CAPITOLO V.

DETERMINANTI, SISTEMI DI EQUAZIONE DI PRIMO GRADO

Nel § 17 abbiamo dato un metodo generale per affrontare il problema di risolvere i sistemi di due equazioni algebriche in due incognite: metodo che è estendibile anche a casi più generali. Ma questi studi vanno rapidamente complicandosi, conservando un carattere di grande semplicità soltanto per i sistemi di equazioni di primo grado. Questo caso (che del resto si può trattare coi metodi più elementari dell'algebra) ha dato origine a nuovi simboli e algoritmi, il cui studio costituisce la *teoria dei determinanti*, ed offre rapidi metodi di calcolo in alcune ricerche di geometria e di meccanica razionale. Per quanto si tratti di una teoria di importanza più formale, che essenziale, noi vogliamo ora esporne i tratti salienti.

§ 18. — Matrici.

α) Si dice *matrice* ad m righe ed n colonne l'insieme di $m\,n$ numeri o simboli, od espressioni algebriche (*elementi*) disposte in m righe ed n colonne (*) racchiuse tra due coppie di sbarre verticali. Così, ad esempio:

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ l & m & n & p \end{matrix} \right\| \quad \left\| \begin{matrix} l & m & n & p & q \\ h & k & r & s & t \end{matrix} \right\|$$

sono rispettivamente una matrice a 3 righe e 4 colonne ed una matrice a 2 righe e 5 colonne.

Nella prima matrice gli elementi a, b, c, d costituiscono la prima riga, o, come si suol dire, la riga d'indice 1; gli elementi e, f, g, h costituiscono la seconda riga o la riga d'indice 2, ecc.

Gli elementi a, e, l, costituiscono la colonna d'indice 1; gli elementi b, f, m costituiscono la colonna d'indice 2, ecc.

(*) È inutile definire il significato della frase: « *simboli disposti in una riga* o *in una colonna* ». Gli esempi seguenti basteranno a renderne chiaro il senso.

L'elemento p della prima matrice è l'elemento posto nella riga d'indice 3 e nella colonna d'indice 4.

Assai spesso gli $m\,n$ simboli che costituiscono la matrice (gli *elementi* della matrice), si indicano con una stessa lettera dell'alfabeto (p. es., con la lettera a) accompagnata da due indici, che variano da elemento ad elemento; il primo è l'indice della riga, il secondo è l'indice della colonna alle quali appartiene l'elemento.

Così, p. es., se si indicano gli elementi della prima matrice con la lettera a, e si vuol seguire la convenzione ora fissata, si indicheranno gli elementi della prima riga a, b, c, d rispettivamente coi simboli $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$; gli elementi e, f, g, h rispettivamente coi simboli $a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}$; i quattro elementi della terza riga coi simboli $a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}$.

In generale una matrice a m righe ed n colonne s'indicherà:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,\,n-1} & a_{1\,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,\,n-1} & a_{2\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{m,\,n-1} & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Il simbolo a_{rs} indica l'elemento di una matrice, che appartiene alla r^{ma} riga (riga d'indice r) ed alla s^{ma} colonna (colonna d'indice s). Queste convenzioni si usano spesso per semplificare e rendere più chiare le notazioni.

Se $m \neq n$, la matrice dicesi matrice rettangolare; se $m = n$, si usano due sbarre verticali soltanto; e la matrice dicesi matrice quadrata o *determinante* di ordine n.

β) Sia k un numero intero positivo non superiore nè a m, nè a n; scegliamo a piacere k colonne e k righe tra le n colonne e le m righe della nostra matrice; i k^2 elementi in cui si incrociano le k righe e le k colonne scelte si troveranno disposti in modo da costituire una matrice quadrata (determinante) di ordine k, il quale si chiama un *minore* della data matrice.

Così, p. es., se $m = 4$, $n = 5$, si scelgano tre colonne, p. es., la 2ª, la 4ª, la 5ª e tre righe, p. es., la 2ª, la 3ª, la 4ª.

I nove elementi determinati dalle intersezioni di dette righe e colonne formano il determinante $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}$, che è un minore del terzo ordine contenuto nella matrice considerata.

I minori del 1° ordine sono gli stessi elementi della matrice.

γ) Tra gli elementi di una matrice quadrata di ordine n sono specialmente notevoli gli n elementi della *diagonale principale:* cioè quelli che appartengono a riga e colonna di ugual indice. Per es., nel determinante $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ A & B & C & D \\ p & q & r & s \end{vmatrix}$ di ordine 4, la diagonale principale è costituita dai 4 elementi a, β, C, s.

Diciamo che abbiamo trasposto (scambiato) due righe, p. es. la i^{esima} e la j^{esima} se scriviamo la i^{esima} riga al posto della j^{esima} e viceversa. Altrettanto dicasi per le colonne. Così, p. es., dal precedente determinante si ottiene il determinante $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ A & B & C & D \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ p & q & r & s \end{vmatrix}$, trasponendo la seconda e la terza riga.

§ 19. — Definizione di determinante.

I determinanti si considerano come simboli comodi a scriversi per indicare certe quantità che ora definiremo (*).

Un determinante $|a|$ del primo ordine si considera come identico al suo unico elemento a. Tale notazione non è però usata, perchè con $|a|$ si indica invece di solito non un determinante, ma bensì il valore assoluto o modulo di a. Molti dei seguenti teoremi non hanno del resto senso per determinanti del primo ordine.

Un determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ del secondo ordine si considera come un simbolo equivalente alla differenza $a\,d - b\,c$. (Ciò che, come è facile a riconoscere, è conforme alla seguente definizione).

Noi ora, supposto noto il significato di un determinante di ordine $n-1$, definiamo il valore di un determinante di ordine n. (Abbiamo così una definizione generale *per induzione completa*). I determinanti più usati sono quelli del secondo, del terzo e del quarto ordine.

(*) Taluni usano due coppie di sbarre verticali per scrivere un determinante, pensato come matrice quadrata, usando poi due sole sbarre verticali se si vuole indicare il valore che ora definiremo.

Un elemento di un determinante si dirà di posto *pari* o di posto *dispari* secondochè è *pari* o *dispari* la somma degli indici della riga e colonna cui appartiene l'elemento secondo le convenzioni del § 18, α, pag. 63.

E chiaramente: *Di due elementi consecutivi di una stessa linea* (riga o colonna) *uno è di posto pari, l'altro di posto dispari.*

Sia dato un determinante D di ordine n e ne sia a un elemento; sopprimiamo la riga e la colonna, cui appartiene a: otteniamo un determinante (minore) D' di ordine $n-1$, di cui per ipotesi conosciamo il valore. La quantità $+D'$, se a è di posto pari, o la quantità $-D'$, se a è di posto dispari, diconsi il *complemento algebrico* di a.

Se un elemento di un determinante è indicato con una lettera minuscola seguìta da uno o più indici, e se non vi è a temere alcuna ambiguità, molto spesso il suo complemento algebrico si indica con la corrispondente maiuscola seguìta dagli stessi indici. Così, per esempio, se

$$(1) \qquad D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

si scrive

$$A_1 = + \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = b_2 c_3 - c_2 b_3,$$

$$B_3 = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = a_2 c_1 - a_1 c_2$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2 b_3 - b_2 a_3, \text{ ecc.}$$

TEOR. I. *Se noi cambiamo tutti gli elementi di una linea, i loro complementi algebrici non cambiano.*

E ciò perchè per formare il complemento algebrico di un elemento si *sopprimono* proprio le due linee cui appartiene l'elemento stesso.

OSSERVAZIONE. Sia data una successione di oggetti, p. es. $a, b, c, d, e, f, g, h, k$.

Scegliamone due, uno di posto r, l'altro di posto $\rho \neq r$; p. es. l'elemento d di posto $r = 4$, e g di posto $\rho = 7$. Sia r' il posto del primo elemento, quando si cancelli il secondo, e ρ' il posto del secondo quando si cancelli il primo. Nell'es. precedente $r' = 4$ è il posto di d nella successione a, b, c, d, e, f, h, k

ottenuta dalla precedente sopprimendo g; e $\rho' = 6$ è il posto di g nella successione a, b, c, e, f, g, h, k ottenuta sopprimendo invece d.

Il *posto di un elemento non varia se si sopprime un elemento che lo segue, mentre invece diminuisce di uno, se si cancella un elemento che lo precede;* perciò

$$r' = r, \rho' = \rho - 1 \qquad \text{se } r < \rho,$$
$$r' = r - 1, \rho' = \rho \qquad \text{se } r > \rho.$$

In ogni caso $r' + \rho$ ed $r + \rho'$ differiscono di una unità; cosicchè, se uno di essi è pari, l'altro è dispari; cioè

$$(-1)^{r'+\rho} = -(-1)^{r+\rho'}.$$

Analogamente, se in una matrice si cancella una linea di indice r, allora le linee parallele che precedono la linea cancellata (di indice $\rho < r$) conservano nella nuova matrice l'indice ρ: le linee parallele, che seguivano la linea cancellata, che cioè avevano un indice $\rho > r$, avranno nella nuova matrice l'indice $\rho - 1$ (appunto perchè la r^{esima} linea *precedente* è stata cancellata). Anche nel caso delle linee di una matrice si possono pertanto applicare le precedenti considerazioni.

Sia dato un determinante D; sia a un suo elemento posto sulla r^{esima} riga e sulla s^{esima} colonna; esso è di posto pari o dispari secondo che $r + s$ è pari o dispari [nel primo caso $(-1)^{r+s} = +1$, nel secondo $(-1)^{r+s} = -1$].

Il complemento algebrico A di a è il minore μ ottenuto cancellando riga e colonna incrociantisi in a e preceduto dal segno $(-1)^{r+s}$.

Un elemento b di D, che appartiene a una riga e una colonna distinte da quelle passanti per a, appartiene anche al minore μ. *Se* r + s *è pari, cioè* μ *coincide con* A, *il complemento algebrico di* b *nel minore* μ *si dirà il complemento algebrico di* b *nel complemento algebrico* A *di* a (nel determinante iniziale). Se *invece* r + s *è dispari, cioè* A = $-\mu$, allora *il complemento algebrico di* b *in* μ, *cambiato di segno, si chiamerà il complemento algebrico di* b *nel complemento algebrico* A *di* a. Cioè il complemento algebrico di b nel complemento algebrico A di a vale il complemento di b nel minore μ ottenuto sopprimendo riga e colonna incrociantisi in a, cambiato o non di segno secondo che A coincide con μ o con $-\mu$, [cioè secondo che a ha posto pari o dispari in D, cioè secondo che $(-1)^{+s}$ vale $+1$ oppure -1].

Siano ρ, δ i numeri d'ordine della riga e colonna che b ha in D; siano ρ', δ' i numeri d'ordine della riga e colonna che b ha in μ (che si è ottenuto da D cancellando la riga r^{esima} e colonna s^{esima}). Il complemento algebrico di b in μ vale il minore M ottenuto cancellando da μ la riga e colonna incrociantisi in b, preceduto dal segno + o — secondo che $\rho' + \delta'$ è pari o dispari, cioè preceduto dal segno di $(-1)^{\rho'+\delta'}$.

Quindi il complemento di b in A, vale M preceduto dal segno del prodotto $(-1)^{r+s}\ (-1)^{\rho'+\delta'}$, cioè dal segno di $(-1)^{(r+\rho')+(s+\delta')}$.

Ora M non è che il minore ottenuto da D sopprimendo entrambe le righe ed entrambe le colonne che si incrociano in a ed in b.

Così pure, se r' ed s' sono i numeri d'ordine della riga e colonna, cui appartiene a nel minore ottenuto da D sopprimendo le righe e colonne che si incrociano in b, il complemento di a nel complemento di b vale

$$(-1)^{r'+s'+\rho+\delta} M,$$

dove M è ancora il minore ottenuto sopprimendo in D le righe e colonne che si incrociavano in a e in b.

Ora per l'osservazione precedente

$$(-1)^{r+\rho'} = -(-1)^{r'+\rho}.$$

Analogamente è

$$(-1)^{s+\delta'} = -(-1)^{s'+\delta}.$$

Moltiplicando, se ne deduce:

$$(-1)^{r+s+\rho'+\delta'} = (-1)^{r'+s'+\rho+\delta}.$$

Perciò:

TEOR. II. *Se* a, b *sono due elementi di un determinante appartenenti a righe e colonne distinte, il complemento algebrico di* a *nel complemento algebrico di* b *è uguale al complemento algebrico di* b *nel complemento algebrico di* a.

DEF. **Si dice valore di un determinante la somma dei prodotti ottenuti moltiplicando gli elementi di una linea qualsiasi per i loro complementi algebrici** (*).

(*) Applicando questa definizione a un determinante di ordine 2, si ritorna al valore sopra definito di un tale determinante.

Se invece moltiplichiamo gli elementi di una linea per i loro complementi algebrici cambiati di segno, e poi sommiamo, troviamo il valore del determinante cambiato di segno.

Così, p. es., nel caso precedente tale valore sarebbe: $a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1$, oppure $a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2$, oppure $a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3$, ecc.

Perchè tale definizione non sia contraddittoria in termini bisogna però dimostrare che, da qualunque linea si parta, si giunge sempre allo stesso valore (che, p. es., per il determinante (1) è $a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3 =$ ecc. ...).

Poichè il teorema si verifica tosto per i determinanti del 2° ordine noi potremo dimostrarlo col metodo di induzione completa provando che, ammesso il teorema per i determinanti di ordine $n - 1$, e quindi anche per i *complementi algebrici* (*) degli elementi di un determinante di ordine n, esso si dimostra valido anche per i determinanti di ordine n. E così noi faremo. Per provare che, partendo da una linea qualunque, si giunge sempre allo stesso risultato, basterà provare che, partendo da una riga qualsiasi (p. es. la r^{esima}) si giunge allo stesso risultato, come partendo da una colonna qualsiasi (p. es. la s^{esima}). E, poichè il teorema è stato ammesso per i determinanti di ordine $n - 1$, noi, per calcolare i complementi di un elemento qualsiasi, potremo calcolarli partendo da una loro linea qualsiasi.

Se noi sviluppiamo, come abbiamo detto, il determinante iniziale prima secondo gli elementi della riga r, poi secondo gli elementi della colonna s, troviamo due somme S, S' di n prodotti (di un elemento per il suo complemento) che hanno un addendo comune: il prodotto dell'elemento c in cui si incrociano la riga r e la colonna s per il suo complemento C. Basterà provare che i risultati R, R' ottenuti sopprimendo dalle due somme S, S' questo addendo comune, risultano uguali. Ogni addendo di R è il prodotto di un elemento a della riga r per il suo complemento A; questo complemento si può, come abbiamo detto, calcolare partendo da una sua linea qualsiasi, p. es. da quella sua colonna, che in D aveva il posto s; esso è uguale perciò alla somma dei prodotti ottenuti moltiplicando ogni elemento b di questa sua colonna per il complemento di tale elemento b in A. Quindi R si ottiene così: *Si moltiplichi ogni elemento* a *della* r^esima *riga per ogni elemento* b *della* s^esima *colonna* (*distinti*

(*) Ciò è evidente se si tratta del complemento di un elemento di posto pari (il quale complemento è precisamente un determinante di ordine $n - 1$). Se invece si tratta di un elemento di posto dispari, tale complemento è un determinante di ordine $n - 1$ cambiato di segno; ma tale cambiamento di segno si ha, per definizione, anche nei complementi algebrici dei suoi elementi.

dall' elemento c *di incrocio) e per il complemento algebrico di* b *nel complemento algebrico* A *di* a *e si sommino i risultati così ottenuti.*

R' si otterrebbe similmente sommando i prodotti di ogni a per ogni b e per il complemento di a nel complemento B di b. Per il teor. II sarà dunque $R = R'$, c. d. d.

OSSERVAZIONE — Da questa dimostrazione segue che il valore di un determinante si ottiene sommando insieme:

α) il prodotto di un suo elemento c scelto ad arbitrio per il suo complemento algebrico;

β) i prodotti ottenuti moltiplicando un elemento a posto sulla riga di c per un altro elemento b posto sulla stessa colonna di c, per il complemento algebrico di a nel complemento di b (o, ciò che è lo stesso, il complemento di b nel complemento di a).

Un risultato analogo si ottiene se gli elementi a, b descrivono due linee parallele, p. es. due righe, restando però sempre in colonne distinte. In tale caso naturalmente non si parla più di elemento di incrocio.

§ 20. — Proprietà di un determinante.

TEOR. I. *Se noi scambiamo ordinatamente le righe con le colonne, il determinante* D *non muta* (cioè diventa un determinante D' uguale a D).

$$\text{(Per es. } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{).}$$

Ciò si può dimostrare o notando che per la stessa definizione le righe e le colonne hanno lo stesso ufficio nel calcolo di D, oppure [ammesso il teorema per i determinanti di ordine più piccolo dell'ordine di D, perchè il teorema è evidente per i determinanti di ordine 1, 2] osservando che, sviluppando D secondo gli elementi della prima riga, si ha un risultato identico come sviluppando D' a partire dalla prima colonna.

TEOR. II. *Trasponendo* (scambiando) *due linee parallele, il determinante* D *cambia di segno* (cioè si muta in un determinante $D' = -D$; anzi i termini di D' sono ordinatamente uguali e di segno opposto a quelli di D) (*).

(*) Un determinante D di ordine n è una somma di più quantità T, ciascuna delle quali è un prodotto di n elementi del determinante stesso. Queste T si dicono i *termini* di D (cfr. i teor. del seg. § 21). Un termine di D è il prodotto di un suo elemento per un termine del complemento algebrico dell'elemento stesso.

Il teorema è evidente per i determinanti di ordine 2. Ammesso il teorema per determinanti di ordine $n-1$, dimostriamolo per un determinante D di ordine $n > 2$. Il teorema così sarà completamente provato col metodo di induzione completa. Scambiamo in D, p. es., le righe r^{esima} ed s^{esima}. Consideriamo la t^{esima} riga con $t \neq r$, $t \neq s$. Scambiando le righe di posto r ed s, si scambiano due righe nei complementi algebrici degli elementi di tale t^{esima} riga, che sono (a meno del segno) determinanti di ordine $n-1$ e per i quali vale per ipotesi il teorema. Basta ricordare lo sviluppo di D ottenuto partendo dalla t^{esima} riga, perchè il teorema risulti provato anche per D.

TEOR. III. *Se un determinante ha due righe parallele uguali, esso è nullo.* Infatti, scambiando tali righe, D resta immutato; ma, per il teorema precedente, esso cambia segno. Dunque $D = -D$, cioè $D = 0$.

TEOR. IV. *Se io moltiplico i complementi degli elementi di una linea di* D *rispettivamente per delle quantità* $l_1, l_2, l_3 \ldots\ldots$ *e sommo, il numero così ottenuto è uguale al determinante* D′ *che si deduce dal dato, sostituendo le* $l_1, l_2, l_3 \ldots\ldots$ *ordinatamente al posto degli elementi della linea considerata.*

Così, p. es., se

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ si ha p. es. } l_1 A_2 + l_2 B_2 + l_3 C_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D'$$

Infatti i complementi delle a_2, b_2, c_2 in D e quelli delle l_1, l_2, l_3 in D' sono per il teor. I di pag. 65 ordinatamente uguali. Ora per definizione D' vale la somma dei prodotti ottenuti moltiplicando le l_1, l_2, l_3 per i loro complementi algebrici in D', che per la precedente osservazione valgono appunto i complementi algebrici A_2, B_2, C_2 delle a_2, b_2, c_2 in D. c. d. d.

TEOR. V. *La somma dei prodotti ottenuta moltiplicando gli elementi di una linea ordinatamente per i complementi algebrici degli elementi corrispondenti di un'altra linea parallela alla prima e sommando, è nulla.*

Così, p. es., per il determinante D del precedente teor. IV e $a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2 = 0$, oppure $a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 = 0$, ecc. Infatti la somma dei prodotti degli elementi a_1, b_1, c_1 della prima riga per i complementi degli elementi a_2, b_2, c_2 della seconda riga vale (per il teor. IV ove si ponga $l_1 = a_1$, $l_2 = b_1$, $l_3 = c_1$) quel determinante D' che si ottiene da D scrivendo a_1, b_1, c_1 al

posto di a_2, b_2, c_2. Ma tale determinante D' avrà uguali la prima e la seconda riga e perciò (teor. III) è nullo. c. d. d.

TEOR. VI. *Se moltiplichiamo gli elementi di una linea del determinante* D *per un numero* K, *il determinante resta moltiplicato per* K (cioè si muta in un determinante $D' = KD$). Infatti i complementi algebrici degli elementi di quella linea restano invariati; dallo sviluppo di D secondo gli elementi di tale linea si deduce pertanto subito il nostro teorema.

COR. α) *Se due linee parallele di un determinante sono proporzionali, il determinante è nullo* (perchè, moltiplicando gli elementi di una di queste linee per un conveniente fattore, il determinante si muta in un determinante con due linee parallele uguali).

TEOR. VII. *Se gli elementi di una linea di un determinante* D *sono ordinatamente* $l_1 + m_1$, $l_2 + m_2$, $l_3 + m_3$, ..., *il determinante* D *è uguale alla somma dei due determinanti ottenuti da* D *sostituendo agli elementi di tale linea una volta le* l_1, l_2, ..., *un'altra volta le* m_1, m_2, ...

Ciò risulta subito dallo sviluppo del determinante ottenuto partendo dalla linea considerata.

TEOR. VIII. *Se agli elementi* a_i, b_i, c_i, ... *di una linea aggiungiamo gli elementi* a_j, b_j, c_j, ... *di una linea parallela moltiplicati per un numero qualsiasi* k (cioè scriviamo $a_i + k a_j$, $b_i + k b_j$, ... al posto di a_i, b_i, ...), *il determinante resta immutato* (cioè si muta in un determinante $D' = D$). Infatti D' è (teor. VII) somma del determinante che ha come elementi della linea considerata le a_i, b_i, ..., e dell'altro che in tale linea ha gli elementi $k a_j, k b_j$, ... Il primo è lo stesso determinante D, il secondo ha proporzionali la riga degli elementi a_j, b_j, ... e la riga degli elementi $k a_j, k b_j$, ..., ed è perciò nullo (Cor. α del teor. VI). Donde segue il teorema enunciato.

TEOR. IX. *Un determinante* D *di ordine* n *ha* $\lfloor \underline{n}$ *termini.*

Ciò è evidente per $n = 2$; ammesso al solito vero per i determinanti d'ordine $n - 1$, si noti che i complementi algebrici degli elementi di D hanno $\lfloor \underline{n-1}$ termini. Per ottenere D si deve moltiplicare ognuno degli n elementi di una linea di D per il suo complemento e sommare. Si avranno così $n \lfloor \underline{n-1} = \lfloor \underline{n}$ termini generalmente *distinti.*

Il teorema è così provato per induzione completa. (Si noti che per determinanti particolari qualcuno di tali termini può essere nullo, due termini si possono elidere; se un elemento è

somma di più quantità, qualche termine si può scomporre nella somma di parecchi, ecc.).

TEOR. X. *Sono poi immediate le seguenti proposizioni:*

a) *Se tutti gli elementi di una stessa linea sono nulli, il determinante è nullo.*

b) *Se tutti gli elementi posti da una stessa banda della diagonale principale sono nulli, il determinante si riduce al termine principale.*

c) *Un determinante di ordine* n *si può trasformare in un determinante uguale di ordine* n + 1, *premettendo una riga ed una colonna, purchè gli elementi dell'una o dell'altra siano tutti nulli, eccettuato il primo che sia uguale all'unità.*

Così, p. es.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & a & b \\ f & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & n & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & a & b \\ 0 & f & c & d \end{vmatrix}, \text{ ecc.}$$

§ 21. — Altre proprietà di un determinante.

TEOR. I. *Un termine* T *di un determinante* D *di ordine* n *è* (a meno del segno) *prodotto* P *di* n *elementi, due dei quali non appartengono nè alla stessa riga, nè alla stessa colonna.*

Ciò è evidente per $n = 2$; come sopra ammettiamo il teor. per determinanti di ordine $n - 1$. Un termine T di D è il prodotto di un elemento a di D per un termine T' del complemento algebrico A di a. Poichè il teor. è ammesso per i termini T' di A (che è un determinante d'ordine $n - 1$) e poichè gli elementi di A appartengono a righe e colonne distinte dalle due linee, cui appartiene a, il termine $T = a\,T'$ di D godrà pure delle proprietà enunciate.

TEOR. II. *Viceversa un prodotto* P *di* n *elementi di* D, *due dei quali non appartengono nè alla stessa riga nè alla stessa colonna, è, a meno del segno, un termine* T *di* D.

(Dimostraz. analoga alla precedente).

Per quanto riguarda i segni si può poi dimostrare:

TEOR. III. *Se gli elementi di* P *si possono portare sulla diagonale principale con* k *trasposizioni di righe o di colonne, allora* $T = (-1)^k P$, (cioè $T = P$ se k è pari, $T = -P$ se k è dispari).

P. es. il termine $b_1 c_2 a_3$ di $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D$ si porta sulla diagonale principale trasponendo, p. es., dapprima le colonne prima e seconda, e poi le colonne che (dopo la precedente trasposizione) si trovano al 2° e 3° posto. Pertanto è $k = 2$, e $+ b_1 c_2 a_3$ è perciò un termine T di D.

Le trasposizioni con cui un termine si porta nella diagonale principale si possono scegliere in modo molteplice; dal teorema III segue però che, se con un metodo occorre un numero, p. es., *pari* di trasposizioni, con ogni altro metodo il numero delle trasposizioni necessarie sarà ancora *pari*.

DIM. Il teorema è evidente se $k = 0$. In tal caso P è proprio il prodotto degli elementi della diagonale principale, che è un termine del determinante (*il termine principale*).

In ogni altro caso il determinante D' dedotto da D con tali k trasposizioni vale $(-1)^k D$ (teor. II del § 20); ogni termine di D' vale il corrispondente di D moltiplicato per $(-1)^k$.

Ora il prodotto P da noi considerato è il termine principale di D', e perciò P è un termine di D'. Dunque $(-1)^k P$ è un termine di D, *c. d. d.*

TEOR. IV. *I termini di un determinante* D, *che hanno come fattori* h *elementi scelti dalle prime* h *righe e colonne, hanno per somma il prodotto del minore* Δ *formato con tali righe e colonne per il minore complementare* Δ' (formato con le residue righe e colonne).

Per $h = 1$ si trova un'immediata conseguenza della definiz. di determinante.

DIM. Uno di questi termini T è, a meno del segno, il prodotto P di h elementi, appartenenti a righe e colonne distinte del minore Δ, per $n - h$ elementi appartenenti a righe e colonne distinte di Δ'.

Ora il prodotto p dei primi h elementi vale, a meno del segno, un termine τ di Δ; e precisamente $\tau = (-1)^k p$, se con k trasposizioni si portano gli h elementi di p sulla diagonale principale di Δ. Il prodotto p' degli altri $n - h$ elementi vale, a meno del segno, un termine τ' di Δ'; e precisamente $\tau' = (-1)^l p'$, se con l trasposizioni si portano tali $n - h$ elementi sulla diagonale principale di Δ'.

Allora evidentemente, facendo tutte le citate $p + l$ trasposizioni, tutti gli n elementi considerati sono portati sulla diagonale principale di D. E perciò $T = (-1)^{k+l} P$. Poichè $P = pp' = (-1)^k \tau (-1)^l \tau'$, sarà $T = \tau\tau'$. Cioè i termini T considerati sono tutti e soli i prodotti di un termine τ di Δ per un termine τ' di Δ'.

c. d. d.

Siano scelte h righe qualunque che abbiano i posti $r_1, r_2, \ldots, r_h$ scritti in ordine crescente. Trasponiamo la riga r_1^{esima} con quella di posto $r_1 - 1$, poi con quella di posto $r_1 - 2$, ecc. ecc., poi con la prima riga; avremo così fatto $r_1 - 1$ trasposizioni: la riga di posto r_1 è andata al primo posto, senza che ne resti turbato l'ordine in cui si seguono le altre righe.

In modo analogo con $r_2 - 2$ trasposizioni porteremo la riga r_2^{esima} al secondo posto, ecc., con $r_h - h$ trasposizioni porteremo la riga r_h^{esima} al posto h, in tutto con $(r_1 + r_2 + \ldots + r_h) - (1 + 2 + \ldots + h)$ trasposizioni avremo portato le nostre h righe ai primi posti senza cambiare nè l'ordine in cui si succedono tali righe, nè l'ordine in cui si succedono le altre $n - h$.

Altrettanto dicasi per h colonne di posti $s_1, s_2, \ldots, s_h$.

In tutto con $(r_1 + r_2 + \ldots + r_h) + (s_1 + s_2 + \ldots + s_h) - 2(1 + 2 + \ldots + h)$ trasposizioni avremo portato sia le righe, che le colonne considerate ai primi h posti senza che sia mutato nè l'ordine in cui si seguono le linee considerate, nè l'ordine in cui si seguono le linee residue. Poichè ogni trasposizione di linee parallele cambia il determinante di segno, e poichè $2(1 + 2 + \ldots + h)$ è un numero pari, con le trasposizioni citate avremo dedotto dal determinante D un determinante $D' = (-1)^c D$ se $c = (r_1 + r_2 + \ldots + r_h) + (s_1 + s_2 + \ldots + s_h)$. E anzi da ogni termine di D' si deduce il corrispondente di D, moltiplicandolo per $(-1)^c$. Applicando a D' il teor. IV, avremo in conclusione:

TEOR. V. *Se* Δ *è un qualsiasi minore di un determinante* D *di ordine* n, *formato con* h $<$ n *righe e* h *colonne di* D, *e* Δ' *è il minore formato con le residue* n − h *righe e colonne, il prodotto di* Δ, *di* Δ' *e di* $(-1)^c$, *dove* c *uguaglia la somma degli indici delle righe e delle colonne di* Δ, *è uguale alla somma di tutti e soli quei termini di* Δ, *che contengono come fattori* h *elementi di* Δ. Il prodotto $(-1)^c \Delta'$ si chiama *complemento* di Δ: è facile vedere che $(-1)^c \Delta$ è il complemento di Δ'.

Così, per es., nel determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

la somma di tutti i termini del suo sviluppo, i quali contengono per fattori due elementi del minore $\Delta = \begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{42}a_{43} \end{vmatrix}$, uguaglia $(-1)^c \Delta \Delta'$, dove $c = 2+3+2+4 = 11$ (perchè gli indici delle colonne di Δ sono 2 e 3 e quelli delle righe sono 2 e 4) e dove Δ' è il $\begin{vmatrix} a_{11}a_{14} \\ a_{31}a_{34} \end{vmatrix}$ ottenuto da Δ' sopprimendovi le righe e le colonne che contribuiscono a formare Δ. Si ha poi che $(-1)^c \Delta'$ e $(-1)^c \Delta$ sono rispettivamente i complementi algebrici di Δ e di Δ'. Se ne deduce che:

Scelte h *linee parallele di* D, *la somma dei prodotti ottenuti moltiplicando i minori di ordine* h *di* D, *formati con queste* h *righe, per i minori complementari, uguaglia* D.

Basta ricordare che ogni termine di D è prodotto di n elementi, h dei quali appartengono alle h linee considerate, ed anzi ad uno solo dei minori di ordine h formati con queste h linee.

Così, per esempio:

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{31}a_{32} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{23}a_{24} \\ a_{43}a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}a_{13} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22}a_{44} \\ a_{42}a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11}a_{14} \\ a_{31}a_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{42}a_{43} \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} a_{12}a_{13} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{21}a_{24} \\ a_{41}a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}a_{14} \\ a_{32}a_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{21}a_{23} \\ a_{41}a_{43} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{13}a_{14} \\ a_{33}a_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{21}a_{22} \\ a_{41}a_{42} \end{vmatrix}.$$

§ 22. — Prodotto di due determinanti.

Siano dati due determinanti

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

di ordine n. *Io dico che il loro prodotto è uguale al determinante* C *di ordine* n,

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

ove $c_{rs} = a_{r1}b_{s1} + a_{r2}b_{s2} + \dots + a_{rn}b_{sn}$.

Cosicchè, supposto per fissar le idee $n = 3$:

$$(1)\quad AB = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13} & a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{23} & a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{23}b_{13} & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{23} & a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{12}+a_{33}b_{13} & a_{31}b_{21}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{23} & a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix}$$

Il determinante del secondo membro è la somma dei 27 determinanti che si ottengono conservando in ciascuna colonna uno solo dei tre addendi: il primo, il secondo o il terzo. Se in due colonne conserviamo addendi di egual posto (in entrambe le colonne il primo addendo, o in entrambe il secondo, o in entrambe il terzo), il determinante così ottenuto avrà due colonne proporzionali e quindi (teor. VI, α, § 20, pag. 71) sarà nullo. [Così, p. es., conservando nelle prime due colonne il primo addendo, gli elementi di queste colonne si ottengono moltiplicando a_{11}, a_{21}, a_{31} rispettivamente per b_{11} e per b_{21}]. Dei 27 determinanti basta per ciò tener conto dei soli *sei* differenti da zero, che si ottengono scegliendo in una colonna il primo addendo, in un'altra il secondo, nella residua il terzo. Consideriamo uno di questi sei determinanti, p. es.

$$\begin{vmatrix} a_{12}b_{12} & a_{13}b_{23} & a_{11}b_{31} \\ a_{22}b_{12} & a_{23}b_{23} & a_{21}b_{31} \\ a_{32}b_{12} & a_{33}b_{23} & a_{31}b_{31} \end{vmatrix}$$

ottenuto, scegliendo nella 1ª colonna il secondo addendo, nella seconda il terzo, nella terza il primo. Esso vale

$$b_{12}b_{23}b_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Ora con c trasposizioni di colonne il determinante $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}$ si muti in A. Tale determinante varrà $(-1)^c A$; e quindi (2) vale $(-1)^c b_{12}b_{23}b_{31} A$. Ma con le stesse c trasposizioni di colonne eseguite sul determinante B, il termine $b_{12}b_{23}b_{31}$ va nel termine principale; perciò (teor. III del § 21) $(-1)^c b_{12}b_{23}b_{31}$ vale un termine di B. Perciò (2) è il prodotto di A per un termine di B. Ripetendo questa considerazione per i *sei* determinanti sopra citati, si trova che il secondo membro di (1) vale il prodotto di A per la somma dei *sei* termini di B, cioè vale il prodotto AB, come dovevasi provare.

β) Osservazioni. Notiamo che, invertendo l'ordine dei due determinanti A e B, il loro prodotto non cambia; ciò si verifica facilmente osservando che questa inversione equivale a scambiare in C le orizzontali con le verticali.

Il determinante C si dice il prodotto eseguito per orizzontali dei due determinanti A e B; e la regola esposta per ottenere questo prodotto si dice regola di moltiplicazione per orizzontali degli stessi A e B.

Per moltiplicare A per B potrei anche scambiare nei determinanti A e B le righe con le colonne, ciò che non altera i valori dei due determinanti, e poi eseguire il prodotto con la regola precedente. Ciò equivale a trasporre, nell'ultima formola del prodotto AB, i due indici di ogni elemento a e quelli di ogni elemento b od anche a porre $c_{rs} = a_{1r}b_{1s} + a_{2r}b_{2s} + a_{3r}b_{3s}$. Il prodotto così ottenuto dicesi prodotto per verticali.

Infine si potevano scambiare le righe con le colonne in uno solo dei due fattori A, B.

Se i due determinanti A, B non fossero del medesimo ordine, allora, per eseguire il prodotto col metodo precedente, si deve elevare l'ordine del determinante di ordine minore, finchè i due determinanti abbiano lo stesso ordine, ed applicare infine la regola precedente (§ 20, teor. X c, pag. 72).

Ricordo che il quadrato di A uguaglia A, A e si ottiene dalla formola precedente, ponendo $a_{rs} = b_{rs}$.

γ) Consideriamo le due matrici:

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{matrix} \right\|.$$

Se le moltiplichiamo per orizzontali, come se fossero determinanti, otteniamo il determinante di secondo ordine

$$C = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13} & a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} + a_{23}b_{13} & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{23} \end{vmatrix},$$

che si verifica subito uguale a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix},$$

e che si chiamerà prodotto delle due matrici.

Se invece si moltiplica per verticali, si ottiene un determinante di terzo ordine identicamente nullo, perchè uguale al prodotto per verticali dei determinanti nulli

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Mentre le *due matrici sono simboli privi di significato, il loro prodotto ha dunque un significato preciso.*

Queste osservazioni si possono generalizzare a matrici qualsiasi, ma per tali studii rinvio ai trattati di algebra.

§ 23. — Il determinante di Vandermonde e il discriminante di un'equazione algebrica. Separazione delle radici di una tale equazione.

Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sono n numeri qualsiasi, si calcoli il determinante (di Vandermonde)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Sottraendo successivamente dalla n^{esima}, dalla $(n-1)^{esima}$, ..., dalla 2ª orizzontale la precedente moltiplicate per α_1, il deter-

minante D resta scritto nella forma

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_3 - \alpha_1 & \dots & \alpha_n - \alpha_1 \\ 0 & \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) & \alpha_3(\alpha_2 - \alpha_1) & \dots & \alpha_n(\alpha_n - \alpha_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_2^{n-3}(\alpha_2 - \alpha_1) & \alpha_3^{n-3}(\alpha_3 - \alpha_1) & \dots & \alpha_n^{n-3}(\alpha_n - \alpha_1) \\ 0 & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) & \alpha_3^{n-2}(\alpha_3 - \alpha_1) & \dots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 & \dots & \alpha_n - \alpha_1 \\ \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) & \dots & \alpha_n(\alpha_n - \alpha_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_2^{n-3}(\alpha_2 - \alpha_1) & \dots & \alpha_n^{n-3}(\alpha_n - \alpha_1) \\ \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) & \dots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1) \dots (\alpha_n - \alpha_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_2^{n-3} & \alpha_3^{n-3} & \dots & \alpha_n^{n-3} \\ \alpha_2^{n-2} & \alpha_3^{n-2} & \dots & \alpha_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Ora, se $n = 2$, si trova che $D = \alpha_2 - \alpha_1$; servendosi della precedente identità, che riduce il calcolo di un determinante di Vandermonde di ordine n al calcolo di un determinante analogo di ordine $n - 1$, si trova che:

Se $n = 3$, $D = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)$.

Se $n = 4$, $D = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_1)$.
$.(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_3)$.

Per n qualsiasi D è uguale al prodotto delle $\frac{1}{2}n(n-1)$ differenze delle quantità $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ a due a due, in cui l'indice del minuendo superi l'indice del sottraendo.

α) Se noi innalziamo al quadrato il determinante di Vandermonde troviamo

$$D^2 = \Delta = \begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

dove con s_h ho indicato la somma delle h^{esime} potenze delle α (per $h = 1, 2, \dots, 2n-2$).

Questo determinante Δ si chiama il *discriminante* degli n numeri dati; esso è nullo soltanto se almeno due di questi numeri sono uguali tra di loro. Se le α sono le radici di una data equazione algebrica, le formole del § 14 γ, pag. 50, permettono di calcolare tale discriminante senza risolvere l'equazione, perchè le s_h si possono cal-

colare tosto, appena sono dati i coefficienti dell'equazione. Abbiamo così un metodo per riconoscere quando due delle radici di una data equazione sono tra loro uguali.

ε) Il discriminante può servire (almeno teoricamente) a calcolare approssimativamente le radici reali di una equazione a coefficienti reali, *che abbia radici tutte distinte.*

Se $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$ è una tale equazione, esistono molti metodi per trovare un numero positivo B maggiore del modulo di ogni sua radice (*) reale o complessa.

Noi diremo che abbiamo calcolato in prima approssimazione, o anche che abbiamo *separato le radici reali* di tale equazione, se per ogni tale radice α sappiamo assegnare un intervallo dentro al quale sia contenuta la radice α e nessuna altra radice. Impareremo più avanti come il metodo di Newton-Fourier permetta poi di dedurre valori di α approssimati a piacere. Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_r$ sono le radici reali di tale equazione, è $P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots\ldots (x - \alpha_r) Q(x)$, dove $Q(x)$ è un prodotto di fattori di secondo grado sempre positivi per x reale. Cosicchè, se μ, ν sono due numeri tali che $P(\mu)$ e $P(\nu)$ abbiano segni opposti, certo nell'intervallo (μ, ν) esiste un numero *dispari* di radici α, e quindi *almeno* una radice α.

Se λ è un numero positivo minore dei valori assoluti di tutte le differenze tra le radici reali combinate a due a due, allora, formando una progressione aritmetica indefinita in ambo i sensi, in cui la differenza tra due termini consecutivi sia eguale a codesto numero λ, tra due termini consecutivi della progressione potrà essere compresa una sola radice o nessuna. E, per quanto si disse, sarà facile assicurarsi se tra due termini consecutivi della progressione sia compresa o no una radice, poichè nel primo caso essi, sostituiti all'incognita x, faranno prendere al primo membro $P(x)$ dell'equazione segni opposti, nel secondo caso lo stesso segno (**).

Evidentemente è inutile protrarre la progressione indefinitamente: basta tener conto solo di quei termini della progressione che cadono nell'intervallo compreso tra $-B$ e $+B$. In ognuno degli intervallini, ai cui estremi $P(x)$ ha segni opposti, e in essi soli, cade una e una sola radice di $P(x) = 0$. Basterà tener conto di tali intervallini e trascurare gli altri perchè sia risoluto il nostro problema di *separare* le radici della nostra equazione.

Il nostro problema è dunque ridotto alla determinazione del numero λ. Si noti che, se α_1, ed α_2 sono due radici qualunque, è $|\alpha_1 - \alpha_2| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| \leq 2B$.

Sostituendo nel valore (che sappiamo calcolare) di

$$\Delta = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_1 - \alpha_3)^2 \ldots\ldots (\alpha_{n-1} - \alpha_n)^2$$

in luogo di tutti i fattori, eccettuato $(\alpha_1 - \alpha_2)$, il numero maggiore (in valore assoluto) $|2B|$, si avrà:

$$|\Delta| \leq |\alpha_1 - \alpha_2|^2 (2B)^{2\left(\frac{n(n-1)}{2} - 1\right)}; \text{ onde } \sqrt{|\Delta|} \leq |\alpha_1 - \alpha_2| \, |2B|^{\frac{n(n-1)}{2} - 1}$$

(*) Ecco, p. es., un metodo teoricamente semplice. Sia A la massima delle $|a_1|, |a_2|, \ldots\ldots, |a_n|$. Sarà

$$|P(x)| \geq |x|^n - \{|a_1 x^{n-1}| + |a_2 x^{n-2}| + \ldots + |a_n|\} \geq$$

$$|x|^n - A\{|x|^{n-1} + |x|^{n-2} + \ldots\ldots + |x| + 1\} = |x|^n - A\frac{|x|^n - 1}{|x| - 1}$$

cioè

$$|P(x)| \geq \frac{|x|^n\{|x| - A - 1\} + A}{|x| - 1}.$$ Se dunque $|x| \geq A + 1$, allora sarà $|P(x)| > 0$. Quindi se x è radice di $P(x) = 0$, il suo modulo $|x|$ sarà inferiore ad $A + 1$. Potremo dunque porre $B = A + 1$. Per altri metodi, che permettono di assegnare un valore più piccolo del numero B rinvio ai trattati di algebra.

(**) Non porta che semplificazioni il caso che uno dei termini della progressione sia esso stesso una radice.

ossia

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \geqq \sqrt{|\Delta|} : (2B)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}.$$

Il secondo membro è minore del modulo della differenza tra le due radici reali α_1, α_2, che si possono scegliere ad arbitrio tra le radici reali dell'equazione. Possiamo dunque assumere:

$$\lambda = \frac{|\sqrt{\Delta}|}{(2B)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}}$$

Oss. Supponiamo in particolare che i coefficienti dell'equazione siano interi, ed il primo a_0 uguagli l'unità. Allora il discriminante, essendo un polinomio a coefficienti interi formato coi rapporti $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}$ che sono numeri interi, sarà un numero intero, e quindi certamente sarà $\sqrt{|\Delta|} \geqq 1$ (*). Dunque possiamo anche assumere

$$\lambda = \frac{1}{(2B)^{\frac{n(n-1)}{2}}-1}.$$

Se poi a_0 non fosse uguale ad 1, si ponga $z = \frac{y}{a_0}$, assumendo y come incognita. L'equazione diventa $a_0\left(\frac{y}{a_0}\right)^n + a_1\left(\frac{y}{a_0}\right)^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}\frac{y}{a_0} + a_n = 0$, ossia $y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 a_0 y^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} a_0^{n-2} y + a_n a_0^{n-1} = 0$, che è un'equazione a coefficienti interi col primo coefficiente uguale all'unità. E siamo ricondotti al caso precedente.

Nei trattati di algebra complementare sono dati molti altri metodi per separare e per calcolare approssimativamente le radici di una equazione algebrica.

Esempi (**).

1° Se $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ed $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, sono i coseni direttori di due rette, rispetto a una terna di assi cartesiani ortogonali, è noto dalla geometria analitica che l'angolo θ delle due rette soddisfa alla

$$\cos\theta = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2.$$

Quindi:

$$\left|\begin{matrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{matrix}\right|^2 = \left|\begin{matrix}1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1\end{matrix}\right| = 1 - \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta.$$

donde:

$$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{\left|\begin{matrix}\alpha_1\beta_1\gamma_1 \\ \alpha_2\beta_2\gamma_2\end{matrix}\right|^2} = \pm\sqrt{(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)^2+(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)^2+(\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2)^2}.$$

(*) Non può essere $\Delta = 0$ nell'attuale ipotesi che le radici della nostra equazione sieno distinte.

(**) I seguenti esempi sono importanti specialmente per le applicazioni che se ne fanno nei corsi di geometria analitica.

2° Siano $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ i coseni di direzione di tre rette r_i, a due ortogonali ($i = 1, 2, 3$). Sarà :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \\ \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \\ \alpha_2 \beta_3 \gamma_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{vmatrix} = 1 \text{ ; e quindi } \begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \\ \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \\ \alpha_3 \beta_3 \gamma_3 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

3° *Determinanti reciproci.* — Dato un determinante di ordine n

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

con i complementi algebrici A_{rs} dei suoi elementi, in numero di n^2, si può formare un altro determinante pure di ordine n

$$A' = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

che dicesi reciproco del primitivo A.

Il determinante reciproco di un determinante di ordine n è uguale alla $(n-1)^{ma}$ potenza del primitivo, ossia $A' = A^{n-1}$.

Infatti moltiplicando per orizzontali i due determinanti A e A', l'elemento generico c_{rs} del determinante prodotto sarà uguale ad A se $r = s$, ed uguale a zero se $r \neq s$. Infatti :

$$c_{rs} = a_{r1} A_{s1} + a_{r2} A_{s2} + \ldots\ldots + a_{rn} A_{sn} = 0, \ (r \neq s)$$
$$c_{rr} = a_{r1} A_{r1} + a_{r2} A_{r2} + \ldots\ldots a_{rn} A_{rn} = A,$$

come risulta dalle formole di pag. 70, § 20, Teor. V°. Quindi :

$$AA' = \begin{vmatrix} A & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & A \end{vmatrix} = A^n.$$

Se $A \neq 0$, dividendo per A, si ha subito la formola da dimostrare. Se poi $A = 0$, anche $A' = 0$ e la formola è ancora vera, come ora proveremo.

Infatti ciò è evidente se tutti gli elementi di A sono nulli ; se invece non sono tutti nulli, ed è, p. es., $a_{11} \neq 0$, moltiplichiamo nel determinante A' la prima colonna per a_{11} (il che equivale a moltiplicare A' per a_{11}) e ad essa aggiungiamo

tutte le altre colonne moltiplicate ordinatamente per $a_{12}, a_{13}, \ldots\ldots a_{1n}$ (il che non altera il valore del determinante); per le stesse formole del teor. cit., avremo

$$a_{11}A' = \begin{vmatrix} A & A_{12} & A_{13} & \ldots\ldots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \ldots\ldots & A_{2n} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & \ldots\ldots & A_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 & A_{n2} & A_{n3} & \ldots\ldots & A_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

poichè la prima colonna è tutta costituita di termini nulli, essendo $A = 0$.

Dividendo per a_{11} ($\neq 0$), otteniamo appunto $A' = 0$.

§ 24. — Sistemi di equazioni lineari. Teorema preliminare.

Per sistema di m equazioni di primo grado (o, come anche si dice, *lineari*) ad n incognite $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, s'intende naturalmente un sistema di m equazioni, ciascuna delle quali sia della forma:

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \ldots\ldots + \lambda x_n = p,$$

dove le $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots \lambda, p$ sono numeri costanti dati ($\alpha, \beta, \ldots\ldots, \lambda$ coefficienti dell'equazione; p termine noto).

Il problema della risoluzione di queste equazioni consiste dunque nel cercare tutti gli speciali sistemi di valori da darsi alle $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, in modo che le m equazioni ne restino tutte soddisfatte simultaneamente.

Indicando in generale con a_{ij} il coefficiente della incognita x_j nella i^{ma} equazione e con α_i il termine noto, che sta al secondo membro di questa stessa equazione, è chiaro che il sistema delle m equazioni date fra le n incognite assumerà la forma seguente:

$$[1] \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = \alpha_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = \alpha_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{m,n-1}x_{n-1} + a_{mn}x_n = \alpha_m \end{cases}$$

Due tali sistemi di equazioni lineari nelle stesse n incognite si dicono *equivalenti*, se ogni sistema di valori delle x, che soddisfa all'uno, soddisfa anche all'altro, e viceversa.

Due sistemi equivalenti a [1] sono equivalenti tra di loro. È poi noto ed evidente:

Un sistema [1] *è equivalente ad un altro sistema che si deduce da* [1] *moltiplicando una delle date equazioni per un numero* **differente da zero** e lasciando invariate le altre equazioni.

Un sistema [1] *è equivalente al sistema che se ne deduce moltiplicando una delle sue equazioni per un numero* **differente da zero**, *e aggiungendo ad essa le precedenti equazioni moltiplicate per un numero arbitrario, mentre si lasciano invariate le altre equazioni di* [1].

Nell'algebra elementare si insegna a risolvere un tale sistema, mostrando che, dato un sistema di più equazioni in più incognite, se ne può generalmente dedurre uno con un minor numero di incognite *eliminando* almeno una incognita. Nelle righe seguenti ci occupiamo in generale della eliminazione anche di più incognite da un tale sistema di equazioni.

Cominciamo dal considerare un sistema di $n + 1$ equazioni in n incognite ; e, per fissare le idee, supponiamo $n = 3$. Ragionamento e risultato valgono però in generale. Siano

$$(2)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \alpha_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \alpha_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \alpha_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 = \alpha_4 \end{cases}$$

le date equazioni.

Consideriamo il determinante

$$(3)\qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \alpha_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \alpha_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \alpha_4 \end{vmatrix}.$$

Con A_r indicheremo il complemento algebrico di α_r

$$(r = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4).$$

Sarà $D = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4$. Supponiamo $A_4 \neq 0$.

Per la precedente osservazione il sistema (2) si muta in un sistema equivalente se noi, pure lasciando immutate le prime tre equazioni, sostituiamo alla quarta l'equazione che si ottiene moltiplicandola per A_4 ed aggiungendo le prime tre moltiplicate rispettivamente per A_1, A_2, A_3. Vale a dire il sistema (2) si trasforma in un sistema equivalente se ne conserviamo le prime tre equazioni, e alla quarta sostituiamo :

$$(4)\qquad \begin{aligned} &A_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + A_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + \\ &+ A_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) + A_4(a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3) = \\ &= \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4. \end{aligned}$$

Il secondo membro di questa equazione vale D. Nel primo membro il coefficiente della x_1 è $a_{11}A_1 + a_{21}A_2 + a_{31}A_3 + a_{41}A_4$, cioè è la somma dei prodotti ottenuti moltiplicando gli elementi della prima colonna di (3) per i complementi algebrici degli elementi della quarta colonna, ed è quindi nullo. Altrettanto dicasi per x_2 e per x_3. Dunque alla quarta equazione di [1] noi possiamo costituire la $D = 0$; il sistema si muta in un sistema equivalente.

Se invece $A_4 = 0$, allora è ancora vero che l'uguaglianza $D = 0$ è conseguenza delle equazioni date (4). Ma non è in tale caso sempre vero che, sostituendo alla quarta delle (2) la $D = 0$, il sistema sia mutato in un sistema equivalente. Dunque:

Se sono date n + 1 *equazioni lineari in* n *incognite, è conseguenza di tali equazioni l'uguaglianza che si ottiene ponendo uguale a zero il determinante* D *formato coi coefficienti e coi termini noti* (cosicchè, se $D \neq 0$, il dato sistema è assurdo, o, come si suol dire, è *incompatibile*, cioè non ammette alcun sistema di soluzioni). **Ed anzi se il determinante formato coi coefficienti delle prime n incognite nelle prime n equazioni è diverso da zero, il dato sistema di equazioni si muta in un sistema equivalente, quando si lascino invariate le prime n equazioni, e si sostituisca all'ultima la $D = 0$.**

§ 25. — Regola di Leibniz-Cramer.

Siano date n equazioni in n incognite: p. es. le seguenti, ove per semplicità è posto $n = 3$.

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \alpha_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \alpha_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \alpha_3 \end{cases}$$

che possiamo scrivere, p. es., nella forma

$$\begin{aligned} a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= \alpha_1 - a_{11}x_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= \alpha_2 - a_{21}x_1 \\ a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= \alpha_3 - a_{31}x_1 \end{aligned}$$

Se noi per un momento consideriamo x_1 come noto, questo è un sistema di tre equazioni nelle due incognite x_2, x_3.

Per il risultato del § 24 ne verrà:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\ \alpha_2 - a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\ \alpha_3 - a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Posto

$$(2) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

otterremo, sviluppando secondo gli elementi della prima colonna

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_{12} & a_{13} \\ \alpha_2 & a_{22} & a_{23} \\ \alpha_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

E, se $\Delta \neq 0$, e se indichiamo con A_{rs} il complemento algebrico di a_{rs} in Δ:

$$(3) \qquad x_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_{12} & a_{13} \\ \alpha_2 & a_{22} & a_{23} \\ \alpha_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{\alpha_1 A_{11} + \alpha_2 A_{21} + \alpha_3 A_{31}}{\Delta}.$$

In modo analogo si prova:

$$(3)_{bis} \qquad x_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha_1 & a_{13} \\ a_{21} & \alpha_2 & a_{23} \\ a_{31} & \alpha_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{\alpha_1 A_{12} + \alpha_2 A_{22} + \alpha_3 A_{32}}{\Delta}.$$

$$(3)_{ter} \qquad x_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & \alpha_2 \\ a_{31} & a_{32} & \alpha_3 \end{vmatrix} = \frac{\alpha_1 A_{13} + \alpha_2 A_{23} + \alpha_3 A_{33}}{\Delta}.$$

Se esistono quindi dei valori di x che soddisfano a (1), tali valori debbono essere quelli dati da (3), se $\Delta \neq 0$. Verifichiamo ora che, se $\Delta \neq 0$, i valori dati dalle (3) soddisfano effettivamente ad (1), p. es. alla prima delle (1). Infatti, sostituendo alle x i valori dati dalle (3) nel primo membro della (1), si trova:

$$a_{11} \frac{\alpha_1 A_{11} + \alpha_2 A_{21} + \alpha_3 A_{31}}{\Delta} + a_{12} \frac{\alpha_1 A_{12} + \alpha_2 A_{22} + \alpha_3 A_{32}}{\Delta} +$$

$$+ a_{13} \frac{\alpha_1 A_{13} + \alpha_2 A_{23} + \alpha_3 A_{33}}{\Delta} =$$

$$= \alpha_1 \frac{a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}}{\Delta} + \alpha_2 \frac{a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23}}{\Delta} +$$

$$+ \alpha_3 \frac{a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33}}{\Delta}.$$

Ora, per i teoremi fondamentali sui complementi algebrici, il coefficiente di α_1 in questa equazione vale 1, mentre i coefficienti di α_2, α_3 sono nulli. Dunque tutta questa espressione è proprio uguale ad α_1 ; e la prima delle (1) è soddisfatta dalle (3). Altrettanto si può ripetere per le altre equazioni (1).

Esaminando le (3) si vede che il nostro risultato si può enunciare così :

Dato un sistema di n *equazioni di primo grado ad* n *incognite col determinante dei coefficienti diverso da zero tutte le incognite risultano determinate.* **E precisamente ogni incognita è uguale alla frazione che ha per denominatore il determinante dei coefficienti e per numeratore il determinante che si ottiene sostituendo nel determinante dei coefficienti alla colonna dei coefficienti dell'incognita stessa la colonna dei termini noti.**

Così, p. es., il determinante dei coefficienti del sistema

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 5z &= 2 \\ x - 7y + 4z &= 0 \\ 9x + 2y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

è :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & -7 & 4 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 304.$$

Il sistema dato è quindi soddisfatto soltanto dalle :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{304} = -\frac{15}{304} ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{304} = \frac{59}{304} ; \; z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -7 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{304} = \frac{107}{304}.$$

Un caso particolare notevole.

Siano $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ i coseni di direzione di tre rette r_i a due a due ortogonali. Risolviamo le equazioni

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = 0 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = 0. \end{cases}$$

Il determinante del sistema è (pag. 80, esempio 2°)

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \varepsilon,$$

dove ε indica il numero + 1, o il numero − 1.

Dunque il sistema dato ammette una e una sola soluzione, data dalla regola di Cramer

$$(3)\qquad x=\varepsilon\begin{vmatrix}1&\beta_1&\gamma_1\\0&\beta_2&\gamma_2\\0&\beta_3&\gamma_3\end{vmatrix};\ y=\varepsilon\begin{vmatrix}\alpha_1&1&\gamma_1\\\alpha_2&0&\gamma_2\\\alpha_3&0&\gamma_3\end{vmatrix};\ z=\begin{vmatrix}\alpha_1&\beta_1&1\\\alpha_2&\beta_2&0\\\alpha_3&\beta_3&0\end{vmatrix}.$$

Ma ora il nostro sistema (1) è per le nostre ipotesi soddisfatto, quando si ponga $x=\alpha_1$, $y=\beta_1$, $z=\gamma_1$. Quindi dalle (3) si ricava che α_1, β_1, γ_1 sono uguali al prodotto di ε per i loro complementi algebrici nel determinante (2) del sistema (1).

Queste proprietà del determinante (2) trovano svariate applicazioni nella geometria analitica e nella meccanica razionale.

§ 26. — Regola di Rouché.

Ritorniamo al sistema più generale [1] del § 24. Scegliamo tra le [1] un certo numero h di equazioni, e in queste equazioni diamo valori arbitrarii ad $n-h$ incognite (con h indichiamo un intero non maggiore nè di n, nè di m). Otterremo così un sistema di h equazioni in h incognite. Senz'altro supporremo che le equazioni scelte sieno le prime h, e che le incognite a cui sono stati dati valori arbitrarii sieno le ultime $n-h$, cioè le $x_{h+1}, x_{h+2}, \dots, x_n$. Nè ciò del resto diminuisce la generalità, perchè possiamo sempre ridurci a questo caso, mutando l'ordine delle equazioni e quello delle incognite. In questo modo avremo ottenuto un sistema di h equazioni in h incognite $x_1, x_2, \dots x_h$

$$(2)\qquad\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1h}x_h=[\alpha_1-a_{1,h+1}x_{h+1}-\dots-a_{1n}x_n]\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2h}x_h=[\alpha_2-a_{2,h+1}x_{h+1}-\dots-a_{2n}x_n]\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\a_{h1}x_1+a_{h2}x_2+\dots+a_{hh}x_h=[\alpha_h-a_{h,h+1}x_{h+1}-\dots-a_{hn}x_n]\end{cases}$$

dove le $x_{h+1}, \dots, x_n$ sono da riguardarsi come note, perchè ad esse diamo valori arbitrarii, che ancora indichiamo con $x_{h+1}, \dots, x_n$. Queste equazioni si potranno risolvere con la regola di Leibniz-Cramer del § 25, se il determinante dei coefficienti

$$(3)\qquad\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1h}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2h}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{h1}&a_{h2}&\dots&a_{hh}\end{vmatrix}$$

è *differente* da zero. Generalmente potremo in modi molteplici scegliere le h equazioni ed h incognite in guisa che sia soddisfatta quest'ultima condizione. E noi anzi cercheremo di fare

tale scelta in guisa che l'intero h riceva il *massimo valore* possibile (massimo valore, che chiameremo la *caratteristica* del dato sistema di equazioni). Dire che h è scelto in questo modo (così da ricevere il massimo valore possibile) è come dire che *i determinanti di ordine* $k > h$ formati coi coefficienti di k incognite in k delle nostre equazioni *sono tutti nulli* (ammesso che di tali determinanti ce ne siano, cioè che $h < m$, e che $h < n$), mentre almeno un minore di ordine h (che, come dicemmo, possiamo supporre sia il minore (3)) è differente da zero.

In virtù dei risultati del § 24 alla r^{esima} delle residue $m - h$ equazioni ($r = h+1, h+2, \ldots, n$) possiamo sostituire la

$$\begin{vmatrix} a_{11}\,a_{12}\ldots a_{1h}\;\alpha_1 - [a_{1,h+1}\,x_{h+1} + \ldots + a_{1n}\,x_n] \\ a_{21}\,a_{22}\ldots a_{2h}\;\alpha_2 - [a_{2,h+1}\,x_{h+1} + \ldots + a_{2n}\,x_n] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{h1}\,a_{h2}\ldots a_{hh}\;\alpha_h - [a_{h,h+1}\,x_{h+1} + \ldots + a_{hn}\,x_n] \\ a_{r1}\,a_{r2}\ldots a_{rh}\;\alpha_r - [a_{r,h+1}\,x_{h+1} + \ldots + a_{rn}\,x_n] \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$\begin{vmatrix} a_{11}\,a_{12}\ldots a_{1h}\;\alpha_1 \\ a_{21}\,a_{22}\ldots a_{2h}\;\alpha_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{h1}\,a_{h2}\ldots a_{hh}\;\alpha_h \\ a_{r1}\,a_{r2}\ldots a_{rh}\;\alpha_r \end{vmatrix} - x_{h+1} \begin{vmatrix} a_{11}\,a_{12}\ldots a_{1h}\;a_{1,h+1} \\ a_{21}\,a_{22}\ldots a_{2h}\;a_{2,h+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{h1}\,a_{h2}\ldots a_{hh}\;a_{h,h+1} \\ a_{r1}\,a_{r2}\ldots a_{rh}\;a_{r,h+1} \end{vmatrix} - \ldots\ldots - x_n \begin{vmatrix} a_{11}\,a_{12}\ldots a_{1h}\;a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22}\ldots a_{2h}\;a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{h1}\,a_{h2}\ldots a_{hh}\;a_{hn} \\ a_{r1}\,a_{r2}\ldots a_{rh}\;a_{rn} \end{vmatrix} = 0.$$

In questa equazione i coefficienti di $x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots, x_n$ sono tutti nulli, per quanto abbiamo detto poco sopra circa la caratterist ca h.

Quindi questa equazione si può scrivere:

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}\;a_{12}\ldots\ldots a_{1h}\;\alpha_1 \\ a_{21}\;a_{22}\ldots\ldots a_{2h}\;\alpha_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{h1}\;a_{h2}\ldots\ldots a_{hh}\;\alpha_h \\ a_{r1}\;a_{r2}\ldots\ldots a_{rh}\;\alpha_r \end{vmatrix} = 0 \quad (r = h+1, h+2, \ldots\ldots, m).$$

Se h *è la caratteristica del sistema* [1] *del* § 24, *ed è differente da zero il determinante* (3), *noi possiamo alle* m — h

equazioni dopo la h^esima, *sostituire le uguaglianze* (4) *che si ottengono uguagliando a zero gli* m — h *determinanti* (4) *dedotti da* (3) ORLANDO *con una riga di coefficienti di una di queste* m — h *equazioni, e con una colonna dei corrispondenti termini noti.*

Distinguiamo ora due casi:

1°) **Uno di questi** $m - h$ **determinanti orlati è differente da zero.** In tal caso le (4) sono contraddittorie; e quindi il dato sistema [1] **non è risolubile** (non ammette alcun sistema di risoluzioni).

2°) **I determinanti orlati sono tutti nulli**; allora il dato sistema [1] si riduce a (2). Scelti arbitrariamente i valori di $x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots\ldots, x_n$, si dedurranno da (2) con la regola di Leibniz-Cramer i valori di $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_h$. E otteniamo così, se $h = n$, **un solo sistema di soluzioni di** (1) **e, se** $h < n$, **infiniti sistemi di soluzioni**, ciascuno dei quali è determinato dagli $n - h$ valori dati arbitrariamente a ciascuna delle $x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots\ldots, x_n$.

§ 27. — Sistemi di equazioni lineari omogenee.

Se le α_i sono nulle, le nostre equazioni [1] del § 24 si dicono, come è noto, *omogenee*. I deteminanti *orlati* (4) sono tutti nulli, perchè l'ultima colonna è tutta formata di elementi nulli. E il nostro sistema è dunque sempre *risolubile*: cosa, del resto, evidente *a priori*, perchè ognuna delle sue equazioni è soddisfatta, ponendo uguale a zero ognuna delle x. Se la caratteristica h del sistema è proprio uguale al numero n delle incognite, allora, come sappiamo dal § 26, il sistema di equazioni [1] ammette un *unico* sistema di soluzioni: quello che si ottiene uguagliando ogni incognita a zero. Quindi:

Un sistema di m *equazioni lineari omogenee in* n *incognite ammette sempre un sistema di soluzioni, almeno quello formato imponendo il valore zero ad ogni incognita. Esso ammette ulteriormente altre soluzioni soltanto se la caratteristica* h *del sistema è inferiore al numero* n *delle incognite, perchè in tal caso si possono scegliere* n — h *incognite a cui si possono dare valori arbitrari* (restando poi univocamente determinati i valori delle residue h incognite).

In particolare **un sistema di** n **equazioni lineari omogenee in** n **incognite ammette uno e quindi infiniti sistemi di soluzioni non tutte nulle soltanto se il determinante del sistema è nullo.**

Sia, per esempio :

$$(1) \qquad a_{r1}\,x_1 + a_{r2}\,x_2 + \ldots\ldots + a_{rn}\,x_n = 0$$
$$(r = 1\,,\ 2\,,\ \ldots\ldots\,,\ n)$$

il dato sistema di equazioni, che supponiamo di caratteristica $h = n - 1$. Il determinante D di ordine n formato con tutti i loro coefficienti sarà nullo ; e noi potremo supporre che sia differente da zero il seguente minore di ordine $n - 1$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1,\,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2,\,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots\ldots & a_{n-1,\,n-1} \end{vmatrix}$$

che è il complemento algebrico A_{nn} di a_{nn} nel determinante D. Noi sappiamo in tal caso che, scelto ad arbitrio il valore μ di ne risulteranno determinati i valori delle altre x.

Posto $\lambda = \dfrac{\mu}{A_{nn}}$ (ricordo che $A_{nn} \neq 0$), il valore dato ad x sarà λA_{nn}, dove λ è una quantità arbitraria. Con questo valore della x_n, restano fissati i valori di $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n-1}$, e senza nessun calcolo si può verificare che questi valori sono

$$\lambda A_{n1},\ \lambda A_{n2},\ \ldots\ldots,\ \lambda A_{n,\,n-1}.$$

Infatti se si pone :

(2) $x_i = \lambda A_{ni}$ $(i = 1\,,\ 2\,,\ \ldots\ldots\ n)$ (λ = cost. arbitraria) nella r^{esima} $(r = 1\,,\ 2\,,\ \ldots\ldots\ n)$ delle nostre equazioni, il suo primo membro diventa $\lambda\,(a_{r1}\,A_{n1} + a_{r2}\,A_{n2} + \ldots\ldots + a_{rn}\,A_{nn})$, che è zero se $r \neq n$ (pag. 70, § 20, teor. V°), ed è pure nullo se $r = n$, perchè per $r = n$ esso diventa λD, che è nullo per ipotesi.

Le (2) dànno dunque nel caso attuale la più generale soluzione di (1).

Esempi.

1° Se $\Delta, \Delta'\,\Delta''$ sono i discriminanti delle equazioni

$$f(x) = 0\,;\ g(x) = 0\,;\ f(x)\ g(x) = 0,$$

allora, se $\Delta \neq 0$, $\Delta' \neq 0$, si ha che $\dfrac{\Delta''}{\Delta\,\Delta'}$ è il quadrato del risultante delle

$$f(x) = 0,\ g(x) = 0.$$

2° Dimostrare direttamente che un polinomio $P(x)$ di grado $n - 1$ è univocamente determinato, quando se ne conoscano i valori $P(a_1)$, $P(a_2)$, ..., $P(a_n)$ che esso assume in n punti distinti $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$; e calcolare tale polinomio.

Posto

$$P(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots\ldots + b_{n-2} x + b_{n-1} \qquad (1)$$

sarà

$$\left.\begin{aligned} P(a_1) &= b_0 a_1^{n-1} + b_1 a_1^{n-2} + \ldots\ldots + b_{n-2} a_1 + b_{n-1} \\ P(a_2) &= b_0 a_2^{n-1} + b_1 a_2^{n-2} + \ldots\ldots + b_{n-2} a_2 + b_{n-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P(a_n) &= b_0 a_n^{n-1} + b_1 a_n^{n-2} + \ldots\ldots + b_{n-2} a_n + b_{n-1} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Le (2) costituiscono un sistema di n equazioni lineari nelle n incognite $b_0, b_1, \ldots\ldots, b_{n-2}, b_{n-1}$, (i coefficienti di $P(x)$). Il determinante dei coefficienti di tali incognite è il determinante di Vandermonde dei numeri $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}, a_n$; il quale è differente da zero, perchè tali numeri sono distinti. Il teorema di Leibniz-Cramer ci assicura che le b e quindi anche $P(x)$ sono univocamente determinati. Si potrebbe così dalle (2) dedurre i valori delle b, e sostituire in (1). Ma più direttamente, considerando le (1), (2) come un sistema di $n+1$ equazioni nelle n incognite $b_0, b_1, \ldots\ldots, b_{n-1}$, si trae:

$$\begin{vmatrix} P(x) & x^{n-1} & x^{n-2} & \ldots\ldots & x & 1 \\ P(a_1) & a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \ldots\ldots & a_1 & 1 \\ P(a_2) & a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \ldots\ldots & a_2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P(a_n) & a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \ldots\ldots & a_n & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando secondo gli elementi della prima colonna ed indicando con $V(a, b, \ldots\ldots, c)$ il determinante di Vandermonde delle quantità $a, b, \ldots\ldots, c$, si ottiene

$$0 = -P(a_1)\, V(a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, x) + P(a_2)\, V(a_1, a_3, \ldots\ldots, a_n, x) + \ldots\ldots$$
$$+ (-1)^n P(a_n)\, V(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}, x) + (-1)^{n+1} P(x)\, V(a_1, a_2 \ldots\ldots, a_n)$$

donde

$$P(x) = -P(a_1)(-1)^n \frac{V(a_2, a_3, \ldots\ldots a_n, x)}{V(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)} +$$
$$+ P(a_2)(-1)^n \frac{V(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n, x)}{V(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)} + \ldots\ldots + P(a_n) \frac{V(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}, x}{(V(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)}.$$

Sopprimendo in ogni frazione del secondo membro i fattori comuni al numeratore e al denominatore si ritrova la formola del § 14 (pag. 49).

Esercizi.

1° Calcolare e moltiplicare fra di loro a due a due i determinanti

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad D_3 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad D_5 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

Calcolare i determinanti reciproci, verificando il teorema di pag. 80-81.

RIS. Lo studioso farà bene a calcolare i precedenti determinanti anche con lo sviluppo secondo gli elementi di una qualche linea. Più rapidamente si può osservare che $D_1 = 0$, perchè la terza riga è somma delle prime due; che $D_2 = 1$, perchè D_2 si riduce al termine principale; che $D_4 = -1$, perchè, scambiando la seconda e la terza riga di D_4, se ne deduce un determinante il cui sviluppo è ridotto al suo termine principale.

Il determinante D_3 si può semplificare, p. es., sottraendo dalla prima riga la seconda e la terza; il determinante D_5 si semplifica sottraendo dalla prima riga il doppio della seconda.

2° Calcolare

$$D = \begin{vmatrix} l & a & b & d & t \\ l & m & c & e & s \\ l & m & n & f & r \\ l & m & n & g & k \\ l & m & n & g & q \end{vmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} x & a & a & a & a \\ a & x & a & a & a \\ a & a & x & a & a \\ a & a & a & x & a \\ a & a & a & a & x \end{vmatrix}$$

RIS. Con opportune sottrazioni di righe o di colonne si trova:

$$D = \begin{vmatrix} l & a & b & d & t \\ 0 & m-a & c-b & e-d & s-t \\ 0 & 0 & n-c & f-e & r-s \\ 0 & 0 & 0 & g-f & k-r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q-k \end{vmatrix} = l\,(m-a)\,(n-c)\,(g-f)\,(q-k),$$

donde in particolare

$$\begin{vmatrix} l & a & b & c & d \\ l & l & a & b & c \\ l & l & l & a & b \\ l & l & l & l & a \\ l & l & l & l & l \end{vmatrix} = l\,(l-a)^4.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & 0 & a \\ a-x & x-a & 0 & 0 & a \\ 0 & a-x & x-a & 0 & a \\ 0 & 0 & a-x & x-a & a \\ 0 & 0 & 0 & a-x & x \end{vmatrix} = (x-a)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

E con opportune addizioni di righe, si trova:

$$\Delta = (x-a)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x+4a \end{vmatrix} = (x-a)^4 (x+4a).$$

3° Risolvere i sistemi di equazioni seguenti:

$$\begin{array}{l} x + y + z = a \\ x + 2y + 3z = b \\ 2x + 3y + 4z = c \end{array} \qquad \begin{array}{l} x + y + z = a \\ x + 2y + 3z = b \\ 2x + 3y + 5z = c \end{array}$$

RIS. Per il secondo sistema basta applicare la regola di Cramer; per il primo si noti che il determinante del sistema è nullo, che esso è risolubile soltanto se $c = a + b$, nel qual caso si può dare un valore arbitrario alla z, tenendo poi conto delle sole prime due equazioni.

4° Discutere i seguenti sistemi di equazioni per tutti i valori dei coefficienti $a, \alpha, \beta, \gamma, p, q, r, l, m, n$:

$$\begin{array}{l} x + y + z + t = 1 \\ 4x + 5y + 6z + at = 2 \\ 2x + 3y + 4z + 5t = 3 \\ -x + y - z + t = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ 4x + 5y + 6z + at = 0 \\ 2x + 3y + 4z + 5t = 3 \\ -x + y - z + t = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + y + z = l \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = m \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z = n \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + y + z + 3t = 1 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + (\alpha + \beta + \gamma)\, t = 2 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, t = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ px + qy + r = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ px + qy + r = 0 \\ lx + my + n = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \\ 3x + 4y + 5z = 3 \\ 6x + 8y + pz = 6 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \\ 4x + 9y + 16z = 3 \\ 7x + 13y + pz = 6 \end{array}$$

5° Risolvere il seguente sistema di 5 equazioni nelle 5 incognite x, y, z, t, v.

$$\begin{array}{l} lx + ay + bz + ct + dv = 0 \\ lx + ly + az + bt + cv = 0 \\ lx + ly + lz + at + bv = 0 \\ lx + ly + lz + lt + av = 0 \\ lx + ly + lz + lt + lv = 0. \end{array}$$

RIS. Il determinante D dei coefficienti è (es. 2° a pag. 91) uguale a $l(l-a)^4$.

1° Se $l(l-a)^4 \neq 0$, sarà $x = y = z = t = v = 0$.

2° Se $l = 0$, $a \neq 0$, la caratteristica di D è 4, perchè è differente da zero il minore formato dalle prime 4 righe ed ultime 4 colonne. Si dà allora alla x un valore arbitrario e si tien conto delle prime 4 equazioni, che, essendo $l = 0$, risultano omogenee nelle y, z, t, v a determinante non nullo, cosicchè $y = z = t = v = 0$.

3° Se $l = a = 0$, alle x, y si possono dare valori arbitrari; e il nostro sistema si riduce al sistema:

$$\begin{aligned} bz + ct + dv &= 0 \\ bt + cv &= 0 \\ bv &= 0 \end{aligned}$$

che si discute senza difficoltà.

4° Se $l = a \neq 0$, il minore formato dalle prime quattro righ e ultime quattro colonne è

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a & b & c \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-d & d \\ 0 & a-b & b-c & c \\ 0 & 0 & a-b & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a(a-b)^3.$$

Se $a \neq b$, questo minore è differente da zero; dato alla x un valore arbitrario, si ricavino i valori di y, z, t, v, dalle prime quattro equazioni.

5° Resta ad esaminare il caso che $l = a = b \neq 0$, ecc. ecc.

6° Calcolare il discriminante della equazione

$$x^2 + px + q = 0$$

e quello della $x^3 + px + q = 0$, confrontando poi coi risultati già noti relativi a queste equazioni.

RIS. Per l'equaz. $x^2 + px + q = 0$ la somma dei quadrati s_2 delle due radici vale $p^2 - 2q$. Quindi il discriminante vale

$$\begin{vmatrix} 2 & -p \\ -p & p^2 - 2p \end{vmatrix} = p^2 - 4q = 4\left(\frac{p^2}{4} - q\right).$$

Ed è ben noto che le due radici di tale equazione sono uguali soltanto se $\frac{p^2}{4} = q$, ecc. ecc.

7° Per quali valori di a può avvenire che l'equazione $x^n + a = 0$ abbia due radici uguali?

8° Per quali valori delle p, q l'equazione $x^3 + px + q = 0$ ha due radici uguali?

CAPITOLO VI.

FUNZIONI, LIMITI

§ 28. — Intervalli, intorni.

L'insieme dei numeri reali compresi tra due numeri dati a, b si chiama *intervallo finito* e si indica con (a, b). Nella corrispondenza tra numeri e punti di una retta r tale intervallo ha per immagine un segmento finito. Dei due *estremi* a, b il minore si chiama estremo inferiore, o sinistro; il maggiore si chiama estremo superiore o destro. Il valore assoluto $|b - a|$ dicesi *grandezza* o *ampiezza* dell'intervallo. Gli estremi a, b si considerano, salvo avvertenza contraria, come appartenenti all'intervallo (a, b).

L'insieme dei numeri non minori di un numero a si indica con $(a, +\infty)$ e si dice costituire l'*intervallo infinito*, che ha a per estremo sinistro o inferiore e $+\infty$ come estremo destro o superiore (notando al solito che questa frase si deve considerare soltanto come un modo di dire e niente più). Il punto a si può talvolta (purchè si avverta esplicitamente) escludere dall'intervallo $(a, +\infty)$. Questo intervallo ha sulla retta r per immagine la semiretta (il raggio) posta a destra del punto a (cioè del punto che ha per ascissa a).

Osservazioni analoghe per i numeri non maggiori di a, che formeranno un intervallo $(-\infty, a)$. Per intervallo $(-\infty, +\infty)$ intenderemo la classe di tutti i numeri reali, che hanno per immagine tutti i punti della retta r.

Assai spesso diremo intervallo in luogo di segmento o viceversa, così come diciamo punto invece che numero, o viceversa.

Se c è un punto dell'intervallo (a, b), questo intervallo si dice *intorno* di c. Se c è l'estremo destro di (a, b), cioè se p. es. $c = b > a$, e quindi il segmento (a, b) cade a sinistra di c, si suol dire che (a, b) è un intorno sinistro di c. Se c coincide invece con l'estremo sinistro di (a, b) si suol dire che (a, b) è un intorno destro di c.

Gli intervalli $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ si dicono poi rispettivamente essere un intorno sinistro o destro di ∞.

§ 29. — Funzioni; funzioni di funzioni.

α) Assai spesso avviene di dover considerare nei calcoli un *simbolo* (lettera), a cui nel ragionamento si dànno valori distinti: Un tale simbolo si dirà essere una *variabile;* i simboli, a cui conserviamo in tutto il discorso lo stesso valore, si diranno essere una *costante.* Uno stesso simbolo potrà in un certo ragionamento essere costante, in un ragionamento successivo variabile (*).

Molto spesso avviene pure che di due variabili reali x, y, una, p. es. la y, sia determinata, appena sia dato il valore della x. Così, per esempio:

1° Se non varia la temperatura, il volume y, che occupa un grammo di ossigeno, è completamente determinato dal valore x della pressione, a cui è sottoposto;

2° La lunghezza y di una data sbarra di ferro è completamente determinata dalla temperatura x (se si trascurano le variazioni dovute alla pressione, cui è assoggettata la sbarra, o se si opera a pressione o tensione costante);

3° Lo spazio y percorso nel vuoto da un grave che cade senza velocità iniziale in un certo luogo, è completamente determinato dal numero x dei secondi impiegati nella caduta;

4° L'area y di un poligono regolare inscritto in un dato cerchio è perfettamente determinata dal numero x dei lati;

5° Il logaritmo decimale y di un numero positivo x è determinato dal valore di x, ecc.

Noi diciamo in questi casi che y è *funzione* della x. Non è però detto che la x possa ricevere valori arbitrari. Nel 1° esempio x non può avere che valori positivi (perchè non ha senso parlare di un gas sottoposto a una pressione negativa); nel 4° esempio x non può che ricevere valori interi maggiori di 2; nel 5° esempio la x non può ricevere valori negativi, perchè non esistono (nel campo dei numeri reali) i logaritmi decimali dei numeri negativi.

L'insieme G dei valori della x, per cui esiste il corrispondente valore della y, si dirà il campo di esistenza della funzione y.

(*) Se noi studiamo, p. es., come variano il volume v, la pressione p, la temperatura t di una certa massa di gas, allora in una serie di esperienze, in cui non si faccia variare la temperatura, si considereranno p e v come variabili; e in una successiva serie di esperienze, in cui non facciamo variare v, considereremo t e p come variabili.

DEF. **Una variabile** (*reale*) y **si dice funzione della variabile** (*reale*) x **per i valori di** x **che appartengono a un certo insieme** G **(campo di esistenza della** y**) se ad ogni valore dato alla** x **nell'insieme** G **corrisponde uno e un solo valore della** y (*).

Se poi y e z sono due tali funzioni della x, definite nello stesso insieme G, allora $y + iz$ si dirà funzione *complessa* della variabile reale x definita nel campo G.

Salvo avvertenza contraria, noi parleremo soltanto di funzioni *reali*.

β) Si hanno spessissimo funzioni definite analiticamente. Così p. es.: $y = mx + n$ (m, n costanti arbitrarie) rappresenta una variabile y che ha un valore determinato, qualunque sia il valore dato allo x [cioè il campo di esistenza della y è formato da tutto l'intervallo $(-\infty, +\infty)$]. Altrettanto avviene della $y = \operatorname{sen} x$.

La $y = +\sqrt{x-3}$ definisce una funzione (reale) y della x nell'intervallo $(3, +\infty)$.

La $y = +\sqrt{x-3} + \sqrt{4-x}$ definisce una funzione (reale) della x nell'intervallo $(3, 4)$.

Invece la $y = +\sqrt{x-3} + \sqrt{2-x}$ non definisce nessuna funzione (reale) della x. Infatti, qualunque sia il valore dato alla x, uno almeno dei binomii $x-3$, $2-x$ è negativo, così che non esiste (nel campo dei numeri reali) la sua radice quadrata.

La $y = \frac{1}{x}$ definisce una funzione della x nel campo formato da tutti i valori della x differenti da zero.

Per indicare che y è una funzione della x si suole scrivere $y = f(x)$. Se poi si considera x come un numero dato, lo stesso simbolo indica il valore corrispondente della funzione; in altri termini si fa la convenzione di rappresentare con $f(a)$ il valore che la funzione assume per il valore particolare a della variabile: così $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$ è il valore, che la funzione $\operatorname{sen} x$ assume per $x = \frac{\pi}{2}$.

L'uguaglianza $y = f(x)$ esprime dunque semplicemente che y

(*) In sostanza dunque l'idea di *funzione* non è che l'idea di *corrispondenza* tra due classi di numeri x, y (univoca in un senso), ossia coincide con l'idea di classe di coppie di numeri (x, y) tale che per ogni x di G esista una e una sola coppia che lo contenga.

è una funzione di x, ossia che y per ciascun valore $x = a$ di x (almeno compreso in un certo gruppo G) assume un valore determinato che si indicherà con $f(a)$. Si può benissimo adoperare anche un'altra lettera diversa da f, scrivere p. es.:

$$F(x),\ \varphi(x),\ \Phi(x),\ \Psi(x),\ g(x),\ \ldots\ldots;$$

e l'uso di questi diversi simboli è conveniente, quando si deve parlare di più funzioni distinte.

Si suole anche considerare una classe estremamente particolare di funzioni y della x: quelle funzioni cioè che conservano uno stesso valore (sono *costanti*), qualunque sia il valore dato alla x. Così, p. es., il volume y di un prisma di data base ed altezza conserva uno stesso valore al variare dell'angolo x, che gli spigoli del prisma formano con la base (o, come si dice anche, è *indipendente* da x).

γ) Talvolta si presentano quantità y, funzioni di una variabile z, la quale è a sua volta funzione di una terza variabile x. Così p. es., il volume y di un kg. di una certa sostanza è una funzione della densità z, la quale è funzione della temperatura x. E spesso avviene, come risulta chiaro da questo esempio, che si possa senz'altro considerare la y come funzione della stessa x. Così, p. es., $y = \log z$ è una funzione della z; e, se $z = \operatorname{sen} x$, è $y = \log \operatorname{sen} x$ una funzione della x. Ma si osservi che, mentre z è definita per ogni valore della x, la y è definita soltanto per i valori positivi di z. E quindi la y, come funzione della x, è definita solo per gli angoli x dei primi due quadranti. In generale, se $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$, potrà darsi che la y si possa considerare come funzione $f[\varphi(x)]$ della x. E una tal funzione esisterà per quei valori della x, tali che il corrispondente valore della $z = \varphi(x)$ appartenga al campo ove è definita la $f(z)$. Una tal funzione $f[\varphi(x)]$ si suol anche chiamare una *funzione di funzione* della x. Se fosse, p. es., $f(z) = \sqrt{z}$, $z = \varphi(x) = -x^2 - 1$ non esisterebbe la $f[\varphi(z)]$, perchè, essendo sempre $-x^2 - 1$ negativo, il simbolo $\sqrt{-x^2 - 1}$ è privo di significato (nel campo dei numeri reali).

§ 30. — Rappresentazione grafica delle funzioni.

Si voglia rappresentare una data funzione $f(x)$; si voglia cioè dare un mezzo o per studiare come varia $f(x)$ al variare di x, o senz'altro per calcolare i valori che assume $f(x)$ per

ogni valore dato alla x (nel campo G). Tra i metodi che possono servire a tale scopo, uno, il metodo delle tavole numeriche, è ormai famigliare al lettore, che ben conosce gli esempi delle tavole logaritmiche e trigonometriche, tanto utili per il calcolo rapido e sufficientemente approssimato delle funzioni:

$$y = \log x, \quad y = \operatorname{sen} x, \quad y = \cos x, \quad y = \log \operatorname{sen} x, \text{ ecc.}$$

Naturalmente si possono, almeno teoricamente, costruire tabelle numeriche per ogni funzione. La fisica ne porge numerosi esempi. Ricorderò, p. es., le tavole che dànno la densità y dell'acqua alle varie temperature x, la temperatura y di ebollizione dell'acqua alle varie pressioni x, ecc.

Ma talvolta si suole ricorrere a procedimenti grafici, i quali, sebbene generalmente meno precisi, hanno il vantaggio di permettere di abbracciare con un solo colpo d'occhio l'andamento di una funzione $y = f(x)$, e talvolta persino di risolvere con rapidità questioni che analiticamente porterebbero a lunghi sviluppi di calcolo. Ciò che è specialmente utile, se il campo G dei valori, per cui è definita la y, è formato da tutti i punti di un intervallo; caso, al quale soltanto sono dedicate le considerazioni seguenti.

Su un foglio di carta si scelgono due rette normali Ox, Oy come assi cartesiani ortogonali.

Sulla prima si portino dei segmenti OA uscenti da O, aventi lunghezze $x = OA$ arbitrarie, ma appartenenti al campo G, ove la y è definita.

Si innalzino dagli estremi A di questi segmenti delle perpendicolari uguali in lunghezza e segno al valore della y corrispondente al valore OA della x. Otteniamo così vari punti; e tanti più ne otterremo, e (nei casi comuni) tanto più vicini, quanto sarà maggiore il numero dei valori della x che si considerano, e quanto meno distano l'uno dall'altro questi valori. Se noi immaginiamo eseguite queste operazioni per tutti i valori della x, gli estremi delle perpendicolari innalzate si trovano su una curva, che diremo immagine della funzione $f(x)$, e che la Geometria Analitica chiamerebbe la curva che ha per equazione $y = f(x)$. Dobbiamo anzitutto fare alcune osservazioni:

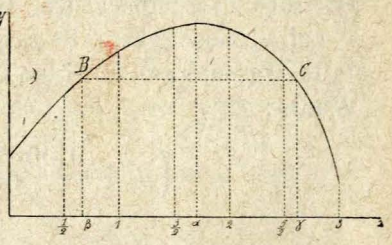
1° Il disegno resta molto facilitato se la carta è millimetrata, perchè così più facilmente si misurano i segmenti paralleli o normali ad Ox (purchè Ox sia una delle righe tracciate sulla carta). Il Regnault, per maggiore precisione, in taluni suoi studi ricorse a curve tracciate su tavole di rame.

2° È impossibile disegnare effettivamente tutti i segmenti normali ad Ox, di cui si ha bisogno. Generalmente se ne traccia soltanto un numero sufficientemente grande, congiungendo poi gli estremi con una *linea possibilmente regolare*. Questo è sufficiente nei casi più comuni. (La frase *linea regolare* non ha un preciso significato matematico, ma un ben chiaro significato intuitivo).

3° Talvolta però si usano speciali disposizioni pratiche, che permettono di ottenere senz'altro la nostra curva, o, come si suol anche dire, il nostro *diagramma*.

Immaginiamo, p. es., che il nostro foglio di carta strisci su sè stesso, in modo che la retta Ox strisci su sè stessa. La velocità di tale strisciamento sia uniforme e tale da far percorrere verso sinistra l'unità di lunghezza (p. es. 1 cm.) nell'unità di tempo (p. es. 1′); in altre parole, il punto posto a destra di O su Ox, alla distanza di x cm. dal punto O, sia dopo x minuti primi venuto proprio in O. Il punto M sia mobile sulla retta che è la posizione iniziale di Oy, parta dal punto O, percorra lo spazio $f(x)$ in x minuti secondi (*), e porti una punta scrivente sul foglio di carta. La traccia lasciata da esso sarà precisamente la $y = f(x)$.

In pratica il foglio di carta è avvolto su un cilindro (che un movimento d'orologeria fa rotare di velocità uniforme) e viene poi svolto su un piano; la punta scrivente congiunta ad M è da una molla premuta su tale cilindro. Se il punto mobile M fosse, p. es., un punto invariabilmente congiunto all'estremità superiore di una colonna termometrica o barometrica, l'apparecchio diverrebbe un registratore automatico della temperatura (termografo), o della pressione atmosferica (barografo).



4° È inutile avvertire che generalmente i punti della retta Ox a sinistra di O corrispondono a valori negativi della x, i punti della Oy posti al di sotto di O a valori negativi della y.

Dall'esame della curva $y = f(x)$ si possono dedurre molte proprietà della $f(x)$. Così, per esempio, se noi ritorniamo al punto mobile M, e alla figura qui sopra disegnata, noi vediamo tosto da essa che y cresce fino a che x assume un valore

(*) Lo spazio OM percorso da M su Oy è evidentemente una funzione del tempo x impiegato a percorrerlo.

$x = \alpha$ di poco inferiore a $\frac{7}{4}$ per poi diminuire. Ciò vuol dire che nei primi α minuti il punto M si allontana da O per poi di nuovo avvicinarsi ad O. Essendo, diremo così, più ripida la curva per $x > \alpha$, che per $x < \alpha$, ne deduciamo che la velocità con cui M ritorna verso O è maggiore di quella con cui se ne era allontanato, ecc.

Se ci proponiamo di vedere in quali istanti la distanza OM era, p. es., uguale a 1, basta cercare i punti della nostra curva, la cui distanza da Ox vale 1; si trovano facilmente i punti B, C, le cui ascisse la nostra figura dimostra approssimativamente uguali a $\frac{5}{8}$ e $\frac{21}{8}$. Quindi dopo circa $\frac{5}{8}$ o $\frac{21}{8}$ minuti la distanza OM vale 1, ecc., ecc.

Anche solo queste prime e semplicissime applicazioni basteranno a dare un'idea di alcuni dei vantaggi che presenta il metodo grafico di rappresentare una funzione. E oramai negli studi più svariati di fisica, di economia, ecc., si ricorre ad esso. Ricorderò qui soltanto i così utili orari grafici delle strade ferrate, che sono appunto costruiti per rappresentare il movimento su una linea Ox di un treno M secondo i principii sopra svolti.

Voglio citare ancora un esempio di rappresentazione grafica (*). Sia data dell'anidride carbonica che alla temperatura 0° e alla pressione di un'atmosfera ha il volume 0,9936. Tenendo costante la temperatura, la pressione y, misurata in atmosfere, a cui si assoggetta il gas, è funzione del volume x occupato dallo stesso gas. E si ha precisamente l'equazione di Van Der Waals:

$$\left(y + \frac{0{,}00874}{x^2}\right)(x - 0{,}0023) = 1$$

che permette, per ogni valore della x, di calcolare il corrispondente valore della y.

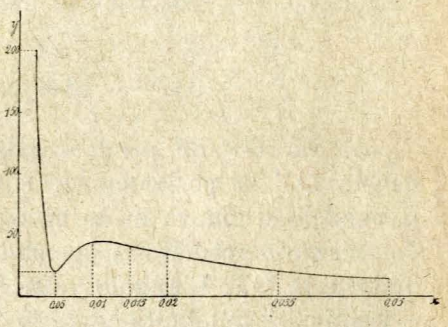
In questa equazione sono contenute tutte le leggi di dipendenza della y dalla x. Ma queste diventano ben più intuitive, se ricorriamo alla rappresentazione grafica. Calcolando per mezzo

(*) Tolgo questo esempio dal libro di NERNST u. SCHÖNFLIESS: *Einführung in die mathem. Behandlung der Naturwissenschaften.*

di questa equazione i valori di y corrispondenti a un dato valore della x, costruiamo facilmente la seguente tabella:

x	y	x	y
0,1	9,4	0,008	38,8
0,05	17,5	0,005	20,9
0,015	39,9	0,004	42,0
0,01	42,6	0,003	45,7

E la rappresentazione grafica dà la curva qui disegnata, in cui però per misurare i segmenti dell'asse delle x e quelli dell'asse delle y si sono scelte distinte unità di lunghezza.



Ne deduciamo, p. es., che:

1° Data la distanza y di un punto della curva dall'asse delle x, il punto è determinato, e ne è quindi determinata l'ascissa x, se p. es. $y > \alpha$ o $y < \beta$, essendo α un numero che la figura dimostra compreso tra 40 e 50, e β prossimamente uguale a 20. Vale a dire: Se la pressione è minore di β atmosfere o maggiore di α, il volume del gas è completamente determinato dalla pressione a cui si assoggetta. Invece si vede tosto che a ogni valore della pressione y compreso tra α e β corrispondono *tre* possibili valori del volume x;

2° Si vede pure che mentre il volume cresce da 0,01 in poi, la pressione va diminuendo dapprima con una certa rapidità, poi con una certa lentezza. E, mentre il volume diminuisce da 0,005 in poi, la pressione va rapidamente aumentando, ecc.

Esercizi.

1° Una funzione $y = \text{cost.}$ è rappresentata da una retta parallela all'asse delle x.

2° Rappresentare le funzioni $y = 3x + 4$, $y = 3x + 5$, $y = 4x + 6$, $y = 4x + 7$.

RISP. Si deve verificare col disegno: α) che le curve corrispondenti sono rette; β) che le prime due sono tra loro parallele, perchè hanno lo stesso coefficiente angolare 3; γ) che anche le ultime due sono parallele.

3° Rappresentare graficamente la legge di Boyle-Mariotte. (Se x è il volume d'un gas perfetto alla pressione y, è $x\,y =$ costante; si supponga questa costante, p. es., uguale a 1). E dedurne come varia y al variare della x. (La curva immagine è un'iperbole equilatera).

4° Rappresentare la curva $y = +\sqrt{1 - x^2}$.

RISP. Si deve trovare un semicerchio.

5° Si rappresenti graficamente qualche fenomeno fisico, partendo o da una legge fisica o da tavole numeriche.

Così, p. es., si può rappresentare come varia la intensità luminosa y al variare della distanza x dalla sorgente luminosa ($y\,x^2 =$ cost.), oppure come varia la densità y di un corpo, l'acqua, p. es., col variare della temperatura x, ecc.

§ 31. — Esempi preliminari di limiti.

α) Sia OP un pendolo mobile attorno ad un punto O; e ne sia OV la posizione di equilibrio stabile. Supponiamo che il pendolo si muova in un mezzo così viscoso, che la resistenza del mezzo impedisca al pendolo OP di risalire dopo che sia disceso in OV. L'angolo y che OP forma con OV va diminuendo, e diminuisce indefinitamente fino a diventare tanto piccolo quanto si vuole, e, quando è *diventato* minore di un qualsiasi angolo ε, non cresce più, ma *resta* minore di ε. Ora y è una funzione del tempo x impiegato dal pendolo nel suo movimento. Quanto più x aumenta, tanto più piccolo y *diventa* e *resta*. Cioè che esprimeremo dicendo, che y tende a zero, (ha per limite zero, diventa infinitesimo) se x cresce indefinitamente (per $x = +\infty$) e scrivendo $\lim_{x=+\infty} y = 0$.

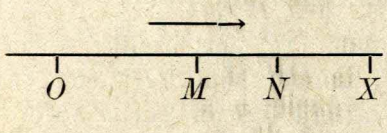
β) Sia ancora OP un pendolo oscillante attorno ad un punto O; e ne sia OV la posizione di equilibrio stabile. Per fissare le idee, supponiamo che gli attriti, la resistenza del mezzo siano tali che, se il pendolo parte da una posizione OP che con OV fa un angolo α, esso, oscillando, giunga dall'altra parte di OV fino alla posizione OP_1 che con OV fa angolo $-\frac{\alpha}{2}$. Cosicchè, tenendo conto dei segni, possiamo dire che, se l'angolo y di OP con OV ha il valore α al principio di una oscillazione, il valore di y varia durante l'oscillazione e, partendo da α, e passando per lo zero, giunge fino al valore $-\frac{\alpha}{2}$. Naturalmente poi il

pendolo retrocede fino a che il valore di y, ripassando per lo zero, giunge al valore $-\frac{1}{2}(-\frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{4}$, per poi retrocedere di nuovo giungendo al valore $-\frac{\alpha}{8}$, e così via.

E resta evidente che, se si prende il numero delle oscillazioni compiute dal pendolo *abbastanza grande*, si rendono piccoli a piacere i valori che può poi assumere y: ciò che esprimeremo scrivendo $\lim_{x=+\infty} y = 0$.

Infatti, se ε è un numero positivo piccolo a piacere, sia n così grande che $2^n > \frac{|\alpha|}{\varepsilon}$. Per $x \geqq n$ sarà $2^x > \frac{|\alpha|}{\varepsilon}$, $\frac{|\alpha|}{2^x} < \varepsilon$. E quindi per $x > n$ l'angolo y è a *fortiori* minore di ε.

γ) Tra i due precedenti esempi passa una certa differenza di comportamento. Mentre nel 1° la y varia al crescere della x sempre in un verso, e, senza mai essere nulla, finisce col *diventare* e *restare* piccola a piacere, la quantità y del secondo esempio tende pure a zero. Ma essa non varia sempre in un verso: il suo valore assoluto prima diminuisce fino ad annullarsi, poi aumenta di nuovo, torna a diminuire, e così via. I massimi valori che $|y|$ raggiunge in ogni oscillazione vanno diventando però sempre più piccoli; cosichè anche la y del secondo esempio, come la y del primo, finisce da un certo momento in poi con l'essere diventata e *restare* piccola a piacere in valore assoluto.



δ) Se un punto M si muove di moto *uniforme* su una retta OX, partendo da O, e movendosi p. es. verso destra, la distanza $y = OM$ cresce sempre, anzi da un certo istante in poi diventa e *resta* maggiore di una qualsiasi lunghezza L assegnata. Se, per es., misuriamo il tempo (in minuti, o in secondi, o ecc.) a partire dall'istante iniziale del movimento, e se v è la velocità (supposta costante) del movimento, dopo $x > \frac{L}{v}$ unità di tempo, si ha $OM = y = x\,v > L$. Ciò che noi esprimeremo scrivendo $\lim y = \infty$ (quando x cresce indefinitamente), o anche senza altro $\lim_{x=\infty} y = \infty$.

Sia ora N un punto che oscilli rapidamente intorno al precedente punto mobile M, e supponiamo che l'ampiezza di tali oscillazioni sia costantemente di 1 cm. La distanza $y = ON$

potrà anche in certi intervalli di tempo diminuire (quando N si muove oscillando in direzione opposta al movimento di M). Ma ciononostante i valori minimi che successivamente acquista $x = ON$ vanno crescendo sempre, vanno diventando grandi ad arbitrio, cosicchè ad un certo istante x in poi anche $y = ON$ diventa e *resta* maggiore di una qualsiasi lunghezza assegnata. Perciò noi diciamo ancora che $\lim_{x=\infty} y = \infty$.

ε) Consideriamo la quantità $y = \frac{1}{x-3}$; essa è una funzione della x nel campo formato da tutti i possibili valori della x, eccettuato il valore $x = 3$.

Si noti che per $x = 3,1$; 3,01 ; 3, 001 ; ..... si ha rispettivamente $y = 10$; $y = 100$; $y = 1000$, ecc. E si riconoscerà tosto che, man mano che la x si avvicina a 3, il numero $x - 3$ diventa e resta piccolissimo, il numero $\frac{1}{x-3}$ grandissimo (in valore assoluto); ciò che noi indichiamo scrivendo $\lim_{x=3} y = \infty$.

Il lettore costruisca il diagramma (la curva immagine) della nostra funzione (che si trova essere un'iperbole equilatera) e cerchi di illustrare col disegno i fatti qui enunciati.

Si noti che, per assegnare il $\lim_{x=3} y$, si sono considerati i valori delle x prossimi al valore 3, e *non il valore* 3, per il quale anzi la y non è neppur definita.

ζ) Consideriamo infine un pendolo OP che oscilla senza smorzamento attorno al punto O. L'angolo y di OP con la posizione OV di equilibrio stabile varierà da un certo valore α fino a $-\alpha$, per poi tornare al valore α, e così via. In ogni oscillazione esistono valori di y vicinissimi ed anzi coincidenti con ogni numero γ scelto nell'intervallo $(-\alpha, \alpha)$. Ma y, dopo essersi avvicinato al valore γ, se ne allontana; e la misura $|y - \gamma|$ di questo avvicinamento, pur raggiungendo ad ogni oscillazione addirittura il valore zero, continua pure a raggiungere i valori $|\alpha - \gamma|$ e $|-\alpha - \gamma|$; cosicchè, pur *diventando* minore di un numero ε piccolo a piacere, non *resta*, da nessun istante in poi, minore di un tal numero ε. Noi diremo perciò che $\lim y$ non esiste, o che y non tende ad alcun limite, quando il numero delle oscillazioni tende all'infinito.

§ 32. — Limiti.

Cerchiamo di dare una definizione di limite, che corrisponda alla nozione intuitiva messa in evidenza dagli esempi del § 31.

A) In generale sia y una funzione della x definita in un certo campo G.

Noi scriviamo $\lim_{x=a} y = b$ (a, b numeri finiti), se, preso un numero positivo ε piccolo a piacere (*), la differenza $y - b$ è minore in valore assoluto di ε ($|y - b| \leq \varepsilon$), per tutti i numeri x di G abbastanza vicini ad a, ma *differenti* da a.

Noi scriviamo $\lim_{x=\infty} y = b$ (b numero finito) se, preso un numero positivo ε piccolo a piacere, la differenza $y - b$ è minore in valore assoluto di ε ($|y - b| \leq \varepsilon$) per tutti i valori x di G abbastanza grandi in valore assoluto.

Per precisare tale definizione, osserviamo che sono equivalenti le frasi seguenti:

α) « Il numero x è abbastanza vicino al numero a ».

α') Il numero x è abbastanza grande in valore assoluto.

β) « La differenza $x - a$ è abbastanza piccola in valore assoluto ».

β') Il numero $\frac{1}{x}$ è abbastanza piccolo in valore assoluto.

γ) Il punto x appartiene ad un certo intorno del numero a (o anche ad un intorno abbastanza piccolo di a).

γ') Il punto x appartiene ad un certo intorno di ∞.

Se poi vogliamo precisare il significato delle parole « abbastanza », « un certo », che compaiono nelle frasi precedenti, e che possono avere un significato più o meno ampio a seconda del problema trattato, possiamo dire:

δ) La differenza $x - a$ non supera in valore assoluto un certo numero σ ($|x - a| < \sigma$) (**).

δ') Il numero x supera in valore assoluto un certo numero m.

ε) Il punto x appartiene ad un intorno $(a - \sigma, a + \sigma)$ del numero a.

ε') Il punto x appartiene ad un certo intorno $(m, +\infty)$ o $(-\infty, m)$ del punto ∞.

(*) La definizione non cambierebbe di significato se io dicessi solamente: « un numero ε arbitrario ».

(**) L' « *abbastanza piccolo* » acquista così il significato preciso di « *minore di τ in valore assoluto* ».

Con queste osservazioni le definizioni precedenti si possono enunciare anche così:

Noi scriviamo $\lim_{x=a} y = b$ (a, b numeri finiti) se, comunque si scelga un numero positivo ε piccolo a piacere, esiste un numero σ tale che, se x appartiene a G, se $x \neq a$, ed $|x - a| < \sigma$, i valori corrispondenti della y sono tali che la differenza $y - b$ non superi ε in valore assoluto.

Noi scriviamo $\lim_{x=\infty} y = b$ (b numero finito) se, comunque si scelga un numero positivo ε piccolo a piacere, esiste un numero m tale che, se x appartiene a G, e se $|x| > |m|$, i valori corrispondenti della y sono tali che la differenza $y - b$ non superi ε in valore assoluto.

Ed infine si possono dare le precedenti definizioni nella forma seguente, valida in entrambi i casi, affatto completa e precisa:

Si dice che $\lim_{x=a} y = b$ **(a finito o infinito, b finito), se, preso ad arbitrio un numero ε positivo** *(piccolo a piacere)*, **esiste un intorno γ di a, tale che in tutti i punti di questo intorno (il punto a escluso), che appartengono al campo G, ove la y è definita, la y assume (*) valori, che differiscono da b per non più di ε, ossia che soddisfano alla**

$$|y - b| \leq \varepsilon.$$

Questa disuguaglianza non varrà per tutti i valori di y, ma soltanto per quelli che corrispondono a punti di γ. Si noti che γ varia in generale, quando ε varia. Perchè, se γ *non variasse*, tale disuguaglianza varrebbe, *qualunque fosse* ε, per tutti i valori di y corrispondenti ai punti dell'intorno *fisso* γ. Perciò ognuna delle corrispondenti differenze $|y - b|$, essendo minore di un numero $\varepsilon > 0$ arbitrario, sarebbe nulla. Pertanto questi valori di y sarebbero *tutti* uguali a b. Cioè esisterebbe un intorno γ di a, in cui la y avrebbe *sempre* lo stesso valore b.

Notiamo che porre la disuguaglianza

$$|y - b| \leq \varepsilon \qquad (1)$$

equivale a dire che entrambe le differenze $y - b$, $b - y$ sono algebricamente minori di ε. Infatti, quella di queste differenze, che è positiva, è uguale a $|y - b|$, ed è quindi per ipotesi non maggiore di ε; e quella delle due precedenti differenze, che è negativa, è certamente minore di ε, perchè ε è positivo.

(*) Ricordo che si dice valore *assunto* dalla y in un punto, p. es., nel punto $x = c$, il valore di y corrispondente al valore c della x.

Alla precedente disuguaglianza si possono sostituire le seguenti due:

$$y - b \leq \varepsilon \quad ; \quad b - y \leq \varepsilon \qquad (2)$$

che si possono scrivere

$$b - \varepsilon \leq y \leq b + \varepsilon. \qquad (3)$$

La (3) dice che y è *compreso* tra $b - \varepsilon$ e $b + \varepsilon$.

I valori che la y assume per i citati valori di x formano dunque una classe di numeri, il cui limite inferiore l non è inferiore a $b - \varepsilon$, e il cui limite superiore L non è superiore a $b + \varepsilon$.

Osservazione critica.

Questa ultima osservazione permette di presentare sotto nuova luce la definizione di limite, e di vederne le possibili generalizzazioni. E forse per qualche lettore la seguente trattazione potrà apparire più facile della precedente. Premettiamo una osservazione.

Siano γ_1, γ_2 *due intorni del punto* a; *e sia* γ_1 *una parte di* γ_2 (cioè i punti di γ_1 appartengano a γ_2). Tra i valori che y assume per i valori di x (distinti da a e che appartengano a G) appartenenti a γ_2 saranno compresi anche i valori assunti da y, quando x (sempre appartenendo G ed essendo distinto da a) si muove entro γ_1 (e ciò perchè, per ipotesi, γ_1 è interno a γ_2). Quindi evidentemente: *I limiti* L_1, l_1 *superiore e inferiore dei valori assunti da* y *quando* x *varia in* γ_1 (colle solite restrizioni) *e i limiti analoghi* L_2, l_2 *relativi a* γ_2 *soddisfano alle* $L_2 \geqq L_1 \geqq l_1 \geqq l_2$ (*). Cioè, *mentre un intorno* γ *di* a *impicciolisce, il limite superiore* L *dei valori corrispondenti di* y *non aumenta, il limite inferiore* l *non diminuisce*, pure essendo sempre $L \geqq l$. Dunque *il limite inferiore* Λ *degli* L, *e il limite superiore* λ *degli* l *soddisfano alle* $\Lambda \geqq \lambda$.

Nel nostro caso (il caso elementare) in cui $\lim_{x=a} y = b$, preso un ε piccolo a piacere, esiste, come abbiamo veduto, un intorno γ di a per cui il limite superiore L non supera $b + \varepsilon$, l'inferiore l non è minore di $b - \varepsilon$, per cui cioè $L - l$ non supera 2ε. In tale caso dunque la classe degli L è contigua alla classe degli l; cioè $\Lambda = \lambda$. E questo numero $\Lambda = \lambda$ di separazione delle due classi coincide appunto col limite b di y per $x = a$. Potremmo dunque anche dire:

Si dice che *il limite di* y per x = a *esiste, se la classe degli* L *è contigua alla classe degli* l; *come valore* $\lim_{x=a}$ y *di questo limite s'intende in tal caso il numero di separazione delle due classi.*

Questa definizione è molto analoga a quella data per le aree e i volumi delle figure piane o solide. Si capisce che dalle nostre ricerche elementari resta escluso il caso $\Lambda > \lambda$, in cui secondo le attuali definizioni, non esiste il *limite* di y per $x = a$; Λ e λ sono nel caso generale i cosidetti *massimo e minimo limite* di y per $x = a$. Si possono poi distinguere i limiti per $x = a+$ da quelli per $x = a-$.

Oss. 1ª. Affinchè queste definizioni abbiano senso, si deve però ammettere che *in ogni intorno di* a *esistano punti* x *appartenenti a* G, *ma distinti da* a. Vale a dire, se a è finito

(*) Ciò è una facile estensione del teorema evidente:

Se a_1, a_2, ..., a_n sono dei numeri, e a_1, a_2, ..., a_m (con $m \leq n$) sono una parte dei precedenti, il massimo (minimo) dei primi non è inferiore (superiore) al massimo (minimo) di questi ultimi.

si deve per ogni numero σ ammettere l'esistenza di punti x, differenti da a, in cui la y è definita e che soddisfano alla $|x-a|<\sigma$; se $a=\infty$, si deve per ogni numero m ammettere l'esistenza di numeri x, per cui la y è definita, e tali che $|x|>|m|$ (*).

Così, p. es., non avrebbe senso parlare del $\lim_{x=1} \sqrt{x-2}$, perchè la y è definita soltanto nel campo G formato dai valori della x, che non sono inferiori a 2. Ed evidentemente vicino ad 1 [p. es., nell'intorno $(1-\sigma,\ 1+\sigma)$ ove $\sigma=\frac{1}{2}$] non esistono valori di G.

Oss. 2ª. Se i valori della x, di cui si parla nelle precedenti definizioni, sono scelti tutti in intorni a sinistra del punto a, allora, anzichè scrivere $\lim_{x=a} y$, si scrive spesso $\lim_{x=a-0} y$ (se a è finito) oppure $\lim_{x=+\infty} y$ (se a è infinito). Si scrive $\lim_{x=a+0}$ oppure $\lim_{x=-\infty}$, se i valori considerati della x sono scelti in intorni destri del punto a. Le notazioni $\lim_{x=a}$, $\lim_{x=\infty}$ sono però usate anche in tali casi, se non vi è possibilità di un equivoco.

Si scrive anche $\lim_{x=a-}$ e $\lim_{x=a+}$, anzichè $\lim_{x=a-0}$ e $\lim_{x=a+0}$.

Così, p. es., la $y=x+\frac{|x-1|}{x-1}$ è una funzione definita per tutti i valori della x, il punto $x=1$ eccettuato. Ed è $\lim_{x=1-0} y=0$. Infatti, se ε è un numero piccolo a piacere, per i valori della x dell'intorno $1-\varepsilon<x<1$ del punto 1 è $0-y|=|y|=|x+\frac{1-x}{x-1}|=|x-1|<\varepsilon$. In modo simile si prova che $\lim_{x=1+0} y=2$.

(Si ricordi che per $x<1$ è $|x-1|=|1-x|=1-x$, $\frac{|x-1|}{x-1}=-1$ e che per $x>1$ è $\frac{|x-1|}{x-1}=1$).

Oss. 3ª. È essenziale notare che, pure esistendo il $\lim_{x=a} y$, può darsi benissimo che per $x=a$ la y non sia definita, od anche che vi abbia un valore affatto distinto da $\lim_{x=a} y$, perchè,

(*) Questa proprietà si suole anche enunciare dicendo: Il punto a è *punto limite* di G

per la stessa definizione, per calcolare il $\lim_{x=a} y$ si devono esaminare i valori che y assume in punti *distinti* dal punto $x = a$.

Oss. 4ª. Se in un intorno di $x = a$ la y riceve costantemente uno stesso valore b, evidentemente $\lim_{x=a} y = b$.

Oss. 5ª. La $\lim y = b$ si legge: Il limite di y per $x = a$ è b; oppure y tende al limite b, o anche tende a b per $x = a$, oppure per $x = a$ la $y - b$ tende a zero, diventa infinitesima, è infinitesima.

Sarà un utile esercizio al lettore illustrare le precedenti definizioni con gli esempi del § 31.

Oss. 6ª. Supponiamo che esista il $\lim_{x=a} y = l$, e che, quando $x \neq a$, si abbia $y > k$ oppure $y \geq k$.

Dovranno esistere dei valori di y tali che $|y - l| < \varepsilon$, e in particolare che $l \geq y - \varepsilon$. Poichè ogni valore della y non è inferiore a k, sarà $l \geq k - \varepsilon$; ma ε è un numero piccolo a piacere. Dovrà dunque essere $l \geq k$.

Così pure, se per $x \neq a$ è $y < k$, oppure $y \leq k$, è $l \leq k$.

Come si vede, le disuguaglianze precedenti relative alla y si conservano *attenuate* (mi sia lecita la frase) per un limite di y. Dico *attenuate*, perchè se, p. es., $y > k$, dalla $l = \lim y$ posso non già dedurre che $l > k$, ma *soltanto* che $l \geq k$. Un fatto analogo ci è già noto (pag. 10) per i limiti superiore ed inferiore.

Oss. 7ª. Viceversa, se, p. es., $\lim y = l < k$, esiste per ogni $\varepsilon > 0$ arbitrario un intorno γ di a tale che in questo intorno $y \leq l + \varepsilon$. Scelto $\varepsilon < k - l$, sarà dunque in tale intorno $y < k$. Un risultato analogo si ottiene se $l > k$.

Dalla disuguaglianza $\lim y < k$ **[oppure** $\lim y > k$**] si deduce quindi una disuguaglianza** $y < k$ **[oppure** $y > k$**] per i valori della** y**; la quale però** (si noti) **è valida non già per tutti i valori della** y**: ma** *soltanto* **per quei valori che la** y **riceve in un** CONVENIENTE **intorno del punto** a.

Invece dalla $y < k$ **[oppure** $y > k$**] si ricava soltanto** $\lim y \leq k$ **[oppure** $\lim y \geq k$**], se questi limiti esistono e sono finiti. Anche dalla** $y \leq k$ **[oppure** $y \geq k$**] si ricava la stessa disuguaglianza.**

B) Converremo di scrivere $\lim_{x=a} y = \infty$ se $\lim_{x=a} \frac{1}{y} = 0$.

Scelto ad arbitrio un numero ε positivo, e, posto $k = \frac{1}{\varepsilon}$, dovrà dunque esistere un intorno γ di a tale che per tutti i

punti di questo intorno (il punto a escluso) che appartengono al campo G ove y è definita, sia $\left|\frac{1}{y}\right| \leq \varepsilon$, ossia $|y| \geq k$, cioè valga l'una o l'altra delle disuguaglianze: $y \geq k$ oppure $y \leq -k$.

Possiamo dunque dire:

È $\lim_{x=a} y = \infty$, *se, scelto ad arbitrio un numero* k *positivo* (arbitrariamente grande), *esiste un intorno* γ *di* a, *tale che nei punti di* γ, *ove la* y *è definita, e che sono distinti da* a, *valga la* $|y| \geq k$, *cioè valga la:*

$$y \geq k \qquad \text{oppure la} \qquad y \leq -k.$$

Se vale sempre in γ *la prima di queste ultime due disuguaglianze, se cioè* y *è positiva in tutto un intorno di* a, *si dirà che il limite di* y *è* $+\infty$.

Se vale in γ *la seconda, si dirà che* $\lim_{x=a} y = -\infty$.

Se in ogni intorno di a la y assume valori tanto positivi che negativi, essa, pur tendendo a ∞, non tende nè a $+\infty$, nè a $-\infty$.

Anche qui potremo distinguere il limite per $x = a + 0$, e il limite per $x = a - 0$.

Dunque $\lim_{x=a} y = b$, (*essendo anche* $a = \infty$ *oppure* $b = \infty$) *allora e allora soltanto che, dato a piacere un intorno* β *di* b, *si può trovare un intorno* α *di* a *tale che quando* $x \neq a$ *varia in* α *assumendo valori per cui* y *è definita, i corrispondenti valori di* y *appartengono a* β.

Il lettore veda come si modifica questa proposizione, se, p. es., $b = +\infty$, oppure $b = -\infty$, o se si tratta del limite per $x = a +$ oppure per $x = a -$.

C) Come abbiamo visto in un esempio precedente, può bene avvenire che $\lim_{x=a-0} y$, $\lim_{x=a+0} y$ esistano entrambi, e siano differenti l'uno dall'altro; nè ciò può stupire, perchè per il primo limite si considerano i valori di y per x posto a sinistra di a; e per il secondo limite si considerano tutt'altri valori della y: quelli corrispondenti a valori di x posti a destra di a.

Vogliamo dimostrare però il seguente:

TEOREMA DI UNICITÀ. *La* y *non può avere due limiti distinti, p. es., per* $x = a + 0$; *cosicchè il* $\lim_{x=a+0} y$ *o non esiste, oppure ha un unico valore ben determinato.*

Supponiamo, p. es., che la y abbia per $x = a + 0$ due limiti finiti h, k. Io dico che $h = k$.

Sia ε un numero piccolo a piacere. Esiste un intorno α a destra di $x = a$, in cui $|y - h| < \frac{\varepsilon}{2}$, ed esiste un intorno β a destra di $x = a$, in cui $|y - k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sia A un punto (del solito campo G e distinto da a), che appartiene al più piccolo di questi intorni; esso apparterrà ad entrambi gli intorni.

Il valore y_A, che y assume in tal punto, soddisferà perciò ad entrambe le disuguaglianze $|y_A - h| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|y_A - k| < \frac{\varepsilon}{2}$.

I numeri h, k avendo da uno stesso numero y_A una distanza minore di $\frac{\varepsilon}{2}$, disteranno l'uno dall'altro per meno di ε, ossia $|h - k| < \varepsilon$.

Ciò che si può anche dimostrare osservando che

$$|h - k| = |(h - y_A) + (y_A - k)| \leq |h - y_A| + |k - y_A| =$$
$$= |y_A - h| + |y_A - k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

La differenza $h - k$, essendo in valore assoluto minore di ogni numero positivo ε, è quindi nulla. c. d. d.

Un utile esercizio sarà quello di completare la dimostrazione del precedente teorema per il caso che sia, p. es., $h = +\infty$.

§ 33. — Funzioni complesse e loro limiti.

Se $u(x)$, $v(x)$ sono funzioni reali della x definite in uno stesso insieme G, la $u(x) + i\,v(x)$ è (§ 29, α, pag. 96) una funzione (complessa) della variabile (reale) x definita nel campo G.

Se $\lim_{x=a} u(x) = m$, se $\lim_{x=a} v(x) = n$, si suol dire che

$$\lim_{x=a} [u(x) + i\,v(x)] = m + i\,n. \qquad (1)$$

Poichè, scelto un $\frac{\varepsilon}{2}$ piccolo a piacere, esistono un intorno γ_1, e un intorno γ_2 di a, tale che nei punti di G (il punto a escluso) che appartengono a tali intorni, valgano le

$$|u(x) - m| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad |v(x) - n| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (2)$$

in un intorno γ interno a γ_1 e a γ_2 varranno entrambe le (2). Varrà anche la

$$|\{u(x) + i\,v(x)\} - \{m + i\,n\}| \leq \varepsilon, \qquad (3)$$

perchè il primo membro di (3) non può superare

$$|u(x) - m| + |v(x) - n|.$$

Viceversa, se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intorno γ per il quale valga la (3), allora è vera la (1). È così trovata una stretta analogia tra le definizioni di limite di una funzione reale o complessa. È evidente che dalla (1) segue

$$\lim_{x=a} \sqrt{[u(x)]^2 + [v(x)]^2} = m^2 + n^2, \text{ cioè:}$$

$$\lim_{x=a} |u(x) + i\,v(x)| = |m + i\,n|$$

(limite del modulo = modulo del limite).

Una formola analoga non si può scrivere per gli argomenti perchè l'argomento di un numero complesso non è univocamente determinato.

Se però $u(x) + i\,v(x)$ è una funzione complessa, il cui modulo per $x = a$ ha per limite r, mentre l'argomento (o, per meglio dire, uno degli argomenti) ha per limite θ, allora $u(x) + i\,v(x)$ ha per limite proprio $r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$.

Se anche una sola delle funzioni $u(x)$, $v(x)$ ha per limite ∞, ossia se $|u + i\,v| = \sqrt{u^2 + v^2}$ ha per limite l'infinito, ossia se $\dfrac{1}{u + i\,v}$ ha per limite zero, diremo che $u + i\,v$ ha ∞ per limite.

§ 34. — Ricerca del $\lim_{x=\infty} p^x$.

Se p è negativo, oppure complesso, supporremo senz'altro x intero. Distinguiamo parecchi casi:

1° Sia $|p| > 1$, $x > 0$.

Si osservi che $|p^x| \geq k$ se $x \geq \dfrac{\log_{10} k}{\log_{10} |p|}$ ossia se x appartiene all'intorno $\left(\dfrac{\log_{10} k}{\log_{10} |p|}, +\infty\right)$ di $+\infty$.

Quindi: $\lim_{x=+\infty} p^x = \infty$ se $|p| > 1$.

2° Sia $|p|<1$, $x<0$. In tal caso $\frac{1}{|p|}>1$, $y=-x>0$,

$$\lim_{x=-\infty} p^x = \lim_{y=+\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^y = \infty .$$

3° Sia $|p|<1$; $x>0$; sarà, posto $q=\frac{1}{p}$,

$|q|>1$ e quindi $\lim_{x=+\infty} q^x=\infty$, donde $\lim_{x=+\infty} \frac{1}{q^x}=0$,

ossia $\lim_{x=+\infty} p^x=0$.

4° Sia $|p|>1$; $x<0$; posto $q=\frac{1}{p}$, sarà $|q|<1$ e quindi per il 2° caso $\lim_{x=-\infty} q^x=\infty$, donde $\lim_{x=-\infty} \frac{1}{q^x}=\lim_{x=-\infty} p^x=0$.

5° Per $p=1$ è $\lim_{x=\pm\infty} p^x=1$ (perchè $p^x=1$ per ogni valore di x).

6° Per $p=-1$ ed x intero, p^x assume i valori $+1$ o -1, secondo che x è pari o dispari; e quindi $\lim_{x=\pm\infty} p^x$ non esiste. Altrettanto avviene se $|p|=1$, e p è un numero complesso.

§ 35. — Primi teoremi sui limiti.

Enuncieremo e dimostreremo questi teoremi per le funzioni reali.

Tali teoremi valgono però, come apparirà evidente, anche per funzioni complesse.

È ben evidente che, se due quantità y_1, y_2 si avvicinano indefinitamente a (hanno per limite) due numeri finiti l_1, l_2, la loro somma, la loro differenza, il loro prodotto e il loro quoziente (se $l_2 \neq 0$) si avvicinano indefinitamente a l_1+l_2, l_1-l_2, $l_1 l_2$, $\frac{l_1}{l_2}$ (nell'ultimo caso si suppone $l_2 \neq 0$). Questa semplice osservazione si enuncia rigorosamente, e in modo più generale, coi seguenti teoremi:

α) *Se* $y_1, y_2, \ldots y_n$ *sono funzioni della* x *definite in uno stesso gruppo* G, *e se, p. es., per* $x=a+0$ *esse hanno dei limiti* $l_1, l_2, \ldots l_n$ *finiti, allora per* $x=a+0$, *la somma* $y_1+y_2+\ldots+y_n$ *ha per limite la somma* $l_1+l_2+\ldots+l_n$ *dei limiti.*

Dimostreremo il teorema nel caso $n = 2$: il caso generale si tratta, o con metodo analogo, oppure col metodo di induzione completa, osservando che:

$$(y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_n) = (y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{n-1}) + y_n.$$

Sia η un numero arbitrario: esisterà un intorno destro α_1 di a, in cui $|y_1 - l_1| < \eta$, ed un intorno α_2 di a, in cui $|y_2 - l_2| < \eta$. Se α è un intorno *interno* tanto ad α_1 che ad α_2, allora in α valgono entrambe le precedenti disuguaglianze; donde si deduce:

$$|(y_1 + y_2) - (l_1 + l_2)| \leq |y_1 - l_1| + |y_2 - l_2| < \eta + \eta = 2\eta.$$

Quindi, dato un numero ε piccolo a piacere e positivo, se ne deduce, posto $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$, che esiste un intorno α di a, in cui $(y_1 + y_2) - (l_1 + l_2)$ è minore di $2\eta = \varepsilon$ in valore assoluto. c. d. d.

Oss. Per stabilire la precedente disuguaglianza sono partito dalla $|a + b| \leq |a| + |b|$ del § 4, δ, pag. 13.

β) Nelle stesse ipotesi di α) *il limite del prodotto* $y_1\, y_2 \ldots\ldots y_n$ *esiste ed è uguale al prodotto* $l_1\, l_2 \ldots\ldots l_n$ *dei limiti.*

Supponiamo, come sopra, $n = 2$. Come sopra si dimostra che, dato un numero positivo η qualsiasi, esiste un intorno α di a, in cui valgono entrambe le $|y_1 - l_1| \leq \eta$, $|y_2 - l_2| \leq \eta$. E quindi in α sarà $|y_1| < |l_1| + \eta$.

Si avrà in tale intorno:

$$|y_1 y_2 - l_1 l_2| =$$
$$= |y_1 (y_2 - l_2) + l_2 (y_1 - l_1)| \leq |y_1|\,|y_2 - l_2| + |l_2|\,|y_1 - l_1|$$
$$\leq \{|l_1| + \eta\}\,\eta + |l_2|\,\eta \leq \eta\,\{|l_1| + |l_2| + \eta\}.$$

Sia ora ε un numero piccolo a piacere; scelto η tale che $\eta < 1$. $\eta < \frac{\varepsilon}{1 + |l_1| + |l_2|}$, esisterà un intorno α di a, in cui:

$$|y_1 y_2 - l_1 l_2| \leq \eta\,\{|l_1| + |l_2| + \eta\} < \frac{\varepsilon}{1 + |l_1| + |l_2|}\,\{|l_1| + |l_2| + 1\} = \varepsilon$$

ossia: $|y_1 y_2 - l_1 l_2| < \varepsilon$. c. d. d.

γ) Se $\lim y_1 = l_1$ e se l_1 è un numero finito diverso da zero, esiste un intorno α di a, in cui $|y_1 - l_1| < \left|\frac{l_1}{2}\right|$, e quindi

$|y_1| > \left|\frac{l_1}{2}\right|$, $y_1 \neq 0$. In tale intorno α ha dunque significato il rapporto $\frac{1}{y_1}$. Analoga considerazione vale se $l_1 = \infty$.

TEOREMA. *Se* $\lim_{x=a} y_1 = l_1$, *e se* l_1 *è un numero finito non nullo, allora* $\lim_{x=a} \frac{1}{y_1} = \frac{1}{l_1}$. *Se invece* $l_1 = \infty$, *allora* $\lim \frac{1}{y_1} = 0$.

Se y_1 *è differente da zero nei punti di un intorno* α *di* a (*distinti da* a) *e se* $\lim_{x=a} y_1 = 0$, *allora* $\lim_{x=a} \frac{1}{y_1} = \infty$.

Se $l_1 = \infty$, $\lim \frac{1}{y_1} = 0$ e viceversa (§ 32, B, pag. 109). Supponiamo che $l_1 \neq 0$ sia un numero finito. Se ε è un numero piccolo a piacere, esiste un intorno β di a, in cui $|y_1 - l_1| < \varepsilon \frac{l_1^2}{2}$. Se γ è un intorno comune a β e all'intorno α, di cui parla la precedente osservazione, in tale intorno γ sarà:

$$|y_1| > \left|\frac{l_1}{2}\right|, \quad |y_1 - l_1| < \varepsilon \frac{l_1^2}{2},$$

donde:

$$\left|\frac{1}{y_1} - \frac{1}{l_1}\right| = \left|\frac{y_1 - l_1}{y_1 l_1}\right| < \frac{\varepsilon \frac{l_1^2}{2}}{l_1 \frac{l_1}{2}} = \varepsilon.$$

Per ogni numero ε esiste quindi un intorno γ, dove $\left|\frac{1}{y_1} - \frac{1}{l_1}\right| < \varepsilon$; da ciò segue tosto il nostro teorema.

COROLLARIO. Se due funzioni y_2, y_1 sono definite nello stesso gruppo G ed hanno per $x = a$ limiti finiti l_2, l_1, e se il limite di y_1 è differente da zero, allora *la frazione* $\frac{y_2}{y_1}$ ha significato (se il denominatore non è nullo) in un intorno α di a, ed *il suo limite per* $x = a$ *è uguale al quoziente* $\frac{l_2}{l_1}$ *dei limiti di* y_2 *e* y_1.

Ciò si dimostra osservando che $\frac{y_2}{y_1}$ è il prodotto di y_2 per $\frac{1}{y_1}$.

Oss. Esistano ancora per $x = a$ i limiti delle y_1, y_2. Se $\lim y_2 = \infty$, $\lim y_1 \neq \infty$, allora $\frac{y_2}{y_1}$ ha per limite ∞.

Se $\lim y_2 \neq 0$, $\lim y_1 = 0$, e se il rapporto $\frac{y_2}{y_1}$ ha significato, allora $\lim \frac{y_2}{y_1} = \infty$.

Se $\lim y_1 = \infty$, $\lim y_2 \neq \infty$, allora $\lim \frac{y_2}{y_1} = 0$.

Se dunque esistono i limiti di y_2 e di y_1, noi sappiamo trovare il limite del quoziente $\frac{y_2}{y_1}$ in tutti i casi, esclusi quelli che entrambe le y_1, y_2 tendano a zero, o che entrambe tendano all'infinito. Questi casi particolari saranno da noi studiati più tardi per altra via. È naturalmente inteso [nel caso che il $\lim y_1$ sia nullo] che si possa parlare del rapporto $\frac{y_2}{y_1}$ e che cioè nei punti di un intorno α di a (il punto a escluso) sia $y_1 \neq 0$ (*).

δ) Sia $y = f(z)$, $z = \varphi(x)$; sia $\lim_{x=a} z = b$, $\lim_{z=b} y = c$. La y si possa considerare come funzione $f[\varphi(x)]$ della x in un intorno di a. È intuitivo che sarà anche $\lim_{x=a} y = c$.

Se però in ogni intorno del punto a esistono punti $x \neq a$, in cui la z assume il valore b, bisogna in più ammettere che $f(b) = c$.

Infatti, preso un numero ε piccolo a piacere, della $\lim_{z=b} y = c$, si deduce che esiste un numero δ tale che per $z \neq b$ e $|z - b| < \delta$ è $|y - c| < \varepsilon$. Dalla $\lim_{x=a} z = b$ si deduce che esiste un numero σ tale che, se $x \neq a$ e se $|x - a| < \sigma$ sia $|z - b| < \delta$. Sarà quindi anche, per quanto trovammo, $|y - c| < \varepsilon$ se $z \neq b$. La disuguaglianza $|y - c| < \varepsilon$ vale però anche se $z = b$ per il valore considerato della x, perchè per ipotesi in tal caso $y = f(b) = c$. Dunque, dato un numero ε piccolo a piacere, esiste un numero σ tale che par $|x - a| < \sigma$ è $|y - c| < \varepsilon$. Donde, per definizione di limite, $\lim_{x=a} y = c$. c. d. d.

In modo simile si tratta il caso che $c = \infty$, oppure $b = \infty$, ecc.

(*) Se fosse $l_1 \neq 0$, questa ultima condizione è sempre soddisfatta, come abbiamo già osservato.

§ 36. — Funzioni continue.

α) Sia $y = f(x)$ una funzione reale della x definita in un certo intervallo. Hanno speciale importanza tra così fatte funzioni (*) quelle funzioni che si sogliono chiamare *continue*, perchè variano con continuità al variare della x, cosicchè se la x varia di pochissimo, anche la y varia di pochissimo. Prima di dare una definizione precisa di tali funzioni, osserviamo che la fisica ci dà esempio non soltanto di funzioni continue, ma anche di funzioni non continue (discontinue).

Sia, p. es., data una certa quantità di ghiaccio alla temperatura di $-10°$. Noi indicheremo con y la minima quantità di calore necessaria per elevare la temperatura del ghiaccio da $-10°$ a x gradi. La y sarà una quantità definita per tutti i valori di x, che corrispondono a temperature sperimentalmente raggiungibili; sarà cioè una funzione di x (positiva per $x > -10$, negativa per $x < -10$, nulla per $x = -10$). Consideriamo la y come funzione della x nell'intervallo $(-10, 0)$. In questo intervallo la y è continua, perchè varia con continuità al variare continuo di x, in quanto che per piccolissimi innalzamenti di temperatura occorrono piccolissime quantità di calore. Anzi, se noi ricorriamo ad una rappresentazione grafica, la curva immagine è, come insegna la fisica, prossimamente coincidente con un segmento rettilineo MC (**) (fig. 10).

Ma consideriamo la y in tutto l'intervallo $(-10, +2)$.

Ricordiamo che, se si somministra a poco a poco del calore al ghiaccio per innalzarne la temperatura, si osserva che, giunto a 0, il termometro per un po' di tempo non segna aumento di temperatura, perchè il calore fornito viene assorbito dalla liquefazione del ghiaccio.

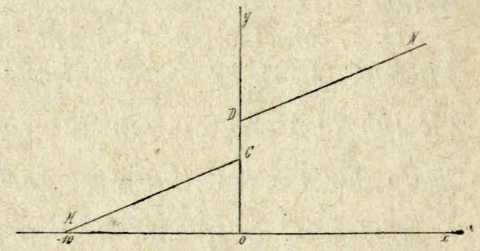


Fig. 10.

Quando questo è tutto liquefatto, la temperatura ricomincia a salire man mano. Per $100 > x > 0$ la nostra funzione y è

(*) Restano così escluse dalle seguenti considerazioni le funzioni definite in un gruppo G di punti, che non sia un intervallo.

(**) Avverto che la figura rappresenta soltanto qualitativamente, e non quantitativamente, il fenomeno fisico.

rappresentata sensibilmente da un altro segmento DN, che non è però il prolungamento di MC.

Il segmento CD rappresenta il *salto*, la discontinuità che ha la y per $x = 0$, ed ha per misura proprio la misura della quantità di calore che la liquefazione del ghiaccio ha assorbito. Come si vede, per far variare di pochissimo la temperatura, si richiede *generalmente* pochissimo calore; ma, se si tratta invece di passare da una temperatura negativa di $-\varepsilon$ alla temperatura positiva di $+\varepsilon$, dove ε è un numero positivo, la quantità di calore necessaria non è piccolissima, anche se ε è piccolissimo, ed è sempre maggiore della quantità di calore necessaria alla fusione del ghiaccio.

In altre parole, il valore di y per $x = 0$ è rappresentato dal segmento OC, mentre i valori di y nei punti di un intorno destro di O, per quanto piccolo, non sono già assai prossimi alla misura di OC, ma sono rappresentati da segmenti che differiscono da OC per non meno che CD, cosicchè il lim y per $x = 0+0$ (cioè quando x tende a zero venendo da destra) è uguale ad OD, e non al valore OC, che y ha nel punto $x = 0$. Perciò si dice che la y è discontinua nel punto $x = 0$.

Si pone anzi la seguente definizione generale:

Sia $y = f(x)$ *una funzione definita in un intervallo* (a, b). *Sia* c *un punto interno a questo intervallo. Se* $\lim_{x=c+0} f(x) = f(c)$ *ed anche* $\lim_{x=c-0} f(x) = f(c)$ *noi diremo che* $f(x)$ *è continua nel punto* c.

Se c *coincide con l'estremo sinistro* (*destro*) *di* (a, b) *la funzione* $f(x)$ *si dirà continua in* c, *se* $\lim_{x=c+0} f(x) = f(c)$ [*se* $\lim_{x=c-0} f(x) = f(c)$]. *In tal caso infatti non avrebbe significato parlare del* $\lim_{x=c-0} f(x)$ [*del* $\lim_{x=c+0} f(x)$] *perchè* $f(x)$ *non è definita a sinistra* (*a destra*) *di* c.

La formola $\lim_{x=c\pm0} f(x) = f(c)$ *si può anche scrivere nella forma* $\lim_{h=\pm0} f(c+h) = f(c)$.

Affinchè dunque $f(x)$ sia continua, p. es., in un punto c interno all'intervallo (a, b), i due limiti $\lim_{x=c+} f(x)$, $\lim_{x=c-} f(x)$ devono esistere *entrambi* ed essere uguali ad $f(c)$. Nell'es. precedente il $\lim_{x=0+} y$ esisteva, ma *non* era uguale al valore di y per $x = 0$. In altri casi di funzioni *discontinue* (non continue),

mancano l'uno o l'altro dei limiti precedenti, o mancano tutti e due.

Se una funzione $f(x)$ è continua in ogni punto c dell'intervallo (a, b) la $f(x)$ si dice *continua nell'intervallo* (a, b).

Una funzione complessa $u(x) + i\,v(x)$ si dirà continua per $x = a$, se $u(x)$, $v(x)$ sono continue per $x = a$.

β) Dalla definizione stessa e dai teoremi del § 35 segue che:

La somma ed il prodotto di più funzioni continue in un punto c [*o nell'intervallo* (a, b)] *sono continui nello stesso punto* (*nello stesso intervallo*).

Se f(x), φ (x) *sono continue in* c, *e* φ (c) $\neq 0$, *allora il rapporto* $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ *esiste in un intorno di questo punto ed è continuo per* x = c.

Esempi di funzioni continue.

1° La funzione sen x è continua dappertutto. Basta far vedere che $\lim\limits_{h=0} \operatorname{sen}(x+h) = \operatorname{sen} x$, ossia che:

$$\lim_{h=0} [\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x] = 0.$$

Ora $|\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x| = 2\left|\operatorname{sen}\dfrac{h}{2}\cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\right| \leq |h|$,

perchè $\left|\cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\right|$ non può superare l'unità e $\left|\operatorname{sen}\dfrac{h}{2}\right| \leq \left|\dfrac{h}{2}\right|$.

Quindi, se ε è un numero positivo piccolo a piacere, in tutto l'intorno $(-\varepsilon, \varepsilon)$ del punto $h = 0$, ossia per $|h| < \varepsilon$, si ha $|\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x| < \varepsilon$.

2° La funzione a^x $(a > 0)$ è continua.

3° La funzione $\log_a x$ $(a > 0)$ è continua.

4° La funzione $y = \operatorname{tang} x$ è continua per $x \neq \pm\dfrac{\pi}{2}$ poichè è quoziente delle funzioni continue sen x, cos x, di cui la seconda è nulla solo per $x = \pm\dfrac{\pi}{2}$ (a meno di multipli di 2 π).

γ) Talvolta avviene che una funzione è continua in tutti i punti di un intervallo, eccetto che in uno o più punti, in cui la funzione può anche non essere definita. Tali punti si diranno i punti *singolari* della funzione in tale intervallo.

Così, p. es., la funzione $y = \dfrac{1}{x-a}$ è continua dappertutto, eccetto che nel punto $x = a$, dove essa non è definita. Il punto $x = a$ è il punto singolare di questa funzione nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$. In questo caso però esiste il $\lim_{x=a} y$ e si ha $\lim_{x=a} y = \infty$.

Ogni qualvolta una funzione continua $f(x)$ ha il punto $x = a$ come punto singolare, ed è $\lim_{x=a} f(x) = \infty$, noi diremo che $x = a$ è un punto d'infinito di $f(x)$, o anche che $f(x)$ ivi diventa infinita.

A meno di esplicita dichiarazione in contrario, noi, quando parleremo di funzioni continue in un intervallo, escluderemo sempre che posseggano punti singolari in tale intervallo.

δ) Sia $y = f(z)$, $z = \varphi(x)$ e sia $\lim_{x=a} \varphi(x) = b$. Sia la y continua per $z = b$; e si possa considerare la $y = f[\varphi(x)]$ come funzione della x in un intorno del punto $x = a$. Dico che

$$\lim_{x=a} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x=a} \varphi(x)] = f(b),$$

ossia che *il simbolo* f *di funzione continua si può permutare col simbolo di limite.* Infatti, poichè $f(z)$ è continua per $z = b$, è $\lim_{z=} y = \lim_{z=b} f(z) = f(b)$. E quindi (§ 35, δ, pag. 116) anche

$$\lim_{x=a} y = \lim_{x=a} f[\varphi(x)] = f(b). \qquad \text{c. d. d.}$$

Così, p. es., $\lim_{x=a} \log f(x) = \log [\lim_{x=a} f(x)]$, se il $\lim_{x=a} f(x)$ è finito e positivo, cioè brevemente, ma incompletamente: *Il limite del logaritmo è uguale al logaritmo del limite.*

Se $\lim_{x=a} f(x)$ esiste ed è uguale ad un numero b finito

$$\lim_{x=a} h^{f(x)} = h^b \text{ (supposto } h > 0).$$

Se $\lim_{x=a} f(x) = b$ si ha $\lim_{x=a} \text{sen } f(x) = \text{sen } b$, ecc.

ε) *Se* $\mathbf{z} = \varphi(y)$, $y = f(x)$ *sono funzioni continue, e se* z *si può considerare come funzione di* x *in tutto un intervallo* (a, b), *la* z *è in tale intervallo funzione continua della* x.

ESEMPI.

1° Si dimostri che x^c ($c = $ cost., $x > 0$) è continua.

RIS. Infatti $x^c = a^y$, dove $y = \log_a (x^c) = c \log_a x$. Poichè a^y è continua, $y = f(x) = c \log_a x$ è pure continua, anche x^c è continua.

Oss. Questo teorema, se $x < 0$, e c è, p. es., un intero positivo, è ancora vero; lo si dimostra osservando che x^c è il prodotto di c funzioni tutte uguali a x e quindi continue.

2° La funzione $y = \log f(x)$ è continua per quei valori della x, per cui $f(x)$ è continua e positiva.

§ 37. — Un limite fondamentale.

α) È ben evidente che, se due punti A_1, A_2 si avvicinano indefinitamente nello stesso tempo ad uno stesso punto L, un punto A, il quale sia sempre compreso nell'intervallo $A_1 A_2$, dovrà pure tendere ad L. Questa osservazione rende intuitivo il

TEOR. *Se* y, y_1, y_2 *sono tre funzioni reali della* x *definite in uno stesso gruppo* G, *se per ogni valore di* x *in* G *la* y *è compresa tra* y_1 *ed* y_2 ($y_1 \leq y \leq y_2$ *oppure* $y_1 \geq y \geq y_2$), *e se* $\lim_{x=a} y_1 = \lim_{x=a} y_2$, *anche* $\lim_{x=a} y = \lim_{x=a} y_1 = \lim_{x=a} y_2$.

Supponiamo, p. es., $\lim_{x=a} y_1 = \lim_{x=a} y_2 = A =$ numero finito. Come al § 35 si dimostra che, dato un numero $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere, esiste un intorno α di a, in cui valgono entrambe le $|y_1 - A| < \varepsilon$, $|y_2 - A| < \varepsilon$. Poichè y è compreso tra y_1 ed y_2, sarà in α anche $|y - A| < \varepsilon$. Ne segue quindi che, dato ε piccolo a piacere, esiste un intorno α di a, in cui vale la $|y - A| < \varepsilon$. Perciò sarà $\lim_{x=a} y = A$.

Il lettore troverà un utile esercizio, completando questa dimostrazione per il caso $A = \infty$.

β) Applicheremo ora questo teorema alla dimostrazione della

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Per una retta interpretazione di questa formola si ricordi che l'angolo x deve essere misurato in radianti. Lo studente farà bene a rendersi intuitiva detta formola costruendo un diagramma della curva $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Noi ci accontenteremo di scrivere varii valori approssimati di detta funzione: ciò che basterà a rendere sensibile il fatto che, quanto più x si avvicina a zero, tanto più $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ si avvicina ad 1.

Per $x = \pm \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{2}{\pi} = \frac{2}{3{,}14159...} = 0{,}63662...$

Per $x = \pm \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{2\sqrt{2}}{3{,}14159...} = 0{,}90032...$

Per $x = \pm \frac{\pi}{180}$, $y = 0{,}99995...$

Per $x = \pm \frac{\pi}{60.180}$, $y = 0{,}99999....$

Se con z indichiamo la misura in gradi dell'angolo di x radianti, sarà: $z = \frac{180\,x}{\pi}$; e quindi $\lim_{z=0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \frac{\pi}{180} \lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ $= \frac{\pi}{180} = \frac{3{,}14159...}{180} = 0{,}01745...$ (*).

La misura in radianti è appunto per ciò fondamentale, perchè, se misurassimo gli angoli in gradi, dovremmo continuamente nelle corrispondenti formole di calcolo introdurre la costante $\frac{3{,}14159.....}{180}$ testè determinata.

La dimostrazione della nostra formola si compie facilmente. Per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ è $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$ (§ 5, δ, pag. 19).

Dividendo per sen x (positivo) si ha:

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Poichè $\lim_{x=0} \cos x = 1$, anche $\lim_{x=0} \frac{1}{\cos x} = 1$. Poichè la funzione $y = 1$ ha pure per limite 1, il teorema precedente dimostra che

$$\lim_{x=0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1 = \lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

(*) Questo numero è la misura in radianti dell'angolo di un grado. Se si misurasse invece l'angolo in gradi centesimali, il valore di questo limite sarebbe $\frac{\pi}{200} = 0{,}01570.....$

E il limite non muta, supponendo x negativo; perchè, se si cambia il segno di x, anche sen x cambia di segno, e quindi $\frac{\text{sen } x}{x}$ rimane invariato.

Es. Trovare $\lim_{x=0} \frac{1 - \cos x}{x}$. Si ha, posto $x = 2y$,

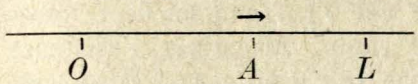
$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{2 \text{ sen}^2 y}{2y} = \frac{\text{sen } y}{y} \text{ sen } y.$$

Per $x = 0$, ossia per $y = 0$, è lim sen $y = 0$, $\lim \frac{\text{sen } y}{y} = 1$.

Quindi $\lim_{x=0} \frac{1 - \cos x}{x} = 1.0 = 0$.

§ 38. — Un altro limite fondamentale.

α) Se un punto A si muove sopra una retta sempre nello stesso verso, p. es., verso destra, è ben chiaro che possono presentarsi due soli casi:



1° Il punto A finisce con l'allontanarsi indefinitamente a destra.

Oppure

2° Esiste un punto L, che il punto A non supera, pure avvicinandosi ad esso indefinitamente. Così, p. es., se il punto A ha una velocità costante, si presenterà evidentemente il primo caso. Se invece A nel primo minuto percorre cm. 1, nel secondo cm. $\frac{1}{2}$, nel terzo cm. $\frac{1}{4}$, nel quarto cm. $\frac{1}{8}$, ... nello n^{esimo} minuto cm. $\frac{1}{2^{n-1}}$, esso dopo n minuti avrà percorso

$$\text{cm.} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Il punto A non sarà perciò mai riuscito ad allontanarsi al di là di quel punto L, che ha una distanza di cm. 2 dal punto di partenza, pure diventando (al crescere di n) la distanza AL $\left(\text{che è } \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ piccola a piacere.

Questa osservazione rende intuitivo il teorema che dobbiamo ora esporre.

Si dice che una funzione reale $y = f(x)$ è *crescente*, se essa cresce al crescere della x, o più precisamente, se, indicati con x_1, x_2 due punti qualsiasi del gruppo G ove la $f(x)$ è definita tali che $x_1 > x_2$, si ha $f(x_1) > f(x_2)$.

La y si dice *decrescente*, se invece dalla $x_1 > x_2$ segue $f(x_1) < f(x_2)$, ossia se la y decresce al crescere della x (come, p. es., avviene se y è inversamente proporzionale ad $x > 0$). La $y = f(x)$ si dice *non crescente*, oppure *non decrescente*, se dalla $x_1 \geq x_2$ segue $f(x_1) \leq f(x_2)$, oppure $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Se una funzione non è crescente, o non è decrescente in un dato gruppo G di punti, si dice che la funzione *varia sempre nello stesso verso* (*senso*) nel gruppo G.

TEOR. *Se* f (x) *è una funzione definita nel gruppo* G, *che varia sempre nello stesso verso e se in ogni intorno* (*p. es. sinistro*) *del punto* x = a *esistono punti di* G *distinti da* a, *esiste il* $\lim_{x=a-0} f(x)$.

Supponiamo per fissar le idee che $f(x)$ non sia decrescente a sinistra del punto a, e che si voglia dimostrare l'esistenza del $\lim_{x=a-0} f(x)$. Noi dimostreremo che *tale limite è precisamente il limite superiore* L *dei valori che* f (x) *assume, quando* x *assume i valori di* G *più piccoli* (a sinistra) di a.

Distinguiamo due casi:

1° L è finito. Sia n un intero così grande che $\frac{1}{10^n}$ sia minore di un ε prefissato. Tra i citati valori di y ne esisterà almeno uno (p. es. quello $f(c)$ assunto da y nel punto $x = c < a$) che è uguale ad L fino alla n^{esima} decimale (e ciò per la stessa definizione di limite superiore). I valori che y assume nei punti di G dell'intervallo (c, a) non possono nè superare il limite superiore L, nè essere inferiori a $f(c)$ (perchè y è per ipotesi funzione non decrescente).

Dunque tali valori (compresi tra $f(c)$ ed L) dovranno pure coincidere con L fino alla n^{esima} decimale.

In altre parole nei punti x di G dell'intervallo (c, a) vale la:

$$|f(x) - L| \leq \frac{1}{10^n} < \varepsilon.$$

Per definizione di limite è dunque

$$\lim_{x=a} f(x) = L.$$

2° L è infinito. Questo caso, assai meno importante, si potrebbe ricondurre al caso precedente con lo studio della funzione $-\frac{1}{f(x)}$. Per studiarlo direttamente si osservi che, se k è un numero arbitrario, esiste un punto $x = c < a$, ove $f(c) > k$ (*). In tutto l'intervallo (c, a) sarà dunque $f(x) \geqq f(c) > k$, perchè $f(x)$ non è decrescente. Pertanto

$$\lim_{x=a-} f(x) = +\infty .$$

Così, p. es., l'area del poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio C è una funzione crescente di n, che ha per limite per $n = \infty$ proprio l'area di C.

β) Applicheremo questo teorema allo studio di un limite fondamentale. Dalla formola del binomio si trae che, se m è un intero positivo, allora:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{m}{1}\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{m^2}+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-[m-1])}{\underline{|m}}\frac{1}{m^m} =$$

$$= 1+1+\frac{1-\frac{1}{m}}{\underline{|2}}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{\underline{|3}}+\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{\underline{|m}}$$

donde, osservando che i numeratori degli addendi terzo, quarto, ecc., non superano l'unità, e che i denominatori sono $\underline{|2} = 2$, $\underline{|3} = 2.3 > 2.2 = 2^2$, $\underline{|4} > 2^3$, ecc., si trae che per $m > 1$ è:

$$2 < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{2.2.2}+\ldots+\frac{1}{2^{m-1}}\right) < 3. \quad (**)$$

D'altra parte il k^{esimo} $(2 < k \leqq m+1)$ termine del terzo membro della penultima formola cresce al crescere della m $\left(\text{al diminuire di } \frac{1}{m}\right)$; di più il numero stesso dei termini (che è $m+1$) cresce con m.

Quindi $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ cresce al crescere di m; e perciò, per il precedente teorema, tende per $m = \infty$ a un limite $e > 0$; e, poichè per l'ultima delle precedenti formole, è (per ogni valore dell'intero

(*) Questa affermazione è conseguenza dell'ipotesi $L = \infty$.

(**) Infatti $\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\ldots..+\frac{1}{2^{m-1}} = 1-\frac{1}{2^{m-1}} < 1$.

$m > 1$) $2 < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < 3$, sarà pure $2 < e \leq 3$; donde in particolare si trae che e è un numero finito positivo. Io dico che

$$\lim_{m=+\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e,$$

anche se m non è intero. Infatti, se m è compreso tra gli interi n, $n + 1$, è

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

E, poichè il limite del primo e terzo membro sono rispettivamente

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n+1=\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e,$$

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e.\ 1 = e,$$

ossia sono uguali ad e, anche (§ 37, α, p. 121) il $\lim_{m=\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$.

Io dico infine che è anche $\lim_{m=-\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$.

Infatti, posto $m = -(k + 1)$, è:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{-(k+1)} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^{-(k+1)} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

E perciò:

$$\lim_{m=-\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \lim_{k=+\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \lim_{k=+\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = e.\ 1 = e. \quad \text{c.d.d.}$$

γ) Dalla $\lim_{m=\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$, che vale dunque, sia m positivo o negativo, razionale o irrazionale, si trae (*), supposto $a > 0$,

$$\lim_{m=\infty} m \log_a \left(1 + \frac{1}{m}\right) = \log_a e,$$

ossia, posto $m = \frac{1}{x}$, $\lim_{x=0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \log_a e$.

(*) Basta ricordare che $\log_a x$ è funzione continua nei punti $x > 0$.

Se si pone $\log_a (1 + x) = z$, e quindi $x = a^z - 1$, se ne deduce

$$\lim_{x=0} \frac{z}{a^z - 1} = \log_a e, \text{ donde } \lim_{x=0} \frac{a^z - 1}{z} = \frac{1}{\log_a e} = \log_e a.$$

Se esponiamo $a = e$ si trova:

$$\lim_{x=0} \frac{\log_e (1 + x)}{x} = 1 ; \lim_{x=0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Dalla prima di queste formole si vede quanto semplice diventi il $\lim_{x=0} \frac{\log (1 + x)}{x}$, appena si assuma il numero e come base di un sistema di logaritmi. Poichè questo limite si presenta continuamente nel calcolo, noi adotteremo d'ora in poi (salvo esplicita dichiarazione in contrario) questo numero e come base del sistema di logaritmi. I logaritmi così ottenuti si diranno neperiani, iperbolici, naturali.

Per uno studio geometrico dei limiti precedenti si vegga l'esempio terzo.

ESEMPI.

1° Dimostrare che $\lim_{m=\infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x$.

RIS. Posto $\frac{m}{x} = n$, si noti che

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^x.$$

2° Se il capitale c è impiegato al tasso r (rapporto dell'interesse al capitale), esso, dopo un anno, diventa $c\ (1 + r)$. Ma se il tasso è pagato per metà ad ogni semestre, il capitale dopo il 1° semestre è diventato $c\left(1 + \frac{r}{2}\right)$; e se tutta questa somma viene impiegata allo stesso tasso per il 2° semestre, si avrà alla fine dell'anno una somma $c\left(1 + \frac{r}{2}\right)^2$. In generale se ad ogni n^{esima} parte dell'anno viene pagata la n^{esima} parte dell'interesse, che viene anch'essa impiegata allo stesso tasso per la residua parte dell'anno, il capitale c, dopo un anno, è diven-

tato $c\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$ (*). Quando n diventa grandissimo (per $n=\infty$), questa espressione tende a ce^r. Si suol dire che un capitale c impiegato ad interesse continuo al tasso r diventa ce^r dopo un anno. Così, p. es., si calcola che $e^{0,05}=1,05127\ldots$. Impiegare per un anno un capitale all'interesse *continuo* del 5 % equivale a impiegarlo all'interesse del 5,127 ..... %.

Dunque e *rappresenta la somma ottenuta impiegando per un anno un capitale* 1 *all'interesse continuo del* 100 %. Che, se z è piccolo, $\frac{e^z-1}{z}$ sia prossimo ad 1, è evidente, perchè, se il tasso è piccolo, interesse semplice r e continuo e^r-1 quasi si equivalgono, ecc.

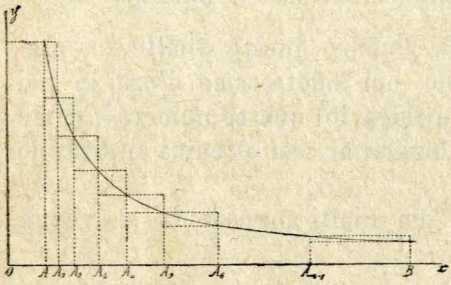


Fig. 11.

3° Consideriamo un'iperbole equilatera $xy=1$ (fig.11). Siano A, B due punti dell'asse delle ascisse di ascisse a, b $(0<a<b)$. Dividiamo l'intervallo AB in n parti coi punti $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ in guisa che i segmenti OA, OA_1, OA_2 ....., OA_{n-1}, OB siano in progressione geometrica. Questi segmenti saranno così uguali ordinatamente ad a, aq, aq^2, ..., aq^{n-1}, $aq^n=b$, dove $q=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$. Le ordinate dei punti corrispondenti dell'iperbole $\left(xy=1,\ \text{donde}\ y=\frac{1}{x}\right)$ saranno

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{aq},\ \ldots\ldots,\ \frac{1}{aq^n}=\frac{1}{b}.$$

Quindi le aree dei rettangoli aventi per basi i segmenti AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}B$ e per altezza le ordinate dell'estremo sinistro corrispondente saranno

$$\left(aq-a\right)\frac{1}{a},\ \left(aq^2-aq\right)\frac{1}{aq},\ \ldots\ldots,\ \left(aq^n-aq^{n-1}\right)\frac{1}{aq^{n-1}},$$

(*) Resta perciò intuitivo il teorema dimostrato nel testo che per $r=1$ (anzi per ogni $r>0$), il numero $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$ cresce al crescere di n; infatti un impiego di capitale è tanto più redditizio, quanto maggiore è il numero n delle volte che in un anno (a ugual intervallo l'una dall'altra) si pagano gli interessi maturati.

cioè saranno tutte uguali a $(q-1)$. La loro somma Σ_n è perciò $n(q-1)$.

In modo simile si prova che la somma σ_n delle aree dei rettangoli aventi per base gli stessi segmenti e per altezza l'ordinata del corrispondente estremo destro è $n(q-1)\frac{1}{q}$.

Si ha così, posto $v = \frac{1}{n}$,

$$\Sigma_n = n\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right\} \text{ donde } \lim_{n=\infty} \Sigma_n = \lim_{v=0} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{v} - 1}{v} = \log_e \frac{b}{a}$$

$$\sigma_n = \frac{\Sigma_n}{q} \qquad \text{donde } \lim_{n=\infty} \sigma_n = \log_e \frac{b}{a} \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \log_e \frac{b}{a}.$$

Il limite inferiore delle Σ_n e il limite superiore delle σ_n coincidono dunque, e sono uguali a $\log_e \frac{b}{a}$. Dunque la figura α racchiusa tra il segmento AB, le ordinate di A, B e la porzione corrispondente di iperbole equilatera ha un'area che vale precisamente $\log_e \frac{b}{a}$ (*).

Se noi rappresentiamo la nostra figura in scala un po' grande su carta millimetrata divisa in quadratini molto piccoli, si può avere un metodo approssimato per calcolare $\log_e \frac{b}{a}$, misurando l'area α: cioè contando quanti dei quadratini in cui è diviso il nostro foglio millimetrato sono contenuti in α.

4° Sia $f(x)$ una funzione di x, che tende ad un limite finito L, p. es., per $x = \infty$. Come si può calcolare approssimativamente questo limite? È ben evidente che $f(x)$ si può considerare come un valore approssimato di L, e che l'approssimazione sarà generalmente tanto migliore, quanto più grande si suppone x; o meglio, e più precisamente, che, prendendo x abbastanza grande, si potrà rendere piccolo a piacere l'errore che si commette quando si supponga $f(x) = L$.

Ma simile considerazione ha un valore scarso, se per ogni valore della x non si può dare una misura del grado di ap-

(*) Infatti i rettangoli considerati, le cui aree hanno per somma Σ_n (σ_n) formano un poligono, che contiene la figura α all'interno (che è interno alla figura α) (cfr. § 7).

prossimazione raggiunto. Ora questo è possibile in molti casi. Per es., dall'esercizio 3° si deduce, posto $\frac{b}{a} = k$, che la quantità

$$\log_e k = \lim_{n=\infty} n\left(\sqrt[n]{k} - 1\right) \tag{1}$$

è compresa, per ogni valore di n, tra

$$n\left(\sqrt[n]{k} - 1\right) \quad \text{e} \quad \frac{n\left(\sqrt[n]{k} - 1\right)}{\sqrt[n]{k}}.$$

Cosicchè, se si pone $\log_e k = n\left(\sqrt[n]{k} - 1\right)$, l'errore commesso non supera

$$\left| n\left(\sqrt[n]{k} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{k}}\right) \right|.$$

La (1) può così servire al calcolo approssimativo dei logaritmi iperbolici. Se ne ricava, per es., posto $k = 2$, $n = 16$ che $\log_e 2 = 0{,}70$, con un errore non superiore a 0,03 ..... Poichè però calcolare la $\sqrt[16]{2}$ equivale a estrarre successivamente quattro radici quadrate, questo metodo di calcolare i logaritmi neperiani è troppo poco rapido.

§ 39. — Alcune applicazioni.

Se a è un numero reale, $z = x + iy$ è un numero complesso, il simbolo $a^z = a^{x+iy}$ è un simbolo, a cui finora non abbiamo attribuito alcun senso. I matematici si servono però di tale simbolo specialmente quando $a = e$, ponendo con Eulero la seguente definizione:

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

È questa definizione accettabile? è essa opportuna?

Essa è accettabile perchè priva di contraddizioni, e perchè, se $y = 0$, cioè se $z = x + iy$ è reale, essa non contraddice all'ordinario significato di tale simbolo.

Molte poi sono le ragioni, che rendono opportuna tale definizione e che noi stessi incontreremo in questo libro. Qui ne accenneremo due specialmente importanti.

1° Se $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, allora, per la definizione di Eulero, il teorema:

$$e^z e^{z'} = e^{z+z'}$$

è vero anche se z, z' sono numeri complessi.

Infatti:

$$e^{z+z'} = e^{x+x'+i(y+y')} = e^{x+x'} \{ \cos(y+y') + i \operatorname{sen}(y+y') \} =$$
$$= e^{x}(\cos y + i \operatorname{sen} y)\, e^{x'}(\cos y' + i \operatorname{sen} y) = e^{z}\, e^{z'}.$$

2° Sappiamo già che, se z è reale, allora

$$e^{z} = \lim_{m=\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right)^{m}.$$

Ebbene in virtù della definizione di Eulero, questa stessa formola vale anche se z è complesso.

Infatti: $\left(1 + \frac{z}{m}\right) = \left[\left(1 + \frac{x}{m}\right) + i\,\frac{y}{m}\right] = \rho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$,

dove $\rho = \left\{\left(1 + \frac{x}{m}\right)^2 + \frac{y^2}{m^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x+m}$, $|\theta| < \frac{\pi}{2}$. (*)

Sarà: $\left(1 + \frac{z}{m}\right)^{m} = \rho^{m} \{ \cos m\theta + i \operatorname{sen} m\theta \}$.

Ora, posto $\frac{1}{n} = \frac{2x}{m} + \frac{x^2+y^2}{m^2}$, è:

$$\lim_{m=\infty} \rho^{m} = \lim_{m=\infty} \left\{\left(1 + \frac{x}{m}\right)^2 + \frac{y^2}{m^2}\right\}^{\frac{m}{2}} = \lim_{n=\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{m}{2n}}.$$

Ossia, poichè $\lim_{m=\infty} \frac{m}{2n} = x$, si ha $\lim_{m=\infty} \rho^{m} = e^{x}$.

D'altra parte $\lim_{m=\infty} \theta = 0$, perchè $\lim tg\,\theta = \lim \frac{y}{x+m} = 0$ e $|\theta| < \frac{\pi}{2}$; e

$$\lim_{m=\infty} m\theta = \lim_{m=\infty} m \operatorname{tg}\theta \frac{\theta}{\operatorname{tg}\theta} = \lim_{m=\infty} \frac{my}{x+m} \lim_{\theta=0} \frac{\theta}{\operatorname{tg}\theta} = y.1 = y.$$

E quindi $\lim (\cos m\theta + i \operatorname{sen} m\theta) = \cos y + i \operatorname{sen} y$.

Perciò

$$\lim_{m=\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right)^{m} = e^{x}(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^{x+iy} = e^{z}.$$ c. d. d.

Di tale definizione possiamo servirci per estendere anche a numeri negativi o complessi la teoria dei logaritmi neperiani. Sia $w = \rho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ un numero complesso. Io dirò che $z = x + iy$ ne è un logaritmo a base e, se

$$e^{z} = e^{x}(\cos y + i \operatorname{sen} y) = w = \rho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

cioè se

$$e^{x} = \rho \quad , \quad \cos y = \cos\theta \quad , \quad \operatorname{sen} y = \operatorname{sen}\theta.$$

Dunque x è il logaritmo aritmetico del modulo ρ di w. Ed y o è l'argomento θ di w, o differisce da θ per un multiplo

(*) Per m molto grande il segno di $\cos\theta$, cioè il segno di $1 + \frac{x}{m}$ è positivo, anche se $x < \theta$; e posso supporre θ compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

$2k\pi$ di 2π (k intero). Ciò che è ben naturale, appunto perchè l'anomalia di un numero complesso è definita a meno di multipli di 2π.

Nel campo dei numeri complessi ogni numero

$$w = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

ha infiniti logaritmi

$$\log_e \rho + i\theta + 2k\pi i.$$

Di questi logaritmi ve ne è uno (e uno solo) reale, se esiste un intero k tale che $\theta + 2k\pi = 0$, ossia se θ è un multiplo di 2π, cioè se si può supporre $\theta = 0$, cioè se w coincide col suo modulo ρ, ossia se w è reale positivo.

I soli numeri reali positivi posseggono un logaritmo reale (quello di cui si occupa l'algebra elementare). Gli altri logaritmi se ne deducono aggiungendo un multiplo qualsiasi di $2\pi i$, e sono complessi.

I numeri reali negativi $w = -\rho$ hanno gli infiniti logaritmi (tutti complessi)

$$\log\rho + i\pi + 2\pi k i.$$

In particolare -1 ha tra i suoi logaritmi il numero $i\pi$.

Il teorema fondamentale della teoria dei logaritmi reali diventa ora: *Sommando insieme un logaritmo di ciascuno dei fattori di un prodotto, si trova uno dei logaritmi del prodotto* (*). Il lettore ne deduca i teoremi analoghi per i quozienti, le potenze, ecc.

Così, p. es., dalla $2\log(-1) = \log(-1)^2 = \log 1$ non si può già dedurre che, essendo $\log 1 = 0$, anche $\log(-1) = 0$, ma soltanto che il doppio di *uno* dei logaritmi di -1 vale *uno* dei logaritmi di 1; infatti i logaritmi di -1 sono $(2k+1)i\pi$, il cui doppio è un multiplo di $2\pi i$, che è un logaritmo di 1 (**).

Dalla $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \operatorname{sen} x$ si deduce

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (1)$$

Posto $x = iz$ (z reale) il primo membro non ha significato; noi porremo *per definizione* $\cos iz$, $\operatorname{sen} iz$ uguali ai valori

(*) Così anzi si possono trovare *tutti* i logaritmi del prodotto.

(**) Il logaritmo 0 del numero 1 si trova, p. es., sommando insieme $i\pi$ e $-i\pi$, che sono entrambi logaritmi di -1, e non già facendo il doppio di uno dei logaritmi di -1.

che si ottengono dai secondi membri di (1) per $x = iz$. Cioè porremo:

$$\cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{sen} iz = i\,\frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Perciò $\cos iz$ e $\dfrac{\operatorname{sen} iz}{i}$ sono *reali* per z *reale;* noi li chiameremo rispettivamente il *coseno iperbolico* di z, e il *seno iperbolico* di z. E le indicheremo con $\cosh z$ e $\operatorname{senh} z$ (più brevemente $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$). È dunque:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz \quad ; \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{\operatorname{sen} iz}{i}$$

Si verifica tosto che $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$; posto cioè $x = \operatorname{ch} z$, $y = \operatorname{sh} z$, il punto x, y descrive al variare di z una iperbole (donde il nome di funzioni *iperboliche*), mentre invece le equazioni $x = \cos z$, $y = \operatorname{sen} z$ definiscono il cerchio $x^2 + y^2 = 1$ (donde il nome di funzioni *circolari*).

Si prova facilmente che $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$, che $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x$, che $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$, che $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$. Adottando le (1) per definiz. di $\cos x$, $\operatorname{sen} x$ per ogni valore della $x = y + iz$, si trova ancora che

$$\cos(y + iz) = \cos y \cos iz - \operatorname{sen} y \operatorname{sen} iz = \cos x \operatorname{ch} z - i \operatorname{sen} y \operatorname{sh} z$$

e che

$$\operatorname{sen}(y + iz) = \operatorname{sen} y \cos iz + \cos y \operatorname{sen} iz = \operatorname{sen} y \operatorname{ch} z + i \cos y \operatorname{sh} z.$$

Anche se x, y sono numeri complessi continuano a valere le formole fondamentali della goniometria

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\,;$$
$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y.$$

Posto per z reale $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$ (tangente iperbolica di z) è $1 - \operatorname{th}^2 z = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 z}$.

Per ogni z reale si può perciò trovare un angolo φ del primo o quarto quadrante (che sarà funzione di z) tale che:

$$\frac{1}{\operatorname{ch} z} = \cos\varphi;\ \operatorname{th} z = \operatorname{sen}\varphi;\ \frac{\operatorname{th} z}{\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} z}\right)} = \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{sh} z.$$

Ricordando la definizione di ch z, si consideri la prima di queste formole come un'equazione in e^z; se ne trae:

$$z = \pm \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

§ 40. — Proprietà fondamentali delle funzioni continue.

α) I teoremi, di cui ci occuperemo nel seguente paragrafo, possono sembrare intuitivi; e del resto per molto tempo furono ammessi come evidenti. Una critica accurata dimostrò però la necessità di una precisa dimostrazione; chi poco si occupi di questioni teoriche può forse, appena abbia ben compreso l'enunciato di tali teoremi, non approfondire lo studio delle dimostrazioni; le quali però costituiscono un utile esempio di deduzione logica.

Il primo dei teoremi, di cui qui ci occuperemo, risponde alle seguenti domande: Tra i valori che una funzione continua $f(x)$ assume un intervallo *finito* (a, b), *estremi inclusi*, esiste un valore M massimo [che non sia minore di alcun altro valore di $f(x)$ *in* (a, b)]? esiste un valore minimo m?

A queste domande si deve rispondere affermativamente. Ciò ammesso, si deve ancora domandare: Se μ è un numero compreso tra m ed M, vi è qualche valore della nostra funzione, che sia uguale a μ? E anche a questa domanda si deve rispondere affermativamente.

Nè i teoremi qui accennati si debbono ritenere come intuitivi *a priori*. I valori di una funzione continua $f(x)$ in (a, b) sono (se la $f(x) \neq$ cost.) in numero infinito. Ora, se abbiamo infiniti numeri, può darsi benissimo, come sappiamo, che nessuno di essi sia un numero più grande di tutti gli altri, cioè che il limite superiore non sia un massimo. Il nostro teorema ci assicura che questo non può avvenire per i valori assunti da una funzione continua; cosicchè, p. es., se ne dedurrà in particolare che una funzione $f(x)$ continua in (a, b) (estremi inclusi) è *limitata;* che cioè si può trovare una costante (positiva) H, che $f(x)$ non supera mai in valore assoluto in tale intervallo. Basta, p. es., porre H uguale al più grande dei due numeri $|M|, |m|$.

La risposta affermativa all'ultima domanda può essere giustificata intuitivamente. Un disegnatore di curve e di diagrammi troverebbe forse superfluo il dimostrare che, muovendoci su una

curva continua $y = f(x)$, la distanza y dall'asse delle x non possa passare da M a m senza ricevere tutti i valori intermedi. Ma, appena si ricordi che esistono curve continue $y = f(x)$ che in (a, b) fanno infinite oscillazioni, e non sono quindi disegnabili, si vedrà quanto sia insufficiente per i nostri studi una intuizione, che assume a punto di partenza i diagrammi e le curve continue disegnabili.

Ecco qui gli enunciati dei teoremi in discorso:

Sia y *una funzione continua* f (x) *nell'intervallo finito* (a, b), *estremi inclusi.* (*Sia, p. es.* a < b). *Io dico che:*

1° *Il limite superiore* M *dei valori assunti da* f (x) *nell'intervallo* (a, b) *è un massimo. Cioè esiste nell'intervallo* (a, b) *almeno un punto ove la funzione riceve il massimo valore* M, *ossia un valore* M *non minore dei valori assunti negli altri punti dello stesso intervallo.*

2° *Il limite inferiore* m *dei valori assunti da* f (x) *in* (a, b) *è un minimo; cioè esiste nell'intervallo* (a, b) *almeno un punto, ove* f (x) *riceve il minimo valore* m, *ossia un valore* m *non maggiore di quello assunto negli altri punti dello stesso intervallo* (teoremi di Weierstrass).

3° *Se* λ *è un numero intermedio tra* m *ed* M (m < λ < M), *esiste almeno un punto di* (a, b), *in cui* f (x) *assume il valore* λ (*).

La differenza M — m *si dice l'oscillazione* D *di* f (x) *in* (a, b). Essa è generalmente positiva, ed è nulla soltanto se $M = m$, ossia se il più grande ed il più piccolo valore di $f(x)$ coincidono, ossia se $f(x)$ è costante nell'intervallo (a, b).

Ricordiamo anche il seguente importante teorema di Heine, a cui non ricorreremo mai in questo libro (e che dimostreremo anche con altri e più semplici metodi in casi particolari).

4° *Dato un numero (positivo)* ε *piccolo a piacere, si può dividere l'intervallo* (a, b) *in un numero finito di intervalli parziali* j, *in ciascuno dei quali l'oscillazione di* f (x) *è uguale o minore di* ε.

Dimostriamo ora i primi tre dei precedenti teoremi. E per brevità indichiamo, se α, β sono due punti dell'intervallo (a, b) con $l(\alpha, \beta)$, e con $L(\alpha, \beta)$ i limiti inferiore e superiore dei valori assunti da $f(x)$ nell'intervallo (α, β). È $M = L(a, b)$ ed è $m = l(\alpha, \beta)$. I nostri teoremi saranno provati, quando sia dimostrato che, scelto comunque un numero λ tale che $m \leq \lambda \leq M$ (non escluso $\lambda = m$, $\lambda = M$) esiste un punto c soddisfacente alla $f(c) = \lambda$. Se già $f(a) = \lambda$, il teorema è provato. Sia dunque $f(a) < \lambda$ (in modo analogo si studia il caso $f(a) > \lambda$). Sia c il limite superiore dei punti x dell'intervallo (a, b) tali che $L(a, x) < \lambda$. Sarà $a < c \leq b$. Preso un numero ε arbitrario positivo, esistono (poichè $f(x)$ è continua)

(*) Questi teoremi ci dicono che i valori assunti da una funzione $y = f(x)$ continua in un intervallo finito (a, b) (estremi inclusi) riempiono tutto un segmento finito (m, M), compresi gli estremi.

due numeri τ_1, τ_2 non negativi tali che i valori assunti da $f(x)$ nell'intervallo $(c - \tau_1, c + \tau_2)$ e quindi anche $L(c - \tau_1, c + \tau_2)$ siano compresi tra $f(c) - \varepsilon$ ed $f(c) + \varepsilon$. E anzi $\tau_1 > 0$, ed è pure $\tau_2 \geqq 0$, essendo $\tau_2 = 0$ soltanto se $c = b$. Per la stessa definizione di c è

$$L(a, c - \tau_1) < \lambda \qquad L(a, c + \tau_2) \geqq \lambda. \qquad (*)$$

Ora $L(a, c + \tau_2)$ è uguale al massimo dei due numeri $L(a, c - \tau_1)$ e $L(c - \tau_1, c + \tau_2)$ corrispondenti ai due intervalli parziali in cui si può dividere l'intervallo $(a, c + \tau_2)$. E non potendo essere per le precedenti disuguaglianze $L(a, c - \tau_1) \geqq L(a, c + \tau_2)$, sarà $L(c - \tau_1, c + \tau_2) = L(a, c + \tau_2)$. Dunque $L(a, c + \tau_2) \geqq \lambda$ è compreso tra $f(c) + \varepsilon$ ed $f(c) - \varepsilon$. Cosicchè $\lambda \leqq f(c) + \varepsilon$, qualunque sia ε. Dunque $\lambda \leqq f(c)$. D'altra parte $f(c - \tau_1) < \lambda$. Quindi $f(c) = \lim_{\tau_1 = 0} f(c - \tau_1) \leqq \lambda$. Unendo queste disuguaglianze si deduce che $f(c) = \lambda$, come si doveva dimostrare.

Dimostrazione del 4° teorema e osservazioni critiche.

Supponiamo che il teorema non sia vero; che cioè l'intervallo (a, b) non sia divisibile in un numero finito di tali intervalli j. Se β è un punto di (a, b) così vicino ad a che in (a, β) l'oscillazione di $f(x)$ sia minore di ε, l'intervallo (a, β) è divisibile in un numero finito di intervalli j, perchè esso stesso ed ogni sua parte è un intervallino j. [Che un tale punto β esista è conseguenza del fatto che $f(x)$ è continua per $x = a$]. Se β è un punto qualsiasi di (a, b) tale che (a, β) sia divisibile nel modo voluto, altrettanto avverrà *a fortiori* di ogni intervallo (a, β'), se $a < \beta' < \beta$. E quindi, se γ è un punto di (a, b) tale che (a, γ) non sia divisibile in un numero finito di intervalli j, allora neanche (a, γ') sarà divisibile in tal modo se $b \geqq \gamma' > \gamma$. Dividiamo i punti di (a, b) in due classi: ponendo in una classe i punti β tali che (a, β) sia divisibile nel modo voluto, e nell'altra classe i punti γ tali che (a, γ) non sia così divisibile. Sia c il punto di divisione di tali due classi ($c \leqq b$). Costruiamo se $c < b$ un intorno $(c - \delta, c + \delta)$ del punto c, in cui la oscillazione di $f(x)$ non superi ε; se fosse $c = b$ ci limiteremo ad un intorno $(c - \delta, c)$. Il punto $c - \delta$ sarà un punto β, e perciò l'intervallo $(a, c - \delta)$ è divisibile in numero finito di intervallini j; aggiungendo a questi l'intervallo $(c - \delta, c + \delta)$ oppure $(c - \delta, c)$ secondo che $c < b$ oppure $c = b$ vediamo che anche l'intervallo $(a, c + \delta)$ se $c < b$ oppure l'intervallo (a, c) se $c = b$ è divisibile nel modo voluto. Il primo caso è assurdo perchè $c + \delta$ è un punto γ; il secondo contrasta con l'ipotesi iniziale. Dunque il teorema è dimostrato (per assurdo).

Sia δ la minima lunghezza di uno di questi intervallini parziali j. Se c è un punto qualsiasi di (a, b), quella parte del segmento $(c - \delta, c + \delta)$ che è interna ad (a, b) sarà uguale o minore della somma di tre intervallini j consecutivi. In tale intorno di c dunque l'oscillazione di $f(x)$ sarà minore di 3ε (il quale è un numero prefissato ad arbitrio). Che per ogni punto c di (a, b) esista un tale numero δ è conseguenza della stessa definizione di continuità; ora abbiamo in più dimostrato che si può scegliere un numero δ, che convenga *a tutti* i punti c dell'intervallo (a, b). Si poteva sospettare che al variare di c in (a, b) si fosse costretti a far variare i δ in modo che avessero lo zero per limite inferiore, e che perciò nessun numero δ andasse bene contemporaneamente per tutti i punti c. Il fatto che si può scegliere uno stesso δ per tutti i punti c si chiama anche il teorema della *continuità uniforme* e si enuncia dicendo che *una funzione continua in un intervallo finito, estremi inclusi, è uniformemente continua.*

(*) Questa disuguaglianza vale anche quando $\tau_2 = 0$, ossia quando $c = b$. In tal caso $L(a, c + \tau_2) = L(a, b) = M \geqq \lambda$.

I teoremi di Weierstrass si estendono alle funzioni discontinue col seguente enunciato, che mi accontenterò di citare.

Se f(x) *è una funzione definita nell'intervallo* (a, b), *estremi inclusi, esiste almeno un punto di questo intervallo tale che in ogni suo intorno la funzione assuma valori, il cui limite superiore coincida col limite superiore dei valori che* f(x) *ha in* (a, b).

OSSERV. Se $f(x)$ è una funzione qualsiasi definita in un intorno del punto a, potremo considerarne il massimo limite e il minimo limite (§ 32, osserv. critica a pag. 107) per $x = a +$ e quelli per $x = a -$. Tutti questi limiti coincidono con $f(a)$ se $f(x)$ è continua in a. Si sono studiate anche le funzioni (semicontinue) per cui $f(a)$ coincide non con tutti, ma soltanto con alcuni dei limiti precedenti; e si è in particolare studiato per esse un teorema analogo al teorema di Weierstrass.

§ 41. — Funzioni di più variabili.

Si dice che z è una funzione di n variabili $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$, se per qualche sistema di valori dati alle $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, la z ha un valore determinato.

L'insieme di questi sistemi di valori si chiama il campo di esistenza della funzione z.

Si scrive in tal caso $z = f(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$; in luogo della lettera f si può scrivere un'altra lettera F, φ, X, ecc.

Così, p. es., dalla fisica sappiamo che il volume z di una certa massa di gas perfetto è funzione della temperatura x_1 e della pressione x_2. Il campo G dei valori che possiamo dare alle x_1, x_2 è formato in questo caso dai valori *positivi* delle x_1, x_2 (se adottiamo la scala termometrica assoluta) e non superiori a certi limiti dipendenti dai mezzi sperimentali.

Se $n = 2$, si suole indicare la x_1 con x, la x_2 con y; e in questo caso si adottano le x, y come coordinate cartesiane in un piano π. Ogni sistema di valori per le $x_1 = x$, $x_2 = y$ individua un punto di π, e viceversa. Il caso più importante è quello in cui i punti di π, a cui corrispondono valori delle x, y, per cui esiste la z, riempia tutta un'area connessa di π (rettangolare o circolare, ecc.) (*). Se noi consideriamo x, y, z come coordinate cartesiane ortogonali nello spazio, la $z = f(x, y)$ è in tal caso l'equazione di una superficie, che si può considerare come l'immagine geometrica della funzione f.

Nel caso di $n > 2$ cessa la possibilità di una simile rappresentazione geometrica (se non si vuole adottare il linguaggio iperspaziale).

(*) Non insistiamo di più (cfr. § 7) sul significato della parola: « area connessa » (area di un sol pezzo).

Noi, perciò, studieremo specialmente il caso $n = 2$: metodi e risultati sono però generali.

Intorno di un punto di ascissa a ed ordinata b si dice il quadrato lungo dei punti (x, y), per cui $|x - a| \leq \sigma$, $|y - b| \leq \sigma$, dove σ è una qualsiasi costante positiva.

Le definizioni di limite, di funzione continua, date nei paragrafi 32, 33, 35, 36, e i teoremi relativi si estendono quasi parola per parola al caso attuale.

Basta soltanto parlare di *area piana connessa* (area rettangolare, circolare, ellittica, ecc.) invece che di intervallo.

Noteremo che, se z è una funzione $f(x, y)$ delle variabili x, y in un'area piana S, allora se poniamo $x = x_0$ dove x_0 è una costante, la $f(x, y)$ diventa una funzione $f(x_0, y)$ della sola variabile y, che esiste per tutti e soli i valori di y, tali che i punti (x_0, y) della retta $x = x_0$ appartengano a S (*); un fatto perfettamente analogo si presenta se si pone $y = y_0$ ($y_0 =$ cost.).

Ciò si suol esprimere dicendo che la $f(x, y)$, se si considera la x oppure la y come costante, diventa una funzione della sola y, o della sola x.

Per le funzioni continue di due o più variabili si possono pure estendere i teoremi dell'ultimo § 40.

Si può da ciò dedurre una dim. del teor. di Gauss già enunciato al § 14, α. Cominciamo a dimostrare che ogni equazione algebrica $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0$ ammette almeno una radice. Posto $z = x + iy$, il modulo $|P(z)|$ è una funzione continua di x ed y. Di più notiamo che

$$|P(z)| = |z|^n \left|1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots + \frac{a_n}{z^n}\right|.$$

Potremo evidentemente scegliere una costante ρ così grande che

α) $\rho > 1$ cioè che il punto $z = 1$ sia *interno* al cerchio C di equazione $|z|^2 = x^2 + y^2 = \rho^2$.

β) Per $|z| > \rho$ sia $|z|^n > 2\,|P(1)|$.

γ) Per $|z| > \rho$ sia $\left|1 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n}\right| > \frac{1}{2}$.

Dunque, se $|z| > \rho$, cioè se z è esterno a C, è $|P(z)| > |P(1)|$.

Per il teor. di Weierstrass esiste dentro, o sulla periferia di C (**) almeno un punto α_1, ove $|P(z)|$ è minimo, cioè assume un valore $|P(\alpha_1)|$, che non è superiore al valore di $|P(z)|$ *in ogni altro* punto interno a C o posto sulla periferia di C; cosicchè in particolare $|P(\alpha_1)|$ non potrà superare $|P(1)|$, e quindi *neanche* alcuno dei valori assunti da $|P(z)|$, quando z è *fuori* di C. Perciò $P(\alpha_1)$ è *il minimo di tutti i possibili valori che assume* $|P(z)|$, quando z si muove comunque nel piano. Dunque $P(\alpha_1) = 0$, perchè altrimenti (§ 9, pag. 34-35) esisterebbe un valore di z tale che ivi $|P(z)|$ ha un valore minore di $|P(\alpha_1)|$.

(*) Naturalmente se la retta $x = x_0$ non avesse punti comuni con S, non avrebbe senso parlare della funzione $f(x_0, y)$.

(**) Perchè la regione interna a C è *finita*; il teor. cit. non vale per regioni illimitate.

Per il teor. di Ruffini (essendo α_1 radice di $P(z) = 0$) il polinomio $P(z)$ è divisibile per $z - \alpha_1$, cosicchè $P(z) = (z - \alpha_1) P_1(z)$ ove $P_1(z)$ è un polinomio di grado $n - 1$, il quale a sua volta ammetterà almeno una radice α_2. Sarà perciò $P_1(z) = (z - \alpha_2) P_2(z)$ e $P(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) P_2(z)$ dove $P_2(z)$ è un polinomio di grado $n - 2$ che possiederà almeno una radice α_3, ecc., ecc. Si trova così in conclusione che $P(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)$. Questa decomposizione in fattori è *unica*. Se infatti per altra via si trovasse anche

$$P(z) = (z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_m).$$

allora sarebbe

$$(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n) = (z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_m).$$

Dividendo, caso mai, i due membri per i fattori di primo grado comuni ad entrambi, ne dedurremmo un'uguaglianza del medesimo tipo, in cui però nessuna delle α è uguale ad una delle β. Passando allora al limite per $z = \alpha_1$, il primo membro avrebbe limite nullo, il secondo membro avrebbe limite differente da zero; ciò che è assurdo. Dunque i fattori $z - \alpha$ del primo membro devono (tutt'al più in altro ordine) coincidere ciascuno con uno dei fattori $z - \beta$ del secondo membro; e viceversa. Il teorema di Gauss è così completamente provato.

CAPITOLO VII.

SERIE

—

§ 42. — Definizioni e primi teoremi.

α) Siano date infinite quantità u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ... determinate dal valore dell'indice supposto intero positivo. Consideriamo **la somma s_n delle prime n tra esse**; poniamo cioè

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{n-1} + u_n.$$

Se esiste ed è finito il

$$\lim_{n=\infty} s_n,$$

la serie $u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots$

si dice convergente; e il valore s di questo limite si chiama somma della serie. E si scrive:

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots$$

Se $\lim_{n=\infty} s_n$ *esiste, ma è infinito, la serie*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots$$

si dice *divergente*. Se il $\lim_{n=\infty} s_n$ *non esiste*, la serie dicesi *indeterminata*. Una serie non convergente è dunque un simbolo privo di significato; e (come, p. es., le frazioni a denominatore nullo) si deve escludere dai nostri calcoli (*).

Se moltiplichiamo i termini di una serie convergente, per una stessa costante k, *la serie resta ancora convergente*; e la sua somma resta moltiplicata per k.

(*) Si potrebbe chiamare valore s di una serie, anzichè il $\lim_{n=\infty} s_n$, qualche altro limite, p. es., il $\lim_{n=\infty} \frac{s_1 + s_2 + \ldots\ldots + s_n}{n}$. Con questa nuova definizione alcune serie non convergenti acquistano significato e si possono introdurre nel calcolo. (Le serie convergenti non mutano di valore con la nuova definizione). Con la nuova definizione, p. es., la serie indeterminata $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots$ ha il valore $\frac{1}{2}$. Esistono molte definizioni di tale tipo: il significato della frase: *valore di una serie* varia con la definizione scelta. Noi ci atterremo a quella classica data nel testo.

Se le u_n sono numeri complessi, se, p. es., $u_n = v_n + iw_n$ (v_n, w_n reali), dire che *la serie delle* u_n *converge ed ha per somma* a + ib equivale a dire che *la serie delle* v_n *converge ed ha per somma* a *e che la serie delle* w_n *converge ed ha per somma* b.

Il lettore cerchi gli errori della seguente dimostrazione che conduce ad erronei risultati. È

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots\ldots=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots\ldots\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots\ldots\right).$$

Donde

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\ldots\ldots=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots\ldots$$

cioè

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots\ldots=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots\ldots$$

Poichè $\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}>\frac{1}{6}$, ecc., se ne deduce

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots\ldots>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots\ldots=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots\ldots$$

cioè $\frac{1}{2}>1$, ciò che è assurdo.

β) *Se* a, q *sono numeri qualsiasi, la serie*

$$a+aq+aq^2+aq^3+\ldots\ldots$$

è convergente se $|q|<1$, perchè in tal caso la somma s_n dei primi n termini è data dalla

$$s_n = a\,\frac{1-q^n}{1-q},$$

ed ha per $n=\infty$ il limite $\frac{a}{1-q}$; cosicchè

$$\frac{a}{1-q}=a+aq+aq^2+\ldots\ldots$$

Una tal serie si dice una progressione geometrica decrescente.

Se $|q|>1$ (e $a\neq 0$) *la nostra serie diverge*, perchè la $s_n = a\,\frac{1-q^n}{1-q}$ ha per $n=\infty$ il limite ∞.

Se $a\neq 0$, $q=1$, la serie è divergente, perchè la somma $s_n = na$ dei primi n termini ha ancora per $n=\infty$ il limite infinito.

Se $a\neq 0$, $q=-1$ la serie è indeterminata, perchè la somma s_n è uguale a $+a$ per n dispari, a zero per n pari, e quindi non tende ad alcun limite per $n=\infty$. Altrettanto avviene (come si potrebbe provare) se $|q|=1$, e q è complesso.

Se $a=0$, la nostra serie è convergente, ed ha somma nulla.

se $q>1$, $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ (se è $a\gtrless 0$)

se $q<-1$ tale limite non esiste.

γ) *Se la serie* $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ *è convergente, e se* $b_1, b_2, \ldots, b_m$ *sono costanti qualsiasi, la serie*

(1) $\quad b_1 + b_2 + \ldots + b_m + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$

(*essendo* $m =$ *intero positivo finito*) *converge ed ha per somma*

$$S' = S + b_1 + b_2 + \ldots b_m.$$

Se S *diverge od è indeterminata, altrettanto avviene di* (1), *o viceversa.*

Per definizione di serie la prima parte del nostro teorema equivale alla

$$S + b_1 + b_2 + \ldots + b_m = \lim_{n=\infty} (b_1 + b_2 + \ldots + b_m + a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Ma questa formola è evidente, perchè, essendo per definizione $S = \lim_{n=\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$, si ha:

$$\lim_{n=\infty} (b_1 + b_2 + \ldots + b_m + a_1 + a_2 + \ldots a_n) =$$
$$= b_1 + b_2 + \ldots b_m + \lim_{n=\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) =$$
$$= b_1 + b_2 + \ldots + b_m + S.$$

La seconda parte del nostro teorema se ne deduce pure immediatamente.

δ) *Se le serie* $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, $v_1 + v_2 + v_3 \ldots$ *convergono ed hanno per somma* U *e* V, *anche la serie*

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \ldots$$

converge ed ha per somma U + V.

Infatti:

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots =$$
$$= \lim_{n=\infty} [(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots + (u_n + v_n)] =$$
$$= \lim_{n=\infty} [(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) + (v_1 + v_2 + \ldots + v_n)] =$$
$$= \lim_{n=\infty} (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) + \lim_{n=\infty} (v_1 + v_2 + \ldots + v_n) =$$
$$= U + V.$$

ε) *Se la serie* $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ *converge, allora* $\lim_{n=\infty} a_n = 0$.

Infatti la somma S della serie si può definire con l'una o l'altra delle

$$S = \lim_{n=\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n); \quad S = \lim_{n=\infty} (a_1 + a_2 + \ldots a_{n-1}).$$

Sottraendo membro a membro si deduce appunto $0 = \lim_{n=\infty} a_n$.

La $\lim_{n=\infty} a_n = 0$ è dunque una condizione *necessaria* (ma *non sufficiente*) per la convergenza della nostra serie.

ε) *Se le* u_n *sono reali e positive, se* $u_{n+1} < u_n$, *se* $\lim_{n=\infty} u_n = 0$, *la serie* $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - \ldots$ *converge.*

È facile infatti riconoscere che la somma s_{2m} dei primi $2m$ termini aumenta con m, che la somma s_{2m+1} dei primi $2m+1$ termini diminuisce con m, che le prime somme sono minori delle seconde, che la classe formata dalle prime è contigua alla classe formata dalle seconde, e che il numero di separazione delle due classi è la somma delle serie.

§ 43. — Serie a termini positivi.

α) È specialmente importante lo studio delle serie, i cui termini sono reali ed hanno tutti lo stesso segno, sono cioè o tutti positivi o tutti negativi.

A noi basterà studiare, p. es., le serie i cui termini sono tutti positivi, perchè le proprietà delle serie, i cui termini sono tutti negativi, se ne dedurranno immediatamente. È evidente infatti che la serie $k_1 + k_2 + \ldots$ e la serie $(-k_1) + (-k_2) + \ldots$, che si ottiene cambiando i segni a tutti i termini della precedente, sono contemporaneamente convergenti, o divergenti, od indeterminate. Ed anzi, se la prima converge ed ha per somma S, la seconda converge ed ha per somma $-S$.

Lo studio dunque delle serie di termini tutti negativi è equivalente allo studio della serie con tutti i termini positivi.

Se i termini della serie $a_1 + a_2 \ldots$ sono tutti positivi, la somma $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ dei primi n termini è una funzione crescente di n, e quindi (pag. 124, § 38) tende ad un limite per $n = \infty$.

Una serie a termini positivi non è mai indeterminata.

β) *Se*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{1}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots \tag{2}$$

sono due serie a termini positivi, e se per tutti i valori di n *si ha*

$$a_n \leq b_n, \tag{3}$$

allora, se la serie (2) *converge, anche la serie* (1) *converge; e la somma* s *di* (1) *non può superare la somma* σ *di* (2). *E quindi, se la serie* (1) *diverge, diverge anche la* (2).

Infatti, se s_n, σ_n sono rispettivamente la somma dei primi n termini della (1) e della (2), allora dalla (3) segue

$$s_n \leq \sigma_n. \tag{4}$$

Se la (2) converge, allora $\sigma = \lim_{n=\infty} \sigma_n$ è finito; dalla (4) segue che in tal caso s_n non può tendere all'infinito, ossia che la (1)

non può divergere. Quindi, per il teorema precedente, la (1) converge (perchè nè diverge, nè è indeterminata). Di più dalla (4) segue che $s = \lim_{n=\infty} s_n \leq \sigma$.

γ) In particolare se $b_n = bq^n$, dove $0 < q < 1$, $b > 0$, ossia se la (2) è una progressione geometrica decrescente (che noi sappiamo già convergente), si ha:

Se i teoremi della serie

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots$$

sono positivi, ed esistono due numeri positivi b, q, *tali che* $q < 1$ *e che*

$$a_n \leq bq^n,$$

allora la nostra serie converge.

E in modo analogo si vede che, se fosse

$$a_n \geq bq^n,$$

dove $q \geq 1$, $b > 0$,

la serie $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots$

sarebbe divergente.

δ) Supponiamo ora che esista un numero $k < 1$, tale che per tutti i valori di n sia

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k < 1 \quad (*).$$

Ciò equivale a supporre che il limite superiore dei rapporti $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sia un numero *minore* di 1.

(*) Da questo segue che i rapporti $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sono minori di 1. Non è però vero viceversa che, se tutti questi rapporti sono minori di 1, allora esista necessariamente un tale numero k minore di 1, e non minore dei nostri rapporti (come avverrebbe se i rapporti $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ fossero in numero finito); e ciò perchè potrebbe avvenire che il limite superiore di tali rapporti fosse proprio *uguale* ad 1.

Infatti, per esempio, nella serie divergente

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots \text{ è } u_n = \frac{1}{n}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} = \left[1 - \frac{1}{n+1}\right].$$

Tutti questi rapporti sono minori di 1.

Ciò nonostante, se k è un qualsiasi numero positivo minore di 1, si può trovare un intero h così grande che per $m > h$ sia $1 - \frac{1}{m+1} > k$.

Dunque, pure essendo tutti i nostri rapporti minori di 1, ciò nonostante, preso un qualsiasi numero $k < 1$, infiniti dei nostri rapporti sono maggiori di k, perchè il loro limite superiore è proprio uguale ad 1.

Allora sarebbe

$$\frac{a_2}{a_1} \leqq k, \qquad \frac{a_3}{a_2} \leqq k, \ldots\ldots, \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq k;$$

donde, moltiplicando membro a membro:

$$\frac{a_{n+1}}{a_1} \leqq k^n,$$

ossia: $$a_{n+1} \leqq a_1 k_n.$$

I termini della nostra serie

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots$$

sarebbero ordinatamente minori o uguali dei termini della progressione geometrica decrescente

$$a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + \ldots\ldots$$

Quindi la nostra serie sarebbe convergente.

In modo analogo si prova che, se per tutti i valori di n è $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq 1$, la nostra serie è divergente.

Per il primo caso, p. es., invece di ammettere che fosse

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq k < 1 \tag{5}$$

per tutti i valori di n, basterebbe ammettere che questa disuguaglianza valesse a partire da un certo valore di n in poi, p. es., per $n \geqq m$. La serie $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots$ sarebbe ancora convergente.

Infatti, essendo soddisfatta la (5) per $n \geqq m$, è convergente la serie

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots\ldots$$

e quindi anche (§ 42, γ, pag. 142) la serie

$$a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{m-1} + a_m + a_{m+1} + \ldots\ldots$$

Considerazioni analoghe valgono pel secondo caso.

Concludendo si ha il teorema: *Se in una serie a termini positivi*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots$$

il rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *di un termine al precedente, da un certo punto in poi* (ossia per n maggiore o uguale ad un certo m), *è uguale o minore di un numero fisso* k *minore di* 1, *la serie è con-*

vergente; se detto rapporto è maggiore od uguale ad 1, *la serie è divergente.*

Se ne deduce facilmente il seguente corollario, molto utile in pratica: **Se in una serie a termini tutti positivi (o tutti negativi) il rapporto di un termine al precedente ha un limite minore di 1 (*), la serie è convergente; se ha un limite maggiore di 1, la serie è divergente.** Sia $\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha < 1$. Sia k un numero *compreso tra* α *ed* 1. Poniamo $\varepsilon = k - \alpha$. Esisterà per definizione di limite un intero m tale che per $n \geqq m$ (cioè quando n è nell'intorno $(m, +\infty)$ di $+\infty$), valgano le

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - \alpha < \varepsilon \quad , \qquad \alpha - \frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon \quad ,$$

e in particolare quindi la $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha + \varepsilon = k < 1$. Quindi per il teorema precedente la serie $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots$ sarà convergente.

Se invece $\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, allora $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ finirà per diventare e restare maggiore od uguale a 1; e, pel teorema precedente, la serie sarà divergente (**).

Se $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *non esiste, o vale* 1, *nulla si può affermare in generale.*

Un altro criterio di convergenza sarà dato al § 63, δ.

Es. La serie $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots\ldots$ è convergente.

(*) Si potrebbe dire anche: minore di un numero k minore di 1. Ma questa frase più complicata sarebbe nel caso attuale equivalente a quella più semplice del testo.

(**) La convergenza di $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots$ nel caso che $\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ si può anche in modo meno completo, ma più intuitivo, esporre così. Se $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tende ad $\alpha < 1$, esso finisce col diventare e restare tanto vicino quanto si vuole ad α: cioè, se k è un numero compreso tra α ed 1, il rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, da un certo valore di n in poi, sarà minore di $k < 1$. E quindi la serie converge. Del resto (oss. 6, pag. 109) sappiamo già che dalla $\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha < k$ si deduce che da un certo valore di n in poi il rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n} < k$.

Infatti in questo caso

$$a_n = \frac{1}{\lfloor n-1}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\lfloor n} : \frac{1}{\lfloor n-1} = \frac{1}{n}$$

e quindi

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0.$$

Vedremo in seguito che la somma di questa serie è proprio il numero e.

Si voglia calcolare la somma S di questa serie con l'approssimazione di $\frac{1}{4000}$. Si osservi che la somma di tutti i termini dopo lo n^{mo} termine uguaglia

$$\frac{1}{\lfloor n}\left\{1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots\right\}<\frac{1}{\lfloor n}\left\{1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots\right\}=$$

$$=\frac{1}{\lfloor n}\,\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{n+1}{n\lfloor n}.$$

Se dunque scegliamo n così grande che $\frac{n+1}{n\lfloor n} < \frac{1}{4000}$, la somma dei primi n termini della nostra serie differisce dal valore vero della serie per meno di $\frac{1}{4000}$. Ora questa disuguaglianza è soddisfatta per $n = 7$. Quindi si può scrivere:

$$S = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 4} + \frac{1}{\lfloor 5} + \frac{1}{\lfloor 6}$$ con un errore (in difetto) minore di $\frac{1}{4000}$. Con tre cifre decimali esatte è quindi $S = 2{,}718$.

Oss. In generale la somma s_n dei primi n termini di una serie convergente rappresenta la somma S della serie con un errore che si può rendere piccolo a piacere scegliendo n abbastanza grande. Una serie è tanto più conveniente al calcolo effettivo (converge tanto più rapidamente) quanto maggiore è l'approssimazione che si ottiene dando ad n valori non troppo grandi. Così, p. es., se i termini di a_n di una serie $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots$ sono positivi, e se $\frac{a_n+1}{a_n} \leq k < 1$, la serie, come sappiamo,

è convergente; ed essa sarà generalmente tanto più comoda al calcolo numerico, quanto più piccolo si può scegliere k in modo da soddisfare alle precedenti disuguaglianze. Lo studioso può illustrare questo fatto con esempi numerici, e anche ricorrendo soltanto a progressioni geometriche decrescenti.

§ 44. — Cambiamento nell'ordine dei termini di una serie a termini positivi.

Se

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots$$

è una serie, i cui termini appartengono anche alla serie

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots ,$$

se i termini di entrambe le serie sono positivi, se la seconda serie converge, anche la prima serie converge, ed ha una somma che non supera la somma della seconda.

Infatti se n è un intero qualsiasi, potremo trovare un altro intero $m \geqq n$ tale che nei primi m termini della seconda serie siano contenuti tutti i primi n termini della prima.

Sarà

$$(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n) \leqq (b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_m) \qquad (1).$$

Il limite del 2° membro per $m = \infty$ e quindi anche per $n = \infty$ uguaglia la somma Σ della seconda serie, che per ipotesi è un numero finito: quindi il primo membro di (1) non può tendere all'infinito, e perciò la prima serie converge ed ha una somma finita S. Passando poi al limite per $n = \infty$, la (1) dimostra che $S \leqq \Sigma$.

Se

[1] $$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots$$

è una serie convergente a termini tutti positivi (o tutti negativi), e se

[2] $$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots$$

è una serie dedotta da [1], *cambiando l'ordine dei termini, anche la* [2] *è convergente, e le due serie* [1] *e* [2] *hanno la stessa somma.*

Infatti, poichè i termini della [2] appartengono tutti alla [1], per il lemma precedente la serie [2] converge; e se S, Σ sono le somme di [1] e [2], è $\Sigma \leqq S$. Ma, poichè viceversa anche tutti i termini di [1] sono termini di [2], è anche $S \leqq \Sigma$. Quindi necessariamente $S = \Sigma$.

Questo teorema vale naturalmente, anche se la serie è a termini tutti negativi. c. d. d.

§ 45. — Serie a termini negativi e positivi. Serie a termini complessi.

Cominciamo dalla considerazione di una serie a termini reali

$$[1] \qquad u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots$$

Sul segno dei termini non facciamo alcuna ipotesi. Siano $a_1, a_2, \ldots$ quei termini di questa serie che sono positivi, $-b_1, -b_2, -b_3, \ldots$ quei termini della nostra serie che sono negativi. Tra i primi n termini della [1] ce ne saranno, per es., m positivi, p negativi: $m + p = n$. E sarà quindi

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_p).$$

Supponiamo che sieno convergenti le due serie

$$[2] \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots$$

$$[3] \qquad b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots \ (*)$$

e ne siano S, s le somme. Allora

$$\lim_{n=\infty} (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = \lim_{m=\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) - \lim_{p=\infty} (b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_p) = S - s.$$

Quindi: la [1] è convergente ed ha per somma $S - s$.

Con le notazioni precedenti si ha evidentemente

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| = (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) + (b_1 + b_2 + \ldots b_p)$$

donde, come sopra, si deduce che la serie

$$[4] \qquad |u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots\ldots$$

è convergente, ed ha per somma $S + s$.

Supponiamo ora viceversa che la [4] sia convergente, ed abbia quindi una somma finita T.

Siccome ognuna delle quantità a_i è un termine di [4], per il lemma del precedente paragrafo, la [2] è convergente. In modo analogo si dimostra che la [3] converge, e che quindi, per quanto si è visto, converge anche la [1].

Dunque:

Una serie [1] *converge, quando converge la serie* [4] *dedotta dalla* [1], *sostituendo a ogni termine il suo valore assoluto.*

Si avverta che il teorema reciproco non è vero.

(*) I risultati seguenti valgono anche se di termini positivi, o di termini negativi nella [1] ve n'è solo un numero finito, se cioè una delle serie [2], [3] si riduce a una somma. Questi risultati valgono anche se la [1] ha dei termini nulli.

Così, p. es., se ne trae che [1] converge se il $\lim_{n=\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ esiste, ed è minore di 1.

Una serie [1], tale che converga la serie [4] formata coi valori assoluti dei suoi termini, si dice *assolutamente convergente.*

TEOREMA. *Una serie* [1] *assolutamente convergente rimane tale, e non muta di valore, comunque si cambi l'ordine dei suoi termini.*

Infatti il cambiare l'ordine dei termini della [1] equivale a mutare al più l'ordine dei termini delle [2], [3]. Ma come sappiamo, comunque si muti quest'ordine, le serie [2], [3] a termini positivi restano convergenti, e le loro somme continuano ad essere rispettivamente uguali a S, s. Per le considerazioni precedenti la [1] resterà ancora convergente, e la sua somma sarà ancora $S - s$.

Si può invece dimostrare che in una serie convergente, ma non assolutamente convergente, si può mutare l'ordine dei termini in guisa che la serie diventi o divergente, o indeterminata, o abbia quella somma che più ci piace. Naturalmente è necessario cambiar l'ordine di un numero infinito di termini per ottenere una tale variazione.

Questi teoremi si estendono subito a una serie a termini complessi

(1) $$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots\ldots \qquad (w_n = u_n + iv_n)$$

col teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè siano assolutamente convergenti tanto le serie $u_1 + u_2 + \ldots\ldots$ *formata con le parti reali dei termini di* (1) *quanto la serie* $v_1 + v_2 + \ldots\ldots$ *formata coi coefficienti di* i *nei termini di* (1) *è che sia convergente la serie* $|w_1| + |w_2| + \ldots$ *dei moduli dei termini di* (1). (Ricordo che $|w_n| = \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$).

Infatti $|w_n| \leq |u_n| + |v_n|$. Se le serie delle $|u_n|$ e delle $|v_n|$ convergono, converge anche la serie somma, ed *a fortiori* converge la serie delle $|w_n|$. Viceversa, se converge quest'ultima serie, convergono le serie delle $|u_n|$ e quella delle $|v_n|$, perchè $|u_n| \leq |w_n|$, $|v_n| \leq |w_n|$.

Tali serie si dicono ancora assolutamente convergenti. Anche per una serie $w_1 + w_2 + \ldots\ldots$ a termini complessi vale il teorema che, se $\lim_{n=\infty} \left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| < 1$, la serie è *assolutamente convergente*, ed ha una somma indipendente dall'ordine dei suoi termini.

ESEMPI.

La serie $w_1 + w_2 + \ldots\ldots$, dove $w_1 = 1$, $w_n = \dfrac{x^{n-1}}{\underline{|n-1}}$ converge assolutamente per ogni valore (anche complesso) della x perchè il rapporto

$$\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = \left|\frac{x^n}{\underline{|n}}\right| : \left|\frac{x^{n-1}}{\underline{|n-1}}\right| = \left|\frac{x}{n}\right|$$

tende a zero per $n = \infty$. Dal teor. ε) del § 42 segue in particolare che $\lim\limits_{n=+\infty} \dfrac{x_n}{\underline{|n}} = 0$.

2° Studiamo ora la serie $1 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots$ ove si è posto: $u_n = \dfrac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)\,x^n}{\underline{|n}}$ ossia la serie

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots\ldots$$

dove m è una qualsiasi costante.

Se m è un intero positivo, tutti i termini dopo lo $(m+1)^{esimo}$ sono nulli e la serie si riduce ad un polinomio uguale (§ 11, pag. 44) ad $(1+x)^m$.

Se m non è un intiero positivo, allora si noti che:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)(m-n)}{\underline{|n+1}}}{\dfrac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{\underline{|n}}}\,\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \left|\frac{m-n}{n+1}\right|\,|x| =$$

$$= |x|\left|\frac{\dfrac{m}{n}-1}{1+\dfrac{1}{n}}\right|;$$

e quindi

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x|.$$

Se dunque $|x| < 1$, la nostra serie converge assolutamente. E in particolare ne consegue che, se $|x| < 1$, allora

$$\lim_{n=\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{\underline{|n}}\,x^n = 0.$$

§ 46. — Serie di funzioni.

Siano $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... infinite funzioni determinate in un campo T. Siano M_1, M_2, M_3, ... rispettivamente i limiti superiori dei loro moduli $|f_1(x)|$, $|f_2(x)|$, $|f_3(x)|$, ecc.

Se la serie di questi limiti superiori

[1] $$M_1 + M_2 + M_3 + ...$$

converge, allora è convergente *assolutamente* anche la serie

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ...$$

in ogni punto del campo T (*).

Una tale serie $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ...$ si dirà *totalmente convergente.*

Se la costante L_n *non è inferiore ad alcuno dei valori delle* $|f_n(x)|$, *e se la serie* $L_1 + L_2 + L_3 + ...$ *converge, la serie* $f_1 + f_2 + f_3 + ...$ *è totalmente convergente.*

Infatti dalle $L_n \geqq |f_n(x)|$ si deduce $L_n \geqq M_n$. Dalla convergenza della serie delle L si deduce quindi la convergenza della serie delle M, e quindi per definizione, la totale convergenza della serie delle $f_n(x)$.

Una serie totalmente convergente è (come abbiamo già osservato) *anche assolutamente convergente.* Il teorema reciproco non è generalmente vero.

Supponiamo che esista il $\lim_{x=a+} f_i(x)$, che noi indicheremo con l_i (**).

È chiaramente $|l_n| \leqq M_n$; e quindi la serie

[2] $$l_1 + l_2 + l_3 + ...$$

converge *assolutamente.* Sia M la somma di [1], e sia ε un numero piccolo a piacere. Esisterà un intero n così grande che

$$M - (M_1 + M_2 + ... + M_n) < \frac{\varepsilon}{3}$$

cioè

$$M_{n+1} + M_{n+2} + M_{n+3} + ... < \frac{\varepsilon}{3}.$$

(*) Infatti dalle $|f_n| \leqq M_n$ si deduce che per ogni valore di x nel campo T la serie

$$|f_1| + |f_2| + |f_3| + ...$$

converge, e quindi (§ 45) la serie

$$f_1 + f_2 + f_3 + ...$$

converge assolutamente.

(**) È inclusa l'ipotesi che la x varii in T, e quindi anche che in ogni intorno destro di a esistano punti di T, distinti da a.

Poichè $|f_n| \leq M_n$, $|l_n| \leq M_n$, sarà pure

$$[3] \quad |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + f_{n+3}(x) + \ldots| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$[4] \quad |l_{n+1} + l_{n+2} + l_{n+3} + \ldots| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'altra parte poichè (§ 35, α, pag. 113)

$$\lim_{x=a} (f_1 + f_2 + \ldots + f_n) = (l_1 + l_2 + \ldots + l_n),$$

si potrà trovare un intorno di a, in cui

$$[5] \quad |(f_1 + f_2 + \ldots + f_n) - (l_1 + l_2 + \ldots + l_n)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Cosicchè, in virtù delle [3], [4], [5], in questo intorno, sarà

$$|(f_1+f_2+\ldots+f_n+f_{n+1}+\ldots) - (l_1+l_2+\ldots+l_n+l_{n+1}+\ldots)| \leq$$
$$\leq |(f_1 + f_2 + \ldots + f_n) - (l_1 + l_2 + \ldots + l_n)| +$$
$$+ |f_{n+1} + f_{n+2} + \ldots| + |l_{n+1} + l_{n+2} + \ldots| \leq \varepsilon.$$

Dunque, dato un ε piccolo a piacere, esiste un intorno di a in cui vale questa disuguaglianza.

Per la definizione di limite avremo pertanto:

Se una serie di funzioni (reali o complesse) è totalmente convergente in un intorno del punto a, *e se per* x = a *i suoi termini ammettono un limite* (certo finito), *il limite della serie per* x = a *è uguale alla serie dei limiti.*

Ne segue tosto che: *Se i termini di una serie totalmente convergente sono funzioni continue, la somma della serie è una funzione continua.*

I precedenti teoremi valgono anche per le serie *uniformemente* convergenti, di cui le serie totalmente convergenti sono un caso particolare. Si dice che la serie $f_1(x) + f_2(x) + \ldots$ converge ed ha per somma $f(x)$, se, prefissato un $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere, per ogni valore di x nell'intervallo considerato esiste un intero m tale che per $n > m$ sia $|f(x) - [f_1(x) f_2(x) + \ldots + f_n(x)]| < \varepsilon$.

Questo valore di m varia generalmente con x; ma se (comunque sia stato scelto ε) si può trovare un valore di m, tale che la precedente disuguaglianza valga per tutti i valori della x, la serie si dice *uniformemente convergente.* In altre parole per una serie convergente il numero m è generalmente funzione di x e di ε (che, al variare di x, può anche avere $+\infty$ per limite superiore); per una serie uniformemente (in ugual grado) convergente si deve poter scegliere un m, che sia funzione della sola ε.

Questi teoremi si estendono senz'altro alle serie, i cui termini sono funzioni di più variabili; *essi*, si noti, *sono affatto analoghi ai teoremi corrispondenti per le somme di un numero finito di funzioni.*

OSSERVAZIONE.

Accanto alle serie i matematici hanno studiato altri algoritmi analoghi che hanno grande importanza per il teorico, e ben poca per l'ingegnere. Voglio alludere ai prodotti infiniti, alle frazioni continue illimitate, ai determinanti infiniti.

Così, p. es., dati infiniti numeri u_1, u_2, u_3, ..., ecc. si dice che il prodotto infinito $u_1\, u_2\, u_3$ ..... converge ed ha il valore p se il limite per $n = \infty$ del prodotto $p_n = u_1\, u_2$ ..... u_n dei primi n numeri u esiste, è finito, ed è uguale a p. Lo studio di un tale prodotto si può ridurre a quello di una serie, osservando che in particolare sarà $\log |p| = \log |u_1| + \log |u_2| + \log |u_3| + \ldots\ldots$