

CAPITOLO XIX.

ALCUNE APPLICAZIONI GEOMETRICHE
DEL CALCOLO INFINITESIMALE

§ 118 — Tangente ad una curva gobba.

Siano

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t) \quad (1)$$

funzioni derivabili di un parametro t . Al variare della t il punto (x, y, z) definito da (1) descriva una curva C . Su questa consideriamo un punto $A = (x_0, y_0, z_0)$ corrispondente al valore t_0 della t , e un altro punto B corrispondente al valore $t_0 + h$ della t . Poniamo $x'_0 = x'(t_0)$, $y'_0 = y'(t_0)$, $z'_0 = z'(t_0)$. Per analogia con le curve piane noi chiameremo retta tangente alla C in A la posizione limite della retta AB (per $h = 0$).

Le equazioni della AB sono :

$$\frac{x - x_0}{x(t_0 + h) - x_0} = \frac{y - y_0}{y(t_0 + h) - y_0} = \frac{z - z_0}{z(t_0 + h) - z_0} \quad (*).$$

E i suoi coseni direttori sono quindi proporzionali alle

$$x(t_0 + h) - x_0, \quad y(t_0 + h) - y_0, \quad z(t_0 + h) - z_0$$

ossia alle :

$$\frac{x(t_0 + h) - x_0}{h}, \quad \frac{y(t_0 + h) - y_0}{h}, \quad \frac{z(t_0 + h) - z_0}{h}.$$

I limiti x'_0, y'_0, z'_0 di queste frazioni (rapporti incrementali) saranno dunque proporzionali ai coseni direttori della tangente in A della C ; la quale avrà dunque per equazione

$$\frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{z - z_0}{z'_0}.$$

(*) Si suppongono i denominatori non contemporaneamente nulli. Questa ipotesi è contenuta (per h abbastanza piccolo) nell'altra, che enunciamo più sotto, che almeno una delle x'_0, y'_0, z'_0 sia differente da zero.

(È necessario supporre che non sia $x'_0 = y'_0 = z'_0 = 0$; si esamini il caso che soltanto alcune di queste derivate siano nulle).

I coseni direttori di tale tangente r saranno dunque $\lambda x'_0$, $\lambda y'_0$, $\lambda z'_0$, dove λ è un fattore di proporzionalità definito dalla

$$(\lambda x'_0)^2 + (\lambda y'_0)^2 + (\lambda z'_0)^2 = 1.$$

E perciò:

$$\lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2}},$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \cos(xr) &= \pm \frac{x'_0}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2}}; \quad \cos(yr) = \pm \frac{y'_0}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2}}; \\ \cos(zr) &= \pm \frac{z'_0}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2}}; \end{aligned}$$

dove il segno da scegliersi dipenderà dal verso della tangente r scelto come positivo.

§ 119. — Piano tangente ad una superficie.

Sia S una superficie $f(x, y, z) = 0$; e siano f'_x, f'_y, f'_z continue nell'intorno di un punto $A = (x_0, y_0, z_0)$ di S . Siano

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t) \quad (1)$$

(dove i secondi membri sono funzioni derivabili di un parametro t) le equazioni di una curva C posta su S ed uscente da A . La teoria delle funzioni implicite prova che di tali curve C ne esistono infinite, se f'_x, f'_y, f'_z non sono tutte nulle in A . Sostituendo nella $f(x, y, z)$ alle x, y, z i valori dati da (1), si otterrà una funzione della t *identicamente* nulla, perchè tutti i punti di C giacciono sulla S . La derivata di questa funzione della t sarà quindi nulla in tutti i punti di C , e in particolare nel punto A . Sarà cioè:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x'_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y'_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 z'_0 = 0, \quad (2)$$

dove l'indice 0 è posto per indicare che le derivate sono calcolate nel punto A . La tangente in A alla C ha per equazione

$$\frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{z - z_0}{z'_0}. \quad (3)$$

Nel primo membro di (2), che è un polinomio *omogeneo* nelle x'_0, y'_0, z'_0 , potrò a queste derivate sostituire le $x - x_0, y - y_0, z - z_0$, che per le (3) sono ad esse proporzionali.

Ne deduciamo che i punti x, y, z della tangente in A ad una qualsiasi delle nostre curve C soddisfano alla :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0. \quad (4)$$

La (4) non è una identità, perchè già abbiamo escluso che $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 = 0$; e, poichè è di primo grado nelle x, y, z , essa è l'equazione di un piano: il cosiddetto *piano tangente* alla S nel punto A . Quindi :

Se $f(x, y, z) = 0$ è l'equazione di una superficie S , e se in un intorno di un punto A di S le f'_x, f'_y, f'_z sono finite e continue, mentre in A queste derivate non sono tutte nulle, si possono tirare su S infinite curve (dotate di tangente) uscenti da A . Le tangenti in A a tutte queste curve giacciono in uno stesso piano (4): il piano tangente alla S nel punto A .

Se l'equazione della superficie è data sotto la forma :

$$z = \varphi(x, y),$$

ossia, se $f = \varphi(x, y) - z$, l'equazione del piano tangente diventa :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Adottando la notazione di Monge :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = q,$$

essa si ridurrà a

$$p_0 (x - x_0) + q_0 (y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

che è l'equazione cercata.

Volendo trovare i coseni direttori della normale n al piano, basterà ricordare che tali coefficienti sono proporzionali ai coefficienti di x, y, z , cioè a $p_0, q_0, -1$.

Essi saranno $\lambda p_0, \lambda q_0, -\lambda$, dove il fattore λ di proporzionalità si determina ricordando che deve essere

$$[\lambda p_0]^2 + [\lambda q_0]^2 + \lambda^2 = 1.$$

Otterremo :

$$\lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{p_0^2 + q_0^2 + 1}},$$

ed infine :

$$\cos nx = \frac{p_0}{\pm \sqrt{p_0^2 + q_0^2 + 1}}, \quad \cos ny = \frac{q_0}{\pm \sqrt{p_0^2 + q_0^2 + 1}},$$

$$\cos nz = \frac{-1}{\pm \sqrt{p_0^2 + q_0^2 + 1}},$$

ove il doppio segno dipende dall'arbitrarietà con cui si può fissare il verso positivo della normale considerata.

È evidente l'analogia della (4) con l'equazione (10) trovata al § 84, pag. 285, per la retta tangente alla curva piana $f(x, y) = 0$ nel punto (x_0, y_0) .

§ 120. — Lunghezza di un arco di curva sghemba.

α) Abbiamo già visto in parecchi esempi in cui si doveva cercare una funzione additiva d'intervallo, come fosse assai spesso facilissimo definirne la derivata. Così, per es., mentre la ricerca dell'area racchiusa tra l'asse delle x , la curva $y = F(x)$, e due ordinate richiede una integrazione, la derivata di quest'area è semplicemente l'ordinata stessa $F(x)$.

Così avviene nel problema di misurare la lunghezza di un arco di curva C . Ma qui si presenta un'altra difficoltà. Che cosa vuol dire la frase: lunghezza di un arco di curva C ? Noi tutti ne abbiamo un'idea intuitiva, ma il primo problema è appunto quello di tradurre nel modo più semplice questa idea intuitiva in una, diremo così, idea matematica; così da poter dare un mezzo per calcolare tale lunghezza (*).

Cominciamo a limitare l'insieme delle curve C , di cui ci vogliamo occupare. Noi supporremo di limitarci a curve C dotate in ogni punto di tangente variabile con continuità, le quali siano in corrispondenza biunivoca con la loro proiezione su una retta r (in guisa cioè che punti distinti di C abbiano proiezioni distinte). Sia I la proiezione di C su r . Ogni seg-

(*) Questo problema è di natura affatto analoga a quello che si presenta per definire tutte le figure e grandezze geometriche. Se si presume di conoscere già l'ente che si vuol studiare, si ammettono circa tale ente dei *postulati*. Se si suppone di non conoscerlo, si assumono questi postulati come definizione matematica dell'ente stesso.

mento (a, b) interno ad I determina quel pezzo di C , che si proietta in (a, b) .

Supponiamo di sapere che cosa è la lunghezza di C ed anche la lunghezza di ogni sua parte. Allora ogni intervallo (a, b) di r individua un pezzo della curva C , e la lunghezza di questo. Tale lunghezza $S(a, b)$ sarà una funzione continua di (a, b) che evidentemente è additiva (*); perchè se (a, b) , (b, c) sono due intervalli distinti, evidentemente la lunghezza di quel pezzo di C che si proietta in (a, b) e la lunghezza di quel pezzo di C che si proietta in (b, c) hanno per somma la lunghezza di quel pezzo di C che si proietta in $(a, b) + (b, c) = (a, c)$.

I nostri procedimenti basteranno a calcolarla, se di tale funzione additiva sappiamo dare la derivata. Tale derivata è per definizione il limite

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{S(a, b)}{b - a} \quad (1)$$

del rapporto ottenuto dividendo la lunghezza del pezzo di curva che si proietta nell'intervallo (a, b) per l'ampiezza $b - a$ di tale intervallo.

La più semplice ipotesi che noi possiamo fare, ispirandoci all'idea intuitiva, che un tale pezzetto di curva, quando la sua proiezione $b - a$ è molto piccola, si confonde quasi con un pezzetto della retta tangente alla curva, è la seguente:

Tale derivata è identica a quella che si otterrebbe sostituendo alla curva la tangente τ in quel suo punto che si proietta nel punto $x = a$.

Questo secondo postulato ci appare come il più semplice anche per la seguente considerazione. Nel cerchio il rapporto di una corda all'arco corrispondente tende ad uno, quando l'arco tende a zero. Appare spontaneo di ammettere questa proprietà per curve qualsiasi. Il precedente postulato ne è conseguenza immediata. Infatti ammettere tale proprietà equivale ad ammettere che, se noi indichiamo con $c(a, b)$ la lunghezza della corda congiungente quei punti di C che si proiettano nei punti $x = a$, $x = b$, sia

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{c(a, b)}{S(a, b)} = 1.$$

Cosicchè il limite (1) si può scrivere anche

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{S(a, b)}{b - a} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{c(a, b)}{S(a, b)} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{c(a, b)}{b - a}. \quad (2)$$

Ora poichè la retta, cui appartiene la corda (a, b) tende, per $b = a$, alla retta tangente τ , il limite (2) coincide col limite (1) calcolato nel modo dato dal precedente postulato.

(*) Naturalmente questa affermazione è un primo postulato.

Si è così in più dimostrato che i postulati enunciati sono concordi con le definizioni elementari relative alla lunghezza degli archi di cerchio.

La definizione, data assai spesso che la lunghezza di un arco di una curva C è il limite superiore dei perimetri delle poligonali inscritte è più generale della precedente, ma non contrasta mai con essa. Non la adottiamo per le complicazioni che porterebbe una definizione analoga di area di una superficie sghemba.

È bene evidente che i postulati da noi posti hanno un significato indipendente dalla scelta della particolare retta r su cui si proietta. Se la retta su cui si proietta, è l'asse delle x , la derivata citata sarà $\frac{1}{\cos(\tau x)}$, dove τx è l'angolo che la tangente τ forma con l'asse delle x .

L'arco della curva compreso tra i punti di ascissa a e b sarà dunque nelle nostre ipotesi

$$\int_a^b \frac{1}{\cos(\tau x)} dx$$

Le nostre ipotesi equivalgono a dire che :

1° Le equazioni di C si possano porre sotto la forma :

$$y = f(x) \quad , \quad z = \varphi(x),$$

perchè in tal caso il valore di x (cioè la proiezione sull'asse delle x) individua il punto della curva.

2° La $\frac{1}{\cos \tau x} = \sqrt{1 + f'^2(x) + \varphi'^2(x)}$ (§ 118) esiste ed è una funzione continua di x (le f, φ hanno derivate continue).

In tal caso il nostro arco è dato da :

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x) + \varphi'^2(x)} dx.$$

Posto $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, $\varphi'(x) = \frac{dz}{dx}$, si ha che il nostro arco vale

$$\int \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} dx$$

formola che, come è noto dalle regole di integrazione per sostituzione, è indipendente dalla variabile scelta come variabile di integrazione, e che si suole scrivere perciò

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Ciò significa che, se $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ sono le equazioni parametriche della curva, quel suo arco corrispondente a valori di t dell'intervallo (α, β) vale:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

Questa formola vale anche per curve, che siano in corrispondenza biunivoca con la proiezione sull'asse delle y , o sull'asse delle z ; e si estende tosto a curve, che si possano scomporre in un numero finito di pezzi, ognuno dei quali sia in corrispondenza biunivoca con la sua proiezione su uno dei tre assi.

Se noi indichiamo con s l'arco contato da un'origine qualsiasi al punto t , è dunque $s'_t = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}$; cosicchè i coseni direttori della tangente alla curva sono (pag. 397):

$$\frac{x'_t}{s'_t} = \frac{dx}{ds}, \quad \frac{y'_t}{s'_t} = \frac{dy}{ds}, \quad \frac{z'_t}{s'_t} = \frac{dz}{ds}.$$

Affinchè il parametro t coincida con l'arco s misurato nell'uno o nell'altro verso a partire da uno o da un altro punto è dunque necessario e sufficiente che $x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2 = 1$.

La nostra formola si può rendere intuitiva anche per altra via: la nostra definizione sarà così giustificata anche con nuovo metodo. Un pezzetto piccolissimo della nostra curva ha per lunghezza l'incremento ds che s subisce passando da un estremo all'altro; se noi lo consideriamo come rettilineo, avremo che ds^2 è uguale alla somma dei quadrati delle sue proiezioni dx , dy , dz sui tre assi coordinati. È perciò $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

ESEMPIO.

Si trovi il perimetro dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Le $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ per $0 \leq t \leq 2\pi$ sono le equazioni parametriche di tale ellisse. Il suo perimetro sarà:

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 t} dt.$$

Posto $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$ (dove $e < 1$) tale integrale si calcola integrando per serie come l'integrale dell'esempio al § 79, pag. 266.

β) Lunghezza di una curva piana in coordinate polari.

Posto $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, dalla $dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ si deduce che la lunghezza di una curva definita dalle:

$$\begin{aligned} r &= r(t) & \theta &= \theta(t) \\ & & a \leq t \leq b \end{aligned}$$

vale

$$\int_a^b \sqrt{r'^2 + r^2 \theta'^2} dt.$$

Consideriamo, p. es., la curva

$$r = h + k \theta \quad (h, k = \text{cost.}),$$

che si riduce a un cerchio per $k = 0$ e a una spirale di Archimede per $h = 0$. Quel suo arco per cui $a \leq \theta \leq b$ ha per lunghezza

$$\int_a^b \sqrt{k^2 + (h + k \theta)^2} d\theta$$

come si riconosce ponendo $\theta = t$. Posto $k = 0$, $a = 0$, $b = 2\pi$ se ne deduce che $2\pi h$ è la periferia del cerchio di raggio h . Il lettore studii il caso $k \neq 0$.

§ 121. — Area di una superficie sghemba ed integrali estesi ad una superficie sghemba.

α) Affatto analogo è lo studio dell'area di una superficie R sghemba. Se tale superficie R è in corrispondenza biunivoca con la sua proiezione I sul piano xy , ed è quindi rappresentabile con un'equazione $z = f(x, y)$, l'area s di quel suo pezzo s , che si proietta in un pezzo σ di I si definirà nel modo più semplice come quella funzione additiva di σ , la cui derivata in un punto A di I è identica a quella che si otterrebbe sostituendo alla R il suo piano tangente nel punto che si proietta in A . Tale derivata (che supporremo finita e continua) vale

dunque $\frac{1}{\cos \alpha}$, se α è l'angolo del primo quadrante che tale piano

tangente forma col piano xy , cioè è l'angolo \widehat{nz} del primo quadrante che la normale ad R nel punto considerato forma con

l'asse delle z (*). Poichè con le notazioni del § 119 si ha

$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$, l'area s del pezzo s di R sarà:

$$\int \sqrt{1 + p^2 + q^2} d\sigma$$

esteso alla proiezione σ di s sul piano xy .

Si noti che ciò equivale appunto alla

$$\frac{ds}{d\sigma} = \frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Ed è facile verificare direttamente che tale integrale ha un significato indipendente dalla posizione degli assi coordinati, ed estendere tale formola a superfici composte di un numero finito di pezzi, ciascuno dei quali sia in corrispondenza biunivoca con la sua proiezione su un qualche piano, p. es., su uno dei tre piani coordinati.

Noi, anzichè occuparci di tali questioni, vogliamo aggiungere una sola importante osservazione.

β) Sia S una funzione additiva dei pezzi s di una tale superficie R . Se, com'è la convenzione più spontanea, adottiamo come misura s di un pezzo s l'area testè definita, la derivata F di S sarà $\frac{dS}{ds}$. Se consideriamo il valore di S corrispondente a un pezzo s di R come funzione della proiezione σ di s sul piano xy , ossia, se adottiamo come misura di s l'area σ di tale proiezione, la derivata di S sarà

$$\frac{dS}{d\sigma} = \frac{dS}{ds} \frac{ds}{d\sigma} = \sqrt{1 + p^2 + q^2} F.$$

Cosicchè:

$$S = \int \sqrt{1 + p^2 + q^2} F d\sigma = \int dx \int \sqrt{1 + p^2 + q^2} F dy.$$

Questa formola riduce il calcolo di funzioni additive dei pezzi di una superficie S a quello di un integrale piano.

(*) Vedremo che tale definizione concorda con la definizione elementare nel caso della sfera; cfr. le osservazioni del precedente § 120. Noto che qui, analogamente a quanto si è fatto in altri paragrafi, si indica con la stessa lettera s un pezzo di R e la sua area.

ESEMPIO.

Sia R una superficie, parte della parete di un recipiente pieno d'acqua (un bacino di carenaggio, p. es.). A pag. 332, es. 3°, abbiamo studiato il caso che R fosse piano e verticale; qui studiamo il caso generale. Ricordando che la pressione subita da R , se R fosse un piano comunque inclinato, sarebbe normale ad R e avrebbe per intensità il peso della colonna liquida che gravita su R , si induce la seguente proposizione generale.

Se l'asse delle z è verticale, e la z rappresenta proprio la distanza di un punto del recipiente dal pelo libero del liquido, le componenti secondo l'asse delle x o delle y o delle z della pressione subita da un pezzo s di R sono funzioni additive di s , la cui derivata vale rispettivamente $z \cos (nx)$, o $z \cos (ny)$, o $z \cos (nz)$.

Se R è in corrispondenza biunivoca con la sua proiezione sul piano xy , tali componenti valgono dunque

$$\int z \cos (nx) \sqrt{1+p^2+q^2} d\sigma = \iint z p \, dz \, dy,$$

oppure $\iint z q \, dx \, dy$, oppure $\iint z \, dx \, dy$.

La componente $\iint z \, dx \, dy$ verticale della pressione è evidentemente il volume del cilindroide generato dai segmenti proiettanti i punti di R sul piano xy (pelo libero del liquido).

§ 122. — Area di una superficie di rotazione.

Se noi poniamo

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta \quad (\text{dove } \rho = \sqrt{x^2 + y^2})$$

l'equazione di una superficie si può scrivere nella forma

$$z = f(\rho, \theta). \tag{1}$$

Se essa è di rotazione attorno all'asse delle z , l'aumentare θ di una costante α qualsiasi, cioè il far rotare di un angolo α la nostra superficie attorno all'asse delle z trasforma la superficie in sè stessa, cioè non ne muta l'equazione (1); cosicchè, qualunque sia α , sarà $f(\rho, \theta) = f(\rho, \theta + \alpha)$. Cioè $f(\rho, \theta)$ non varia, qualunque incremento venga dato alla θ , cioè comunque si cambi il valore della θ . Essa è dunque indipendente dalla θ ;

cioè è una funzione $\varphi(\rho)$ della sola ρ . E l'equazione della nostra superficie sarà del tipo:

$$z = \varphi(\rho) \quad \text{cioè } z = \varphi(+\sqrt{x^2 + y^2}). \quad (1)_{\text{bis}}$$

La sua intersezione col *semipiano* (si noti *non* col piano)

$$y = 0, \quad x > 0$$

è un *profilo meridiano*, la cui equazione (in tale semipiano) sarà:

$$z = \varphi(x) \quad (\text{dove } x \text{ è positivo}). \quad (2)$$

L'area della nostra superficie vale l'integrale

$$\iint \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy.$$

Questo integrale si deve naturalmente estendere alla proiezione della superficie sul piano xy ; questa proiezione è la corona circolare ottenuta facendo rotare attorno all'origine e sul piano xy la proiezione sull'asse delle x della curva (2) [o del pezzo di curva (2) considerato].

Ora

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = \varphi'(\rho) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \varphi'(\rho) \cos \theta$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(\rho) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \varphi'(\rho) \sin \theta$$

$$1 + p^2 + q^2 = 1 + \varphi'^2(\rho).$$

Perciò l'area A di S è data da:

$$\begin{aligned} A &= \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy = \iint \sqrt{1 + \varphi'^2(\rho)} \, dx \, dy = \\ &= \iint \sqrt{1 + \varphi'^2(\rho)} \, \rho \, d\rho \, d\theta = \int d\theta \int \sqrt{1 + \varphi'^2(\rho)} \, \rho \, d\rho = \\ &= 2\pi \int \sqrt{1 + \varphi'^2(\rho)} \, \rho \, d\rho, \quad (*) \end{aligned}$$

che si può scrivere

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int \sqrt{1 + \varphi'^2(x)} \, x \, dx = \\ &= 2\pi \int \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \, x \, dx = 2\pi \int x \, ds \quad (3) \end{aligned}$$

(*) Si noti che $\int \sqrt{1 + \varphi'^2(\rho)} \, \rho \, d\rho$ (i cui limiti sono i raggi della precedente corona circolare) è *indipendente* dalla θ , e che l'integrazione rispetto a θ è fatta nell'intervallo $(0, 2\pi)$.

dove con $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2}$ indico ora il differenziale dell'arco della curva C , e l'integrale si deve estendere all'intervallo, in cui varia la s , quando si descrive C .

La (3) costituisce la formola fondamentale per il calcolo dell'area di una superficie di rotazione.

Essa si può rendere intuitiva, osservando che ogni pezzetto infinitesimo ds della curva C genera rotando un tronco di cono, le cui sezioni circolari sono cerchi di raggio x , e la cui area è quindi $2\pi x ds$. Questa osservazione non ha però, così esposta, alcuna pretesa di rigore. Resa rigorosa, essa dimostra che l'area di una superficie di rotazione è il limite dell'area generata dalla rotazione di un poligono inscritto nel profilo meridiano, quando i lati di esso tendono a zero. Lo studioso deduca la (3), ammettendo questo teorema.

Esercizio.

Si calcoli l'area della sfera di raggio R .

Se la sfera ha per centro l'origine, essa è generata dalla rotazione attorno all'asse delle z di un semicerchio C di raggio R posto nel solito semipiano xz . Se φ è l'angolo che un raggio generico del semicerchio C forma con l'asse delle x , e assumiamo come origine degli archi s il punto in cui C incontra l'asse delle x , si ha: $s = R\varphi$. D'altra parte $x = R \cos \varphi$; e il semicerchio si descrive facendo variare φ da $-\frac{\pi}{2}$ a $+\frac{\pi}{2}$.

L'area della sfera vale dunque

$$2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R \cos \varphi) R d\varphi = 2\pi R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = 4\pi R^2,$$

che coincide col valore dato dalla geometria elementare.

TEOR. DI GULDINO. La (1) si può interpretare con un teorema analogo a quello del § 106, pag. 346, osservando che, se L è la lunghezza della curva rotante, d la distanza dell'asse delle z (cioè l'ascissa) del suo centro di gravità, allora $Ld = \int x ds$.

Se ne deduce: L'area di una superficie di rotazione vale $2\pi Ld$, cioè vale il prodotto della lunghezza L di un profilo meridiano per la lunghezza $2\pi d$ della circonferenza descritta nella rotazione del centro di gravità di tale profilo.

ESEMPIO.

Centro di gravità di una semicirconferenza. Una semicirconferenza di raggio R e lunghezza πR descrive, rotando attorno al suo diametro, una sfera di area $4\pi R^2$. La distanza d dal centro di gravità della semicirconferenza al diametro soddisfa perciò alla $4\pi R^2 = \pi R \cdot 2\pi d$, e vale dunque $d = \frac{2R}{\pi}$.

§ 123. — Piano osculatore ad una curva sghemba.

Sia data una curva C definita dalle equazioni:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t); \quad (1)$$

i cui secondi membri abbiano derivate prime e seconde continue in un intorno di $t = t_0$.

Sia A il punto di C corrispondente al valore t_0 della t ; e siano B, D i punti corrispondenti ai valori $t_0 + h, t_0 + k$. I punti A, B, D giacciono nel piano π di equazione

$$ax + by + cz + d = 0. \quad (2)$$

I punti comuni a C ed a π soddisferanno all'equazione $ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0$, che si ottiene eliminando tra (1) e (2) le coordinate correnti x, y, z . Ciò avviene in particolare dei punti A, B, D ; cosicchè la funzione della t

$$F(t) = ax(t) + by(t) + cz(t) + d \quad (3)$$

sarà nulla per $t = t_0, t = t_0 + h, t = t_0 + k$. Per il teorema di Rolle nel più grande dei segmenti determinati da questi tre punti esistono almeno due punti t_1, t_2 ove $F'(t)$ è nulla, e quindi almeno un punto t_3 , ove è nulla $F''(t)$. Sarà quindi in particolare [posto $x_0 = x(t_0); y_0 = y(t_0)$, ecc.]

$$\begin{aligned} ax_0 + by_0 + cz_0 + d &= 0 \\ ax'(t_1) + by'(t_1) + cz'(t_1) &= 0 \\ ax''(t_3) + by''(t_3) + cz''(t_3) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Se le (4) individuano (*) i rapporti $a:b:c:d$ (cioè se nessuna delle (4) è combinazione lineare delle precedenti), i punti A, B, D non sono in linea retta; e il piano ABD è determinato dalle stesse (4). Noi supporremo che così avvenga effettivamente.

(*) Aggiungendo alla (4) la identità $0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + 0 \cdot d = 0$ vi ha un sistema di 4 equazioni omogenee nelle 4 incognite a, b, c, d ; il quale, se è di caratteristica 3, determina, come si è visto al § 27, pag. 89, le a, b, c, d a meno di un fattore comune λ , o, ciò che è lo stesso, determina i rapporti $a:b:c:d$.

Si osservi ora che, quando h e k tendono a zero,

$$\lim t_1 = \lim t_3 = t_0.$$

Poichè le derivate prime e seconde delle x, y, z sono finite e continue, sarà $\lim x'(t_1) = x'(t_0)$; $\lim x''(t_3) = x''(t_0)$; ecc.

I rapporti $a : b : c : d$ definiti dalle (4) tenderanno al limite ai rapporti $a : b : c : d$ definiti dalle

$$\left. \begin{aligned} ax_0 + by_0 + cz_0 + d &= 0 \\ ax'_0 + by'_0 + cz'_0 &= 0 \\ ax''_0 + by''_0 + cz''_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(dove si è posto $x'(t_0) = x'_0$, $x''(t_0) = x''_0$, ecc.), se nessuna delle (5) è combinazione lineare delle precedenti, ossia se la matrice

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 & 0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 & 0 \end{vmatrix} \quad (6)$$

è di caratteristica 3. E, se questo avviene, anche l'ipotesi analoga fatta sopra per le (4) è soddisfatta, se h, k sono abbastanza piccole, perchè le x', x'' , ecc. sono continue.

Il piano (2), i cui coefficienti a, b, c, d soddisfano alle (5), si dirà *il piano osculatore alla curva C in A*: ed è facile riconoscere che i coseni direttori della sua normale, e la distanza dall'origine sono i limiti delle quantità analoghe per il piano ABD ; cosicchè tale *piano osculatore* si può dire il *piano limite del piano che passa per A e per due punti vicini B, D della curva, quando B, D si avvicinano indefinitivamente ad A.*

Eliminando le a, b, c, d tra le (2), (5) si ha:

$$(7) \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 & 0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ossia} \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{vmatrix} = 1$$

come equazione del piano osculatore in A . Ed è facile riconoscere che, nella nostra ipotesi per la matrice (6), la (7) non può ridursi ad una identità.

Dalla (7) risulta evidente che detto piano osculatore contiene la retta uscente da $A = (x_0, y_0, z_0)$ coi coseni direttori proporzionali ad x'_0, y'_0, z'_0 , cioè la retta tangente alla curva nel punto A .

Dimostriamo come esercizio, che il piano osculatore è il piano limite di un piano π' che passa per A , per B , per la tangente in A , quando B si avvicina indefinitamente ad A .

Se $ax + by + cz + d = 0$ è l'equazione di π' , le a, b, c, d devono soddisfare alle: $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$, $ax'_0 + by'_0 + cz'_0 = 0$ e $ax(t_0 + h) + by(t_0 + h) + cz(t_0 + h) + d = 0$. All'ultima equazione possiamo, in virtù delle prime due, sostituire la:

$$a \frac{x(t_0 + h) - hx_0 - x_0}{h^2} + b \frac{y(t_0 + h) - hy'_0 - y_0}{h^2} + c \frac{z(t_0 + h) - hz'_0 - z_0}{h^2} = 0$$

Passando al limite per $h = 0$ e ricordando il risultato del § 63, pag. 199, questa equazione diventa $ax'_0 + by'_0 + cz'_0 = 0$. Ritroviamo così precisamente le (5). Se adottassimo la proprietà qui enunciata per definire il piano osculatore, notiamo che *non avremmo dovuto supporre continue le x', y', z' , ma che sarebbe bastato supporre determinate e finite le derivate seconde nel punto $t = t_0$.*

Si dice *piano normale* in A il piano

$$x'_0(x - x_0) + y'_0(y - y_0) + z'_0(z - z_0) = 0,$$

luogo delle normali alla retta tangente in A innalzate dal punto A . La sua intersezione col piano osculatore dicesi *normale principale*.

La normale in A al piano osculatore giace sul piano normale, e dicesi *binormale*.

La ragione di questo nome sta in ciò che, considerato il piano osculatore come il piano di tre punti A, B, D infinitamente vicini, la binormale è normale alle *due* rette infinitamente vicine AB, BD ; le quali congiungendo punti consecutivi, si debbono considerare entrambe tangenti alla curva C .

§ 124. — Cerchio osculatore.

$$\alpha) \text{ Sia } \quad x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad (1)$$

una curva piana Γ ; le $x(t), y(t)$ posseggano derivate prime e seconde finite e continue in un certo intorno γ di $t = a$. Sia A il punto $t = a$; siano B e C due punti $t = a + h, t = a + k$ dell'intorno γ . Supposto che i tre punti A, B, C di Γ non siano allineati, per essi passerà un cerchio di equazione

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - R^2 = 0, \quad (2)$$

se (ξ, η) ne è il centro, R il raggio. I punti *comuni alla curva e al cerchio* soddisferanno all'equazione dedotta sostituendo nella equazione (2) del cerchio i valori delle x, y dati dalle equazioni (1) di Γ :

$$[x(t) - \xi]^2 + [y(t) - \eta]^2 - R^2 = 0.$$

Il primo membro è una funzione $F(t)$ della t , che dovrà esser nulla almeno nei punti $t = a, t = a + h, t = a + k$

(perchè i punti A, B, C appartengono alla curva e al cerchio). I valori $a, a + h, a + k$ determinano due intervalli, ai cui estremi $F'(t)$ si annulla; entro ciascuno di essi esisterà almeno un punto ove $F'(t)$ è nullo (per il teorema di Rolle); e dentro l'intervallo, di cui questi due punti sono gli estremi, esisterà almeno un punto, ove sarà nulla la derivata $F''(t)$ di $F'(t)$. Sia $t = b$ uno dei punti citati ove si annulla $F'(t)$ e sia $t = c$ uno dei punti ove si annulla $F''(t)$ (*). [Questi punti, appartenendo agli intervalli, di cui $a, a + h, a + k$ sono gli estremi, hanno (si ricordi) per limite il punto a , quando h, k tendono a zero].

Sarà :

$$F(a) = [x(a) - \xi]^2 + [y(a) - \eta]^2 - R^2 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} F'(b) = [x(b) - \xi] x'(b) + [y(b) - \eta] y'(b) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} F''(c) = [x(c) - \xi] x''(c) + [y(c) - \eta] y''(c) + x'^2(c) + y'^2(c) = 0. \quad (5)$$

Supponiamo ora :

$$x' y'' - x'' y' \neq 0 \quad \text{per } t = a \text{ (nel punto } A). \quad (6)$$

Sarà anche $x'(b) y''(c) - y'(b) x''(c) \neq 0$, quando b e c sono abbastanza vicini ad a , ossia quando $|h|, |k|$ sono abbastanza piccoli (come noi ora supporremo).

Supposte note le b, c , le (4), (5) costituiscono un sistema di due equazioni lineari nelle due incognite ξ, η ; che si possono risolvere perchè il determinante $x'(b) y''(c) - y'(b) x''(c)$ dei coefficienti delle incognite è diverso da zero. Determinate così le ξ, η , la (3) ci permette di dedurne tosto il valore di R . È facile dedurne che da questa ultima ipotesi (6) segue l'ipotesi iniziale che A, B, C non sono in linea retta, che possiamo perciò non enunciare esplicitamente [perchè inclusa nella (6)].

I limiti di ξ, η, R per $h = k = 0$ sono evidentemente le quantità ξ, η, R determinate dalle equazioni che si ottengono da (3), (4), (5) passando al limite per $h = k = 0$, cioè, per quanto abbiamo già osservato, ponendo in (3), (4), (5) $b = c = a$;

(*) Di tali punti b ce ne sono almeno due; di punti c almeno uno.

tali equazioni (*) sono le

$$(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 - R^2 = 0 \quad (7)$$

$$(x_0 - \xi) x'_0 + (y_0 - \eta) y'_0 = 0 \quad (8)$$

$$(x_0 - \xi) x''_0 + (y_0 - \eta) y''_0 + x'^2_0 + y'^2_0 = 0 \quad (9)$$

dove, per semplicità, abbiamo indicato con x_0, y_0 le coordinate $x(a), y(a)$ di A , e con x'_0, x''_0, \dots i valori corrispondenti (per $t = a$) di $x'(t), x''(t), \dots$

Il cerchio che ha il centro (ξ, η) e il raggio R definiti da queste equazioni si considererà come il cerchio *limite* del cerchio ABC e si dirà il *cerchio osculatore* alla nostra curva nel punto A di coordinate x_0, y_0 .

Dalle (8), (9) si deducono i valori ξ, η ; donde per (7) si trae il valore di R . Sarà pertanto, abolendo per brevità l'indice 0,

$$\xi = x - \frac{x'^2 + y'^2}{x' y'' - x'' y'} y' \quad ; \quad \eta = y + \frac{x'^2 + y'^2}{x' y'' - x'' y'} x' \quad (10)$$

$$B = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x' y'' - x'' y'|} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x' y'' - x'' y'} \varepsilon, \quad (11)$$

ove $\varepsilon = +1$, oppure $\varepsilon = -1$ secondo che $x' y'' - x'' y'$ è positivo o negativo.

Le (10) si possono scrivere:

$$\xi = x - R \left[\varepsilon \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right], \quad \eta = y + R \left[\varepsilon \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right].$$

Ora la somma dei quadrati di $\varepsilon \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$ ed $\varepsilon \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$ vale 1; esiste perciò un angolo θ tale che:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = \varepsilon \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad \text{sen } \theta = \varepsilon \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \\ \text{donde } \text{tg } \theta = \frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dx}. \end{array} \right.$$

Questo angolo θ è dunque l'angolo che la direzione positiva dell'asse delle x forma con la retta tangente: angolo che la

(*) Le seguenti equazioni si esprimono per così dire, che $t = a$ sarà una radice almeno tripla dell'equazione $[x(t) - \xi]^2 + [y(t) - \eta]^2 = R^2$; ciò che si suol enunciare dicendo che il cerchio osculatore ad una curva C in un suo punto A è quel cerchio, che ha con la C almeno un contatto *tripunto* nel punto A .

terza delle (12) definisce a meno di multipli di π (com'è naturale, perchè non è data *a priori* la direzione positiva della retta tangente) e che invece con le prime due delle (12) noi abbiamo definito ora completamente (cioè a meno di multipli di 2π , perchè ne abbiamo dato seno e coseno). È così:

$$\xi = x - R \operatorname{sen} \theta \quad ; \quad \eta = y + R \operatorname{cos} \theta. \quad (13)$$

Notiamo che la

$$ds = \varepsilon \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

definisce l'arco s della curva (a meno di una costante additiva) in grandezza e *verso* (dipendente dal segno di ε); le (12) diventano così (posto $s' = \frac{ds}{dt}$):

$$\operatorname{cos} \theta = \frac{x'}{s'} = \frac{dx}{ds}, \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{y'}{s'} = \frac{dy}{ds} \quad (*) \quad (14)$$

Posto $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$, si ottiene derivando l'ultima delle (12)

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{y'}{x'},$$

$$\theta' = \frac{y''x' - y'x''}{x'^2 + y'^2}.$$

(*) L'aver fissato θ (a meno di multipli di 2π) corrisponde ad aver fissato sulla retta tangente il verso t da considerarsi come positivo. Le (14) provano che il verso fissato come positivo per s concorda al verso t fissato come positivo sulla retta tangente. Si riconosce dalla (13) che il verso t assunto come positivo sulla tangente deve rotare (nel verso positivo) di un angolo retto $\frac{\pi}{2}$ per sovrapporsi a quella semiretta n (normale) che dal punto (x, y) va al centro (ξ, η) del cerchio osculatore; cioè guardando dal punto (x, y) la direzione t scelta come positiva della tangente, si ha a sinistra il centro (ξ, η) del cerchio osculatore (che rimane evidentemente dalla parte, a cui la curva volge la concavità). Infatti i coseni direttori di n sono

$$\frac{\xi - x}{R} = -\operatorname{sen} \theta = \operatorname{cos} \left(xt + \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\eta - y}{R} = \operatorname{cos} \theta = \operatorname{cos} \left(yt + \frac{\pi}{2} \right)$$

perchè l'angolo $xt = \theta$, e l'angolo $yt = yx + xt = -\frac{\pi}{2} + \theta$.

(Si suppone che, secondo le convenzioni usuali, si abbia: $xy = \frac{\pi}{2}$ ed $yx = -\frac{\pi}{2}$).

Quindi

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\theta'}{s} = \varepsilon \frac{y'' s' - y' x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ cioè:}$$

$$(15) \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R}.$$

Differenziando (13), ricordando (14) e (15), si ha :

$$d\xi = dx - R \cos \theta d\theta - \operatorname{sen} \theta dR = - \operatorname{sen} \theta dR$$

$$d\eta = \cos \theta dR,$$

donde :

$$\frac{d\eta}{d\xi} = - \operatorname{cotg} \theta = \frac{y - \eta}{x - \xi} \quad (16)$$

$$d\xi^2 + d\eta^2 = dR^2. \quad (17)$$

Le (15), (16), (17), hanno interpretazioni notevolissime. Si noti che l'incremento $\Delta\theta$ subito dall'angolo θ , quando si passa da una ad un'altra tangente, vale proprio l'angolo di queste due tangenti. Il rapporto $\frac{1}{R}$ dicesi *curvatura* della linea. Quindi la (15) ci dice :

La curvatura in un punto A è il limite del rapporto $\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$ ottenuto dividendo l'angolo $\Delta\theta$ formato dalle rette tangenti alla curva data nel punto A ed in un altro punto B della curva, per la lunghezza Δs dell'arco AB, quando il punto B tende al punto A.

Al variare del punto (x, y) sulla curva data, il punto (ξ, η) descrive un'altra curva : la cosiddetta *evoluta* della data curva.

L'evoluta è dunque il luogo dei centri (ξ, η) dei cerchi osculatori.

La tangente all'evoluta in un suo punto (ξ, η) è la retta che congiunge (ξ, η) al punto (x, y) corrispondente sulla curva iniziale, cioè è la normale alla curva data.

Infatti il coefficiente angolare di tale tangente $\frac{d\eta}{d\xi}$ è per (16) uguale a $-\frac{1}{\operatorname{tg} \theta}$ (coefficiente angolare della normale alla curva

data) od anche a $\frac{\eta - y}{\xi - x}$ coefficiente angolare della congiungente i punti (x, y) e (ξ, η) . Cioè in altre parole:

Le rette normali a una curva sono le tangenti della evoluta, o, come si suol dire, involuppano la evoluta.

Infine si noti che, se σ è l'arco della evoluta, è per (17)

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 = dR^2.$$

Fissando in modo opportuno il verso di σ , sarà dunque

$$d\sigma = dR, \text{ donde } \sigma = \int dR, \quad \sigma = R + \text{cost.}$$

Cioè l'arco dell'evoluta è, a meno d'una costante additiva (*), uguale al corrispondente raggio R : in altre parole l'arco di evoluta compreso tra due punti di questa è uguale alla differenza dei corrispondenti raggi dei cerchi osculatori della curva data.

Una curva C si dice l'evolvente della propria evoluta C_1 . Il precedente teorema dà un metodo assai comodo per costruire le evolventi C di una data curva C_1 . Se un filo di lunghezza costante avvolto attorno C_1 si svolge, in modo che la parte svolta rimanga tesa (lungo la tangente in quel punto di C_1 ove il filo si stacca da C_1), l'estremità libera del filo descriverà l'evolvente C ; anzi ciò rende intuitivo il teorema che una curva C_1 ha infinite evolventi, le quali si ottengono tutte, variando la lunghezza del filo, o il verso in cui è avvolto su C_1 . Ci basti ancora osservare che, se un pendolo M è retto da un filo flessibile OM , il quale, mentre M oscilla, deve avvolgersi su una curva C , allora M descrive durante tale oscillazione una evolvente di C . Su tale principio è fondato il pendolo cicloidale il quale è perfettamente isocrono, e impiega tempi uguali a fare oscillazioni qualsiasi, per quanto ampie.

7) Per dimostrare effettivamente che una curva C_1 possiede infinite evolventi C , si proceda nel modo seguente. Siano ξ, η le coordinate di un punto di C_1 e ne sia σ l'arco, che è individuato a meno del segno, e a meno di una costante additiva. Per ogni particolare scelta di σ si otterrà una particolare evolvente. Infatti, fissato σ , e posto $R = \sigma$, le $d\xi = -\sin \theta dR$ e $d\eta = \cos \theta dR$ individuano un angolo θ , e le (13) ci danno il punto (x, y) . Ed è ben evidente che questo punto (x, y) descrive una delle evolventi cercate. Esso soddisfa infatti a (16) e perciò esso si trova sulla retta uscente da (ξ, η) col coefficiente angolare $-\cotg \theta = \frac{d\eta}{d\xi}$, cioè sulla tangente

(*) Che varia, quando si cambia il punto dell'evoluta scelto come origine degli archi σ .

a C_1 nel punto (ξ, η) . Ed è pure facile riconoscere che questa tangente a C_1 è normale alla curva C descritta dal punto x, y . Infatti il coefficiente angolare della tangente a C nel punto (x, y) è data da $\frac{dy}{dx}$, che, in virtù delle equazioni citate, si riconosce uguale a $\operatorname{tg} \theta$. Cosicchè si verifica appunto che le tangenti in (x, y) a C ed in (ξ, η) a C_1 sono tra loro normali.

OSSERVAZIONI.

Supposto che la curva sia definita da una equazione $y = f(x)$, cioè dalle equazioni $y = f(t)$, $x = t$, la (11) diventa, ricordando che $x' = 1$, $x'' = 0$:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} \quad (y', y'' \text{ derivate rispetto alla } x).$$

Questa formola è di uso frequente.

Se invece $t = s$, la (11) diventa

$$\frac{1}{R} = |x' y'' - y' x''| \quad (x', x'' \text{ ecc. derivate rispetto ad } s).$$

Come in fine del § 123, avremmo potuto definire il cerchio osculatore in A come la posizione di un cerchio passante per A e B , e tangente in A alla curva Γ , quando B si avvicina ad A .

§ 125. — Inviluppi di una schiera di curve.

È molte volte comodo individuare una curva Γ , dando infinite linee C , tali che per ogni punto A di Γ passi una C tangente in A alla Γ .

Così, p. es., assai spesso si dà una curva Γ definendo le rette C tangenti a Γ (si ricordi, p. es., l'equazione tangenziale di una conica Γ). Così assai spesso nelle scienze applicate a una curva Γ si sostituisce una curva policentrica Γ' ; si osserva cioè che Γ è tangente a ciascuno dei suoi cerchi osculatori C , e si sostituisce alla Γ una curva Γ' formata con un numero finito di archetti circolari: ognuno dei quali è un arco di un cerchio osculatore C (*). Infine la evoluta Γ di una curva E si può definire come la linea a cui sono tangenti le rette C normali alla E .

Se, p. es., $y = f(x)$ è l'equazione di E , la retta C normale alla E nel punto di ascissa a è definita dall'equazione:

$$[y - f(a)] f'(a) + (x - a) = 0.$$

(*) Basterebbe ricorrere a cerchi soltanto tangenti.

E ci si può proporre il problema di dedurre direttamente le coordinate (ξ, η) del punto ove tale retta tocca l'evoluta.

Per dare un altro esempio più semplice, i cerchi C di equazione

$$(x - a)^2 + y^2 - 1 = 0$$

(che hanno il centro in quel punto dell'asse delle x , che ha l'ascissa a , e che hanno 1 per raggio) sono tutti (qualunque sia a) tangenti a ciascuna delle due rette $y = 1, y = -1$. Ci si può porre il problema di dedurre direttamente questo teorema dalla equazione dei cerchi C .

Noi senz'altro esamineremo generalmente un sistema di infinite curve C di equazione

$$f(x, y, a) = 0 \tag{1}$$

dove a è un parametro costante lungo una curva del sistema, ma che varia da una all'altra curva.

Nel campo che consideriamo la f e le sue derivate parziali del primo ordine sieno finite e continue.

Ricordo che il coefficiente angolare della retta tangente alla (1) nel punto (x, y) vale $-\frac{f'_x}{f'_y}$ se, come supporremo, $f'_y \neq 0$.

Supponiamo che esista una curva

$$y = \varphi(x) \tag{2}$$

tale che per ogni punto A di tale curva passi una e una sola curva (1) e che questa curva (1) sia tangente in A alla curva (2). Cioè per ogni punto A della curva (2) esiste un valore di a tale che la curva (1) corrispondente a tale valore di a passa per A ed è ivi tangente a (2). Questo valore di a varia col punto A : è cioè una funzione $\Psi(x)$, che supporremo derivabile, della sua ascissa x .

Dunque ogni punto A di ascissa x e di ordinata $\varphi(x)$ soddisfa alla (1) ove si ponga $a = \Psi(x)$; cosicchè:

$$f[x, \varphi(x), \Psi(x)] = 0$$

è una identità. Perciò derivando troviamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \varphi'(x) + \frac{\partial f}{\partial a} \Psi'(x) = 0$$

[se $y = \varphi(x)$; $a = \Psi(x)$]. Ma il coefficiente angolare $\varphi'(x)$ della retta tangente a (2) nel punto A è uguale al coefficiente

angolare $-\frac{f'_x}{f'_y}$ della tangente a (1) nello stesso punto (e ciò perchè per ipotesi queste due rette tangenti coincidono). La precedente uguaglianza diventa quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial a} \Psi'(x) = 0. \quad (\alpha)$$

Se in un punto di (2) la $\frac{\partial f}{\partial a}$ è differente da zero, la $\frac{\partial f}{\partial a}$ (che è per ipotesi continua) sarà differente da zero anche nei punti vicini; e quindi per (α) dovrà ivi essere $\Psi'(x) = 0$, cioè $a = \text{costante}$. Cioè un pezzo almeno della curva (2) sarà addirittura un pezzo di una curva (1): caso che considereremo come banale.

Se così non è, avremo:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

Cioè ogni punto A della curva (2) soddisfa contemporaneamente alle:

$$f = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0 \quad (3)$$

per un qualche valore di a [che può variare con A , perchè $a = \Psi(x)$]. Viceversa, se per ogni punto di una curva (2) esiste un valore di a così che ne siano soddisfatte le (3), allora per ogni A di tale curva (2) esce una curva (1) che è tangente in A a tale curva (2).

Una curva (2) in tali condizioni si chiama *inviluppo* delle (1). Quindi nelle nostre ipotesi:

L'inviluppo (o uno degli inviluppi) delle (1) è, se esiste, una curva, per ogni punto della quale esiste un valore di a tale che siano contemporaneamente soddisfatte le (3). Cosicchè, eliminando a tra le $f = f'_a = 0$, si può dedurre spesso l'equazione dell'inviluppo.

Così, p. es., un inviluppo dei cerchi

$$(x - a)^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (4)$$

soddisfa anche alla $2(x - a) = 0$, cioè alla $x = a$; e quindi (4) si riduce ad $y^2 - 1 = 0$; tali cerchi hanno dunque due inviluppi; la retta $y = 1$ e la retta $y = -1$.

ESEMPI.

α) Così, p. es., la retta C tangente alla $y = f(x)$ nel punto $[a, f(a)]$ ha per equazione

$$y - f(a) - (x - a) f'(a) = 0. \quad (5)$$

Questa retta C dipende da un parametro a ; l'equazione del suo involuppo si otterrà eliminando a tra la (5) e l'equazione

$$-f'(a) + f'(a) - (x - a) f''(a) = 0,$$

ossia

$$(x - a) f''(a) = 0,$$

che se ne deduce, derivando (5) rispetto ad a . Supposto che nessun tratto della $y = f(x)$ sia un segmento rettilineo (caso affatto elementare), per un valore generico di a sarà $f''(a) \neq 0$. E dall'ultima equazione si deduce $x - a = 0$, ossia $a = x$. Sostituendo in (5) si trova:

$$y = f(x),$$

che è l'equazione della curva iniziale; il che si poteva prevedere pensando che una curva è l'involuppo delle sue tangenti.

β) L'involuppo delle rette normali ad una curva $y = f(x)$ è l'*evoluta* della curva. L'equazione della normale nel punto di coordinate $a, f(a)$ è:

$$[y - f(a)] f'(a) + x - a = 0 \quad (6)$$

che dipende dal parametro a . Il punto corrispondente dell'evoluta sarà il punto (x, y) che soddisfa insieme alla (6) ed alla:

$$1 + [f'(a)]^2 - [y - f(a)] f''(a) = 0$$

che si deduce da (6) derivandola rispetto ad a .

Se nelle (6), (7) poniamo x_0 ed y_0 al posto di a e $f(a)$, e poniamo ξ, η al posto delle x, y , queste equazioni si riducono alle (8), (9) del § 124 [ove si supponga $x = t$ e quindi $x'_0 = 1$, $x''_0 = 0$, $y'_0 = f'(a)$ ed $y''_0 = f''(a)$]. Resta così di nuovo provato che:

Il punto dove la normale in A alla curva $y = f(x)$ tocca l'evoluta della curva è il centro del cerchio osculatore in A. E quindi: L'evoluta si può definire sia come involuppo delle normali, che come luogo dei centri dei cerchi osculatori.

§ 126. — **Curvatura e torsione di una linea sghemba.**

La teoria del cerchio osculatore, e della curvatura di una linea piana si può estendere alle curve sghembe. Noi estenderemo soltanto la definizione di *curvatura*, trattando anche della definizione analoga di *torsione*.

Partiamo dalla formola che dà la curvatura in A come il limite del rapporto dell'angolo di due tangenti all'arco compreso tra i punti di contatto. Noi potremo generalizzare ponendo le seguenti definizioni (Cfr. questo §, γ):

α) Sia C una curva, da ogni punto A della quale esca una retta r . Le coordinate x, y, z di un punto C e i coseni direttori λ, μ, ν della retta corrispondente si potranno considerare come funzioni del relativo arco s della curva, misurato a partire da un qualsiasi punto iniziale.

Sia θ l'angolo delle due rette uscenti da due punti A, B di C ; in A l'arco s abbia il valore s_0 , in B il valore $s_0 + h$. Ammetteremo che quando B si avvicina ad A , ossia per $h = 0$, sia $\lim \theta = 0$ (che cioè la direzione della retta r varii con

continuità al variare di s). Può darsi che $\lim_{h=0} \frac{\theta}{h}$ abbia un valore determinato. Proviamoci a determinarlo.

In tale ricerca possiamo moltiplicare $\frac{\theta}{h}$ per $\frac{\text{sen } \theta}{\theta}$, poichè

$$\lim_{\theta=0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1.$$

Il limite cercato diventa così il $\lim_{h=0} \frac{\text{sen } \theta}{h}$.

Cerchiamo il limite per $h = 0$ di questa espressione. La retta che esce da A ha per coseni di direzione λ, μ, ν ; quella che esce da B avrà per coseni di direzione:

$$\lambda + \Delta\lambda, \quad \mu + \Delta\mu, \quad \nu + \Delta\nu.$$

Una formola di Geometria Analitica dice che (cfr. es. 1° a pag. 79)

$$\text{sen}^2 \theta = \left\| \begin{array}{ccc} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda + \Delta\lambda & \mu + \Delta\mu & \nu + \Delta\nu \end{array} \right\|^2.$$

Sottraendo la prima della seconda riga (*) avremo:

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \left\| \begin{array}{ccc} \lambda & \mu & \nu \\ \Delta \lambda & \Delta \mu & \Delta \nu \end{array} \right\|^2,$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \left| \begin{array}{cc} 1 & \lambda \Delta \lambda + \mu \Delta \mu + \nu \Delta \nu \\ \lambda \Delta \lambda + \mu \Delta \mu + \nu \Delta \nu & \Delta \lambda^2 + \Delta \mu^2 + \Delta \nu^2 \end{array} \right|$$

ossia:

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \Delta \lambda^2 + \Delta \mu^2 + \Delta \nu^2 - (\lambda \Delta \lambda + \mu \Delta \mu + \nu \Delta \nu)^2$$

e quindi (poichè $h = \Delta s =$ incremento dell'arco):

$$\left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{h} \right)^2 = \frac{\Delta \lambda^2 + \Delta \mu^2 + \Delta \nu^2}{\Delta s^2} - \frac{(\lambda \Delta \lambda + \mu \Delta \mu + \nu \Delta \nu)^2}{\Delta s^2}$$

e

$$\lim \left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{h} \right)^2 = \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 - (\lambda \lambda' + \mu \mu' + \nu \nu')^2 = \left\| \begin{array}{ccc} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \end{array} \right\|^2,$$

se λ, μ, ν posseggono derivate finite (rispetto a s).

Ricordando che $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, derivando avremo:

$$2 \lambda \lambda' + 2 \mu \mu' + 2 \nu \nu' = 0,$$

ossia:

$$\lambda \lambda' + \mu \mu' + \nu \nu' = 0.$$

Quindi sarà:

$$\lim \left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{h} \right)^2 = \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = \left\| \begin{array}{ccc} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \end{array} \right\|^2$$

$$\lim \frac{\operatorname{sen} \theta}{h} = \pm \sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2} = \sqrt{\left\| \begin{array}{ccc} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \end{array} \right\|^2}.$$

Questa formula misura, per così dire, la rapidità con cui le rette, che studiamo, cambiano di direzione. C'è ambiguità di segno, ma questo è spiegato dal fatto che non si è determinato in segno l'angolo delle due rette.

β) Un'applicazione tra le più importanti è quella di misurare (se così ci è lecito esprimerci) la rapidità con cui una curva sgheмба si torce, cioè si allontana dall'essere piana. Se la curva fosse piana, essa avrebbe per piano osculatore sempre lo stesso suo piano, e le binormali sarebbero sempre parallele tra loro.

(*) Basta ricordare il valore del quadrato di tale matrice dato al § 22, pag. 76, per riconoscere che questa sottrazione lo lascia invariato.

Misurare la rapidità con cui una curva si torce è come misurare la rapidità con cui le binormali, anzichè restar parallele tra loro, deviano una dall'altra; rapidità che, secondo le precedenti convenzioni è misurata da $\sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}$, in cui per λ, μ, ν si pongano i valori dei coseni di direzione della binormale. Questo numero si assume *per definizione* come valore della torsione della curva.

Le curve piane hanno la torsione nulla; quanto più piccola è la torsione, tanto più la curva si avvicina ad essere piana.

γ) La curvatura di una curva in un punto è un numero che, si può dire, serve a misurare quanto rapidamente la curva si allontana dall'essere una retta.

Anche nel linguaggio comune si dice che un arco di cerchio di raggio grande è poco curvo, quello di un cerchio di raggio piccolo è molto curvo.

Per definire la curvatura basta trovare una quantità che sia tanto più piccola quanto più, secondo la nostra intuizione, la curva si avvicina ad essere una retta.

Prendiamo tutte le tangenti a una curva; se questa è retta, tutte le tangenti coincideranno, e quanto più la curva è curvata, tanto maggiore (a parità di arco fra i punti di contatto) sarà l'angolo che le due tangenti formano fra loro.

Dunque si può misurare la curvatura di una curva come la rapidità di cambiamento di direzione delle tangenti alla curva stessa. *Curvatura* di una curva sarà perciò *per definizione* il valore di $\sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}$, dove λ, μ, ν sieno i coseni direttori della tangente. È evidente che questa è proprio *la stessa definizione data per le curve piane*, come del resto verificheremo più avanti col calcolo effettivo.

Se x, y, z sono le coordinate in funzione dell'arco dei punti della curva, i coseni di direzione delle tangenti saranno x', y', z' , e quindi:

$$\text{curvatura} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} = \sqrt{\left\| \begin{matrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{matrix} \right\|^2}.$$

Così la curvatura è data *dalla radice quadrata della somma dei quadrati delle derivate seconde delle x, y, z , prese rispetto all'arco come parametro* (*).

(*) Si noti che se la curvatura è nulla, allora $x'' = y'' = z'' = 0$, e quindi x, y, z sono funzioni lineari della s . La linea è perciò una retta. Ciò che concorda con l'idea intuitiva di curvatura, da cui siamo partiti.

Si dimostra che i coseni di direzione della normale principale sono proporzionali a x'' , y'' , z'' (*), ossia sono uguali ad hx'' , hy'' , hz'' , dove h si determinerà in modo che:

$$h^2 \{ x''^2 + y''^2 + z''^2 \} = 1;$$

cosicchè:
$$h = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}}.$$

Ma il radicale $\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$ non è altro che la curvatura; quindi:

$$h = \frac{1}{\text{curvatura}};$$

e i coseni di direzione della normale principale saranno:

$$\frac{x''}{\text{curvatura}}, \quad \frac{y''}{\text{curvatura}}, \quad \frac{z''}{\text{curvatura}}.$$

L'inverso della torsione si chiama raggio di torsione, l'inverso della curvatura si chiama raggio di curvatura.

δ) Applichiamo le considerazioni fatte alle curve piane. Per una curva posta nel piano $z = 0$ avremo

$$\begin{aligned} \text{curvatura} &= \sqrt{x''^2 + y''^2} = \\ &= \sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & 0 \end{vmatrix}^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2} = \pm (x' y'' - y' x''), \end{aligned}$$

se, ricordiamolo, il parametro, rispetto a cui si deriva, è lo stesso arco s della curva. Il lettore noti che questa formola coincide con l'ultima del § 124 (pag. 416).

Osservazione. Se x , y , z sono le coordinate di un punto di una curva date in funzione dell'arco s , abbiamo già visto che

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}, \\ \xi &= \rho \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \eta = \rho \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \zeta = \rho \frac{d^2z}{ds^2} \quad (\rho = \text{raggio curvatura}) \end{aligned}$$

sono rispettivamente i coseni direttori della tangente e della normale principale. Si considerino ora x , y , z come funzioni di un altro parametro t pure individuante

(*) Infatti, dall'equazione stessa del piano osculatore, risulta che una retta r , i cui coseni di direzione sono proporzionali a x'' , y'' , z'' , è parallela a tale piano. E, poichè dalla $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ si deduce derivando $x' x'' + y' y'' + z' z'' = 0$, la retta r è perpendicolare alla tangente. Quindi r è parallela alla normale principale. S'intende che questo risultato vale soltanto, se si assume l'arco s come variabile indipendente.

i punti della stessa curva. Anche l'arco s sarà funzione della t . E avremo, posto

$$s'_t = \frac{ds}{dt}, \quad s''_t = \frac{d^2s}{dt^2};$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{ds} s'_t = \alpha s'_t, & \frac{dy}{dt} &= \beta s'_t, & \frac{dz}{dt} &= \gamma s'_t, \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{ds} s'_t \right) = s''_t \frac{dx}{ds} + s'_t \frac{d^2x}{ds^2} = \alpha s''_t + \frac{1}{\rho} s'^2_t \xi; \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \beta s''_t + \frac{1}{\rho} s'^2_t \eta; & \frac{d^2z}{dt^2} &= \gamma s''_t + \frac{1}{\rho} s'^2_t \zeta. \end{aligned}$$

Le quali formole, fondamentali per la cinematica, ci permettono facilmente di ricavare i valori di $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta$ dai valori delle derivate di x, y, z, s rispetto alla t . Si deduce, per esempio:

$$\frac{1}{\rho} \xi = \frac{s'_t x''_t - x'_t s''_t}{s'^3_t} \text{ e analoghe.}$$

Quest'ultima formola si poteva anche ottenere, ricordando che:

$$\frac{1}{\rho} \xi = \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dx}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{x'_t}{s'_t} \right) = \frac{1}{s'_t} \frac{d}{dt} \left(\frac{x'_t}{s'_t} \right).$$

Note le $\alpha, \beta, \gamma, \frac{1}{\rho} \xi, \frac{1}{\rho} \eta, \frac{1}{\rho} \zeta$ si ricava tosto ρ ricordando che:

$$\frac{1}{\rho^2} = \left[\frac{1}{\rho} \xi \right]^2 + \left[\frac{1}{\rho} \eta \right]^2 + \left[\frac{1}{\rho} \zeta \right]^2.$$

E i coseni direttori della binormale si hanno tosto, osservando che questa retta è normale alla tangente e alla normale principale.

ESEMPI.

1° Determinare l'equazione della *catenaria*, la curva cioè che soddisfa alla:

$$\frac{dy}{dx} = hs \quad (h = \text{cost.}; s = \text{arco curva}) \quad (h \neq 0).$$

Derivando rispetto x si ha, poichè $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = h \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Per integrare questa equazione si può seguire il metodo generale. Più brevemente si ponga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \left[\text{ossia } z = \log \left\{ \frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \right\} \right], \text{ dove}$$

z è una nuova funzione incognita. L'equazione diverrà

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} \frac{dz}{dx} = h \sqrt{\left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2} \text{ ossia } \frac{dz}{dx} = h, \text{ donde } z = hx + k$$

($k = \text{cost.}$).

È dunque $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{hx+k} + e^{-(hx+k)}}{2}$; e infine, integrando:

$$y = \frac{e^{hx+k} - e^{-(hx+k)}}{2h} + l,$$

dove l è, come k , una costante arbitraria.

Con una traslazione degli assi si può fare $k = l = 0$, e quindi $y = \frac{e^{hx} + e^{-hx}}{2h}$. Con una similitudine (omotetia rispetto

all'origine) la curva si trasforma nella $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$.

DEFIN. Si dicono *sottotangente* e *sottonormale* in un punto A di una curva $y = f(x)$ i segmenti compresi tra la proiezione di A sull'asse delle x , e il punto d'intersezione di questo asse con la tangente o la normale in A alla curva considerata.

2° Trovare la sottotangente e la sottonormale per una curva $y = f(x)$ nel punto di ascissa x .

RIS. L'equazione della tangente e della normale (indicando con X, Y le coordinate correnti) è rispettivamente:

$$[f(x) - Y] + f'(x)[X - x] = 0; f'(x)[Y - f(x)] + [X - x] = 0.$$

Posto $Y = 0$, se ne rispettivamente deduce per l'ascissa X del punto di intersezione con l'asse delle x :

$$X = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{y}{y'}; X = x + f(x)f'(x) = x + yy',$$

donde:

$$\text{sottotangente} = -\frac{y}{y'}; \text{sottonormale} = yy'.$$

3° Trovare le curve a sottotangente o sottonormale costante k .

$$\text{Si ha } -\frac{y}{y'} = k \left(\text{ossia } \frac{y'}{y} = \frac{-1}{k} \right) \text{ o } yy' = k.$$

Se ne deduce integrando

$$y = Ce^{-\frac{x}{k}} \text{ o } y^2 = 2kx + C \text{ (} C = \text{costante)}$$

che sono rispettivamente una curva esponenziale, ed una parabola.

CAPITOLO XX.

INTEGRALI CURVILINEI E SUPERFICIALI

§ 127. — Integrali curvilinei e potenziale - Prime definizioni.

Ricordiamo la definizione già posta al § 91, pag. 302, e le osservazioni dell'es. 4° a pag. 332, § 100. Siano:

$$\begin{aligned} x &= x(t), & y &= y(t), & z &= z(t) \\ \text{per } a \leq t \leq b & & & & (a, b = \text{cost}). \end{aligned}$$

le equazioni parametriche di un arco C di curva; e siano $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ continue nell'intervallo considerato.

I seguenti risultati si estendono facilmente anche al caso di una curva C con un numero finito di punti *angolari* (in cui le derivate a destra delle x , y , z non coincidano con le derivate a sinistra).

Sia $X(x, y, z)$ una funzione continua delle x , y , z in un campo D contenente all'interno la curva C .

La $X[x(t), y(t), z(t)]$ per $a \leq t \leq b$ ci dà i valori assunti da X nei punti di C . Secondo le definizioni poste nei citati paragrafi, con $\int_C X dx$ indichiamo lo:

$$(1) \quad \int_a^b X[x(t), y(t), z(t)] x'(t) dt.$$

Questo integrale rappresenta il valore relativo all'arco C di una funzione additiva dei pezzi della curva considerata; e precisamente di quella *funzione additiva*, la cui derivata è X , quando si assuma come misura di un pezzo di tale curva la lunghezza della sua proiezione sull'asse delle x (supposto che questa proiezione sia in corrispondenza biunivoca coi punti del pezzo di curva considerato).

Pertanto, se sono dati gli assi coordinati, tale integrale è perfettamente determinato dalla funzione X e dall'arco C ; ed esso cambia evidentemente di segno, invertendo gli estremi A , B di tale arco.

Del resto, se $x = \bar{x}(\tau)$, $y = \bar{y}(\tau)$, $z = \bar{z}(\tau)$ sono ($\alpha \leq \tau \leq \beta$) altre equazioni parametriche dell'arco stesso, esiste corrispondenza biunivoca tra i valori di t e τ , in guisa che valori corrispondenti delle t , τ individuino lo stesso punto della curva.

Mentre τ varia da α a β , la t varia da a a b . E in tali intervalli t e τ si possono considerare funzioni l'una dell'altra tali che $x(t) = \bar{x}(\tau)$, $x'(t) dt = \bar{x}'(\tau) d\tau$, e analoghe per y, z . La regola di integrazione per sostituzione dimostra che l'integrale (1) è uguale appunto a $\int_{\alpha}^{\beta} f[\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), \bar{z}(\tau)] \bar{x}'(\tau) d\tau$, cioè che l'integrale (1) non cambia, se cambiamo la rappresentazione parametrica della curva C .

È pure evidente che, se C è la somma di due archi C', C'' , si ha :

$$\int_C X dx = \int_{C'} X dx + \int_{C''} X dx$$

(che corrisponde al fatto che tale integrale è funzione *additiva*).

Si noti che, dato un arco, invece di dire quali dei suoi estremi si deve considerare primo, e quale secondo, si può con una freccia indicare il verso in cui lo si intende percorso (fig. 42).

Mutare il verso della freccia farà cambiare il segno del nostro integrale.

Questa osservazione è specialmente importante per il caso che l'arco AB sia un arco chiuso, ossia che gli estremi A e B coincidano (fig. 43).

In tal caso fissato con una freccia il verso in cui il nostro arco si deve intendere percorso, e, detto (a, b) l'intervallo in cui deve variare t dal valore a al valore b , perchè il punto (x, y, z) descriva (da

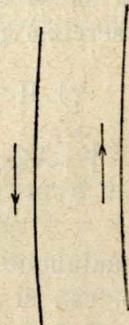


Fig. 42.

A in A) l'arco C nel verso prestabilito, si intende con $\int X dx$ proprio l'integrale

$$\int_a^b X[x(t), y(t), z(t)] x'(t) dt.$$

E naturalmente questo integrale non dipende dal punto $A = B$ considerato come iniziale e finale, ma soltanto dall'arco dato e dal verso della freccia. Mutando questo verso, varia il segno dell'integrale.

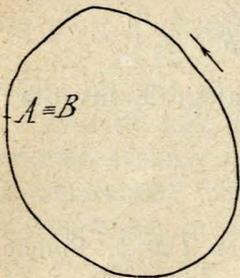


Fig. 43.

β) In modo affatto analogo, se Y e Z sono funzioni continue nel campo D , si possono definire gli integrali $\int Y dy$ e $\int Z dz$ estesi a un arco di curva ; e si può poi definire lo :

$$\int (X dx + Y dy + Z dz)$$

esteso a un arco di curva come la somma degli integrali $\int X dx, \int Y dy, \int Z dz$ estesi allo stesso arco.

Se noi anche qui volessimo usare locuzioni abbreviate, potremmo definire il precedente integrale nel seguente modo:

Divisa la curva C in infiniti archetti infinitesimi δ , si moltiplichino i valori di X, Y, Z in uno di questi pezzetti rispettivamente per le sue proiezioni dx, dy, dz sui tre assi coordinati e si sommino i prodotti così ottenuti. Otteniamo così un trinomio $Xdx + Ydy + Zdz$ per ognuno degli archetti δ ; la loro somma:

$$\Sigma (Xdx + Ydy + Zdz)$$

è il nostro integrale. Queste locuzioni sono però da considerarsi al solito come locuzioni abbreviate e non rigorose. Sarà utile esercizio ridurle ad una forma logica e soddisfacente.

γ) Il valore del nostro integrale è, si ricordi, quello di

$$\int_a^b \{ X[x(t), y(t), z(t)] x'(t) + Y[x(t), y(t), z(t)] y'(t) + Z[x(t), y(t), z(t)] z'(t) \} dt,$$

qualunque sia il parametro t individuante i punti di C . Se, p. es., si pone $t = s =$ arco della curva C contato da un'origine scelta a piacere, e se con $F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ si indica la grandezza del vettore che ha X, Y, Z per componenti, con

$$\alpha = \frac{X}{F}, \quad \beta = \frac{Y}{F}, \quad \gamma = \frac{Z}{F}$$

se ne indicano i coseni direttori, il nostro integrale diventa:

$$\int_{s_0}^{s_1} F \left(\alpha \frac{dx}{ds} + \beta \frac{dy}{ds} + \gamma \frac{dz}{ds} \right) ds,$$

se s_0, s_1 sono i valori di s per $t = a$ e per $t = b$. Poichè $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ sono i coseni direttori della tangente a C , indicando

con ω l'angolo di F con C in un punto qualsiasi di C , il nostro integrale diventa $\int_{s_0}^{s_1} F \cos \omega ds$. Il nostro integrale appare identico a quella funzione additiva dei pezzi della nostra curva, la cui derivata è $F \cos \omega$, se conveniamo di assumere come misura di un pezzo di curva la sua lunghezza.

δ) Se esiste una funzione $V(x, y, z)$ tale che $dV = Xdx + Ydy + Zdz$, si dimostra, come a pag. 303, che il nostro integrale è uguale alla differenza dei valori che la V assume nei punti A, B estremi della curva, a cui è esteso il nostro integrale, e che esso perciò dipende soltanto dalla posizione dei punti A, B e non dalla forma della curva C che li congiunge.

Tale funzione V esiste, p. es., in un parallelepipedo (§ 92, pag. 306) in cui valgano le

$$X'_y - Y'_x = Y'_z - Z'_y = Z'_x - X'_z = 0.$$

ESEMPIO.

La teoria degli integrali curvilinei riceve un'importante applicazione alla misura del lavoro di una forza, le cui componenti secondo gli assi coordinati sono X, Y, Z , quando il punto di applicazione M descrive la curva

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Ci chiediamo, usando il linguaggio infinitesimale: Qual è il lavoro eseguito quando M descrive un archetto di tale curva, le cui proiezioni sugli assi coordinati sono dx, dy, dz ? Se F è la grandezza della forza, ds è la lunghezza di un tale archetto, tale lavoro è $Fds \cos(F, s)$ dove con $\cos(F, s)$ indico il coseno dell'angolo che F forma con la tangente all'elemento di curva considerato. Il lavoro eseguito, quando M descrive un certo pezzo della nostra curva, sarà così:

$$\int F \cos(F, s) ds = \int (Xdx + Ydy + Zdz)$$

esteso all'arco di curva considerato (*).

Quando mai un tale lavoro dipende soltanto dalle posizioni estreme assunte dal punto M e non dalla particolar curva che le congiunge? Per il risultato precedente si ha che (almeno se ci muoviamo in parallelepipedo, ecc.), ciò avviene se

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}; \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}; \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}.$$

Nel qual caso esiste una funzione V per cui

$$\frac{\partial V}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = Z;$$

(*) Si noti che $F \cos(F, s)$ è la proiezione di F sulla tangente alla curva oppure che $ds \cos(F, s)$ è la proiezione dell'arco infinitesimo ds sulla direzione della forza.

e il lavoro citato è uguale alla differenza dei valori che V ha nelle posizioni estreme occupate da M .

Una tale funzione V (che è definita a meno di una costante additiva) si dice la *funzione delle forze*; essa, cambiata di segno, è detta anche *il potenziale del nostro campo di forze*.

Esempi di campi di forze che ammettono potenziale sono i seguenti:

1° Il campo delle forze di gravità in una regione abbastanza piccola attorno a un punto A della superficie terrestre.

Assunto come asse delle z la verticale diretta verso il basso e quindi come assi x, y due rette orizzontali, la forza di gravità agente su un punto di massa m ha per componenti

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = mg.$$

Si trova $V = mgz + \text{cost.}$, p. es., $V = mgz$. Ed il lavoro compiuto da M nel passare da un punto $(\alpha, \beta, -h)$ ad un punto $(a, b, -k)$ cioè nel cadere da un punto di altezza h a un punto di altezza k è $mg(h - k)$ ed è indipendente dalla via seguita.

2° I campi Newtoniani: quelli cioè, in cui un punto M , di massa 1, è attratto da un punto fisso O con una forza F avente per direzione la direzione della retta OM ed una grandezza $\frac{h}{r^2}$ dove $h = \text{cost.}$ ed r è la distanza OM (attrazione universale, attrazione di masse elettriche o magnetiche). La costante h si supporrà positiva o negativa, secondo che F ha la direzione OM o la direzione MO .

Scelti infatti come assi x, y, z tre rette a due a due ortogonali uscenti da O , indicate con x, y, z le coordinate di M , con $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ la distanza OM , con $(r, x), (r, y), (r, z)$ l'angolo di OM coi tre assi, le componenti di F sono

$$X = \frac{h}{r^2} \cos(rx) = \frac{hx}{r^3}, \quad Y = \frac{hy}{r^3}, \quad Z = \frac{hz}{r^3}.$$

Poichè $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}$, ecc. si trova facilmente potersi porre $V = -\frac{h}{r}$.

Il lavoro eseguito da un punto di massa 1 nel passare da una posizione A ad una posizione B è dato dalla differenza dei corrispondenti valori di V , ed è affatto indipendente dalla via scelta per andare da A in B .

§ 128. — Trasformazione di integrali curvilinei nel piano (*).

Se abbiamo un campo piano γ limitato da un contorno ad uno o più pezzi, si dirà $\int Xdx$ esteso al contorno di γ la somma degli integrali $\int Xdx$ estesi ai singoli pezzi del contorno di γ , percorsi in guisa che un osservatore, camminando sul lato del foglio volto verso il lettore e percorrendo ogni pezzo di detto contorno nel verso indicato dalla freccia, lasci a sinistra l'area γ .

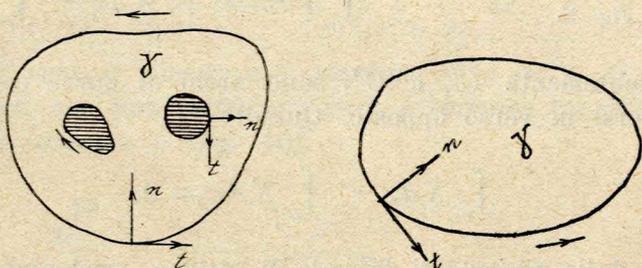


Fig. 44.

E notiamo che un tale osservatore, che volgesse la faccia verso la direzione positiva dell'asse delle x , avrebbe pure alla sinistra la direzione positiva dell'asse delle y . Se noi tiriamo una tangente t a un pezzo del contorno di γ volta in verso concorde a quello in cui si percorre detto pezzo del contorno, e tiriamo quindi la normale n volta verso l'interno di γ , il solito osservatore avrà la direzione n a sinistra, se volge la faccia verso la direzione t (fig. 44) (**).

Conserveremo sempre le convenzioni qui fatte.

TEOREMA 1° — Se γ è la somma di due aree γ' , γ'' , l'integrale $\int X dx$ esteso al contorno di γ è uguale alla somma degli integrali $\int X dx$ estesi ai contorni di γ' , γ'' . Infatti siano

(*) I teoremi del § 128 e seg. sono importanti al tecnico specialmente per le applicazioni alla elettrodinamica, ed anche alla idrodinamica teorica.

(**) Al lettore l'enunciato preciso delle condizioni, che si suppongono soddisfatte dal contorno.

Nel primo campo γ della precedente figura, il contorno *esterno* di γ è, si noti, percorso in verso discorde al verso in cui procedono le lancette di un orologio, i contorni *interni* sono invece percorsi in verso *concorde*. Qui, si noti, ci riferiamo a campi γ limitati. Al lettore l'esame di campi illimitati.

C, C', C'' i contorni di $\gamma, \gamma', \gamma''$. Siano C'_1 e C'_2 quei pezzi del contorno C' (fig. 45), i cui punti rispettivamente appartengono e non appartengono al contorno C'' e siano C''_1 e C''_2 quei pezzi di C'' i cui punti rispettivamente appartengono e non appartengono al contorno C' .

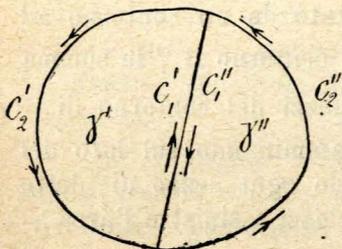


Fig. 45.

Sarà :

$$\int_C X dx = \int_{C'_1} X dx + \int_{C'_2} X dx$$

$$\int_{C''} X dx = \int_{C''_1} X dx + \int_{C''_2} X dx.$$

Evidentemente C'_1 e C''_1 sono archi di curve coincidenti, ma percorsi in verso opposto. Quindi :

$$\int_{C'_1} X dx + \int_{C''_1} X dx = 0,$$

e perciò dalle precedenti formole si ottiene, sommando :

$$\int_{C'_2} X dx + \int_{C''_2} X dx = \int_C X dx + \int_{C''} X dx.$$

Ma C'_2 e C''_2 formano complessivamente il contorno C di $\gamma = \gamma' + \gamma''$, e sono percorsi nello stesso verso, sia come appartenenti al contorno di γ' o γ'' , sia come appartenenti al contorno di γ . L'ultima equazione dà dunque :

$$\int_C X dx = \int_{C'_2} X dx + \int_{C''_2} X dx = \int_C X dx + \int_{C''} X dx.$$

c. d. d.

Questo teorema si può enunciare dicendo :

Lo integrale $\int X dx$ esteso al contorno di un campo γ è una funzione additiva di γ .

Ciò rende intuitivo che in molti casi tale integrale *curvilineo* si potrà trasformare in un integrale *superficiale* esteso a γ .

Ciò appunto è approvato dal seguente teorema, da cui risulta precisamente che la derivata di tale funzione additiva

vale comunemente $\frac{\partial X}{\partial x}$.

TEOREMA 2°. — Se γ è un'area del piano xy , e $X(x, y)$ vi è finita e continua insieme alla $\frac{\partial X}{\partial x}$, e se C è il contorno di γ , allora :

$$\iint_{\gamma} \frac{\partial X}{\partial x} dx dy = \int_C X dy (*)$$

Supponiamo dapprima che una retta $y = \text{cost.}$ incontri C al più in due punti.

Si ha :

$$\iint_{\gamma} \frac{\partial X}{\partial x} dx dy = \int_m^M dy \int_{A_1}^{A_2} \frac{\partial X}{\partial x} dx,$$

dove m, M sono il minimo e il massimo di y in γ , ed A_1, A_2 sono i punti ove una retta $y = \text{cost.}$ (compresa tra le $y = m$ e $y = M$) incontra C (fig. 46).

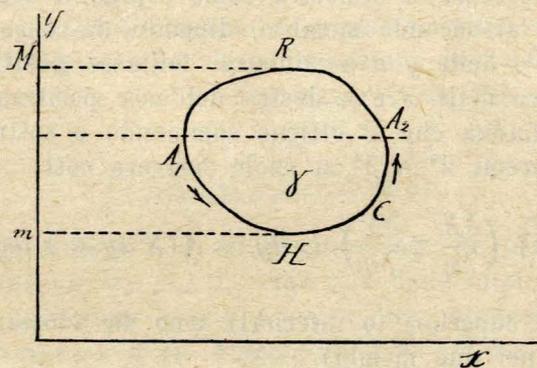


Fig. 46.

Se indichiamo con X_2 e X_1 i valori di X in A_2, A_1 , se ne deduce :

$$\iint_{\gamma} \frac{\partial X}{\partial x} dx dy = \int_m^M dy (X_2 - X_1) = \int_m^M X_2 dy - \int_m^M X_1 dy.$$

Ossia, indicando con C_1 e C_2 gli archi HA_1K e HA_2K ,

$$\iint_{\gamma} \frac{\partial X}{\partial x} dx dy = \int_{C_2} X_2 dy - \int_{C_1} X_1 dy = \int_{\text{arc } HA_2K} X dx + \int_{\text{arc } KA_1H} X dx = \int_C X dx.$$

(*) È sempre sottinteso che il campo γ e il suo contorno C sieno tali che questi integrali abbiano significato secondo le nostre definizioni.

Se invece C fosse incontrata da qualche parallela all'asse delle x in più di due punti, supponiamo γ scomponibile in un numero finito di parti $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, i cui contorni C_1, C_2, \dots, C_n siano incontrati da tali parallele al più in due punti. Per il teorema 1° e per quanto abbiamo ora dimostrato si avrà:

$$\iint_{\gamma} \frac{\partial X}{\partial x} dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{\gamma_i} \frac{\partial X}{\partial x} dx dy = \sum_1^n \int_0 X dy = \int_0 X dy,$$

c. d. d.

TEOREMA 3°. — Se in γ le Y e $\frac{\partial Y}{\partial y}$ sono funzioni finite e continue,

$$\iint_{\gamma} \frac{\partial Y}{\partial y} dx dy = - \int_c Y dx.$$

Questo teorema si dimostra come sopra: il segno —, che qui compare al secondo membro, dipende da ciò che, mentre l'asse positivo delle y è a sinistra dell'asse positivo delle x , l'asse positivo delle x è a destra dell'asse positivo delle y .

L'uguaglianza che si ottiene sommando o sottraendo le formole dei teoremi 2° e 3° si suole scrivere così:

$$\iint_{\gamma} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \pm \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy = \int (X dy \mp Y dx), \quad (1)$$

dove i segni superiori (o inferiori) sono da adottarsi contemporaneamente nei due membri.

Osserviamo che $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$ sono in valore assoluto e in segno i coseni di direzione della tangente t (volta nel verso sopra definito) quando con s si indichi l'arco del contorno di γ , o di un suo pezzo, crescente nel verso in cui tal pezzo di contorno si deve percorrere. Poichè gli angoli \hat{tn} e \hat{xy} (nelle nostre convenzioni) sono uguali a $\frac{\pi}{2}$, sarà:

$$\frac{dx}{ds} = \cos(xt) = \cos(xy + yn + nt) = \cos(yn)$$

$$\frac{dy}{ds} = \cos(yt) = \cos(yx + xn + nt) = \cos(xn - \pi) = -\cos(xn).$$

Ossia i coseni di direzione della normale n sono rispettivamente $-\frac{dy}{ds}, \frac{dx}{ds}$. E le nostre formole si possono anche scrivere:

$$\iint_{\gamma} \frac{dX}{dx} dx dy = \int_c X \frac{dy}{ds} ds = - \int X \cos nx ds$$

$$\iint_{\gamma} \frac{\partial Y}{\partial y} dx dy = \int_c Y \frac{dx}{ds} ds = - \int Y \cos ny ds$$

$$\iint_{\gamma} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy = - \int (X \cos nx + Y \cos ny) ds. \quad (1)_{bis}$$

Il ds che figura nel secondo membro è positivo, cioè s si intende crescente dal limite inferiore al superiore di detto integrale.

§ 129. — Integrali superficiali.

Se σ è una superficie sghemba proiettata biunivocamente sul piano xy (*), definita cioè da un'equazione $z = z(x, y)$, e se X è una funzione di x, y, z si dice integrale di $X dx dy$ esteso a σ l'integrale

$$\iint X[x, y, z(x, y)] dx dy,$$

esteso alla proiezione γ di σ sul piano xy . Se poi σ è somma di più superficie $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, ciascuna delle quali è rappresentata da una equazione $z = z(x, y)$, si dirà integrale di $X dx dy$ esteso a σ la somma degli integrali di $X dx dy$ estesi alla superficie σ . In altre parole tale integrale è per ogni σ_i il valore di quella funzione additiva dei pezzi di σ_i , la cui derivata è X , se come misura di un pezzo di σ_i si assume l'area della sua proiezione sul piano xy .

Si indicherà (cfr. § 121, pag. 404) poi con $\int X d\sigma$ l'integrale

$$\iint \frac{X}{|\cos(nz)|} dx dy;$$

ivi $\hat{n}z$ indica l'angolo che la normale n a σ forma con l'asse delle z [cosicchè $|\cos(nz)| = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, dove $p = z'_x$,

(*) Si suppongono finite e continue tutte le funzioni, che compaiono nei calcoli seguenti, salvo esplicita dichiarazione contraria.

$q = z'_y]$. Questo integrale si può dunque definire come quella funzione additiva dei pezzi di σ , di cui X è la derivata, quando come misura di un pezzo di σ si assume proprio la sua area.

Se τ è un campo a tre dimensioni limitato da una superficie σ formata da uno o più pezzi, sceglieremo come direzione positiva della normale n a σ in un punto di σ quella volta verso l'interno di τ .

Se X, Y, Z sono in τ funzioni finite e continue di x, y, z insieme alle $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial y}, \frac{\partial Z}{\partial z}$, si avrà:

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \frac{\partial X}{\partial x} d\tau &= \iiint_{\tau} \frac{\partial X}{\partial x} dx dy dz = - \int X \cos nx d\sigma \\ \int_{\tau} \frac{\partial Y}{\partial y} d\tau &= - \int Y \cos ny d\sigma \\ \int_{\tau} \frac{\partial Z}{\partial z} d\tau &= - \int Z \cos nz d\sigma \\ \int_{\tau} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) d\tau &= \\ &= - \int (X \cos nx + Y \cos ny + Z \cos nz) d\sigma. \end{aligned}$$

Queste formole si dimostrano in modo simile alle precedenti del § 128.

Se X, Y, Z sono le componenti di un vettore I , allora $X \cos nx + Y \cos ny + Z \cos nz$ è uguale alla sua componente I_n presa secondo la normale n a σ volta verso l'interno di τ ; la

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

si chiama la divergenza di I e si indica con $\text{div } I$.

Si ha perciò:

$$\int_{\tau} \text{div } I d\tau = - \int I_n d\sigma,$$

che è la celebre formola così detta della *divergenza*.

Il secondo membro di questa formola fondamentale nelle applicazioni (per es., all'idro- od elettrodinamica) si chiama il flusso di I attraverso a σ ; che, nelle trattazioni comuni, si suol rappresentare col numero delle linee di forza attraversanti σ .

§ 130. — Il teorema di Stokes.

Sia σ una superficie sghemba; e ne sia C il contorno (a uno o più pezzi. Supponiamo che un osservatore posto nel semispazio $z > 0$, coi piedi sul piano xy e la faccia rivolta verso il semiasse positivo delle x , abbia alla propria sinistra il semiasse positivo delle y . Fissiamo ad arbitrio il senso positivo per una normale n a σ , e con la legge di continuità per tutte le altre. Supponiamo che così il verso positivo di ogni normale sia determinato in modo univoco. Percorriamo poi ogni pezzo di C in guisa che il triedro formato dalla tangente t a C (*) in un suo punto qualunque A volta nel verso in cui si percorre C , la normale v a C in A posta nel piano tangente a σ in A e volta verso l'interno dell'area σ , e la normale n a σ in A formino un triedro tale che un osservatore, coi piedi sul piano t v e con la testa dalla stessa parte di n volto verso t , abbia alla sua sinistra la direzione v . Il triedro t v n e xyz siano cioè congrui (sovrapponibili). Siano X, Y, Z funzioni finite e continue di x, y, z insieme alle loro derivate in un campo rinchiudente σ all'interno. E supponiamo che σ sia definita da una equazione $z = z(x, y)$. Sia γ la proiezione di σ sul piano xy , e ne sia Γ il contorno. Se la normale n a σ fa con l'asse delle z sempre un angolo nz acuto, mentre un punto A percorre C nel verso sopra definito, la sua proiezione A' sul piano xy descrive Γ in guisa che un osservatore posto nel semispazio $z > 0$, che cammini in avanti con A' , lascia γ alla sua sinistra. Evidentemente:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} X(x, y, z) dx &= \int_{\Gamma} X[x, y, z(x, y)] dx = \\ &= - \iint_{\gamma} \frac{\partial X[x, y, z(x, y)]}{\partial y} dx dy = (**) \\ &= - \iint_{\gamma} \left\{ \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z} z'_y \right\} dx dy = \\ &= - \iint_{\sigma} \left\{ \frac{\partial X}{\partial y} \left| \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right| + \frac{\partial X}{\partial z} \left| \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right| \right\} d\sigma. \end{aligned}$$

(*) Supponiamo dunque che esistano n, v, t , che le loro direzioni varino con continuità.

(**) Supponiamo dunque che un piano $x = \text{cost.}$, o $y = \text{cost.}$, o $z = \text{cost.}$ incontri C in numero finito di punti.

I coseni di direzione della normale n a σ sono:

$$\pm \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \pm \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \quad (\alpha)$$

Ricordando che per l'ipotesi fatta $(zn) < \frac{\pi}{2}$, e quindi

$$\cos(nz) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

è positivo, vediamo che nelle (α) si devono assumere i segni inferiori. E quindi la nostra formola diventa:

$$\int_C X dx = \int_\sigma \left\{ \frac{\partial X}{\partial z} \cos(ny) - \frac{\partial X}{\partial y} \cos(nz) \right\} d\sigma.$$

Questa formola vale anche se $zn > \frac{\pi}{2}$, perchè questo caso si riduce al precedente cambiando il verso di n . E un tale cambiamento muta il segno dell'integrando del secondo membro, e, mutando il verso in cui si percorre C , cambia anche il segno del primo membro. Se poi σ fosse decomponibile in pezzi, ognuno dei quali è rappresentato dalla formola $z = z(x, y)$, la nostra formola si estende a tal caso coi metodi usuali.

Una formola analoga vale per $\int Y dy, \int Z dz$. Sommando le tre formole così ottenute, si trova:

$$\int_C (X dx + Y dy + Z dz) = \int_\sigma \left\{ X_1 \cos nx + Y_1 \cos ny + Z_1 \cos nz \right\} d\sigma$$

ove:

$$X_1 = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}; \quad Y_1 = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}; \quad Z_1 = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Se $Z = 0$, e σ coincide con la sua proiezione γ , cosicchè $d\sigma = dx dy$, questa formola, scambiando X con Y , si riduce alla formola (1) già trovata al § 128.

Se X, Y, Z sono le componenti di un vettore I , le X_1, Y_1, Z_1 si considerano come componenti di un altro vettore, che si chiama il *curl* I , o *rot* I . L'integrando del secondo membro della nostra formola si scrive anche $(\text{curl } I)_n$, perchè non è che la componente del *curl* I secondo la normale n .

La precedente formola ha il nome di *teorema di Stokes*.

In molti trattati tutte queste formole sono scritte con segni differenti: ciò dipende dalle differenti convenzioni adottate per i versi di n, C , ecc.

§ 131. — Differenziali esatti e potenziale.

Siano X, Y, Z tre funzioni finite e continue in un campo a tre dimensioni τ limitato da una superficie σ e tale che, se Γ è una qualsiasi linea chiusa tracciata entro τ , esista almeno una (e quindi infinite) superficie appartenente a τ , avente Γ per unico contorno, e passante per un punto qualsiasi D di τ . Ciò avviene, p. es., se τ è un campo sferico, conico, ecc. Resta escluso invece, p. es., che τ sia un toro di rivoluzione.

Siano A, B due punti qualunque di τ , che congiungiamo con una linea C tracciata entro τ .

Quando avverrà che

$$\int_{AB} (X dx + Y dy + Z dz)$$

non dipenda dalla particolare linea C scelta, ma soltanto dalle X, Y, Z e dalla posizione dei punti A, B ? Sia C' un'altra linea uscente da A e terminata a B . Dovrà essere, se con C_1 indichiamo la C' percorsa nel verso opposto (da B ad A)

$$\begin{aligned} \int_C (X dx + Y dy + Z dz) &= \int_{C'} (X dx + Y dy + Z dz) \\ &= - \int_{C_1} (X dx + Y dy + Z dz) \end{aligned}$$

ossia :

$$\int_{C+C_1} (X dx + Y dy + Z dz) = 0.$$

Ma $C + C_1$ costituisce in sostanza un'arbitraria linea chiusa appartenente al campo τ . E quindi, se σ è una qualunque superficie posta in τ e terminata a $C = C_1$, dovrà essere, con le notazioni del precedente paragrafo,

$$\int_{\sigma} (X_1 \cos nx + Y_1 \cos ny + Z_1 \cos nz) d\sigma = 0,$$

dove σ è in sostanza una qualunque superficie appartenente al campo τ . Questa uguaglianza è un'identità soltanto se :

$$X_1 = Y_1 = Z_1 = 0,$$

ossia se :

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}. \quad (1)$$

In tal caso e in tal caso soltanto:

$$V = \int_A^B (X dx + Y dy + Z dz)$$

non dipenderà dal cammino C seguito per andare da A e B . Teniamo fisso il punto A e facciamo variare B in τ . Per ogni posizione di B avremo uno e un solo valore $V(B)$ di V . Perciò V sarà una funzione delle coordinate x, y, z di B nel campo τ . Come al § 91 a pag. 304 possiamo dimostrare che il differenziale di tale funzione vale proprio $X dx + Y dy + Z dz$, cioè che:

Se il campo τ soddisfa alle condizioni enunciate, e in esso le X, Y, Z soddisfano alle (1), esiste una funzione V , le cui derivate parziali del primo ordine sono X, Y, Z , ossia che ha per differenziale $X dx + Y dy + Z dz$. Tale funzione V è, a meno del segno, il potenziale del vettore che ha per componenti X, Y, Z .

Questo teorema ci era già noto (§ 92) in casi particolari.

Nel caso che il campo τ non soddisfacesse alle condizioni enunciate si potrebbe ancora dimostrare l'esistenza di una tale funzione V . Ma una tale funzione uscirebbe dal campo delle funzioni fin qui studiate, perchè in uno stesso punto avrebbe infiniti valori. Un esempio ben noto è quello del potenziale dovuto a una corrente elettrica.

Le precedenti considerazioni si applicano senz'altro anche al caso più semplice dei differenziali $X dx + Y dy$, dove X, Y soddisfino alla $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ in un'area piana σ col contorno di un solo pezzo; restano così estesi a tali aree σ i teoremi della teoria dei differenziali esatti, di cui abbiamo discorso ai §§ 90-91.

§ 132. — Trasformazione degli integrali doppii.

(Cfr. §§ 108-108 bis).

a) Sia σ un campo del piano xy , ne sia s il contorno (*); e sia $f(x, y)$ una funzione continua in σ . Siano X, Y due funzioni derivabili delle x, y in σ

$$X = X(x, y) \quad Y = Y(x, y) \quad (1)$$

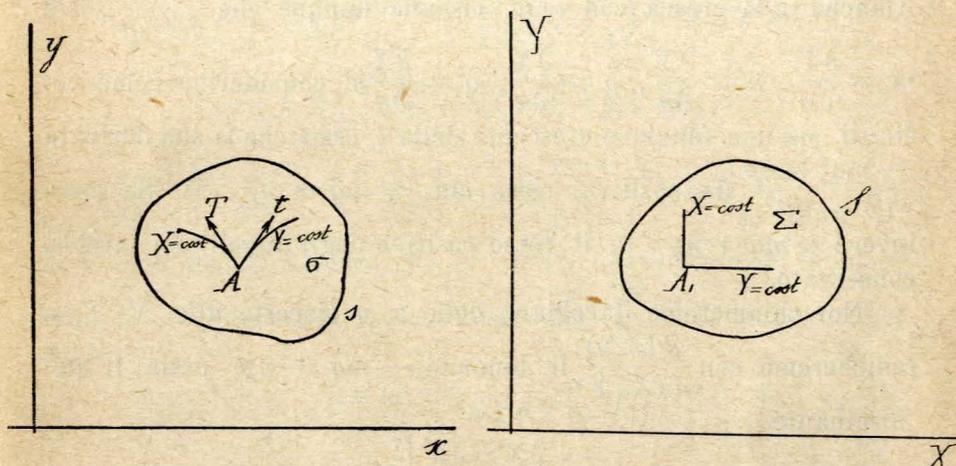
in guisa che per ogni punto A di σ siano completamente determinati i valori delle X, Y . Viceversa, dati questi valori, sia

(*) Si suppone che τ, s soddisfino alle solite condizioni enunciate ai §§ precedenti.

completamente determinato il punto A ; in altre parole si possono risolvere le (1) rispetto alle x, y :

$$x = x(X, Y) \quad y = y(X, Y) \quad (2)$$

Le (2) posseggano derivate prime e seconde finite e continue.



Assumiamo X, Y come coordinate cartesiane ortogonali in un altro piano. Ogni punto A di σ determina i corrispondenti valori delle X, Y , e quindi anche il punto A_1 del piano XY , che ha questi valori come coordinate; al variare di A in σ , varierà anche il punto A_1 , riempiendo un'area Σ . Ogni punto A_1 di Σ determinerà a sua volta, per le (2), uno e un solo punto corrispondente di σ . In questa corrispondenza biunivoca tra i punti di σ e di Σ ai punti del contorno s di σ corrisponderanno i punti del contorno S di Σ .

β) Quando avviene che in tale corrispondenza si conservi il verso (non la grandezza) degli angoli? Sia $y = \varphi(x)$ una curva γ in σ e sia $\frac{dy}{dx}$ la tangente dell'angolo ω , che la retta tangente a γ in un punto A forma con l'asse delle x . Sia Γ la curva luogo dei punti di Σ , che corrispondono ai punti di γ : e sia A_1 il punto corrispondente di A . La $\frac{dY}{dX}$ sarà la tangente dell'angolo Ω , che la retta tangente a Γ in A_1 fa con l'asse delle X . Il verso degli angoli sarà conservato, allora e allora soltanto che $\text{tg } \Omega$ cresce al crescere di $\text{tg } \omega$.

Ma ora :

$$\operatorname{tg} \Omega = \frac{dY}{dX} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} dy}{\frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{dy}{dx}}{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{dy}{dx}} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \operatorname{tg} \omega}{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} \operatorname{tg} \omega}$$

Affinchè $\operatorname{tg} \Omega$ cresca con $\operatorname{tg} \omega$, bisogna dunque che $\frac{m + nt}{p + qt}$, ove $m = \frac{\partial Y}{\partial x}$, $n = \frac{\partial Y}{\partial y}$, $p = \frac{\partial X}{\partial x}$, $q = \frac{\partial X}{\partial y}$ si considerino come costanti, sia una funzione crescente della t , ossia che la sua derivata $\frac{-mq + np}{(p + qt)^2}$ sia positiva, ossia che $-mq + np > 0$. Se fosse invece $-mq + np < 0$, il verso positivo degli angoli non sarebbe conservato.

Noi chiameremo Jacobiano delle x, y rispetto alle X, Y , e indicheremo con $\frac{d(x, y)}{d(X, Y)}$ il binomio $-mq + np$, ossia il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix},$$

che noi supporremo avere costantemente uno stesso segno.

Secondo che questo Jacobiano è positivo o negativo, il verso o senso degli angoli è, o non è, conservato, e quindi, mentre si percorre s in verso positivo (lasciando σ a sinistra), il punto corrispondente percorre S in verso positivo o negativo.

γ) Sia ora $F(x, y)$ una funzione tale che $\frac{\partial F}{\partial x} = f$. Sarà:

$$(3) \quad \int_{\sigma} f d\sigma = \int_{\sigma} \frac{\partial F}{\partial x} d\sigma = \int F dy \quad \text{per il teorema del § 128.}$$

Se indichiamo con F anche la funzione delle X, Y , che si ottiene sostituendo in $F(x, y)$ alle x, y i valori (2), sarà:

$$\int_s F dy = \int_{S_1} F \left[\frac{\partial y}{\partial X} dX + \frac{\partial y}{\partial Y} dY \right],$$

dove con S_1 indico il contorno S di Σ percorso nel verso in cui si muove un punto A_1 , il cui punto corrispondente A di σ percorre s nel verso positivo. Se dunque poniamo $\varepsilon = \pm 1$ secondo

che il precedente Jacobiano è positivo, o negativo, sarà, ricordando i teoremi del § 128, e supponendo S percorso in modo da lasciare Σ a sinistra :

$$\begin{aligned} \int_s F dy &= \varepsilon \int_s \left\{ F \frac{\partial y}{\partial X} dX + F \frac{\partial y}{\partial Y} dY \right\} = \\ &= \varepsilon \int_\Sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left(F \frac{\partial y}{\partial Y} \right) - \frac{\partial}{\partial Y} \left(F \frac{\partial y}{\partial X} \right) \right\} dX dY = \\ &= \varepsilon \int_\Sigma \left(\frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial y}{\partial Y} - \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial y}{\partial X} \right) dX dY = \\ &= \int_\Sigma \varepsilon \left\{ \frac{\partial y}{\partial Y} \left[\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial X} \right] - \frac{\partial y}{\partial X} \left[\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial Y} \right] \right\} dX dY, \end{aligned}$$

dove, nell'ultimo membro, ho di nuovo considerato F funzione delle x, y . Riducendo, e ricordando che $\frac{\partial F}{\partial x} = f$, se ne deduce infine :

$$(4) \quad \int_s F dy = \int_\Sigma \varepsilon f \frac{d(x, y)}{d(X, Y)} dX dY = \int_\Sigma f \left| \frac{d(x, y)}{d(X, Y)} \right| dX dY.$$

Le (3), (4) danno :

$$f(x, y) dx dy = \int_\Sigma f[x(X, Y), y(X, Y)] \left| \frac{d(x, y)}{d(X, Y)} \right| dX dY, \quad (5)$$

che costituisce la formola fondamentale per il cambiamento di variabili negli integrali doppi. La si confronti con la formola

$$\int_a f(x) dx = \int_D f[x(X)] \frac{dx}{dX} dX$$

dell'integrazione per sostituzione per gli integrali di una sola variabile, dove con x, X si indichino due variabili, di cui una funzione dell'altra, e con d, D segmenti corrispondenti sulle rette delle due variabili. L'analogia risulta evidente; alla $\frac{dx}{dX}$ di

quest'ultima formola corrisponde nella formola sopra scritta lo Jacobiano $\frac{d(x, y)}{d(X, Y)}$; il quale viene preso in valore assoluto,

perchè le aree Σ, σ si considerano sempre positive, mentre il segmento D può essere anche il segno opposto a δ . Se ponessimo $X = \rho, Y = \theta, x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$, il nostro Jacobiano si riduce a ρ ; e si ritorna così alla formola del § 108. (Cfr. l'oss. a pag. 353).

CAPITOLO XXI.

COMPLEMENTI VARI

§ 133. — Le serie di Fourier.

Sia una funzione $f(x)$ che ammette il periodo 2π , che cioè assume valori uguali in punti che differiscono per un multiplo di 2π . Supponiamo che $f(x)$ sia sviluppabile in una serie (di Fourier):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (1)$$

dove n assume i valori $0, 1, 2, 3, \dots$, e le a_n, b_n sono costanti da determinarsi. Osserviamo che il termine corrispondente ad $n=0$ si riduce ad a_0 ; cosicchè la (1) si può scrivere:

$$f(x) = a_0 + \sum_1^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (1)_{\text{bis}}$$

Ricordando che, se α è intero, $\int_0^{2\pi} \cos \alpha x dx$ è nullo, se $\alpha \neq 0$, ed è uguale a 2π se $\alpha = 0$, e osservando che:

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos (n+m) x dx + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos (n-m) x dx,$$

troviamo, se n, m sono interi positivi o nulli:

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 2\pi & \text{se } n = m = 0 \\ \pi & \text{se } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{se } n \neq m. \end{cases}$$

In modo simile si prova:

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n = m = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq m \\ \pi & \text{se } n = m \neq 0. \end{cases}$$

Integrando la (1)_{bis} da 0 a 2π , dopo averla moltiplicata per 1 o per $\cos mx$ o per $\sin mx$, *supposto* che le serie così ottenute sieno integrabili termine a termine, si avrà, ricordando le precedenti identità:

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} a_0 dx + \sum_1^{\infty} \left\{ a_n \int_0^{2\pi} \cos nx dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin nx dx \right\} = 2\pi a_0 \quad (*)$$

e per $m > 0$.

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos mx dx = \sum_1^{\infty} \left\{ a_n \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx dx \right\} = \pi a_m \quad (**)$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin mx dx = \sum_1^{\infty} \left\{ a_n \int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx dx \right\} = \pi b_m \quad (***)$$

Se ne deduce dunque nelle nostre ipotesi:

$$(m > 0) \left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ a_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx dx \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin mx dx \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Noi ci chiediamo:

Quando avviene che sia vera la (1)_{bis}, ove alle a_i, b_i si diano i valori definiti dalla (2)?

Si può dimostrare (Dirichlet, Dini, Lebesgue) che ciò avviene in casi molto generali. Noi lo dimostreremo nel caso particolarissimo che le $f'(x), f''(x)$ esistano e siano continue e quindi limitate

(*) Si riconosce anche direttamente che tutti i membri del secondo membro sono nulli, il primo eccettuato.

(**) In virtù delle identità scritte più sopra, nel secondo membro il coefficiente di b_n è nullo, qualunque sia m ; il coefficiente di a_n è differente da zero (ed uguale a π) solo se $n = m$.

(***) Si dimostra con metodo analogo a quello seguito per la formola precedente.

(e necessariamente ammettano anch'esse il periodo 2π). Dimostriamo intanto che in tali ipotesi la (1)_{bis} è totalmente convergente.

Sia M una costante maggiore dei valori assoluti delle $f'(x)$, $f''(x)$. Integrando per parti, si ha per $m \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\operatorname{sen} mx}{m} f(x) dx \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} mx}{m} f'(x) dx = \\ &= -\frac{1}{m\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx f'(x) dx = -\frac{1}{\pi m^2} \int_0^{2\pi} \cos mx f''(x) dx, \end{aligned}$$

donde:

$$|a_m| \leq \frac{1}{\pi m^2} \int_0^{2\pi} |\cos mx f''(x)| dx \leq \frac{1}{\pi m^2} \int_0^{2\pi} |f''(x)| dx \leq \frac{M}{\pi m^2} \int_0^{2\pi} dx$$

ossia: $|a_m| \leq 2 \frac{M}{m^2} \quad (m > 1).$

Similmente $|b_n| \leq 2 \frac{M}{n^2}$; e quindi per $n \geq 2$

$$\begin{aligned} |a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx| &\leq \frac{4M}{n^2} < \frac{4M}{n(n-1)} = \\ &= 4M \left\{ \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right\}. \end{aligned}$$

La serie a termini positivi e costanti $\sum_2^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$ converge, perchè la somma dei primi suoi k termini vale $1 - \frac{1}{k}$, che tende ad 1 per $k = \infty$; quindi sia la $\sum_2^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$, che la (1)_{bis} sono totalmente convergenti.

Sia $\varphi(x)$ uguale al secondo membro di (1)_{bis}. Gli integrali di $\varphi(x)$, $\varphi(x) \cos mx$, $\varphi(x) \operatorname{sen} mx$ si ottengono dalla (1)_{bis} moltiplicandola rispettivamente per 1, $\operatorname{sen} mx$, $\cos mx$, e integrando poi termine a termine, perchè la (1)_{bis} è convergente totalmente. Tali integrali sono perciò uguali a quelli di

$$f(x), f(x) \cos mx, f(x) \operatorname{sen} mx.$$

Cosicchè, posto $\psi(x) = f(x) - \varphi(x)$, sarà:

$$\int_0^{2\pi} \psi(x) dx = 0; \int_0^{2\pi} \psi(x) \cos mx dx = 0; \int_0^{2\pi} \psi(x) \operatorname{sen} mx dx = 0. \quad (3)$$

Il nostro teorema sarà dimostrato, se riusciamo a dedurre che la $\phi(x) = 0$. Dalle (3) si ha che, qualunque siano le costanti b_i, c_i , è:

$$\int_0^{2\pi} \phi(x) \left\{ b_0 + \sum_{r=1}^n b_r \cos rx + \sum_1^n c_r \sin rx \right\} dx = 0 \quad (4)$$

e quindi, per il risultato dell'es. 15°, pag. 58, è:

$$\int_0^{2\pi} \phi(x) F(x) dx = 0, \quad (5)$$

se $F(x)$ è un qualsiasi polinomio nelle $\sin x, \cos x$ a coefficienti costanti. Supponiamo ora che la funzione (continua) $\phi(x)$ sia differente da zero in un punto A ; essa sarà pure differente da zero in tutto un intorno di A , p. es. nell'intervallo (α, β) , dove sarà, p. es., positiva, ossia avrà un minimo m positivo. Vogliamo dimostrare che ciò è assurdo. Poniamo:

$$F(x) = \left\{ 1 + \cos \left[x - \frac{\alpha + \beta}{2} \right] - \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right\}^n, \quad (6)$$

dove n è un qualsiasi intero positivo. La espressione tra $\{ \}$ supererà sempre $-\cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) > -1$ e sarà maggiore di 1 soltanto quando l'angolo x varia nell'intervallo (α, β) .

Indicheremo con N il massimo finito della $\phi(x)$. L'intervallo $(0, 2\pi)$ si può decomporre nei seguenti intervalli parziali:

1° L'intervallo (α, β) .

2° Un intorno di α di lunghezza non superiore ad $\epsilon = \frac{m}{4N} |\beta - \alpha|$ (*).

3° Un intorno di β di lunghezza non superiore ad $\epsilon = \frac{m}{4N} |\beta - \alpha|$ (*).

4° La parte residua γ di lunghezza

$$\gamma \geq 2\pi - |\beta - \alpha| - 2\epsilon.$$

Nell'intervallo (α, β) è $\phi(x) \geq m > 0, F(x) > 1$; quindi l'integrale di $\phi(x) F(x)$ esteso a tale intervallo supera $m |\beta - \alpha|$.

(*) Si suppongono questi intorno essere uno destro, l'altro sinistro, così, da essere entrambi esterni all'intervallo (α, β) .

Nei due intorni ricordati di α e β è $|F(x)| \leq 1$, $|\psi(x)| < N$. Quindi l'integrale di $\psi(x)F(x)$ esteso a questi due intorni non supera $2\varepsilon N = \frac{m}{2}|\beta - \alpha|$.

Consideriamo ora la parte residua γ . In γ è sempre $|\psi(x)| \leq N$. Invece $1 + \cos\left[x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right] - \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$ è sempre minore di 1 in valore assoluto: cioè il suo massimo valore assoluto è un numero $\sigma < 1$. Quindi la $F(x)$ definita dalla (6) è minore di σ^n . E l'integrale di $\psi(x)F(x)$ esteso a γ non supererà $\gamma N \sigma^n$, e quindi, poichè $\sigma < 1$, diventa piccolo a piacere, p. es. minore di $\frac{m}{4}|\beta - \alpha|$, quando n è abbastanza grande.

L'integrale di $\psi(x)F(x)$ esteso a tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$ è uguale alla somma degli integrali di $\psi(x)F(x)$ estesi ai citati intervalli parziali; ed uguale perciò alla somma:

1° di un numero positivo maggiore di $m|\beta - \alpha|$;

2° di un numero che in valore assoluto non supera $\frac{m}{2}|\beta - \alpha|$;

3° di un numero che in valore assoluto non supera $\frac{m}{4}|\beta - \alpha|$.

Esso è dunque maggiore di $|\beta - \alpha|$ moltiplicato per $m - \frac{m}{2} - \frac{m}{4} = \frac{m}{4}$; ciò che è assurdo, perchè noi sappiamo che esso è nullo. È dunque assurdo ammettere che $\psi(x)$ non sia identicamente nullo.

Più generalmente si dimostra che: *La (1)_{bis}, i cui coefficienti siano determinati da (2) in un punto $x = a$ ove $f(x)$ sia discontinua, ha per somma $\frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow a+} f(x) + \lim_{x \rightarrow a-} f(x) \right]$, se questi due limiti esistono e sono finiti [purchè esistano e siano finiti anche i $\lim_{x \rightarrow a \pm} f'(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a \pm} f''(x)$]. Anche questo risultato vale del resto in casi estremamente più generali.*

§ 134. — Elementi del calcolo delle variazioni.

α) La teoria dei massimi e minimi si propone di trovare il valore della variabile (o i valori delle variabili) che rendono massima o minima una data funzione. Ma talvolta si presentano problemi di massimo o di minimo di un altro tipo: il problema di cercare la funzione $\varphi(x)$ o la curva $y = \varphi(x)$ che rendono minimo qualche integrale, p. es. la curva $y = \varphi(x)$ che passa per due punti A, B di ascissa a, b e che ha la minima lunghezza, ossia che rende minimo $\int_a^b \sqrt{1 + \varphi'^2(x)} dx$, oppure la curva passante per due punti A, B posti ad altezze differenti, tale che sia minimo il tempo impiegato da un grave che cade da A a B lungo la curva, ecc., ecc.

Si voglia trovare la funzione y della x , che rende minimo l'integrale $\int_a^b f(x, y, y') dx$, e che assume valori dati *a priori* per $x = a, x = b$. Si ammetta che tale funzione possenga derivate prime e seconde finite e continue, che per la f e derivate valgano nel campo che esamineremo, tutte le proprietà (continuità, ecc.) necessarie per la validità dei calcoli seguenti.

Se $y = \varphi(x)$ è la funzione cercata (supposto che esista e possenga derivate prime e seconde finite e continue), e se $z(x)$ è una funzione con derivate prima e seconda finite e continue, nulla per $x = a$ e per $x = b$, allora, qualunque sia il valore della costante t , la funzione $\varphi(x) + tz(x)$ assume per $x = a$ e per $x = b$ i valori prefissati; e il nostro integrale, ove si ponga $\varphi(x) + tz(x)$ al posto di y , ossia

$$\int_a^b f[x, \varphi(x) + tz(x), \varphi'(x) + tz'(x)] dx$$

diventa una funzione di t , che ha un minimo per $t = 0$.

Sarà dunque (§ 70, pag. 226):

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f[x, \varphi(x) + tz(x), \varphi'(x) + tz'(x)] dx = 0 \quad \text{per } t = 0$$

ossia (§ 89, pag. 296)

$$\int_a^b \frac{d}{dt} f[x, \varphi(x) + tz(x), \varphi'(x) + tz'(x)] dx = 0 \quad \text{per } t = 0$$

che, per il teorema del § 83, si può scrivere :

$$\int_a^b \left\{ z(x) \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y} + z'(x) \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} \right\}_{y=\varphi+tz} dx = 0 \quad \text{per } t = 0.$$

E, osservando che per $t=0$ la $\varphi + tz$ si riduce alla φ , questa equazione ci dice che la funzione $y = \varphi(x)$ cercata soddisfa alla

$$\int_a^b z(x) \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y} dx + \int_a^b z'(x) \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} dx = 0.$$

Integrando per parti il secondo di questi due integrali, esso diventa :

$$\left[z(x) \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} \right]_a^b - \int_a^b z(x) \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} \right] dx.$$

Il primo termine è nullo, perchè $z(x) = 0$ per $x = a$ e per $x = b$. La nostra equazione si riduce così alla :

$$\int_a^b z(x) \left\{ \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} \right] \right\} dx = 0 \quad (1)$$

che deve valere, qualunque sia la funzione derivabile $z(x)$ nulla per $x = a$ e per $x = b$. Io dico che la quantità tra $\{ \}$ dovrà esser nulla, che cioè

$$\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} \right] = 0. \quad (2)$$

Se infatti così non fosse, ed essa fosse differente da zero, p. es. positiva in un punto $x = c$, essa sarebbe positiva in tutto un intorno (α, β) di c . Porremo in tal caso

$$z(x) = (x - \alpha)^4 (x - \beta)^4 \text{ nell'intervallo } (\alpha, \beta),$$

$z(x) = 0$ in tutti i punti di (a, b) esterni all'intervallo (α, β) .

La funzione $z(x)$ così definita soddisfa alle condizioni citate.

Poichè $z(x)$ è nullo fuori dell'intervallo (α, β) , la (1) si riduce alla

$$\int_\alpha^\beta z(x) \left\{ \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} \right) \right\} dx = 0;$$

ciò che è assurdo, perchè nelle attuali ipotesi, tanto $z(x)$ quanto la quantità tra graffe $\{ \}$ sono positive in ogni punto interno all'intervallo (α, β) di integrazione, cosicchè l'integrale è positivo e differente da zero. La nostra ipotesi è quindi assurda; vale

cioè identicamente la (2), che si può scrivere esplicitamente (§ 83) così:

$$\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' = 0 \quad (2)_{\text{bis}}$$

ed è quindi un'equazione differenziale del secondo ordine per la funzione cercata y della x . L'integrale della (2) o (2)_{bis} conterrà due costanti arbitrarie, che si possono di solito determinare imponendo a tale integrale le condizioni di assumere i valori prefissati per $x = a$, o per $x = b$.

Non ci occuperemo delle ulteriori condizioni a cui deve soddisfare la funzione cercata, affinché renda effettivamente minimo il nostro integrale.

β) Talvolta ci si propone di cercare la funzione y , che rende massimo o minimo l'integrale $\int_a^b \Phi(x, y, y') dx$, tra le funzioni y che assumono valori prefissati per $x = a$, e per $x = b$, e che soddisfano a un'equazione $\int_a^b \varphi(x, y, y') dx = k$, dove k è una costante prefissata *a priori*. Noi ci accontenteremo di enunciare che per tali problemi continua a valere il metodo del moltiplicatore indicato al § 85, δ, pag. 289. Che cioè si trova una condizione *necessaria*, a cui deve soddisfare la funzione y cercata nel modo seguente. Si indichi con λ una costante per ora indeterminata; e, posto $f(x, y, y') = \Phi + \lambda \varphi$, si scriva la (2), come se si volesse cercare la funzione y che rende minimo $\int_a^b f(x, y, y') dx$. L'integrale della (2) conterrà due costanti arbitrarie di integrazione, oltre alla costante λ . Queste tre costanti si determinano di solito, ricordando che la y per $x = a$ o per $x = b$ deve assumere i valori prefissati, e che deve essere $\int_a^b \varphi(x, y, y') dx = k$.

ESEMPLI.

1° La teoria delle serie di Fourier si può interpretare fisicamente nel seguente modo. Se x indica il tempo, la $y = f(x)$, che ammette il periodo 2π , può servire a misurare qualche fenomeno periodico (vibrazione di un punto, di una corda, vibrazione luminosa, ecc.). Una equazione $y = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ (n intero positivo, a_n, b_n costanti) si ritiene, come è noto dalla

fisica, come misurante un fenomeno periodico *elementare*. La y testè definita si riproduce, se l'angolo nx aumenta di 2π , ossia se x aumenta di $\frac{2\pi}{n}$. In altre parole, in un intervallo di am-

piezza 2π , tale y si riproduce n volte, misura cioè un fenomeno oscillatorio, che in un intervallo di ampiezza 2π compie n oscillazioni. Il nostro risultato si può dunque enunciare così:

Ogni fenomeno periodico, che si riproduce cioè dopo 2π unità di tempo si può decomporre nella somma (serie) di infiniti fenomeni periodici elementari, che nello stesso intervallo di tempo compiono rispettivamente 1, 2, 3, 4, oscillazioni.

Per questa ragione si decompongono, p. es., i suoni emessi da uno strumento musicale nella cosiddetta nota fondamentale e nei suoni armonici.

Oss. 1^a. Ponendo $z = \frac{T}{2\pi}x$, e indicando con z il tempo, si passa allo studio di fenomeni periodici, che ammettono un qualsiasi periodo T (anche distinto da 2π). Lo stesso scopo si potrebbe ottenere variando l'unità di misura per il tempo.

2^a Trovare la minima distanza AB dal punto $A = (a, \alpha)$ a punto (b, β) .

Ris. Si deve cercare il minimo di $\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$, ossia porre nella (2) del § 134 $f = \sqrt{1 + y'^2}$. La (2) diventa così: $\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$, ossia $\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{cost.}$, o anche $y' = m$, dove m è una costante arbitraria. Quindi $y = mx + n$, dove n è un'altra costante arbitraria; la curva cercata è una retta. Le costanti m, n si determinano scrivendo che essa passa per A e per B .

3^a Dati in un piano verticale π due punti A, B , trovare la curva passante per A e per B , tale che un grave, cadendo da A a B lungo questa curva, impieghi il minimo tempo possibile.

Assumiamo in π il punto A come origine, un asse delle x orizzontale, un asse delle y verticale volto verso il basso.

Supponiamo che la curva cercata abbia un'equazione $y = y(x)$. Noi sappiamo che la forza viva $\frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ del grave di massa 1 (con s indico l'arco percorso dal grave) è uguale al lavoro

compiuto dal grave nel cadere dal punto A , cioè è uguale alla proiezione y sulla verticale dello spazio percorso moltiplicata per la solita costante g . Ossia:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g y, \quad dt = \frac{ds}{\sqrt{2g y}} = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g y}} dx.$$

Cosicchè (se $b \neq 0$ è l'ascissa di B) il tempo impiegato dal nostro grave nella caduta è

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} dx.$$

Posto dunque nella (2) $f = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}$, la (2) diventa:

$$\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y \sqrt{y}} + \frac{d}{dx} \left\{ \sqrt{\frac{y}{1 + y'^2}} \frac{y'}{y} \right\} = 0, \quad \text{che si può scrivere}$$

assumendo, com'è lecito, la y a variabile indipendente:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{y^2} \frac{\sqrt{y(1 + y'^2)}}{y'} + \frac{d}{dy} \left\{ \frac{y'}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} \right\} = 0.$$

Posto $\frac{y'}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} = z$, se ne trae $\frac{1}{2} \frac{1}{y^2} \frac{1}{z} + \frac{dz}{dy} = 0$,

ossia $2z dz + \frac{dy}{y^2} = 0$.

Integrando si avrà $z^2 = \frac{1}{y} - m$ ($m = \text{cost.}$), donde:

$$\frac{y'^2}{y(1 + y'^2)} = \left(\frac{1}{y} - m\right) \text{ ossia } \frac{1 + y'^2}{y'^2} = \frac{1}{1 - my}, \quad x = \int_0^y \sqrt{\frac{my}{1 - my}} dy.$$

Nelle nostre ipotesi (B più basso di A , asse delle y volto in basso) la y lungo la curva cercata è positiva. Non può dunque essere $m < 0$, perchè altrimenti $1 - my > 0$, e il radicale sarebbe immaginario.

Dunque $m > 0$, e si può porre $m = \frac{1}{2h^2}$ ($h = \text{cost.}$).

Di più $1 - my > 0$ ossia $\frac{1}{y} > m = \frac{1}{2h^2}$; e si può porre $\frac{1}{y} = \frac{1}{2h^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{h} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right]^2$, dove $0 \leq \varphi \leq \pi$ è una nuova variabile di integrazione. Si ha:

$$y = 2h^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = h^2 (1 + \cos \varphi). \quad (\alpha)$$

E quindi, sostituendo nel nostro integrale, e osservando che

$$\sqrt{\frac{my}{1-my}} = \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2},$$

si trova, osservando che $\varphi = \pi$ per $y = 0$,

$$x = h^2 \pi - h^2 (\varphi + \operatorname{sen} \varphi). \quad (\beta)$$

Le (α) , (β) definiscono i punti della curva cercata in funzione del parametro φ . Tale curva è una *cicloide*.

4^a. Tra le curve $y = y(x)$ passanti per i punti di ascissa a e b dell'asse delle x , e di lunghezza prefissata L , trovare quella che con l'asse delle x racchiude l'area massima.

RIS. In § 134, β , si deve porre $\varphi = \sqrt{1+y'^2}$, $\Phi = y$. La curva cercata deve dunque soddisfare a (2) ove si ponga $f = y + \lambda \sqrt{1+y'^2}$ ($\lambda = \operatorname{cost.}$), cioè alla

$$1 = \lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right), \text{ donde:}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\lambda} x + \mu \quad (\mu = \operatorname{cost.}).$$

Il primo, e quindi anche il secondo membro, sono minori di 1. Posto perciò

$$\frac{1}{\lambda} x + \mu = \operatorname{sen} \varphi \quad (\varphi = \text{nuova variabile}),$$

se ne dedurrà $\frac{dy}{dx} = y' = \operatorname{tg} \varphi$.

Quindi $dy = \operatorname{tg} \varphi dx = \lambda \operatorname{tg} \varphi \cos \varphi d\varphi = \lambda \operatorname{sen} \varphi d\varphi$ ed $y = -\lambda \cos \varphi + \nu$ ($\nu = \operatorname{cost.}$). Eliminando φ dalle due equazioni trovate, si trova $(x + \lambda\mu)^2 + (y - \nu)^2 = \operatorname{cost.}$ La curva cercata è dunque un cerchio.

§ 135. — Alcune funzioni di variabile complessa.

α) Le funzioni e^z , $\cos z$, $\sin z$ sono definite per tutti i valori della z da una serie di potenze, e si possono considerare perciò funzioni della z , anche se z è complesso.

β) Dimostriamo che anche una frazione razionale, cioè un quoziente di polinomi di una variabile z è pure una funzione della variabile z , cioè è sviluppabile in serie di potenze. Se noi introduciamo nei calcoli *anche numeri complessi*, l'enunciato del teor. a pag. 250-251 si può semplificare provando che ogni frazione $\frac{P(z)}{Q(z)}$ è somma di un polinomio, di frazioni semplici del tipo $\frac{A}{z-a}$, (*) e della derivata di un'altra frazione $\frac{V(z)}{W(z)}$. Applicando a quest'ultima lo stesso teorema, e così continuando, si prova che ogni frazione $\frac{P(z)}{Q(z)}$ è somma di un polinomio, di frazioni semplici del tipo $\frac{A}{z-a}$, e di derivate di tali frazioni semplici.

Basterà dunque provare che $\frac{A}{z-a}$, o, ciò ch'è lo stesso, che $\frac{1}{z-a}$ è sviluppabile in serie di potenze. Se $z_0 \neq a$ è un numero qualsiasi, si ha appunto (per la nota formola delle progressioni geometriche)

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-a} &= \frac{1}{(z-z_0) - (a-z_0)} = \frac{1}{z_0-a} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{a-z_0}} = \\ &= \frac{1}{z_0-a} \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} \frac{1}{(a-z_0)^n} (z-z_0)^n \right\} \end{aligned}$$

nel cerchio definito dalla: $|z-z_0| < |a-z_0|$, cioè entro il cerchio di centro z_0 , la cui periferia passa per il punto a .

(*) La dimostrazione del § 76 continua a valere, se ad una frazione del tipo $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ (il cui denom., uguagliato a zero, abbia radici complesse b, c) sostituiamo una espressione del tipo $\frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$ (con B, C costanti).

Se ne deduce facilmente che una frazione razionale data ad arbitrio è sviluppabile in serie di potenze della $z - z_0$ in ogni cerchio di centro z_0 , il quale non contenga punti ove la frazione diventa singolare (in cui quindi il denominatore si annulla). (Cfr. il teorema di Cauchy citato in nota a piè di pag. 209).

§ 136. — Integrazione meccanica.

È noto che il calcolo dell'integrale di una funzione si può eseguire per via grafica (nota a pag. 325); con metodo grafico si possono risolvere le equazioni algebriche. Le scienze applicate danno numerosi e svariati metodi di calcolo grafico.

Accanto ad essi esistono metodi meccanici per i calcoli più molteplici: ci basti ricordare le macchine così note per eseguire le operazioni fondamentali dell'aritmetica.

Più semplici assai di esse sono gli strumenti che, pure ricorrendo al disegno, servono ad eseguire le integrazioni, e che si dividono in due categorie: gli integrati, che servono a dare gli integrali indefiniti, ed i planimetri, che calcolano gli integrali definiti, o più generalmente le aree delle figure piane. Di planimetri esistono tipi svariaticissimi; e noi ne studieremo, a titolo di esempio, soltanto due. Avverto che noi studiamo i tipi teoricamente più semplici; ma non parliamo del semplicissimo planimetro di Prytz, perchè non è troppo preciso.

A) Integrofo di Abdank-Abakanowicz.

Al § 73, pag. 238, abbiamo già citato alcune applicazioni di questo integrofo al calcolo numerico delle radici di una equazione algebrica. Tale apparecchio risolve il problema seguente: *Disegnata una curva $y = f(x)$, tracciare una qualsiasi delle curve $y = \int f(x) dx$.* Esso è fondato sul fatto sperimentale che se una rotella ruota senza strisciare su un foglio di carta ed è sempre contenuta in un piano perpendicolare al foglio stesso, allora il punto di contatto della rotella e del foglio descrive una curva le cui tangenti sono date dall'intersezione del piano del foglio col piano della rotella. Ecco una descrizione soltanto schematica di detto integrofo.

Sia $y = f(x)$ una curva C ; e sia C' la curva $y = F(x)$ dove $F(x) = \int f(x) dx$, cosicchè $f(x) = F'(x)$. Sia $x = a$ un punto A' dell'asse delle x e siano A_1, A_2 i punti corrispondenti

delle curve $y = F(x) = f'(x)$ ed $y = f(x)$. Sia B quel punto dell'asse delle x tale che il segmento $BA' = 1$ (*).

Il coefficiente angolare della tangente alla curva $y = f(x)$ per $x = a$, ossia nel punto A_2 , vale $f'(a) = F(a)$.

Il coefficiente angolare della retta BA_1 vale :

$$\frac{A'A_1}{BA'} = \frac{F(a)}{1} = F(a).$$

Queste due rette hanno dunque ugual coefficiente angolare, e sono perciò parallele.

Supponiamo di aver disegnata la curva $y = F(x)$ e di voler tracciare la curva $y = f(x)$, mentre una punta scrivente A_1 descrive la $y = F(x)$. L'integrafo porta un parallelogrammo articolato, un lato λ_1 del quale coincide sempre con la retta BA_1 , ipotenusa del triangolo rettangolo $BA'A_1$, che ha un cateto BA' posto sull'asse della x ed eguale a 1. Il lato λ_2 opposto del parallelogramma sarà costantemente una retta parallela a BA_1 ; esso porta una rotella A_2 tenuta sul prolungamento di $A'A_1$, e in un piano passante per λ_2 e normale al piano del foglio. Il punto A_2 di contatto di tale rotella descrive dunque una curva $y = f(x)$ che ha in A_2 per tangente la retta λ_2 parallela a λ_1 . Il coefficiente angolare $f'(x)$ di tale tangente è così uguale al coefficiente angolare $F(x)$ di λ_1 . È perciò, come si voleva, $f'(x) = F(x)$. La indeterminazione di una costante additiva per la funzione $f(x)$ corrisponde nell'integrafo all'arbitrarietà della posizione iniziale della rotella lungo l'ordinata di A_1 .

L'integrafo di Abdank è costruito in modo diverso per assicurarne il buon funzionamento. Il principio fondamentale è però quello da noi esposto.

B)₁ *Un primo tipo planimetro.*

Noi descriviamo ora un planimetro con un disco. Esso è poco pratico, e l'ingegnere di solito gli sostituisce il planimetro di Corradi a sfera e cilindro, senza filo. Ma, poichè la teoria di quest'ultimo è affatto analoga a quella che qui esporremo, e che presenta caratteri di speciale semplicità, così resta giustificata la scelta del planimetro, che qui descriviamo.

Tale planimetro consiste essenzialmente in un disco circolare piano D di centro O , il quale può essere dotato di due movimenti: uno di traslazione parallelamente all'asse della y ,

(*) Il lettore disegni la figura.

e uno di rotazione intorno al suo asse centrale O . Per poter scorrere parallelamente all'asse y il disco in questione è guidato generalmente da tre piccole rotaie. Attorno all'asse centrale del disco è avvolto un filo l ; quando si tende il filo e lo si svolge dall'asse, il disco acquista un movimento di rotazione e l'angolo di rotazione è proporzionale all'allungamento del filo. Questo filo da una speciale disposizione strumentale (un'asta) è tenuto sempre parallelo all'asse delle x .

Quando l'estremità mobile C del filo ha un movimento parallelo all'asse delle y , tutto l'apparecchio ad esso solidale riceve pure un tale movimento; e il disco di asse O non ruota.

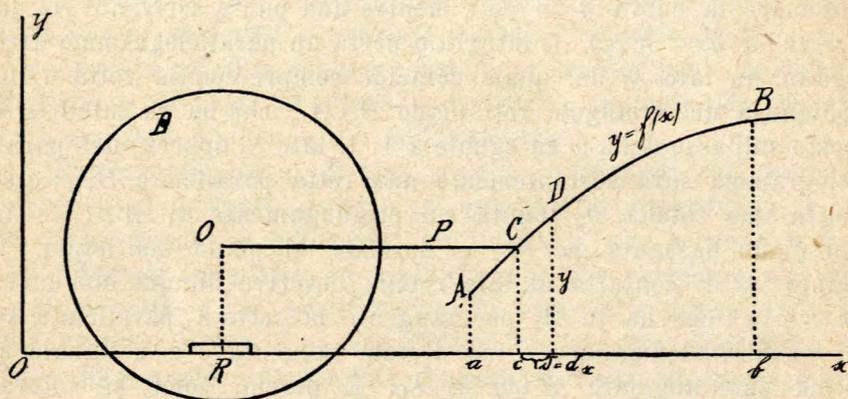


Fig. 47.

Quando invece il punto C riceve un movimento parallelo all'asse delle x , l'asse O del disco rimane fisso, il filo si allunga e si svolge imprimendo un movimento di rotazione al disco di un angolo proporzionale allo spostamento ricevuto da C .

Al piede della perpendicolare calata dal centro O del disco D all'asse delle x vi è una rotellina R tangente a D , posta in quel piano perpendicolare al piano del disco, che passa per l'asse delle x , e tenuta in contatto col disco stesso. Tale rotellina è munita di un contagiri. Col suo moto di rotazione il disco D imprimerà ad R pure un movimento di rotazione; un contagiri misura il numero dei giri e frazioni di giro compiuti da R .

Vediamo che cosa avviene quando l'estremità mobile C del nostro filo (che porta una punta) percorre una curva $y = f(x)$.

Supponiamo, p. es., la $f(x)$ crescente come nel caso della figura. Man mano che la punta C cammina sulla curva, il filo si innalza e si allunga verso destra, così che il disco si innalza e insieme ruota.

Dico che l'integrale $\int_a^b f(x) dx$ è proporzionale al numero di giri, contato dal contagiri, compiuti dalla rotellina R , mentre la punta C percorre il pezzo di curva $y = f(x)$ che si proietta nel segmento (a, b) .

Il coefficiente di proporzionalità varierà poi secondo le dimensioni dell'apparecchio e le unità di misura scelte. Dimosteremo il teorema, usando senz'altro locuzioni abbreviate.

Osserviamo anzitutto che, mentre il disco si innalza o si abbassa parallelamente all'asse delle y , la rotella non gira.

Affinchè la rotella R giri bisogna che:

1° Il filo OC si svolga dall'asse O e faccia rotare il disco D .

2° La rotella non si trovi sul centro O del disco, ma sia eccentrica.

Ed è anzi ben evidente che l'angolo di cui gira la rotella è proporzionale a due quantità:

α) l'allungamento dei fili OC ; β) la distanza OR da R al centro O del disco D .

Dividiamo ora l'intervallo (a, b) in infiniti segmentini infinitesimi; e sia δ uno di questi intervallini. In esso la y si può considerare come costante (cfr. § 99); e mentre C percorre il tratto CD di curva corrispondente, la distanza OR sarà appunto uguale alla y di un punto di questo pezzo di curva.

L'allungamento del filo sarà uguale alla lunghezza dx della proiezione δ del nostro pezzo di curva sull'asse della x ; e quindi, per quanto dicemmo, l'angolo di cui gira la rotella R (mentre C percorre il tratto CD di curva che si proietta in δ) è proporzionale tanto alla y che a dx , e perciò, a meno di un fattore costante h , che dipende dalle dimensioni dell'apparecchio, è uguale al prodotto ydx (*). Il numero dei giri compiuto da R , mentre l'estremità C del filo descrive tutto il pezzo di curva $y = f(x)$ che si proietta nell'intervallo (a, b) , è proporzionale alla somma degli angoli di cui R ruota nei singoli intervallini parziali δ . Tale numero di giri è dunque proporzionale a

$$\int_a^b f(x) dx, \quad \text{c. d. d.}$$

(*) In modo preciso esso è compreso tra i prodotti di hdx per il massimo o il minimo di y in δ . L'allievo completi questa dimostrazione senza sussidio di locuzioni abbreviate.

Questo planimetro può in modo affatto simile servire al calcolo dell'area non solo di rettangoloidi, ma di figure piane qualsiasi, come il lettore può facilmente dimostrare.

B)₂ *Planimetri di Amsler.*

Un'asta rettilinea AB porti a un estremo A una rotella R posta in un piano normale ad AB e girevole intorno al suo centro A . Un punto C della retta AB sia costretto a muoversi su una linea prefissata L , mentre il punto B descrive un cammino chiuso Γ posto nel piano di L , e l'asta ritorna alla posizione iniziale. In tale movimento la rotella R sia appoggiata al foglio F del disegno, e compia un certo numero N di giri. Si vuole, conoscendo N , dedurne l'area racchiusa da Γ .

A seconda della forma di L , cambia il nome dato al planimetro: rettilineo, se L è una retta; polare, se L è un cerchio; curvilineo negli altri casi.

Per semplicità occupiamoci del primo caso, supponendo che:

α) Il cammino Γ non interseca la linea (guida) L ;

β) Il punto C sia interno al segmento AB .

Supponiamo dapprima che il cammino Γ sia composto di segmenti δ paralleli alla retta L e di archi γ di cerchi col centro su L , e con raggio uguale al segmento CB . Quando B descrive un δ , la nostra asta non muta di direzione e il segmento CB descrive un parallelogrammo Δ ; quando B descrive un γ , la nostra asta gira di un angolo φ , e il segmento CB descrive un settore di area $\frac{1}{2} CB^2 \varphi$. Ma, poichè alla fine del movimento l'asta è tornata alla posizione iniziale, la somma degli angoli φ percorsi in un senso è uguale alla somma degli angoli φ percorsi nel verso opposto, e i giri eseguiti corrispondentemente dalla R in un verso elidono quelli eseguiti nel verso opposto. E così pure i settori descritti da CB , mentre l'asta ruota in un verso, hanno complessivamente un'area uguale a quella dei settori descritti da CB , mentre l'asta ruota nel verso opposto.

Ricordando questo, è facile riconoscere che l'area racchiusa da Γ vale la differenza tra le aree dei parallelogrammi descritti da CB , quando B descrive un segmento δ , muovendosi, p. es., da sinistra a destra, e quelli descritti da CB , quando B descrive un segmento δ , muovendosi, p. es., da destra a sinistra. Quando B descrive un δ , l'asta ACB si muove parallelamente

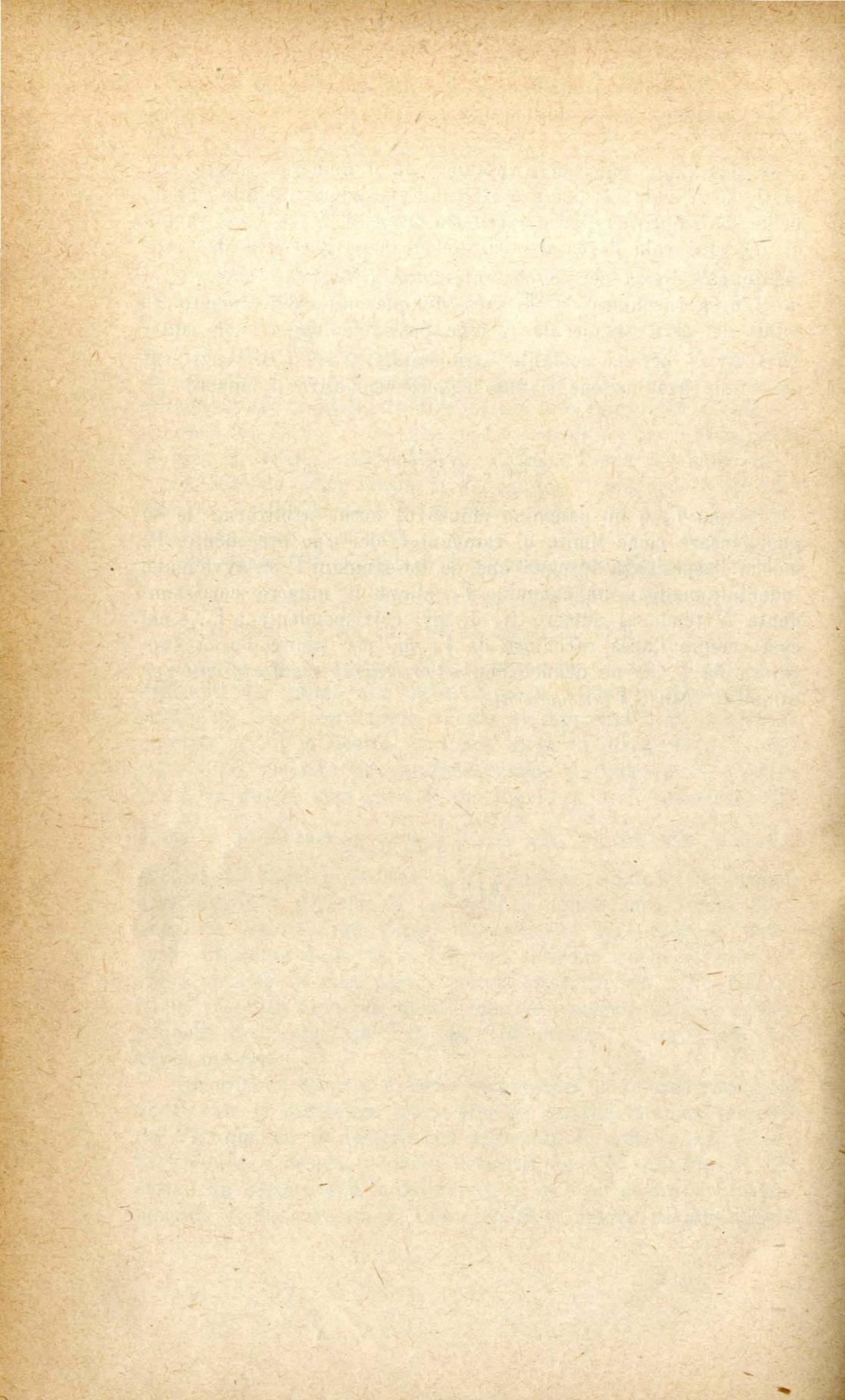
a sè stessa, e l'esperienza insegna che il numero dei giri compiuti da R vale la distanza d tra la posizione iniziale e finale della sbarra divisa per la periferia $2\pi r$ di R (se r è il raggio di R), cioè vale l'area del parallelogrammo descritto dal segmento CB divisa per la costante $2\pi r \cdot \overline{CB}$.

L'area racchiusa da Γ sarà dunque data dal numero N totale dei giri eseguiti da R (che possiamo leggere col contagiri) diviso per la costante strumentale $2\pi r \cdot \overline{CB}$. Anzi con opportuna graduazione si può leggere senz'altro il numero

$$\frac{1}{2\pi r \cdot \overline{CB}} N.$$

Se poi Γ_1 è un cammino chiuso di forma arbitraria, lo si può pensare come limite di cammini Γ del tipo precedente. E, poichè l'esperienza insegna che, se dei cammini Γ si avvicinano indefinitamente a un cammino Γ_1 , allora il numero corrispondente N tende al numero N_1 di giri corrispondente a Γ_1 , e nei casi comuni l'area racchiusa da Γ_1 ha per limite l'area racchiusa da Γ , se ne deduce che *il precedente risultato vale per cammini chiusi Γ in generale.*

FINE.



INDICE

dei riassunti e degli esempi più notevoli.

[I numeri si riferiscono alle pagine; i numeri aggiunti talvolta come indici danno il numero che nel testo ha l'esempio citato]

TABELLA

	Pagina
delle regole di derivazione e delle derivate delle funzioni elementari	204 e seg.
degli integrali indefiniti fondamentali	244 e seg.
dei metodi di integrazione	259

ESEMPI NOTEVOLI.

	Pagina
Combinazioni con ripetizione	57 ₁₂
Formole di addizione, ecc. per le funzioni goniometriche	56 _{13, 14} e 57 ₁₅
Radici n^{esime} di ± 1 per $n = 2, 3, 4, 5$	57 ₂₀ e 61 ₃₃
Equazioni di quarto grado	41
Angolo di due rette sghembe	79 ₁
Determinanti ortogonali del terz'ordine	80 ₂
Determinanti reciproci	80 ₃
Risultante di due equazioni	54 e 89 ₁
Formola d'interpolazione con polinomii	48 e 90
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n}$	151 ₁
$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$	127 ₁
Interesse continuo	127 ₂
Area di un rettangoloide definito da un'iperbole equilatera	128 ₃
Teorema di de l'Hôpital	200
Interpolazione (errore commesso nella —)	201
Criterio di convergenza di Cauchy	201
Resto di Cauchy e teoremi di Bernstein e di Pringsheim per la serie di Taylor	214 e seg.

	Pagina
Sviluppi in serie di e^x , $\text{sen } x$, $\text{cos } x$, $\log(1+x)$, $(1+x)^m$, $\text{arct } x$, π , arcsen x	216 e seg.
Principio di Fermat per la rifrazione della luce	229 ₂
La curva $y = a x^3 + b x^2 + c x + d$ e l'equazione di terzo grado	233
Istanti in cui un punto mobile ha velocità massima o minima	234
Volume dell'ellissoide	344
Durata dell'oscillazione di un pendolo	266
Integrazione grafica	325
Retta tangente ad una conica	285
Area di un settore di curva in coordinate polari	312 ₂
Prima conseguenza delle leggi di Keplero	313
Centro di gravità	330
Spinta idrostatica	332, 345 _{II} e 405
Volume del toro di rivoluzione	346 ₁
Centro di gravità di un'area semicircolare o semiellittica	346 _{1, 2}
Sezioni della pila di un ponte	363
Entropia; curve adiabatiche	367
Equazione $X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$	368
Equazioni di Eulero per le funzioni omogenee	369
Equazioni differenziali notevoli (Clairault, Bernoulli, ecc.)	373 e seg.
Le equazioni differenziali delle curve piane a curvatura costante	375 ₂ e ₃
Teorema del Wronskiano	391 ₁
Equazioni differenziali lineari alle derivate ordinarie notevoli	392 ₂ e ₃
Moti vibratorii semplici o smorzati (formola del Thomson)	392 ₄
Perimetro dell'ellisse	402
Area della sfera	407
Centro di gravità di una semicirconferenza	408
Fenomeni periodici (loro decomposizione in fenomeni elementari)	451
Brachistocrona	452
Curva d'area massima	454

INDICE

CAPITOLO I.

NUMERI REALI.

	Pag.
§ 1. — Numeri razionali positivi	1
§ 2. — Numeri irrazionali	6
§ 3. — Limite superiore e inferiore. Operazioni sui numeri positivi	8
§ 4. — Numeri reali	12

CAPITOLO II.

APPLICAZIONI GEOMETRICHE.

	Pag.
§ 5. — Misura (algebraica) degli angoli	16
§ 6. — Coordinate di un punto di una retta	19
§ 7. — Aree e volumi	21

CAPITOLO III.

I NUMERI COMPLESSI.

	Pag.
§ 8. — Coordinate di un punto nel piano	27
§ 9. — Definizione di numero complesso e delle operazioni sui numeri complessi	29
§ 10. — Equazioni di 2°, 3° e 4° grado	37

CAPITOLO IV.

POLINOMII ED EQUAZIONI ALGEBRICHE.

	Pag.
§ 11. — Calcolo combinatorio. Prodotti di binomii e formola del binomio	42
§ 12. — Divisione di due polinomii	44
§ 13. — Regola di Ruffini	46
§ 14. — Relazioni tra coefficienti e radici di un'equazione algebrica	48
§ 15. — Radici razionali di un'equazione a coefficienti razionali	51
§ 16. — Polinomii a coefficienti reali	52
§ 17. — Sistemi di equazioni algebriche	53

CAPITOLO V.

DETERMINANTI, SISTEMI DI EQUAZIONE DI PRIMO GRADO.

	Pag.
§ 18. — <i>Matrici</i>	62
§ 19. — <i>Definizione di determinante</i>	64
§ 20. — <i>Proprietà di un determinante</i>	69
§ 21. — <i>Altre proprietà di un determinante</i>	72
§ 22. — <i>Prodotto di due determinanti</i>	74
§ 23. — <i>Il determinante di Vandermonde e il discriminante di un'equazione algebrica. Separazione delle radici di una tale equazione</i>	76
§ 24. — <i>Sistemi di equazioni lineari. Teorema preliminare</i>	81
§ 25. — <i>Regola di Leibniz-Cramer</i>	83
§ 26. — <i>Regola di Rouché</i>	86
§ 27. — <i>Sistemi di equazioni lineari omogenee</i>	88

CAPITOLO VI.

FUNZIONI, LIMITI.

	Pag.
§ 28. — <i>Intervalli, intorno</i>	94
§ 29. — <i>Funzioni; funzioni di funzioni</i>	95
§ 30. — <i>Rappresentazione grafica delle funzioni</i>	97
§ 31. — <i>Esempi preliminari di limiti</i>	102
§ 32. — <i>Limiti</i>	105
§ 33. — <i>Funzioni complesse e loro limiti</i>	111
§ 34. — <i>Ricerca del $\lim_{x \rightarrow \infty} p^x$</i>	112
§ 35. — <i>Primi teoremi sui limiti</i>	113
§ 36. — <i>Funzioni continue</i>	117
§ 37. — <i>Un limite fondamentale</i>	121
§ 38. — <i>Un altro limite fondamentale</i>	123
§ 39. — <i>Alcune applicazioni</i>	130
§ 40. — <i>Proprietà fondamentali delle funzioni continue</i>	134
§ 41. — <i>Funzioni di più variabili</i>	137

CAPITOLO VII.

SERIE.

	Pag.
§ 42. — <i>Definizioni e primi teoremi</i>	140
§ 43. — <i>Serie a termini positivi</i>	143
§ 44. — <i>Cambiamento nell'ordine dei termini di una serie a termini positivi</i>	148
§ 45. — <i>Serie a termini negativi e positivi. Serie a termini complessi</i>	149
§ 46. — <i>Serie di funzioni</i>	152

CAPITOLO VIII.

DERIVATE, DIFFERENZIALI.

	Pag.
§ 47. — <i>Velocità ad un istante, velocità di reazione, intensità di corrente, coefficiente di dilatazione, calore specifico</i>	155
§ 48. — <i>Betta tangente a una curva</i>	159
§ 49. — <i>Derivata</i>	161
§ 50. — <i>Estensione alle funzioni complesse</i>	168
§ 51. — <i>Derivate fondamentali</i>	169
§ 52. — <i>Infinitesimi e infiniti</i>	171
§ 53. — <i>Differenziali</i>	175
§ 54. — <i>Metodi abbreviati di esposizione</i>	177
§ 55. — <i>Derivazione di una somma</i>	178
§ 56. — <i>Derivata del prodotto di due o più funzioni</i>	179
§ 57. — <i>Derivata del quoziente di due funzioni</i>	181
§ 58. — <i>Regola di derivazione delle funzioni inverse</i>	182
§ 59. — <i>Derivazione delle funzioni di funzioni</i>	186
§ 60. — <i>Derivata logaritmica</i>	188
§ 61. — <i>Derivate successive</i>	191

CAPITOLO IX.

**TEOREMI FONDAMENTALI SULLE DERIVATE.
E LORO PRIME APPLICAZIONI.**

	Pag.
§ 62. — <i>Proprietà fondamentali delle derivate</i>	193
§ 63. — <i>Prime applicazioni del teorema della media</i>	197
§ 64. — <i>Radici multiple di una equazione</i>	203
§ 65. — <i>Derivazione per serie</i>	206

CAPITOLO X.

SERIE DI POTENZE.

	Pag.
§ 66. — <i>Cerchio di convergenza</i>	207
§ 67. — <i>Derivate di una serie di potenze</i>	209
§ 68. — <i>Formole di Mac-Laurin e di Taylor</i>	210
§ 69. — <i>Sviluppabilità di una funzione in serie di potenze</i>	212

CAPITOLO XI.

MASSIMI, MINIMI, FLESSI.

	Pag.
§ 70. — <i>Massimi e minimi (relativi)</i>	223
§ 71. — <i>Concavità, convessità, flessi</i>	230
§ 72. — <i>Metodo di Newton-Fourier</i>	234
§ 73. — <i>Alcune osservazioni relative alla risoluzione approssimata delle equazioni algebriche</i>	237

CAPITOLO XII.

INTEGRALI.

	Pag.
§ 74. — <i>Primi teoremi</i>	239
§ 75. — <i>Regole generali di integrazione</i>	246
§ 76. — <i>Integrazione delle frazioni razionali</i>	250
§ 77. — <i>Integrazione di alcune funzioni trascendenti o irrazionali</i>	255
§ 78. — <i>Integrali singolari</i>	260
§ 79. — <i>Integrazione per serie</i>	264

CAPITOLO XIII.

CALCOLO DIFFERENZIALE PER LE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

	Pag.
§ 80. — <i>Continuità. Derivate parziali</i>	268
§ 81. — <i>Teorema della media per funzioni di due o più variabili</i>	272
§ 82. — <i>Differenziali</i>	274
§ 83. — <i>Derivate delle funzioni di funzioni (Funzioni composte)</i>	275
§ 84. — <i>Funzioni implicite</i>	279
§ 85. — <i>Generalizzazioni</i>	285
§ 86. — <i>Formola di Taylor-Lagrange per le funzioni di due variabili</i>	290
§ 87. — <i>Massimi e minimi delle funzioni di due o più variabili</i>	291

CAPITOLO XIV.

PRIMA ESTENSIONE DEL CALCOLO INTEGRALE
ALLE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI.

	Pag.
§ 88. — <i>Considerazioni preliminari</i>	295
§ 89. — <i>Derivazione sotto il segno d'integrale</i>	296
§ 90. — <i>Differenziali esatti in due variabili</i>	298
§ 91. — <i>Integrali curvilinei</i>	302
§ 92. — <i>Differenziali in tre variabili</i>	305
§ 93. — <i>Cenno di un problema analogo ai precedenti</i>	306

CAPITOLO XV.

GLI INTEGRALI DEFINITI
E LE FUNZIONI ADDITIVE D'INTERVALLO.

	Pag.
§ 94. — <i>Funzioni additive d'intervallo e loro derivate</i>	308
§ 95. — <i>Illustrazioni varie</i>	311
§ 96. — <i>Alcune somme fondamentali</i>	313
§ 96 bis. — <i>Il metodo dei rettangoli per il calcolo approssimato degli integrali definiti</i>	313
§ 97. — <i>Generalizzazioni del concetto di integrale. L'integrale di Riemann</i>	319
§ 98. — <i>Il metodo dei trapezi per il calcolo approssimato degli integrali definiti</i>	320
§ 99. — <i>Metodi e locuzioni abbreviate</i>	326

CAPITOLO XVI.

FUNZIONI ADDITIVE GENERALI E INTEGRALI MULTIPLI.

	Pag.
§ 100. — <i>Funzioni additive e loro derivate</i>	330
§ 101. — <i>Estensione dei principali teoremi del calcolo differenziale</i>	332
§ 102. — <i>Generalizzazione dei teoremi fondamentali del calcolo integrale</i>	335
§ 103. — <i>Calcolo di un integrale superficiale</i>	337
§ 104. — <i>Interpretazione geometrica</i>	340
§ 105. — <i>Dimostrazione rigorosa dei risultati precedenti</i>	341
§ 106. — <i>Volume di un solido di rotazione e teorema di Guldino</i>	345

CAPITOLO XVII.

CAMBIAMENTO DI VARIABILI NELLE FORMOLE DEL CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE.

	Pag.
§ 107. — <i>Esempi di cambiamento di variabili in formole di calcolo differenziale</i>	347
§ 108. — <i>Cambiamento della variabile d'integrazione negli integrali definiti o multipli. Integrali superficiali in coordinate polari</i>	350
§ 108 bis. — <i>Integrali superficiali in coordinate generali</i>	355

CAPITOLO XVIII.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI.

	Pag.
§ 109. — <i>Considerazioni e definizioni fondamentali</i>	357
§ 110. — <i>Equazioni differenziali, la cui integrazione è ridotta a quella di un differenziale esatto</i>	359
§ 111. — <i>Tipi particolari di equazioni differenziali</i>	369
§ 112. — <i>Teorema di Cauchy e integrazione per serie</i>	376
§ 113. — <i>Primi tipi di equazioni lineari alle derivate ordinarie a coefficienti costanti</i>	379
§ 114. — <i>Primi teoremi sulle equazioni differenziali lineari (alle derivate ordinarie)</i>	381
§ 115. — <i>Un lemma</i>	382
§ 116. — <i>Nuovi teoremi sulle equazioni lineari alle derivate ordinarie</i>	384
§ 117. — <i>Equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti</i>	386

CAPITOLO XIX.

ALCUNE APPLICAZIONI GEOMETRICHE DEL CALCOLO INFINITESIMALE.

	Pag.
§ 118. — <i>Tangente ad una curva gobba</i>	396
§ 119. — <i>Piano tangente ad una superficie</i>	397
§ 120. — <i>Lunghezza di un arco di curva sghemba</i>	399
§ 121. — <i>Area di una superficie sghemba ed integrali estesi ad una superficie sghemba</i>	403
§ 122. — <i>Area di una superficie di rotazione</i>	405

	Pag.
§ 123. — <i>Piano osculatore ad una curva sghemba</i>	408
§ 124. — <i>Cerchio osculatore</i>	410
§ 125. — <i>Involuppi di una schiera di curve</i>	416
§ 126. — <i>Curvatura e torsione di una linea sghemba</i>	420

CAPITOLO XX.

INTEGRALI CURVILINEI E SUPERFICIALI.

	Pag.
§ 127. — <i>Integrali curvilinei e potenziale - Prime definizioni</i>	426
§ 128. — <i>Trasformazione di integrali curvilinei nel piano</i>	431
§ 129. — <i>Integrali superficiali</i>	435
§ 130. — <i>Il teorema di Stokes</i>	437
§ 131. — <i>Differenziali esatti e potenziale</i>	439
§ 132. — <i>Trasformazione degli integrali doppi</i>	440

CAPITOLO XXI.

COMPLEMENTI VARI.

	Pag.
§ 133. — <i>Le serie di Fourier</i>	444
§ 134. — <i>Elementi del calcolo delle variazioni</i>	449
§ 135. — <i>Alcune funzioni di variabile complessa</i>	455
§ 136. — <i>Integrazione meccanica</i>	456
INDICE DEI RIASSUNTI E DEGLI ESEMPI PIÙ NOTEVOLI	463

1354

