

SULLE

# DIFFERENZE DI FASE DELLE CORRENTI,

SUL RITARDO DELL'INDUZIONE

E SULLA DISSIPAZIONE DI ENERGIA

## NEI TRASFORMATORI

RICERCHE SPERIMENTALI E TEORICHE

DEL PROF.

GALILEO FERRARIS



TORINO

ERMANN O LOESCHER

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1887

Estr. dalle *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino.*

SERIE II, TOM. XXXVIII

Torino, Stamperia Reale.

SULLE

**DIFFERENZE DI FASE DELLE CORRENTI,**

SUL RITARDO DELL'INDUZIONE

E SULLA DISSIPAZIONE DI ENERGIA

NEI TRASFORMATORI

RICERCHE SPERIMENTALI E TEORICHE

DEL PROFESSORE

**GALILEO FERRARIS**

---

*Memoria approvata nell' adunanza del 4 dicembre 1887*

---

La presente memoria ha per oggetto l'esposizione e la discussione di alcune serie di esperienze da me eseguite nel laboratorio di elettrotecnica del Museo industriale già fin dall'autunno del 1886. Con tali esperienze mi ero proposto di misurare la differenza di fase esistente fra le due correnti alternative, primaria e secondaria, di un trasformatore ad induzione, e di vedere come tale differenza di fase variasse col variare delle condizioni di lavoro del trasformatore, e specialmente col variare della resistenza del circuito secondario. Ma il confronto dei primi risultati sperimentali con quelli più semplici previsti dalla nota teoria elementare dei trasformatori ad induzione, mise subito in evidenza una differenza notevole tra la legge teorica e la effettiva; e l'interpretazione di tale fatto mi servì di guida nella scelta e nella condotta delle esperienze successive. Siccome le differenze constatate tra le relazioni dimostrate dalla esperienza e quelle previste dalla teoria elementare si spiegano facilmente coll'ammettere che la magnetizzazione e la smagnetizzazione del nucleo del trasformatore si facciano con un certo ritardo, e siccome tale ritardo deve dipendere essenzialmente dalla struttura del nucleo, così fui condotto a istituire confronti col ripetere più volte le misure, cambiando di volta in volta il nucleo del trasformatore.

Le esperienze dimostrarono che le relazioni teoriche che si possono stabilire quando si tiene conto del ritardo col quale si effettuano le variazioni della polarizzazione magnetica del nucleo, e quelle che si hanno quando si tiene conto delle correnti di Foucault, alle quali il detto ritardo è in parte dovuto, si trovano nel fatto verificate abbastanza bene perchè si possa ritenere che in esse si compendino, almeno per una prima approssimazione, le proprietà principali del trasformatore. Ed allora le stesse relazioni diventano utili per analizzare assai da vicino le condizioni dalle quali dipende

la produzione di calore nel nucleo e nelle altre parti metalliche dell'apparecchio, ed offrono per tal modo utili criteri sul rapporto tra l'energia utilizzabile e quella che si dissipa inutilmente nel trasformatore. Il rapporto ora nominato, il ritardo di fase e le grandezze direttamente misurabili con esperienze come le nostre sono legate tra di loro da relazioni semplici, in grazia delle quali alcuni facili esperimenti analoghi a quelli descritti in questa memoria potrebbero anche tornare utili quando si avesse a giudicare delle condizioni di funzionamento e di rendimento di generatori secondari destinati alle pratiche applicazioni. Per ultimo le considerazioni teoriche alle quali hanno dato luogo le ricerche sperimentali esposte in questa memoria, ed il controllo che esse hanno trovato nelle esperienze possono giovare a porre in chiaro gli elementi dai quali dipendono i coefficienti di induzione delle spirali con nucleo di ferro, ed a spiegare, almeno in parte, le differenze dei risultati ai quali possono condurre i vari metodi per determinarli.

### § 1.

#### Metodo per la misura delle differenze di fase.

1. Se nelle due spirali, fissa e mobile, di un elettrodinometro si fanno passare due correnti, le intensità  $i_1$  ed  $i_2$  delle quali sieno funzioni periodiche del tempo  $t$  aventi un medesimo periodo  $T$  molto breve a fronte della durata delle oscillazioni della spirale mobile, questa tende a rotare come se su di essa agisse una coppia costante con momento proporzionale al valore medio

$$\frac{1}{T} \int_0^T i_1 i_2 dt$$

del prodotto  $i_1 i_2$ . Se adunque le condizioni dell'elettrodinometro sono tali che la lettura  $\delta$  sia proporzionale alla coppia di rotazione, si ha

$$\delta = k \frac{1}{T} \int_0^T i_1 i_2 dt,$$

ove  $k$  è una costante dipendente dalla costruzione dello strumento. Supponiamo ora che le due correnti sieno sinusoidali, e poniamo:

$$i_1 = I_1 \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad i_2 = I_2 \sin \left( \frac{2\pi}{T} t - \omega \right);$$

abbiamo in questo caso

$$\frac{1}{T} \int_0^T i_1 i_2 dt = \frac{I_1 I_2}{2} \cos \omega,$$

e quindi, rappresentando con  $h$  una nuova costante:

$$(1) \dots \delta = h I_1 I_2 \cos \omega.$$

Questa relazione si può utilizzare per determinare sperimentalmente la differenza di fase  $\omega$  tra le due correnti.

Si può procedere in due modi: con tre letture successive su di un unico elettrodinometro, oppure con letture simultanee su tre elettrodinometri.

1° *modo* — Le due correnti da paragonarsi sieno

$$i = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t, \quad i' = B \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{T} t - \varphi \right);$$

Si fanno tre esperimenti successivi. Nel primo si fa passare la corrente  $i$  per entrambe le spirali, fissa e mobile, dell'elettrodinometro; si ha così

$$I_1 = I_2 = A, \quad \omega = 0;$$

e si fa la lettura  $\alpha$ . Nel secondo esperimento si fa passare per entrambe le spirali la corrente  $i'$ , si fa cioè

$$I_1 = I_2 = B, \quad \omega = 0,$$

e si ha una seconda lettura  $\beta$ . Nel terzo esperimento si fa passare per la spirale fissa la corrente  $i$ , e per la mobile la  $i'$ , si fa cioè:

$$I_1 = A, \quad I_2 = B, \quad \omega = \varphi;$$

e si ha una terza lettura  $\gamma$ . La formola (1), applicata ai tre successivi esperimenti, dà

$$\alpha = hA^2, \quad \beta = hB^2, \quad \gamma = hAB \cos \varphi;$$

donde si ricava

$$\cos^2 \varphi = \frac{\gamma^2}{\alpha \beta}.$$

Coll'introdurre nei circuiti, o togliere dai medesimi le spirali dell'elettrodinometro, variano le intensità medie e le fasi delle correnti. Quindi nel far uso del descritto procedimento bisogna:

1° Quando si tolgono dall'uno o dall'altro circuito le spirali dell'elettrodinometro, sostituirvi spirali uguali per resistenza e per coefficienti d'induzione;

2° Ricordare che la differenza di fase  $\varphi$  misurata è quella che si ha quando i circuiti contengono le spirali dell'elettrodinometro, ed è perciò diversa da quella che si avrebbe se lo strumento fosse sottratto dai circuiti. A questa seconda osservazione bisogna naturalmente avere riguardo per giudicare, nelle singole ricerche speciali, della possibilità di adoperare il metodo descritto, e per scegliere gli strumenti più acconci.

2° *modo*. — Il secondo modo di sperimentare, che è migliore, richiede l'uso di tre elettrodinometri. Le due correnti da paragonare sieno ancora

$$i = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t, \quad i' = B \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{T} t - \varphi \right).$$

La prima di esse si fa passare per entrambe le spirali del primo elettrodinometro e per la spirale fissa del secondo; la seconda corrente si fa passare per la spirale mo-

bile del secondo elettrodinometro e per le due spirali, fissa e mobile, del terzo. Per tal modo si ha pel primo elettrodinometro:

$$I_1 = I_2 = A, \quad \omega = 0;$$

pel secondo:

$$I_1 = A, \quad I_2 = B, \quad \omega = \varphi;$$

pel terzo:

$$I_1 = I_2 = B, \quad \omega = 0.$$

Quindi se si dicono  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$  le letture fatte simultaneamente sui tre istrumenti, e se si rappresentano con  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  tre costanti dipendenti dalla costruzione degli istrumenti medesimi, si hanno dalla (1) le tre uguaglianze

$$\alpha = h_1 A^2, \quad \gamma = h_2 AB \cos \varphi, \quad \beta = h_3 B^2.$$

Ponendo

$$a = \frac{\alpha}{h_1}, \quad c = \frac{\gamma}{h_2}, \quad b = \frac{\beta}{h_3},$$

le tre uguaglianze si scrivono:

$$a = A^2, \quad c = AB \cos \varphi, \quad b = B^2,$$

e danno

$$(2) \dots \cos^2 \varphi = \frac{c^2}{ab} = \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b} = \left(\frac{c}{b}\right)^2 \cdot \frac{a}{b}.$$

Se  $i$  ed  $i'$  sono la corrente primaria e la secondaria di un generatore secondario, si sa, e risulterà anche dalle considerazioni che saranno svolte più sotto, che  $\varphi$  è sempre compreso tra  $\pi$  e  $\frac{\pi}{2}$ ; quindi  $\cos \varphi$  è sempre negativo. Si ha dunque dalla (2):

$$(2') \dots \cos \varphi = -\frac{c}{b} \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}}.$$

Per poter dedurre dalle letture  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$  i valori dei rapporti  $\frac{c}{b}$ ,  $\frac{a}{b}$ , che figurano in queste formole, basta una serie preliminare di esperienze di confronto fra i tre elettrodinometri. Tali esperienze preliminari consistono nel far passare attraverso a entrambe le spirali di tutti tre gli elettrodinometri una medesima corrente  $i_0$ . Posto

$$i_0 = I_0 \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

e dette  $\alpha_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $\beta_0$  le letture fatte simultaneamente sui tre istrumenti, si ha

$$\alpha_0 = h_1 I_0^2, \quad \gamma_0 = h_2 I_0^2, \quad \beta_0 = h_3 I_0^2;$$

donde la doppia proporzione

$$\alpha_0 : \gamma_0 : \beta_0 = h_1 : h_2 : h_3,$$

e quindi

$$\frac{a}{b} = \frac{\beta_0 \alpha}{\alpha_0 \beta}, \quad \frac{c}{b} = \frac{\beta_0 \gamma}{\gamma_0 \beta}.$$

Con una serie di esperienze come quella descritta si può verificare se sussista la costanza dei numeri  $\frac{\beta_0}{\alpha_0}$ ,  $\frac{\beta_0}{\gamma_0}$ , e determinare con medie i valori più probabili dei medesimi.

La necessità di dover eseguire tali esperienze preliminari, e più ancora quella di doverle ripetere e controllare durante tutto il corso delle misure, costituisce un inconveniente di questo modo di sperimentare. Ma per compenso il metodo offre, rispetto al precedente, il duplice vantaggio di assicurare la costanza dei coefficienti d'induzione esistenti nei circuiti e di permettere di fare le letture  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$  simultaneamente, eliminando così gli errori dovuti alle variazioni dell'intensità e del periodo delle correnti, dovute alle variazioni di velocità della macchina dinamo-elettrica. Nel caso nostro, ove, volendo sperimentare con correnti di grande intensità, si adoperava per produrre le correnti alternative una macchina industriale, questa ultima osservazione aveva una importanza grandissima. Quindi, dopo alcune esperienze preliminari di prova fatte col mezzo di un solo elettrodinometro, io adottai ed adoperai in tutto il corso delle esperienze, che debbono essere discusse in questa memoria, sempre il secondo procedimento, coi tre elettrodinometri.

## § 2°

### Disposizione delle esperienze e primi risultati delle medesime.

**2.** Per applicare il descritto procedimento allo studio delle differenze di fase tra le due correnti di un trasformatore ad induzione, è necessario inserire nei circuiti le spirali degli elettrodinometri, le induzioni proprie delle quali hanno influenza sulle differenze di fase che si vogliono misurare. Questa osservazione potrebbe complicare l'interpretazione dei risultati delle esperienze, ed anche, in qualche caso, renderla impossibile, se lo scopo delle misure fosse quello di determinare ciò che il trasformatore darebbe da solo, senza l'aggiunta delle spirali degli strumenti reometrici, e quando i coefficienti di induzione propri degli elettrodinometri fossero dell'ordine di grandezza di quelli del trasformatore.

Ma tale difficoltà non esiste per ricerche come le nostre, lo scopo delle quali non è quello di determinare le costanti del trasformatore scelto casualmente per le esperienze, ma quello di confrontare le leggi effettive dei trasformatori con quelle dedotte dalle teorie. Per raggiungere questo scopo è assolutamente indifferente fare le misure sul trasformatore scelto, o su di un trasformatore leggermente modificato, quale è quello che risulta dall'insieme del trasformatore propriamente detto e delle spirali degli elettrodinometri inseriti nei circuiti. La sola condizione necessaria è che i coefficienti di induzione esistenti nei circuiti rimangano invariati durante tutte le esperienze; e questa condizione era, col secondo modo di sperimentare, completamente verificata.

Inoltre, lasciando pure anche in disparte la considerazione dello scopo delle esperienze, la difficoltà suaccennata era, nel caso delle nostre misure, eliminata dalle condizioni stesse nelle quali si operava. Si operava infatti con un trasformatore di notevole potenza (2 cavalli) e con grandi coefficienti di induzione; e volendo sperimentare con correnti di grande intensità, come quelle che si adoperano nelle applicazioni pra-

tiche dei trasformatori, non si poteva ricorrere ad altri elettrodinometri, che a quelli industriali di Siemens. Ora i coefficienti di induzione che si avevano in tali strumenti di misura erano parecchie migliaia di volte più piccoli di quelli proprii del trasformatore; tenerne conto sarebbe stato non solo inutile, ma impossibile.

**3.** Il generatore secondario, sul quale furono eseguite tutte le esperienze descritte in questa memoria, era del tipo Gaulard e Gibbs, modello a semplice colonna, per la potenza di due cavalli dinamici. Le due spirali, primaria e secondaria, erano formate con dischi di lastra di rame sottile, foggiate a corona circolare tagliata secondo un raggio, e congiunti insieme in modo da formare due eliche. Le spire di un'elica erano alternate con quelle dell'altra ed isolate per mezzo di fogli di carta paraffinata. Il nucleo di ferro, che era cilindrico, era amovibile, e veniva mutato per ogni serie di esperienze. Il diametro esterno delle spire era 114 millimetri, l'interno 54 millimetri; il numero delle spire era di 455 per ciascuna spirale. Le resistenze erano: quella della spirale primaria di 0,276 ohm; quella della secondaria di 0,285 ohm. La spirale secondaria era formata di quattro parti uguali, che si potevano riunire in serie, o per gruppi, o tutte in derivazione; però durante le esperienze esse stettero sempre riunite in serie, formando per tal modo un'elica unica praticamente uguale alla primaria.

Le correnti primarie erano generate da una macchina dinamoelettrica di Siemens a correnti alternative, l'indotto della quale comprendeva otto spirali collegate in serie. In essa perciò si producevano otto inversioni di corrente per ogni giro dell'albero. La velocità di rotazione della macchina era indicata in modo continuo da un tacometro di Buss, e veniva controllata, durante ciascun esperimento, almeno due volte, per mezzo di un contagiri. Un grande reostato industriale a fili di rame serviva a regolare la intensità della corrente primaria. Per introdurre, nelle singole esperienze, le necessarie resistenze nel circuito secondario, servivano grandi spirali di filo di argentana, avvolte in doppio, a grandi spire, e praticamente prive di induzione propria.

Come strumenti di misura si adoperarono, come si è già detto, tre elettrodinometri per forti correnti costrutti dalla fabbrica Siemens ed Halske di Berlino. In essi, come è noto, la spirale fissa è fatta con pochi giri di filo, e la spirale mobile è costituita da una semplice spira rettangolare di un grosso filo di rame. Tale spira sospesa viene ricondotta nel piano di riposo, perpendicolare a quello delle spire fisse, col mezzo della torsione di una molla a spirale, e le misure si fanno leggendo l'angolo di torsione a ciò necessario. I coefficienti di induzione propria delle spirali dei descritti strumenti erano affatto insensibili a fronte di quelli grandissimi del generatore secondario; ed essendo sempre la spira mobile in un piano perpendicolare a quelli delle fisse, non si aveva tra queste e quella alcuna induzione mutua.

Collocati i tre elettrodinometri nelle posizioni dove essi stettero poi durante tutte le esperienze, essi vennero collegati tutti in serie, ed inseriti nel circuito secondario del generatore secondario per il confronto preliminare, del quale si è detto all'art. 1. Col reostato a filo di rame esistente nel circuito primario e colle resistenze inserite nel circuito secondario si fece passare la intensità della corrente negli elettrodinometri per tutta la serie di valori che dovevano occorrere nelle esperienze principali. Si fece così una serie di letture simultanee  $\alpha_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $\beta_0$ , colla quale si poté constatare la costanza

dei rapporti  $\frac{\beta_0}{\alpha_0}$ ,  $\frac{\beta_0}{\gamma_0}$ , e determinare i valori medii dei medesimi per portarli poi nelle formole

$$\frac{a}{b} = \frac{\beta_0 \alpha}{\alpha_0 \beta}, \quad \frac{c}{b} = \frac{\beta_0 \gamma}{\gamma_0 \beta}.$$

Si trovò per tal modo

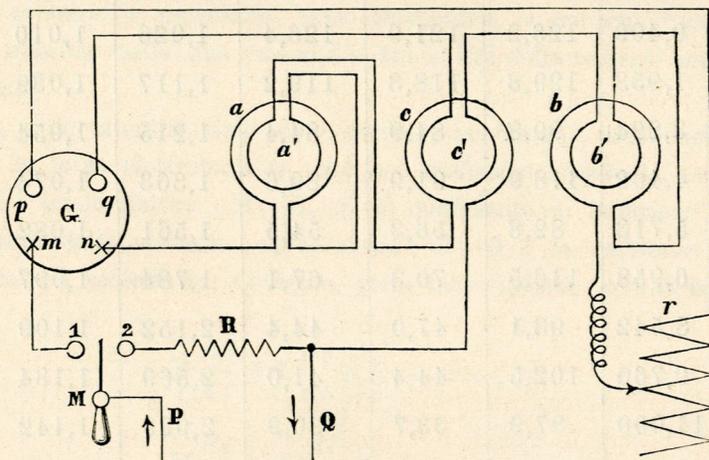
$$\frac{a}{b} = 1,0274 \frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{c}{b} = 1,0475 \frac{\gamma}{\beta}.$$

Tali determinazioni furono ripetute più volte durante le successive serie di esperimenti ed al termine di tutte.

Dopo queste esperienze di confronto, si isolò nel secondo elettrodinometro, in quello cioè col quale si dovevano fare le letture  $\gamma$ , il quale era stato a ciò predisposto, la spirale sospesa dalla fissa, congiungendo le due estremità di ciascuna ad appositi morsetti.

4. Gli strumenti così preparati, il generatore secondario, le spirali di argentana ed il circuito primario si collegarono nel modo schematicamente rappresentato nella figura 1.

Fig. 1.



In questa figura,  $G$  rappresenta il generatore secondario, ed in questo le due croci  $m$ ,  $n$  indicano i due morsetti terminali della spirale primaria, ed i due circolletti  $p$ ,  $q$  i morsetti terminali della spirale secondaria. Con  $a a'$ ,  $c c'$ ,  $b b'$  sono rappresentati schematicamente i tre elettrodinometri destinati rispettivamente alle letture che abbiamo già indicato colle lettere  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$ ; e propriamente i cerchi esterni  $a$ ,  $c$ ,  $b$  rappresentano le spirali fisse, e gli interni  $a'$ ,  $c'$ ,  $b'$  le spire mobili. Le spirali prive di autoinduzione destinate ad introdurre resistenze nel circuito secondario del trasformatore sono schematicamente rappresentate in  $r$ ; con  $R$  poi è rappresentata una resistenza approssimativamente uguale alla resistenza apparente complessiva della spirale primaria  $m n$ , di  $a$ , di  $a'$  e di  $c$ . Finalmente  $M$  è un commutatore a manubrio, destinato ad inserire nel circuito  $P Q$  della macchina dinamo-elettrica il generatore secondario e gli strumenti di misura, oppure a togliere dal circuito gli apparecchi medesimi sostituendo loro la resistenza equivalente  $R$ . Ciò posto, la figura fa vedere senz'altro il

collegamento degli apparecchi e dei circuiti. Quando la leva del commutatore è in contatto col pezzo 1, la corrente primaria, che arriva dal reoforo  $P$ , passa nella spirale primaria  $m n$  del trasformatore, nelle spirali fissa  $a$  e mobile  $a'$  del primo elettrodinamometro e nella spirale fissa  $c$  del secondo; essa ritorna alla macchina pel reoforo  $Q$ . Intanto la spirale secondaria  $p q$  del trasformatore si trova in un circuito chiuso, il quale comprende la spira mobile  $c'$  del secondo elettrodinamometro, la spira mobile  $b'$  e la fissa  $b$  del terzo elettrodinamometro e la resistenza  $r$ . Quando invece nel commutatore il contatto viene stabilito col pezzo 2, il trasformatore e gli strumenti di misura si trovano tolti dal circuito, ed il circuito della macchina si chiude sulla resistenza equivalente  $R$ . Un altro interruttore annesso al grande reostato a filo di rame serve a rompere od a chiudere il circuito della macchina; ma questo non è rappresentato sulla figura.

5. Nella seguente tabella sono raccolti i risultati di una prima serie di esperimenti fatti per mezzo della descritta disposizione.

N°	$n$	$r$	$\alpha$	$\gamma$	$\beta$	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{b}$	$\varphi$
1	603	0,409	126,2	121,9	126,4	1,026	1,010	175° 30'
2	606	1,953	129,6	118,3	119,2	1,117	1,039	169 26
3	605	3,224	99,8	84,9	84,4	1,215	1,054	162 59
4	600	4,462	118,9	91,9	89,6	1,363	1,074	156 55
5	601	5,713	82,8	56,3	54,5	1,561	1,082	150 0
6	607	6,958	116,5	70,3	67,1	1,784	1,097	145 13
7	609	8,542	93,1	47,0	44,4	2,152	1,109	139 7
8	601	9,760	102,5	44,4	41,0	2,569	1,134	135 2
9	610	11,000	87,9	33,7	30,9	2,923	1,142	131 55
10	606	12,240	98,8	32,4	29,2	3,476	1,162	128 33
11	602	13,470	97,6	26,3	23,6	4,249	1,167	124 29
12	602	14,790	104,0	24,7	21,6	4,969	1,203	122 40

Nella prima colonna di questa tabella è indicato il numero d'ordine delle esperienze, nella 2ª il numero  $n$  di giri fatti dalla macchina dinamolettrica in ogni minuto primo, nella terza la resistenza totale  $r$  del circuito secondario del trasformatore. Nelle tre colonne successive sono registrate le letture  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$ ; poi sono registrati i valori di  $\frac{a}{b}$  e di  $\frac{c}{b}$  calcolati per mezzo delle letture medesime, e finalmente nell'ultima colonna si hanno i valori angolari  $\varphi$  della differenza di fase calcolati colla formola

$$\cos \varphi = -\frac{c}{b} \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$$

Per interpretare questi risultati è necessario che noi li confrontiamo con quelli ai quali conduce la teoria elementare del trasformatore, cioè quella teoria che non tiene conto nè delle correnti di Foucault nè del ritardo col quale si fanno la magnetizzazione e la smagnetizzazione del ferro. Giova quindi ricordare qui brevemente alcuni punti di tale teoria.

### § 3°

#### Confronto dei risultati dell'esperienza con quelli della teoria nella quale non si tiene conto del ritardo della magnetizzazione.

6. Se si suppone: 1° Che le variazioni della magnetizzazione del ferro, e con esse quelle del flusso d'induzione che passa dentro alle spirali del trasformatore si compiano senza alcun ritardo, si facciano cioè simultaneamente alle variazioni delle correnti nelle spirali; 2° Che, tranne quelle esistenti nelle due spirali, non vi abbiano nel trasformatore altre correnti indotte, nè nel ferro del nucleo nè nelle altre parti metalliche dell'apparecchio; 3° che i coefficienti di induzione sieno costanti; 4° Che le due correnti, primaria e secondaria, sieno sinusoidali, si trovano, come è noto (\*), tra le intensità massime delle due correnti e tra le fasi delle correnti medesime relazioni semplicissime.

Diciamo  $i$ ,  $i'$  le intensità delle due correnti, primaria e secondaria, alla fine del tempo  $t$ ;  $e$  la forza elettromotrice, che nel medesimo istante si ha nel circuito primario fuori del trasformatore;  $M$ ,  $L$ ,  $L'$  il coefficiente di induzione mutua delle due spirali e quelli delle medesime su se stesse;  $R$  ed  $r$  la resistenza del circuito primario e quella del secondario; abbiamo, colle fatte ipotesi, le due equazioni differenziali

$$M \frac{di'}{dt} + L \frac{di}{dt} + Ri - e = 0,$$

$$M \frac{di}{dt} + L' \frac{di'}{dt} + ri' = 0.$$

Ponendo

$$e = E \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t,$$

le due equazioni differenziali sono soddisfatte da valori della forma

$$i = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} (t - \alpha), \quad i' = B \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} (t - \beta).$$

Portando questi valori di  $e$ ,  $i$ ,  $i'$  nelle equazioni differenziali, ed uguagliando a zero le somme che moltiplicano  $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t$  e  $\operatorname{cos} \frac{2\pi}{T} t$ , si ottengono quattro equazioni, che

(\*) Vedi p. es. MASCART et JOUBERT, *Leçons sur l'électricité et le magnetisme*, I, pag. 593-94.

bastano a determinare  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ . È allora facile verificare che sussistono le due relazioni seguenti:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{\frac{4\pi^2}{T^2} L'^2 + r^2}{\frac{4\pi^2}{T^2} M^2},$$

$$\tan \frac{2\pi}{T} (\beta - \alpha) = -\frac{r}{\frac{2\pi}{T} L'}.$$

Ponendo

$$\frac{2\pi}{T} (\beta - \alpha) = \varphi, \quad \frac{2\pi}{T} M = \mu, \quad \frac{2\pi}{T} L' = \lambda,$$

le due relazioni diventano:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{\lambda^2 + r^2}{\mu^2},$$

(3)...

$$\tan \varphi = -\frac{r}{\lambda}.$$

Da queste si ricava

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 \cos^2 \varphi = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2.$$

Ora colle notazioni stabilite nel § 1°, si ha

$$\left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{a}{b};$$

dunque

$$\cos^2 \varphi = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \frac{b}{a}.$$

Confrontando questo valore di  $\cos^2 \varphi$  col valore  $\left(\frac{c}{b}\right)^2 \frac{b}{a}$  trovato nel §° 1°, ricaviamo

$$(4) \dots \frac{c}{b} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Orbene  $\frac{\lambda}{\mu}$  è costante; le cause infatti delle variazioni di  $\lambda$  e di  $\mu$  risiedono nel ferro, e sono le stesse per entrambe queste grandezze. Dunque, se fossero verificate le ipotesi che servono di base alle formole precedenti, il rapporto  $\frac{c}{b}$  dovrebbe pure essere costante, indipendente da  $r$ .

Invece i valori di  $\frac{c}{b}$  ricavati dalle esperienze, e registrati nella tabella del § precedente, crescono regolarmente, ed assai sensibilmente, col crescere della resistenza  $r$ . Portando le  $r$  come ascisse, ed i valori corrispondenti di  $\frac{c}{b}$  come ordinate, si avrebbe, secondo la formola teorica (4), una retta parallela all'asse delle ascisse; secondo l'esperienza, invece, si ha una linea che per ascisse crescenti va allontanandosi dal-

l'asse delle ascisse. Tale linea è quella segnata I nella tavola grafica litografata annessa alla presente memoria. Con irregolarità spiegabili cogli errori d'osservazione essa serpeggia attorno ad una retta formante coll'asse delle ascisse un certo angolo. Ed è da notare questa circostanza importante: che tale retta, prolungata all'indietro, taglia l'asse delle ordinate in un punto, la cui ordinata differisce pochissimo dall'unità, ed è un poco maggiore della medesima.

7. Il disaccordo tra i risultati delle esperienze e quello ricavato dalle equazioni (3) prova che qualcuna delle ipotesi, sulle quali riposano queste equazioni, non è verificata. Ora esso non può essere dovuto alla variabilità dei coefficienti di induzione  $M$  ed  $L'$  che le equazioni differenziali, da cui le (3) si ricavano, suppongono costanti. Infatti noi abbiamo già osservato che se, coll'accostarsi del ferro allo stato di saturazione magnetica,  $M$  ed  $L'$  diminuiscono, la variazione si fa però nella medesima proporzione per entrambi, e quindi non può influire sul valore di  $\frac{L'}{M}$  o di  $\frac{\lambda}{\mu}$ . Esso si spiega invece facilmente ammettendo che non si verifichi l'altra ipotesi da noi fatta nello scrivere le equazioni differenziali precedenti: l'ipotesi che l'induzione si compia senza alcun ritardo. In altri termini: il disaccordo si può spiegare ammettendo che rispetto alla durata del periodo delle correnti alternative, non sieno trascurabili i ritardi nella magnetizzazione e nella smagnetizzazione del nucleo di ferro del generatore secondario, ritardi che le precedenti equazioni differenziali suppongono nulli.

Siccome infatti l'angolo  $\varphi$  è sempre compreso tra  $\pi$  e  $\frac{\pi}{2}$  (\*), così ad un aumento di  $\varphi$  corrisponde un aumento di  $\cos^2 \varphi$ ; e siccome si ha

$$\cos^2 \varphi = \frac{c^2}{ab},$$

così se esiste un ritardo, se cioè  $\varphi$  è maggiore del valore teorico, il valore di  $\frac{c^2}{ab}$  deve risultare maggiore di quello teorico voluto dalle equazioni (3). Ciò equivale a dire che per un dato valore di  $r$  o di  $\frac{a}{b}$  il valore di  $\frac{c}{b}$  deve risultare maggiore del teorico, ossia maggiore di  $\frac{\lambda}{\mu}$ .

Siccome inoltre si sa che  $\varphi$  diminuisce da  $\pi$  verso  $\frac{\pi}{2}$  quando  $r$  cresce, e siccome ad un dato ritardo, ossia ad un dato aumento di  $\varphi$ , corrisponde un aumento di  $\cos^2 \varphi$  tanto maggiore quanto più  $\varphi$  è prossimo al limite inferiore  $\frac{\pi}{2}$ , così si può anche prevedere che l'eccesso di  $\frac{c}{b}$  sul valore teorico  $\frac{\lambda}{\mu}$  deve risultare tanto maggiore quanto più è grande la resistenza  $r$ .

Ed è appunto questo il risultato, al quale ci ha condotti l'esperienza.

(\*) G. FERRARIS, *Ricerche teoriche e sperimentali sul generatore secondario Gaulard e Gibbs*. Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino, serie II, tomo XXXVII, pag. 109.

## § 4°

**Ritardo delle correnti indotte.**

8. Per vedere se, e fino a qual punto le considerazioni precedenti possano spiegare i risultati sperimentali, e per vedere in questo caso quali relazioni esistano tra le grandezze misurate nelle esperienze ed il ritardo della magnetizzazione del ferro, cercheremo di stabilire teoricamente le relazioni tra  $r$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  nella ipotesi che trascorra un certo tempo  $\vartheta$  tra l'istante, in cui si verifica una variazione nella intensità della corrente in una delle spirali del trasformatore, e l'istante nel quale si produce, sulla stessa spirale o sull'altra, la corrispondente forza elettromotrice. Porremo poi i risultati dell'analisi in confronto con quelli sperimentali.

Diciamo  $R$  ed  $r$  le resistenze del circuito primario e del secondario;  $e$  la forza elettromotrice, funzione periodica del tempo  $t$ , esistente nel circuito primario, fuori del trasformatore;  $i$  ed  $i'$  le intensità, alla fine del tempo  $t$ , delle due correnti, primaria e secondaria; e colle notazioni

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t-\vartheta}, \quad \left(\frac{di'}{dt}\right)_{t-\vartheta}$$

rappresentiamo i valori che le derivate  $\frac{di}{dt}$  e  $\frac{di'}{dt}$  hanno alla fine del tempo  $t - \vartheta$ ;

Se, come ci siamo proposto di fare, ammettiamo che le forze elettromotrici d'induzione si producano col ritardo  $\vartheta$  rispetto alle variazioni di corrente alle quali sono dovute, abbiamo le due equazioni differenziali

$$(5) \dots M \left(\frac{di'}{dt}\right)_{t-\vartheta} + L \left(\frac{di}{dt}\right)_{t-\vartheta} + Ri = e,$$

$$(6) \dots M \left(\frac{di}{dt}\right)_{t-\vartheta} + L' \left(\frac{di'}{dt}\right)_{t-\vartheta} + r i' = 0.$$

Noi supporremo anche qui, che  $M$ ,  $L$ ,  $L'$  rappresentino costanti. Però tali costanti dipenderanno, oltrechè dalle condizioni delle due spirali, anche dalle circostanze che determinano il ritardo  $\vartheta$ ; esse potranno quindi differire dai coefficienti d'induzione, che rappresentammo colle medesime lettere nel § precedente; noi le diremo: *coefficienti d'induzione apparenti*.

Colle equazioni (5), (6), data la funzione  $e$  del tempo, si hanno da determinare le funzioni  $i$  ed  $i'$ . Se supponiamo le correnti sinusoidali, e se, detta  $T$  la durata del periodo, poniamo:

$$(7) \dots e = E \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t, \quad i = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} (t - \alpha), \quad i' = B \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} (t - \beta),$$

il problema si riduce a determinare i valori di  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ; e le quattro equazioni a ciò necessarie si possono trovare sostituendo nelle (5) e (6) i valori (7), racco-

gliando in ciascuna equazione i termini che contengono il fattore  $\frac{2\pi}{T}t$  e quelli che contengono  $\cos \frac{2\pi}{T}t$ , ed uguagliando separatamente a zero la somma dei primi e quella dei secondi.

Per lo scopo nostro ci basta qui applicare l'esposto procedimento alla equazione (6). Se portiamo in essa, in luogo di  $i$  e di  $i'$  i valori (7), ed in luogo di  $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t-\vartheta}$  e di  $\left(\frac{di'}{dt}\right)_{t-\vartheta}$  i valori

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t-\vartheta} = \frac{2\pi}{T} A \cos \frac{2\pi}{T}(t-\alpha-\vartheta),$$

$$\left(\frac{di'}{dt}\right)_{t-\vartheta} = \frac{2\pi}{T} B \cos \frac{2\pi}{T}(t-\beta-\vartheta),$$

che si ricavano dalle (7); se poi nella equazione così trovata raccogliamo la somma dei termini che moltiplicano  $\frac{2\pi}{T}t$  e quella dei termini che moltiplicano  $\cos \frac{2\pi}{T}t$ , e se finalmente uguagliamo a zero ciascuna di queste somme, arriviamo alle due equazioni:

$$(8) \dots A\mu \frac{2\pi}{T}(\alpha + \vartheta) + B \left[ \lambda \frac{2\pi}{T}(\beta + \vartheta) + r \cos \frac{2\pi}{T}\beta \right] = 0,$$

$$(9) \dots A\mu \cos \frac{2\pi}{T}(\alpha + \vartheta) + B \left[ \lambda \cos \frac{2\pi}{T}(\beta + \vartheta) - r \sin \frac{2\pi}{T}\beta \right] = 0,$$

ove si è posto, come sopra:

$$\mu = \frac{2\pi}{T} M, \quad \lambda = \frac{2\pi}{T} L'.$$

Trasportiamo nel secondo membro i termini aventi il fattore  $B$ , quindi eleviamo al quadrato i due membri di ciascuna equazione, e sommiamo; otteniamo:

$$(I) \dots A^2 \mu^2 = B^2 \left( \lambda^2 + r^2 + 2\lambda r \sin \frac{2\pi}{T}\vartheta \right).$$

Quest'equazione si riduce a

$$\left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{\lambda^2 + r^2}{\mu^2},$$

e coincide colla prima delle (3) del § 3°, quando si suppone  $\vartheta = 0$ .

Se scriviamo le (8) e (9) nel modo seguente:

$$A\mu \frac{2\pi}{T}(\alpha + \vartheta) + B\lambda \frac{2\pi}{T}(\beta + \vartheta) = -Br \cos \frac{2\pi}{T}\beta,$$

$$A\mu \cos \frac{2\pi}{T}(\alpha + \vartheta) + B\lambda \cos \frac{2\pi}{T}(\beta + \vartheta) = Br \sin \frac{2\pi}{T}\beta,$$

e poi eleviamo al quadrato i loro membri e li sommiamo, troviamo quest'altra relazione:

$$A^2 \mu^2 + B^2 \lambda^2 + 2 AB \mu \lambda \cos \frac{2\pi}{T} (\beta - \alpha) = B^2 r^2,$$

la quale, quando si ponga

$$\frac{2\pi}{T} (\beta - \alpha) = \varphi,$$

si scrive:

$$(II) \dots\dots A^2 \mu^2 + B^2 \lambda^2 + 2 AB \mu \lambda \cos \varphi = B^2 r^2.$$

Finalmente, combinando la (II) colla (I), ricaviamo:

$$(III) \dots\dots B^2 \left( \lambda + r \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta \right) + AB \mu \cos \varphi = 0.$$

9. Nelle formole (I), (II), (III) possiamo ora eliminare  $A$ ,  $B$ ,  $\varphi$ , ed introdurre le grandezze  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , che nelle nostre esperienze si deducevano direttamente dalle letture sugli elettrodinamometri. Portando infatti nelle tre equazioni i valori

$$a = A^2, \quad b = B^2, \quad \cos \varphi = -\frac{c}{b} \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}},$$

esse si scrivono:

$$(I') \dots\dots \frac{a}{b} \mu^2 = \lambda^2 + r^2 + 2 \lambda r \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta,$$

$$(II') \dots\dots a \mu^2 + b \lambda^2 - 2 c \mu \lambda = b r^2,$$

$$(III') \dots\dots \frac{c}{b} = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{r}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta.$$

Di queste equazioni una qualunque è conseguenza delle altre due. Le altre due sono distinte, e stabiliscono relazioni tra le grandezze  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $r$ ,  $\vartheta$  dipendenti dalle condizioni del trasformatore e dei circuiti e le letture che si facevano direttamente nei nostri esperimenti.

Se si suppone  $\vartheta = 0$ , le formole (I'), (II'), (III'), si riducono alle

$$(I'') \dots\dots \frac{a}{b} \mu^2 = \lambda^2 + r^2,$$

$$(II'') \dots\dots \frac{a}{b} - \left( \frac{c}{b} \right)^2 = \frac{r^2}{\mu^2},$$

$$(III'') \dots\dots \frac{c}{b} = \frac{\lambda}{\mu},$$

e coincidono con quelle che si ricaverrebbero dalle equazioni differenziali del § 3°, ove non è tenuto conto del ritardo dell'induzione.

Ora si vede subito che l'accordo delle formole (I'), (II'), (III') coi risultati dell'esperienza è assai meno imperfetto di quello presentato dalle formole (I''), (II''), (III'').

Infatti abbiamo veduto, che se si fa crescere  $r$ , il valore di  $\frac{c}{b}$  ricavato dalle esperienze non rimane costante come vorrebbe la (III''), ma cresce con  $r$ , come è voluto dalla formola (III').

In un sistema di coordinate cartesiane si prendano come ascisse i valori di  $r$  e come ordinate quelli di  $\frac{c}{b}$ ; se allora si suppone che  $\mu$  e  $\lambda$  sieno indipendenti da  $r$ , la (III') è l'equazione di una linea retta. Questo fatto, nei limiti di approssimazione concessi dagli strumenti adoperati, si verifica approssimativamente nella serie di esperimenti sovra riferita (vedi la linea I della tavola grafica litografata). Siccome però nel fatto  $\mu$  diminuisce col crescere di  $r$ , così è prevedibile che in generale la linea di cui abbiamo parlato sarà convessa verso l'asse delle ascisse; e noi vedremo che anche questa previsione è confermata dalle esperienze.

Per  $r = 0$  la (III') dà  $\frac{c}{b} = \frac{\lambda}{\mu}$ ; la linea rappresentata dalla equazione (III') deve adunque tagliare l'asse delle ordinate ad una distanza dall'origine uguale a  $\frac{\lambda}{\mu}$ . Ora anche ciò si verifica, come dimostreremo, con tutta quella approssimazione che il metodo sperimentale concede.

Anche l'equazione (I') si concilia coi risultati delle esperienze meglio della (I''). Se coi valori di  $\frac{a}{b}$  e di  $r$  misurati in una serie di esperimenti, e col mezzo della formola (I'') e del metodo dei minimi quadrati si determinano i valori di  $\mu$  e di  $\frac{\lambda}{\mu}$ , si osserva che entrambi variano col variare dei limiti di resistenza fra i quali si è operato, e che precisamente  $\mu$  diminuisce col crescere di  $r$ , e  $\frac{\lambda}{\mu}$  cresce. Ora il fatto può essere dovuto a più cause, ma intanto trova una spiegazione nel semplice confronto della (I') colla (I''). Basta notare che se si prendono come ascisse i valori di  $r^2$  e come ordinate quelli di  $\frac{a}{b}$ , l'equazione (I'') dà una linea retta, della quale  $\frac{1}{\mu^2}$  è il coefficiente angolare e  $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2$  è l'ordinata all'origine; e che invece l'equazione (I') dà una curva concava verso l'asse delle ascisse. Il valore di  $\frac{\lambda}{\mu}$ , al quale conduce il metodo dei minimi quadrati, corrisponde ad una corda delle curva, ed è perciò maggiore del vero, e tanto maggiore quanto più sono grandi i valori di  $r$ , ai quali corrisponde la porzione di curva considerata.

## § 5°

**Cause del ritardo, correnti di Foucault.**

**10.** Le considerazioni precedenti giustificano l'ipotesi che serve di base alle equazioni (5) e (6), e dimostrano la possibilità di discutere ed interpretare per mezzo delle formole, alle quali siamo arrivati, i risultati delle nostre esperienze. Ma prima di occuparci di una tale discussione, conviene che entriamo più addentro nella interpretazione fisica dei fenomeni.

Una causa del ritardo  $\mathfrak{Z}$  sta nella *isteresi*, nel fatto cioè che la magnetizzazione del ferro, corrispondente ad un dato valore della forza magnetizzante, è diversa secondochè questa va crescendo o va diminuendo, è minore nel primo caso, maggiore nel secondo. Nel caso nostro, nel quale la forza magnetizzante e la magnetizzazione sono supposte funzioni sinusoidali del tempo, il fenomeno ora nominato ha per effetto di fare che la senoide rappresentante in funzione di  $t$  la magnetizzazione abbia un ritardo  $\theta$  rispetto alla senoide rappresentante la forza magnetizzante. Le forze elettromotrici di induzione nelle due spirali sono, con grande approssimazione, proporzionali alle variazioni della magnetizzazione, dunque anch'esse tengono dietro col medesimo ritardo alle variazioni della forza magnetizzante. Ora la forza magnetizzante è  $ki + k'i'$ , ove  $k$  e  $k'$  sono costanti, dunque le forze elettromotrici di induzione sono proporzionali non già alle derivate di  $i$  e di  $i'$  corrispondenti al tempo  $t$  ma a quelle corrispondenti a  $t - \theta$ . Così si arriva alle equazioni differenziali (5) e (6), alla sola condizione di trascurare le induzioni elettrodinamiche che si fanno indipendentemente dal ferro, le quali, nel fatto, sono minime.

**11.** Ma un'altra causa di ritardo sta nelle correnti indotte nel nucleo e nelle altre parti metalliche dell'apparecchio, correnti alle quali si suole dare il nome di *correnti di Foucault*. Si sa anzi che i ritardi dovuti a tali correnti possono essere grandissimi e che a fronte di essi possono avere una importanza affatto secondaria quelli direttamente dovuti al tempo necessario per le variazioni della polarizzazione magnetica (\*). Noi possiamo dimostrare che senza ammettere *a priori* alcun ritardo, e fatta astrazione dal tempo occorrente per le variazioni della polarizzazione magnetica, ma prendendo pur solamente in considerazione le correnti di Foucault, si possono prevedere le relazioni che abbiamo dedotto dalla equazione differenziale (6).

I fenomeni, dei quali stiamo per occuparci, non sono di natura tale, che si possano sottoporre ad una analisi matematica rigorosa e completa; ma possiamo tuttavia proporci di vedere se, almeno come prima approssimazione, e almeno nel caso dei nostri esperimenti, le formole (I), (II), (III) si accordino con quelle che risultano dalla considerazione delle correnti di Foucault.

Noi non sappiamo come le correnti di Foucault sieno distribuite nel ferro del nucleo e nelle altre parti metalliche del trasformatore, sappiamo soltanto che per la

(\*) G. WIEDEMANN: *Galvanismus und Elektromagnetismus* — Braunschweig, 1861 — Vol. 2°, pag. 781 e seguenti.

forma stessa dell'apparecchio esse debbono essere simmetricamente distribuite attorno all'asse, e che, eccettuate soltanto brevi porzioni in vicinanza delle estremità, esse debbono essere uniformemente distribuite su quasi tutta la lunghezza del trasformatore. Ma per lo scopo nostro, e nell'ordine di approssimazione al quale ci vogliamo limitare, possiamo ammettere che le correnti di Foucault equivalgano, per gli effetti che dobbiamo considerare, ad una corrente alternativa unica. Così il problema si riduce a considerare la induzione fra tre sole correnti alternative, che sono: le due correnti, primaria e secondaria, esistenti nelle due spirali del trasformatore e quella di cui ora abbiamo parlato.

Diciamo:

- $i, i', j$  le intensità delle tre correnti alla fine del tempo  $t$ ,  
 $R, r, \rho$  le resistenze dei loro circuiti,  
 $M_1$  il coefficiente d'induzione mutua tra le due spirali primaria e secondaria,  
 $L_1, L_1'$  i coefficienti d'induzione propria delle spirali medesime,  
 $M_2, M_2'$  i coefficienti d'induzione del circuito della corrente  $j$  sulle due spirali,  
 $L_2$  il coefficiente d'induzione della corrente  $j$  su sè stessa,  
 $e$  la forza elettromotrice esistente, alla fine del tempo  $t$ , sul circuito primario, fuori del trasformatore.

Se trattiamo come costanti i coefficienti di induzione e la resistenza  $\rho$ , abbiamo le tre equazioni differenziali:

$$(10) \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} M_1 \frac{di'}{dt} + L_1 \frac{di}{dt} + M_2 \frac{dj}{dt} + Ri = e, \\ M_1 \frac{di}{dt} + L_1' \frac{di'}{dt} + M_2' \frac{dj}{dt} + ri' = 0, \\ M_2 \frac{di}{dt} + M_2' \frac{di'}{dt} + L_2 \frac{dj}{dt} + \rho j = 0. \end{array} \right.$$

Supposto che sia

$$e = E \text{ sen } \frac{2\pi}{T} t,$$

queste equazioni differenziali sono soddisfatte da espressioni della forma

$$(11) \quad i = A \text{ sen } \frac{2\pi}{T} (t - \alpha), \quad i' = B \text{ sen } \frac{2\pi}{T} (t - \beta), \quad j = H \text{ sen } \frac{2\pi}{T} (t - \gamma);$$

e per ottenere le sei equazioni necessarie per la determinazione di  $A, B, H, \alpha, \beta, \gamma$  basta portare i valori (11) nelle (10) e uguagliare quindi a zero le somme dei termini che in ciascuna equazione moltiplicano  $\text{sen } \frac{2\pi}{T} t$  e quella dei termini che moltiplicano  $\text{cos } \frac{2\pi}{T} t$ .

Se si pone

$$(12) \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{2\pi}{T} M_1 = \mu_1, \quad \frac{2\pi}{T} L_1 = \lambda_1, \quad \frac{2\pi}{T} L_1' = \lambda_1', \\ \frac{2\pi}{T} M_2 = \mu_2, \quad \frac{2\pi}{T} M_2' = \mu_2', \quad \frac{2\pi}{T} L_2 = \lambda_2, \end{array} \right.$$

le equazioni or nominate si scrivono:

$$(13) \dots \left\{ \begin{array}{l} A \left( \lambda_1 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \alpha + R \cos \frac{2\pi}{T} \alpha \right) + B \mu_1 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \beta + H \mu_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \gamma = E, \\ A \left( \lambda_1 \cos \frac{2\pi}{T} \alpha - R \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \alpha \right) + B \mu_1 \cos \frac{2\pi}{T} \beta + H \mu_2 \cos \frac{2\pi}{T} \gamma = 0, \end{array} \right.$$

$$(14) \dots \left\{ \begin{array}{l} A \mu_1 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \alpha + B \left( \lambda_1' \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \beta + r \cos \frac{2\pi}{T} \beta \right) + H \mu_2' \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \gamma = 0, \\ A \mu_1 \cos \frac{2\pi}{T} \alpha + B \left( \lambda_1' \cos \frac{2\pi}{T} \beta - r \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \beta \right) + H \mu_2' \cos \frac{2\pi}{T} \gamma = 0, \end{array} \right.$$

$$(15) \dots \left\{ \begin{array}{l} A \mu_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \alpha + B \mu_2' \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \beta + H \left( \lambda_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \gamma + \rho \cos \frac{2\pi}{T} \gamma \right) = 0, \\ A \mu_2 \cos \frac{2\pi}{T} \alpha + B \mu_2' \cos \frac{2\pi}{T} \beta + H \left( \lambda_2 \cos \frac{2\pi}{T} \gamma - \rho \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \gamma \right) = 0. \end{array} \right.$$

Siccome però per la nostra questione non occorre determinare i valori delle singole grandezze  $A$ ,  $B$ ,  $H$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ma semplicemente interessa considerare i rapporti  $\frac{A}{B}$ ,  $\frac{A}{H}$  e le differenze di fase  $\beta - \alpha$ ,  $\gamma - \alpha$ , così delle sei equazioni (13), (14), (15), occorrerà adoperare solamente le quattro ultime. Risolvendo le due ultime rispetto a  $H \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \gamma$  ed a  $H \cos \frac{2\pi}{T} \gamma$ , e portando i valori trovati nelle (14), otteniamo:

$$(16) \dots \left\{ \begin{array}{l} A \left[ \left( \mu_1 - \frac{\mu_2' \mu_2 \lambda_2}{\lambda_2^2 + \rho^2} \right) \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \alpha + \frac{\mu_2' \mu_2 \rho}{\lambda_2^2 + \rho^2} \cos \frac{2\pi}{T} \alpha \right] \\ + B \left[ \left( \lambda_1' - \frac{\mu_2'^2 \lambda_2}{\lambda_2^2 + \rho^2} \right) \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \beta + \frac{\mu_2'^2 \rho}{\lambda_2^2 + \rho^2} \cos \frac{2\pi}{T} \beta \right] + B r \cos \frac{2\pi}{T} \beta = 0, \\ A \left[ \left( \mu_1 - \frac{\mu_2' \mu_2 \lambda_2}{\lambda_2^2 + \rho^2} \right) \cos \frac{2\pi}{T} \alpha - \frac{\mu_2' \mu_2 \rho}{\lambda_2^2 + \rho^2} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \alpha \right] \\ + B \left[ \left( \lambda_1' - \frac{\mu_2'^2 \lambda_2}{\lambda_2^2 + \rho^2} \right) \cos \frac{2\pi}{T} \beta - \frac{\mu_2'^2 \rho}{\lambda_2^2 + \rho^2} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \beta \right] - B r \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \beta = 0. \end{array} \right.$$

Ora se si pone

$$(17) \dots \left\{ \begin{array}{l} \mu \cos \frac{2\pi}{T} \vartheta = \mu_1 - \frac{\mu_2' \mu_2 \lambda_2}{\lambda_2^2 + \rho^2}, \\ \mu \sin \frac{2\pi}{T} \vartheta = \frac{\mu_2' \mu_2 \rho}{\lambda_2^2 + \rho^2}, \\ \lambda \cos \frac{2\pi}{T} \vartheta' = \lambda_1' - \frac{\mu_2'^2 \lambda_2}{\lambda_2^2 + \rho^2}, \\ \lambda \sin \frac{2\pi}{T} \vartheta' = \frac{\mu_2'^2 \rho}{\lambda_2^2 + \rho^2}, \end{array} \right.$$

le due ultime equazioni si possono scrivere:

$$(18) \dots A \mu \sin \frac{2\pi}{T} (\alpha + \vartheta) + B \left[ \lambda \sin \frac{2\pi}{T} (\beta + \vartheta') + r \cos \frac{2\pi}{T} \beta \right] = 0,$$

$$(19) \dots A \mu \cos \frac{2\pi}{T} (\alpha + \vartheta) + B \left[ \lambda \cos \frac{2\pi}{T} (\beta + \vartheta') - r \sin \frac{2\pi}{T} \beta \right] = 0,$$

Esse differiscono dalle (8) e (9) del § 4° unicamente perchè in esse figurano due ritardi distinti  $\vartheta$  e  $\vartheta'$  in luogo dell'unico  $\vartheta$  che figura in quelle. Se si trasportano nei secondi membri i termini in  $B$ , e poi si elevano al quadrato e si sommano membro a membro le due equazioni, si trova

$$(I'') \dots A^2 \mu^2 = B^2 \left( \lambda^2 + r^2 + 2 \lambda r \sin \frac{2\pi}{T} \vartheta' \right);$$

formola che corrisponde alla (I) del § precedente.

**12.** Ma nel caso delle nostre esperienze, ed in generale nei casi che si presentano cogli apparecchi d'induzione costrutti per servire quali generatori secondari nelle applicazioni, la notata differenza tra le equazioni (18), (19) e le (8), (9) scompare, od almeno può essere trascurata in uno studio di prima approssimazione come quello di cui ci occupiamo. Negli apparecchi d'induzione quali si costruiscono per le applicazioni i rapporti  $\frac{\lambda_1'}{\mu_1}$  e  $\frac{\mu_2'}{\mu_2}$  sono entrambi approssimativamente uguali al rapporto tra il numero delle spire dell'elica secondaria e quello della primaria. I due rapporti sono adunque uguali tra di loro, e si ha

$$(20) \dots \frac{\lambda_1'}{\mu_1} = \frac{\mu_2'}{\mu_2}.$$

Ora se è soddisfatta questa uguaglianza, le formole (17) danno

$$\vartheta' = \vartheta$$

e

$$(21) \dots \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda_1'}{\mu_1} = \frac{\mu_2'}{\mu_2}.$$

Nel caso poi delle esperienze che formano oggetto di questa memoria le spire, fatte con lastra sottile e tutte uguali tra di loro, erano in numero uguale nelle due spirali, e quelle di una spirale erano alternate con quelle dell'altra. Dunque non solamente la condizione (20) si trovava verificata con grande approssimazione, ma si aveva con approssimazione grandissima

$$\frac{\lambda_1'}{\mu_1} = \frac{\mu_2'}{\mu_2} = 1 .$$

Le esperienze hanno dimostrato, come vedremo, che  $\frac{\lambda}{\mu}$  era prossimamente uguale ad 1,009, ed hanno per tal modo giustificato la previsione. Convieni notare inoltre che i termini delle equazioni, sui quali influisce la differenza tra  $\mathfrak{S}$  e  $\mathfrak{S}'$ , sono essi stessi assai piccoli. Per tali considerazioni noi possiamo ritenere  $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}$ .

Ora portando questo valore di  $\mathfrak{S}'$  nelle equazioni (18) e (19), queste si riducono alle (8) e (9) del § precedente, dalle quali si deducono le (I'), (II'), (III').

**13.** Per tal modo l'esistenza del ritardo  $\mathfrak{S}$  e le relazioni del medesimo con  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , alle quali ci avevamo condotto le considerazioni del § precedente, si ritrovano per mezzo della considerazione delle correnti di Foucault. Inoltre noi abbiamo nelle equazioni (15) e (17) relazioni utili per una più minuta interpretazione dei fenomeni.

Le equazioni (17) danno i valori di  $\mu$ , di  $\lambda$  e di  $\mathfrak{S}$  in funzione di  $\mu_1$ ,  $\lambda_1'$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_2'$ ,  $\lambda_2$ ,  $\rho$ . E su tali valori si presentano alcune osservazioni.

La prima osservazione riguarda il ritardo  $\mathfrak{S}$  dovuto alle correnti di Foucault. Dalle due prime formole (17) si ricava per divisione

$$\text{tang} \frac{2\pi}{T} \mathfrak{S} = \frac{\mu_2' \mu_2 \rho}{\mu_1 (\lambda_2^2 + \rho^2) - \mu_2' \mu_2 \lambda_2} .$$

Per  $\rho = \infty$  questa espressione dà

$$\tan \frac{2\pi}{T} \mathfrak{S} = 0 ,$$

cosa che si sapeva, perchè per  $\rho = \infty$  non esistono correnti di Foucault e quindi non esiste nemmeno alcun ritardo dovuto alle medesime. Per  $\rho$  non infinito, ma grandissimo,  $\tan \frac{2\pi}{T} \mathfrak{S}$  risulta positivo e piccolo; e siccome tanto per  $\sin \frac{2\pi}{T} \mathfrak{S}$ , quanto

per  $\cos \frac{2\pi}{T} \mathfrak{S}$  le (17) danno allora valori positivi, così il valore di  $\mathfrak{S}$  risulta anch'esso positivo e molto piccolo. Diminuendo poi gradatamente  $\rho$ ,  $\mathfrak{S}$  va crescendo. Ora praticamente noi possiamo far variare e diminuire gradatamente  $\rho$ , costruendo il nucleo dapprima con fili di ferro isolati di piccolissimo diametro, e poi con fili di diametro di più in più grande; e l'esperienza ci dimostra che effettivamente i valori di  $\sin \frac{2\pi}{T} \mathfrak{S}$  corrispondenti ad un medesimo valore della variabile  $r$  risultano di più in più grandi.

La seconda osservazione riguarda i valori di  $\mu$  e di  $\lambda$ . Per  $\rho = \infty$  le equazioni (17) danno

$$\mu = \mu_1 , \quad \lambda = \lambda_1' ;$$

ma se, partendo dal valore  $\infty$ , si fa diminuire gradatamente  $\rho$ , i valori di  $\mu$  e di  $\lambda$  diventano subito minori di  $\mu_1$  e di  $\lambda'_1$ , e vanno diminuendo gradatamente. Anche questo fatto trova una conferma nei risultati delle nostre esperienze.

Bisogna finalmente notare, che quantunque le equazioni (17) e le espressioni di  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $\mathfrak{S}$ , che da esse si ricavano, non contengano nè le intensità delle due correnti primaria e secondaria, nè la resistenza  $r$  del circuito secondario, tuttavia nel fatto tali intensità e tale resistenza influiscono sui valori di  $\mu$  e di  $\lambda$  e del ritardo  $\mathfrak{S}$ . Infatti l'ipotesi che si è fatto nello scrivere le equazioni differenziali (10), l'ipotesi che  $M_1$ ,  $L_1$ ,  $L'_1$ ,  $M_2$ ,  $M'_2$ ,  $L_2$  sieno costanti, non è approssimativamente vera se non quando il ferro è lontano dalla condizione di saturazione magnetica. Nella realtà tutti i nominati coefficienti di induzione diminuiscono col crescere della intensità della magnetizzazione; quindi diminuiscono col crescere di  $A$  e di  $B$ , e per un dato valore di  $A$  diminuiscono col crescere di  $r$  (\*).

Siccome poi le grandezze  $\mu_1$ ,  $\lambda'_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu'_2$ ,  $\lambda_2$ , dalle quali dipendono i valori di  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $\mathfrak{S}$  ricavati dalle equazioni (17), sono inversamente proporzionali alla durata  $T$  del periodo delle correnti alternative, così noi prevediamo che i valori di  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\mathfrak{S}$ , determinati sperimentalmente coll'uso di correnti alternative debbono, per un medesimo trasformatore, risultare diversi a seconda del numero delle inversioni che la corrente adoperata subisce in ogni unità di tempo. Questa osservazione, che tutte le esperienze confermano, si estende evidentemente anche ai casi nei quali si son voluti determinare i coefficienti di induzione per mezzo di esperienze con correnti alternative e di calcoli fatti colla formola incompleta (1) da noi ricordata al § 3°.

## § 6°

### Dissipazione di energia; relazione di essa col ritardo $\mathfrak{S}$ e colle grandezze $a$ , $b$ , $c$ direttamente misurate nelle esperienze.

**14.** Le cause del ritardo  $\mathfrak{S}$ , dovunque esse stieno, stieno esse nei fenomeni di isteresi, o nelle correnti di Foucault, o negli uni e nelle altre insieme, danno anche luogo ad una dissipazione di energia. Fra la dissipazione di energia ed il ritardo esiste una relazione semplice. Tale relazione è indipendente dalla causa dell'una e dell'altro; e noi infatti la possiamo ricavare per mezzo delle equazioni differenziali (5) e (6), nello scrivere le quali abbiamo bensì ammesso l'esistenza di un ritardo  $\mathfrak{S}$ , ma non abbiamo fatto alcuna ipotesi sulle cause di esso.

A quest'uopo ci basta osservare che la energia dissipata è uguale alla differenza tra il lavoro somministrato dalla forza elettromotrice  $e$  e quello che viene restituito sotto forma di calore nei due circuiti primario e secondario. Ora il lavoro fatto

---

(\*) Si sa infatti che per una data corrente primaria l'intensità della magnetizzazione del nucleo dipende dalla resistenza del circuito secondario e cresce con questa (Vedi G. FERRARIS, *Ricerche teoriche e sperimentali sul generatore secondario Gaulard e Gibbs*, § 2. — Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, Serie II, Tom. XXXVII.)

nell' elemento di tempo  $dt$  dalla forza elettromotrice  $e$  è

$$e i dt,$$

mentre il lavoro trasformato in calore nei due circuiti è

$$(R i^2 + r i'^2) dt.$$

Dunque l'energia dissipata nel tempo  $dt$  è

$$(e i - R i^2 - r i'^2) dt,$$

quella dissipata durante un intero periodo  $T$  è

$$\int_0^T (e i - R i^2 - r i'^2) dt,$$

e quella dissipata, in media, in ogni unità di tempo è

$$(22) \dots \dots P = \frac{1}{T} \int_0^T (e i - R i^2 - r i'^2) dt.$$

Ora le equazioni (5) e (6) del § 4° danno:

$$\begin{aligned} e i - R i^2 &= M i \left( \frac{d i'}{d t} \right)_{t-\vartheta} + L i \left( \frac{d i}{d t} \right)_{t-\vartheta}, \\ - r i'^2 &= M i' \left( \frac{d i}{d t} \right)_{t-\vartheta} + L i' \left( \frac{d i'}{d t} \right)_{t-\vartheta}; \end{aligned}$$

quindi:

$$e i - R i^2 - r i'^2 = \begin{cases} M \left[ i \left( \frac{d i'}{d t} \right)_{t-\vartheta} + i' \left( \frac{d i}{d t} \right)_{t-\vartheta} \right] \\ + L i \left( \frac{d i}{d t} \right)_{t-\vartheta} + L i' \left( \frac{d i'}{d t} \right)_{t-\vartheta}. \end{cases}$$

Sostituendo in questa espressione ad  $i, i', \left( \frac{d i}{d t} \right)_{t-\vartheta}, \left( \frac{d i'}{d t} \right)_{t-\vartheta}$  i valori

$$i = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} (t - \alpha), \quad i' = B \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} (t - \beta)$$

$$\left( \frac{d i}{d t} \right)_{t-\vartheta} = \frac{2\pi}{T} A \cos \frac{2\pi}{T} (t - \alpha - \vartheta), \quad \left( \frac{d i'}{d t} \right)_{t-\vartheta} = \frac{2\pi}{T} B \cos \frac{2\pi}{T} (t - \beta - \vartheta),$$

poi portando tutto nella (22) ed eseguendo le quadrature, si trova con facili trasformazioni:

$$(23) \dots \dots P = \frac{\pi}{T} \left[ A^2 L + B^2 L' + 2 A B M \cos \frac{2\pi}{T} (\beta - \alpha) \right] \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta,$$

od anche:

$$P = \frac{\pi}{T} \left[ A^2 L L' + B^2 L'^2 + 2 A B M L' \cos \frac{2\pi}{T} (\beta - \alpha) \right] \frac{1}{L} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta.$$

Si può osservare che dicendo  $n$  ed  $n'$  i numeri di spire nelle due eliche del trasformatore, e rappresentando con  $k$  una costante, si ha, almeno con grande approssimazione,

$$L = kn^2, \quad L' = kn'^2, \quad M = knn',$$

e che perciò

$$LL' = M^2.$$

Se oltre a ciò si fa uso anche qui delle notazioni

$$\frac{2\pi}{T}M = \mu, \quad \frac{2\pi}{T}L' = \lambda, \quad \frac{2\pi}{T}(\beta - \alpha) = \varphi,$$

l'ultima espressione di  $P$  si può scrivere:

$$P = \left( A^2\mu^2 + B^2\lambda^2 + 2AB\mu\lambda\cos\varphi \right) \frac{1}{2\lambda} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \mathfrak{E}.$$

Ora l'equazione (II) dell'art. 8, § 4° dà

$$A^2\mu^2 + B^2\lambda^2 + 2AB\mu\lambda\cos\varphi = B^2r^2,$$

dunque:

$$(24) \dots\dots P = \frac{B^2r^2}{2\lambda} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \mathfrak{E}.$$

Se diciamo  $Q$  la media quantità di energia che in ogni unità di tempo si svolge nel totale circuito secondario, abbiamo

$$Q = \frac{B^2r}{2};$$

dunque:

$$(25) \dots\dots \frac{P}{Q} = \frac{r}{\lambda} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \mathfrak{E}.$$

Questa formola esprime una relazione notevole tra il ritardo  $\mathfrak{E}$  e la dissipazione di energia che gli corrisponde, dissipazione che in un trasformatore ben costruito è praticamente la più importante, ed anche la sola che si abbia a considerare.

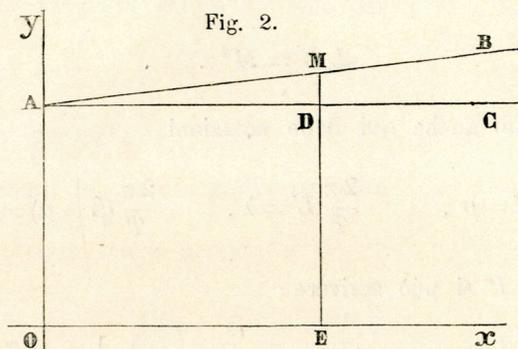
**15.** Combinando tale relazione colla (III') del § 4°, ricaviamo

$$(25') \dots\dots \frac{P}{Q} = \frac{\mu}{\lambda} \left( \frac{c}{b} - \frac{\lambda}{\mu} \right);$$

e così vediamo come il rapporto tra l'energia dissipata e l'energia prodotta nel circuito secondario sia collegato colle grandezze  $c$  e  $b$  che si misurano direttamente nelle nostre esperienze, e come esso si possa calcolare per mezzo delle medesime.

Abbiamo veduto che se in un sistema di coordinate cartesiane si portano come ascisse i valori della resistenza  $r$  del circuito secondario, e come ordinate i corrispondenti valori di  $\frac{c}{b}$  ricavati dall'esperienza, si ottiene una linea  $AB$  (fig. 2), la quale

taglia l'asse delle ordinate nel punto  $A$  di ordinata  $\overline{OA} = \frac{\lambda}{\mu}$  e che per ascisse crescenti si va allontanando dall'asse delle ascisse  $Ox$ . Si tiri pel punto  $A$  la retta



$AC$  parallela all'asse  $Ox$ ; l'ordinata  $EM$  di un punto qualunque  $M$  della linea  $AB$  taglia la retta  $AC$  in un punto  $D$ , e si ha

$$\overline{DM} = \frac{c}{b} - \frac{\lambda}{\mu}.$$

Quindi per la (25'):

$$(25'') \dots \frac{P}{Q} = \frac{\overline{DM}}{\overline{ED}}.$$

In altri termini: *l'energia dissipata sta alla energia prodotta nel circuito secondario come il segmento  $DM$  sta al segmento  $ED$ . Od ancora: se si rappresenta con  $ED$  l'energia prodotta nel circuito secondario, l'energia dissipata è rappresentata da  $DM$ .*

**16.** Le relazioni (24), (25), (25'), (25''), per dimostrare le quali non abbiamo avuto bisogno di fare alcuna ipotesi sulla causa del ritardo  $\vartheta$ , sono assolutamente generali e sussistono qualunque sia una tale causa.

Tuttavia non sarà inutile vedere come alle medesime relazioni si possa arrivare per mezzo della considerazione delle correnti di Foucault. Così infatti apparirà più chiaramente come la parte più importante della energia dissipata, che è quella che si trasforma in calore in grazia delle correnti di Foucault, dipenda dalla struttura del nucleo e dal periodo delle correnti, colle quali si fa funzionare il trasformatore.

Nelle equazioni (15) del § precedente trasportiamo nei secondi membri i termini contenenti  $H$ , eleviamo poi al quadrato e sommiamo. Ponendo, come abbiamo già fatto altre volte,

$$\frac{2\pi}{T}(\beta - \alpha) = \varphi,$$

troviamo

$$A^2 \mu_2^2 + B^2 \mu_2'^2 + 2AB \mu_2 \mu_2' \cos \varphi = H^2 (\lambda_2^2 + \rho^2);$$

ossia, dividendo per  $\mu_2^2$  e sostituendo a  $\frac{\mu_2'}{\mu_2}$  il valore  $\frac{\lambda}{\mu}$  dato dalle (21),

$$A^2 + B^2 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 2AB \frac{\lambda}{\mu} \cos \varphi = H^2 \frac{\lambda_2^2 + \rho^2}{\mu_2^2}.$$

Ora la (II) dell'art. 8, §° 4°, dà

$$A^2 + B^2 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 2AB \frac{\lambda}{\mu} \cos \varphi = \frac{B^2 r^2}{\mu^2};$$

dunque

$$(26) \dots \left(\frac{H}{B}\right)^2 = \left(\frac{\mu_2}{\mu}\right)^2 \frac{r^2}{\lambda_2^2 + \rho^2}.$$

L'energia, che in causa delle correnti parassite si trasforma in calore nell'interno del nucleo di ferro e nelle altre parti metalliche del trasformatore, è, per ogni unità di tempo,  $\rho \frac{H^2}{2}$ ; quella che nello stesso tempo viene svolta nel circuito secondario è similmente  $\frac{r B^2}{2}$ ; il rapporto della prima alla seconda è

$$\frac{\rho H^2}{r B^2}.$$

Ponendo in questa espressione per  $\left(\frac{H}{B}\right)^2$  il valore precedente (26), troviamo

$$\frac{\rho H^2}{r B^2} = \frac{r \mu_2^2 \rho}{\mu^2 \lambda_2^2 + \rho^2},$$

od anche, in grazia delle (21):

$$(27) \dots \frac{\rho H^2}{r B^2} = \frac{r \mu_2^2 \rho}{\lambda^2 \lambda_2^2 + \rho^2}.$$

Ora l'ultima delle (17), dove si deve ricordare che  $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}$ , dà:

$$\frac{1}{\lambda^2} \frac{\mu_2^2 \rho}{\lambda_2^2 + \rho^2} = \frac{1}{\lambda} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \mathfrak{S},$$

dunque

$$(25'') \dots \frac{\rho H^2}{r B^2} = \frac{r}{\lambda} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \mathfrak{S}.$$

Troviamo così per l'energia dissipata in causa delle correnti di Foucault una espressione identica alla (25), la quale dà la dissipazione di energia  $P$  indipendentemente da qualsiasi ipotesi sulla causa di essa e del ritardo  $\mathfrak{S}$  che le corrisponde.

**17.** Le esposte relazioni danno luogo ad alcune osservazioni. In primo luogo si può notare che la formola (26) si può scrivere

$$\frac{H}{\sqrt{2}} : \frac{B}{\sqrt{2}} = \frac{\mu_2}{\sqrt{\lambda_2^2 + \rho^2}} : \frac{\mu}{r};$$

e così essa ci dice che la media intensità  $\frac{H}{\sqrt{2}}$  delle correnti parassite e quella  $\frac{B}{\sqrt{2}}$  della corrente indotta utilmente nel circuito secondario stanno fra di loro nella ragione diretta dei coefficienti di induzione  $\mu_2$  e  $\mu$  della spirale primaria sui circuiti delle

correnti di Foucault e sulla spirale secondaria, e nella ragione inversa della resistenza apparente  $\sqrt{\lambda_2^2 + \rho^2}$  dei circuiti delle correnti di Foucault e della resistenza  $r$  del circuito secondario. Questa relazione si poteva facilmente prevedere.

In secondo luogo la formola (27) fa vedere che quando sono dati i valori di  $\rho$ , di  $\frac{\mu_2'}{\lambda}$  e di  $r$ , vale a dire: quando sono date la struttura del nucleo, la disposizione del trasformatore e la resistenza del circuito secondario, il rapporto  $\frac{\rho H^2}{r B^2}$  diminuisce col crescere di  $\lambda_2$ . Ora  $\lambda_2$ , che vale  $\frac{2\pi}{T} L_2$ , è direttamente proporzionale ad  $\frac{1}{T}$ , e quindi anche al numero delle inversioni di corrente che si hanno nella unità di tempo. Dunque *per un trasformatore dato e per una data resistenza del circuito secondario la perdita di energia dovuta alle correnti di Foucault rappresenta della energia spesa una frazione tanto minore quanto più è grande il numero delle inversioni di corrente che si hanno in ogni unità di tempo.*

V'hanno certamente limiti al di là dei quali le nostre equazioni cessano di essere, anche solo approssimativamente, adoperabili; ma in ogni caso noi deduciamo dalle fatte considerazioni che *da determinazioni del coefficiente di rendimento di un generatore secondario eseguite per mezzo di esperienze con correnti di un dato periodo non è possibile dedurre senza altri dati od altre misure il valore del rendimento corrispondente ad un altro valore del periodo  $T$ , ossia ad un altro numero di inversioni.*

Dato il valore di  $T$ , il rapporto  $\frac{P}{Q}$  è funzione della resistenza  $r$  del circuito secondario; e la relazione fra esso e la variabile è espressa nella formola (25). Fra i limiti, entro i quali  $\frac{1}{\lambda} \sin \frac{2\pi}{T} \vartheta$  è sensibilmente costante,  $\frac{P}{Q}$  è semplicemente proporzionale ad  $r$ . La linea  $AB$  della fig. 2 è allora una retta. Questo caso si presenta, con una approssimazione dell'ordine di quella ottenibile nelle misure, in alcuni dei casi trattati nelle nostre esperienze. Ma noi abbiamo già notato [13] che, a rigore, nè  $\lambda$  nè  $\sin \frac{2\pi}{T} \vartheta$  sono indipendenti da  $r$ ; quindi, a rigore ed in generale, la linea  $AB$  non è retta, e la relazione tra  $\frac{P}{Q}$  ed  $r$  espressa dalla (25) non è quella della semplice proporzionalità. D'accordo con queste previsioni, le esperienze discusse in questa memoria ci faranno vedere che la linea  $AB$ , la quale in alcuni casi è sensibilmente retta, è in realtà e in generale una linea curva. Esse dimostreranno inoltre che tale linea è convessa verso l'asse delle ascisse; quindi noi potremo dire che *in generale il rapporto  $\frac{P}{Q}$  non solamente cresce con  $r$ , ma cresce tanto più rapidamente quanto più  $r$  è grande.*

**18. Coefficienti di rendimento.** Se ammettiamo che la dissipazione di energia di cui abbiamo parlato, la quale comprende tanto quella dovuta alle correnti di Foucault quanto quella dovuta alla periodica magnetizzazione e smagnetizzazione del ferro, rap-

presenti la parte più importante della perdita di effetto utile che si verifica nel trasformatore, cosa che possiamo ammettere almeno per un trasformatore ben costruito e bene isolato, possiamo servirci dei risultati precedenti per dedurne una espressione del coefficiente di rendimento dell'apparecchio, ossia una espressione del rapporto tra l'energia prodotta nel circuito secondario, o di quella utilizzabile nella parte esterna del medesimo, e l'energia spesa dentro al trasformatore per farlo funzionare.

L'energia prodotta in 1" nel circuito secondario è:

$$Q = r \frac{B^2}{2};$$

e, se diciamo  $w$  la resistenza della spirale secondaria, l'energia utilizzabile sul circuito esterno è

$$\frac{r-w}{r} Q, \quad \text{ossia} \quad (r-w) \frac{B^2}{2}.$$

D'altra parte, se diciamo  $W$  la resistenza della spirale primaria, l'energia che in tale spirale si trasforma in calore è

$$W \frac{A^2}{2},$$

mentre quella che si dissipa, trasformandosi in calore nel nucleo e nelle altre parti metalliche dell'apparecchio, è quella che abbiamo rappresentato con  $P$ . Quindi la totale spesa di energia che si fa per far funzionare il trasformatore è

$$Q + W \frac{A^2}{2} + P.$$

Diciamo  $\varepsilon_1$  il rapporto tra l'energia prodotta nell'intero circuito secondario e la totale energia spesa, ed  $\varepsilon_2$  il rapporto tra l'energia utilizzabile sulla parte esterna del circuito secondario e la totale energia spesa; abbiamo subito

$$(28) \dots \quad \varepsilon_1 = \frac{r}{r + W \left(\frac{A}{B}\right)^2 + r \frac{P}{Q}},$$

$$(29) \dots \quad \varepsilon_2 = \frac{r-w}{r + W \left(\frac{A}{B}\right)^2 + r \frac{P}{Q}}.$$

Possiamo denominare questi due rapporti: *coefficiente di rendimento totale* e *coefficiente di rendimento esterno od utile*.

Se in queste espressioni di  $\varepsilon_1$  e di  $\varepsilon_2$  portiamo il valore di  $\frac{P}{Q}$  dato dalla (25)

e se poi ad  $\left(\frac{A}{B}\right)^2$  sostituiamo il valore

$$\left(\frac{A}{B}\right)^2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \frac{r^2}{\mu^2} + 2 \frac{\lambda r}{\mu^2} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$$

dato dalla (I) dell'art. 8, otteniamo:

$$(30) \dots \quad \varepsilon_1 = \frac{r}{r \left( 1 + 2 \frac{W\lambda}{\mu^2} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta \right) + W \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^2 + r^2 \left( \frac{W}{\mu^2} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta \right)},$$

$$(31) \dots \quad \varepsilon_2 = \frac{r-w}{r \left( 1 + 2 \frac{W\lambda}{\mu^2} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta \right) + W \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^2 + r^2 \left( \frac{W}{\mu^2} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta \right)}.$$

Queste due funzioni di  $r$  presentano ciascuna un massimo. Ma la determinazione esatta dei valori della resistenza  $r$  ai quali corrispondono i massimi non si può fare perchè nelle formole (30) e (31)  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $\vartheta$  rappresentano funzioni di  $r$ . Se ci limitiamo a considerare i casi nei quali  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $\vartheta$  si possono praticamente, e per una prima approssimazione, trattare come costanti, allora i valori di  $r$ , ai quali corrispondono i massimi di  $\varepsilon_1$  e di  $\varepsilon_2$  sono rispettivamente

$$(32) \dots \quad r_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \frac{\mu^2}{W\lambda} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta}},$$

$$(33) \dots \quad r_2 = w + \sqrt{w^2 + \frac{w \left( 1 + 2 \frac{W\lambda}{\mu^2} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta \right) + W \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^2}{\frac{W}{\mu^2} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta}}.$$

Se non esistesse, o non si mettesse a calcolo il ritardo  $\vartheta$ , i valori di  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  si ridurrebbero ai seguenti, che sono noti:

$$(\varepsilon_1) = \frac{r}{r + W \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^2 + r^2 \frac{W}{\mu^2}}, \quad (\varepsilon_2) = \frac{r-w}{r + W \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^2 + r^2 \frac{W}{\mu^2}},$$

$$(r_1) = \lambda, \quad (r_2) = w + \sqrt{w^2 + \frac{w}{W} \mu^2 + \lambda^2}.$$

Ora il confronto di questi valori con quelli dati dalle (30), (31), (32), (33) fa vedere che non solo  $\varepsilon_1$  ed  $\varepsilon_2$  sono minori di  $(\varepsilon_1)$  ed  $(\varepsilon_2)$ , ma variano con legge diversa; e che i valori  $r_1$  ed  $r_2$  della resistenza  $r$  del circuito secondario, ai quali corrispondono i massimi di  $\varepsilon_1$  e di  $\varepsilon_2$  sono minori di quelli  $(r_1)$  ed  $(r_2)$  ai quali corrisponderebbero i massimi di  $(\varepsilon_1)$  e di  $(\varepsilon_2)$ .

Abbiamo portato nelle (28) e (29) il valore di  $\frac{P}{Q}$  dato dalla (25); portiamo ora nelle medesime formole (28) e (29) il valore di  $\frac{P}{Q}$  dato dalla (25') e sostituiamo ad  $\left( \frac{A}{B} \right)^2$  il valore  $\frac{a}{b}$ ; arriviamo così a queste altre espressioni di  $\varepsilon_1$  e di  $\varepsilon_2$ :

$$(30') \dots \quad \varepsilon_1 = \frac{r}{W \frac{a}{b} + r \frac{\mu}{\lambda} \frac{c}{b}},$$

$$(31') \dots \quad \varepsilon_2 = \frac{r-w}{W \frac{a}{b} + r \frac{\mu}{\lambda} \frac{c}{b}}.$$

Queste formole permettono di calcolare  $\varepsilon_1$  ed  $\varepsilon_2$  direttamente per mezzo dei rapporti  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{b}$  determinati con esperienze come le nostre. Per fare uso di queste formole occorre conoscere  $\frac{\mu}{\lambda}$ . Ora se si tratta di un trasformatore a circuito magnetico chiuso, come sono quelli di Zipernowsky, Déri e Bláthy, si può ritenere che, detti  $n$  ed  $n'$  i numeri delle spire nell'elica primaria e nella secondaria, sia

$$(34) \dots \quad \frac{\mu}{\lambda} = \frac{n}{n'}.$$

Se si tratta invece di un generatore secondario a circuito magnetico aperto come erano quelli di Gaulard e Gibbs primitivi, come era quello sul quale si eseguirono le ricerche descritte in questa memoria, la relazione (34) è solamente approssimativa, ma se, come nel caso degli apparecchi accennati, le spire delle due spirali sono tutte uguali e quelle dell'elica primaria sono regolarmente alternate con quelle della secondaria, l'approssimazione di essa è sempre assai grande e superiore a quella che si richiede nelle misure aventi scopo tecnico. In ogni caso  $\frac{\mu}{\lambda}$  può essere determinato per mezzo di esperienze. Un modo di far ciò consiste nel determinare per alcuni valori molto piccoli di  $r$  i corrispondenti di  $\frac{c}{b}$ , nel tracciare con questi un breve tratto della linea  $AB$  (fig. 2), che in vicinanza dell'asse delle ordinate si può confondere con una retta, e nel trovare l'ordinata  $OA$  del punto  $A$  ove essa, prolungata, taglia l'asse delle ordinate. Questa ordinata  $OA$  rappresenta  $\frac{\lambda}{\mu}$ .

### § 7°.

#### Risultati delle esperienze.

**19.** Col metodo e cogli strumenti descritti nel § 2° si fecero cinque serie di esperienze, tutte sul medesimo generatore secondario, colle spirali collegate sempre nel medesimo modo, ma adoperando per ogni serie un diverso nucleo di ferro.

Contrassegneremo i nuclei adoperati nelle successive serie di esperienze coi numeri 1, 2, 3, 4, 5.

Il nucleo n. 1 era quello ordinario col quale il trasformatore si adoperava nella pratica; ed era costituito da un'asta cilindrica di legno coperta con un grosso strato

di fili di ferro ossidati del diametro di 0,65 millimetri. Il diametro complessivo era di mm. 46, il peso totale chilogrammi 2,92.

Il nucleo n. 2 era anch'esso formato con un'asta cilindrica di legno coperta di fili di ferro isolati, ma in esso i fili di ferro avevano il diametro di 3,3 millimetri. Il diametro dell'anima di legno era di millimetri 20, il diametro complessivo di millimetri 43, il peso totale di chilogrammi 3,55.

Il nucleo n. 3 era formato con 16 sbarre prismatiche di ferro dolce aventi una sezione trapezia di circa 60 millimetri quadrati, isolate, ed appoggiate tutt'attorno ad un'asta centrale cilindrica di legno. Il diametro complessivo medio era millimetri 43; quello dell'anima di legno millimetri 20; il peso chilogrammi 3,44.

Il nucleo n. 4 consisteva in un tubo di ferro trafilato della grossezza di 3 millimetri, del diametro esterno di 44 millimetri, del peso di 2,16 chilogrammi.

Finalmente il nucleo n. 5 era una sbarra massiccia di ferro del diametro di 42 millimetri e del peso di 6,59 chilogrammi.

Questa serie di nuclei fu scelta collo scopo di rendere di più in più sensibili gli effetti delle correnti di Foucault e di potere quindi verificare se col crescere di tali effetti il ritardo  $\tau$  ed i valori di  $\mu$  e di  $\lambda$  variassero effettivamente nel modo previsto nelle nostre considerazioni teoriche.

In tutte le cinque serie di esperienze le spirali secondarie del trasformatore stettero sempre collegate in modo da costituire una spirale unica, identica alla spirale primaria. Siccome inoltre le spire dell'elica secondaria, fatte con lastra sottile di rame, erano uguali a quelle della primaria ed alternate colle medesime, così era prevedibile

*a priori* che il rapporto  $\frac{\lambda}{\mu}$  sarebbe risultato poco diverso dall'unità.

Durante tutte le cinque serie si ebbe cura di mantenere costante la velocità della macchina e quindi anche il valore del periodo  $T$  delle correnti. Il numero di giri della macchina dinamo-elettrica veniva controllato durante ogni esperienza per mezzo di un tacometro, ed inoltre al principio ed alla fine di ogni esperienza veniva misurato direttamente con un contagiri. Inoltre si cercò, per quanto era possibile, di evitare da una esperienza all'altra le variazioni della intensità della corrente primaria, e di mantenere questa nei limiti per cui le letture sugli elettrodinamometri riuscivano più sicure.

Le esperienze si seguivano coll'ordine dei valori crescenti di  $r$ , e ciascuna serie veniva troncata quando i valori di  $\beta$  diventavano troppo piccoli per permettere una determinazione abbastanza sicura.

Ciascun valore di  $\alpha$ , o di  $\beta$ , o di  $\gamma$  veniva determinato colla media di cinque o più letture. Le letture sui tre elettrodinamometri, fatte da tre osservatori, erano simultanee.

#### NUCLEO N. 1.

(Filo di ferro di 0,65 millimetri).

**20.** Le esperienze col nucleo n. 1 furono le prime eseguite, e furono appunto i fatti in esse osservati quelli che ci guidarono alle considerazioni svolte nei §§ precedenti. I risultati di queste prime esperienze sono già stati esposti nel § 2°, ove

all'art. 5° è data la tabella delle letture  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e dei valori di  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{c}{b}$ , con esse calcolati.

Per mezzo di tale tabella abbiamo già constatato il fatto fondamentale, che il rapporto  $\frac{c}{b}$ , invece di essere indipendente da  $r$  come vorrebbero le equazioni teoriche dell'art. 6°, § 3, cresce col crescere di questa variabile. Abbiamo anzi notato che se in un sistema di coordinate cartesiane si prendono come ascisse i valori di  $r$  e come ordinate i corrispondenti valori di  $\frac{c}{b}$ , e se poi si congiungono i punti così ottenuti con una linea (linea I della tavola litografata), questa serpeggia attorno ad una retta, la quale taglia l'asse delle ordinate ad una distanza dalla origine molto prossima all'unità. Ora questo risultato collima colla equazione (III') del § 4°, cioè colla

$$(III') \dots \quad \frac{c}{b} = \frac{\lambda}{\mu} + r \frac{\text{sen } \frac{2\pi}{T} \vartheta}{\mu},$$

alla sola condizione che  $\frac{1}{\mu} \text{sen } \frac{2\pi}{T} \vartheta$  sia sensibilmente costante. Infatti in questa ipotesi l'equazione (III') rappresenta appunto una retta che sale colla pendenza  $\frac{1}{\mu} \text{sen } \frac{2\pi}{T} \vartheta$ , della quale l'ordinata all'origine ha il valore  $\frac{\lambda}{\mu}$ , che noi sappiamo *a priori* molto prossimo all'unità.

Se per un momento ammettiamo l'ipotesi che  $\frac{1}{\mu} \text{sen } \frac{2\pi}{T} \vartheta$  sia costante, possiamo servirci nella equazione (III') per determinare col metodo dei minimi quadrati i valori più probabili  $\frac{1}{\mu} \text{sen } \frac{2\pi}{T} \vartheta$  e di  $\frac{\lambda}{\mu}$ . Portando poi questi valori più probabili nella equazione (III'), calcolando con questa i valori di  $\frac{c}{b}$  corrispondenti ai valori di  $r$  adoperati nelle esperienze, e paragonando i valori di  $\frac{c}{b}$  così calcolati con quelli ricavati direttamente dall'esperienza, potremo verificare se la ipotesi fatta sia ammissibile.

I valori di  $\frac{\lambda}{\mu}$  e di  $\frac{1}{\mu} \text{sen } \frac{2\pi}{T} \vartheta$ , ai quali conduce il metodo dei minimi quadrati applicato alla equazione (III'), sono

$$(35) \dots \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\sum \frac{c}{b} \Sigma r^2 - \Sigma r \Sigma \frac{c}{b} r}{n \Sigma r^2 - (\Sigma r)^2}, \quad \frac{1}{\mu} \text{sen } \frac{2\pi}{T} \vartheta = \frac{n \Sigma \frac{c}{b} r - \Sigma r \Sigma \frac{c}{b}}{n \Sigma r^2 - (\Sigma r)^2},$$

ove  $\Sigma$  indica somme estese a tutte le esperienze, ed  $n$  il numero di queste. Portando in queste formole i valori di  $r$  e di  $\frac{c}{b}$  registrati nella tabella dei risultati delle

esperienze data nel § 2°, valori che riproduciamo anche nella tabella seguente, troviamo :

$$(36). \dots \quad \frac{\lambda}{\mu} = 1,0118, \quad \frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta = 0,01224.$$

Mettendo questi valori nella (III'), possiamo adesso calcolare pe' successivi valori che  $r$  aveva nelle esperienze i corrispondenti valori di  $\frac{c}{b}$ , e paragonarli con quelli direttamente ricavati dalle esperienze. La seguente tabella contiene nelle colonne intestate  $r$ ,  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{c}{b}$  i valori ricavati direttamente dall'esperienza e presi dalla tabella del § 2°. Nella penultima colonna sono registrati i valori di  $\frac{c}{b}$  calcolati colla (III'), e nell'ultima si vedono le differenze tra i valori di  $\frac{c}{b}$  misurati direttamente e quelli calcolati.

N°	$r$	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{b}$	$\frac{c}{b}$ calcolato	$\delta$
1	0,409	1,026	1,010	1,017	- 0,007
2	1,953	1,117	1,039	1,035	+ 4
3	3,224	1,215	1,054	1,051	+ 3
4	4,462	1,363	1,074	1,066	+ 8
5	5,713	1,561	1,082	1,082	0
6	6,958	1,784	1,097	1,097	0
7	8,542	2,152	1,109	1,116	- 0,007
8	9,760	2,569	1,134	1,131	+ 3
9	11,000	2,923	1,142	1,146	- 4
10	12,240	3,476	1,162	1,162	0
11	13,470	4,249	1,167	1,177	- 0,010
12	14,790	4,969	1,203	1,193	+ 0,010

Le differenze registrate nell'ultima colonna non superano in grandezza quelle dovute agli errori probabili delle osservazioni; l'ipotesi adunque che ha servito di base al calcolo è ammissibile finchè si sta nell'ordine di approssimazione concesso dalle nostre misure. Vedesi però che le differenze relative alle prime esperienze sono quasi tutte positive, mentre per le ultime esperienze le differenze positive si alternano colle negative. Il fatto si può interpretare ammettendo che la linea rappresentata dalla equazione (III') sia leggermente convessa verso l'asse delle ascisse. Questa osservazione sarà meglio giustificata dalla discussione delle esperienze fatte coi nuclei n. 3, 4 e 5.

Il valore (36) di  $\frac{\lambda}{\mu}$  è, come si prevedeva, molto prossimo all'unità ed un po' superiore alla medesima. Ma era interessante vedere se tale valore collimasse con quello determinato direttamente con altri metodi. Perciò cercai di determinare  $\frac{\lambda}{\mu}$  per mezzo di uno dei procedimenti descritti dal Maxwell, i quali si basano sull'uso del ponte di Wheatstone (\*). Trovai come media di cinque determinazioni.

$$(37) \quad \frac{\lambda}{\mu} = 1,0086 .$$

La differenza tra i due valori (36) e (37) è, come si vede, nei limiti di quelle attribuibili agli errori d'osservazione.

**21.** Trovati così i valori di  $\frac{\lambda}{\mu}$  e di  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$ , potremmo determinare per le singole esperienze i valori di  $\mu$  e di  $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$ . Per determinare  $\mu$  potremmo servirci dell'equazione (II') (§ 4°, art. 9), la quale dà;

$$(38) \quad \mu = \frac{r}{\sqrt{\frac{a}{b} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 - 2 \frac{\lambda}{\mu} \frac{c}{b}}}$$

e per determinare  $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  ci basterebbe moltiplicare il valore di  $\mu$  pel valore (36) di  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$ .

Siccome però l'esame delle differenze  $\delta$  registrate nella tabella precedente ci ha fatto prevedere che  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  non è costante, e siccome vedremo che nelle ultime serie di esperienze la costanza di  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  non si può ammettere nemmeno come prima approssimazione, così è più opportuno calcolare direttamente e separatamente per ciascun valore di  $r$  i valori di  $\mu$ , di  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  e di  $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  che risultano dalla esperienza relativa al valore di  $r$  medesimo. Per fare questo calcolo attribuiremo al rapporto  $\frac{\lambda}{\mu}$  un valore determinato direttamente una volta per tutte, e propriamente il valore

$$\frac{\lambda}{\mu} = 1,0086$$

trovato col metodo di Maxwell, il quale coincide esattamente con quello che vedremo risultare dalla seconda serie di esperienze, e rappresenta assai bene una media di

(\*) MAXWELL: *Electricity and Magnetism* (Oxford 1873), Vol. II, pagg. 356-57, formola (15).

tutti i valori ricavati dal complesso di tutte le serie. Posto questo valore di  $\frac{\lambda}{\mu}$ , calcoleremo  $\mu$  ed  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  per mezzo delle equazioni (II') e (III'), che danno

$$(38) \dots \mu = \frac{r}{\sqrt{\frac{a}{b} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 - 2 \frac{\lambda}{\mu} \frac{c}{b}}},$$

ed

$$(39) \dots \frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta = \frac{1}{r} \left( \frac{c}{b} - \frac{\lambda}{\mu} \right);$$

finalmente moltiplicheremo tra di loro i valori di  $\mu$  e di  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  così trovati, ed avremo il corrispondente valore di  $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$ .

Poichè per le ultime serie di esperienze non abbiamo altro modo di fare il calcolo, e poichè giova, per i confronti, che tutte le serie vengano calcolate nel medesimo modo, l'esposto procedimento è per noi il più conveniente. Ma prima di adoperarlo dobbiamo fare qualche osservazione sull'ordine di approssimazione che il calcolo può dare.

È innanzi tutto evidente che i numeri che troveremo, essendo ricavati ciascuno dalle letture di un solo esperimento, non potranno presentare progressioni così regolari come quelli che ricaveremmo facendo uso dei valori di  $\frac{\lambda}{\mu}$  e di  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  calcolati col complesso di tutte le esperienze per mezzo del metodo dei minimi quadrati. Ma oltre a ciò è necessario notare ancora che l'ordine di approssimazione, col quale le formole (38) e (39) permettono di calcolare  $\mu$  ed  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$ , è per alcune esperienze notevolmente minore di quello col quale si hanno dall'esperienza  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{b}$ .

Se infatti rappresentiamo con  $\delta \frac{c}{b}$  un errore commesso nella determinazione di  $\frac{c}{b}$  e con  $\delta \mu$  e  $\delta y$  gli errori che in causa di esso risultano nei valori calcolati di  $\mu$  e di  $y = \frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$ , ricaviamo dalle (38) e (39), per mezzo di una differenziazione e di semplici trasformazioni:

$$(40) \dots \frac{\delta \mu}{\mu} = \frac{\lambda \mu^2}{\mu r^2} \cdot \delta \frac{c}{b},$$

$$(41) \dots \frac{\delta y}{y} = \frac{\frac{c}{b}}{\frac{c}{b} - \frac{\lambda}{\mu} \frac{c}{b}} \delta \frac{c}{b}.$$

Ora queste formole dimostrano che per le prime esperienze di ogni serie, nelle quali la resistenza  $r$  e la differenza  $\frac{c}{b} - \frac{\lambda}{\mu} \frac{c}{b}$  hanno valori assai piccoli, gli errori relativi

$\frac{\partial \mu}{\mu}$  e  $\frac{\partial y}{y}$  risultano assai più grandi di quelli di cui è affetto  $\frac{b}{c}$ ; ed anche talmente grandi da rendere illusorio il calcolo. Per renderci conto della grandezza degli errori possibili nel caso delle nostre esperienze, possiamo porre in luogo di  $\frac{\lambda}{\mu}$  l'unità, e poi supporre, come di fatti si deve ritenere che fosse,  $\delta \frac{c}{b} = 0,01$ . Allora la (40) dà

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = 0,01 \frac{\mu^2}{r^2}.$$

Quindi si vede che se  $\frac{r}{\mu}$  non supera il valore  $\sqrt{0,1}$ , ossia il valore 0,316, l'errore relativo  $\frac{\partial \mu}{\mu}$  può risultare uguale a 0,1 ed anche maggiore. Siccome in media e in cifra tonda si ha  $\mu = 9$ , così possiamo concludere che si può avere su  $\mu$  un errore relativo maggiore del dieci per cento per tutte le esperienze fatte con una resistenza  $r$  non maggiore di  $0,316 \times 9$  ossia di 2,8 ohm circa. Questo è il caso delle prime due esperienze. Per la prima esperienza si può anzi dire che il calcolo di  $\mu$  fatto colla (38) è illusorio; infatti, posto  $r = 0,409$ , come era in quella esperienza, e facendo, come testè,  $\mu = 9$ , si ha

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = 0,01 \left( \frac{9}{0,409} \right)^2 = 4,84.$$

Che sia assurdo voler dedurre dalla (38) il valore di  $\mu$  corrispondente alla prima esperienza, si vede anche subito osservando che la somma algebrica  $\frac{a}{b} + \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^2 - 2 \frac{\lambda}{\mu} \frac{c}{b}$  ha per prima cifra significativa quella dei millesimi, e non può quindi essere determinata con esperienze esatte solamente fino nei centesimi.

Analoghe, e più gravi, sono le osservazioni alle quali dà luogo la (39). Siccome  $\frac{c}{b} - \frac{\lambda}{\mu}$  ha per tutte le esperienze un valore assai piccolo, così l'errore relativo  $\frac{\partial y}{y}$  di  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  è sempre molto maggiore di quello che si ha su  $\frac{c}{b}$ . Il rapporto fra i due

errori relativi nominati è  $\frac{\frac{c}{b}}{\frac{c}{b} - \frac{\lambda}{\mu}}$ , ed anche per la 12<sup>a</sup> esperienza, ove  $\frac{c}{b} - \frac{\lambda}{\mu}$  ha il mas-

simo valore, esso vale circa 6. Supposto che l'errore relativo su  $\frac{c}{b}$  sia 0,01, quello su  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  potrebbe essere, anche per l'ultima esperienza, uguale a 0,06. Acciocchè l'errore relativo  $\frac{\partial y}{y}$  non superi 0,1, quando quello su  $\frac{c}{b}$  è di 0,01, deve essere  $\frac{c}{b} \geq 1,11$ . L'errore di  $\frac{1}{10}$  si può quindi avere per tutte le cinque o sei prime esperienze.

In base a queste osservazioni noi ci limiteremo a dare i valori di  $\mu$ , di  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  e di  $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  con due cifre, escluderemo dai calcoli la prima esperienza, e nelle discussioni relative ai valori di  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  e di  $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  terremo conto principalmente delle esperienze fatte con valori di  $r$  piuttosto grandi.

**22.** Fatte queste premesse, diamo nello specchio seguente i risultati del calcolo fatto colle formole (38) e (39) e col dato

$$\frac{\lambda}{\mu} = 1,0086 .$$

N°	$r$	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{b}$	$\mu$	$\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$	$\operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$
2	1,953	1,117	1,039	10,10	0,016	0,16
3	3,224	1,215	1,054	9,87	0,014	0,14
4	4,462	1,363	1,074	9,66	0,015	0,14
5	5,713	1,561	1,082	9,09	0,013	0,12
6	6,958	1,784	1,097	9,08	0,013	0,12
7	8,542	2,152	1,109	8,85	0,012	0,10
8	9,760	2,569	1,134	8,57	0,013	0,11
9	11,000	2,923	1,142	8,60	0,012	0,10
10	12,240	3,476	1,162	8,35	0,013	0,10
11	13,470	4,249	1,167	7,90	0,012	0,09
12	14,790	4,969	1,203	7,84	0,013	0,10

I valori di  $\mu$  registrati in questa tabella vanno diminuendo gradatamente, ed abbastanza regolarmente, mentre cresce la resistenza  $r$ . Tale fatto collima colle previsioni, poichè col crescere di  $r$  cresce la intensità della magnetizzazione del nucleo (\*).

Il valore di  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  diminuisce anch'esso nelle prime esperienze; ma se, ricordando le osservazioni fatte all'art. 21 intorno agli errori probabili, lasciamo in disparte le esperienze 2, 3 e 4, per le quali sappiamo già che non si può contare sull'esattezza della seconda cifra significativa, e portiamo invece la nostra attenzione unicamente sulle esperienze successive, vediamo che  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  oscilla tra 0,012 e 0,013 senza accennare in modo sensibile nè a diminuire nè a crescere.

(\*) G. FERRARIS — Memoria citata — *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino* — Serie II, vol. XXXVII pagg. 107—108.

E finalmente  $\text{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  dopo una diminuzione alquanto rapida nelle prime esperienze, alla quale però per le fatte osservazioni non possiamo dare alcuna importanza, segue, a partire dall'esperienza 5<sup>a</sup>, una progressione decrescente lenta e regolare.

Per farci una idea dell'ordine di grandezza del ritardo  $\vartheta$  ci basterà calcolarlo per uno dei valori di  $\text{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  trovati. Possiamo porre

$$\text{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta = 0,11.$$

Ora questo seno corrisponde ad un arco di  $6^\circ 19'$ ; quindi abbiamo:

$$\vartheta : T = 6^\circ 19' : 360^\circ,$$

donde

$$\frac{\vartheta}{T} = 0,01755 = \frac{1}{57}.$$

Per avere poi  $\vartheta$  in secondi basta ricordare che durante le esperienze la velocità della macchina dinamo-elettrica era in media di 604 giri per minuto (Vedi la tabella all'art. 5). Essendo otto per ogni giro le inversioni della corrente, una tale velocità corrisponde a  $\frac{604 \times 4}{60}$ , ossia a 40,28 periodi per minuto secondo. Quindi

$$T = \frac{1}{40,28}$$

e

$$\vartheta = \frac{1}{40,28} \cdot \frac{1}{57} = \frac{1}{2296} \text{ di } 1''.$$

#### NUCLEO N. 2.

(*Filo di ferro di 3,3 millimetri*).

**23.** Le esperienze furono eseguite colle medesime resistenze  $r$  che si erano già adoperate in quelle della prima serie. I risultati sono registrati nella tabella seguente:

N°	$n$	$r$	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{b}$	$\frac{c}{b}$ calcolato	$\delta$
1	600	0,409	1,030	1,011	1,016	- 0,005
2	602	1,953	1,119	1,050	1,043	+ 7
3	602	3,224	1,232	1,073	1,065	+ 8
4	603	4,462	1,364	1,078	1,086	- 8
5	602	5,713	1,540	1,109	1,108	+ 1
6	601	6,958	1,746	1,131	1,130	+ 1
7	603	8,542	2,055	1,159	1,157	+ 2
8	604	9,760	2,319	1,174	1,179	- 5
9	602	11,000	2,768	1,195	1,200	- 5
10	601	12,240	3,118	1,224	1,222	+ 2
11	603	13,470	2,355	1,228	1,243	- 0,015
12	603	14,790	3,837	1,284	1,266	+ 18

Anche qui, come già nella prima serie di esperienze, si vede subito che gli aumenti di  $\frac{c}{b}$  sono, almeno approssimativamente, proporzionali a quelli di  $r$ . Se si portano le  $r$  come ascisse e le  $\frac{c}{b}$  come ordinate si trova anche qui una linea (linea II della tavola litografata), la quale serpeggia attorno ad una retta. Anche qui adunque si può cominciare a ritenere provvisoriamente  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  come costante, salvo a verificare poi entro quali limiti l'ipotesi sia ammissibile, e far servire l'equazione (III'), che colla fatta ipotesi diventa quella di una retta, a determinare coi minimi quadrati  $\frac{\lambda}{\mu}$  e  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$ .

Il calcolo fatto colle formole (35) dà:

$$(42) \dots \quad \frac{\lambda}{\mu} = 1,0086, \quad \frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta = 0,01742.$$

Portando questi valori nell'equazione (II') e calcolando con questa i valori di  $\frac{c}{b}$  corrispondenti ai valori di  $r$  adoperati nelle esperienze, si ottengono i numeri registrati nella penultima finca del quadro precedente. L'ultima finca, intestata  $\delta$ , contiene le differenze tra i valori di  $\frac{c}{b}$  dati direttamente dalle esperienze e quelli calcolati nel modo ora detto. Ora si vede che, oltre alle oscillazioni dovute agli errori accidentali di osservazione, le differenze  $\delta$  presentano, a partire dalla seconda esperienza, una diminuzione graduale e passano da valori positivi a negativi. E ciò dimostra che la linea rappresentata dalla (III') è leggermente incurvata ed è convessa verso l'asse delle ascisse. Tuttavia la variazione regolare delle differenze  $\delta$  è assai lenta, e quindi le (42) danno effettivamente la prima un valore approssimato di  $\frac{\lambda}{\mu}$  e la seconda un valore medio di  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$ .

Il valore di  $\frac{\lambda}{\mu}$  coincide con quello ricavato colle esperienze dirette.

Il valore poi di  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  è, come dovevamo prevedere, maggiore di quello che si è avuto col nucleo n° 1; e lo è così notevolmente, che su questo punto le previsioni delle nostre teorie risultano senz'altro pienamente confermate.

Dopo questo calcolo preliminare, possiamo adesso determinare per i singoli valori di  $r$  i valori corrispondenti di  $\mu$ , di  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  e di  $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$ . Per le ragioni esposte nell'articolo precedente adoperiamo anche per questa serie di esperienze, e per tutte le successive, le formole (38) e (39). Lo specchio seguente contiene i risultati del calcolo.

N°	$r$	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{b}$	$\mu$	$\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \mathfrak{D}$	$\operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \mathfrak{D}$
2	1,953	1,119	1,050	14,02	0,021	0,29
3	3,224	1,232	1,073	11,04	0,023	0,25
4	4,462	1,364	1,078	9,82	0,016	0,15
5	5,713	1,540	1,109	10,10	0,018	0,18
6	6,958	1,746	1,131	10,02	0,018	0,18
7	8,542	2,055	1,159	10,01	0,018	0,18
8	9,760	2,319	1,174	9,92	0,017	0,17
9	11,000	2,768	1,195	9,37	0,017	0,16
10	12,240	3,118	1,224	9,48	0,018	0,17
11	13,470	3,355	1,228	9,76	0,016	0,16
12	14,790	3,837	1,284	9,83	0,019	0,18

Relativamente a questi risultati si debbono tenere presenti le osservazioni fatte all'articolo 21. In causa di queste osservazioni furono ommessi nella tabella i risultati relativi alla prima esperienza.

Il valore di  $\mu$  anche qui, come pel nucleo 1, va diminuendo mentre cresce  $r$ . La diminuzione, rapida in principio, diviene di più in più lenta per i grandi valori di  $r$ . Se si eccettuano le prime esperienze, la diminuzione graduale di  $\mu$  è pel nucleo n° 2 più lenta che non pel nucleo n° 1; e ciò si spiega osservando che il nucleo n° 2 contiene una massa di ferro maggiore del n° 1, epperò per una medesima intensità della corrente magnetizzante si accosta meno alla saturazione magnetica.

Se si tralasciano le prime esperienze (n° 2 e n° 3) per le quali, secondo le osservazioni dell'articolo 21, non si può contare sulla seconda cifra significativa, il valore di  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \mathfrak{D}$ , come già si è notato pel nucleo n° 1, oscilla attorno ad un valore approssimativamente costante compreso tra 0,017 e 0,018. È però da osservarsi come partendo dalla esperienza 8ª i numeri che rappresentano  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \mathfrak{D}$  accennino ad un incipiente aumento, che forse si accentuerebbe meglio, se si avessero esperienze con più grandi valori di  $r$ . Questa induzione sarà giustificata dall'esame dei risultati delle ulteriori serie di esperienze.

$\operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \mathfrak{D}$  va diminuendo alquanto, ma assai meno rapidamente che non nelle esperienze sul primo nucleo.

Per farci una idea dell'ordine di grandezza del ritardo  $\mathfrak{D}$ , che, come vedesi, è

assai maggiore di quello trovato pel nucleo n° 1, ci basta considerare una esperienza scelta nella parte più regolare della serie. Prenderemo

$$\text{sen } \frac{2\pi}{T} \vartheta = 0,18 .$$

Questo seno corrisponde a un arco di  $10^{\circ} 22'$ , ossia di gradi 10,366. Quindi

$$\frac{\vartheta}{T} = \frac{10,366}{360} = 0,0288 = \frac{1}{34,72} .$$

Durante l'intera serie di esperienze la velocità della macchina dinamoelettrica fu in media di 602 giri per minuto, e perciò si ha:

$$\frac{1}{T} = \frac{602 \times 4}{60} = 40,13 ;$$

dunque

$$\vartheta = \frac{1}{34,72 \times 40,13} = \frac{1}{1393} \text{ di } 1'' .$$

#### NUCLEO N° 3.

(*Verghe di sezione trapezia di 65 millimetri quadrati di sezione*).

**24.** Col nucleo n° 3 le esperienze non poterono essere protratte oltre alla decima, perchè con maggiori valori di  $r$  la intensità della corrente secondaria diventava troppo piccola per poter essere misurata con sicurezza per mezzo dell'elettrodinamometro, e perchè il riscaldamento del nucleo diventava eccessivo. Le prime dieci esperienze però furono eseguite colle resistenze  $r$  delle serie precedenti, e diedero i risultati raccolti nel seguente specchietto.

N°	$n$	$r$	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{b}$
1	599	0,409	1,050	1,039
2	602	1,953	1,217	1,087
3	604	3,224	1,438	1,154
4	602	4,462	1,719	1,202
5	603	5,713	2,146	1,286
6	602	6,958	2,611	1,392
7	601	8,542	3,315	1,464
8	601	9,760	4,110	1,615
9	601	11,000	4,630	1,645
10	601	12,240	5,280	1,739

Se, analogamente a ciò che abbiamo fatto per le serie precedenti, supponiamo costante  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  e determiniamo per mezzo dei minimi quadrati i valori di  $\frac{\lambda}{\mu}$  e di  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$ , troviamo

$$\frac{\lambda}{\mu} = 0,9614, \quad \frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta = 0,06275.$$

Ora è impossibile che  $\frac{\lambda}{\mu}$  sia minore dell'unità; e per spiegare il valore trovato bisogna ammettere che la linea rappresentata dalla equazione (III') sia curva colla convessità verso l'asse delle ascisse. Questo fatto è assai nettamente indicato dalla poligonale III della tavola grafica. Il valore trovato per  $\frac{\lambda}{\mu}$  rappresenta allora l'ordinata all'origine di una corda, la quale taglia certamente l'asse delle ordinate al di sotto del punto ove l'asse medesimo è tagliato dalla curva, punto la cui ordinata rappresenta il vero valore di  $\frac{\lambda}{\mu}$ . Se questa spiegazione è vera, dobbiamo prevedere che applicando il metodo dei minimi quadrati solamente alle prime esperienze si abbia a trovare un valore di  $\frac{\lambda}{\mu}$  maggiore del precedente e più prossimo al vero, ed un valore di  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  minore del precedente. E ciò si verifica effettivamente: se pel calcolo coi minimi quadrati adoperiamo soltanto le prime cinque esperienze, troviamo:

$$\frac{\lambda}{\mu} = 1,0086, \quad \frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta = 0,0461.$$

Questa notevole concordanza co' risultati delle altre serie di esperienze dà maggior valore alla dimostrazione.

Nello specchio seguente raccogliamo ora i valori di  $\mu$ , di  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  e di  $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  calcolati, come per le serie precedenti, e colle medesime osservazioni, per mezzo delle formole (38) e (39).

N°	$r$	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{b}$	$\mu$	$\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$	$\operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$
2	1,953	1,217	1,087	9,56	0,040	0,39
3	3,224	1,438	1,154	9,05	0,045	0,41
4	4,462	1,719	1,202	8,00	0,043	0,35
5	5,713	2,146	1,286	7,58	0,049	0,37
6	6,958	2,611	1,392	7,68	0,055	0,42
7	8,542	3,315	1,464	7,28	0,053	0,39
8	9,760	4,110	1,615	7,14	0,062	0,44
9	11,000	4,630	1,645	7,21	0,058	0,42
10	12,240	5,280	1,739	7,33	0,060	0,44

Il valore di  $\mu$  diminuisce col crescere di  $r$ , come nei casi già esaminati. Ma

$$\frac{1}{\mu} \text{sen } \frac{2\pi}{T} \vartheta,$$

che nelle esperienze coi nuclei n° 1 n° 2, dopo una rapida diminuzione indicata dalle prime esperienze, diventava sensibilmente costante a partire dall'esperienza n° 5, qui invece comincia subito a crescere, e cresce assai sensibilmente per tutta la serie di esperienze. Per conseguenza  $\text{sen } \frac{2\pi}{T} \vartheta$ , che nelle precedenti serie di esperimenti diminuiva gradatamente, qui rimane sensibilmente costante, ed anzi accenna ad un leggero aumento.

Intanto è notevole il grande valore di  $\text{sen } \frac{2\pi}{T} \vartheta$  e quindi di  $\vartheta$ . Se si pone

$$\text{sen } \frac{2\pi}{T} \vartheta = 0,407,$$

valore assai prossimo al medio de' numeri registrati nell'ultima colonna della tabella, l'arco  $\frac{2\pi}{T} \vartheta$  risulta di 24 gradi; quindi si ha:

$$\frac{\vartheta}{T} = \frac{24}{360} = \frac{1}{15}.$$

Si aveva in media  $n = 602$ , ossia  $\frac{1}{T} = 40,13$ ; quindi

$$\vartheta = \frac{1}{602} \text{ di } 1''.$$

NUCLEO N° 4.

(Tubo di ferro).

**25.** Il rapido aumento di  $\frac{a}{b}$  e l'intenso riscaldamento che si aveva col nucleo n° 4 rendevano impossibile sperimentare con grandi valori di  $r$ . Quindi la quarta serie dovette essere limitata alle esperienze relative alle otto prime resistenze già adoperate nelle altre serie. I risultati furono i seguenti:

N°	$n$	$r$	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{b}$
1	603	0,409	1,083	1,045
2	602	1,953	1,503	1,197
3	605	3,224	2,086	1,367
4	600	4,462	2,793	1,514
5	601	5,713	3,773	1,700
6	603	6,958	4,686	1,832
7	600	8,542	6,106	2,083
8	603	9,760	7,294	2,213

Se si applica a questi numeri il metodo dei minimi quadrati per determinare  $\frac{\lambda}{\mu}$  ed  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$ , supposti costanti, si trova, come già col nucleo precedente, un valore di  $\frac{\lambda}{\mu}$  minore dell'unità, e quindi certamente minore del vero. Ciò si spiega, come nel caso precedente, ammettendo che la linea rappresentata dall'equazione (III') sia curva e convessa verso l'asse delle ascisse. E questa spiegazione si può confermare rifacendo il calcolo per mezzo delle sole prime tre o quattro esperienze ed osservando che così si arriva ad un valore di  $\frac{\lambda}{\mu}$  maggiore e ad un valore di  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  minore del precedente.

La curvatura della linea rappresentata dalla equazione (III') è d'altronde chiaramente indicata dalla poligonale IV della tavola grafica.

Qui sotto sono registrati i valori di  $\mu$ , di  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  e di  $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  calcolati colle formole (38) e (39) e col valore

$$\frac{\lambda}{\mu} = 1,0086$$

già adoperato nel calcolo delle serie precedenti:

N°	$r$	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{b}$	$\mu$	$\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$	$\operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$
2	1,953	1,503	1,197	6,00	0,096	0,58
3	3,224	2,086	1,367	5,48	0,111	0,61
4	4,462	2,793	1,514	5,13	0,113	0,58
5	5,713	3,773	1,700	4,90	0,120	0,59
6	6,958	4,686	1,832	4,91	0,118	0,58
7	8,542	6,106	2,083	4,99	0,125	0,63
8	9,760	7,294	2,213	4,98	0,123	0,61

Questa tabella dà luogo ad osservazioni analoghe a quelle che abbiamo fatto intorno ai risultati della serie precedente:  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  cresce regolarmente, e fin dal principio, col crescere di  $r$ ; e  $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  non solo non diminuisce, ma accenna a crescere alquanto.

È poi notevole la grandezza dei valori di  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  e di  $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$ . Per farci una idea del ritardo  $\vartheta$ , a cui tali valori corrispondono, ci basta osservare che il numero 0,588, che approssimativamente rappresenta la media di quelli registrati nell'ultima finca, è uguale al seno dell'arco di  $36^\circ$ . Perciò si ha in media, approssimativamente,

$$\frac{\vartheta}{T} = \frac{36}{360} = \frac{1}{10};$$

cioè il ritardo  $\vartheta$  è uguale a circa un decimo del periodo, o ad *un quinto dell'intervallo fra due successive inversioni di corrente*. Siccome si ha in media  $n=602$ , ossia  $\frac{1}{T}=40,13$ , così si ha

$$\vartheta = \frac{1}{40,13 \times 10} = \frac{1}{401} \text{ di } 1''.$$

NUCLEO n° 5.

(Sbarra massiccia).

**26.** Col nucleo massiccio la diminuzione della intensità della corrente secondaria era così rapida, e la produzione di calore nel ferro era così grande, che le esperienze non poterono essere continuate oltre alla settima. Lo specchio seguente contiene i risultati delle misure:

N°	$n$	$r$	$\frac{a}{\bar{b}}$	$\frac{c}{\bar{b}}$
1	602	0,409	1,140	1,073
2	602	1,953	1,636	1,261
3	603	3,224	2,352	1,457
4	603	4,462	3,255	1,666
5	603	5,713	4,335	1,869
6	604	6,958	5,564	2,080
7	601	8,542	7,173	2,263

Facendo per un momento l'ipotesi che  $\frac{1}{\mu} \text{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  sia costante, e applicando il metodo dei minimi quadrati, si trova:

$$\frac{\lambda}{\mu} = 0,988, \quad \frac{1}{\mu} \text{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta = 0,152;$$

rifacendo il calcolo colle sole tre prime esperienze si trova invece

$$\frac{\lambda}{\mu} = 1,011, \quad \frac{1}{\mu} \text{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta = 0,136.$$

Abbiamo così, come già nei casi precedenti, una prova che la linea rappresentata dalla (III') è convessa verso l'asse delle ascisse. La poligonale corrispondente a tale linea è quella segnata V sulla tavola grafica.

Applicando poi le formole (38) e (39) si trovano i valori di  $\mu$ , di  $\frac{1}{\mu} \text{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  e di  $\text{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  che si vedono riepilogati nel seguente specchio:

N°	$r$	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{b}$	$\mu$	$\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$	$\operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$
2	1,953	1,636	1,261	5,90	0,13	0,76
3	3,224	2,352	1,457	4,92	0,14	0,68
4	4,462	3,255	1,666	4,67	0,15	0,69
5	5,713	4,335	1,869	4,54	0,15	0,68
6	6,958	5,564	2,080	4,50	0,15	0,69
7	8,542	7,176	2,263	4,48	0,15	0,66

Su questi numeri si hanno a ripetere le osservazioni fatte pei due ultimi casi già trattati. Pare tuttavia che  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  dopo di essere sensibilmente cresciuto nelle prime esperienze, accenni a prendere un valore costante.

Il ritardo  $\vartheta$  è più grande che in tutti i casi già trattati. Al valore 0,682 del seno, che è approssimativamente il medio dei numeri dell'ultima colonna corrispondenti alle esperienze 3, 4, 5, 6, corrisponde un angolo di circa  $43^\circ$ ; quindi:

$$\frac{\vartheta}{T} = \frac{43}{360} = \frac{1}{8,37};$$

il che vuol dire che il ritardo è poco meno che uguale al quarto dell'intervallo di tempo che passa tra due successive inversioni di corrente.

Durante le esperienze si ebbe in media  $n=603$ , e quindi  $\frac{1}{T}=40,2$ . Per conseguenza si ha

$$\vartheta = \frac{1}{40,2 \times 8,37} = \frac{1}{336} \text{ di } 1''.$$

### § 8°

#### Dissipazione di energia, coefficienti di rendimento.

**27.** Il rapporto tra l'energia  $P$  dissipata in causa della rigidità magnetica del ferro e in causa delle correnti di Foucault, che concorrono a produrre il ritardo  $\vartheta$ , e l'energia  $Q$  prodotta nel circuito secondario è (§ 6°):

$$(25) \dots \quad \frac{P}{Q} = \frac{r}{\lambda} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta.$$

Nelle nostre esperienze era approssimativamente  $\lambda = \mu$ , e quindi si aveva anche, con grande approssimazione;

$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta.$$

Ora basta confrontare i valori di  $\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$  trovati pei cinque nuclei adoperati nelle esperienze, per vedere quanta sia l'influenza che ha sulla perdita di energia la struttura del nucleo. Per una resistenza  $r$  di 6 ohm che, come vedremo fra poco, è quella che nel caso delle nostre esperienze corrisponderebbe all'incirca al massimo rendimento esterno, i valori di  $\frac{P}{Q}$  pei cinque nuclei sarebbero rispettivamente circa:

$$0,07 ; 0,11 ; 0,30 ; 0,72 ; 0,90 .$$

Risulta da ciò, che, a parità di tutte le altre condizioni, si possono verificare nei valori dei coefficienti di rendimento dei generatori secondarii differenze grandissime dovute unicamente a differenze di struttura del nucleo, e soprattutto al diametro ed al modo d'isolamento dei fili di ferro coi quali questo è formato. E ciò può spiegare, in parte, le notevoli differenze che si trovano tra le varie determinazioni che si fecero del coefficiente di rendimento dei generatori secondarii.

A parità di diametro e di isolamento dei fili di ferro,  $\frac{P}{Q}$  dipende da  $\lambda$ , ed è tanto minore quanto più  $\lambda$  è grande. Siccome  $\lambda$  è proporzionale ad  $L$  e ad  $\frac{1}{T}$ , così vediamo che *la dissipazione di energia è tanto meno importante quanto più sono grandi i coefficienti d'induzione delle spirali e quanto più è grande il numero  $\frac{2}{T}$  di inversioni di corrente in ogni unità di tempo.*

Però col variare di  $T$  non variano solamente  $\mu$  e  $\lambda$ , ma varia anche  $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \vartheta$ , come mostrano le formole (17); quindi *non è possibile da esperienze fatte con un determinato valore di  $T$  dedurre il valore di  $\frac{P}{Q}$  corrispondente ad un altro valore del periodo.*

**28.** Le stesse osservazioni si debbono fare anche relativamente alla determinazione dei coefficienti di rendimento, nelle espressioni dei quali, (30) e (31), figurano  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\vartheta$ , che sono funzioni di  $T$ . Ora siccome le nostre esperienze furono eseguite per mezzo di correnti invertite circa 80 volte per minuto secondo, mentre il trasformatore adoperato era costruito per funzionare con circa 280 inversioni per minuto secondo, così dai coefficienti di rendimento che si possono dedurre dalle nostre esperienze non si possono ricavare quelli che si avrebbero nelle condizioni normali di impiego del trasformatore.

Non è tuttavia inutile vedere su di un esempio l'applicazione delle nostre formole. E per fare un tale esempio possiamo prendere a considerare il caso del nucleo n° 1, calcolare pel medesimo i valori  $r_1$  ed  $r_2$  della resistenza del circuito secondario, ai quali corrispondono i valori massimi del rendimento totale  $\varepsilon_1$  e del rendimento esterno od utile  $\varepsilon_2$ , portare poi questi valori  $r_1$  ed  $r_2$  di  $r$  rispettivamente nelle espressioni (30) e (31) di  $\varepsilon_1$  e di  $\varepsilon_2$ , e calcolare così i valori massimi dei due coefficienti. Possiamo porre in cifra tonda  $\mu = 9$ , valore prossimo al medio corrispondente a valori

di  $r$  presumibilmente vicini a quelli che danno i massimi di  $\varepsilon_1$  e di  $\varepsilon_2$ ; possiamo poi ritenere con sufficiente approssimazione

$$\frac{\lambda}{\mu} = 1, \quad \text{sen} \frac{2\pi}{T} \mathfrak{D} = 0,12.$$

Con questi dati le formole (32) e (33) danno

$$r_1 = 4,1 \text{ ohm}, \quad r_2 = 6,1 \text{ ohm},$$

e con questi valori di  $r$  le formole (30), (31) danno

$$\varepsilon_1 = 0,87, \quad \varepsilon_2 = 0,825.$$

Se non esistessero le correnti di Foucault nè le perdite di energia dovute alle periodiche inversioni di polarità magnetica nel nucleo, sarebbe  $\mathfrak{D} = 0$ , e la (31), pel medesimo valore di  $r$  darebbe:

$$(\varepsilon_2) = 0,89.$$

Quando si facesse funzionare il generatore secondario con correnti ad inversioni più rapide, come quelle per le quali esso è stato costruito, si otterrebbero per  $\varepsilon_1$  ed  $\varepsilon_2$  valori più grandi; inoltre  $\frac{1}{\lambda} \text{sen} \frac{2\pi}{T} \mathfrak{D}$  risulterebbe più piccolo di quello che abbiamo trovato, e più piccola sarebbe la differenza tra il coefficiente di rendimento pratico effettivo e quello teorico calcolato nell'ipotesi di  $\mathfrak{D} = 0$ .

Ma una osservazione importante, sulla quale si deve insistere, è che il rapporto  $\frac{P}{Q}$  tra l'energia dissipata e l'energia svolta nel circuito secondario cresce col crescere della resistenza  $r$  di questo circuito; che quindi in ogni caso il massimo rendimento si verifica per un valore  $r_2$  della resistenza del circuito secondario minore di quello col quale si avrebbe il massimo rendimento qualora non esistessero il ritardo  $\mathfrak{D}$  e la dissipazione di energia che al medesimo corrisponde.

**29.** Questa osservazione ci guida a modificare in qualche punto l'interpretazione e le deduzioni di esperienze anteriori, e in particolare di quelle che io stesso eseguii sul generatore secondario di Gaulard e Gibbs nella Esposizione di Torino del 1884. In quelle esperienze (\*) tutte le determinazioni erano state fatte per mezzo di un calorimetro, che veniva alternativamente introdotto nel circuito primario e nel secondario. Dalle misure calorimetriche si erano dedotti per una serie di valori di  $r$  i valori del rapporto, che colle notazioni adottate nel presente lavoro è rappresentato con  $\frac{a}{b}$ . I valori di  $\frac{a}{b}$  erano poi stati messi a riscontro colle equazioni che la teoria dà nell'ipotesi di nessuna perdita di energia per correnti di Foucault o per isteresi, e si era dedotto da tale confronto un valore del rapporto  $u$  tra il coefficiente di rendimento effettivo e quello che si sarebbe avuto nella ipotesi posta a base della teoria.

(\*) G. FERRARIS. — Memoria citata — *Memorie della R Accademia delle Scienze di Torino*, Serie II, Tom. XXXVII, pag. 145 e seguenti.

Si calcolò allora una tabella di valori dei coefficienti di rendimento moltiplicando per  $u$  i coefficienti di rendimento teorici corrispondenti ad una serie di valori di  $r$ .

Ma colle misure calorimetriche, le quali, come si disse, non davano direttamente altro che  $\frac{a}{b}$ , non sarebbe allora stato possibile riconoscere se e come  $u$  dipendesse da  $r$ ; quindi  $u$  fu trattato come una costante. Per conseguenza i valori calcolati del coefficiente di rendimento pratico (\*) variano colla legge stessa dei rendimenti teorici. Adesso invece vediamo che il rapporto  $u$ , che per piccoli valori di  $r$ , e per grandi valori di  $\frac{1}{T}$ , può praticamente ritenersi uguale all'unità, diminuisce per valori crescenti di  $r$ ; che quindi il rendimento pratico, il quale per piccoli valori di  $r$  differisce poco dal teorico, cresce meno rapidamente di questo quando si fa crescere  $r$  e raggiunge più presto il proprio valore massimo.

### § 9°

#### Confronto dei coefficienti d'induzione.

**30.** Dai confronti fatti nel § 7° risulta che le esperienze confermano pienamente le previsioni teoriche relative al ritardo  $\mathfrak{S}$  ed al suo modo di variare da nucleo a nucleo.

Ma anche i valori di  $\mu$  registrati nelle tabelle dei risultati sperimentali danno luogo a confronti istruttivi. Il coefficiente di induzione apparente

$$M = \frac{T}{2\pi} \mu,$$

che si trova sperimentando con correnti alternative, non è mai uguale al coefficiente di induzione da noi rappresentato con  $M_1$  (art. 11), che si avrebbe qualora non esistessero nè le correnti di Foucault nè il ritardo  $\mathfrak{S}$ . Il suo valore è invece funzione di  $M_1$  e delle grandezze dalle quali dipendono il ritardo di fase e l'intensità delle correnti parassite; fra le quali grandezze sono da annoverare: la resistenza dei circuiti delle correnti di Foucault, i coefficienti di induzione di queste correnti su se stesse e sulle due spirali del trasformatore e la durata  $T$  del periodo delle correnti alternative adoperate. Secondo le considerazioni teoriche svolte nel § 5°, la funzione ora nominata sarebbe quella che si ricava dalle equazioni (17). E noi abbiamo già osservato [13], che, secondo tali equazioni, il rapporto  $\frac{\mu}{\mu_1}$ , che è lo stesso che  $\frac{M}{M_1}$ , deve risultare tanto più piccolo quanto più, col fare piccola la resistenza  $\rho$ , si facilita la produzione delle correnti parassite.

Ora sarebbe importante verificare se le nostre esperienze confermino in qualche modo una tale previsione. Per riuscire a ciò io determinai nei successivi nuclei i valori del coefficiente di induzione mutuo tra le due spirali del trasformatore, valendomi per tale determinazione di un metodo sui risultati del quale non avessero influenza le correnti di Foucault.

(\*) Memoria citata, tabella a pag. 153.

Il metodo che adoperai è quello che consiste nell'inserire nel circuito primario del trasformatore una pila costante, produrre colla chiusura o colla rottura del circuito o colla inversione della corrente una corrente indotta istantanea nel circuito secondario, e paragonare l'impulsione da questa prodotta in un galvanometro con quella prodotta nel medesimo galvanometro dalla scarica di un condensatore di nota capacità, al quale la carica venga data col mettere le due armature in comunicazione colle due estremità di una nota resistenza percorsa dalla corrente primaria (\*). Detta  $R$  la resistenza compresa fra i due punti del circuito primario coi quali comunicano le armature del condensatore nell'atto della carica,  $r$  la resistenza totale del circuito secondario del trasformatore, compreso il galvanometro,  $C$  la capacità del condensatore,  $\alpha$  ed  $\alpha'$  gli angoli di impulsione dell'ago del galvanometro prodotti rispettivamente dalla scarica del condensatore e dalla corrente indotta in  $r$ ,  $M'$  il coefficiente d'induzione mutua tra le due spirali del trasformatore, si ha

$$M' = RrC \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Il condensatore, della fabbrica di Elliott, era a lamine di mica ed aveva la capacità di  $\frac{1}{3}$  di microfarad; la pila era di sei elementi Daniell; i reostati della fabbrica Hartmann Braun; il galvanometro, del tipo Thomson astatico, della officina di Carpentier.

I valori ottenuti con questo metodo sono registrati nella penultima colonna, intestata  $M'$ , della tabella seguente. In tale tabella la prima colonna contiene l'indicazione del *nucleo* di cui era provvisto il generatore secondario durante l'esperienza. La seconda colonna contiene i valori di  $\mu$  determinati nella quinta esperienza di ciascuna delle serie precedentemente esaminate (§ 7°), esperienza che noi scegliamo siccome quella che corrisponde alle condizioni medie del trasformatore durante le nostre misure. La terza colonna contiene i valori di  $\frac{1}{T}$ . La quarta finalmente contiene i valori del coefficiente d'induzione apparente  $M$  determinato per mezzo della relazione

$$M = \frac{T}{2\pi} \mu.$$

NUCLEO	$\mu$	$\frac{1}{T}$	$M$	$M'$	$\frac{M}{M'}$
1	9,09	40,28	0,0359	0,0179	2,01
2	10,10	40,13	0,0401	0,0223	1,80
3	7,58	40,13	0,0301	0,0269	1,12
4	4,90	40,13	0,0194	0,0240	0,810
5	4,54	40,20	0,0180	0,0273	0,658

(\*) MASCART ET JOUBERT: *Électricité et Magnetisme*, Tom. II, pagg. 531-32.

Le grandi differenze che si osservano tra i valori di  $M$  ed i corrispondenti valori di  $M'$  non possono essere qui oggetto di discussioni, perchè a produrle concorrono insieme alle correnti di Foucault, le quali influiscono su  $M$  e non su  $M'$ , anche gli effetti del magnetismo rimanente i quali sono affatto diversi ne' due modi di sperimentare. Ma ciò che essenzialmente deve fermare la nostra attenzione è l'ordine assolutamente diverso secondo il quale variano da un nucleo all'altro i valori di  $M$  e quelli di  $M'$ . Per mettere meglio in evidenza questo fatto notevole si calcolarono e si registrarono nell'ultima colonna i valori del rapporto  $\frac{M}{M'}$ . Questo rapporto diminuisce rapidamente e regolarmente dal valore 2,01 che esso ha nel caso del nucleo di filo di ferro sottile, al valore 0,658 che corrisponde al nucleo formato con un'unica sbarra massiccia di ferro. Ora quantunque i fenomeni dai quali dipendono i valori di  $M$  e di  $M'$  sieno assai complicati, questo risultato costituisce una conferma delle nostre previsioni, secondo le quali il coefficiente d'induzione  $M$  ricavato da esperienze con correnti alternative deve, a parità di tutte le altre condizioni, risultare tanto più piccolo quanto più sono intense le correnti di Foucault.

È facile vedere che questa osservazione si applica non solamente ai valori di  $M$  determinati colle nostre esperienze, ma a tutte le determinazioni di coefficienti di induzione, mutua o propria, basate sull'uso di correnti alternative. Così per esempio il metodo indicato da Joubert (\*) per determinare il coefficiente di induzione propria di una spirale per mezzo dell'elettrometro a quadranti, quando venga applicato ad una spirale con nucleo di ferro, dà risultati variabili col numero di inversioni della corrente adoperata e con tutte le altre circostanze che influiscono sulle correnti di Foucault e sui ritardi di fase dei quali noi ci siamo occupati.

Torino, Novembre 1887.

---

(\*) JOUBERT: *Études sur les machines magnéto-électriques* — Annales de l'École Normale Supérieure, 2<sup>e</sup> série, Tom. X. — Avril 1881 — Nota A, pag. 170.

