sen} x\,dx + y\,dy = 0.$$

Il primo membro è un differenziale esatto a variabili separate.

Le funzioni y che soddisfano l'equazione differenziale sono date implicitamente dall'equazione:

$$\cos x + \frac{y^2}{2} = C$$

dove C è costante arbitraria.

Risolvendo l'ultima equazione rispetto a y si ha:

$$y = \pm \sqrt{2\,C - 2 \cos x}.$$

Talvolta, pur non essendo il primo membro della (4) un differenziale esatto a variabili separate, si può con facili artifici ridurlo tale.

Così, ad esempio, si abbia da risolvere l'equazione differenziale:

$$\sqrt{x\,y}\,dx + \sqrt[3]{x\,y}\,dy = 0,$$

ossia:

$$\sqrt{x}\,\sqrt{y}\,dx + \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y}\,dy = 0.$$

Dividendo ambo i membri dell'equazione per $\sqrt{y}\,\sqrt[3]{x}$ (*) si ha:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx + \frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt{y}}\,dy = 0. \qquad (6)$$

Colla divisione operata abbiamo ricondotto l'equazione differenziale proposta al tipo precedentemente esaminato, onde, integrando la (6), si ha che le funzioni y che la risolvono sono date implicitamente dall'equazione:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx + \int \frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt{y}}\,dy = C \quad (C = \text{cost.})$$

ossia dalla:

$$\frac{6}{7}\,x^{\frac{7}{6}} + \frac{6}{5}\,y|^{6} = C.$$

da cui:

$$y = \left(\frac{5}{6}\,C - \frac{5}{7}\,\sqrt[6]{x^7} \right)^{\frac{6}{5}}.$$

(*) Questa divisione è lecita (se x è generico) supposto $y \neq 0$. Bisognerà poi esaminare a parte se la $y = 0$ è (come avviene appunto nel caso nostro) una soluzione della nostra equazione.

Le funzioni y rappresentate dalla formola precedente insieme con la soluzione $y = 0$ sono tutte e sole le funzioni che risolvono l'equazione differenziale che ci eravamo proposti di studiare.

In generale si può dire che, se si ha un'equazione differenziale del tipo:

$$XY\,dx + \xi\eta\,dy = 0, \tag{7}$$

dove X, ξ, Y, η sono funzioni le prime di x e le seconde di y, si può facilmente rendere il primo membro della (7) un differenziale esatto a variabili separate, dividendo ambo i membri della (7) per $\xi\,Y$.

ESEMPIO.

Consideriamo la pila di un ponte; ne sia S_0 la sezione superiore; sia x la distanza di un punto della pila da S_0, e sia $S(x)$ la sezione della pila posta alla distanza x da S_0. Si richiede talvolta nella tecnica che l'incremento $S(x+h) - S(x)$ della sezione sia proporzionale al volume

$$\int_x^{x+h} S(x)\,dx$$

di quella parte di pila, che è racchiusa tra le sezioni poste alle distanze $x, x+h$ da S_0 (*). Sarà perciò

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} = k\,\frac{1}{h}\int_x^{x+h} S(x)\,dx$$

dove k è una costante dipendente dal tipo di costruzione adottato.

Passando al limite per $h = 0$ si trova:

$$S'(x) = k\,S(x),$$

cioè:

$$\frac{d\,S}{S} = k\,dx$$

donde:

$$\log S = k\,x + \text{cost.}$$

Poichè $S = S_0$ per $x = 0$, sarà:

$$\log S = k\,x + \log S_0$$

$$S = S_0\,e^{kx}.$$

(*) E ciò, perchè generalmente l'area di una tale sezione si fa proporzionale al carico complessivo (del ponte e della stessa pila), che gravita su tale sezione. Sulla S_0 gravita, p. es., soltanto parte del ponte.

γ) Altro tipo di equazione differenziale ordinaria del primo ordine, che si può ridurre al tipo precedente, è quello in cui la $M(x, y)$ e la $N(x, y)$ che figurano nella (4) siano funzioni omogenee dello stesso grado n.

Ricordo che una funzione di x, y si dice funzione omogenea di grado n se è uguale al prodotto di x^n per una *funzione di* $\frac{y}{x}$.

Così, ad esempio: $x^2 + y^2 + xy$ è una funzione omogenea di grado 2, perchè è uguale a

$$x^2\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}\right).$$

È funzione omogenea di grado $\frac{1}{2}$ la

$$\sqrt{x+y}$$

poichè:

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x\left(1+\frac{y}{x}\right)} = x^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Se nella (4):

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0,$$

la M e N sono funzioni omogenee dello stesso grado n, è facile indicare un metodo generale di integrazione. Infatti introduciamo una nuova variabile z in luogo di y, ponendo:

$$\frac{y}{x} = z. \tag{8}$$

Dividendo la (4) per x^n, i coefficienti di dx e dy risultano funzioni del solo rapporto $\frac{y}{x}$; cioè si ha un'equazione del tipo:

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0. \tag{9}$$

Intanto da:

$$\frac{y}{x} = z \quad \text{ovvero} \quad y = zx,$$

differenziando si ottiene:

$$dy = x\,dz + z\,dx. \tag{10}$$

Sostituendo in (9), si ottiene:

$$\varphi(z)\,dx + \psi(z)\,(x\,dz + z\,dx) = 0,$$

donde, raccogliendo a fattori comuni dx e dz, si ha:

$$[\varphi(z) + z\psi(z)]\,dx + x\psi(z)\,dz = 0$$

che, separando le variabili, diventa:

$$\frac{dx}{x} + \frac{\psi(z)\,dz}{\varphi(z) + z\,\psi(z)} = 0, \qquad (11)$$

che è a variabili separate, e noi sappiamo quindi integrare.

Sia, p. es., data l'equazione:

$$dx\left\{1 - \frac{x\,y}{x^2 + y^2}\right\} + \frac{x^2}{x^2 + y^2}\,dy = 0.$$

Posto $\frac{y}{x} = z$, essa diventa:

$$\left\{1 - \frac{z}{1 + z^2}\right\} dx + \frac{1}{1 + z^2}(x\,dz + z\,dx) = 0$$

ossia:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{1 + z^2} = 0.$$

Integrando si ottiene $\log|x| + \operatorname{arctg} z = C$ ($C =$ cost.). Donde

$z = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}[C - \log|x|]$ e quindi $y = x\operatorname{tg}[C - \log|x|]$.

δ) Noi abbiamo visto che la

$$M\,dx + N\,dy = 0 \qquad (12)$$

è risolubile mediante quadrature, se il primo membro è un differenziale esatto, e in particolare se le variabili sono separate (o si possono con qualche artificio separare). fattore integrante

Se il primo membro di (12) non è un differenziale esatto, ci si può chiedere se è possibile trovare una funzione $\rho(x, y)$ delle x, y, che, moltiplicata per esso, lo renda un differenziale esatto. Una tale funzione ρ si dice essere un *moltiplicatore* di $M\,dx + N\,dy$.

È chiaro che, se in qualche modo si può giungere a trovare un tale moltiplicatore, allora la risoluzione, o, come si suol dire, l'integrazione della (12) è ricondotta a calcolare degli integrali indefiniti, cioè è ridotta alle quadrature.

Affinchè ρ sia un moltiplicatore, ossia affinchè $\rho\, Mdx + \rho\, Ndy$ sia un differenziale esatto, deve essere:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho\, M) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho\, N), \text{ ossia:}$$

$$\rho\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) + M\frac{d\rho}{dy} - N\frac{d\rho}{dx} = 0.$$

Questa è un'equazione *alle derivate parziali* per la ρ; e il problema di risolvere le equazioni a derivate parziali è assai più complicato del problema di risolvere le equazioni a derivate ordinarie. Il metodo di cercare un moltiplicatore riesce perciò utile solo in casi particolari.

1° Esista, p. es., un moltiplicatore ρ funzione della sola x. Essendo in tal caso $\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$, la nostra equazione diventa

$$\frac{d \log|\rho|}{dx} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

E, affinchè si possa risolvere quest'equazione con una funzione ρ della sola x, anche il secondo membro $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ deve essere funzione della sola x.

Se così avviene, il problema è dunque ridotto alle quadrature.

2° Così pure, se $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ è funzione della sola y, esiste un moltiplicatore ρ funzione della sola y; e il problema è ancora ridotto alle quadrature.

Così, per esempio, sia data l'equazione $(x + y)\, dx + dy = 0$. È $x + y = M$, $N = 1$, $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = 1$ è costante, non dipende da y; esiste un moltiplicatore ρ funzione della sola x. definito dalla $\frac{d \log|\rho|}{dx} = 1$.

Si può dunque porre $\rho = e^x$; l'equazione diventa:

$$e^x (x + y)\, dx + e^x\, dy = 0.$$

Posto $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x (x + y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = e^x$, si trova $z = y e^x + \varphi(x)$, dove φ è funzione di x, tale che $[y\, e^x + \varphi(x)]'_x = e^x (x + y)$, ossia $\varphi'(x) = x\, e^x$, $\varphi(x) = x\, e^x - e^x + \text{cost}$. Le funzioni y che soddisfano alla nostra equazione differenziale sono dunque quelle date dalla $x\, e^x + y\, e^x - e^x = (x + y - 1)\, e^x = \text{cost}$.

ESEMPIO.

La quantità di calore Q data ad una massa di gas ne fa variare o la pressione p o il volume v, o entrambe le p, v. Se noi, p. es., teniamo v costante, varierà la pressione p; il rapporto $\frac{dQ}{dt}$, ove dQ è la quantità di calore necessaria per far aumentare la temperatura t di dt, è una costante c; il cosidetto calore specifico a volume costante. Sarà dunque $dQ = cdt$; l'incremento dt di temperatura è dato da $\frac{\partial t}{\partial p} dp$; cosicchè infine:

$$dQ = c \frac{\partial t}{\partial p} dp.$$

Così pure, se con C indichiamo il calore specifico a pressione costante, sarà:

$$dQ = C \frac{\partial t}{\partial v} dv$$

l'incremento di calore che si deve dare, affinchè il volume del gas (tenuto a pressione costante) aumenti di dv.

Cosicchè complessivamente

$$dQ = c \frac{\partial t}{\partial p} dp + C \frac{\partial t}{\partial v} dv$$

è la quantità di calore necessaria per aumentare p, v rispettivamente di dp, dv.

Ora noi ci chiediamo: Può Q essere una funzione di p, v: ossia può una massa di gas, ritornando alle stesse condizioni (di temperatura e di pressione) possedere in ogni caso la stessa quantità di calore? Ciò che sembra la conseguenza più semplice dell'antica ipotesi dell'indistruttibilità del calore.

Se così fosse, l'espressione sopra trovata per dQ sarebbe un differenziale esatto. Si avrebbe cioè:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(c \frac{\partial t}{\partial p}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(C \frac{\partial t}{\partial v}\right) \text{ ossia } (C - c) \frac{\partial^2 t}{\partial p \, \partial v} = 0$$

ciò che non è, perchè $C \neq c$, e $t = \frac{1}{R} pv$, dove R è una costante.

Se $c \frac{\partial t}{\partial p} dp + C \frac{dt}{\partial v} dv$ non è esatto, noi possiamo cercare di renderlo esatto moltiplicandolo per un moltiplicatore ρ.

Dovrà essere:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(c\rho\frac{\partial t}{\partial p}\right)=\frac{\partial}{\partial p}\left(C\rho\frac{\partial t}{\partial v}\right)$$

$$\text{ossia } \rho\,(c-C)\frac{\partial^2 t}{\partial p\,\partial v}+c\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial t}{\partial p}-C\frac{\partial\rho}{\partial p}\frac{\partial t}{\partial v}=0$$

$$\text{ossia} \qquad c\left\{1+v\frac{\partial\log\rho}{\partial v}\right\}=C\left\{1+p\frac{\partial\log\rho}{\partial p}\right\}.$$

La soluzione più semplice si ottiene, supponendo

$$v\frac{\partial\log\rho}{\partial v}+1=0\,; \qquad p\frac{\partial\log\rho}{\partial p}+1=0\,;$$

ossia supponendo ρ inversamente proporzionale a p e a v, ponendo, p. es., $\rho=\frac{1}{t}$. Si ha così che $\frac{dQ}{t}$ è un differenziale esatto; la funzione, di cui esso è differenziale, dicesi *entropia*. E ne è ben nota l'importanza in termodinamica.

Dicesi abiabatica ogni trasformazione, che non richiede nè assorbimento, nè dispersione di calorico; tali trasformazioni sono quindi definite dalla

$$0=d\,Q=c\frac{\partial t}{\partial p}dp+C\frac{\partial t}{\partial v}dv \text{ ossia dalla } c\,vdp+C\,pdv=0.$$

Separando le variabili si trova $c\frac{dp}{p}+C\frac{dv}{v}=0$, cioè

$$c\log p+C\log v=\text{cost.}$$

$$pv^{\frac{C}{c}}=\text{cost.}\quad,\quad p=\text{cost.}\,v^{-\frac{C}{c}},$$

che ci dà in termini finiti l'equazione di una adiabatica.

Un'applicazione all'equazione $X(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}+Y(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}=0$.

Abbiamo visto che l'equazione $\frac{dy}{dx}=\frac{Y(x,y)}{X(x,y)}$ si sa risolvere se si conosce una funzione $f(x,y)$, le cui derivate f'_x, f'_y sieno proporzionali alle $-Y(x,y)$, $X(x,y)$; cioè una funzione $f(x,y)$ tale che $Xf'_x+Yf'_y=0$; perchè precisamente (almeno se sono soddisfatte le condizioni sopra enunciate) le funzioni $y(x)$ cercate sono quelle che soddisfano all'equazione $f(x,y)=\text{cost}$. Viceversa si conoscano le soluzioni dell'equazione $y'=\frac{Y}{X}$, e si sappia che esse sono tutte e sole le funzioni che soddisfano ad una equazione $\varphi(x,y)=\text{cost}$. Poichè esse sono anche tutte e sole le funzioni che soddisfano alla $f(x,y)=\text{cost}$. quando $f(x,y)$ è una soluzione di $X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}=0$, *tali funzioni* $f(x,y)$, che soddisfano alla $X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial x}=0$ saranno tutte e sole le funzioni che restano costanti, quando φ è costante, cioè *saranno le funzioni di* φ. (Cfr. l'ultimo esempio del § 117).

Così, p. es., si trovino le soluzioni di

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Le soluzioni della $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, ossia della $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ sono quelle tali che $\log y = \log x +$ cost., ossia tali che $\frac{y}{x} =$ cost. Le funzioni f cercate sono tutte e sole le funzioni di $\frac{y}{x}$, come è facile verificare.

L'equazione di Eulero $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf$ ($n =$ cost.).

Posto $\varphi = \log |f| - n \log |x|$, tale equazione diventa $x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$. Perciò $\varphi(x, y) = \log |f(x, y)| - n \log |x| = \log \left| \frac{f(x, y)}{x^n} \right|$ è funzione del rapporto $\frac{x}{y}$. Altrettanto avverrà di $F = e^{\varphi} = \left| \frac{f(x, y)}{x^n} \right|$. Perciò $f(x, y) = x^n F\left(\frac{x}{y}\right)$. In tal caso si dice che f è *funzione omogenea di grado* n, *perchè, moltiplicando* x *ed* y *per una stessa costante* h, la f (x, y) *resta moltiplicata per* h^n. Più in generale le soluzioni $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dell'equazione $\Sigma_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = nf$ sono tutte e sole le funzioni omogenee di grado n delle x, cioè le funzioni del tipo $x_1^n \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right)$. Infatti se consideriamo f come funzioni delle variabili $\xi_1 = x_1$; $\xi_2 = \frac{x_2}{x_1}$; $\xi_3 = \frac{x_3}{x_1}$; ....; $\xi_n = \frac{x_n}{x_1}$, la nostra equazione diventa $\frac{\partial f}{\partial \xi_1} = \frac{n}{\xi_1} f$, donde $\frac{\partial \log |f|}{\partial \xi_1} = \frac{n}{\xi_1}$; $\log |f| = n \log |\xi_1| + \psi$; $f = \xi_1^n \varphi$, $[\psi = \log |\varphi|]$ dove ψ (e quindi anche φ) sono costanti rispetto alla ξ_1, e cioè sono funzioni delle sole $\xi_2, \xi_3, \ldots \xi_n$. c. d. d.

§ 111. — Tipi particolari di equazioni differenziali.

α) Sia data l'equazione lineare (*) del primo ordine omogenea (**)

$$y' = P(x)\, y, \tag{1}$$

dove $P(x)$ è una funzione continua della x. Dividendo per y (supposto per un momento diverso da zero) se ne deduce

$$\frac{y'}{y} = P(x), \text{ ossia } \frac{d}{dx} \log |y| = P(x).$$

È perciò $\log |y| = \int P(x)\, dx + C'$, e quindi $|y| = e^{C' + \int P(x)\, dx}$ ($C' =$ cost. arbitraria).

(*) *Lineare* perchè di primo grado nella y e derivata y'.

(**) *Omogenea* perchè mancano termini di grado zero nelle y, y'. Vi è invece un tale termine $Q(x)$ nell'equazione che trattiamo in β.

Notando che, essendo C' una costante arbitraria, $e^{C'}$ è una costante arbitraria *positiva*, e, passando dal valore di $|y|$ a quello di y, se ne trae

$$y = C e^{\int P(x)\,dx} \qquad \text{ossia} \qquad y\, e^{-\int P(x)\,dx} = C,$$

dove C è una costante arbitraria che ha il segno di y. E questa formola, come si verifica facilmente, dà proprio *una* soluzione di (1). Per quanto abbiamo detto essa dà anzi *tutte* le soluzioni di (1), perchè per $C = 0$ dà la soluzione (finora esclusa) $y = 0$.

β) Sia data l'equazione lineare del primo ordine

$$y' = P(x)\, y + Q(x) \qquad (2) \quad (P,\ Q \text{ funzioni continue della } x).$$

La $y = ze^{\int P(x)\,dx}$ soddisfa alla (2), ove si supponga $Q(x) = 0$, quando con z si indichi una costante (questo §, α). Cerchiamo se è possibile determinare la z come funzione *non costante* della x in guisa che la $y = ze^{\int P(x)\,dx}$ soddisfi all'equazione più generale (2) (ciò che in sostanza equivale ad assumere come funzione incognita al posto della y la $z = ye^{-\int P(x)\,dx}$).

Questo metodo, detto *metodo della variazione delle costanti arbitrarie*, ha spesso applicazioni nell'analisi, e sarà applicato anche da noi in altri problemi. Sostituendo in (2) $ze^{\int P(x)\,dx}$ al posto di y otteniamo:

$$z' e^{\int P(x)\,dx} + z\, P(x)\, e^{\int P(x)\,dx} = P(x)\, ze^{\int P(x)\,dx} + Q(x),$$

ossia:

$$z' e^{\int P(x)\,dx} = Q(x), \qquad \text{cioè:} \qquad z' = Q(x)\, e^{-\int P(x)\,dx}.$$

Integrando si ha così:

$$z = \int Q(x)\, e^{-\int P(x)\,dx}\, dx + C \qquad (C = \text{cost. arbitraria})$$

e quindi:

$$y = e^{\int P(x)\,dx} \left\{ \int Q(x)\, e^{-\int P(x)\,dx}\, dx + C \right\}.$$

Oss. 1ª. Per $Q(x) = 0$ questa formola si riduce a quella trovata in (α) per risolvere (1).

Oss. 2ª. È naturalmente inutile scrivere $\int P(x)\,dx + k$ al posto di $\int P(x)\,dx$ (k = cost. arbitraria) nella nostra formola. Con questo cambiamento esso diventa infatti:

$$e^{\int P(x)\,dx + k} \left\{ \int Q(x)\, e^{-\int P(x)\,dx}\, e^{-k}\, dx + C \right\} =$$

$$= e^{\int P(x)\,dx} \left\{ \int Q(x)\, e^{-\int P(x)\,dx}\, dx + Ce^{k} \right\},$$

che differisce dalla precedente in modo non essenziale solo nel fatto che la costante arbitraria vi è indicata non con C, ma con Ce^k.

γ) Il tipo più generale di un'equazione alle derivate ordinarie del secondo ordine è

$$f(x, y, y', y'') = 0,$$

dove f è funzione delle x, y, y', y''.

Supponiamo che in tale equazione non figuri la y, che cioè l'equazione sia del tipo

$$f(x, y', y'') = 0.$$

Ponendo

$$y' = z,$$

essa si trasforma nell'equazione

$$f(x, z, z') = 0$$

che è un'equazione differenziale del primo ordine. Se noi la sappiamo risolvere, conosceremo la z (con una costante arbitraria) e ne dedurremo:

$$y = \int z dx + \text{cost.}$$

con una seconda costante arbitraria.

δ) Un altro tipo di equazione differenziale del second'ordine, che si può ridurre al primo, si ha quando nell'equazione data non compare la variabile indipendente x; cioè quando si abbia un'equazione del tipo:

$$f(y'', y', y) = 0.$$

Se questa equazione ha una soluzione y non costante (*), prendiamo questa y come variabile indipendente e chiamiamola ξ. La derivata $y' = \frac{dy}{dx}$ si indichi con z. Allora sarà:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\xi}{dx}\frac{dy'}{d\xi} = \frac{dy}{dx}\frac{dy'}{d\xi} = z\frac{dz}{d\xi},$$

(*) Le soluzioni $y = k$ (k = cost.) si trovano immediatamente. Come si vede subito, sostituendo nell'equazione proposta, esse sono le soluzioni *eventuali* dell'equazione (non differenziale) $f(0, 0, k) = 0$. Se poi y non è costante, e quindi non è identicamente $y' = 0$, in un qualche intorno, per la teoria delle funzioni implicite, si potrà considerare x come funzione di y, e quindi anche y' (che è funzione della x) come funzione della y.

e la nostra equazione diventerà:

$$f\left(z\frac{dz}{d\xi}, z, \xi\right) = 0,$$

che è del primo ordine perchè vi compare solo la derivata prima della funzione incognita z. Dedottane la $z = \frac{dy}{dx}$ come funzione $\varphi(y)$ della $\xi = y$, con una costante arbitraria C, si dovrà poi risolvere la $\frac{dy}{dx} = \varphi(y)$, che dà

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} - x = \text{cost.}$$

come una nuova costante arbitraria.

Sia data, per esempio, l'equazione

$$y + y'' = 0.$$

Se $y = \text{cost.}$, è $y = 0$; questo solo caso eccettuato, si potrà porre $y = \xi$, $y' = z$; cosicchè l'equazione data si ridurrà alla

$$\xi\, d\xi + z\, dz = 0$$

e integrando:

$$\frac{\xi^2}{2} + \frac{z^2}{2} = \text{cost.}$$

e cioè:

$$\frac{y^2}{2} + \frac{y'^2}{2} = \frac{C^2}{2}, \quad (C = \text{cost.})$$

da cui

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C^2 - y^2}.$$

Separando le variabili

$$\frac{dy}{\sqrt{C^2 - y^2}} = dx$$

e integrando:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C^2 - y^2}} = x + d$$

$$\operatorname{arcsen} \frac{y}{C} = x + d, \; y = C \operatorname{sen}(x + d),$$

dove d è una nuova costante arbitraria. Dunque anche nell'integrale generale di quest'equazione del 2° ordine compaiono due costanti arbitrarie. In quest'ultima formola è inclusa anche la soluzione $y = 0$, che avevamo finora escluso; ciò che si riconosce, ponendo $C = 0$.

ESEMPI.

1° Integrare l'equazione $y = xy' + \varphi(y')$ [φ funzione derivabile].

RIS. Derivando entrambi i membri si ottiene:

$$y' = y' + xy'' + \varphi'(y')\, y'' \text{ ossia } y''\,[x + \varphi'(y')] = 0.$$

Sarà dunque $y'' = 0$ oppure $x = -\varphi'(y')$.

Nel primo caso $y = mx + n$ (m, n costanti); e, sostituendo nella data equazione, si trova $mx + n = mx + \varphi(m)$, ossia $n = \varphi(m)$ e quindi

$$y = mx + \varphi(m) \qquad (m = \text{cost. arbitraria}). \qquad (\alpha)$$

Se invece $x = -\varphi'(y')$, si ponga $y' = t$; ricordando la data equazione si trova:

$$x = -\varphi'(t);\ y = -t\varphi'(t) + \varphi(t).$$

L'eliminazione della t tra queste due equazioni darà una nuova soluzione della nostra equazione, se da esse si deduce $y' = \dfrac{dy}{dx} = t$; perchè allora la 2ª si riduce proprio all'equazione data. E infatti se ne deduce (se $\varphi''(t) \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\varphi'(t) - t\varphi''(t) + \varphi'(t)}{-\varphi''(t)} = t.$$

Se non eliminiamo la t, le precedenti formole definiscono la soluzione *in forma parametrica;* basta infatti far variare t per dedurne le coppie di valori compatibili delle x, y.

Queste due equazioni si possono considerare come le equazioni parametriche di una curva Γ.

La retta tangente a Γ in quel punto di Γ, che corrisponde al valore m della t, ha per equazione (α). Cioè la curva Γ è la curva, le cui tangenti hanno per equazione (α), cioè è la curva inviluppo delle rette (α).

Si noti che, se si volesse dalla data equazione dedurre y' come funzione delle x, y, la y' sarebbe una funzione *implicita* delle x, y, a cui proprio lungo Γ non sono applicabili i teoremi del § 84, perchè lungo Γ è nullo $\varphi'(y') + x$, che è appunto la derivata *parziale* del primo membro della nostra equazione rispetto ad y'. Perciò Γ si dice la soluzione *singolare.*

2° Integrare l'equazione $y = x\psi(y') + \varphi(y')$ (φ, ψ funzioni derivabili).

Ris. Derivando si ottiene:

$$y' = \psi(y') + [x\psi'(y') + \varphi'(y')]\frac{dy'}{dx}.$$

Posto $y' = t$, se ne deduce

$$\frac{dx}{dt} = x\frac{\psi'(t)}{t - \psi(t)} + \frac{\varphi'(t)}{t - \psi(t)},$$

escluso il caso $\psi(t) = t$, che abbiamo già trattato all'esempio 1°. Questa equazione, in cui si considera t come variabile indipendente ed x come funzione incognita, è un'equazione differenziale lineare del primo ordine che già sappiamo risolvere. E si trova

$$x = e^{\int\frac{\psi(t)}{t-\psi(t)}dt}\left\{\int\frac{\varphi'(t)}{t - \psi(t)}e^{-\int\frac{\psi'(t)}{t-\psi(t)}dt}dt + \text{cost.}\right\}.$$

L'equazione differenziale dà poi

$$y = x\psi(t) + \varphi(t).$$

Restano così espressi x, y in funzione di un parametro t; e con un'eliminazione si potrebbe (volendo) dedurne la y espressa in funzione di x. Si verifichi che effettivamente $\frac{dy}{dx} = t$.

3° Integrare

$$(ax + by + c)\,dx + (hx + ky + l)\,dy = 0$$
$$(a, b, c, h, k, l = \text{cost.}).$$

Ris. Posto $x = \xi + m$, $y = \eta + n$ (m, n costanti), l'equazione diventa:

$$(a\xi + b\eta + \mu)\,d\xi + (h\xi + k\eta + \lambda)\,d\eta = 0$$

ove:

$$\mu = am + bn + c, \qquad \lambda = hm + hn + l.$$

Se $ak - bh \neq 0$, si possono scegliere le m, n in modo che $\lambda = \mu = 0$.

L'equazione diventa:

$$(a\xi + b\eta)\,d\xi + (h\xi + k\eta)\,d\eta = 0,$$

che è omogenea di primo grado; e quindi le variabili si separano tosto assumendo $\frac{\eta}{\xi} = z$ come nuova variabile al posto di η, ecc.

Sia invece $ak - bh = 0$. Se $a = b = h = k = 0$ l'equazione si risolve immediatamente. Se così non è, almeno una delle due espressioni $ax + by + c$ o $hx + ky + d$, p. es. la prima, non è identicamente costante. Postala uguale a t, la nostra equazione diventa:

$$t dx + (pt + q) dy = 0 \qquad (p, q = \text{cost.}).$$

Posto al posto della x o della y i valori che si traggono dalle $ax + by + c = t$, la nostra equazione diventa del tipo:

$$(\alpha t + \beta) dx + (\gamma t + \delta) dt = 0$$

oppure:

$$(\alpha t + \beta) dy + (\gamma t + \delta) dt = 0$$
$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta = \text{cost.})$$

che si integra subito, separando le variabili (dividendo per $\alpha t + \beta$).

ALTRI ESEMPI.

1° Integrare le equazioni:

$$y'' = P(x) y' + Q(x);$$
$$y^{(n)} = P(x) y^{(n-1)} + Q(x). \text{ (Si ponga } z = y^{(n-1)}\text{)}.$$

2° Integrare il sistema di equazioni (ove s è la variabile indipendente):

$$x'^2 + y'^2_s = 1 \qquad x''^2_s + y''^2_s = k^2 \qquad (k = \text{cost.}).$$

Si potrà porre per la prima equazione $x' = \cos z$, $y' = \operatorname{sen} z$; e, sostituendo nella seconda, si trova:

$$z'^2 = k^2, \text{ donde } z' = \pm k, \quad z = \pm ks + h \ (h = \text{cost. arbitraria}).$$

E se ne trae: $x = \int \cos(\pm ks + h)\, ds$, $y = \int \operatorname{sen}(\pm ks + h)\, ds$, dove è poi da distinguere il caso $k = 0$ da quello $k \neq 0$.

3° Risolvere l'equazione $\dfrac{y''_x}{(1 + y'^2_x)^{\frac{3}{2}}} = k \ (k = \text{cost.}).$

Si può seguire il metodo dato in questo §, δ, ponendo $y' = z$. Più brevemente si procede ponendo $y'_x = \operatorname{tg} z$, donde $y'' = \frac{z'}{\cos^2 z}$, $1 + y'^2 = \frac{1}{\cos^2 z}$. L'equazione diventa:

$$z' \cos z = k\ ;\ (\operatorname{sen} z)' = k\ ;\ \operatorname{sen} z = kx + h\ (h = \text{cost.}),$$

donde:

$$y' = \operatorname{tg} z = \frac{kx + h}{\sqrt{1 - (kx + h)^2}} \text{ ed } y = \int \frac{(kx + h)\, dx}{\sqrt{1 - (kx + h)^2}},$$

che si integra tosto, assumendo $1 - (kx + h)^2$ (se $k \neq 0$) come nuova variabile di integrazione. E si trova che le curve $y = y(x)$ cercate sono rette (per $k = 0$), o cerchi di raggio $\frac{1}{k}$ (per $k \neq 0$).

4° Risolvere l'equazione $y' = P(x)\, y + Q(x)\, y^m$.

Si divida per y^m e si assuma $z = \frac{1}{y^{m-1}}$ come nuova funzione incognita. Saremo ridotti al caso studiato in questo §, β.

§ 112. — **Teorema di Cauchy e integrazione per serie.**

α) Vogliamo ora fermarci un momento a studiare più da vicino il significato delle costanti arbitrarie che figurano nella soluzione di un'equazione differenziale.

Se consideriamo, p. es., l'equazione differenziale più semplice:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

del primo ordine, la funzione:

$$y = \int f(x)\, dx + \text{cost.}$$

che la soddisfa, contiene una costante arbitraria; ed è noto che, se fissiamo il valore b che questa funzione y deve avere per un certo valore a della variabile, allora la costante, e in conseguenza la y, restano completamente determinate. Si ha appunto:

$$y = \int_a^x f(x)\, dx + b.$$

In altre parole: nella risoluzione di questa equazione compare una costante arbitraria ed esiste una ed una sola funzione che le soddisfi e che per $x = a$ assume il valore b.

Negli altri tipi di equazioni del primo ordine da noi considerati, l'integrale generale contiene pure una costante arbitraria; in quelle del secondo ordine l'integrale generale ne contiene due.

Date le equazioni differenziali (del *secondo* ordine), che definiscono i movimenti in un sistema di punti, le traiettorie sono univocamente determinate quando di ogni punto siano date la posizione e la velocità iniziale (cioè sieno dati per un certo istante i valori delle coordinate di ogni punto e delle loro derivate *prime*). Questo teorema è ben famigliare a chi abbia studiati anche i soli primi elementi della Meccanica Razionale.

Queste osservazioni sono caso particolare di un celebre teorema di Cauchy, che si potrebbe dimostrare col metodo delle approssimazioni successive, già da noi usato al § 84, β, pag. 279, e in qualche caso col metodo degli sviluppi in serie di potenze, come accenneremo più avanti.

Se è data l'equazione differenziale

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \ldots\ldots, y^{(n-1)}),$$

dove φ *è (in qualche campo) una funzione continua e finita insieme alle sue derivate del primo ordine rispetto alle* $x, y, y', \ldots\ldots, y^{(n-1)}$:

1° *Esistono infinite funzioni* y *che le soddisfano.*

2° *Esiste (in un intorno abbastanza piccolo di* $x = a$) **una ed una sola** *funzione* y *che le soddisfa e tale che per* $x = a$ *essa e le successive derivate* $y', y'', \ldots\ldots, y^{(n-1)}$ *assumono rispettivamente valori prefissati* $b_0, b_1, b_2, \ldots\ldots, b_{n-1}$ (*), *dove le* a *e le* b *sono arbitrarie e sottoposte all'unica condizione che in un intorno del punto*

$$x = a,\ y = b_0,\ y' = b_1, \ldots\ldots, y^{(n-1)} = b_{n-1}$$

la φ *e le sue derivate prime sono finite e continue.*

È sottinteso che, se la φ non soddisfacesse a questa ultima condizione, l'affermazione di questo teorema potrebbe benissimo essere falsa (**).

(*) Cioè per $x = a$ è $y = b_0$, $y = b_1$, $y'' = b_2$, ..., $y^{(n-1)} = b_{(n-1)}$.

(**) Così, p. es., per un punto $A = (a, b)$ della curva Γ dell'es. 1° del § 111, pag. 373, escono due curve (la Γ, e la retta tangente a Γ in A) che soddisfano all'equaz. studiata in tale esempio. Ciò esistono *due* funzioni $y(x)$ soddisfacenti a tale equazione, le quali per $x = a$ assumono il valore b.

Dunque nell'intorno di $x = a$, $y = b$ non si può risolvere tale equazione rispetto ad y', deducendone y' come funzione continua con derivate continue delle x, y. Abbiamo verificato infatti che in tale punto non si può applicare il teorema delle funzioni implicite.

Si noti che, nell'enunciato di questo teorema, *l'equazione si suppone risoluta rispetto alla derivata di ordine massimo.*

Questo teorema consta di due parti: una che afferma l'**esistenza**, l'altra che afferma la **unicità** di tale funzione y.

β) Vediamo ora pertanto un metodo abbastanza generale di integrazione delle equazioni differenziali, che può riuscire utilissimo quando non siano applicabili altri metodi.

Si abbia l'equazione differenziale:

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n-1)}) \qquad (1)$$

dove il secondo membro possegga finite e continue tutte le derivate, e sia sviluppabile in serie di potenze di $x - a$, $y - b_0$, $y' - b_1$, ..., $y^{(n-1)} - b_{n-1}$.

Consideriamo allora il punto $x = a$ e *supponiamo sviluppabile* l'integrale ignoto y nell'intorno del punto a mediante la serie di Taylor:

$$y = y_0 + (x - a)\, y'_0 + \ldots\ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}\, y_0^{(n)} + \ldots\ldots \qquad (2)$$

dove y_0, y'_0, ecc. sono i valori di y, y', ecc. nel punto $x = a$.

Intanto della nostra equazione differenziale (1) è facile, derivando successivamente, calcolare $y^{(n)}$, $y^{(n+1)}$, $y^{(n+2)}$ ..... in funzione di x, y, y' ..... $y^{(n-1)}$.

Infatti, derivando rispetto alla x la (1), si ottengono equazioni del tipo seguente:

$$y^{(n+1)} = \varphi_1(x, y, y', \ldots\ldots, y^{(n)}) \qquad (\alpha)$$

$$y^{(n+2)} = \varphi_2(x, y, y', \ldots\ldots, y^{(n+1)}) \qquad (\beta)$$

. . . .

Ora, se poniamo in φ_1 al posto di $y^{(n)}$ il valore dato dalla (1), in φ_2 al posto di $y^{(n)}$ e $y^{(n+1)}$ i valori dati rispettivamente dalla (1) e dalla (α), nella successiva φ_3 al posto di $y^{(n)}$, $y^{(n+1)}$ e $y^{(n+2)}$ i valori dati dalle (1), (α), (β) e così di seguito, otteniamo appunto

$$y^{(n)},\ y^{(n+1)},\ y^{(n+2)},\ y^{(n+3)},\ \ldots\ldots$$

espresse solo mediante y, y', y'', ..., $y^{(n-1)}$. Dati quindi ad arbitrio per $x = x_0$ i valori b_0, b_1, ..., b_{n-1} delle y, y', ..., $y^{(n-1)}$, si potranno calcolare i valori che per $x = a$ assumono $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, $y^{(n+2)}$, ...

Sostituendoli allora nella (2) si ha una funzione y data sotto forma di una serie ordinata secondo le potenze di $x - a$, e nella quale compaiono le n costanti arbitrarie b_0, b_1, ..., b_{n-1}.

Ora questa serie è convergente (come ha provato Cauchy) in un certo intervallo comprendente il punto $x = a$, si può derivare per serie, e rappresenta precisamente quella soluzione y della (1) tale che $y, y', \ldots\ldots, y^{(n-1)}$ per $x = a$ assumano i valori prescritti $b_0, b_1, \ldots\ldots, b_{n-1}$.

Se la φ non fosse sviluppabile in serie di potenze, come abbiamo ammesso, si potrebbero ancora in casi generalissimi dimostrare i teoremi di *esistenza* e di *unicità*, p. es. col metodo delle *successive approssimazioni*, di cui abbiamo già trovato una importante applicazione nella teoria delle funzioni implicite.

Esercizi.

1° Integrare per serie l'equazione $y' = y$.

RIS. Si ha $y' = y$, $y'' = y' = y$, $y''' = y'' = y' = y$ ecc. in generale $y^{(n)} = y$. Posto che $y = k$ per $x = 0$, si trova $y = k\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \ldots\ldots\right) = ke^x$, come già sapevamo.

2° Integrare per serie l'equazione $y'' \pm y = 0$.

§ 113. — Primi tipi di equazioni lineari alle derivate ordinarie a coefficienti costanti.

Oss. Il lettore, a cui non interessi il caso generale, potrà omettere lo studio dei seguenti tre paragrafi, sostituendo loro questo unico § 113. Paragrafo che invece potrà essere omesso da chi studii senz'altro il caso generale. È in ogni caso raccomandabile la lettura dell'esempio 4° al § 117.

1° Sia data l'equazione del primo ordine

$$y' + py = 0 \qquad (p = \text{cost.}). \tag{1}$$

Le sue soluzioni sono date dalla

$$y = Ce^{-px} \qquad (C = \text{cost. arbitraria}). \tag{2}$$

Si noti che nell'esponente $-px$ il coefficiente della x è $-p$, e che $-p$ è la radice dell'equazione *caratteristica*

$$c + p = 0 \tag{3}$$

ottenuta da (1) ponendo al posto di y' e di y la $c^1 = c$, e la $c^0 = 1$, essendo c la incognita.

2° Sia data l'equazione

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (p, q \text{ cost.}). \tag{4}$$

Se α, β sono le radici dell'equazione *caratteristica*

$$c^2 + pc + q = 0 \tag{5}$$

ottenuta, scrivendo $1, c, c^2$ al posto di y, y', y'' (c essendo l'incognita), sarà

$$\alpha + \beta = -p \quad , \quad \alpha\beta = q\ ;$$

$$\alpha = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad , \quad \beta = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\ .$$

La (4) si può scrivere:

$$0 = y'' - (\alpha + \beta)\, y' + \alpha\beta y$$
$$= (y' - \alpha y)' - \beta\, (y' - \alpha y).$$

Cioè, posto

$$z = y' - \alpha y, \tag{6}$$

la (4) diventa:

$$z' - \beta z = 0. \tag{7}$$

Da (7) si trae:

$$z = k e^{\beta x} \qquad (k = \text{cost. arb.}).$$

Da (6)

$$y' = \alpha y + k e^{\beta x}$$

cosicchè:

$$y = e^{\alpha x} \left\{ \int k e^{(\beta - \alpha) x} dx + h \right\} \qquad (k, h = \text{cost. arb.}).$$

I. Se $\alpha = \beta$, cioè se $\frac{p^2}{4} = q$, se ne deduce

$$y = e^{\alpha x} (C_1 x + C_2) \qquad (C_1 = k;\ C_2 = h \text{ cost. arbitrarie}).$$

II. Se $\alpha \neq \beta$

$$y = e^{\alpha x} \left\{ \frac{k}{\beta - \alpha} e^{(\beta - \alpha) x} + h \right\}$$

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} \qquad \left(C_1 = h;\ C_2 = \frac{k}{\beta - \alpha} \text{ cost. arbitr.}\right).$$

Questa formola, se α, β sono reali, ci dà tutte le soluzioni reali di (4) quando vi si diano a C_1, C_2 valori reali arbitrarii. Si noti però che (anche se, come supponiamo, p e q sono reali) le α, β possono essere complesse, ciò che avviene se $q - \frac{p^2}{4} > 0$. L'ultima formola continua però a essere valida anche in questo caso, e ci dà, se noi diamo alle C_1, C_2 valori complessi arbitrarii, tutte le soluzioni *reali o complesse* di (4).

Scegliamo quelle di tali soluzioni che sono reali. Bisognerà a tal fine che, mutando i in $-i$, la nostra y resti inalterata. Ma, se noi scambiamo i in $-i$, le α, β $\left(\text{che valgono } -\frac{p}{2} \pm i \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\right)$ si scambiano tra loro. La nostra soluzione sarà *reale* allora e allora soltanto che C_1 si ottenga da C_2 scambiando i in $-i$; cioè allora e allora soltanto che C_1, C_2 sono immaginarie coniugate.

Posto dunque $C_2 = \frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} i k_2$, $C_1 = \frac{1}{2} k_1 - \frac{1}{2} i k_2$, dove k_1, k_2 sono costanti reali arbitrarie, la

$$y = \left(\frac{1}{2} k_1 - \frac{1}{2} i k_2\right) e^{-\frac{p}{2} x + ix \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + \left(\frac{1}{2} k_1 + \frac{i}{2} k_2\right) e^{-\frac{p}{2} x - ix \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}$$

$$= \left(\frac{1}{2} k_1 - \frac{1}{2} i k_2\right) e^{-\frac{p}{2} x} \left\{ \cos \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, x + i \operatorname{sen} \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, x \right\}$$

$$+ \left(\frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} i k_2\right) e^{-\frac{p}{2} x} \left\{ \cos \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, x - i \operatorname{sen} \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, x \right\}$$

$$= e^{-\frac{p}{2} x} \left[k_1 \cos \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, x + k_2 \operatorname{sen} \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, x \right]$$

dà *tutte e sole le soluzioni reali* della nostra equazione.

§ 114. — Primi teoremi sulle equazioni differenziali lineari (alle derivate ordinarie).

Si dicono equazioni lineari le equazioni del tipo

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + p_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots\ldots + \\ + p_n(x)\, y = f(x), \qquad (1)$$

(perchè di primo grado nelle $y, y', \ldots\ldots, y^{(n)}$), dovè con $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$, f indichiamo funzioni arbitrarie delle x. Se $f(x) = 0$, l'equazione si dice omogenea, perchè in tal caso manca il termine $f(x)$ di grado zero nella y e derivate. Noi abbiamo al § 111, β, studiato la (1) nel caso $n = 1$, cioè nel caso di un'equazione del primo ordine. Supponiamo che y_1, y_2 siano due integrali della (1) non omogenea. Sarà:

$$y_1^{(n)} + p_1\, y_1^{(n-1)} + \ldots\ldots + p_n\, y_1 = f(x) \qquad (2)$$

$$y_2^{(n)} + p_1\, y_2^{(n-1)} + \ldots\ldots + p_n\, y_2 = f(x) \qquad (3)$$

Sottraendo (3) da (2), si verifica tosto che $z = y_2 - y_1$ soddisfa all'equazione

$$z^{(n)} + p_1\, z^{(n-1)} + \ldots\ldots + p_{n-1}\, z' + p_n\, z = 0 \qquad (4)$$

omogenea, che si deduce da (1) ponendovi $f(x) = 0$. Se dunque y è una particolare soluzione di (1), ogni altra soluzione di (1) è del tipo $y + z$, dove z è una soluzione di (4). E viceversa, se y soddisfa ad (1) e z a (4), anche $y + z$ soddisfa ad (1). Dunque per cercare *tutte e sole le soluzioni della* (1) *non omogenea, basta conoscerne una sola soluzione: tutte le altre si ottengono sommando con essa tutte le soluzioni della* (4) *omogenea.*

Lagrange ha dimostrato, come vedremo meglio in seguito, che, se si sa risolvere la (4) omogenea, è sempre possibile trovare una soluzione della (1) non omogenea: e quindi, per quanto precede, *che si sa risolvere pure la* (1) *sapendo integrare la* (4).

Vediamo quindi di studiare l'equazione omogenea:

$$y^{(n)} + p_1\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots + p_n\, y = 0 \qquad (5)$$

Se z_1 è una funzione che la risolve, è facile vedere che pure $k_1 z_1$, dove k_1 è una costante affatto arbitraria, è una soluzione dell'equazione; e infatti:

$$k_1 z_1^{(n)} + p_1 k_1 z_1^{(n-1)} + \ldots\ldots + p_n k_1 z_1 = \\ = k_1 (z_1^{(n)} + p_1 z_1^{(n-1)} + \ldots\ldots + p_n z_1) = 0.$$

poichè il secondo fattore compreso tra parentesi è zero (essendo la z_1 una soluzione dell'equazione).

Si ha ancora che, se z_1 e z_2 sono due soluzioni dell'equazione, l'equazione sarà pure soddisfatta da $z_1 + z_2$. E infatti:

$$(z_1 + z_2)^{(n)} + p_1 (z_1 + z_2)^{(n-1)} + \ldots\ldots + p_n (z_1 + z_2) =$$
$$= z_1^{(n)} + z_2^{(n)} + p_1 z_1^{(n-1)} + p_1 z_2^{(n-1)} + \ldots\ldots + p_n z_1 + p_n z_2 =$$
$$= (z_1^{(n)} + p_1 z_1^{(n-1)} + \ldots\ldots + p_n z_1) +$$
$$+ (z_2^{(n)} + p_1 z_2^{(n-1)} + \ldots\ldots + p_n z_2) = 0,$$

poichè i due termini fra parentesi dell'ultima somma sono entrambi nulli, essendo z_1 e z_2 soluzioni dell'equazione. Da quanto precede possiamo concludere che, se $k_1, k_2, \ldots\ldots, k_n$ sono costanti tutt'affatto arbitrarie, e $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$ sono soluzioni dell'equazione, sarà pure:

$$y = k_1 z_1 (x) + k_2 z_2 (x) + \ldots\ldots + k_n z_n (x) \qquad (6)$$

una soluzione di (4). Poichè la (6) contiene proprio n costanti arbitrarie, sorge spontanea la domanda se, al variare delle k, la (6) rappresenti ogni integrale della (5), o, in altre parole, se la (6) con le $k =$ cost. *sia l'integrale generale di* (5).

La (6) è *una sola* equazione lineare in n quantità k. Data la y, essa si può risolvere, se $n > 1$, in infiniti modi. Si domanda pertanto: *Se anche* y *è una funzione che soddisfa* a (5), vi è tra queste infinite soluzioni *una soluzione, per cui tutte le* k *siano costanti?* Premettiamo alcune considerazioni di indole generale.

§ 115. — **Un lemma.**

Siano $y, z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$ $n + 1$ funzioni della x, per le quali ammettiamo **soltanto** che posseggano le prime n derivate.

Noi vogliamo determinare altre n funzioni $k_1, k_2, \ldots\ldots, k_n$ della x tali che valga la:

$$(1) \qquad y = k_1 z_1 + k_2 z_2 + \ldots\ldots + k_n z_n$$

e valgano pure le:

$$(2) \quad \begin{cases} y' = k_1 z'_1 + k_2 z'_2 + \ldots\ldots + k_n z'_n \\ y'' = k_1 z''_1 + k_2 z''_2 + \ldots\ldots + k_n z''_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)} = k_1 z_1^{(n-1)} + k_2 z_2^{(n-1)} + \ldots\ldots + k_n z_n^{(n-1)} \end{cases}$$

Oss. Le (2) *sarebbero* conseguenza di (1), se le k fossero costanti, cosa che però in generale *non* sarà.

Le (1), (2) formano un sistema di n equazioni lineari nelle n incognite k. La regola di Leibnitz-Cramer ci assicura della loro risolubilità in un modo e in uno solo, se il determinante dei coefficienti delle incognite k

$$W = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \dots\dots z_n \\ z'_1 & z'_2 & \dots\dots z'_n \\ z''_1 & z''_2 & \dots\dots z''_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{(n-1)} & z_2^{(n-1)} & \dots\dots z_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

è differente da zero. Tale determinante si chiama il **Wronskiano** delle z. Possiamo dunque determinare le k soddisfacenti ad (1), (2) se il Wronskiano delle z è differente da zero.

Le k così determinate, se y è arbitraria, non saranno generalmente costanti, ma soddisferanno ad alcune equazioni, le quali dicono che la y definita da (1) soddisfa a (2).

Derivando (1) e confrontando con la prima delle (2) si trova che

$$y' = (k_1 z'_1 + k_2 z'_2 + \dots\dots + k_n z'_n) + (k'_1 z_1 + k'_2 z_2 + \\ + \dots\dots + k'_n z_n) = k_1 z'_1 + k_2 z'_2 + \dots\dots + k_n z'_n.$$

Sarà pertanto

$$(3) \qquad k'_1 z_1 + k'_2 z_2 + \dots\dots + k'_n z_n = 0.$$

Nello stesso modo, confrontando la derivata di ciascuna delle equazioni (2) (l'ultima esclusa) con la seguente equazione (2), si trova

$$(3)^{\text{bis}} \left\{ \begin{array}{llll} k'_1 z'_1 & + k'_2 z'_2 & + \dots\dots + k'_n z'_n & = 0 \\ k'_1 z''_1 & + k'_2 z''_2 & + \dots\dots + k' \; z''_n & = 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k'_1 z_1^{(n-2)} & + k'_2 z_2^{(n-2)} & + \dots\dots + k'_n z_n^{(n-} & = 0. \end{array} \right.$$

Viceversa, se le k' soddisfano alle (3) e $(3)_{\text{bis}}$ la y definita da (1) soddisfa alle (2). Derivando l'ultima della (2) si ha:

$$y^{(n)} = k_1 z_1^{(n)} + k_2 z_2^{(n)} + \dots\dots + k_n z_n^{(n)} + \\ + k'_1 z_1^{(n-1)} + k'_2 z_2^{(n-1)} \dots\dots + k'_n z_n^{(n-1)}.$$

Indicando con $p_1, p_2, \dots\dots, p_n$ funzioni arbitrarie della x, da questa equazione, dalle (1) e (2) si deduce immediatamente che:

$$\left. \begin{array}{l} y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots\dots + p_{n-1} y' + p_n y = \\ = k_1 \left[z_1^{(n)} + p_1 z_1^{(n-1)} + \dots\dots + p_{n-1} z'_1 + p \; z_1 \right] + \\ + k_2 \left[z_2^{(n)} + p_1 z_2^{(n-1)} + \dots\dots + p_{n-1} z_2 + p_n z_2 \right] + \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + k_n \left[z_n^{(n)} + p_1 z_n^{(n-1)} + \dots\dots + p_{n-1} z_n + p_n z_n \right] + \\ + k'_1 z_1^{(n-1)} + k'_2 z_2^{(n-1)} + \dots\dots + k'_n z_n^{(n-1)}. \end{array} \right\} \quad (4).$$

Un caso particolare notevole è il seguente: *Se l'equazione:*

$$z^{(n)} + p_1 z^{(n-1)} + p_2 z^{(n-2)} + \ldots\ldots + p_{n-1} z' + p_n z = 0,$$

è soddisfatta dalle n *funzioni* $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$ *a Wronskiano diverso da zero, allora per ogni funzione* y *derivabile* n *volte si possono trovare delle funzioni* k *di* x *che soddisfano alle* (1), (2). *Le loro derivate* k' *soddisferanno alle* (3), $(3)_{bis}$ *e alla* (4), *che nella nostra ipotesi diventa semplicemente*

$$\left.\begin{array}{l} y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots\ldots + p_{n-1} y' + p_n y = \\ = k'_1 z_1^{(n-1)} + k'_2 z_2^{(n-1)} + \ldots\ldots + k'_n z_n^{(n-1)} \end{array}\right\} (4)_{bis}.$$

Se le k' *soddisfano alle* (3), $(3)_{bis}$, *la* y *definita da* (1) *soddisfa naturalmente anche alle* (2) *e* (4).

§ 116. — **Nuovi teoremi sulle equazioni lineari alle derivate ordinarie.**

Applichiamo il lemma precedente alla domanda posta al § 114. Le $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$ siano n soluzioni a Wronskiano differente da zero della equazione *omogenea*

$$(1) \left\{\begin{array}{l} z^{(n)} + p_1 z^{(n-1)} + p_2 z^{(n-2)} + \ldots\ldots + p_{n-2} z'' + \\ \qquad + p_{n-1} z' + p_n z = 0. \end{array}\right.$$

Anche y soddisfi a tale equazione; sia cioè

$$(1)_{bis} \quad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots + p^{n-1} y' + p_n y = 0;$$

Si scriva la y nella forma (1) del precedente lemma: sarà per le (3), $(3)_{bis}$ del lemma stesso

$$(2) \left\{\begin{array}{lllll} k'_1 z_1 & + k'_2 z_2 & + \ldots\ldots + k'_n z_n & = 0 \\ k'_1 z'_1 & + k'_2 z'_2 & + \ldots\ldots + k'_n z'_n & = 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k'_1 z_1^{(n-2)} & + k'_2 z_2^{(n-2)} & + \ldots\ldots + k'_n z_n^{(n-2)} & = 0 \end{array}\right.$$

mentre la $(4)_{bis}$ del lemma diventa nel nostro caso in virtù di $(1)_{bis}$

$$(3) \quad k'_1 z_1^{(n-1)} + k'_2 z_2^{(n-1)} + \ldots\ldots + k'_n z_n^{(n-1)} = 0.$$

Le (2), (3) formano un sistema di n equazioni lineari omogenee nelle k', in cui il determinante dei coefficienti delle incognite è il Wronskiano delle z che per ipotesi è differente da zero. Dunque (§ 27) le k' sono nulle, cioè le k costanti. Possiamo dunque rispondere affermativamente alla domanda che chiude il § 114 affermando che:

Se sono note n *soluzioni* $z_1, z_2 \ldots\ldots z_n$ *della equazione omogenea* (1) *od* $(1)_{bis}$. *a Wronskiano differente da zero, tutte le altre soluzioni* y *sono le loro combinazioni lineari* $k_1 z_1 + k_2 z_2 + \ldots\ldots + k_n z_n$ *a coefficienti* k *costanti.*

Ma i nostri risultati permettono di affermare di più. Supponiamo che y soddisfi non all'equazione omogenea $(1)_{bis}$, ma all'equazione *non omogenea.*

$$(4) \quad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x),$$

ferme restando le altre ipotesi sulle z. In tal caso, come sopra, si potranno ancora scrivere le (2), mentre la $(4)_{bis}$ del lemma diventa:

$$(3)_{bis} \quad k'_1 z_1^{(n-1)} + k'_2 z_2^{(n-1)} + \ldots\ldots + k'_n z_n^{(n-1)} = f(x).$$

Le (2) e le $(3)_{bis}$ formano un sistema di n equazioni di primo grado nelle k', che si possono risolvere con la regola di Leibnitz-Cramer, perchè il determinante dei coefficienti delle incognite è il Wronskiano delle z, differente da zero. Si possono così determinare le k' e quindi con n integrazioni (una per ognuna delle k') dedurne i valori delle k. Ognuna delle k porta perciò l'indeterminazione di una costante additiva; cioè, se h_r è un integrale indefinito della k'_r testè determinata, si ha:

$$k_r = h_r + c_r \qquad (c_r = \text{costante arbitraria}).$$

Cosicchè sarà:

$$y = k_1 z_1 + k_2 z_2 + \ldots\ldots + k_n z_n =$$
$$= (h_1 z_1 + h_2 z_2 + \ldots\ldots + h_n z_n) + (c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots\ldots + c_r z_r).$$

Il secondo addendo del terzo membro è una combinazione lineare delle z, a cofficienti *costanti* c, da scegliersi in modo qualsiasi, cioè è una soluzione *qualsiasi* della equazione omogenea (1) od $(1)_{bis}$. E ciò è naturale perchè al § 114 abbiamo già visto che da una soluzione di (4) si passa alla soluzione più generale, aggiungendo ad essa la soluzione più generale della equazione omogenea corrispondente. Quindi:

Se le z_r *sono le* n *soluzioni a Wronskiano differente da zero dell'equazione omogenea* (1) *od* $(1)_{bis}$, *la soluzione più generale* y *dell'equazione* (4) *non omogenea si ottiene ponendo* $y = k_1 z_1 + k_2 z_2 + \ldots\ldots + k_n z_n$, *ove le* k *siano integrali di quelle fun-*

zioni k', *che si ottengono risolvendo le equazioni* (2) *e* $(3)_{\text{bis}}$, *algebriche lineari nelle* k'.

Si noti, che, se $f(x) = 0$, la $(3)_{\text{bis}}$ si riduce alla (3); le (2) e le $(3)_{\text{bis}}$ dicono $k' = 0$; cioè $k = \text{cost.}$, come avevamo già osservato.

Il metodo qui svolto di integrare la (trovare le soluzioni della) (4) si chiama metodo della *variazione delle costanti arbitrarie*, in quanto che alle k, costanti arbitrarie nella formola che risolve (1), si sostituiscono convenienti funzioni di x nella formola che risolve (4).

§ 117. — **Equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti.**

α) Supposte ora le p_i costanti, cerchiamo se una funzione $y = e^{cx}$ (dove $c = \text{cost.}$) può soddisfare alla:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots\ldots + p_n y = 0. \quad (1)$$

Si osservi che dalla $y = ce^{cx}$ si deduce:

$$y' = ce^{cx};\; y'' = c^2 e^{cx};\; \ldots\ldots;\; y^{(n)} = c^n e^{cx}.$$

Sostituendo in (1) si trova che deve essere:

$$e^{cx}(c^n + p_1 c^{n-1} + p_2 c^{n-2} + \ldots\ldots + p_{n-1} c + p_n) = 0,$$

e, poichè e^{cx} non può essere zero, dovrà essere nullo l'altro fattore; dunque, affinchè $y = e^{cx}$ rappresenti una soluzione particolare dell'equazione, è necessario e sufficiente che c sia una delle n radici dell'equazione *algebrica* (detta equazione *caratteristica*):

$$c^n + p_1 c^{n-1} + p_2 c^{n-2} + \ldots\ldots + p_{n-1} c + p_n = 0, \quad (2)$$

la quale si forma dall'equazione differenziale, ponendo in luogo di y e delle sue derivate successive le potenze successive delle incognite c. Si noti che al posto di y' è posto $c^1 = c$, ed al posto di y la $c^0 = 1$.

Se dunque noi risolviamo la (2) e supponiamo che le sue n radici siano tutte reali e disuguali,

$$c_1,\; c_2,\; \ldots\ldots,\; c_n,$$

le funzioni:

$$e^{c_1 x},\; e^{c_2 x},\; \ldots\ldots,\; e^{c_n x}$$

rappresentano altrettante soluzioni particolari distinte dell'equazione differenziale.

E perciò, se dimostriamo che il loro Wronskiano, cioè il determinante formato con queste soluzioni e le loro derivate sino a quelle di ordine $n-1$, è diverso da zero, potremo affermare, giusta la teoria sviluppata di sopra, che l'integrale generale della (1) è:

$$y = k_1 e^{c_1 x} + \ldots\ldots + k_n e^{c_n x} \qquad (k_i = \text{cost.}).$$

Ora il determinante di cui si parla è effettivamente diverso da zero, perchè esso è:

$$\begin{vmatrix} e^{c_1 x} & e^{c_2 x} & \ldots\ldots\ldots & e^{c_n x} \\ c_1 e^{c_1 x} & c_2 e^{c_2 x} & \ldots\ldots\ldots & c_n e^{c_n x} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ c_1^{n-1} e^{c_1 x} & c_2^{n-1} e^{c_2 x} & \ldots\ldots & c_n^{n-1} e^{c_n x} \end{vmatrix}$$

che (raccogliendo a fattor comune le $e^{c_1 x}, \ldots\ldots, e^{c_n x}$ che compaiono nelle singole colonne) si dimostra uguale a:

$$e^{c_1 x}\, e^{c_2 x} \ldots\ldots e^{c_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots\ldots & 1 \\ c_1 & c_2 & \ldots\ldots\ldots & c_n \\ c_1^2 & c_2^2 & \ldots\ldots\ldots & c_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \ldots\ldots & c_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

di cui il primo fattore è un esponenziale, e il secondo fattore, che è il così detto determinante di Vandermonde o di Cauchy, è uguale (§ 23, pag. 76) al prodotto delle differenze delle c combinate a due a due fra loro in tutti i modi possibili; quindi esso non può essere zero, a meno che due delle c non siano fra loro uguali, ciò che noi abbiamo escluso supponendo le radici della (2) tutte distinte.

Esercizio.

Sia per esempio l'equazione:

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Le radici dell'equazione caratteristica

$$c^2 - 3c + 2 = 0$$

sono i numeri 1, 2.

Due integrali particolari sono perciò:

$$e^x, \quad e^{2x}$$

e l'integrale generale dell'equazione è:

$$a\, e^x + b\, e^x,$$

dove a, b sono costanti arbitrarie.

β) Immaginiamo ora che le n radici $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$ (che ancora supponiamo reali) non siano tutte distinte. In tal caso, col metodo precedente si ottengono n integrali particolari, che non sono distinti ed hanno quindi un Wronskiano nullo. Non si trova perciò più l'integrale generale per la via precedentemente seguìta.

Ora si può mostrare che, se $c_1 = c_2$, allora è vero che si perde un integrale particolare perchè $e^{c_2 x}$ diventa uguale a $e^{c_1 x}$, ma se ne acquista un altro, e cioè:

$$y = x\, e^{c_1 x}. \quad (*)$$

Infatti dalla precedente uguaglianza si deduce

$$\begin{aligned}
y' &= e^{c_1 x} + x c_1\, e^{c_1 x} \\
y'' &= 2 c_1\, e^{c_1 x} + x c_1^2\, e^{c_1 x} \\
y''' &= 3 c_1^2\, e^{c_1 x} + x c_1^3\, e^{c_1 x} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y^{(n)} &= n c_1^{\,n-1}\, e^{c_1 x} + x c_1^n\, e^{c_1 x}.
\end{aligned}$$

E, sostituendo nell'equazione differenziale data, si trova:

$$\begin{aligned}
&(x c_1^n\, e^{c_1 x} + \ldots\ldots + p_{n-2}\, c_1^2\, x e^{c_1 x} + p_{n-1}\, c_1\, x e^{c_1 x} + p_n\, x e^{c_1 x}) + \\
&\quad + (n c_1^{\,n-1}\, e^{c_1 x} + \ldots\ldots + 2\, p_{n-2}\, c_1\, e^{c_1 x} + p_{n-1}\, e^{c_1 x}) = \\
&\quad = x e^{c_1 x} (c_1^n + \ldots\ldots + p_{n-2}\, c_1^2 + p_{n-1}\, c_1 + p_n) + \\
&\quad + e^{c_1 x} (n c_1^{\,n-1} + \ldots\ldots + 2\, p_{n-2}\, c_1 + p_{n-1}) = 0.
\end{aligned}$$

La quale relazione è effettivamente verificata se c_1 è radice doppia, perchè allora per $c = c_1$ si annulla non solo il primo membro dell'equazione caratteristica, ma anche (§ 64) la sua prima derivata rispetto alla c, cosicchè ciascuna delle

$$\begin{gathered}
c_1^{\,n} + p_1\, c_1^{\,n-1} + \ldots\ldots + p_{n-1}\, c_1 + p_n\,, \\
n c_1^{\,n-1} + (n-1)\, p_1\, c_1^{\,n-2} + \ldots\ldots + p_{n-1}
\end{gathered}$$

è nulla.

(*) Si noti che, se $c_2 \neq c_1$, evidentemente alle soluzioni $e^{c_1 x}$, $e^{c_2 x}$ possiamo sostituire la $e^{c_1 x}$ e la $\dfrac{e^{c_2 x} - e^{c_1 x}}{c_2 - c_1}$. La seconda, pensata come funzione di c_2, tende precisamente ad $x\, e^{c_1 x}$ per $c_2 = c_1$.

Così, in generale, si può dimostrare che, se c_1 è radice multipla d'ordine k,

$$e^{c_1 x}, \ x e^{c_1 x}, \ x^2 e^{c_1 x}, \ldots\ldots, x^{k-1} e^{c_1 x}$$

sono tutti integrali particolari dell'equazione.

Riassumendo: ogni radice d'ordine k dà luogo a k integrali particolari, che, insieme con gli altri integrali derivanti dalle altre radici, sia multiple, sia semplici, costituiscono n integrali particolari dell'equazione.

Di più si potrebbe far vedere che gli integrali così ottenuti hanno il Wronskiano non nullo: con le loro combinazion lineari si ottengono quindi tutti e soli gli integrali dell'equazione (*).

γ) Dobbiamo finalmente considerare il caso che le radici dell'equazione caratteristica non siano tutte reali.

Se ci limitassimo a considerare funzioni reali, la soluzione $y = e^{cx}$, dove $c = a + ib$ è una radice complessa dell'equazione caratteristica, non avrebbe per noi alcun significato.

Ma se teniamo conto anche di funzioni complesse, potremo dimostrare che $e^{(a+ib)x}$ è ancora un integrale (complesso) della nostra equazione. Infatti tutti i nostri ragionamenti hanno usato soltanto delle regole del calcolo algebrico, delle regole di derivazione di una somma, di un prodotto, e dell'esponenziale e^{cx} ($c =$ cost.), che continuano a valere (cfr. §§ 55-60 e particolarmente pag. 188) anche nel campo delle funzioni complesse della x.

Cosicchè, anche nel caso di radici complesse dell'equazione caratteristica (2) vale il teorema: *Se* $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$ *sono le radici tutte distinte di* (2), *la più generale funzione* (complessa) *che soddisfi alla* (1) *è* $k_1 e^{c_1 x} + k_2 e^{c_2 x} + \ldots\ldots k_n e^{c_n x}$ *dove le* k *sono costanti arbitrarie* (complesse). *Se invece vi sono radici multiple, e, per es.,* c_1 *è radice di ordine* r, *si debbono assumere a integrali particolari corrispondenti*

$$e^{c_1 x}, \ x e^{c_1 x}, \ \ldots \ x^{r-1} e^{c_1 x}.$$

(*) Riferiamoci all'ultima nota a piè di pagina, in cui si sono supposte due sole radici uguali $c_1 = c_2$. Alle soluzioni $e^{c_1 x}$, $e^{c_2 x}$ si sono (se $c_1 \neq c_2$) sostituite le $e^{c_1 x}$, $\dfrac{e^{c_2 x} - e^{c_1 x}}{c_2 - c_1}$. Il Wronskiano delle nuove soluzioni è uguale al quoziente ottenuto dividendo per $c_2 - c_1$ il Wronskiano delle soluzioni iniziali. Questo valeva il prodotto di $e^{(c_1 + c_2 + \cdots + c_n)x}$ per il prodotto delle differenze a due a due c_r; esso perciò, *diviso per* $c_2 - c_1$, ha un quoziente, che per $c_2 = c_1$ tende a un limite *diverso da zero*. Questo limite è il Wronskiano delle $e^{c_1 x}$, $x e^{c_1 x}$, ecc. c. d. d.

Dimostrazione analoga vale nel caso generale.

Per questa via abbiamo trovato tutti gli integrali, anche complessi, di (1). Vogliamo trovare quelli di essi che sono reali, supposto naturalmente che le p_i sieno costanti reali. In tal caso, se (2) ha una radice complessa semplice $a + i\,b$, essa ha anche la radice complessa coniugata $a - i\,b$; cosicchè insieme all'integrale $e^{(a+ib)x}$ vi sarà anche l'integrale $e^{(a-ib)x}$. Si debbono ora scegliere le costanti $k_1 = l_1 + i\,m_1$, $k_2 = l_2 + i\,m_2$ (l, m = cost. *reali*) in guisa che $k_1\,e^{(a+ib)x} + k_2\,e^{(a-ib)x}$ sia reale, ossia non muti mutando i in $-i$. Si debbono in altre parole scegliere le costanti l, m in guisa che

$$(l_1 + im_1)\,e^{(a+ib)x} + (l_2 + im_2)\,e^{(a-ib)x} =$$
$$= (l_1 - im_1)\,e^{(a-ib)x} + (l_2 - im_2)\,e^{(a+ib)x}.$$

Ciò avviene allora e allora soltanto che k_1 e k_2 sono immaginarie coniugate, ossia che $l_1 = l_2$, $m_1 = -m_2$; nel qual caso

$$k_1\,e^{(a+ib)x} + k_2\,e^{(a-ib)x} = 2\,e^{ax}\,(l_1 \cos bx - m_1 \operatorname{sen} bx).$$

Posto $2\,l_1 = h_1$, $-2\,m_1 = h_2$, questo integrale diventa

$$h_1\,e^{ax} \cos bx + h_2\,e^{ax} \operatorname{sen} bx \qquad (h_1, h_2, \text{ costanti reali arbitrarie}).$$

In modo analogo si vede che, se $a + i\,b$ fosse radice doppia di (2) e quindi altrettanto avvenisse di $a - i\,b$, si trovano anche gli integrali

$$h_3\,xe^{ax} \cos bx + h_4\,xe^{ax} \operatorname{sen} bx \qquad (h_3, h_4 \text{ costanti reali arbitrarie})$$

e così via. In modo simile si trattano le altre coppie di radici complesse coniugate; e si vede facilmente che così si ottengono tutti gli *integrali reali* di (1). In conclusione l'integrale *reale* generale di (1) è una combinazione lineare a coefficienti *costanti reali* arbitrari di integrali particolari del tipo

$$x^r\,e^{cx},\ x^r\,e^{ax} \cos bx,\ x^r\,e^{ax} \operatorname{sen} bx.$$

Esempi.

1°) L'equazione $y'' + 2\,y' + 3\,y = 0$ ha $-1 \pm i\,\sqrt{2}$ per radici dell'equazione caratteristica $c^2 + 2\,c + 3 = 0$. Il suo integrale reale generale è quindi $e^{-x}\,(h_1 \cos \sqrt{2}\,x + h_2 \operatorname{sen} \sqrt{2}\,x)$, dove h_1, h_2 sono costanti *reali* arbitrarie.

2°) L'equazione $y'' - 2\,y' + y = x$ ha le radici dell'equazione $c^2 - 2\,c + 1 = 0$ caratteristica della corrispondente equazione omogenea

$$y'' - 2\,y' + y = 0$$

uguali entrambe a $+1$, cosicchè $c_1 e^x + c_2 x e^x$ ($c_1, c_2 =$ cost. arbitrarie) è l'integrale generale di tale equazione omogenea, perchè il Wronskiano

$$\begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & e^x + x e^x \end{vmatrix} = e^{2x}$$

delle soluzioni $x, x e^x$ è differente da zero. Quindi l'integrale generale dell'equazione proposta è

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x,$$

dove le c_1, c_2 sono funzioni della x determinate dalle:

$$c'_1 e^x + c'_2 x e^x = 0$$

$$c'_1 e^x + c'_2 (e^x + x e^x) = x$$

donde si trae:

$$c'_1 = -x^2 e^{-x}, \quad c'_2 = x e^{-x}$$

e quindi:

$$c_1 = -\int x^2 e^{-x} dx = x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + 2 e^{-x} + k_1;$$

$$c_2 = -x e^{-x} - e^{-x} + k_2 \qquad (k_1, k_2 = \text{cost.}).$$

Sarà perciò:

$$y = (x^2 + 2x + 2) + k_1 e^x + (-x^2 - x) + k_2 x e^x =$$

$$= (x + 2) + k_1 e^x + k_2 x e^x \qquad (k_1, k_2 = \text{cost.})$$

l'integrale più generale dell'equazione proposta. Esso si sarebbe potuto scrivere senz'altro, appena fosse stato noto l'integrale particolare $x + 2$, che si sarebbe potuto ottenere più rapidamente coi metodi dati nel seguente esempio 2°.

Altri Esempi.

1° Formare l'equazione lineare omogenea alle derivate ordinarie di n^{esimo} ordine, che ammette gli integrali particolari $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$.

Ris.
$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' & \ldots\ldots & y^{(n)} \\ y_1 & y'_1 & y''_1 & \ldots\ldots & y_1^{(n)} \\ y_2 & y'_2 & y''_2 & \ldots\ldots & y_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ y_n & y'_n & y''_n & \ldots\ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0;$$

la quale *non* si riduce ad una identità, nè ad una equazione di ordine minore di n, se il Wronskiano delle y_i è differente da zero.

Il primo membro di questa equazione è il Wronskiano delle $y, y_1, y_2 \ldots\ldots, y_n$. Dunque:

Se il Wronskiano delle $y, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ *è sempre nullo, ma il Wronskiano delle* $y_1, y_2 \ldots\ldots, y_n$ *è differente da zero, la* y *è una combinazione lineare* $k_1 y_1 + k_2 y_2 + \ldots\ldots + k_n y_n$ *a coefficienti* k *costanti delle* $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$.

2° Integrare l'equazione

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$$
$$(p_i = \text{cost.}\,;\ a_i = \text{cost.}\,;\ n, m \text{ interi positivi}).$$

RIS. Anzichè col metodo generale, si può ottenere più brevemente un integrale particolare ponendo:

$$y = b_0 + b_1 x + \ldots\ldots + b_m x^m \qquad (b_i = \text{cost.}).$$

Sostituendo nella nostra equazione, e uguagliando nei due membri i coefficienti di x^m, x^{m-1}, ecc., si trova:

$$p_n b_m = a_0\,;\ p_n b_{m-1} + m b_m p_{n-1} = a_1\,;$$
$$p_n b_{m-2} + (m-1) p_{n-1} b_{m-1} + m(m-1) p_{n-2} b_m = a_2\,;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_n b_0 + p_{n-1} b_1 + 2\, p_{n-2} b_2 + \ldots + p_1 \underline{|n-1}\, b_{n-1} + \underline{|n}\, b_n = a_m,$$

dove sono supposte nulle le b_i, il cui indice i supera m.

Queste equazioni permettono di determinare successivamente le $b_m, b_{m-1}, \ldots\ldots, b_0$.

Fa eccezione il solo caso $p_n = 0$; ma noi possiamo sempre supporre $p_n \neq 0$, purchè si assuma una conveniente derivata della y come funzione incognita, ecc., ecc.

3° Integrare l'equazione

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots + p_n y = k\, e^{hx} \quad (p_i, h, k = \text{cost.})\ (k \neq 0)$$

dove h non è radice dell'equazione caratteristica

$$h^n + p_1 h^{n-1} + \ldots\ldots + p_n = 0.$$

RIS. Anzichè col metodo generale, si può ottenere più brevemente un integrale particolare ponendo

$$y = l\, e^{hx} \quad (l = \text{cost.}).$$

Sostituendo nella nostra equazione si trova

$$l \{ h^n + p_1 h^{n-1} + \ldots\ldots + p_n \} = k,$$

che determina la l, se h non è radice dell'equazione caratteristica relativa al primo membro della nostra equazione differenziale.

4° Si discuta l'equazione

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (p, q = \text{cost.}).$$

RIS. L'equazione caratteristica è $c^2 + pc + q = 0$, e ha per radici $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. Se $\frac{p^2}{4} - q = 0$ queste radici coincidono e l'integrale generale della nostra equazione è

$$\lambda e^{-\frac{p}{2}x} + \mu x e^{-\frac{p}{2}x} \quad (\lambda, \mu = \text{cost.}).$$

Escluso questo caso limite di scarso interesse, trattiamo gli altri.

Se $\frac{p^2}{4} - q > 0$, l'equazione ha due radici reali che potremo indicare con α, β; l'integrale generale è $\lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x} (\lambda, \mu = \text{cost.})$ il quale, se α, β sono negativi, tende a zero per $x = +\infty$.

Se invece $\frac{p^2}{4} - q < 0$, si ponga $q - \frac{p^2}{4} = k^2$; le radici dell'equazione carattestica saranno $-\frac{p}{2} \pm ik$; e gli integrali della nostra equazione saranno

$$e^{-\frac{p}{2}x} \{ \lambda \cos kx + \mu \operatorname{sen} kx \} \quad (\lambda, \mu = \text{cost.}).$$

Essi si ridurranno a sole funzioni trigonometriche se $p = 0$, e quindi $q = k^2$ (*).

Questi risultati sono stati trovati per via diretta al § 113.

Questo studio ha numerosissime applicazioni fisiche.

In molti problemi (scarica elettrica di un condensatore, vibrazione di un pendolo, ecc.) si presenta una quantità y (intensità di corrente, angolo di un pendolo con la posizione di equilibrio) variabile col tempo x, che la fisica dimostra soddisfare a un'equazione del tipo precedente, dove le costanti p, q sono positive. Allora, se $\frac{p^2}{4} - q > 0$, le α, β sono negative, e quindi $y = \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x}$ ci definisce una y che per $x = \infty$ tende a zero. Si tratta *in tal caso di un semplice fenomeno*

(*) Si può porre $\lambda = a \cos \varphi$, $\mu = a \operatorname{sen} \varphi$, e, invece di dire che λ, μ sono costanti arbitrarie, dire che a, φ sono costanti arbitrarie; la soluzione della nostra equazione diventa $a\, e^{-\frac{p}{2}x} \cos(hx + \varphi)$, dove φ è la cosidetta *fase*.

smorzato (p. es., un pendolo che torna alla posizione di equilibrio in un mezzo che presenta tale attrito da impedirgli ogni ulteriore oscillazione).

Se $p = 0$, allora $q = k^2$; abbiamo in questo caso un puro fenomeno vibratorio: quando kx è aumentato di 2π, ossia quando il tempo x è aumentato di $\frac{2\pi}{k}$ *il sistema riprende le condizioni iniziali; cosicchè* $\frac{2\pi}{k}$ *è la durata di una oscillazione completa.*

Se $p > 0$, e se k è reale, allora abbiamo ancora un fenomeno vibratorio. Però l'esponenziale $e^{-\frac{p}{2}x}$, che tende a zero al crescere di x, ci avverte che *le vibrazioni* vanno diminuendo di ampiezza, o come si suol dire, *si smorzano*. La *durata di una oscillazione è sempre* $\frac{2\pi}{k}$. Per fissare le idee, il lettore può pensare alla scarica di un condensatore di capacità C in un filo di resistenza R il cui coefficiente di autoinduzione sia L. Se y è l'intensità della corrente all'istante x, la fisica insegna che $y'' + py' + q = 0$ dove sia posto:

$$p = \frac{R}{L};\ q = \frac{1}{LC}.$$

Per $p = 0$ si ha $k = \sqrt{\frac{1}{CL}}$.

Dunque in tal caso si ha con Thomson che $2\pi\sqrt{LC}$ è la durata di una vibrazione, e, se c è la velocità di propagazione delle onde elettriche, che $2\pi c\sqrt{LC}$ è la lunghezza d'onda.

Un esempio di equazioni a derivate parziali.

Se abbiamo una equazione alle derivate parziali, cioè se la funzione incognita dipende da più variabili indipendenti, allora, come si può verificare sugli esempi dei §§ 93 e 110, una soluzione di tale equazione non si può più definire, prefissando un numero finito di costanti (le $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ del teorema di Cauchy a pag. 377), perchè la soluzione più generale di tale equazione dipende da funzioni arbitrarie.

Noi qui non ci occupiamo dello studio di tali equazioni che è in generale molto difficile. E ci accontentiamo di osservare il seg. teorema, che si può generalizzare a *tutte* le equazioni alle derivate parziali del *primo* ordine. Sia data l'equazione $X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}=0$, ove X, Y sono funzioni note di x, y, e dove f è la funzione incognita. Sia $X \neq 0$. Consideriamo l'equazione $\frac{dy}{dx}=\frac{Y}{X}$ alle derivate ordinarie; e la $\varphi(x, y)=$ cost. definisca la sua soluzione più generale. Sarà $X\frac{\partial \varphi}{\partial x}+Y\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0$, perchè $\frac{Y}{X}=\frac{dy}{dx}$ deve essere uguale a quel valore di y', che dalla $\varphi=$ cost. si deduce in virtù del teorema delle funzioni implicite. Poniamo $x=x_1$, $\varphi(x, y)=y_1$ e assumiamo x_1, y_1 come nuove variabili indipendenti, come sarà generalmente possibile. Sarà:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y_1}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

La nostra equazione diventa perciò $\frac{\partial f}{\partial x_1}=0$. Cioè le funzioni f cercate sono tutte e sole le funzioni della y_1, cioè della φ. (Cfr. § 110, pag. 368).

Così p. es. le soluzioni di $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=0$ $(X=Y=1)$ sono le funzioni di $x-y$, perchè le soluzioni di $\frac{dy}{dx}=1$ si ottengono risolvendo la $x-y=$ cost.

In modo simile (cfr. il § 110, pag. 369) le soluzioni di

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots\ldots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0,$$

ove le $X, X_1, \ldots, X_n$ sono funzioni di $x, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, sono tutte e sole le funzioni di $\varphi_1, \varphi_2 \ldots\ldots, \varphi_n$, se le soluzioni del sistema

$$\frac{dx}{X}=\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots\ldots=\frac{dx_n}{X_n}$$

si ottengono risolvendo le $\varphi_1=$ cost., $\varphi_2=$ cost., ..., $\varphi_n=$ cost. Ma non è nostro scopo approfondire e precisare simili studii.