76/123

FOTOCOPIA DELL'ORIGINALE

PER GENTILE CONCESSIONE DELLO

ISTITUTO ELETTROTECNICO NAZIONALE
"GALILEO FERRARIS"

PRESSO LA CUI BIBLIOTECA

L'ORIGINALE È CONSERVATO

OPERE

DI

GALILEO FERRARIS

OPERE

DI

GALILEO FERRARIS

PUBBLICATE PER CURA DELLA

ASSOCIAZIONE ELETTROTECNICA ITALIANA

VOL. III.

con 87 incisioni e 2 tavole.

ULRICO HOEPLI
EDITORE-LIBRAIO DELLA REAL CASA
1904.

ALLA MADRE

DI SACRA EDIFICANTE MEMORIA

AL PADRE

LA CUI GIOIA OGNI MIO VOTO APPAGA

ALLO ZIO

CHE A DIVIDERE LE DURISSIME FRA LE PATERNE CURE

LA VITA CONSUMA

TUTTO DEVO

QUESTO NONNULLA OGGI CONSACRO.

INDICE

DELLE

TRASMISSIONI TELODINAMICHE

DI HIRN

(Dissertazione e tesi presentate alla Commissione esaminatrice della R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri di Torino.)

La force motrice fut toujours localisée, d'or en avant elle sera mobilisée.
HIRN.

I.

LA TELODINAMIA, SUA ORIGINE.

Raccogliere il lavoro di un motore e mandarlo, in ogni guisa distribuito, a distanze di più centinaia e migliaia di metri, senza che la trasmissione ne assorba tanta parte da ledere le convenienze economiche: ecco il seducente problema che mi sta innanzi, la completa soluzione del quale potrà promuovere radicali innovazioni manifatturiere, invertire la relativa ricchezza dei paesi, cambiare la faccia del mondo industriale.

In verità oltre i numerosi motori idraulici possibili sopra ogni corrente, colossali raccoglitori di moto ineluttabilmente confinati là dove ai fiumi ed ai torrenti le forze naturali apersero corso e cadute, colla trasmissione della forza a grande distanza potranno contendere alle macchine a vapore il prezioso privilegio di portare lavoro ovunque lo richieggano il facile commercio od i bisogni e le agiatezze della vita. Ed allora il calore mandatoci continuamente dal sole ad innalzare sulla vetta dei monti le acque dei mari, verrà in molti casi a sostituire con rilevante risparmio il calore dei secoli remotissimi, il quale nel carbon fossile sepolto sotto profondi strati della crosta terrestre vuolsi attingere con tanto dispendio e fatica. Sicchè l'abbondanza delle acque correnti non meno che quella del litantrace potrà — venturosamente per l'Italia — misurare la ricchezza delle nazioni.

L'arduo quanto importante problema già cimentarono vittoriosamente i fratelli Hirn da una parte e gli ingegneri Sommeiller, Grattoni, Grandis dall'altra: ormai le filature di Logelbach, di Mulhouse, di Colmar, le numerose officine di Sciaffusa, le perforatrici di Bardonecchia e di Modane, alle quali tutte s'impartisce il moto da pochi e lontani punti, più non permettono di collocare fra le idee chimeriche quella di valli intiere animate dalla forza del torrente che ne disegna il *thalweg*, nè di considerare utopia la distribuzione a domicilio della forza di un solo motore. Così già si pensa che Parigi debba essere fra breve percorsa da una condotta di forza, come la percorrono condotte d'acqua potabile e di gaz-luce.

Frattanto le funi metalliche e l'aria compressa sono i due mezzi che a sì grandioso scopo furono trovati ad un tempo. [1] Quali siano i pregi, i difetti, i limiti d'applicazione di ciascuno, le circostanze quindi in cui l'uno all'altro si debba preferire, lo dirà l'esperienza meglio d'ogni teoria; ma io non saprò tacerne intieramente, sebbene mi sia imposto stretti confini in una sola parte della vasta questione, facendo mio unico oggetto le *trasmissioni di moto per funi metalliche.*

Prima che le trasmissioni telodinamiche venissero immaginate, la meccanica possedeva due mezzi per mandare la forza a distanza: i lunghi alberi di trasmissione (*arbres de couche*) e le correggie.

Ristrettissimi erano i limiti delle distanze a cui questi organi potevano mandare il movimento. Così se colla formola data dal Redtenbacher [2] si calcola il diametro di un albero, che colla velocità di 100 giri al minuto trasmetta una forza di 100 cavalli, e se ne deduce il peso, e quindi l'attrito da questo prodotto, si vedrà, che a 400$^{m.}$ di distanza questa resistenza avrà

[1] Un mezzo di uso già molto antico e diffuso, specialmente in Inghilterra, onde mandare la forza a grandi distanze, è quello dell'*acqua* portata ad *alte pressioni*. Benchè preferibile ad ogni altro in certe circostanze, questo metodo non è però di applicazione possibile che in pochi casi, nè si può considerare come una soluzione del problema della trasmissione del moto a grandi distanze.

[2] *Résultats scientifiques et pratiques destinés à la construction des machines*, pag. 52.

già consumato da sè sola circa i 30 centesimi della forza data dal motore. Rifacendo il calcolo per un albero destinato a trasmettere la forza di 10 cavalli, si troverà che a 400^m il solo attrito dovuto al peso dell'albero avrà consumato quasi il 60 per cento del lavoro totale; e nella stessa guisa si troverà che un albero calcolato pel lavoro di un cavallo prima di attingere la lunghezza di 400 metri avrà già consumato per attrito tutto il lavoro che il motore gli avrà consegnato.

Questi limiti si restringono assai più se si prende a considerare il costo di una trasmissione siffatta: una trasmissione di 40 cavalli di forza costerebbe almeno 100 franchi per ogni metro di lunghezza.

La trasmissione per cingoli aveva limiti ancor più ristretti, finchè la correggia non poteva essere che di cuoio: la poca tenacità del cuoio, che sotto ad una tensione di 2 chilogrammi per millimetro quadrato si rompe, ed il peso relativamente grande di questo materiale impediva di aumentare oltre a qualche decina di metri la distanza fra le due puleggie. Pari difetto aveano le corde di canapa. E tuttavia le trasmissioni per cingoli avrebbero potuto mandare la forza molto più lontano ed economicamente; non mancava che una cosa: un cingolo più resistente che i canapi e le corregge, ed insieme più leggero. E questo cingolo fu trovato nelle funi di ferro.

Le funi di fil di ferro non sono un'invenzione nuova. L'uso loro, già estesissimo fin dal dì che si costrusse la prima fune con ferro non ricotto, si era centuplicato allorchè si pensò a porre nel loro centro un'anima di canapa incatramata, la quale tolse loro l'unico difetto che loro si rimproverasse, la rigidità.[1] Le miniere pel servizio de' loro piani inclinati, i navigli pelle loro manovre, vi trovarono un materiale che, resistente come un canape, non aveva che il peso di un terzo del suo ed un prezzo molto minore.

Tuttavia l'idea di applicare le corde metalliche alla trasmissione del moto a grande distanza è recentissima.

L'Hirn, abile ingegnere dell'Alsazia, ne ebbe pel primo la idea. In una sua breve ma vivace memoria, che trovasi inserita nel dizionario del Laboulaye, leggesi l'origine della sua invenzione.

[1] Questa capitale innovazione nella fabbricazione delle corde metalliche fu in Francia l'oggetto di un brevetto d'importazione rilasciato ai signori Végni e C.

Eccola in poche parole.

Questa applicazione, che risolve completamente uno dei problemi più difficili della meccanica, rimonta all'anno 1850.

Un antico locale, vastissimo, dello stabilimento dei signori Haussmann, a Logelbach, presso Colmar, poteva essere utilizzato come un bel opifizio di tessitura meccanica, ma la forza motrice disponibile doveva essere cercata ad 85 metri di distanza. Gli ingegneri dello stabilimento, consigliati dall'abitudine, proponevano una trasmissione per lunghi alberi, o chiusi in un canale sotterraneo, o sopportati da colonne, acciocchè il passaggio alle vetture rimanesse libero. La minima spesa superava 6000 franchi, e non si poteva guari contar su meno di cinque cavalli perduti per attrito. Un fratello dell'Hirn venne, a suo turno, a proporre l'uso dell'antica correggia, modificata solamente dalla sostituzione di un nastro di ferro o d'acciaio alla correggia di cuoio. Benchè a prima giunta una tale soluzione avesse destate le risa, tuttavia, siccome la realizzazione di questo progetto poteva farsi senza grande spesa, ed essa semplificava visibilmente la questione, si risolvè di tentare l'esperienza.

I signori Pengeot d'Audincourt somministrarono delle lamine d'acciaio di $0^m,06$ di larghezza, di $0^m,001$ di grossezza e di 40 a 50 metri di lunghezza, mirabilmente eseguite, e le quali bastò riunire con dei chiodi ribaditi per ottenere la voluta lunghezza di $85^m \times 2$. Due puleggie di legno di due metri di diametro, a gola piatta e ad assi paralleli, ricevettero questa correggia di nuovo genere, la quale in sul principio funzionò in modo soddisfacente e poteva, a rigore, essere impiegata. Essa avea tuttavia dei gravi inconvenienti. In causa della sua superficie e del peso relativamente piccolo, il minimo soffio di vento la portava fuori della voluta direzione, e la faceva fregare contro le guancie delle puleggie; egli era adunque indispensabile guidarla con delle rotelle. Ma queste rotelle, per quanto fossero ben fatte, laceravano talvolta la correggia nelle sue chiodature, e finivano esse stesse per esserne guaste. In queste circostanze un ingegnere inglese, amico dell' Hirn, compreso dall'utilità che vi sarebbe nel rendere pratico un così semplice mezzo per trasmettere la forza a distanza, gli consigliò di esaminare a Londra le funi che i signori Newall e Comp. eseguivano per diversi usi, e che a suo avviso avrebbero potuto soddisfare alle nuove esigenze, a cui si sarebbero sottomesse. Fu questo un lampo pell' ingegnere alsaziano: ei non dubitò un istante ad ordinare al

Newall una corda metallica ed a metterla alla prova. E l'esito fu felice. Dopo qualche modificazione fatta alla gola delle puleggie, dopo qualche tentativo, e qualche noia eziandio, la corda in ferro sostituita al cingolo d'acciaio funzionò e seguitò a funzionare nella maniera la più soddisfacente.

L'importanza capitale della propria invenzione non isfuggì al sagace ingegnere, che guidato dalla teoria e dall'esperimento recò ben presto il suo sistema a tale perfezione, che l'Alsazia tutta e tutta la Germania si trovarono in brev'ora coperte di tali trasmissioni.

Con un disinteresse pari al suo ingegno Hirn non si procurò pella sua invenzione brevetto di sorta; anzi, non pago di avere per mezzo di ripetuti scritti divulgate le principali regole che l'esperienza gli aveva suggerite, non rifiutò mai di dare a chiunque, che il richiedesse, su qualunque cosa, le più minute informazioni. Non regnava su di lui che il filantropico desiderio di largire all'industria *cette merveilleuse faculté de franchir l'espace sans perte notable de force.*

II.

DIFFERENZE FRA LE TRASMISSIONI TELODINAMICHE E LE TRASMISSIONI PER CINGOLI, CLASSIFICAZIONE.

Già l'accennai, le trasmissioni telodinamiche non sono che una estensione del metodo della trasmissione per cingoli, non son che trasmissioni per cingoli, ove alla correggia di cuoio vien sostituita una fune metallica. Tuttavia passa tra l'uno e l'altro sistema una capitale differenza: mentre nelle trasmissioni per cingoli la correggia, distesa in due tratti rettilinei, ha una tensione tutt'affatto artificiale, nelle trasmissioni telodinamiche invece la tensione è tutta prodotta dal peso stesso della fune. In quelle perciò si può sempre con somma facilità, per mezzo di apposite rotelle, far variare la tensione, in queste invece la tensione è completamente determinata dalla distanza delle due puleggie e dalla saetta della curva descritta dalla fune, o (ciò che val lo stesso) dalla distanza delle puleggie e dalla lunghezza della fune: nè le puleggie di tensione vi sono applicabili che in pochi casi.

In quelle la distanza delle due puleggie non ha che un limite superiore determinato dalla resistenza del cingolo alla trazione, in queste invece una tale distanza ha eziandio un limite inferiore: quella distanza per cui il peso della fune (quando a questa non vogliasi dare una soverchia saetta, come praticasi in alcuni casi di cui a suo luogo faremo parola) non è più capace di produrre la necessaria tensione.

E finalmente mentre una trasmissione con correggie si stabilisce con egual facilità e convenienza fra puleggie collocate ad altezze relative qualunque, le trasmissioni telodinamiche corrisponderanno tanto meglio al loro scopo quanto più la retta che congiunge i centri delle due puleggie si avvicinerà all'orizzonte. Una troppo grande inclinazione di questa retta sull'orizzonte farebbe sì che mentre la puleggia superiore sopporterebbe da sè sola la massima parte del peso della corda, l'inferiore scivolerebbe dentro della fune per mancanza di aderenza.

A queste differenze derivanti dalla natura del cingolo se ne debbono aggiungere altre cagionate dal diverso scopo dei due sistemi di trasmissione. E dapprima: le correggie, destinate sempre a mandare il moto da un punto all'altro di una stessa camera od anche da un pezzo all'altro di una macchina medesima, debbono disporsi in modo tale, che la trasmissione abbia luogo qualunque sia la reciproca direzione degli alberi motore e condotto: la fune metallica invece, destinata quasi sempre a mandare ad una officina il lavoro di un motore remoto, senza un soverchio consumo di lavoro, si disporrà ordinariamente sopra puleggie ad assi paralleli, siccome quella, che tanto meno consumerà di lavoro in resistenze passive, quanto minore sarà il numero delle sue ripiegature, delle puleggie, ecc. In secondo luogo la fune telodinamica dovrà salir colli, attraversare strade, seguire tutte le accidentalità del terreno, e dovrà perciò essere di tratto in tratto sostenuta con *puleggie di sostegno;* dovrà similmente essere sostenuta quando per la troppo grande distanza delle due puleggie principali essa non potrebbe, senza un'impraticabile altezza di queste, non istrisciare sul terreno. Finalmente la trasmissione del moto fra due assi paralleli fatti con cingoli di cuoio è sempre semplice; quella invece che operasi con funi di fil di ferro può in molti casi esser multipla; può convenire cioè che il moto mandato dalla puleggia motrice ad una prima puleggia intermedia sia da queste trasmesso ad una seconda, da questa ad una terza, e così fino all'ultima, che sarà la puleggia *condotta.*

Si dicono trasmissioni *semplici* quelle in cui non si hanno che le due puleggie motrice e condotta, *composte* o *combinate*[1] quelle ove il moto passa dalla puleggia motrice *principale* alla *condotta principale* coll'intermezzo di puleggie mosse e motrici ad un tempo. Trasmissioni *orizzontali* diconsi quelle trasmissioni semplici in cui gli assi delle due puleggie sono sopra di uno stesso piano orizzontale, e quelle trasmissioni composte ove tutte le trasmissioni elementari che la compongono sono *orizzontali;* e diconsi *oblique* le trasmissioni stabilite fra puleggie i cui assi non giacciono sullo stesso piano orizzontale. Le trasmissioni *verticali* non sono convenienti allo scopo e non vengono mai impiegate.

III.

FUNI, NUMERO E DIAMETRO DEI FILI, DIAMETRO DELLA FUNE, RESISTENZA ALLA ROTTURA, PESO, RIGIDEZZA.

Le funi che vengono usate nelle trasmissioni telodinamiche sono quelle che diconsi funi di fil di ferro *rotonde.* Constano sempre di un'anima centrale di canapa incatramata, attorno alla quale s'avvolgono secondo eliche diversi cordoni, formati ciascuno da fili di ferro avvolti secondo eliche attorno ad una piccola anima o funicella centrale di canapa incatramata. Il numero de' cordoni o legnuoli componenti una fune assumevasi sempre fin in questi ultimi anni, ed assumesi pei casi ordinari ancora oggidì, uguale a 6. Il numero poi de' fili di ferro componenti un medesimo legnuolo non è mai (pelle funi a 6 legnuoli) minore di 6, nè mai maggiore, ch'io sappia, di 12. Dimodochè le ordinarie funi telodinamiche a sei legnuoli hanno, per numero di fili di ferro che le compongono, sempre uno de' numeri:

36, 48, 54, 60, 66, 72.

[1] Zusammengesetzen.

Nelle figure 1 e 2 sono disegnate le sezioni di due funi, l'una di 36 fili, l'altra di 60. La parte tratteggiata è canapa.

Le funi di 42 fili ordinariamente non si fanno con sei legnuoli di sette fili ciascuno, ma con sei legnuoli di sei fili soltanto, ed allora si sostituisce alla semplice anima di canapa un cordone identico a questi sei, formato cioè, come essi, di un'animella centrale coperta tutt'attorno da sei fili di ferro.

È manifesta la ragione di queste disposizioni: l'anima ed i cordoni che l'avvolgono assumono delle sezioni prossime ad esagoni regolari, epperò meglio che in qualunque altra disposizione si adattano l'un contro l'altro.

Col rapido propagarsi delle trasmissioni telodinamiche essendosi sentito il bisogno di avere funi più resistenti, si costrussero recentemente funi di un numero di legnuoli maggiore di sei. Così nella meravigliosa trasmissione di Sciaffusa vi sono funi di 80 fili disposti in 10 cordoncini.

I fili di ferro si stringono, nel torcere la fune, tanto strettamente insieme, che la fune finita venga finalmente ad avere un diametro esterno che stia al diametro del filo in un rapporto, che per ciascun valore del numero totale de' fili componenti la fune è determinato dall'esperienza siccome il più conveniente.

Detto d il diametro esterno della fune, δ il diametro dei fili di ferro, i il numero dei fili, i pratici sogliono assumere per le funi a sei legnuoli:

$$\left.\begin{array}{lcccccc} & i = 36 & 48 & 54 & 60 & 66 & 72 \\ \text{per} & \dfrac{d}{\delta} = 8{,}00 & 10{,}25 & 11{,}33 & 12{,}80 & 13{,}25 & 14{,}20 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Questo diametro d è il diametro esterno della fune, vale a dire il massimo, o, se vuolsi, quello del circolo circoscritto alla sezione della fune. Questi numeri poi non si dovranno tenere come assolutamente invariabili: sono essi tuttavia quelli che la esperienza ha dimostrato essere i più convenienti.

Il diametro δ del fil di ferro rarissimamente si fa minore di $0^{mm},5$ o di molto superiore a 2^{mm}.

La qualità del ferro con cui son fatti i fili è degna della massima attenzione, se vuolsi che le funi abbiano una grande durata. Migliori fra tutti si mostrarono i fili di ferro svedese, i quali sono sopra ogni altro tenacissimi e durevoli. I fili d'acciaio sono poco adatti a servire per funi telodinamiche, siccome quelli che avendo un troppo grande coefficiente di elasticità, rendono necessarie troppo grandi puleggie. Non mancano tuttavia esempi di trasmissioni con funi di acciaio. Pare anzi che l'uso di queste vada propagandosi.

I fabbricanti poi debbono sopratutto procurare che i fili sieno il più possibile lunghi, onde non sieno necessarie troppo frequenti legature.

Per unire i due capi di una fune e farne un cingolo continuo impiegasi una specie di legatura analoga affatto a quella che si usa comunemente per le grandi corde di canape e che dicesi *legatura* od *impiombatura lunga* (*épissure longue*). La si fa storcendo i due capi della fune per un tratto di 30 o 35 centimetri, e legando con il metodo ordinario della lunga legatura fra loro i due capi dell'anima principale di canapa. Allora si avvolge successivamente ciascun cordone sull'anima, resa così senza fine, e si lega col capo del corrispondente cordone dell'altro capo della fune. Questa legatura poi di un cordone col suo corrispondente si fa storcendo i due estremi da unirsi, legando le animelle, ed avvolgendo in seguito successivamente ciascun filo dell'un estremo nel sito che era occupato dal filo corrispondente sull'estremo dell'altro legnuolo, e saldando la estremità di questi due fili in modo che le unioni de' diversi fili non si trovino sovra una medesima sezione della fune, ma bensì uniformemente distribuiti su tutta la lunghezza per cui i capi della fune si sono disfatti ed intrecciati.

Onde proteggere le funi contro la ruggine Hirn suggerisce di spalmarla una o due volte al mese con un miscuglio di catrame e di olio.

Riguardo alle funi, le cose che a noi importa di conoscere anzitutto sono: il peso loro, al quale, come si è osservato, devesi esclusivamente la tensione; le dimensioni, dalle quali dipende questo peso, e che debbono dedursi dalla tensione che la fune è destinata a sopportare; e finalmente la rigidezza.

Detto Π il peso di una fune per metro corrente, i il numero dei fili componenti la fune, δ il diametro di questi fili, espresso in millimetri, si suole calcolare Π mediante la formola:

$$\Pi = 0{,}007\, i\, \delta^2. \qquad (2)$$

Ritenendo che il peso specifico del fil di ferro sia 7, 8, vedesi come questa formola supponga che il peso della canapa sia circa $^1/_7$ del peso totale Π della fune.

Quanto alle dimensioni, diciamo T la tensione che ha da sopportare la fune, ed S la tensione riferita al millimetro quadrato alla quale vogliamo sottoporre il metallo, ed avremo per calcolare δ la formola:

$$\delta = \sqrt{\frac{4}{\pi}}\sqrt{\frac{1}{i}}\sqrt{\frac{T}{S}} = 1{,}1283\sqrt{\frac{1}{i}}\sqrt{\frac{T}{S}}. \qquad (3)$$

Sulla rigidità delle funi metalliche mancano affatto le esperienze. Il Reuleaux, professore di costruzioni di macchine nell'*Istituto industriale* di Berlino, che è forse quegli che ha dato le regole più precise ed i dati più sicuri sulle trasmissioni telodinamiche, si limita su questo punto ad osservare, che, *adottando per le puleggie quelle proporzioni che sono in uso*, la resistenza dovuta alla rigidezza della fune riesce *affatto trascurabile.* In verità ci vuole tutta l'autorità di questo celebre meccanico per persuaderci a trascurare affatto ne' nostri calcoli una resistenza che, atteso il grande modulo d'elasticità del ferro, siamo naturalmente inclinati a presumere grandissima.

L'ingegnere Sacheri, assistente nella nostra Scuola d'applicazione, ebbe l'idea di tentare per via analitica la ricerca di una formola atta ad esprimere questa resistenza. La sua formola ha d'uopo, prima di venire impiegata, di una conferma sperimentale, ma non per ciò io posso qui tralasciare di accennarvi, non fosse per altro che per trovare in essa una conferma dell'asserzione del Reuleaux, che a prima vista pare sì azzardata.

L'ingegnere Sacheri considera la fune come un solido elastico inizialmente rettilineo. Questo solido elastico, appoggiato orizzontalmente sulla gola di una puleggia, caricato di poi ad una sua estremità di un peso Q compreso nei limiti della naturale sua elasticità e sollecitato da una forza diretta secondo il suo asse primitivo, applicata nel punto in cui la fune prima di venir caricata toccava la puleggia, e capace di fare equilibrio al peso Q ed a tutte le altre resistenze minori, si infletterà secondo una curva, la quale potrà o non per un tratto appoggiarsi sulla superficie delle puleggie, ma che ad ogni modo sarà tangente nel punto di primitivo contatto della fune colla puleggia alla direzione primitiva dell'asse della fune, e sufficientemente prolungata verrà ad avere la tangente sua verticale. In ogni caso succederà che questa tangente verticale disterà dalla tangente verticale della puleggia, e ne risulterà un aumento nel braccio di leva della resistenza Q, dal quale il Sacheri fa dipendere totalmente la resistenza cercata. Ridotto così il problema alla ricerca di questo braccio di leva, distinti i due casi in cui la fune non abbia comune colla puleggia che il punto primitivo di contatto ed in cui la fune si appoggi alla puleggia per un certo angolo, e dimostrato impossibile il primo caso, attese le proporzioni ordinariamente adottate pelle pulegge, trova, per mezzo della nota equazione della curva elastica, essere il braccio L della resistenza dato dalla formola:

$$L = R + \frac{\varepsilon}{2\,Q\,R}$$

dove ε è il momento di flessibilità della fune ed R il raggio della puleggia, e quindi essere la cercata resistenza Z espressa da:

$$Z = \frac{\varepsilon}{2\,R}. \qquad (4)$$

In mancanza poi di esperienze sul coefficiente di elasticità delle funi, l'autore della teoria suggerisce di adottare il coefficiente di elasticità del ferro, non tenendo però conto della parte di canapa della sezione nel calcolo del momento d'inerzia; ed è in questo modo che io intendo di applicare la formola (4).

Come vedesi, così operando si considerano i fili di ferro componenti una fune come saldati l'un contro l'altro in modo che riesca impossibile in essi alcun relativo spostamento nel senso longitudinale. Seguirebbe da questa supposizione che non solo l'anima e le animelle di canapa non darebbero flessibilità alla fune, ma sarebbero invece nocive alla flessibilità medesima. Esse infatti non fanno che aumentare il momento d'inerzia della sezione della fune e quindi proporzionalmente Z. Ora l'esperienza dimostra l'opposto. Riterremo quindi come un limite massimo il risultato a cui ci condurrà la formola (4). Quanto questo massimo si scosti dal vero valore non è cosa calcolabile *a priori:* esso può esserne prossimissimo, l'errore inoltre sarà compensato in parte dal trascurare che si farà la parte di canapa nel calcolo del momento d'inerzia della sezione; ma quello che principalmente qui importa a me è d'essere certo che i risultati che troverò non saranno sicuramente troppo piccoli, talchè se essi mi saran per dare una rigidezza trascurabile, potrò con tanto maggior ragione trascurare ne' calcoli l'influenza di questa resistenza passiva.

Vengo ora all'applicazione della formola (4).

Detto E il modulo d'elasticità del filo di ferro, I il momento d'inerzia della sezione della fune rispetto all'orizzontale condotta pel suo centro, e D il diametro della puleggia, la (4) si può scrivere:

$$Z = \frac{2EI}{D^2}. \tag{5}$$

Per prima cosa adunque devo calcolare I. Ma innanzi tutto come sono disposti i circoli, sezioni traversali de' fili di ferro, nella sezione della fune? Nei diversi legnuoli, prima che questi venissero avvolti e stretti sopra l'anima centrale, questi circoletti erano disposti l'un contro l'altro in modo che i loro centri si trovavano tutti sopra di una circonferenza avente per centro il centro della sezione del legnuolo; circonferenza, che, detto m il numero dei fili che entrano nella composizione del legnuolo, doveva aver per raggio

$$a = \frac{\delta}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{m}} \tag{6}$$

I diversi legnuoli, il cui numero indicherò con n, vennero in seguito avvolti attorno all'anima centrale e stretti tanto che il diametro esterno d della sezione della fune venne ad assumere il valore (1). Secondo l'energia di questa torsione sarà avvenuto uno di questi due fatti: o le sezioni de' legnuoli si saranno mantenute inalterate, e saran venute a disporsi l'una contro l'altra in modo che i loro centri si trovino poi situati sopra una circonferenza di circolo avente il centro nel centro della sezione della fune, o le sezioni stesse si saranno deformate. In questo secondo caso è impossibile ogni calcolo sul momento d'inerzia I; ma è facile vedere, che se il primo caso non verificasi esattamente in pratica, lo si può tuttavia considerare come molto prossimo alla realtà. Per convincercene vediamo di trovare una formola, che, nell'ipotesi che questo primo caso si avveri, leghi il diametro d della fune al diametro δ del fil di ferro ed al numero $i = mn$ di questi fili, ed a questo scopo diciamo Δ la distanza fra i centri delle sezioni di due legnuoli consecutivi, ed r il raggio del circolo su cui sono disposti questi centri. Avrò:

$$r = \frac{\Delta}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}. \tag{7}$$

La minima distanza $\Delta = O\,O'$ (figura 3) si ha evidentemente quando due fili c, c' di un legnuolo vengono a toccare due fili $c''\,c'''$ dell'altro legnuolo nel modo indicato in figura; e in questo caso si ha:

$$\Delta = OO' = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{PO'}^2}$$

ossia

$$\Delta = \sqrt{(OM + Mc'' + NO')^2 + \overline{PO'}^2}$$

$$\Delta = \sqrt{\left(2a \cos\frac{\pi}{m} + \delta \cos 30^\circ\right)^2 + \frac{\delta^2}{4}}$$

$$\Delta = \delta\sqrt{1 + \sqrt{3}\cot\frac{\pi}{m} + \cot^2\frac{\pi}{m}} \qquad (8)$$

Il suddetto modo di contatto tra legnuolo e legnuolo non sarà possibile che quando

$$\frac{m(n-2)}{2n}$$

sia un numero intiero, come succede pelle funi a sei legnuoli e di 36, 48, 60, 72 fili; in tutti gli altri casi esso non avrà luogo che tutt'al più per alcuni de' contatti, ma siccome non è possibile allora determinare Δ *a priori* in modo generale, e d'altra parte non vuolsi che una certa approssimazione, ritengo la (8) come generale. Avuto r, si avrà prossimamente

$$d = 2r + 2a + \delta. \qquad (9)$$

Ora le formole (6), (7), (8), (9) per $n = 6$ e per

$$i = 36 \quad 48 \quad 54 \quad 60 \quad 66 \quad 72$$

dànno

$$\frac{d}{\delta} = 8{,}29 \quad 10{,}25 \quad 11{,}22 \quad 12{,}19 \quad 13{,}15 \quad 14{,}11$$

valori abbastanza vicini a quelli registrati in (1); dunque mi è lecito ammettere che sensibilmente le sezioni de' legnuoli non si sono deformate, e che i loro centri sono situati tutti sopra di una circonferenza di raggio r dato dalla (7).

Con ciò riesce facile il calcolo di I. Sia (figura 4) o il centro della sezione della fune, c il centro della sezione di un legnuolo collocato sulla circonferenza ACB di raggio r, abc la circonferenza di centro C e raggio a e su questa sia a il centro della sezione di un filo di ferro. Il momento d'inerzia del circolo a rispetto a zz' è

$$\frac{\pi\delta^4}{64}$$

e rispetto ad xx' è

$$\frac{\pi\delta^4}{64}+\frac{\pi\delta^2}{4}a^2\operatorname{sen}^2\widehat{aCx'}$$

onde la somma de' momenti d'inerzia degli m fili del legnuolo rispetto ad xx', cioè il momento d'inerzia della sezione del legnuolo rispetto ad xx', è

$$\frac{\pi\delta^2}{4}\left(m\frac{\delta^2}{16}+a^2\frac{m}{2}\right).$$

Ciò in virtù del teorema seguente: se una circonferenza si divide in un numero k di parti eguali, e se da tutti i punti di divisione si abbassano le perpendicolari sopra un diametro qualunque, la somma dei quadrati di tutte queste perpendicolari è indipendente dalla direzione di quel diametro ed eguale ad $R^2\frac{k}{2}$, essendo R il raggio, con cui la circonferenza è descritta. Il momento d'inerzia della sezione dello stesso legnuolo rispetto ad XX' sarà similmente

$$m\frac{\pi\delta^2}{4}\left(\frac{\delta^2}{16}+\frac{a^2}{2}+r^2\operatorname{sen}^2\widehat{COX'}\right)$$

ed il momento d'inerzia dell'intiera sezione della fune sarà rispetto ad XX':

$$I=nm\frac{\pi\delta^2}{4}\left(\frac{\delta^2}{16}+\frac{a^2}{2}+\frac{r^2}{2}\right)=i\frac{\pi\delta^2}{4}\left(\frac{\delta^2}{16}+\frac{a^2}{2}+\frac{r^2}{2}\right).$$

Sostituendo nella (5) ad I questo suo valore, ho

$$Z=\frac{2Ei\frac{\pi\delta^2}{4}\left(\frac{\delta^2}{16}+\frac{a^2}{2}+\frac{r^2}{2}\right)}{D^2}.$$

Per introdurre la tensione Q della fune dalla parte della resistenza, dico S la tensione unitaria, e pongo

$$i\,\frac{\pi\delta^2}{4}\,S = Q, \qquad \text{donde } i\,\frac{\pi\delta^2}{4} = \frac{Q}{S},$$

ed ho

$$Z = 2\,E\,\frac{Q}{S}\,\frac{\frac{\delta^2}{16} + \frac{a^2}{2} + \frac{r^2}{2}}{D^2},$$

ove sostituendo ad a e ad r i loro valori dati dalle (6), (7), (8), ho

$$Z = \mu\,Q\,\frac{\delta^2}{D^2} \qquad (10)$$

essendo

$$\mu = \frac{E}{S}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\pi}{m}} + \frac{1 + \sqrt{3}\cot\frac{\pi}{m} + \cot^2\frac{\pi}{m}}{4\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\pi}{n}}\right). \qquad (11)$$

Si dirà a suo luogo come il diametro D della puleggia si calcoli, per le trasmissioni telodinamiche, mediante la formola

$$\frac{D}{\delta} = \frac{20000}{s},$$

nella quale s rappresenta l'aumento di tensione che ne' fili è cagionato dalla flessione della fune nella gola della puleggia, e come si usi fare $s = 18\,\text{kil.} - S$. Cosicchè possiamo scrivere altrimenti

$$Z = \frac{1}{20000}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\pi}{m}} + \frac{1 + \sqrt{3}\cot\frac{\pi}{m} + \cot^2\frac{\pi}{m}}{4\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\pi}{n}}\right)\frac{s^2}{S}\,Q.$$

Z adunque cresce col diminuire di S e viceversa. Ora in pratica si assume raramente (come si dirà altrove) $S < 6$ kil. e bene spesso si fa $S = 12$ kil. Ebbene l'ultima formola mi dà:

$$\left.\begin{array}{l}\text{per } m = n = 6 \\ \text{per } S = 6 \text{ ed } s = 12\end{array}\right\} Z = 0{,}0097\, Q,$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{per } m = n = 6 \\ \text{per } S = 12, \quad s = 6\end{array}\right\} Z = 0{,}0012\, Q,$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{per } n = 6, \quad i = 72 \\ \text{per } S = 6 \text{ ed } s = 12\end{array}\right\} Z = 0{,}030\, Q,$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{per } n = 6, \quad i = 72 \\ \text{per } S = 12, \quad s = 6\end{array}\right\} Z = 0{,}0037\, Q.$$

Dunque in media la resistenza Z dovuta alla rigidezza della fune non rappresenta che circa $^1/_{100}$ di Q. E se si ricordi che il metodo che ci ha condotto alla determinazione di Z dà dei risultati certamente maggiori del vero, e se si rifletta di più che bene spesso il rapporto $\frac{D}{\delta}$ si fa maggiore di quello stato da noi supposto, [1] si dovrà conchiudere col Reuleaux, che la rigidezza delle funi si può trascurare, siccome quella che è minore dei molti errori che, per i molti elementi che non si possono introdurre nel calcolo, non si può a meno che commettere ne' computi di una trasmissione funicolare.

Se la rigidità delle funi si può trascurare nel calcolo delle trasmissioni telodinamiche, essa ha tuttavia una influenza considerevole nel calcolo delle funi pe' piani inclinati, ne' quali hannosi sempre funi più dure e puleggie minori, e dove la corda fa sempre più giri attorno a ciascheduna puleggia. In questi casi sogliono i pratici tenerne conto sostituendo col pensiero alla fune metallica una fune di canapa di ugual forza, e calcolando la rigidezza di questa colla formola di Coulomb. [2]

[1] Alcuni meccanici vorrebbero che il minimo diametro D da adottarsi fosse dato da

$$\frac{D}{\delta} = 2000,$$

il che equivale a fare nella nostra formola $S = 8$, $s = 10$.

[2] Vedi la *Memoria dell'ingegnere Agudio sul suo sistema di trazione sui piani inclinati*. — Torino, 1863, pag. 16.

IV.

PULEGGIE, PULEGGIE PRINCIPALI ED INTERMEDIE, PULEGGIE DI SOSTEGNO; RIVESTIMENTO, FORMA, DIMENSIONI, PESO.

Sonvi tre sorta di puleggie: le puleggie estreme o *principali*, le puleggie *intermedie* delle trasmissioni composte, e le puleggie di *sostegno*.

Quando Hirn stabilì a Logelbach la prima fune telodinamica, esso adottò due puleggie di legno. Il grande peso che, a causa del considerevole diametro, avrebbero avuto puleggie di ferro o di ghisa, la morbidezza e compressibilità del legno per cui la fune meno facilmente sarebbesi logorata, ed anche l'economia, ne lo consigliarono.

Ed è perciò che dovunque le puleggie di legno furono le prime ad essere adottate. Una gola chiusa fra due orli alti da quattro a cinque centimetri, ed aventi le loro faccie interne più o meno inclinate, riceveva la fune: ed ora questa appoggiavasi direttamente sul nudo legno, ora fra questo e quella era interposta una fettuccia di cuoio o di guttaperca distesa e fissata come rivestimento sulla gola. Le razze di cosifatte ruote erano pure di legno, avevano sezioni rettangolari generalmente smussate agli angoli ed erano grosse nel senso dell'asse della ruota quanto la ciambella. Questa poi formavasi generalmente con tre corone circolari concentriche e sovrapposte, di cui la media era più stretta e formava colla sua superficie cilindrica esterna il fondo della gola, su cui posava il rivestimento, e le altre due più larghe ne formavano gli orli. Le tre corone erano strette insieme con chiavarde di ferro (fig. 5). Onde adattare al fondo della gola il nastro di cuoio o di guttaperca, non facevasi che distendervelo sopra ed introdottene poi la estremità in un apposito buco praticato sul fondo della gola stessa, vi si fermavano con un cuneo.[1]

Benchè i gravi difetti di codesto sistema si facessero sentire fin dai primi tempi, ed Hirn stesso ricorresse alle puleggie

[1] LABOULAYE, *Dictionnaire des arts et manufactures*. Supplément, courroies en fer.

fuse rivestite di guttaperca, seguitarono pur tuttavia per molti anni ad impiantarsi or qua or là trasmissioni con puleggie di legno. Ancora nel 1862 stabilivasi presso Lesjöfors in Svezia una trasmissione destinata a portare ad una distanza di 600 piedi (180^m) la forza di una turbine di 5 cavalli ed adottavansi puleggie con gavetti di legno o con gola non rivestita. Ma il non uniforme consumarsi del legno sul fondo della gola, aggiunto alle influenze continue dell'acqua e dell'aria, fecero sì che in breve quelle puleggie non fossero più rotonde, onde un ballare ed un vibrare dannosissimo della fune. Perciò nel 1864 si dovettero quelle puleggie rimpiazzare con altre di ferro fuso con gola rivestita di guttaperca, e queste servono tuttavia soddisfacentemente. Gli inconvenienti succeduti nella trasmissione di Lesjöfors si ripeterono in più luoghi; e dovunque oggidì le ruote metalliche vanno prendendo man mano il posto di quelle di legno.

La fig. 6 rappresenta la sezione della ciambella di una puleggia di ghisa estrema od a semplice gola, e la fig. 7 la sezione della ciambella di una puleggia a *doppia gola* od intermedia, quali sono più comunemente usate.

Il rivestimento che si applicò dapprima alle gole di queste puleggie era di guttaperca. Consisteva in una striscia a guisa di bastone fatta con questa sostanza, la quale introdotta a forza in una scanalatura a coda di rondine praticata sul fondo della gola, vi si espandeva e modellava naturalmente (fig. 6). La superficie esterna di questo bastoncino, la quale doveva formare così il fondo della gola definitiva, veniva poi in seguito lavorata al tornio onde si facesse leggermente concava, come dimostra la figura. Il signor Hirn, inventore di questa sorte di rivestimento, se ne procacciò presso parecchie nazioni la privativa.

Ma neppure la guttaperca si mostrò esente da inconvenienti. Ne' climi non freddi, quando la trasmissione lavori per lungo tempo e con grandi pressioni, la guttaperca, pe' ripetuti comprimersi e dilatarsi che vi determina la pressione che la fune va ad ogni giro della ruota esercitando successivamente sui diversi punti della sua periferia, si riscalda, si rammollisce, aderisce alla fune ed in breve si distrugge o riesce inservibile. Ne' climi freddi la guttaperca diventa fragile, perde ogni elasticità e si rompe. Successe questo fatto a Kenntniss, dove sotto ad una temperatura di più che 30° sotto allo zero, si rese per questa causa inservibile una trasmissione destinata a muovere le macchine elevatrici lavoranti in una miniera. L' essersi per altro siffatti fenomeni fin qui presentati quasi esclusivamente in trasmissioni, il cui movimento, per la natura grossolana delle macchine condotte, come appunto era nella miniera di Kenntniss, era molto irregolare, dimostrò potersi la guttaperca usare con profitto, purchè con grandi riguardi, nel più de' casi.

Agli inconvenienti suddetti si sperò di ovviare sostituendo alla guttaperca del legno dolce, per esempio di salice. La puleggia rappresentata nella fig. 7 ha il rivestimento di legno. Lo si eseguisce tagliando il legno in forma di piccole doghe, le quali introdotte per mezzo di un' apertura laterale praticata su di una faccia della ciambella, e che dopo si chiuderà, in una scanalatura a coda di rondine praticata in fondo alla gola, vengono, battendole, adattate una contro l'altra. Riempiuta così totalmente la scanalatura in modo che le doghe stieno ben ferme, e chiusa l'apertura per cui esse si fecero entrare, si lavora il fondo della gola definitiva al tornio. La scanalatura destinata a ricevere un rivestimento di legno differisce da quella che si fa pel rivestimento di guttaperca solo per essere superiormente un po' più larga della gola definitiva, epperò terminata da una leggiera risega.

Un tal rivestimento ha fatto buona prova, ed è usato quanto quello di guttaperca, benchè gli si attribuisca il grave difetto di logorare, pella sua durezza, troppo prontamente le funi.

Recentissimamente si immaginò di sostituire al legno ed alla guttaperca de' dischi o corone circolari di cuoio adagiate l' una contro l' altra in fondo alla gola fortemente compresse e rifilate in seguito al tornio, ad un di presso come sono rifilati dai legatori i fogli di un libro. Di quest' ultimo sistema non si può dubitare della completa riescita.

Egli è naturale che le dimensioni e le proporzioni delle ciambelle ora descritte (fig. 6 e 7) debbano dipendere dal diametro *D* della fune a cui la puleggia ha da servire. Perciò si usano esse esprimere mediante una unità formata di una parte costante e di una parte proporzionale a *d*. Il Reuleaux suggerisce di adottare l' unità

$$d_1 = 20^{\mathrm{mm}} + 0{,}5\, d \qquad (12)$$

e dà, espresse con questa, le dimensioni segnate in figura, le quali, secondo lui possono servire per funi di 4 a 30 millimetri di diametro. L'altezza dell'orlo però è data direttamente in millimetri nel numero $50 + 2d$. d è in (12), come sempre supposi e supporrò in questo scritto, espresso in millimetri.

In questi ultimi anni si credette bene di dare agli orli o sponde della gola un'inclinazione molto maggiore di quella indicata nella figura, e ciò specialmente ne' luoghi dominati dai venti, ove la fune, anche per poco distolta dal suo piano verticale, facilmente verrebbe a logorarsi strisciando sopra orli così ritti. Una inclinazione di 45° parve molto conveniente, e quando questa si adotti l'altezza degli orli si può ridurre a $2\,d_1$ ossia a $40 + d$. Le puleggie di un diametro maggiore di quattro metri si fanno in più pezzi o settori, che fra loro si collegano mediante orecchie e chiavarde, siccome quelle che altrimenti riescirebbero incomodissime pei trasporti. Il diametro delle chiavarde si farà (sempre secondo Reuleaux) di $14^{mm} + 0{,}4\,d$, e si determineranno in proporzione le dimensioni delle orecchie.

Acciocchè la forza centrifuga non riesca pericolosa agli anelli delle puleggie, la velocità di queste alla periferia dovrà esser minore di 30 a 32 metri. La velocità di 28^m si usò già più volte senza danno: da 15 a 18^m variano le velocità ordinariamente usate; 7^m è la velocità minima.

I bracci delle puleggie principali si fanno il più delle volte di ghisa come l'anello; talvolta però, benchè assai di rado, e collo scopo di alleggerire la puleggia, questi si fanno con spranghe di ferro malleabile. Le razze di ghisa sono ora rettilinee, ed in tal caso hanno per lo più sezione a croce, ora curvilinee, ed hanno allora ordinariamente sezione ovale.

Quando si impiegano razze di ferro dolce (nel qual caso le ruote diconsi pendenti), queste possono essere costituite ciascuna di due spranghe cilindriche situate in uno stesso piano meridiano (fig. 8), impiantate nel mozzo in due punti fra loro situati ad una certa distanza e nella ciambella nello stesso punto; oppure possono essere costituite ciascuna di una sola spranga, ma in questo caso le successive razze dovranno inclinarsi sul piano della puleggia alternativamente in un senso ed in un senso contrario. In entrambi i casi sì il mozzo che la ciambella si fondono sopra le razze. Se le razze sono di ghisa, o se sono di ferro, ma formate ciascuna di due spranghe, il loro numero si calcola colla formola empirica

$$A = 4 + \frac{1}{40}\frac{R}{d} \tag{13}$$

ove R è il raggio della puleggia. Per le ruote pendenti a razze semplici si prenderà il numero $2A$. L'altezza h delle razze di ghisa, al centro della ruota, parallelamente al piano della puleggia, è data dalla formola empirica

$$h = 2d_1 + \frac{R}{50} \tag{14}$$

ed alla periferia tale altezza sarà $h' = 0{,}6h$.

Se la sezione delle razze è elittica la grossezza loro, normalmente al piano della puleggia, sarà in ogni punto la metà dell'altezza; se la sezione è crociforme le due nervature anteriore e laterale avranno rispettivamente le grossezze $e = \frac{h}{5}$ ed $e' = \frac{2}{3}e$.

Il mozzo si fa pelle grandi puleggie in più pezzi, come si disse, ed allora si ferma sull'albero per mezzo di cunei e vi si stringe con due anelli di ferro. Negli altri casi è di un sol pezzo, e si caletta come al solito con una bietta di ferro.

Comunque però esso avrà prossimamente la forma di una crosta cilindrica, il cui spessore è dato empiricamente dalla formola

$$g = 10 + 0{,}4\,h \tag{15}$$

e la cui lunghezza non si fa minore di $2{,}5\,g$.

Il diametro delle puleggie principali e delle intermedie di una trasmissione funicolare dev'essere così determinato, che l'aumento di tensione prodotto ne' fili per l'adagiarsi della fune sulla loro periferia, aggiunto alla tensione che la fune deve avere nel punto in cui si distacca dalla puleggia e nel tratto maggiormente teso, non raggiunga una tensione che possa essere pericolosa alla fune. In pressocchè tutte le migliori trasmissioni tedesche, quella di Sciaffusa compresa, si è fatto sì che, detto s il suddetto aumento di tensione, ed S la tensione riferita al millimetro quadrato che la fune deve sopportare appena abbandonata la puleggia, si abbia

$$S + s = 18^{\text{kil.}} \tag{16}$$

L'ottima qualità del ferro onde i fili son fatti, e l'impossibilità di oltrepassare certi limiti pel diametro delle ruote (5 metri), giustificano questo numero. Del resto la lunga esperienza ha oramai fatto svanire su questo punto ogni timore.[1]

Per calcolare poi dietro questo principio il raggio R della ruota, si suppone che ciascun filo si comporti come se fosse dagli altri isolato. Così ciascun filo si potrà riguardare come incurvato secondo un circolo di raggio R; l'asse neutro passando allora pel suo centro, la fibra maggiormente tesa subirà l'allungamento proporzionale $\frac{\delta}{2R}$ e quindi sarà $s = E\frac{\delta}{2R}$, donde facendo $E = 20000^{kg}$.

$$\frac{R}{\delta} = \frac{10000}{s}. \qquad (17)$$

Se con quest'equazione si combina la (3) si trova

$$R = \frac{10000 \times 1{,}1283\sqrt{T}}{\sqrt{i}} \frac{1}{s\sqrt{S}},$$

onde si vede che stando costante la tensione T da sopportarsi dalla fune ed il numero de' fili onde questa è composta, R sarà minimo quando $s\sqrt{S}$ sarà massima. Se adunque la somma $S+s$ ha da rimanere uguale ad una costante C, si dovrà avere

$$d.(C-S)\sqrt{S} = 0,$$

[1] Ne' piani inclinati di Liegi e del Dusino si è preso per coefficiente di resistenza delle funi 13 chilogrammi per millimetro quadrato (canape compresa). È questo il numero che più ordinariamente si assume pe' piani inclinati.

[2] Vedesi che se il metodo, secondo cui si è più sopra tentato di calcolare la rigidezza della fune, peccava per negare completamente ai fili la possibilità di scorrere parallelamente a sè stessi, al contrario il metodo con cui si arrivò alla formola (17) pecca per dare ai fili assoluta questa libertà. L'anima di canapa è destinata a dar ai fili mutua indipendenza, ma evidentemente essa non può raggiungere che in parte il suo scopo; la rigidezza della fune sarà adunque qualche cosa di intermedio fra quella data dalle due ipotesi. Ora questa seconda ipotesi condurrebbe, applicando la formola (5), all'espressione:

$$Z = \frac{E}{8S} Q \frac{\delta^2}{D^2} = \frac{1}{160000} \frac{s^2}{S} Q,$$

la quale darebbe per $s = 12$, $S = 6$:

$$Z = 0{,}00015Q$$

e per $S = 12$, $s = 6$:

$$Z = 0{,}00002Q.$$

Poichè adunque il Reuleaux propendeva per questa seconda ipotesi, egli aveva ben ragione di credere trascurabile la rigidità delle funi.

epperò

$$S = \frac{C}{3}, \quad \text{ed} \quad s = \frac{2}{3}\, C = 2\, S.$$

Siccome adunque noi abbiamo assunto $C = 18^{kg.}$, i valori più convenienti di S e di s sono per noi

$$S = 6^{kg.}, \qquad s = 12^{kg.}$$

pei quali la (17) dà

$$\frac{R}{\delta} = 833, \quad \text{ossia} \quad \frac{D}{\delta} = 1666.$$

Dalla precedente regola differisce poco quella adottata dallo Stein e dagli altri costruttori di Mulhouse: di assumere sempre

$$\frac{R}{\delta} = 1000, \qquad \frac{D}{\delta} = 2000.$$

In tale caso è concessa una certa latitudine: il fare R più grande del necessario è sempre vantaggioso.

Le puleggie di sostegno si fanno ordinariamente come le puleggie principali; solo che più di frequente che fra queste trovansi fra loro delle ruote *pendenti*. Ne' primi anni si sono eziandio usate puleggie di sostegno fatte con lastra di ferro; [1] ma queste sono oggidì quasi completamente abbandonate.

Come per le puleggie principali ed intermedie, così pure per le puleggie di sostegno non è mai dannoso un eccesso di diametro. Volendo calcolarle si farà il diametro di quelle sottoposte al tratto di fune *movente* uguale a quello delle puleggie principali (17). Alle puleggie sottoposte al tratto di fune condotto si potrà dare un raggio alquanto minore; non minore però di quello dato dalla formola

$$\frac{R}{\delta} = \frac{10000}{18 - \frac{S}{2}}, \tag{18}$$

della quale ci renderemo ragione quando vedremo come la tensione del tratto condotto sia, in generale, prossimamente uguale alla metà della tensione del tratto movente.

---

[1] Vedi *Zeitschrift des Vereines deutschen Ingenieure,* 1868, Heft 9.

Il peso delle puleggie, sì di sostegno come di forza, si calcolerà sempre assai facilmente quando si sieno di queste fissati il raggio e le proporzioni. Quando si adottino pegli anelli le proporzioni rappresentate nelle figure 6 e 7, e si osservino per le razze le regole (13) e (14), questo peso sarà espresso per approssimazione dalla formola

$$G' = AR + BR^2 + CR^3 \qquad (19)$$

nella quale si ha

$$A = 45\, d^2 + 36{,}4\, d + 7{,}22$$

pelle puleggie ad una gola;

$$A = 84\, d^2 + 66{,}4\, d + 13{,}30$$

per le puleggie a due gole; e

$$\left.\begin{aligned} B &= 0{,}33\, d + 0{,}116 - 0{,}0072 \frac{1}{d} \\ C &= 0{,}005 + 0{,}0007 \frac{1}{d} \end{aligned}\right\}$$

sì per le ruote a semplice come per quelle a doppia gola.

Applicando, per esempio, questa formola ad una puleggia di $4^{m},40$ di diametro, a doppia gola, servente ad una trasmissione della forza di 300 cavalli, fatta con una fune di 60 fili grossi $2^{mm},2$, epperò del diametro $d = 28^{mm}$, si trova $G = 1050$ chilogrammi circa.

Un sì grande peso, se è causa di perdita di lavoro per attrito, non è però privo di utilità, siccome quello che, operando a guisa di volante, impedisce le oscillazioni della fune, che sarebbero inevitabili per poco che fosse irregolare il movimento del motore o la resistenza da vincersi. È invero dimostrato da tutte le esperienze che le trasmissioni con puleggie di ghisa camminano meglio che non quelle a puleggie di legno.

V.

APPARECCHIO DIFFERENZIALE DI ZIEGLER.

Nelle più forti trasmissioni è spesso indispensabile, sempre utile, non affidare tutto il lavoro da trasmettersi ad un'unica fune, ma a due tra loro vicine e parallele. Oltre al poter applicare la telodinamia a trasmettere lavori molto più ragguardevoli, si ottengono per tal modo due altri vantaggi, che sono: 1° molto maggior facilità nel collocamento a sito della corda; 2° possibilità di non interrompere totalmente il lavoro quando in un punto venga guasta una fune. Ma acciocchè una tale disposizione raggiunga completamente il suo scopo è necessario far sì che le due funi si dividano certamente sempre tra loro in parti eguali la totale tensione, che esse cioè non possan essere in ogni istante che ugualmente tese. La risoluzione di questo problema, la quale segnò uno dei più grandi progressi della telodinamia, fu fatta in modo molto semplice dall'ingegnere Ziegler, ora non son cinque anni, coll'ingegnoso apparecchio da lui detto *apparecchio differenziale (differenzialgetriebe)*. I signori Rieter di Winterthur costrussero per la prima volta questo congegno.[1]

Esso è abbozzato nella figura 9. mm' è l'albero motore o condotto. Su di esso sono folli due ruote coniche nn', i cui lunghi mozzi sopportano le due grandi puleggie o, o' che devono ricevere le funi. Queste sono solidarie coi mozzi o collari suddetti. Le due ruote n, n' sono poste tra loro in comunicazione per mezzo di due altre ruote coniche p, p' che con loro ingranano, e le quali possono liberamente girare attorno ai due perni $q. q'$ uniti ad angolo retto e solidari cell'albero mm' col quale formano come una croce.

Due di questi apparecchi identici, posti l'uno fra le due ruote

[1] Il numero del 22 febbraio 1867 del giornale *Engineer* dice che la prima idea dell'impiego del sistema differenziale nelle trasmissioni con funi metalliche appartiene all'inglese *Charles Brown;* ma nel 5° fasc. del 12° vol. (anno 1867) dello *Schweizerische polytechnische Zeitschrift* trovasi una dichiarazione dell'ingegnere *Ziegler* nella quale è detto non aver esso mai parlato nè avuto a che fare col signor Brown per ciò che riguarda la trasmissione telodinamica di Sciaffusa, ove fu applicato per la prima volta l'apparecchio in discorso. Questa dichiarazione porta la data di Winterthur, 8 luglio 1867.

conduttrici ed uno fra le due ruote condotte, costituiscono il sistema differenziale dell'ingegnere Ziegler.

Come, nel caso che le due funi sieno egualmente tese, la trasmissione del movimento avvenga con questo sistema non altrimenti che se le quattro puleggie fossero solidarie sui loro alberi è evidente; ma vediamo che cosa succeda nel caso in cui una delle funi sia più tesa che l'altra, o meglio nel caso in cui la differenza tra le tensioni de' due tratti di una fune sia diversa dalla differenza delle tensioni de' due tratti dell'altra fune.

Supponiamo perciò dapprima, che la fig. 9 rappresenti l'apparecchio conduttore, ed ammettiamo per un istante, che la differenza delle tensioni de' due tratti della fune sia maggiore per la puleggia *o*, che per la *o'*. Evidentemente la ruota *p* avendo dalla parte di *o'* una minor resistenza da vincere che dalla parte di *o* prenderà a girare così che la ruota *o'* ne riceverà un moto più veloce che la *o*. La velocità angolare dell'albero *mm'* sarà la media fra le due velocità angolari di *o* e di *o'*. Se per l'opposto supponiamo che l'apparecchio rappresentato in figura sia quello dell'albero condotto, avverrà che la ruota *p* riceverà dalla parte di *o* una pressione maggiore che dalla parte di *o'*, epperò prenderà a girare così che *o* avrà una velocità maggiore che non *o'*, ed anche qui la velocità angolare dell'albero *mm'* sarà la media fra quelle delle due ruote. Ma le velocità angolari de' due alberi conduttore e condotto sono evidentemente uguali, dunque per la fune più tesa, che è quella che si appoggia alle due puleggie *o*, la puleggia motrice si muoverà più lentamente e la puleggia condotta più rapidamente, e la fune si rallenterà; e viceversa per la fune che si appoggia alle due puleggie *o'* avrà un moto più veloce la puleggia conduttrice e meno veloce la condotta, e la fune non potrà che tendersi. E se non fosse degli attriti seguiterebbe la fune più tesa a rallentarsi e la meno tesa a tendersi, fintantochè le loro tensioni fossero diventate perfettamente uguali; essendovi gli attriti non si potrà sempre ottenere questa uguaglianza, ma la differenza fra le due tensioni si manterrà sempre inferiore ad un certo limite.

Questo limite è facile a determinarsi quando sieno dati:

ω velocità angolare degli alberi motore e condotto,

L lavoro da trasmettersi dal sistema,

τ tensione iniziale nel punto di distacco dalla puleggia che supporremo uguale per le due funi, il che si avvererà sempre, poichè sempre si procurerà di dare alle due funi la stessa lunghezza.

φ angolo che fa colla verticale la tangente all'una od all'altra fune nel punto in cui essa abbandona la rispettiva puleggia e nel caso del riposo,

R raggio delle puleggie,

G loro peso,

r raggio del circolo primitivo medio della ruota p,

a distanza dall'asse dell'albero mm' del piano del circolo primitivo medio della ruota stessa,

n_1 ed n_0 numeri dei denti delle ruote p ed n, numeri che si fanno generalmente uguali,

ρ e ρ' raggi dell'albero mm' e del pernio q,

f coefficiente d'attrito di terza specie tra l'albero mm' ed i mozzi delle ruote n, n' e tra il pernio Q e la ruota p,

f' coefficiente d'attrito di prima specie tra i denti delle ruote n e p.

Potendosi con molta approssimazione supporre, che quando il sistema è in moto gli angoli che le tangenti ai due tratti di ciascuna fune fanno colla verticale sieno ancora uguali tra loro e a φ, e dette T e t le tensioni (nel punto di distacco dalla puleggia) de' due tratti dell'una fune, e T', t' le tensioni corrispondenti pell'altra fune, si avrà la differenza cercata, pella quale l'apparecchio comincia ad essere sensibile, dall'espressione:

$$(T-t)-(T'-t')=$$

$$=\frac{2f\rho\left\{r-f'\tau r\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_0}\right)-f\rho'\right\}\sqrt{(G+2\tau\cos\varphi)^2+4\tau^2\operatorname{sen}^2\varphi}+\frac{L}{\omega}\left\{f'\tau r\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_0}\right)+f\rho'\right\}}{Rr} \quad (20)$$

La quale espressione dimostra che la sensibilità dell'apparecchio è indipendente da a, cresce col crescere di r, R, ω, n_1, n_0, e decresce col crescere di L, de' coefficienti di attrito, di ρ e ρ', e poichè pegli ordinari valori di f' e di $\frac{\rho'}{r}$ il coefficiente del radicale è positivo, la sensibilità dell'apparecchio decrescerà col crescere di τ.

Per far sì che la tensione iniziale τ sia la stessa per le due funi, non si ha che a dare a queste la stessa lunghezza; e per verificare se questa uguaglianza di tensione iniziale esista, basta riconoscere se le saette delle due funi sieno uguali. L'uguaglianza delle saette quando il sistema sarà in moto sarà una prova che l'apparecchio funziona soddisfacentemente.

Ho detto che venendosi a rompere una delle funi la trasmissione può continuare a funzionare coll'altra. Ora posso aggiungere che ciò succederà ancorchè ciascuna delle funi non fosse capace di trasmettere che metà del lavoro, quando le puleggie hanno la velocità angolare de' due alberi motore e condotto. Basterà a questo scopo impedire in un modo qualunque di ruotare alle puleggie su cui si appoggiava la fune che si è guastata, poichè allora in grazia dell'apparecchio differenziale le altre due puleggie prenderanno a girare con velocità angolare doppia di quella degli alberi, epperò tutto il lavoro potrà essere trasmesso da una tensione metà minore.

VI.

STAZIONI, SOSTEGNI, RISVOLTE, DIRAMAZIONI.

Dovunque una fune è sostenuta dicesi che vi ha una *stazione*. Diconsi stazioni *estreme* quelle corrispondenti alle puleggie principali, e stazioni *intermedie* le altre; e fra queste diconsi di *ricambio* quelle ove vi ha una puleggia a doppia gola od *intermedia*, ovvero di due di tali puleggie con interposto apparecchio differenziale, e stazioni di *sostegno* quelle ove sonvi *puleggie di sostegno*. I cambiamenti di direzione della fune, ossia le risvolte, si fanno nelle stazioni intermedie, e queste allora assumono la denominazione di stazioni d'*angolo*. Si dicono finalmente stazioni di *diramazione* o semplicemente *partitori* quelle ove, o per mezzo di lunghi alberi, si mandano in diverse direzioni parti del totale lavoro.

In ogni stazione si ha un *basamento* o *pilastro* ed un *meccanismo*. Nelle piccole trasmissioni, come in quelle prime che nell'Alsazia si costruivano ad imitazione di quella della casa Hausmann a Logelbach, il *basamento* o *pilastro* era semplicemente costrutto con legno, come di legno erano le puleggie. Consistevano in due robusti cavalletti fatti con travi fermate saldamente al terreno e fra loro consolidate, sopportanti i cuscinetti sui quali doveva riposare la puleggia.

Questo sistema però, che è difettoso anche per le minori trasmissioni per la poca stabilità e per la poca durata, riesce affatto inapplicabile alle trasmissioni maggiori. In queste è necessario che il sostegno si appoggi sopra di un fondo incompressibile e sodo pel quale nel sostegno non sia possibile rovesciamento nè scorrimento di sorta; è in altre parole necessaria una *fondazione*. La si fa con pietre o laterizi o calcestruzzo, ma sempre deve essere tanto larga e profonda che: 1.° non ceda sotto ai pesi della fune e del sostegno; 2.° non sia svelta e rovesciata dalla differenza de' momenti delle tensioni de' diversi tratti di fune attorno ad alcuno de' suoi spigoli inferiori. Il terreno su cui la si appoggia deve poter resistere alla pressione che si produce su questo spigolo. Evidentemente il bisogno di grandi massi di fondazione è massimo per le stazioni estreme e per le stazioni di angolo, minimo per quelle di sostegno. A seconda della maggiore o minore altezza a cui deve venir situata la puleggia, si costruisce sulla fondazione un masso murale a guisa di piedestallo su cui si potrà salire con alcuni gradini, e sul quale si appoggeranno pilastrini di muratura, destinati a portare i cuscinetti. Questi sono in generale cuscinetti a *cavalletto*, e la loro *piastra*, alla quale si dà una grande larghezza, si fissa sul pilastro con due chiavarde od ancore, che s'affondano fin verso il fondo della fondazione e vi si aggrappano. Così il pilastro non si può rovesciare senza trascinare seco l'intiero fondamento.

I gusci dei cuscinetti si fanno oggidì esclusivamente di ottone o di bronzo; i gusci di cuoio, che si sono impiegati talvolta per i cuscinetti delle puleggie di sostegno, [1] si sono completamente abbandonati.

Per le puleggie estreme conviene fare i cuscinetti in modo che il piano secondo cui vengono a combaciare i due gusci non sia orizzontale, ma normale alla risultante del peso della puleggia e delle tensioni dei tratti delle funi che vi si avvolgono.

Riguardo al meccanismo poco rimane a dirsi per le stazioni estreme e per quelle di ricambio. Basterà ricordare che le puleggie hanno un asse con loro solidario, di ferro malleabile, che ne' punti in cui ha da appoggiarsi sui cuscinetti ha un diametro, che dovrà calcolarsi per modo ch'esso resista allo sforzo di taglio, si ingrosserà con un risalto di tre millimetri più $^7/_{100}$ del diametro stesso appena abbandonato il guancialino, ed andrà in-

[1] *Zeitschrift des Vereines deutschen Ingenieure.* Jahr 1868, Heft 9.

grossandosi verso il mezzo per modo che al sito ove comincia ad essere abbracciato dal mozzo della puleggia abbia quel diametro che risulterebbe dall'equazione della curva meridiana del solido di ugual resistenza alla flesssione: equazione che è quella di una parabola cubica, cioè

$$\frac{y}{y'} = \sqrt[3]{\frac{x}{x'}},$$

e quivi riceverà un nuovo risalto un po' maggiore del primo.

Colle proporzioni, che il calcolo ci darà per le funi e per le puleggie, si troverà, che il diametro dell'albero sul guancialino sarà in generale molto prossimo ad $^1/_{32}$ del diametro della puleggia quando questa sia unica.

Nello stesso caso di una puleggia unica si suol dare all'asse una tal lunghezza, che la distanza da mezzo a mezzo dei due cuscinetti sia uguale al raggio della puleggia; se v'han due puleggie con apparecchio differenziale si farà che la distanza dal mezzo di ciascuna ruota al mezzo del cuscinetto vicino sia uguale ad un terzo del raggio e che la distanza da mezzo a mezzo risulterà così uguale ai $^2/_3$ del diametro delle puleggie. La parte dell'albero che si appoggerà su ciascun cuscinetto avrà ad un dipresso per lunghezza i tre mezzi del proprio diametro. Queste proporzioni, le più usate in pratica, non formano per altro regola assoluta.

Collo scopo di agevolare il collocamento della fune a sito si posero talvolta le puleggie esternamente ai due cuscinetti. Questa disposizione è sconvenientissima per altri riguardi e non è guari impiegata.

Tanto sopra quanto sotto alla puleggia si sogliono mettere de' ritegni o ganasce, o guancie *r* (fig. 9) destinate ad impedire lo spiccarsi della fune. Questa precauzione tuttavia non è indispensabile.

Un annesso indispensabile della stazione estrema dalla parte del motore è un *freno* destinato a regolare la velocità della trasmissione. Nelle migliori trasmissioni questo freno è automotore: un bell'esempio è quello di Schiaffusa.

Tutto ciò si ripeta per le puleggie delle stazioni di ricambio, e si aggiunga soltanto, che queste puleggie si fanno spesse volte a razze di ferro fucinato, ovvero pendenti. Già si avvertì come per queste non sia necessaria un'ampia fondazione: la fig. 8 ne dà un abbozzo.

Il meccanismo delle stazioni di sostegno consta per lo più di un'unica puleggia; la quale si deve fare per quanto si può leggiera, e non richiederà mai robustissimi sostegni. Quando la trasmissione fosse doppia, fatta cioè con due funi parallele, la stazione di sostegno dovrebbe avere due puleggie, ma queste non avrebbero bisogno di essere unite con apparecchio differenziale: dico *non avrebbero*, perchè di tali stazioni non se ne sono finora costrutte, e ciò in primo luogo per essere troppo recente l'invenzione dell'apparecchio differenziale, e in secondo luogo perchè le nuove trasmissioni piuttosto che con puleggie di sostegno si fanno *combinate*, ossia con puleggie di ricambio. Sonvi pure delle stazioni, ove due puleggie di sostegno sono collocate l'una sopra l'altra e son destinate a sorreggere l'una il tratto più teso, e l'altra il tratto meno teso della corda. In tal caso i cuscinetti della puleggia superiore si sostengono con cavalletti di ferro fuso, sulle piastre dei quali si fermano in generale i cuscinetti della puleggia inferiore.

Nel distribuire le stazioni di sostegno lungo una trasmissione, o meglio lungo la retta che unisce due o più stazioni estreme o di ricambio, si sono seguiti, secondo le circostanze, due metodi. Il primo consiste nel far servire ciascuna stazione di sostegno ai due tratti di fune ad un tempo (fig. 10), e si fa con stazioni a due ruote T_1 e T_2 l'una sovrapposta all'altra nel modo detto poc'anzi. L'altro sistema trova la sua ragione nell'avere il tratto meno teso della fune una saetta maggiore che non il tratto più teso, e quindi nel richiedere quello più frequenti punti di appoggio. Esso consiste nell'intercalare le stazioni pel sostegno del tratto di fune più teso fra quelle pel sostegno del tratto meno teso in modo che questo venga ad essere sostenuto una volta di più che quello (fig. 11). Per le piccole distanze tra le puleggie *di forza* questo sistema si riduce all'impiego di una sola puleggia di sostegno servente al tratto meno teso della fune (fig. 12).

Non mancò chi volle semplificare il primo sistema collocando le due puleggie di sostegno l'una accanto all'altra, ma con grave danno, poichè le funi pel fortissimo fregamento contro gli orli della gola, presto si logorarono e si spezzarono.

Come gia accennai, l'impiego delle stazioni di sostegno va oggidì diminuendo, e vengono queste dovunque sostituite dalle stazioni di ricambio (fig. 13). Le trasmissioni combinate infatti, dovute al famoso Ziegler, hanno sulle altre molti vantaggi, quali sono: quello di richiedere funi meno lunghe, epperò più facili a mettersi in opera, e di più facili e meno costose riparazioni, quello di potere a volontà essere allungate od accorciate coll'aggiunta di altre stazioni simili o colla soppressione di alcune di queste, quello di permettere di spiccare da ciascuna stazione delle diramazioni, quello di permettere l'uso dell'apparecchio differenziale, ecc. I primi di questi vantaggi si otterranno tanto più se le distanze fra le stazioni saranno tutte fra loro uguali: questa condizione adunque deesi sempre, quando sia possibile, cercare di realizzare.

Le *risvolte* si possono fare in due modi. Il primo, suggerito dall'Hirn, consiste nello impiegare a tale scopo per ciascun tratto di fune una puleggia orizzontale posta fra due puleggie ordinarie di sostegno (fig. 14). L'altro, seguito dallo Ziegler, consiste nell'impiego di due puleggie estreme rese fra loro dipendenti mediante un ingranaggio conico (fig. 15). Il primo sistema evidentemente è il più conveniente per le trasmissioni con puleggie di sostegno; l'altro è preferibile per le trasmissioni combinate, non essendo in sostanza una stazione d'angolo di questo sistema altro se non che una stazione di ricambio, ove ad una puleggia a due gole siensi sostituite due puleggie a semplice gola.

Si vuole da taluni che una semplice puleggia posta in un piano inclinato possa bastare per ottenere una risvolta, e lo stesso Reuleaux non crede impossibile questo sistema. Ma è da osservarsi che la puleggia si dovrà trovare nel piano delle tangenti ai due tratti della fune che si appoggia contr'essa, condotte nei punti ove questa fune da lei si distacca; e che questa tangente sarà tanto più inclinata all'orizzonte quanto meno la fune sarà tesa. Onde si deduce che: 1.° questo sistema non permette di trasmettere colla fune lavori diversi; 2.° anche quando colla fune si voglia trasmettere quel lavoro che conviene all'inclinazione della puleggia, questa non lavorerà bene che quando il regime sarà stabilito, ma sì in principio che alla fine del movimento essa non potrà a meno che logorare la fune cogli orli della sua gola sui quali verrà ad esercitarsi una componente della tensione della medesima.

Le *diramazioni* si fanno sempre nelle stazioni di ricambio o nelle stazioni estreme stesse. Riservando i lunghi alberi orizzontali per le diramazioni più brevi e di minor forza, esse si fanno in generale con minori funi avvolte su minori puleggie, delle quali ultime l'una riceverà il moto della puleggia intermedia od estrema del tronco principale della *condotta di lavoro* per mezzo di ruote dentate coniche. È qui da osservarsi un altro merito delle trasmissioni combinate del sistema Ziegler, e si è l'uniformità di tutte le sue stazioni: in esse infatti un partitore non differisce gran fatto da una stazione ordinaria, come si vide non differirne una stazione d'angolo.

Le stazioni estreme sono naturalmente difese dalle ingiurie atmosferiche dal fabbricato stesso dell'officina a cui la trasmissione è destinata e dalla casa che protegge le macchine motrici. Anche per le stazioni intermedie è utile pensare ad una difesa; e questa si ottiene con piccole casette con copertura metallica e con pareti di legno. L'ampiezza loro sarà in generale quella strettamente necessaria a contenere la parte non interrotta della stazione, salvo il caso, che può verificarsi nelle più importanti distribuzioni di forza, nel quale sia utile far servire alcuni di tali casotti come abitazione per un cantoniere o come deposito per attrezzi e materiali.

VII.

CALCOLO DI UNA TRASMISSIONE TELODINAMICA.

L'assoluta ignoranza in cui siamo del coefficiente di elasticità delle funi metalliche e del loro modo di allungarsi quando vengono tese, ci obbliga a considerare una fune come perfettamente flessibile ed inestensibile. Ammessa tale ipotesi, si considerino in una trasmissione due stazioni successive, sieno esse estreme, o di ricambio, o di sostegno, purchè in questo caso servano al medesimo tratto della fune od a tutti e due. In queste due stazioni troveranno appoggio talora una sola fune, generalmente due, e queste si disporranno in virtù del proprio peso e della assoluta loro flessibilità secondo archi di catenaria omogenea. Presa per asse delle y la verticale condotta pel suo punto più basso, e per asse delle ascisse l'orizzontale condotta per questo stesso punto, e detta c quella lunghezza di fune il cui peso eguaglia la tensione di questa nel suddetto suo punto più basso, si sa che questa curva ha l'equazione:

$$y + c = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right), \tag{21}$$

che la lunghezza dell'arco che dal punto più basso va al punto di ordinata y è:

$$l = \sqrt{y^2 \quad 2yc} \tag{22}$$

e che in questo punto la tangente alla curva fa coll'orizzonte un angolo τ la cui tangente è:

$$\operatorname{tang} \tau = \frac{l}{c} = \sqrt{\frac{y^2 + 2cy}{c^2}} \tag{23}$$

Detto poi Π il peso della fune per metro corrente, τ la tensione orizzontale, la quale si sa essere costante, e θ la tensione assoluta nel punto di coordinate x, y, si sa che:

$$\tau = \Pi c \quad \text{onde} \quad c = \frac{\tau}{\Pi} \tag{24}$$

e che

$$\theta = \Pi\,(y + c) = \Pi\left(y + \frac{\tau}{\Pi}\right) \tag{25}$$

onde

$$\tau = \theta - \Pi y. \tag{25'}$$

Svolto in serie il 2.° membro dell'equazione (21) e trascurati i termini contenenti $\frac{x}{c}$ ad una potenza superiore alla seconda, essa si riduce all'equazione di una parabola avente il suo asse verticale e coincidente coll'asse delle y, cioè:

$$y = \frac{1}{2c}\,x^2, \tag{21'}$$

nella quale sostituendo a c il suo valore in θ ricavato dalle formole (24) e (25), si ottiene

$$y = \frac{\Pi}{2\,(\theta - \Pi y)}\,x^2,$$

ossia

$$y^2 - \frac{\theta}{\Pi} y + \frac{1}{2} x^2 = 0. \tag{21$'$}$$

Nelle funi telodinamiche x non scostasi mai gran fatto dalla metà della distanza fra due puleggie, ed è perciò sempre vicino a 50 metri; c invece raggiunge e sorpassa in generale i 1000 metri; dunque con molta approssimazione si potrà ritenere per esse l'equazione (21″) invece della (21).

È da osservarsi qui come l'equazione (21″) non dipenda dal peso della fune e dalla tensione di essa, tranne che pel coefficiente $\frac{\theta}{\Pi}$. Ora si ha, rappresentando, come in (3), con S la tensione riferita al millimetro quadrato di sezione, sotto cui lavora la fune:

$$\theta = S . \frac{i \pi \delta^2}{4}, \tag{3$'$}$$

dunque si ha:

$$\frac{\theta}{\Pi} = 112,2 . S. \tag{26}$$

L'equazione (21″) adunque non dipende che da S; e ciò significa che la forma della curva, secondo cui verrà ad inflettersi una fune od un tratto di fune telodinamica fra due puleggie, non dipenderà che dalla tensione S riferita all'unità di sezione a cui sarà sottoposta la fune, e sarà affatto indipendente sì dalle tensioni assolute che questa avrà ai suoi estremi, come dal suo peso assoluto. Onde è che data una trasmissione funicolare qualunque, dati i diametri, le distanze e le differenze di livello delle sue puleggie, i numeri ed i diametri dei fili che compongono le sue funi, data la velocità della fune, date le curve secondo cui son disposti tutti i tratti di fune quando la trasmissione lavora, o, ciò che basta, le loro saette, si potrà tosto calcolare il lavoro che da ogni puleggia è trasmesso o ricevuto. Imperocchè, data la curva funicolare, se ne dedurrà dalla (21″) la tensione unitaria S_1 per ogni tratto di fune ed in entrambi i suoi estremi, cioè nei punti ove essa si stacca dalle ruote.

Allora conoscendosi il numero ed il diametro dei fili, la (3′) darà le tensioni assolute agli estremi suddetti. La (23) somministrerà di queste le direzioni, e quindi, avendosi dalla (19) il peso delle puleggie, si potranno calcolare le pressioni sui pulvinari di queste. Stabilendo allora le equazioni di equilibrio delle puleggie si avrà l'intensità della resistenza o della potenza, che su loro agisce, e quell'intensità moltiplicata per la velocità della fune darà il lavoro da ciascuna puleggia ricevuto o trasmesso.

Alcune formole più semplici e pratiche per la soluzione di questo problema, di determinare il lavoro tramandato da una trasmissione già costrutta, troveremo mentre cercheremo di risolvere il problema inverso: di stabilire una trasmissione dati i lavori da trasmettersi ad ogni stazione.

I dati di questo problema sono o il lavoro motore sull'albero della prima stazione, od i lavori che devono essere ricevuti agli estremi delle diramazioni o del tronco principale, e le distanze e le differenze di livello degli alberi di tutte le stazioni; si sceglieranno a volontà e secondo le circostanze, ma nei limiti dati parlando delle puleggie, le velocità delle funi, e le tensioni unitarie massime S_1 a cui esse dovranno essere sottoposte; e le incognite saranno i diametri dei fili di ferro, i diametri delle puleggie, le lunghezze delle funi, le saette delle curve funicolari, ed i lavori perduti per attrito.

Risolverlo in modo generale e diretto è forse impossibile, almeno con formole pratiche, ma è facile una soluzione indiretta, che si fonda su approssimazioni successive e riduce tutti i casi a quello più semplice di una trasmissione *semplice* ed *orizzontale*.

Comincio adunque da questo caso (fig. 16), e dico:

A la distanza delle due puleggie da asse ad asse,

R il loro raggio,

ρ il raggio de' pulvinari,

P la potenza che suppongo applicata tangenzialmente alla periferia di una delle puleggie,

Q la resistenza che suppongo applicata tangenzialmente alla periferia dell' altra puleggia,

T la tensione del tratto maggiormente teso della fune nei suoi estremi, cioè nei punti in cui abbandona le puleggie,

t la tensione agli estremi del tratto meno teso,

T_0 la tensione iniziale agli estremi di entrambi i tratti,

S_1, S_2, S_0 le tensioni unitarie corrispondenti a T, t, T_0, ed S una qualunque di esse,

h_1, h_2, h_0 le saette, corrispondenti ad S_1, S_2, S_0, ed h una qualunque di esse,

f il coefficiente d' attrito fra la fune e le puleggie,

α l'angolo per cui la fune abbraccia le puleggie,
f_3 il coefficiente d'attrito de' pulvinari,
N la pressione sui guancialini.

Per l'equilibrio della puleggia debbo avere:

$$\left.\begin{aligned} R\,Q &= (T-t)\,R - f_3\,N\,\rho\\ P\,Q &= (T-t)\,R + f_3\,N\,\rho \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

onde

$$P = Q + 2 f_3 N \frac{\rho}{R}. \tag{28}$$

Ma perchè la fune non scivoli sulle ruote deve essere tutto al più:

$$T = t\,e^{f\alpha} \tag{29}$$

onde sostituendo in (27):

$$t = \frac{Q}{e^{f\alpha} - 1} + f_3 N \frac{\rho}{R} \frac{1}{e^{f\alpha} - 1}. \tag{30}$$

Di qui si avrebbe t e quindi T, se non fosse che N ed α sono incogniti e dipendono da t e T stessi. Potrei determinare α come N per approssimazioni successive, ma osservo che per α questo lavoro non condurrebbe forse a risultati esatti, attesa la non assoluta flessibilità della fune. Perlocchè osservando come α non si scosti mai sensibilmente da π prendo addirittura per tutti i casi $\alpha = \pi$.

Quanto ad N, comincio dal trascurare il peso della puleggia. Allora prossimamente sarà

$$N = T + t,$$

onde sostituendo in (30):

$$\frac{t}{Q} = \frac{1}{e^{f\pi}\left(1 - f_3 \frac{\rho}{R}\right) - \left(1 + f_3 \frac{\rho}{R}\right)}$$

e quindi

$$\frac{T}{Q} = \frac{e^{f\pi}}{e^{f\pi}\left(1 - f_3 \frac{\rho}{R}\right) - \left(1 + f_3 \frac{\rho}{R}\right)}.$$

Facendo in questa formola

$$\frac{\delta}{R} = \frac{1}{32},$$

come si disse essere in generale, $f_3 = 0{,}1$, $f = 0{,}24$, come suggerisce il Reuleaux, si ha

$$f_3 \frac{\delta}{R} = 0{,}003,$$

e quindi, sviluppando in serie gli esponenziali e ritenendo le sole potenze 1ª e 2ª di $f\pi$, ho

$$\frac{t}{Q} = 0{,}97, \quad \frac{T}{Q} = 2{,}02, \quad \frac{T+t}{Q} = 2{,}99, \quad \frac{t}{T} = 0{,}48,$$

ossia prossimamente:

$$\frac{t}{Q} = 1, \quad \frac{T}{Q} = 2, \quad \frac{T+t}{Q} = 3, \quad \frac{t}{T} = \frac{1}{2}. \tag{31}$$

Sostituendo in (3) a T questo suo valore (31), e ad S il massimo S_1, ho:

$$\delta = 1{,}60 \sqrt{\frac{1}{i}} \sqrt{\frac{Q}{S_1}}. \tag{32}$$

Q è incognito, finchè non è noto il raggio R; ciò che è noto è il momento $Q\,R$, il quale si trova dividendo semplicemente il lavoro resistente dato per la velocità della fune, velocità che dovrà essere scelta fra i limiti che si sono dati parlando delle puleggie. Collo scopo adunque di avere una formola che mi dia immediatamente δ, moltiplico la quantità sotto al radicale per R e la divido pel valore di R ricavato dalla (17), e l'equazione così ottenuta mi dà:

$$\delta = 0{,}0634 \sqrt[3]{\frac{1}{i}} \sqrt[3]{\frac{s}{S_1}(Q\,R)}. \tag{33}$$

In questa formola i ed $\frac{s}{S_1}$ son conosciuti perchè scelti a volontà e colle norme date a suo luogo, $(Q\,R)$ è dato; dunque si potrà calcolare δ. Se per il valore di i scelto questa formola desse per δ una grandezza non compresa fra i limiti che si son dati parlando delle funi, converrebbe cambiare i e ricalcolare δ.

Avuto δ, la (17) darà il raggio R, e la (19) darà il peso G della puleggia, che è una delle forze che compongono N.

Le altre forze che concorrono a formare N sono le tensioni T e t; ma per comporle con G è necessario trovarne la direzione.

Sostituendo in (21″) a $\frac{0}{11}$ il suo valore (26) e risolvendo la equazione rispetto ad y ho:

$$y = (56{,}10)\, S - \sqrt{(56{,}10)^2 S^2 - \frac{1}{2} x^2},$$

dove ad x sostituendo $\frac{A}{2}$ e ad y h:

$$\frac{h}{A} = 0{,}3535 \left(160 \frac{S}{A} - \sqrt{\left(160 \frac{S}{A}\right)^2 - 1} \right).\ ^{1} \qquad (34)$$

Avuto h si calcolerà φ mediante la nota proprietà della parabola di avere la sottotangente doppia dell'ascissa, onde:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{2h}{\frac{A}{2}} = \frac{4h}{A}. \qquad (35)$$

Fatti questi calcoli pei due tratti della fune, cioè ponendo in (34), (35) S_1 poi S_2 in luogo di S ed h_1, poi h_2 in luogo di h, sarà facile calcolare la pressione sui pulvinari:

$$N = \sqrt{(G + T \operatorname{sen} \varphi_1 + t \operatorname{sen} \varphi_2)^2 + (T \cos \varphi_1 + t \cos \varphi_2)^2}, \qquad (36)$$

e si potrà ricominciare il calcolo di T e di t colla (27), e di δ e di R colle (3) e (17).

La saetta h_1 non cambierà, poichè S_1 è determinato ed indipendente dalla tensione assoluta; cambieranno invece h_2 ed h_0.

---

[1] Quest'equazione dà per $\frac{h}{A}$ un valore immaginario quando si ha $A > 160 . S$. Ora l'uguaglianza $A = 160 . S$ per $S = 6$ dà $A = 960$; dunque sarebbe impossibile di aver nella fune una tensione unitaria minore od eguale a 6 chilogrammi quando la distanza delle due puleggie superasse 960 metri. Vedremo per altro che il limite massimo della detta distanza è ben inferiore a questo numero.

Quando tuttavia si tratti di una trasmissione semplice il calcolo numerico dimostra che i risultati del secondo calcolo sono così poco diversi da quelli del primo, che in pratica basta ritenere questi ultimi.

Cosicchè il calcolo di una trasmissione semplice ed orizzontale si riduce tutto alla valutazione numerica delle formole (33), (17), (34). Le due prime danno le dimensioni della fune e delle ruote, l'ultima, mentre dà il mezzo per calcolare la lunghezza da darsi alla fune (22), è quella che guiderà l'ingegnere nel collocamento della fune in opera.

Se viceversa si volesse, data una fune già posta a sito, trovare con qual tensione unitaria essa lavori, non si avrebbe che da misurare h e sostituirlo nell'equazione seguente, la quale si ottiene immediatamente dalla (25) sostituendovi a θ il suo valore in funzione di S, ad y sostituendo h, ed a c sostituendo il valore che se ne ricava dalla (21'):

$$\frac{S}{A} = 0{,}00877\left(\frac{h}{A} + \frac{A}{8h}\right). \qquad (37)$$

Se il valore di h, che si sarà posto in questa formola per calcolare S, è h_0, cioè quello corrispondente al riposo, per avere la tensione massima sopportata dalla fune bisognerà moltiplicare il valore trovato di S per $^4/_3$ (vedi 31), poichè è evidente che S_1, S_2, S_0 stanno fra loro come T sta a t, sta alla tensione iniziale $\dfrac{T+t}{2}$.

Quando la trasmissione non è semplice, cioè quando le due stazioni considerate non sono estreme, non sarà più lecito omettere il secondo calcolo. Allora infatti la pressione sui pulvinari non si potrà più nemmeno per approssimazione supporre eguale a $T+t$.

Se le dette stazioni sono stazioni di ricambio, evidentemente la pressione sui pulvinari sarà per ciascuna di esse la risultante delle tensioni dei quattro tratti di fune che vi hanno capo e del peso della puleggia. Dette T, t e T', t' queste tensioni, φ_1, φ_2 e φ_1', φ_2' gli angoli loro coll'orizzonte, la formola con cui si dovrà calcolare N nel riprendere il calcolo sarà adunque:

$$N^2 = (G + T \operatorname{sen} \varphi_1 + t \operatorname{sen} \varphi_2 + T' \operatorname{sen} \varphi'_1 + t' \operatorname{sen} \varphi'_2)^2 +$$
$$+ (T \cos \varphi_1 + t \cos \varphi_2 - T' \cos \varphi'_1 - t' \cos \varphi'_2)^2.$$

Il calcolo preventivo si potrà fare adottando per t e T i valori (31), ma sarà meglio se si supporrà N uguale alla metà della somma dei pesi delle funi che trovano appoggio sulla puleggia; cioè se si farà

$$N = \Pi A + \Pi' A',$$

dove A ed A' sono le distanze della stazione considerata dalle due vicine, e dove per Π e Π' si metteranno i pesi per metro corrente delle due funi che si saranno calcolate colla (33).

Se sono dati i due lavori da trasmettersi dalla stazione precedente a quella che si considera o da questa a quella che la segue, i valori di QR da sostituirsi in (33) per dedurne δ e quindi Π si calcoleranno mediante i lavori stessi. Se invece, come accade ogniqualvolta nella stazione considerata non si fanno diramazioni, il primo di questi due lavori deve essere uguale al secondo, più quello che per attrito si consuma nella stazione, si prenderà per calcolare Π' lo stesso valore di QR con cui si è calcolato Π. Avendosi così una trasmissione combinata con più stazioni intermedie, si potrà man mano col calcolo procedere dall'ultima stazione fino al motore. Questo calcolo riesce in pratica generalmente molto più semplice, poichè le puleggie si fanno in generale tutte uguali tra loro, il che risparmierà molti calcoli.

Sono ovvie le modificazioni da farsi a questo processo quando invece del lavoro da raccogliersi all'ultima stazione fosse dato il lavoro somministrato dal motore. Se in questo caso le puleggie hanno da essere tutte uguali, il doppio calcolo si farà soltanto per la parte compresa fra le due prime stazioni.

Neppure è d'uopo fermarci sulle stazioni di sostegno. Basterà per queste ricordare che, detta T la tensione della fune da essa sopportata nel punto di sostegno, e φ e φ' gli angoli suoi coll'orizzontale, da una parte e dall'altra della puleggia, la pressione sul pulvinare sarà semplicemente:

$$N = \sqrt{\{G + T(\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\varphi')\}^2 + T^2(\cos\varphi - \cos\varphi')^2} \qquad (38)$$

e quella da usarsi pel calcolo preventivo:

$$N = \frac{\Pi(A + A')}{2},$$

ove Π sarà quello stesso che si sarà calcolato nel considerare le stazioni principali.

I calcoli preventivi si rendono più spediti adoperando per calcolare h invece della formola (34) la formola più semplice:

$$\frac{h}{A} = \frac{1}{900} \frac{A}{S}, \tag{39}$$

la quale si ricava mettendo in (21') $\frac{\theta}{11}$ invece di c, il che è permesso rappresentando τ la più gran parte di θ.

Nella fig. 16 si è supposto che il tratto di fune maggiormente teso fosse il superiore. Ciò non è obbligatorio: anzi *in generale vi sarà vantaggio nel porlo inferiormente.* Così facendo infatti si ottengono questi due beni: 1° i tratti di maggiore saetta essendo collocati in alto, sarà diminuito il pericolo che la fune strisci sul terreno, e quindi risparmio di altezza nei pilastri; 2° la fune abbraccierà le puleggie per un arco di maggior ampiezza, e la trasmissione del moto sarà perciò tanto più assicurata. Ma una tale disposizione non è possibile che quando si abbia

$$h_2 - h_1 < 2\,\mathrm{R},$$

nel caso contrario i due tratti di fune si confricherebbero a vicenda.

Fin qui si è supposto che tutte le parti della trasmissione fossero orizzontali. Supporremo adesso che alcuna di esse sia obliqua.

Sia DCB uno de' tratti della fune di una trasmissione semplice obliqua (fig. 17), e dicasi:

A la distanza orizzontale de' suoi estremi,

H la loro differenza di livello,

h' ed h'' le saette misurate rispettivamente a partire da B ed a partire da D, ossiano le differenze di livello tra B ed il punto più basso della curva, e tra questo e D,

a' ed a'' le distanze orizzontali del vertice C della curva dagli estremi B e D, S S'' le tensioni unitarie all'estremo inferiore ed all'estremo superiore della fune.

Si immagini poi il corrispondente tratto di fune di una trasmissione semplice orizzontale nella quale le puleggie abbiano la stessa distanza orizzontale A, e la quale trasmetta lo stesso lavoro che è trasmesso dalla data fune obliqua, colla stessa velocità. Dicansi per questa trasmissione ideale:

h la saetta del tratto di fune considerato,

$S\,S$ la tensione unitaria ai suoi estremi.

Poichè le due trasmissioni sono di eguale forza, bisogna che la fune della trasmissione obliqua abbia nel suo estremo inferiore B la stessa tensione che ha ai suoi estremi il tratto di fune corrispondente nella trasmissione orizzontale fittizia; imperocchè essendo sulla puleggia inferiore che v'ha maggior pericolo di scivolamento, egli è rispetto a questa che si deve colle equazioni (27) regolare la tensione della fune. Ora, attesa la piccola saetta che si ha in tutte le trasmissioni telodinamiche e la piccola differenza di livello fra le stazioni, le tensioni delle funi differiranno sempre assai poco, se saranno uguali le tensioni orizzontali. Diremo adunque che le funi delle due trasmissioni debbono avere la stessa tensione orizzontale. Sia τ questa tensione, ed entrambe le curve funicolari saranno rappresentate dall'equazione:

$$y = \frac{\Pi}{2\tau} x^2,$$

dove Π rappresenta, come al solito, il peso d'un metro di fune.

Se ne dedurrà per la trasmissione orizzontale

$$h = \frac{\Pi A^2}{8\tau} \tag{a}$$

e per la trasmissione obliqua:

$$h' = \frac{\Pi}{2\tau} a'^2 \tag{b}$$

ed

$$h' + H = \frac{\Pi}{2\tau}(A - a')^2. \tag{c}$$

Sottraendo (b) da (c) si ha:

$$H = \frac{\Pi}{2\tau}(A^2 - 2Aa'),$$

e sostituendovi il valore di 2τ ricavato dalla (a):

$$H = \frac{4h}{A^2}(A^2 - 2Aa'),$$

donde

$$a' = \frac{A}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{H}{h}\right). \tag{40}$$

Questo valore di a' sostituito in (b) dà:

$$h' = h\left(1 + \frac{1}{16}\frac{H^2}{h^2}\right) - \frac{H}{2}. \tag{41}$$

Si ha poi:

$$h'' = H + h' \tag{42}$$

ed

$$a'' = A - a' \tag{43}$$

Per avere nello stesso modo S' ed S'' espressi in funzione di S, ricordiamo che dalla (25) si ha

$$S = \frac{4}{i\,\pi\,\delta^2}(\tau + \Pi\,h')$$

ed

$$S' = \frac{4}{i\,\pi\,\delta^2}(\tau + \Pi\,h').$$

Quest' ultima espressione si può scrivere:

$$S' = \frac{4}{i\,\pi\,\delta^2}\{\tau + \Pi\,h - \Pi\,(h - h')\}$$

ossia

$$S' = S - \frac{4}{\pi}\frac{\Pi}{i\,\delta^2}(h - h'),$$

donde, fatti i calcoli, si ha prossimamente la 1.ª delle equazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} S' &= S - \frac{h - h'}{114} \\ S'' &= S + \frac{h'' - h}{114} \\ S'' - S' &= \frac{H}{114} \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

delle quali la seconda si ottiene in modo analogo alla prima, e la 3.ª risulta dalle due prime.

Ecco dunque il metodo semplicissimo con cui una trasmissione obliqua si può calcolare. Scelto S, si calcolino colle formole date superiormente le saette h_1, h_2, h_0 del tratto più teso, del tratto meno teso, e della fune in riposo per una trasmissione orizzontale, la cui lunghezza A sia uguale alla distanza orizzontale delle due puleggie della trasmissione obliqua da calcolarsi. Sostituiti ad h i trovati valori di h_1, h_2, h_0 nelle formole (41), (42), (44) si calcolino i corrispondenti valori di h', h'', ed il valore di S'' corrispondente ad $h = h_1$. Col valore di S_1'', che si sarà trovato, si calcoli s'' colla formola solita $S_1'' - s'' = 18^{kil.}$, e quindi colle formole (33) e (17) si calcolino δ ed R.

Con un tale artifizio il calcolo d'una trasmissione complessa qualunque, nella quale alcune parti sieno oblique, si farà come in generale si è detto per le trasmissioni complesse orizzontali, salvochè al calcolo delle parti di trasmissione oblique, fatto considerandole come orizzontali, si dovrà far seguire il computo semplicissimo ora indicato.

È da osservarsi che, mentre in una trasmissione orizzontale i vertici delle curve descritte dai due tratti di fune si trovano entrambi sulla stessa verticale, nelle trasmissioni oblique ciò non succede che quando la fune è in riposo. Cominciando il movimento i vertici dei due tratti di fune si sposteranno finchè non avranno raggiunta la posizione data dalla (40), la quale mostra come la loro distanza orizzontale da un estremo della fune dipenda dalla tensione, e quindi non possa essere la stessa pei due tratti.

La formola (40) può dare per a' un valore negativo; ed allora il vertice della curva cadrà fuori dello spazio compreso fra le due puleggie. La formola mostra come ciò cominci a succedere quando H superi il valore $H = 4h$. Supponendo nella formola (39) $S = 6$, e sostituendo nella uguaglianza ora scritta ad h il suo valore che si ricaverebbe così dalla (39) stessa, la si trasforma nella

$$\frac{H}{A} = \frac{A}{1350}, \tag{45}$$

la quale ci dà il limite oltre al quale deve crescere la *pendenza* $\frac{H}{A}$ della trasmissione, perchè il vertice della curva cada fuori dello spazio compreso fra le due puleggie. Vedesi come questo limite cresca con A. Per $A = 100^m$ esso sarebbe

$$\frac{H}{A} = \frac{1}{13{,}50} \quad \text{onde } H = 7{,}40\,.$$