CAPO SECONDO

SISTEMI DI PIÙ DI DUE MEZZI

§ 1° *Esistenza e proprietà dei punti cardinali.*

25. *Se una retta di incidenza e l'asse del sistema sono in un medesimo piano, è in questo piano anche la corrispondente retta di emergenza.* — Premesse queste considerazioni relative al caso semplice, in cui il sistema diottrico consti di due soli mezzi separati da una sola superficie dividente, possiamo ora passare al caso più generale di un sistema qualunque, composto come si disse all'articolo 1. Designeremo come allora con $M, M_1, M_2, \ldots M$ i mezzi successivi, e con $n, n_1, n_2, \ldots n'$ i loro indici di rifrazione assoluti.

Dato un tale sistema, e dato nel primo mezzo M un raggio centrale incidente, noi possiamo determinare le posizioni dei corrispondenti raggi rifratti nei mezzi M_1 $M_2 \ldots M'$, applicando alle successive rifrazioni la regola [4]. Per ciascuna di queste rifrazioni vale l'osservazione [6], epperò abbiamo questo primo

Teorema. Se una retta di incidenza e l'asse del sistema diottrico sono in un medesimo piano, è in questo piano anche la corrispondente retta di emergenza.

26. *Punti coniugati. Due punti coniugati sono sempre in un medesimo piano passante per l'asse del sistema.* — In virtù del teorema [8], se è dato un fascio di rette di incidenza passanti tutte per un medesimo punto A, le corrispondenti rette di rifrazione nel mezzo M_1 si intersecano tutte in un punto B_1 coniugato con A rispetto al sistema dei due primi mezzi. Pel medesimo teorema a questo secondo fascio corrisponde nel terzo mezzo M_2 un altro fascio di rette di rifrazione incrociantisi tutte in un punto B_2 coniugato a B_1 rispetto al sistema dei mezzi M_1 ed M_2. A sua volta questo terzo fascio di rette darà luogo ad un quarto fascio di rette incrociantisi in un altro punto B_3. Così continuando fino all'ultimo mezzo si è immediatamente condotti a concludere:

Teorema. Per qualunque sistema diottrico centrato a qualunque fascio di rette di incidenza passanti tutte per un medesimo punto A corrisponde un fascio di rette di emergenza passanti tutte per un medesimo punto B.

Viceversa, se la luce si propagasse nel senso opposto e passasse attraverso il sistema dall'ultimo mezzo al primo, ad un fascio di rette d'incidenza intersecantisi in B corrisponderebbe un fascio di rette d'emergenza incrociantisi tutte in A.

Due punti che come A e B godano di questa proprietà, che a tutte le rette d'incidenza passanti per l'uno corrispondano rette di emergenza passanti per l'altro, si dicono, rispetto al sistema diottrico dato, *punti coniugati*.

Risulta dallo stesso teorema [8] che il punto B_1 è nel piano determinato dall'asse e dal punto A [9], che il punto B_2 è nel piano determinato dall'asse e dal punto B_1, e così di seguito. Perciò:

Due punti coniugati sono sempre in un medesimo piano passante per l'asse del sistema.

27. *Allo studio ulteriore bastano considerazioni di geometria piana.* — Avendo dimostrato l'esistenza dei punti coniugati, e sapendo che essi giaciono sempre coll'asse in un medesimo piano, noi potremo, come si fece al numero 10 per una sola superficie dividente, limitare, quando occorra, le nostre considerazioni a quel piano, senza perciò perdere in generalità ed in rigore.

28. *Piani coniugati, fuochi coniugati.* — Se pel punto A si fa passare un piano perpendicolare all'asse, tutti i punti di questo piano hanno, rispetto alla prima superficie dividente, i loro punti coniugati nel piano perpendicolare all'asse condotto per B_1 [14]. Similmente tutti i punti di questo secondo piano hanno, rispetto alla seconda rifrazione, i loro coniugati nel piano condotto per B_2 perpendicolarmente all'asse, e così di seguito. Dunque anche rispetto a tutto il sistema di mezzi rifrangenti si ha il seguente

Teorema. Tutti i punti A di un piano perpendicolare all'asse hanno i loro coniugati B sopra un altro piano perpendicolare all'asse.

Due piani perpendicolari all'asse, e tali che ciascun punto dell'uno sia coniugato ad un punto dell'altro, si dicono *piani coniugati*.

A qualunque piano perpendicolare all'asse corrisponde sempre un piano coniugato.

Siccome è evidente che un raggio diretto secondo l'asse traverserebbe il sistema senza essere deviato, così i due punti, in cui due piani coniugati intersecano l'asse, sono coniugati. Tali punti diconsi fuochi coniugati.

29. *Piani focali, fuochi principali.* — Se di due piani coniugati uno è infinitamente lontano, l'altro dicesi *piano focale.* Se il piano coniugato all'infinito è quello nei punti del quale concorrono le rette d'emergenza, il piano focale corrispondente dicesi *primo* piano focale; se il piano coniugato, che va all'infinito, è quello pei punti del quale passano le rette d'incidenza, il piano focale corrispondente dicesi *secondo* piano focale. Qualunque fascio di rette di incidenza parallele dà luogo ad un fascio di rette di emergenza passanti tutte per un medesimo punto del secondo piano focale; a qualunque fascio di rette d'incidenza passanti tutte per un medesimo punto del primo piano focale corrisponde un fascio emergente di rette parallele.

I punti ove i piani focali intersecano l'asse si dicono *fuochi principali* o semplicemente *fuochi* del sistema; è il *primo* fuoco quello situato nel primo piano focale, *secondo* fuoco quello situato nel secondo piano focale. Tutte le rette di incidenza passanti pel primo fuoco danno rette di emergenza parallele all'asse; tutte le rette di incidenza parallele all'asse dànno rette di emergenza passanti tutte pel secondo fuoco.

30. *Immagini coniugate, immagini reali o virtuali.* — Sopra un piano perpendicolare all'asse sia data una figura. A ciascun punto di questa sarà coniugato un punto del piano coniugato a quello dato, ed il complesso di questi punti coniugati formerà una nuova figura che dicesi, rispetto al sistema diottrico, *immagine* della prima. Siccome reciprocamente, se la luce attraversasse il sistema in senso inverso, la prima figura sarebbe immagine della seconda, così le due figure si dicono anche *immagini coniugate.*

La prima dicesi *reale* o *virtuale* secondochè è o non è nel primo mezzo; la seconda dicesi reale o virtuale secondochè è o non è nell'ultimo mezzo.

31. *Rapporto delle distanze di due punti coniugati dall'asse; questo rapporto ha un medesimo valore per tutte le coppie di punti coniugati che si possono scegliere in due piani coniugati. Due immagini coniugate sono sempre prospettive rispetto ad un punto situato sull'asse.* — Torniamo a considerare, come all'articolo 26, un punto A e la serie $B_1, B_2 \ldots B$ de' suoi coniugati rispetto

ai sistemi formati dai due primi mezzi, dai tre primi mezzi, ecc., e rispetto a tutto il sistema diottrico dato.

In virtù della proposizione [15] il rapporto delle distanze dei punti A e B_1, dall'asse non dipende dalle grandezze assolute di queste distanze, ma solo dalla posizione dei piani perpendicolari all'asse, nei quali i due punti sono situati. Lo stesso deve dirsi dei punti B_1 e B_2, dei punti B_2 e B_3, ecc.... B_i e B. Dunque anche il rapporto tra la distanza dall'asse al punto A e la distanza dall'asse al punto B, suo coniugato rispetto all'intiero sistema, dipende unicamente dalla posizione dei due piani coniugati, nei quali i due punti A e B si trovano. In altri termini:

Qualunque coppia di punti coniugati si scelga in due piani coniugati dati, il rapporto delle loro distanze dall'asse è uno stesso.

Ne deriva che se sono dati due piani coniugati ed in uno di essi quanti si vogliano punti, tutte le rette che congiungono questi punti ai loro coniugati, che sono sull'altro piano, incontrano l'asse in un medesimo punto.

Applicata ai punti di due immagini coniugate, questa proposizione si può enunciare dicendo, che due immagini coniugate sono sempre prospettive rispetto ad un punto situato sull'asse.

32. *Piani principali, punti principali, distanze focali.* — Esistono in generale due piani coniugati per i quali il rapporto dianzi

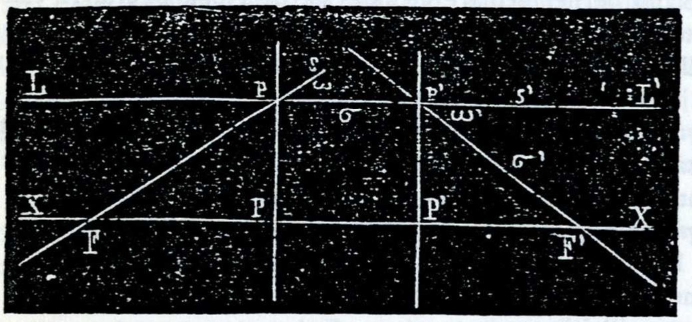

Fig. 9.

considerato fra le distanze di due punti coniugati dall'asse è eguale ad uno; tali cioè che due punti coniugati presi su di essi stanno sopra una medesima retta parallela all'asse.

Per dimostrarlo supponiamo che sia $X X$ l'asse (fig. 9) e che sieno F, F' i due fuochi del sistema diottrico dato. In un piano qualunque passante per l'asse, e che noi prendiamo per piano della figura, immaginiamo una retta indefinita $L L'$ parallela all'asse. Se una retta di incidenza σ coincide con questa retta $L L'$, la corrispondente retta d'emergenza σ' passa pel secondo fuoco F'. Questa retta giace nel piano $F F' L L'$ [24], epperò incontra la $L L'$ in un punto che diremo p'. Se similmente colla $L L'$ coincide una retta d'emergenza s', ad essa corrisponde una retta d'incidenza s, passante pel primo fuoco F, e che, essendo nel piano della figura, incontra la retta $L L'$ in un punto che diremo p.

Pel punto p' passano così due rette d'emergenza σ' s' corrispondenti a due rette d'incidenza σ, s passanti per p. Ma a tutte le rette di incidenza passanti per un punto corrispondono rette di emergenza passanti per un altro punto (26), dunque a tutte le rette di incidenza, che passano per p, corrispondono rette di emergenza passanti per p': i due punti p e p' sono coniugati.

I piani $p\,P$, $p'\,P'$ perpendicolari all'asse condotti per p e p' sono adunque coniugati, e per una coppia p, p' di punti coniugati presi su di essi il rapporto delle distanze $p\,P$, $p'\,P'$ è uguale ad uno. Ma noi sappiamo [31] che questo rapporto si conserva lo stesso, qualunque altra coppia di punti coniugati si scelga sui medesimi piani; dunque i due piani $p\,P$, $p'\,P'$ hanno la rimarchevole proprietà, che una retta qualunque parallela all'asse li incontra sempre in due punti tra loro coniugati.

I due piani, che godono di questa proprietà, si dicono, secondo GAUSS, *piani principali* del sistema diottrico.

Emerge dal ragionamento precedente, che i piani principali esistono, se esistono i fuochi; si considereranno a suo tempo i casi speciali in cui questi non esistono [46].

I due punti P e P', ove i piani principali intersecano l'asse, si dicono *punti principali.* I segmenti $P\,F$, $P'\,F'$ dell'asse compresi tra il primo punto principale ed il primo fuoco e tra il secondo punto principale ed il secondo fuoco si denominano *distanze focali principali* o semplicemente *distanze focali* del sistema. Noi rappresenteremo le due distanze focali del sistema colle lettere f ed f' e converremo di assumerle come positive ogniqualvolta il fuoco si trova, rispetto al punto principale corrispondente, dalla parte verso cui si propaga la luce, e come negative nel caso contrario. Nella figura 9, supponendo come al solito, che la luce si propaghi da sinistra verso destra, è f negativo e f' positivo. Dimostreremo fra poco [34] che sempre, come nella figura, f ed f' hanno segni contrari.

33. *Il rapporto dell'angolo di due rette di emergenza all'angolo delle corrispondenti rette di incidenza non varia che col variare della posizione dei piani coniugati sui quali quelle rette si intersecano. Relazione fra questo rapporto e quello delle distanze dei punti di intersezione dall'asse.* — Oltre alla serie dei punti $A, B_1, B_2, \ldots B$, considerata agli articoli 26 e 31 consideriamo ora due rette d'incidenza s e σ qualunque passanti per il punto A e le corrispondenti rette di rifrazione nei mezzi $M_1, M_2, \ldots M'$, rette che denomineremo s_1 e σ_1, s_2 e $\sigma_2, \ldots s'$ e σ'. Diciamo poi ω l'angolo $s A \sigma$ formato dalle due rette s e σ, ω_1 l'angolo delle due rette s_1 e σ_1, ω_2 l'angolo delle due rette s_2 e $\sigma_2, \ldots \omega'$ l'angolo $s' B \sigma'$ delle due rette d'emergenza s' e σ', e riteniamo, riguardo ai segni di questi angoli, la convenzione fatta all'articolo 13.

La formola [III] del num. 13, applicata successivamente alla prima rifrazione, poi alla seconda, poi alla terza ecc...., dà

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{n_1}{n}\frac{y_1}{y}, \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_2}{n_1}\frac{y_2}{y_1}, \quad \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{n_3}{n_2}\frac{y_3}{y_2}, \ldots, \quad \frac{\omega_i}{\omega'} = \frac{n'}{n_i}\frac{y'}{y_i},$$

e queste uguaglianze, moltiplicate membro a membro, dànno:

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{n'}{n}\frac{y'}{y}. \qquad \text{[III]}$$

Questa relazione è identica alla [III] del num. 13 relativa ad un sistema di due soli mezzi rifrangenti; la proposizione [16] enunciata per il caso di due soli mezzi sussiste adunque per un sistema qualunque: in ogni caso il rapporto dell'angolo di due qualunque rette di incidenza incrociantisi in un punto A all'angolo delle due corrispondenti rette di emergenza incrociantisi nel punto B coniugato di A rimane invariato qualunque posizione prendano i due punti A e B in due piani coniugati fissi, e non dipende che dalla posizione di questi piani. Se con y ed y' si rappresentano le distanze dei punti A e B dall'asse, questo rapporto costante vale $\frac{n'}{n}\frac{y'}{y}$.

34. *Le due distanze focali hanno sempre segni contrari, e stanno fra di loro come gli indici di rifrazione dei mezzi estremi. Sistemi convergenti e sistemi divergenti.* — Deduciamo da questa proposizione due conseguenze importanti.

In primo luogo applichiamola alla retta d'incidenza s, σ ed alle corrispondenti s', σ' considerate al num. 32 (fig. 9). In questo caso è $y = Pp = P'p' = y'$, e la formola [III] dà

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\text{angolo } s p \sigma}{\text{angolo } s' p' \sigma'} = \frac{n'}{n}.$$

Quindi:

1° ω, ed ω' hanno lo stesso segno, per lo che è evidentemente necessario che PF e $P'F'$ abbiano segni contrari.

2° Essendo angolo $s p \sigma = p F P$ ed angolo $s' p' \sigma' = p' F' P'$, e per la loro piccolezza [2] potendosi questi angoli scambiare colle loro tangenti, risulta

$$\frac{\tan p F P}{\text{tang } p' F' P'} = \frac{n'}{n}.$$

Ma dai triangoli $F P p$, $F' P' p'$ si ha

$$\text{tang } p F P = \frac{p P}{F P}, \quad \text{tang } p' F' P' = \frac{p' P'}{P' F'} = \frac{p P}{P' F'},$$

perciò

$$\frac{P' F'}{F P} = \frac{n'}{n},$$

ossia, essendo $P' F' = f'$ e $F P = -f$,

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}. \qquad (1)$$

Dunque abbiamo il seguente teorema:

Teorema. 1° Le due distanze focali di un sistema diottrico qualunque hanno sempre segni contrarii; 2° il valore assoluto della prima sta a quello della seconda come l'indice di rifrazione del primo mezzo sta a quello dell'ultimo mezzo.

Se i due mezzi estremi hanno lo stesso indice di rifrazione, in particolare se i due mezzi estremi sono formati dalla medesima sostanza, la formola (1) si riduce a

$$f = -f' \qquad (2)$$

ed il teorema precedente dice che le due distanze focali sono uguali e di segni contrarii.

Questa proposizione si può anche enunciare dicendo, che se il primo e l'ultimo mezzo di un sistema diottrico centrato hanno lo stesso indice di rifrazione, i due punti principali sono simmetricamente situati rispetto ai due fuochi.

È questo il caso degli apparecchi ottici ordinarii pei quali il primo e l'ultimo mezzo sono costituiti dall'aria.

Se f è negativa ed f' positiva, un fascio di raggi incidenti paralleli, in qualunque verso si propaghi la luce, si trasforma in un fascio di raggi emergenti convergenti: il sistema diottrico dicesi perciò *convergente*. Se invece f è positiva ed f' negativa, ogni fascio di raggi incidenti paralleli dà origine ad un fascio di raggi emergenti divergenti, ed il sistema diottrico dicesi *divergente*.

35. *Piani nodali, punti nodali.* — Per arrivare alla seconda conseguenza che vogliamo dedurre dalla formola [III], supponiamo (fig. 10) che sieno F, F' i fuochi, P, P' i punti principali

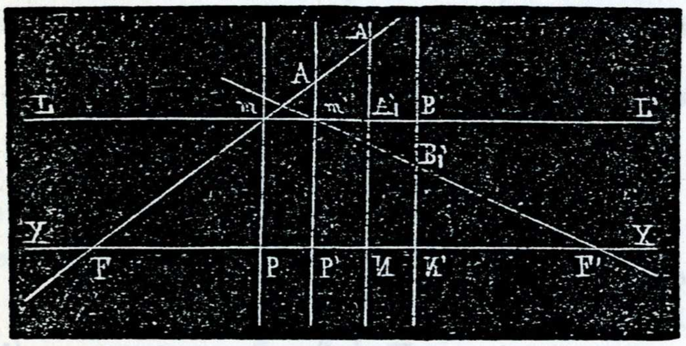

Fig. 10.

del sistema, tracciamo, come nella fig. 9, una retta $L\,L'$ parallela all'asse e le rette $F\,m\,A$, $m'\,B_1\,F'$, che le corrispondono rispettivamente quando essa si considera come retta di emergenza e quando la si considera come retta di incidenza, e consideriamo due piani coniugati qualunque $N\,A$, $N'\,B$. Il punto B di intersezione tra il piano $N'\,B$ e la retta d'emergenza $m'\,L'$ corrispondente alla retta d'incidenza $F\,m\,A$ è coniugato ad A, epperò pei due piani coniugati $N\,A$, $N'\,B$ è

$$\frac{y'}{y} = \frac{N'\,B}{N\,A} = \frac{P\,m}{N\,A}.$$

Similmente sono coniugati i punti A_1, B_1, intersezioni dei piani coniugati colle rette corrispondenti $L\,L'$ $m'\,F'$, epperò

$$\frac{y'}{y} = \frac{N'\,B_1}{N\,A_1} = \frac{N'\,B_1}{P'\,m'}.$$

Dunque pei piani coniugati che si considerano è in grazia della [III]

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{n'}{n}\frac{Pm}{NA} = \frac{n'}{n}\frac{N'B_1}{P'm'} \tag{1}$$

Ora si può seegliere il piano NA in maniera che sia

$$\frac{NA}{Pm} = \frac{n'}{n}, \tag{2}$$

nel qual caso per la [I] è anche

$$\frac{P'm'}{N'B_1} = \frac{n'}{n}, \tag{3}$$

ed allora risulta $\frac{\omega}{\omega'} = 1$, cioè $\omega = \omega'$.

V'hanno adunque due piani coniugati che godono di questa proprietà, che le rette di emergenza incrociantisi in un punto qualunque dell'uno fanno tra loro angoli uguali a quelli tra loro formati dalle corrispondenti rette di incidenza, le quali si intersecano nel punto coniugato che è sull'altro piano.

Questi piani si dicono *piani nodali*.

I punti N, N' ove i piani nodali tagliano l'asse si dicono *punti nodali* o semplicemente *nodi*. Siccome ad una retta di incidenza coincidente coll'asse corrisponde come retta di emergenza l'asse medesimo, così per la proprietà caratteristica dei piani nodali risulta che ad ogni retta di incidenza passante pel primo punto nodale corrisponde una retta di emergenza passante per l'altro punto nodale e ad essa parallela.

A determinare i punti nodali N ed N' valgono le uguaglianze (2) e (3). Infatti dalle due coppie di triangoli simili FNA, FPm ed $F'N'B_1$, $F'P'm'$ si ha

$$FN = FP\frac{NA}{Pm}, \quad F'N' = F'P'\frac{N'B_1}{P'm'},$$

ossia, avuto riguardo alle [2] e [3]:

$$FN = FP\frac{n'}{n}, \quad F'N' = F'P'\frac{n}{n'}.$$

Ora $FP = -f$, $F'P' = -f'$, ed in virtù della formola [I] del numero 34

$$-f\frac{n'}{n} = f', \quad -f'\frac{n}{n'} = f,$$

dunque

$$FN = f', \quad F'N' = f. \tag{4}$$

Concludiamo che il primo punto nodale si trova portando sull'asse, a partire dal primo fuoco, un segmento uguale in grandezza ed in segno alla seconda distanza focale, ed il secondo punto nodale si trova portando sull'asse, a partire dal secondo fuoco, un segmento uguale in grandezza ed in segno alla prima distanza focale.

Essendosi dimostrato che le due distanze focali hanno sempre segni contrarii, possiamo anche dire che rispetto ai due fuochi il primo punto nodale è situato simmetricamente al secondo punto principale ed il secondo punto nodale è situato simmetricamente al primo punto principale; oppure ancora che il punto di mezzo del segmento FF' è pure punto di mezzo dei segmenti PN' e $P'N$.

Evidentemente consegue da ciò, che la distanza NN' dei due punti nodali è uguale alla distanza PP' dei due punti principali.

Quando i due mezzi estremi del sistema hanno il medesimo indice di rifrazione, ed in particolare quando essi sono identici, i punti nodali determinati colla regola ora enunciata coincidono coi punti principali.

36. *Fra le distanze focali e la distanza dei nodi dai rispettivi piani principali sussistono le stesse relazioni che tra le distanze focali di un'unica superficie rifrangente ed il suo raggio di curvatura.* — Egli è facile vedere che fra le distanze focali e la distanza dei nodi dai rispettivi piani principali sussistono le stesse relazioni, che si hanno fra le distanze focali di un'unica superficie rifrangente ed il raggio di curvatura di questa [18].

Diciamo r le distanze uguali PN, $P'N'$ (fig. 10) considerate come positive quando N ed N' stanno, rispetto a P e P', dalla parte verso cui si propaga la luce. Abbiamo $FN = FP + PN$, ossia essendo $FN = f'$, $FP = -f$, $PN = r$,

$$f' = r - f \quad \text{ed} \quad f = r - f'.$$

Portando questi valori nella formola $\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$ (34), otteniamo:

$$f = -\frac{nr}{n'-n}, \quad f' = \frac{n'r}{n'-n}. \tag{IV}$$

formole identiche alle [IV] relative ad un sistema di due soli mezzi rifrangenti [18].

§ 2° *Uso dei punti cardinali, costruzioni e formole per un sistema diottrico qualunque.*

37. *Determinazione grafica della retta di emergenza corrispondente ad una data retta di incidenza, e del punto coniugato con un punto dato.* — Con quel che precede noi abbiamo dimostrato che sull'asse di un sistema centrato esistono in generale sei punti rimarchevoli, due fuochi [29], due punti principali [32] e due punti nodali [35]. Considerati collettivamente essi si denominano *punti cardinali* del sistema. Le considerazioni precedenti (34-35) mostrano che, dati quattro di questi punti, gli altri riescono pure determinati.

Ora io dico che la conoscenza dei punti cardinali, o di

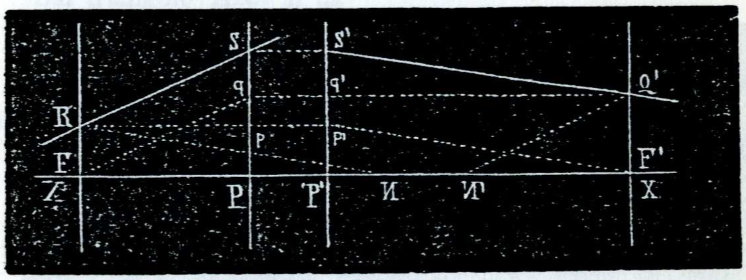

Fig. 11.

quattro di essi, basta a studiare l'azione di un sistema; dico cioè che col loro mezzo si possono trovare:

1.° La retta d'emergenza che corrisponde ad una data retta d'incidenza,

2.° Il punto coniugato di un punto dato.

È chiaro che a queste due si possono ridurre tutte le questioni che sull'azione di un sistema diottrico si possono proporre.

Problema 1°. Dati i punti cardinali ed una retta di incidenza, trovare la corrispondente retta di emergenza.

Sieno (fig. 11) F, F', P, P', N, N' i punti cardinali ed $R\,S$ la retta data. La retta d'emergenza corrispondente deve passare per s' coniugato di s; la sua direzione poi si può avere in più modi.

1.° La retta RS (fig. 11) può considerarsi come appartenente ad un fascio di rette d'incidenza, incrociantisi in R, alle quali corrispondono rette di emergenza parallele. Ma fra le dette rette d'incidenza v'è la Rpp' parallela all'asse, la cui corrispondente è $p'F'$ passante pel secondo fuoco, dunque la retta cercata è $s'Q'$ parallela a $p'F'$.

2.° Se si tira la Fq parallela ad RS, la retta d'emergenza corrispondente dovrà incontrare la retta cercata in un punto del secondo piano focale. Ma Fq passando pel fuoco F, la sua corrispondente retta d'emergenza è parallela all'asse, e interseca i secondo piano focale in Q'; dunque $S'Q'$ è la retta cercata.

3.° La retta cercata dev'essere parallela alla retta d'emergenza corrispondente alla RN (fig. 11); ma, per la proprietà dei nodi, questa retta d'emergenza è parallela alla RN stessa, dunque la retta cercata è $S'Q'$ parallela ad RN.

4.° La retta cercata deve incontrare il secondo piano focale nel punto ove questo è intersecato dalla retta d'emergenza cor-

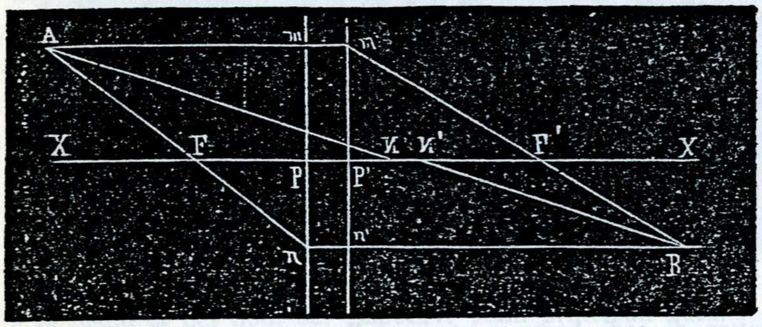

Fig. 12.

rispondente alla parallela ad RS condotta per N. Ma la retta d'emergenza corrispondente a questa è $N'Q'$ parallela ad RS, dunque $S'Q'$ è la retta cercata.

Problema 2°. Dati i punti cardinali trovare il punto coniugato di un dato punto luminoso.

Sieno (fig. 12) XX l'asse, F, F' i due fuochi, P, P' i due punti principali, N, N' i due punti nodali ed A il punto dato, del quale domandasi il coniugato.

Fra le infinite rette di incidenza che passano per A immaginiamone due Am, An, la prima parallela all'asse, l'altra passante pel fuoco F. Se prolunghiamo la prima fino in m' all'incontro col secondo piano principale, e se conduciamo nn' parallela all'asse, i punti m' ed n', per la proprietà caratteristica dei piani principali [32], sono coniugati ad m e ad n. Perciò la retta di emergenza corrispondente ad Am passerà per m', e la retta di emergenza corrispondente ad An passerà per n'. Ma la prima dovrà passare pel secondo fuoco F' e la seconda dovrà essere parallela all'asse [29], dunque esse sono $m'F'$ ed $n'B$ parallela all'asse. Il loro punto comune B è il coniugato di A.

Le rette AN, $N'B$ debbono riescire parallele; la considerazione della retta incidente AN e di una delle precedenti conduce quindi con ugual semplicità alla determinazione del punto B.

38. *Formole per un sistema diottrico qualunque.* — Questa costruzione ci conduce a formole semplicissime, che servono a calcolare la posizione di uno dei due punti coniugati quando sia data quella dell'altro. E ciò in modo identico a quello seguito all'articolo 21 pel caso speciale di un sistema di due soli mezzi rifrangenti.

Dal triangolo Amn si ha

$$\frac{FP}{Am} = \frac{nP}{nm},$$

o, ciò che vale lo stesso:

$$\frac{FP}{Am} = \frac{nP}{nP + Pm},$$

e dal triangolo $Bn'm'$ si ha similmente

$$\frac{P'F'}{n'B} = \frac{P'm'}{n'P' + P'm'} = \frac{Pm}{nP + Pm}.$$

Diciamo x la distanza del punto A dal primo piano principale Pm, ed y la distanza del punto A dall'asse, e conveniamo che x sia positiva se il punto A, rispetto al piano Pm, si trova dalla parte verso cui si propaga la luce e negativa nel caso contrario, e che y sia positiva o negativa secondochè il punto A è al disopra od al disotto dell'asse. Similmente diciamo x' ed y' le distanze del punto B dal secondo piano principale e dall'asse, e facciamo per queste, riguardo ai segni, le medesime convenzioni. Risulta così

$$\begin{aligned} Am &= -x, & n'B &= x', \\ Pm &= y, & nP &= -y', \\ FP &= -f, & P'F' &= f', \end{aligned}$$

e le uguaglianze precedenti si possono scrivere

$$\frac{f}{x} = -\frac{y'}{y - y'} \tag{1}$$

$$\frac{f'}{x'} = \frac{y}{y - y'} \,. \tag{2}$$

Da queste uguaglianze si ottiene subito, sommandole:

$$\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1 \,. \tag{I'}$$

Se poi si moltiplica la (1) per y e la (2) per y' e si sommano i risultati, si ottiene:

$$f\frac{y}{x} + f'\frac{y'}{x'} = 0 \tag{II''}$$

Le formole (1) e (2) si possono anche scrivere:

$$\frac{y}{y'} = 1 - \frac{x}{f} \,, \qquad \frac{y'}{y} = 1 - \frac{x'}{f'} \,, \tag{II'}$$

e questi valori, portati nella formola [III] dell'art. 33, danno

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{n'}{n}\left(1 - \frac{x'}{f'}\right), \qquad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{n}{n'}\left(1 - \frac{x}{f}\right), \tag{III'}$$

od anche, ricordando che

$$f' = -\frac{n'}{n} f, \ [34],$$

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{x' - f'}{f} \,, \qquad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{x - f}{f'} \tag{III''}$$

Pei punti nodali è

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\omega'}{\omega} = 1 \,,$$

epperò le [III''] danno

$$x - f = f' \,, \qquad x' - f' = f \,.$$

Dunque, come già si è dimostrato all'articolo 35, la distanza $x - f$ del primo punto nodale dal primo fuoco è uguale in grandezza ed in segno alla seconda distanza focale, e la distanza

$x' - f'$ del secondo punto nodale dal secondo fuoco è uguale in grandezza ed in segno alla prima distanza focale.

Finalmente le [II'] oppure le [III''], moltiplicate tra di loro danno

$$(x - f)(x' - f') = ff' , \qquad [V]$$

la quale dice che il prodotto della distanza di un punto dal primo piano focale per la distanza del suo coniugato dal secondo piano focale è costante ed uguale al prodotto delle due distanze focali.

Siccome f ed f' hanno sempre segni contrarii [34], così anche $x - f$ ed $x' - f'$ hanno sempre segni contrarii, cioè se un punto luminoso è alla sinistra del primo fuoco, il suo coniu-

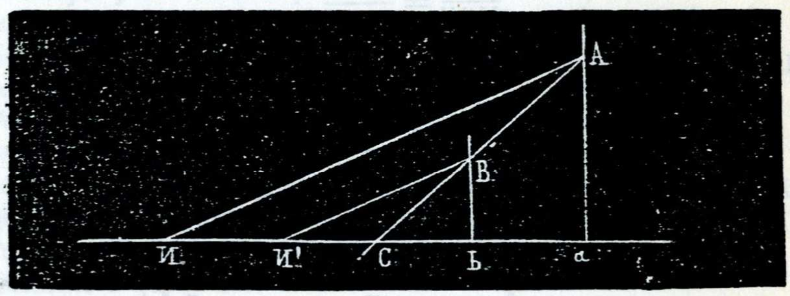

Fig. 13.

gato è alla destra del secondo fuoco, se il punto luminoso è alla destra del primo fuoco, il suo coniugato è alla sinistra del secondo fuoco. Le distanze poi di due punti coniugati dai rispettivi fuochi variano in ragione inversa l'una dell'altra. Movendosi il punto luminoso da una distanza infinita a sinistra del sistema fino al primo fuoco, il suo punto coniugato si muove partendo dal secondo fuoco ed andando fino all'infinito a destra; movendosi il primo punto dal primo fuoco fino all'infinito a destra, il suo coniugato si muove dall' infinito a sinistra fino al secondo fuoco.

39. *Centro di omotetia di due immagini coniugate.* — Si è dimostrato [31] che due immagini coniugate sono sempre prospettive rispetto ad un punto situato sull'asse del sistema, che cioè le rette, che congiungono i punti di una delle immagini ai punti corrispondenti dell'altra, incontrano tutte l'asse in un medesimo punto. Possiamo ora determinare la posizione di questo punto.

Sieno (fig. 13) N, N' i punti nodali del sistema, *Aa*, *Bb* due piani coniugati ed A, B due punti coniugati situati in questi piani; si tiri AB, che incontra l'asse in C, il punto C è il centro di prospettiva che si tratta di determinare. Se si conducono le rette NA, $N'B$, queste, per la proprietà caratteristica dei punti nodali, sono parallele; perciò i due triangoli CNA, $CN'B$ sono simili e danno

$$\frac{NC}{NN'} = \frac{CA}{BA},$$

ossia, avendosi dai triangoli simili CAa, CBb

$$\frac{CA}{BA} = \frac{aA}{aA - bB} = \frac{y}{y - y'},$$

$$\frac{NC}{NN'} = \frac{y}{y - y'}.$$

In modo analogo si ottiene

$$\frac{N'C}{NN'} = \frac{y'}{y - y'};$$

dunque avendo riguardo alle formole (1), (2) ed alla prima delle [II'] [38].

$$\left.\begin{aligned} NC = NN'\frac{f'}{x'}, \quad & N'C = -NN'\frac{f}{x} \\ \frac{NC}{N'C} = \frac{y}{y'} & = 1 - \frac{x}{f} \end{aligned}\right\} \qquad \text{[VI]}$$

Una qualunque di queste formole può servire a determinare col calcolo la posizione del punto C quando sieno dati i punti nodali e la distanza x dell'uno dei due piani coniugati dati dal primo piano principale.

Ricordando che f ed f' hanno sempre segni contrarii [34], deduciamo dalle [VI] che quando x e x' hanno il medesimo segno, hanno lo stesso segno le distanze del punto C dai due nodi, cioè C si trova fuori del segmento NN'. Queste distanze hanno invece segni contrarii, cioè C giace nel segmento NN' quando x ed x' hanno segni contrarii.

Per $x = x' = 0$, cioè pei due piani principali le [VI] danno $NC = N'C - \infty$, come già si sapeva.

Per $x = \infty$ si ha $x' = f'$, e quindi dalle [VI]

$$Nc = NN', \quad N'c = 0,$$

il punto C coincide con N'.

Per $x = f$ è $x' = \infty$, e quindi

$$N c = 0, \qquad N' c = - N N':$$

il punto C coincide allora col punto nodale N.

Dunque il primo punto nodale è il centro di similitudine di due immagini coniugate quando una di queste giace nel primo piano focale e l'altra è all'infinito, ed il secondo punto nodale è il centro di similitudine di due immagini di cui una giaccia nel secondo piano focale e l'altra sia all'infinito. Questa proprietà potrebbe anche servire di definizione pei punti nodali.

40. *La soluzione dei problemi relativi ad un sistema diottrico qualunque può ridursi a quella dei problemi relativi ad una sola superficie rifrangente: v'ha un sistema di due soli mezzi, il quale dà per dati punti luminosi o per date rette d'incidenza punti coniugati o rette di emergenza che, trasportate parallelamente all'asse per un tratto uguale alla distanza compresa fra i due punti principali del sistema dato, vengono a coincidere coi punti o colle rette che sarebbero date da questo sistema.* — Le costruzioni studiate in questo paragrafo [37] sono analoghe a quelle date all'articolo 21, e le formole [I'], [II''], [II'], [III'], [III''], [IV], [V] sono identiche a quelle date ai numeri 18 e 20 per un sistema di due soli corpi trasparenti separati da un'unica superficie rifrangente. Questa osservazione è importante, e permette di ridurre a questo caso più semplice il caso generale.

Notiamo infatti come le formole [IV] dell'art. 36, confrontate colle [IV] dell'articolo 18, dimostrino che se si avesse una superficie rifrangente col vertice nel primo punto principale e col centro di curvatura nel primo punto nodale, e se il primo e l'ultimo mezzo si estendessero fino a questa superficie, il sistema di due soli mezzi così costituito avrebbe le stesse distanze focali del sistema complesso dato. Ora la notata identità delle formole relative alla posizione dei punti coniugati dimostra che, dato un complesso di punti luminosi, se si determinano i corrispondenti punti coniugati prima rispetto al sistema di due soli mezzi ora immaginato, e poi rispetto al sistema dato, i primi distano dall'asse quanto i secondi, e distano dalla superficie rifrangente quanto quelli relativi al sistema complesso distano dal secondo piano principale.

Dunque, dato un sistema diottrico qualunque, per determinare il raggio emergente corrispondente ad un dato raggio incidente, od il punto coniugato ad un punto dato, o l'immagine coniugata di una figura data, si può operare così: immaginare il sistema diottrico formato dai due soli mezzi estremi separati l'uno dall'altro da una superficie sferica col vertice nel primo punto principale e col centro di curvatura nel primo punto nodale; determinare i richiesti raggio emergente o punto coniugato od immagine, quali sarebbero dati dal sistema semplice immaginato, e trasportarli poi parallelamente all'asse per un tratto uguale in grandezza ed in segno alla distanza fra i due punti principali del sistema diottrico dato.

In altri termini: un'unica superficie rifrangente costituisce un sistema in cui i due punti principali coincidono col vertice della superficie stessa ed i due nodi coincidono col centro; i raggi da esso rifratti verrebbero a coincidere con quelli dati da un sistema qualunque avente le stesse distanze focali ma coi punti principali comunque situati, quando essi raggi si trasportassero con moto parallelo all'asse per una distanza uguale in grandezza ed in segno a quella dei punti principali del secondo sistema.

41. *Osservazione relativa al caso in cui il primo e l'ultimo mezzo hanno il medesimo indice di rifrazione.* — Questo artifizio per ridurre le questioni relative ad un sistema diottrico qualunque a questioni relative ad una sola superficie rifrangente non è applicabile, senza modificazione, quando i due mezzi estremi del sistema dato hanno il medesimo indice di rifrazione [1]. Ma si vedrà [73] come in questo caso si possa sostituire al sistema dato un sistema ideale formato con tre soli mezzi, dei quali gli estremi sono identici, e nel quale si suppone che le due superficie rifrangenti ed i due piani principali coincidano con un unico piano. Un tale sistema è dotato di proprietà semplicissime che verranno studiate, e verrà denominato lente infinitamente sottile.

[1] In questo caso si potrebbe immaginare uno specchio sferico col vertice nel primo punto principale ed il centro nel punto simmetrico, rispetto al primo piano principale, al primo punto nodale; fare le costruzioni relative a questo specchio, prendere dei punti trovati i simmetrici rispetto al piano sunnominato, e trasportare il tutto parallelamente all'asse per un tratto uguale alla distanza dei due punti principali del sistema dato.

§ 3° *Determinazione dei punti cardinali.*

42. *Si possono presentare due problemi: determinare graficamente o col calcolo i punti cardinali di un sistema del quale sono dati gli elementi geometrici e fisici; e determinare sperimentalmente i punti cardinali di un sistema effettivo. Modo generale di risolvere il primo problema.* — Quello che precede ci mostra, come per istudiare gli effetti di un sistema diottrico qualsiasi basti che sieno dati i suoi punti cardinali. Importa dunque sapere in ogni caso determinare questi punti. Il problema a cui siamo così condotti si divide in due: o sono date le posizioni ed i raggi di curvatura delle superfici rifrangenti e gli indici di rifrazione dei mezzi successivi, e si vogliono con questi dati, per via geometrica o col calcolo, determinare le posizioni dei punti cardinali; ovvero è dato il sistema materialmente costrutto, e se ne vogliono determinare i punti cardinali per via sperimentale. Di queste due questioni ci occuperemo successivamente.

Per risolvere la prima questione basta, giusta quello che si disse all'articolo 32, determinare la traiettoria, attraverso il sistema, di un raggio luminoso corrispondente ad una retta di incidenza parallela all'asse; la retta d'emergenza, a cui si arriverà, taglierà l'asse nel secondo fuoco ed intersecherà la retta di incidenza in un punto del secondo piano principale, il quale riescirà così determinato. Determinando in seguito la retta di incidenza corrispondente ad una retta di emergenza parallela all'asse, si otterranno il primo fuoco ed il primo punto principale. Ora queste determinazioni si sanno eseguire applicando alle successive superficie rifrangenti le costruzioni o le formule date nel Capo I.

43. *Determinazione dei punti cardinali di un sistema composto di due altri, dei quali i punti cardinali sono conosciuti.* — Ma possiamo anche procedere altrimenti. Un sistema composto qualunque può [1] immaginarsi formato di sistemi più semplici, e questi, se occorra, possono decomporsi a loro volta in sistemi minori. Si arriverà così a sistemi di cui si conoscono i punti cardinali, e noi saremo in grado di determinare in ogni caso le posizioni dei punti cardinali del sistema proposto, se avremo imparato a risolvere il seguente

PROBLEMA. Trovare i punti cardinali di un sistema composto di due altri, dei quali i punti cardinali sono conosciuti.

Sieno F_1, F_1', P_1, P_1' (fig. 14) i fuochi ed i punti principali del primo sistema componente, F_2, F_2' P_2, P_2' i fuochi ed i punti principali del secondo sistema componente. Per trovare il primo fuoco ed il primo punto principale del sistema composto, tiriamo LL' parallela all'asse e consideriamo questa come una retta di emergenza. La traiettoria del raggio luminoso, che a questa corrisponde, si ottiene conducendo pel punto F_2 la retta $p_2 F_2 q'$, e per q' la $q'q$ parallela all'asse; quindi tirando per il punto φ, ove la $p_2 q'$ incontra il piano focale $F_1'\varphi$, la φp_1 parallela all'asse e per p_1 la $p_1 F_1$ che passa pel fuoco F_1, e finalmente conducendo la qFp parallela a $p_1 F_1$. La retta pFq così

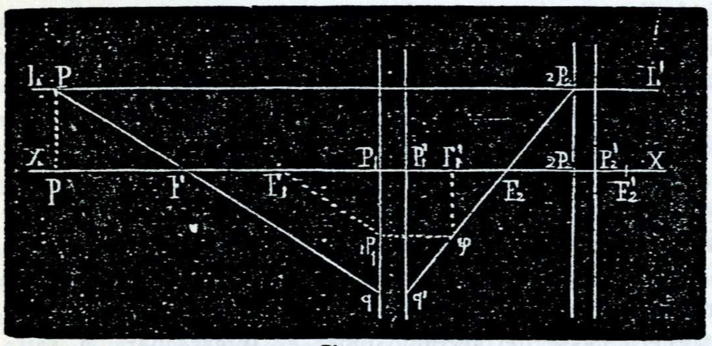

Fig. 14.

determinata è la retta di incidenza corrispondente alla retta di emergenza LL'; essa taglia l'asse in F e la LL' in p: F è il primo fuoco del sistema composto, p è un punto del primo piano principale; il piede P della perpendicolare abbassata da p sull'asse è il primo punto principale.

In modo analogo si otterrebbe il secondo fuoco ed il secondo punto principale. Designeremo questi punti rispettivamente colle lettere F' e P'.

Per calcolare la posizione dei punti F, F', P, P' abbiamo formole semplicissime alle quali arriveremo facilmente partendo dalla formola [V] e valendoci della stessa figura 14.

Diciamo a quest'uopo f_1, f_1' le distanze focali del primo sistema componente, facciamo cioè $f_1 = - F_1 P_1$, $f = P_1' F_1'$; diciamo similmente f_2 ed f_2' le due distanze focali $- F_2 P_2$ e $P_2' F_1'$ del secondo sistema componente; e rappresentiamo con

D la distanza $F_1' F_2$ tra il secondo fuoco del primo sistema ed il primo fuoco del secondo. Riteniamo pei segni le solite convenzioni, ed applichiamo la formola [V] qui trascritta

$$(x - f)\ (x' - f') = ff' \qquad [V]$$

al primo sistema componente per dedurne la posizione del punto F per mezzo di quella del punto F_2. Dobbiamo a questo fine porre nella [V] $f_1 f_1'$ invece di ff', D in luogo di $x' - f'$, ed $F_1 F$ in luogo di $x - f$. Abbiamo così

$$F_1 F = \frac{f_1 f_1'}{D} . \qquad (1)$$

Applicando similmente la [V] al secondo sistema ed ai punti F_1, F', che rispetto a questo sono coniugati, poniamo $f_2 f_2'$ in luogo di ff', $- D$ in luogo di $x - f$ ed $F_2' F'$ in luogo di $x' - f'$. Otteniamo così

$$F_2 F = - \frac{f_2 f_2'}{D} \qquad (2)$$

Queste due formole (1) e (2) ci dànno la posizione dei due fuochi F e F del sistema composto. Restano a calcolarsi le due distanze focali, che diremo f ed f'. A questo ci serve la fig. 14.

Abbiamo infatti dai triangoli simili PpF, $P_1 p_1 F_1$:

$$PF = P_1 F_1 \frac{Pp}{P_1 p_1} .$$

Ma è $Pp = P_2 p_2$, $P_1 p_1 = F_1' \varsigma$, e pei triangoli simili $F_1' \varsigma F_2$, $P_2 p_2 F_2$ si ha:

$$\frac{P_2 p_2}{F_1' \varsigma} = \frac{P_2 F_2}{F_1' F_2} ,$$

dunque:

$$PF = \frac{P_1 F_1 \times P_2 F_2}{F_1' F_2} ,$$

ossia, essendo $PF = f$, $P_1 F_1 = f_1$, $P_2 F_2 = f_2$, $F_1' F_2 = D$.

$$f = \frac{f_1 f_2}{D} . \qquad (3)$$

Una formola analoga e collo stesso procedimento si troverebbe per f'. Alla medesima possiamo pure arrivare partendo dalla (3) e ricordando che se n, n_1, n' sono gli indici di rifrazione del primo mezzo, del mezzo frapposto ai due sistemi e dell' ultimo mezzo, si ha

$$f' = -\frac{n'}{n} f, \qquad f_1' = -\frac{n_1}{n} f_1, \qquad f_2' = -\frac{n'}{n_1} f_2.$$

Abbiamo infatti:

$$f' = -\frac{n'}{n} f = -\frac{\frac{n_1}{n} f_1 \times \frac{n'}{n_1} f_2}{D}$$

ossia

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{D} \qquad (4)$$

Le formole (1), (2), (3) e (4) bastano alla soluzione del problema che ci siamo proposto.

44. *Altra soluzione del medesimo problema.* — Il medesimo problema si può risolvere con una costruzione grafica, che

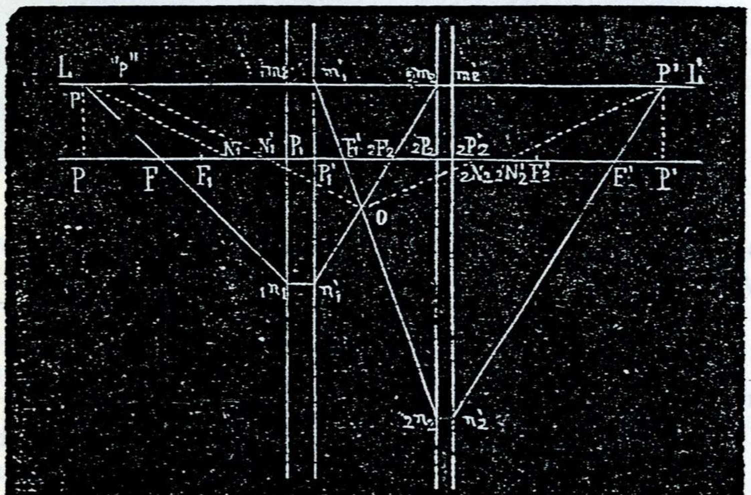

Fig. 15.

spesso riesce più semplice di quella di cui ci siamo serviti testè, e della quale faremo uso nelle applicazioni.

Sieno (fig. 15) $F_1 F_1'$, $P_1 P_1'$, $N_1 N_1'$, i punti cardinali del primo sistema componente, $F_2 F_2'$, $P_2 P_2'$, $N_2 N_2'$, i punti cardinali del secondo sistema. Ad una distanza arbitraria conduciamo una retta LL' parallela all'asse, e consideriamola prima come una retta d'incidenza, poi come una retta di emergenza. Nella prima ipotesi le corrisponde, nel mezzo comune ai due sistemi, la retta $m_1'F_1'n_2$; nella seconda ipotesi la retta $n_1'F_2m_2$. Queste due rette si intersecano in un punto o; dico che questo punto è, rispetto al primo sistema, coniugato al punto p ove la LL' interseca il primo piano principale del sistema complesso, ed è, rispetto al secondo sistema, coniugato col punto p' ove la LL' interseca il secondo piano principale del complesso. Infatti i punti p e p', tra loro coniugati, debbono essere coniugati ad un medesimo punto nel mezzo comune ai due sistemi. Ma il punto coniugato a p, rispetto al primo sistema, deve trovarsi sul raggio emergente $m_1'n_2$ corrispondente ad LL', ed il punto coniugato a p' rispetto al secondo sistema componente deve trovarsi sul raggio incidente $n_1'm_2$ corrispondente alla retta d'emergenza LL'; dunque il punto coniugato comune a p ed a p' deve coincidere con o. Valendosi di questa osservazione possiamo dedurre i punti p e p' dal punto o. Per trovare p conduciamo ON_1', e da N_1 tiriamo una parallela alla ON_1'; questa taglia la LL' nel punto p cercato. La perpendicolare pP all'asse dà il primo punto principale P. Con costruzione identica si troverebbero p' e P',

Tiriamo $n_1'n_1$, parallela all'asse, e congiungiamo p con n_1. I punti p ed n_1, essendo rispettivamente coniugati coi punti O ed n_1', le rette pn, ed $n_1'm_2$ si corrispondono; perciò pn_1 è la retta d'incidenza corrispondente, rispetto all'intiero sistema, alla retta di emergenza LL', ed il punto F è il primo fuoco del sistema. Con costruzione identica si determinerebbe il secondo fuoco.

Prolunghiamo la ON_1' fino in p'' ove essa interseca la LL'; le rette Op'', Om_1', Om_2 determinano sulle due parallele PP' ed LL' segmenti proporzionali. Abbiamo quindi la proporzione

$$\frac{m_1'\,p''}{m_1'\,m_2} = \frac{F_1'\,N_1'}{F_1'\,F_2};$$

da cui ricaviamo, osservando che $m_1'\,p'' = m_1\,p$,

$$m_1\,p = \frac{F_1'\,N_1' \times m_1'\,m_2}{F_1'\,F_2} \tag{1}$$

Inoltre i triangoli simili pPF, $n_1\,m_1p$ dànno la proporzione

$$\frac{PF}{m_1\,p} = \frac{p\,P}{n_1\,m_1} = \frac{m_2\,P_2}{n_1'\,m_1'},$$

ed i triangoli simili $m_2 P_2 F_2$, $n_1' m_1' m_2$ dànno la proporzione

$$\frac{m_2 P_2}{n_1' m_1'} = \frac{P_2 F_2}{m_1' m_2} ;$$

le quali due proporzioni dànno

$$P F = \frac{m_1 p \times P_2 F_2}{m_1' m_2}$$

Sostituendo in questa espressione il valore di $m_1 p$ dato dalla (α) abbiamo finalmente:

$$P F = \frac{F_1 N_1' \times P_2 F_2}{F_1' F_2} . \qquad (\beta)$$

Diciamo Δ la distanza $P_1' P_2$, compresa tra il secondo piano principale del primo sistema ed il primo piano principale del secondo sistema, ed osserviamo che $m_1 p = P_1 P$, che $F_1' N_1' = P_1 F_1 = f_1$, che $P_2 F_2 = f_2$ e che $F_1' F_2 = D$; le formole (α) e (β) si scrivono:

$$P_1 P = \frac{f_1 \Delta}{D} , \qquad (5)$$

$$f = \frac{f_1 f_2}{D} . \qquad (6)$$

Nella stessa maniera si troverebbe

$$P_2' P' = \frac{f_2' \Delta}{D} , \qquad (7)$$

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{D} . \qquad (8)$$

Le (6) ed (8) sono identiche alle (3) e (4) trovate per altra via nell' articolo precedente; le (5) e (7) si potrebbero dedurre facilmente dalle (1) e (2) osservando che, avuto riguardo alla convenzione dei segni, è

$$D = \Delta + f_2 - f_1' .$$

Viceversa, quelle si potrebbero dedurre da queste.

Portando il valore di D, ora scritto, nelle (5), (6), (7) ed (8), queste diventano:

$$P_1 P = \frac{f_1 \Delta}{\Delta + f_2 - f_1'}, \qquad (5')$$

$$f = \frac{f_1 f_2}{\Delta + f_2 - f_1'} \qquad (6')$$

$$P_2' P' = \frac{f_2' \Delta}{\Delta + f_2 - f_1'}, \qquad (7')$$

$$f' = -\frac{f_1' f_2}{\Delta + f_2 - f_1'}, \qquad (8')$$

45. *Determinazione sperimentale dei punti cardinali di un sistema dato.* — Veniamo alla seconda questione, e vediamo, come, dato un sistema diottrico effettivamente costrutto, se ne possano determinare sperimentalmente i punti cardinali.

Un modo di fare questa determinazione, il quale si presenta da sè, è il seguente. Si misurino le distanze di un oggetto piano e della sua immagine da una delle superfici estreme del sistema o da un altro piano perpendicolare all'asse e solidario col sistema, e le grandezze di due dimensioni omologhe dell'oggetto e dell'immagine. Se diconsi d e d' le due distanze nominate ed h, h' le distanze incognite dei due piani principali dal piano fisso sopra nominato, le differenze $d - h$, $d' - h'$ equivarranno alle distanze che nelle equazioni del paragrafo precedente abbiamo rappresentate con x ed x'. D'altra parte le due dimensioni omologhe misurate saranno proporzionali alle grandezze che nel paragrafo precedente rappresentavamo con y ed y'. Dunque le equazioni [I'] e [II''] si potranno scrivere

$$\frac{f}{d - h} + \frac{f'}{d' - h'} = 1,$$

$$f \frac{y}{d - h} + f' \frac{y'}{d' - h'} = 0.$$

Ripetendo la stessa misura dopo di avere spostato l'oggetto od il sistema diottrico, si otterranno altri valori d_1, d_1', y_1, y_1', che dovranno soddisfare alle due equazioni

$$\frac{f}{d_1 - h} + \frac{f'}{d_1' - h'} = 1$$

$$f \frac{y_1}{d_1 - h} + f' \frac{y_1'}{d_1' - h'} = 0.$$

Si hanno così quattro equazioni, che bastano alla determinazione delle quattro incognite f, f', h, h'.

Il metodo è generale, ma per porlo in pratica, occorrono avvertenze: dobbiamo distinguere due casi.

Primo caso: il sistema è convergente. Se questo caso si verifichi si riconosce osservando se il sistema dà di un oggetto lontano una immagine reale e rovesciata; allora il metodo si applica direttamente. L'oggetto può essere qualunque: un disco luminoso, una scala divisa trasparente. L'immagine può riceversi direttamente su di uno schermo, se si opera nel buio e si illumina fortemente l'oggetto; ma meglio si osserva con un microscopio semplice [80] di corto fuoco, nel piano focale del quale vi sia un micrometro, ossia una lastrina trasparente con una divisione in parti uguali.

Può anche servire a questa operazione il *focometro* di Silbermann. L'apparecchio è fatto così. Lungo un regolo orizzontale diviso in parti metriche, può scorrere un sistema verticale sul quale si può fermare, coll'asse orizzontale, il sistema diottrico dato. Un altro sostegno scorrevole porta un anello, la metà inferiore del quale è occupata da carta tesa; sul diametro, dal quale questa carta è limitata superiormente, è tracciata una divisione in parti uguali. Un anello identico a questo sta dall'altra parte, ed un microscopio semplice serve ad osservare la divisione tracciata sul diametro di questo e l'immagine della divisione del diametro dell'altro anello, data dal sistema diottrico, la quale, regolando le distanze, si può far cadere nel medesimo piano. Si pone il sistema diottrico in una posizione arbitraria, e si fa scorrere l'anello mobile finchè col microscopio, disposto per vedere nel piano dell'altro anello, si vede nitidamente l'immagine; si misura sulla scala fissa la lunghezza occupata da un determinato numero di divisioni della immagine. Si porta allora il sistema in un'altra posizione, e si ripete l'esperimento. I valori di d e di d' sono letti sul regolo orizzontale, i valori di y e di y_1 sono letti sulla immagine rovesciata della scala del disco mobile, ed i valori di y' e di y_1' sono letti direttamente sulla scala del disco fisso.

Secondo caso: il sistema è divergente. In questo caso si accoppia al sistema dato un sistema convergente, del quale si conoscano i punti cardinali, e tale che il sistema complesso risultante sia convergente. Poi si opera come sopra. Dalla posizione dei punti cardinali del sistema complesso, così trovata, e da quella data del sistema convergente ausiliario si deduce col calcolo, o con una costruzione, quella dei punti cardinali del sistema divergente dato.

Spesso i punti principali del sistema proposto hanno posizioni facilmente determinabili col calcolo, e tali, che gli errori, che in questo calcolo si possono commettere, sono trascurabili a fronte delle distanze focali; ciò succede, ad esempio, nelle lenti semplici di piccolo spessore e di grande distanza focale. Basta allora determinare sperimentalmente la posizione dei fuochi. Ora per questa determinazione vi sono procedimenti semplicissimi; ne citeremo due.

Il primo non è esattissimo, ma ha il merito di potersi praticare con apparecchi che ognuno può prepararsi da sè. Consiste nel ricevere sul sistema diottrico, in direzione parallela all'asse, i raggi diretti del sole, e nel cercare al di là del sistema il punto ove il disco illuminato, che il fascio emergente disegna sopra uno schermo bianco, ha il diametro minimo. Per ottenere da questo procedimento tutta la precisione di cui esso è capace, conviene prepararsi una tavoletta sulla quale sia infisso ad angolo retto un regolo portante una scala metrica, esporla al sole così, che il regolo proietti ombra, e fare scorrere il sistema diottrico lungo il regolo fino ad ottenere sulla tavoletta la minima immagine. Sul regolo si legge immediatamente la distanza di questa immagine da qualche punto solidario col sistema.

L'altro metodo richiede l'uso d'un cannocchiale, ma è, per compenso, capace di maggiore precisione: è il metodo adoperato dal Maskeline per la misura della distanza focale degli obbiettivi dei telescopi. Si vedrà [102] che i cannocchiali sono strumenti atti a permettere la visione degli oggetti lontanissimi, così lontani, che i pennelli lucidi mandati dai singoli loro punti sull'obbiettivo si possono considerare come cilindrici. Se un cannocchiale è aggiustato per vedere un oggetto lontanissimo e se con un artifizio qualunque si fa che un oggetto posto a piccola distanza si veda tuttavia nitidamente col cannocchiale, si è certi che con quell'artifizio si sono resi cilindrici i pennelli lucidi prima che essi arrivassero allo strumento. Si disponga adunque un cannocchiale così, che col suo mezzo si veda distintamente un oggetto lontanissimo; poi gli si ponga davanti, coll'asse sensibilmente parallelo al suo, il sistema diottrico, di cui si vuole determinare uno dei fuochi. Gli oggetti lontani allora non si vedranno più attraverso al cannocchiale, ma si vedranno nitidamente soltanto quelli situati nel piano focale del sistema diottrico. Si ponga davanti al sistema uno scritto con caratteri minuti, od un disegno con tratti fini, o come fu proposto da FRAUNHOFER, un sistema di due fili sottilissimi in croce, e si cerchi quella posizione, per cui col cannocchiale esso si vede colla massima nitidezza: quella posizione coincide col piano focale.

Se il sistema da studiarsi è divergente gli si unisce un sistema convergente tale, che il complesso risulti convergente, e si opera come sopra.

Nei laboratori di fisica, ove si abbia mezzo di ottenere un fascio cilindrico di luce omogenea ed intensa, si possono deter-

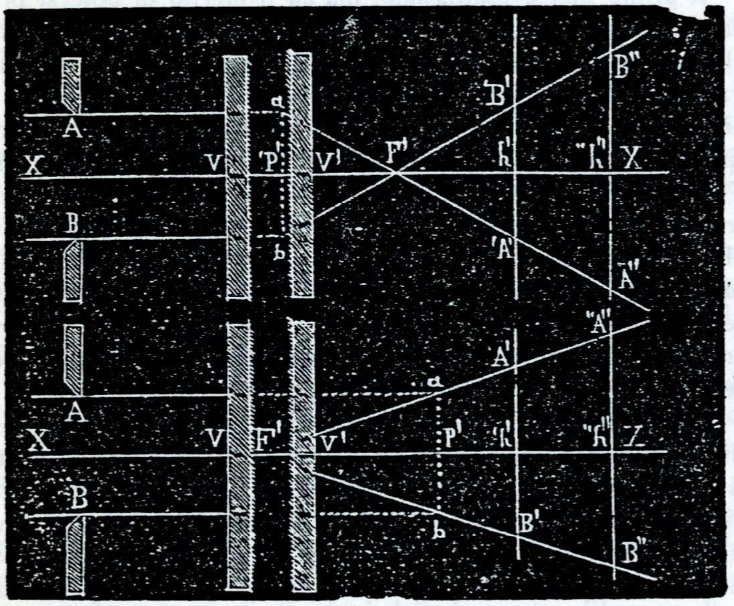

Fig. 16.

minare i punti cardinali di un sistema diottrico qualunque col procedimento semplicissimo seguente.

Si collochi il sistema dato VV' (fig. 16) sul tragitto di un fascio cilindrico di raggi paralleli di luce omogenea, avente un diametro AB misurato. Facendo passeggiare dall' altra banda del sistema, uno schermo, si riconoscerà subito se il secondo fuoco è esterno (fig. 16_a) od interno (fig. 16_b), e se ne potrà determinare la posizione F', nel primo caso direttamente, cercando quella posizione dello schermo per cui è minima la sezione da esso fatta nel cono dei raggi emergenti, in ogni caso poi misurando per due posizioni $A'h'B'$, $A''h''B''$ dello schermo i diametri $A'B'$, $A''B''$ delle sezioni corrispondenti del cono lucido e calcolando poi la distanza $h'F'$ colla proporzione

$$\frac{h'F'}{h''h'} = \frac{A'B'}{A''B'' - A'B'}.$$

Avuto il fuoco F' si determina subito la posizione del punto principale P', poichè i due triangoli simili $ab\,F'$, $A'B'F'$ danno

$$F'P' = \frac{F'h' \times AB}{A'B'}.$$

Capovolgendo l'apparecchio ottico, e ripetendo l'operazione, si ottengono il primo fuoco F ed il primo punto principale P. Se l'operazione è stata ben fatta, deve risultare $FP = P'F'$.

§ 4° *Sistemi telescopici.*

46. *Definizione. — Teorema: se un sistema è telescopico, è decomponibile in due sistemi non telescopici tali che il primo fuoco del secondo coincida col secondo fuoco del primo, o è formato da superficie dividenti tutte piane.* — I punti cardinali possono non esistere.

Così se il sistema diottrico è decomponibile in due sistemi minori A e B, tali che il secondo fuoco di A coincida col primo fuoco di B, ogni raggio incidente, parallelo all'asse, emerge dal sistema A secondo una retta passante pel primo fuoco di B e quindi emerge dal sistema complesso secondo una parallela all'asse. I fuochi adunque ed i punti principali [32] non esistono, e con questi cessano di esistere i punti nodali [35]. Lo stesso dicono le formole (1), (2), (3) e (4) del paragrafo precedente, le quali per $D = 0$ danno

$$F_1 F = F_2' F' = f = f' = \infty.$$

Così pure se tutti i sistemi di due soli mezzi, di cui è formato il sistema, fossero nel caso studiato all'articolo 24, se cioè tutte le superficie dividenti fossero piane, ad un raggio incidente parallelo all'asse corrisponderebbe un raggio emergente pure parallelo all'asse, ed i punti cardinali andrebbero all'infinito.

In entrambi questi casi ad ogni fascio di raggi incidenti paralleli corrisponde un fascio di raggi emergenti paralleli. Quando un sistema diottrico gode di questa proprietà, che ad ogni fascio cilindrico di raggi incidenti corrisponda un fascio cilindrico di raggi emergenti, noi lo diciamo *telescopico*. Si comprenderà la ragione di questa denominazione quando si tratterà delle applicazioni.

È facile dimostrare che i due casi or ora accennati sono i soli nei quali un sistema possa essere telescopico; dimostrare cioè, che se un sistema è telescopico, si verifica certamente una di queste due condizioni: o che il sistema si può sempre scomporre in due sistemi non telescopici tali che il primo fuoco del secondo coincida col secondo fuoco del primo; o che tutte le superficie dividenti sono piane.

Per convincersi di ciò cominciamo a notare che comunque un sistema telescopico s'immagini decomposto in due sistemi minori A e B, questi non possono essere che o tutti due non telescopici, ed allora il primo fuoco del secondo coincide col secondo fuoco del primo, o tutti e due telescopici.

Infatti, se per esempio il sistema A fosse telescopico, e l'altro non lo fosse, raggi incidenti paralleli emergerebbero da A ancora paralleli, epperò emergerebbero da B secondo rette incrociantisi in un punto del secondo piano focale di B stesso, il quale sarebbe così anche secondo piano focale pel sistema complesso. Esistendo un piano focale esisterebbe anche l'altro [34] ed il sistema non sarebbe telescopico.

Ciò premesso, supponiamo dato un sistema telescopico qualunque. Questo si può immaginare formato da due minori A e B, i quali possono essere entrambi non telescopici od entrambi telescopici. Nel primo caso il secondo fuoco di A ed il primo di B debbono coincidere, altrimenti il sistema totale avrebbe fuochi determinabili colle formole (1) e (2) del paragrafo precedente, e non sarebbe telescopico. Nel secondo caso, se uno dei due sistemi, per esempio B, non è formato da una semplice superficie rifrangente piana, esso si può a sua volta immaginare scomposto in due A_1 e B_1, entrambi non telescopici ed a fuochi coincidenti, od entrambi telescopici. Nel primo caso A ed A_1 formerebbero un sistema non telescopico col secondo fuoco nel primo di B_1 (come emerge dall'osservazione precedente), ed il sistema si potrebbe immaginare formato da quello e da B_1 stesso. Nel secondo caso, se l'uno dei due sistemi A_1 e B_1 ha più di una superficie dividente, si può a sua volta decomporre. E se così procedendo non si arriverà a due sistemi non telescopici a fuochi coincidenti, si finirà per decomporre il sistema in sistemi semplici formati da una sola superficie rifrangente e telescopici, cioè formati da una superficie rifrangente piana, come si voleva dimostrare.

Ai sistemi telescopici non sono applicabili le costruzioni e le formole del § 2°. Ma essi godono di proprietà rimarchevoli, delle quali alcune formeranno l'oggetto di questo §, ed altre verranno studiate parlando delle applicazioni.

47. *Caso in cui non tutte le superficie dividenti sono piane. — Elongazione.* — Cominciamo dal caso più generale e supponiamo che non tutte le superficie dividenti del sistema tele-

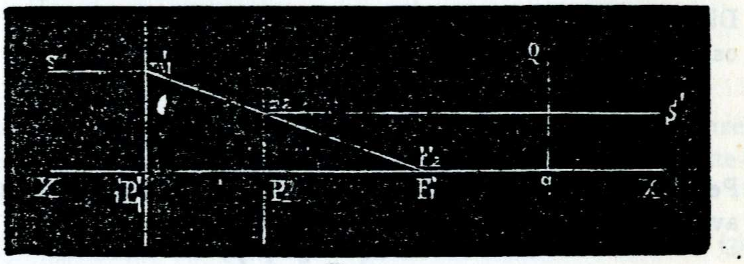

Fig. 17.

scopico proposto sieno piane. Allora possiamo considerare il sistema come risultante da due sistemi non telescopici A e B, tali che il primo fuoco di B coincida col secondo di A [46]. Diciamo f_1, f_1' le due distanze focali del sistema A, f_2 ed f_2' le distanze focali del sistema B, e per fissare le idee supponiamo che sieno (fig. 17) P_1' e P_2 il secondo punto principale del sistema A ed il primo punto principale del sistema B, e che il punto segnato $\frac{F_2}{F_1'}$ sia quello in cui coincidono il secondo fuoco del primo sistema ed il primo fuoco del secondo.

Prendiamo a considerare un punto luminoso, le cui distanze dal primo piano principale del sistema A e dall'asse sieno x ed y, e cerchiamo il suo punto coniugato rispetto a tutto il sistema, punto di cui diremo x' ed y' le distanze dal secondo piano principale del sistema B e dall'asse. A questo scopo dovremo applicare successivamente ai sistemi non telescopici *A* e *B* le formole [V] e [II'] del paragrafo 2° qui trascritte:

$$(x-f)\ (x'-f')=ff' \qquad [V]$$

$$\frac{y}{y'}=\frac{f-x}{f}\,, \qquad \frac{y'}{y}=\frac{f'-x'}{f'} \qquad [II']$$

Sia *Q* il punto coniugato al punto dato rispetto al sistema *A*, e sia *Qq* perpendicolare all'asse; per applicare la formola [V] al sistema *A*, dovremo invece di $x'-f'$ porvi $P_1'q - P_1'F_1'$, ossia $F_1'q$; e per applicare la formola stessa al sistema *B*, dovremo, in luogo di $x-f$, porvi $P_2 q - P_2 F_2$, ossia $F_2 q$. Avremo così:

$$\text{pel sistema } A \qquad (x-f_1)\ F_1 q = f_1 f_1'\,,$$
$$\text{e pel sistema } B \qquad F_2 q\,(x'-f_2') = f_2 f_2'\,.$$

Dividendo la seconda di queste uguaglianze per la prima ed osservando che $F_2 q = F_1' q$, si ottiene:

$$x'-f_2' = (x-f_1)\frac{f_2 f_2'}{f_1 f_1'}\,. \qquad [I]$$

Per un altro punto, pel quale x, x' avessero i valori ξ, ξ', si avrebbe similmente

$$\xi'-f_2' = (\xi-f_1)\frac{f_2 f_2'}{f_1 f_1'}\,.$$

Da questa uguaglianza sottraendo la precedente ricavasi

$$\xi'-x' = (\xi-x)\frac{f_2 f_2'}{f_1 f_1'}\,,$$

e questa dimostra che

In ogni sistema telescopico la distanza fra due piani coniugati con due altri piani sta alla distanza fra questi in un rapporto costante.

Noi denomineremo questo rapporto costante *elongazione* del sistema telescopico. Rappresentandola con e, abbiamo

$$e=\frac{f_2 f_2'}{f_1 f_1'}\,. \qquad (2)$$

I prodotti $f_1 f_1'$ ed $f_2 f_2'$ essendo sempre entrambi negativi [34], il valore dell'elongazione è sempre positivo. Ciò equivale a dire, che in un sistema telescopico, se un punto luminoso si sposta parallelamente all'asse in un dato verso, il suo punto coniugato si muove nel medesimo verso.

48. *Ingrandimento lineare.* — Al punto luminoso or ora considerato applichiamo adesso le formole [II']; e precisamente pel sistema A usiamo la seconda e pel sistema B usiamo la prima di queste uguaglianze. Per applicare la seconda formola al sistema A dobbiamo porvi f_1' in luogo di f', $q\,F_1'$ in luogo di $f' - x'$, e $q\,Q$ in luogo di y' ed otteniamo:

$$\frac{q\,Q}{y} = \frac{q\,F_1'}{f_1'}.$$

Similmente per applicare la prima formola al sistema B, dobbiamo scrivervi f_2 in luogo di f, qF_2 in luogo di $f - x$, e qQ in luogo di y, talchè otteniamo:

$$\frac{q\,Q}{y'} = \frac{q\,F_2}{f_2}.$$

Dividendo membro a membro la prima di queste eguaglianze per la seconda, e ricordando ancora che $q\,F_1' = q\,F_2$, otteniamo:

$$\frac{y'}{y} = \frac{f_2}{f_1}. \tag{3}$$

In virtù del teorema dimostrato al numero 31, questo rapporto ha un medesimo valore per tutti i punti di due piani coniugati e rappresenta il rapporto di similitudine di due immagini coniugate poste in quei piani: la formola (3) dice che questo rapporto rimane invariato comunque si scelgano i piani coniugati che contengono le immagini.

Questo rapporto costante fra le linee omologhe di due immagini coniugate poste in piani perpendicolari all'asse dicesi *ingrandimento lineare* del sistema telescopico.

Rappresentando l'ingrandimento lineare con l, abbiamo

$$l = \frac{f_2}{f_1'}. \tag{4}$$

Questo teorema e questa formola si possono dimostrare direttamente così. Sia $s\,m_1'$ (fig. 17) una retta d'incidenza parallela all'asse; rispetto al primo sistema le corrisponde la retta d'emergenza $m_1' F_1'$, ed a questa corrisponde, rispetto al secondo sistema, la retta d'emergenza $m_2 s'$ parallela all'asse. Tutti i punti della retta $s m_1'$ hanno i loro coniugati sulla $m_2 s'$, dunque qualunque sia il punto della retta $s m_1'$ che si considera come punto luminoso, si ha

$$l = \frac{y'}{y} = \frac{P_2 m_2}{P_1' m_1'}.$$

Ma i due triangoli simili $P_1' m_1' F_1'$ e $P_2 m_2 F_2$ dànno

$$\frac{P_2 m_2}{P_1' m_1'} = \frac{P_2 F_2}{P_1' F_1'} = \frac{f_2}{f_1'},$$

dunque

$$l = \frac{f_2}{f_1'}.$$

Secondochè l'ingrandimento lineare è positivo o negativo, l'immagine coniugata ad una figura data è diritta o rovesciata. La (4) mostra che l è positivo o negativo secondochè i due sistemi non telescopici, nei quali il sistema telescopico si è immaginato scomposto, sono l'uno convergente e l'altro divergente, oppure sono entrambi convergenti o divergenti [34]. Dunque un sistema telescopico formato con due sistemi non telescopici dei quali l'uno sia convergente e l'altro divergente dà immagini diritte; un sistema telescopico formato con due sistemi non telescopici entrambi convergenti od entrambi divergenti dà immagini rovesciate.

49. *Il rapporto del diametro di un pennello cilindrico emergente al diametro del corrispondente pennello cilindrico incidente è uguale all'ingrandimento lineare.* — Si considerino un fascio cilindrico di rette di incidenza ed il fascio cilindrico delle corrispondenti rette di emergenza; dico che il rapporto del diametro di questo al diametro di quello è uguale all'ingrandimento lineare del sistema.

Supponiamo infatti che gli assi dei due cilindri siano nel piano della figura (fig. 18) e che sieno $s s$, $\sigma \sigma$ ed $s' s'$, $\sigma' \sigma'$ le intersezioni dei cilindri stessi col detto piano; $s' s'$, $\sigma' \sigma'$ saranno le rette di emergenza corrispondenti alle rette di incidenza $s s$ e $\sigma \sigma$. Se inoltre supponiamo che Q e Q' siano due piani coniugati, i punti A' e B' intersezioni del piano Q' colle rette $s' s'$, $\sigma' \sigma'$ saranno i coniugati dei punti A e B, intersezioni di $s\, s$, $\sigma\, \sigma$ col piano Q. In virtù del teorema precedente, il rapporto $\frac{A' B'}{A B}$ sarà costante ed uguale all' ingrandimento lineare.

Ma per la piccolezza degli angoli che gli assi dei due cilindri fanno coll' asse del sistema, le lunghezze $A\, B$, $A'\, B$ si

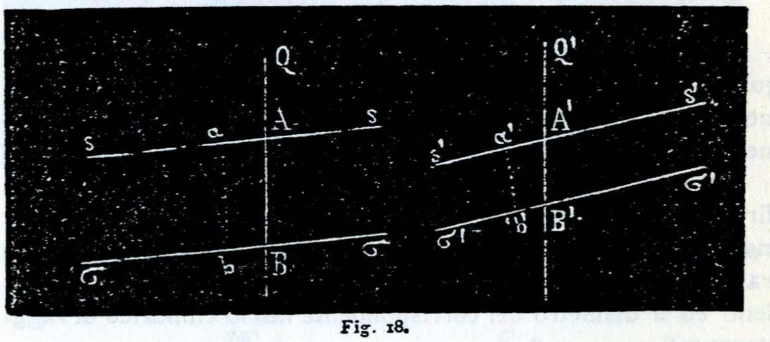

Fig. 18.

confondono colle grandezze $a\, b$, $a'\, b'$ dei diametri dei cilindri stessi, dunque il rapporto $\frac{a'\, b'}{a\, b}$ vale l' ingrandimento lineare.

50. *Ingrandimento angolare.* — La formola [III] del numero 33 è applicabile ai sistemi telescopici, come ai non telescopici, perchè nel dimostrarla non si ebbe bisogno di supporre l'esistenza dei punti cardinali. Dicendo quindi ω l'angolo di due rette d' incidenza ed ω' l'angolo compreso fra le due corrispondenti rette di emergenza, abbiamo anche quì:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{n}{n'} \frac{y}{y'}.$$

Avendo riguardo alle formole (3) e (4), questa si può scrivere:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{n}{n'} \frac{f_1'}{f_2}, \quad \text{oppure} \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{n}{n'} \frac{1}{l}.$$

Dunque in ogni sistema telescopico il rapporto dell'angolo formato da due raggi emergenti all' angolo dei corrispondenti raggi incidenti è costante.

Due cilindri di raggi luminosi i quali arrivino al sistema diottrico facendo tra loro un angolo escono dal medesimo ancora come cilindri, ma facendo tra loro un angolo che sta al primo in un rapporto costante.

Questo rapporto costante dicesi l'*ingrandimento angolare* del sistema telescopico.

Rappresentandolo colla lettera m, abbiamo

$$m = \frac{n}{n'} \frac{f_1'}{f_2}, \quad \text{oppure} \quad m = \frac{n}{n'} \frac{1}{l}. \tag{5}$$

La seconda di queste formole dice che l'ingrandimento angolare è uguale al prodotto del valore reciproco dell'ingrandimento lineare pel rapporto dell'indice di rifrazione del primo mezzo all'indice di rifrazione dell'ultimo mezzo.

In virtù della proposizione del numero 49 possiamo anche dire che l'ingrandimento angolare è uguale al prodotto fra gli indici di rifrazione del primo e dell'ultimo mezzo pel rapporto fra il diametro di un qualunque fascio cilindrico di raggi incidenti ed il diametro del corrispondente fascio cilindrico di raggi emergenti.

Alla formola (5) si può anche dare un'altra forma. Se si denomina n_1 l'indice di rifrazione del mezzo compreso fra i due sistemi A e B, si ha [34]

$$f_1' = -\frac{n_1}{n} f_1$$

ed

$$f_2 = -\frac{n_1}{n'} f_2',$$

i quali valori, portati nella (5), dànno

$$m = \frac{f_1}{f_2'}. \tag{5'}$$

Lo stesso può dimostrarsi direttamente così. Sieno (fig. 19) N_1 N_1' i punti nodali del sistema A ed N_2 N_2' i punti nodali del sistema B; e sia F_1' F_2 φ il piano focale comune ai due sistemi. Per avere la direzione del raggio emergente corrispondente ad un raggio incidente parallelo ad $S\,N_1$, non si ha che da tracciare $N_1\,\varphi$ parallela ad $S N_1$, condurre $\varphi\,N_2$ e per N_2' tirare la $N_2'\,S'$ parallela alla $\varphi\,N_2$; tutti i raggi incidenti paralleli ad $S\,N_1$ emergeranno paralleli alla $N_2'\,S'$. Ora se con ω ed ω' si rappresentano gli angoli che i raggi incidenti ed i raggi emergenti fanno coll'asse del sistema, e se si ricorda [2]

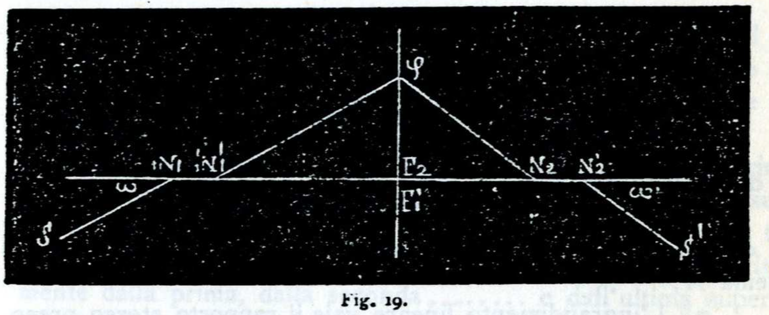

Fig. 19.

che per la loro piccolezza questi angoli si possono scambiare colle loro tangenti, si ha

$$\omega = \frac{F_2\,\varphi}{F_1'\,N_1'}\,, \qquad \omega' = \frac{F_2\,\varphi}{F_2\,N_2}\,,$$

donde ricavasi:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{F_1'\,N_1'}{F_2\,N_2}\,.$$

Ma [35] si ha

$$F_1'\,N_1' = f_1\,, \qquad F_2\,N_2 = f_2'\,,$$

dunque

$$m = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{f_1}{f_2'}\,.$$

come sopra.

51. *Caso in cui il primo e l'ultimo mezzo hanno il medesimo indice di rifrazione.* — Quando il primo e l'ultimo mezzo rifrangente hanno il medesimo indice di rifrazione, come accade negli ordinari strumenti diottrici dove i due mezzi estremi sono costituiti dall'aria, si ha

$$\frac{n}{n'} = 1\,, \qquad f_1' = -f_1\,, \qquad f_2' = -f_2\,,$$

e le formole (2), (4), (5') si riducono alle seguenti:

$$e=\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2,$$

$$l=-\frac{f_2}{f_1},$$

$$m=-\frac{f_1}{f_2}=\frac{1}{l}.$$

e dimostrano che

1.° L'elongazione è uguale al quadrato del rapporto tra la distanza focale del sistema B e la distanza focale del sistema A;

2.° L'ingrandimento lineare vale il rapporto stesso preso col segno cambiato;

3.° Che l'ingrandimento angolare è uguale al valor reciproco dell'ingrandimento lineare, ed è uguale a meno il rapporto della distanza focale del sistema A alla distanza focale del sistema B.

Vedesi da ciò che se m è un ingrandimento, l è in realtà un impicciolimento.

Le proposizioni dimostrate negli articoli precedenti [49] e [50], relativamente alla dipendenza tra gli ingrandimenti lineare ed angolare ed i diametri dei cilindri di raggi lucidi incidenti ed emergenti, applicate al caso di un sistema telescopico a mezzi estremi identici si possono enunciare semplicemente così:

L'ingrandimento lineare è uguale in valore assoluto al rapporto fra il diametro di un fascio cilindrico qualunque di raggi luminosi emergenti ed il diametro del corrispondente fascio cilindrico di raggi incidenti.

L'ingrandimento angolare è uguale in valore assoluto al rapporto tra il diametro di un fascio cilindrico qualunque di raggi incidenti ed il diametro del corrispondente fascio cilindrico di raggi emergenti.

52. *Caso in cui tutte le superficie dividenti sono piane.* — Proprietà analoghe a quelle ora studiate hanno i sistemi telescopici della seconda specie, i sistemi, cioè, nei quali tutte le superficie dividenti sono piane e perpendicolari ad un medesimo asse. Per vederlo non abbiamo che da applicare alle successive superficie dividenti i teoremi e le formole del numero 24.

La prima delle dette formole, la

$$\frac{x}{x'} = \frac{n}{n'},$$

applicata successivamente a tutte le superficie dividenti del sistema basta a determinare in ogni caso il piano coniugato ad un piano dato. Avuta così una coppia di piani coniugati, se ne ottiene facilmente un'altra qualunque.

Sia infatti ξ la distanza di un nuovo piano dato dalla prima superficie del sistema, e $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \ldots\ldots \xi_i, \xi'$ le distanze dei suoi piani coniugati rispetto alla prima, alle due prime, alle tre prime superficie, ecc., e rispetto a tutto il sistema rispettivamente dalla prima, dalla seconda .... e dall'ultima superficie. Avremo successivamente

$$\frac{\xi - x}{\xi_1 - x_1} = \frac{n}{n_1}, \quad \frac{\xi_1 - x_1}{\xi_2 - x_2} = \frac{n_1}{n_2} \ldots\ldots \frac{\xi_i - x_i}{\xi' - x'} = \frac{n_i}{n'},$$

e queste uguaglianze, moltiplicate tra loro membro a membro, dànno

$$\frac{\xi - x}{\xi' - x'} = \frac{n}{n'}.$$

Dunque, come pei sistemi telescopici già studiati [47], vale il teorema che:

Il rapporto fra la distanza di due piani coniugati con due altri e la distanza di questi ultimi è costante.

Questo rapporto costante, ossia l'elongazione del sistema, nel caso presente, è uguale al rapporto fra gli indici di rifrazione dell'ultimo mezzo e del primo. Rappresentando l'elongazione con e, abbiamo

$$e = \frac{n}{n'}.$$

Il secondo teorema del numero 24 ci conduce immediatamente a conchiudere che: in un sistema diottrico le cui superficie dividenti sieno tutte piane, due immagini coniugate sono sempre uguali.

Valendoci anche qui delle denominazioni dianzi stabilite, diremo che un sistema diottrico, le cui superficie dividenti sieno tutte piane, ha un ingrandimento lineare costante ed uguale all'unità.

Applicando finalmente il terzo teorema dell'articolo 24 alle successive superficie del sistema, e dicendo ω l'angolo di due raggi incidenti, ω_1 l'angolo dei corrispondenti raggi rifratti nel secondo mezzo, ω_2 l'angolo dei raggi rifratti nel terzo mezzo, ecc..... ed ω' l'angolo de' corrispondenti raggi emergenti, abbiamo

$$\frac{\omega}{\omega_1}=\frac{n_1}{n}, \quad \frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{n_2}{n_1}, \ldots \frac{\omega_i}{\omega'}=\frac{n'}{n_i},$$

le quali uguaglianze, moltiplicate membro a membro, dànno;

$$\frac{\omega}{\omega'}=\frac{n'}{n}.$$

Dunque, come pegli altri sistemi telescopici, l'angolo di due rette d'emergenza sta all'angolo delle corrispondenti rette d'incidenza in un rapporto costante.

Questo rapporto è qui uguale al rapporto inverso degli indici di rifrazione de' mezzi estremi. Conservando la denominazione dianzi stabilita, diremo, che l'ingrandimento angolare del sistema è uguale al rapporto dell'indice di rifrazione del primo mezzo all'indice di rifrazione dell'ultimo mezzo.

Se i due mezzi estremi sono identici, l'elongazione e l'ingrandimento angolare diventano anch'essi uguali all'unità. Allora i raggi emergenti sono paralleli agli incidenti.