

ossia [18]

$$\nabla \mathbf{C} = 0,$$

che è la condizione della distribuzione solenoidale.

Se si dicono l, m, n i coseni degli angoli della normale \mathbf{n} alla superficie S coi tre assi delle coordinate e si rappresenta con $d\mathbf{s}$ il tensore di $d\mathbf{s}$, elemento della linea contorno di S , l'equazione (29) compendiante il teorema della circuitazione si scrive:

$$(34) \quad \iint (lC_1 + mC_2 + nC_3) dS = \int \left(A_1 \frac{\partial x}{\partial s} + A_2 \frac{\partial y}{\partial s} + A_3 \frac{\partial z}{\partial s} \right) ds.$$

Questa equazione, nella quale C_1, C_2, C_3 hanno i valori (30), (30'), (30''), mostra come l'integrale di un vettore \mathbf{A} lungo una linea chiusa si possa esprimere per mezzo di un integrale su di una superficie avente tale linea per contorno. Essa è stata data dal prof. STOKES nel 1854.

§ 4.

Integrale lungo una linea aperta. Potenziale.

30. — Nel campo del vettore \mathbf{A} consideriamo due punti P e Q (fig. 25). Immaginiamo poi due linee qualunque PJQ, PjQ , le quali partano entrambe da P e terminino in Q ; e rappresentiamo con J e con j i valori dell'integrale del vettore \mathbf{A} preso da P verso Q rispettivamente sull'una e sull'altra linea.

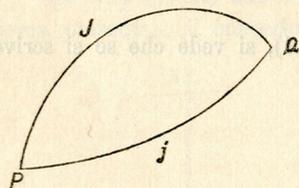


Fig. 25.

Le due linee, prese insieme, formano una linea chiusa, sulla quale la circuitazione, presa nel verso $PJQjP$, è $J - j$. Se, come sempre, supponiamo che la regione considerata sia aciclica, o che sia stata resa tale per mezzo di opportune sezioni [12], sussiste il teorema della circuitazione [28].

In virtù di questo teorema la circuitazione $J - j$ è uguale al flusso della rotazione \mathbf{C} passante dentro al contorno $PJQjP$, o, come possiamo anche dire, al numero delle linee vorticali concatenate col contorno medesimo. Se diciamo U questo numero, o questo flusso, se cioè rappresentiamo con U l'integrale $\int C_n dS$ esteso a tutta una superficie contornata dalla linea $PJQjP$, abbiamo

$$(35) \quad J - j = U.$$

Ora qui importa distinguere tre casi: e per ciò distingueremo le regioni nelle quali \mathbf{C} è uguale a zero da quelle in cui \mathbf{C} non è nullo dovunque, dicendo che nelle prime la distribuzione del vettore \mathbf{A} è *non circuitale* e nelle seconde è *circuitale* (*).

PRIMO CASO: La rotazione \mathbf{C} è nulla in tutti i punti della regione considerata: ossia la distribuzione del vettore \mathbf{A} nella regione considerata è *non circuitale*.

(*) La locuzione: *circuitale* è stata introdotta da W. THOMSON (*Mathematical and physical papers*, Vol. III, pag. 451) ed è adoperata da HEAVISIDE.

In questo caso, qualunque sieno le linee PJQ , PjQ , è sempre $U=0$; quindi sempre $J=j$. L'integrale del vettore A preso da P a Q ha un medesimo valore su tutte le linee congiungenti questi due punti; esso non dipende dalla scelta della linea su cui è calcolato, dipende unicamente dalla posizione dei punti P e Q , nei quali la linea principia e termina.

Scegliamo nel campo, ad arbitrio, un punto O (fig. 26); mediante una linea qualunque MO congiungiamo con esso un altro punto M , e rappresentiamo con V l'integrale preso da M verso O lungo questa linea. Il valore di V non dipende dalla forma della linea, ma dipende solo dalla posizione di O e di M , e se il punto O è ritenuto fisso, dipende solo dalla posizione di M : il valore di V è una funzione di quelle sole variabili colle quali viene definita la posizione del punto M . Sieno V_p e V_q i valori di V nei punti P e Q ; l'integrale J , preso da P verso Q lungo una linea PMQ qualunque congiungente P con Q , si può esprimere per mezzo di questi due valori. Infatti l'integrale lungo la linea PMQ è uguale a quello preso su qualunque altra linea partente da P e terminante in Q ; è uguale perciò a quello preso lungo la linea POQ . Ora l'integrale su PO vale V_p , e quello su OQ vale $-V_q$, dunque

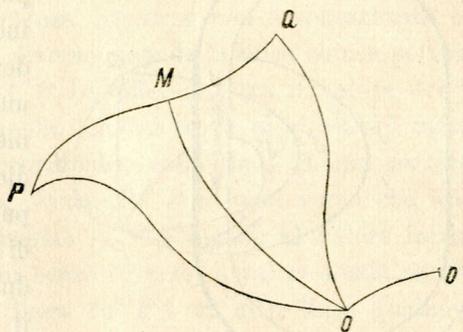


Fig. 26.

(36)

$$J = V_p - V_q :$$

l'integrale J del vettore A , preso da P a Q lungo una linea qualunque congiungente questi punti, è uguale alla differenza tra i valori in P ed in Q della funzione V .

La grandezza scalare V , funzione delle variabili che definiscono la posizione di un punto M , dicesi *potenziale* del vettore A in tale punto.

Dato il valore V_p del potenziale in un punto P , si ha quello nel punto Q dalla relazione $V_q = V_p - J$. Se il punto Q coincide con P , se cioè la linea PMQ è chiusa, J rappresenta la circuitazione su tale linea, ed è perciò uguale a zero. Quindi allora $V_q = V_p$. Possiamo esprimere questo fatto dicendo che se, partendo da un punto P qualunque del campo e percorrendo una linea chiusa qualunque, si ritorna al punto stesso, si ritrova al ritorno lo stesso valore del potenziale che si aveva alla partenza. In altri termini: il potenziale V ha per ogni singolo punto del campo un unico valore; esso è una funzione *monodroma* delle coordinate.

Qui però importa notare che il valore della funzione V dipende dalla scelta arbitraria del punto O . Se invece del punto O si scegliesse un altro punto O' , il potenziale in un punto qualunque M risulterebbe aumentato o diminuito di una quantità uguale all'integrale del vettore A lungo una linea OO' ; risulterebbe cioè accresciuto o diminuito di una costante dipendente dalla scelta arbitraria di O' . Perciò il potenziale V contiene una costante arbitraria. È questa una conseguenza dell'essere il potenziale definito da un integrale.

31. — SECONDO CASO: *Esistono nel campo alcune, e soltanto alcune, regioni, ove la rotazione C è diversa da zero: nelle quali cioè la distribuzione del vettore A è circuitale.*

In questo caso può accadere che la linea chiusa $PJQjP$ dell'art. preced. non sia concatenata con alcuna linea vorticale, oppure che lo sia. Supponiamo, per esempio, che il toro CC' (fig. 27) rappresenti un tubo vorticale e che fuori di esso non esistano altre linee vorticali; può accadere che le due linee condotte da P a Q passino tutte due fuori dell'anello, come le J, j , o tutte due dentro dell'anello, come

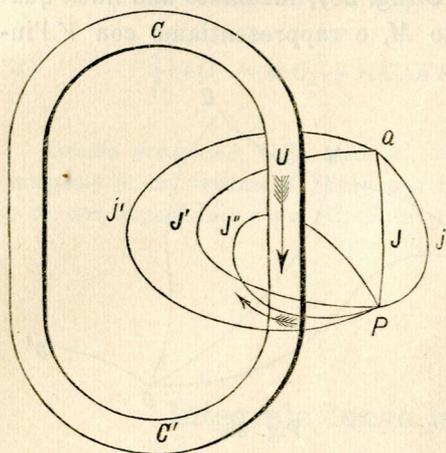


Fig. 27.

le J, j' , nei quali casi la linea chiusa da esse formata non è concatenata coll'anello; oppure può accadere che delle due linee l'una passi fuori dell'anello, come la J , e l'altra passi dentro, come la J' , nel qual caso esse formano una linea chiusa $PJ'QJP$ concatenata coll'anello medesimo. Possiamo anche distinguere i due casi dicendo che nel primo una delle due linee si può far venire a coincidere coll'altra per mezzo di uno spostamento e di una deformazione graduale, senza che per questo essa debba tagliare il tubo vorticale, mentre nel secondo ciò non sarebbe possibile.

Supponiamo dapprima che si verifichi la prima ipotesi, che cioè le due linee condotte da P a Q sieno le J, j , oppure J', j' , così che esse non formino una linea chiusa concatenata col tubo vorticale. Allora abbiamo ancora, come dianzi, $U=0$, e quindi $J=j$; l'integrale da P a Q è ancora indipendente dalla linea percorsa. Se diciamo J il valore dell'integrale per tutte le linee che vanno da P a Q passando all'esterno dell'anello vorticale, come le PJQ, PjQ , possiamo ancora, come dianzi, scrivere

$$(36) \quad J = V_p - V_q.$$

E similmente, se diciamo J' il valore dell'integrale preso su una linea qualunque che vada da P a Q passando dentro dell'anello, come la $PJ'Q$ o la $Pj'Q$, possiamo scrivere

$$(36') \quad J' = V_p - V'_q.$$

Ma supponiamo ora che si verifichi la seconda ipotesi, che cioè delle due linee condotte da P a Q una sia la PJQ passante fuori dell'anello vorticale e l'altra sia la $PJ'Q$ passante dentro dell'anello, così che, prese insieme, esse formino una linea chiusa concatenata coll'anello medesimo. Se allora diciamo U il flusso della rotazione C esistente nel tubo vorticale, ossia il numero delle linee vorticali concatenate colla linea chiusa $PJ'QJP$, abbiamo per la (35):

$$(35') \quad J' - J = U.$$

L'integrale lungo la linea $PJ'Q$ è diverso da quello lungo la linea PJQ , e la differenza fra i due è U .

Portando nella (35') i valori (36) e (36') abbiamo

$$V_q - V'_q = U.$$

Possiamo adunque riassumere dicendo: anche nel caso che stiamo considerando vi ha un potenziale V funzione delle coordinate; ma per un medesimo punto, per esempio pel punto Q , questo ha più valori dipendenti dal cammino seguito per arrivare al punto stesso.

Se, come caso particolare, supponiamo che il punto Q , che è un punto qualunque, coincida col punto di partenza P , abbiamo $V_q = V_p$ e $V'_q = V_p - U$. In altri termini: se, partendo da un punto qualunque P , si percorre nel campo una linea chiusa e si ritorna in P , si ritrova in P all'arrivo il medesimo valore del potenziale che vi si aveva alla partenza quando la linea chiusa percorsa non è concatenata con linee vorticali; ma si trova invece un valore diverso quando la linea chiusa percorsa è concatenata con linee vorticali, come la $PJ''P$. La differenza tra il valore del potenziale che si aveva in P alla partenza e quello che si trova al ritorno è uguale ad U , ossia al numero delle linee vorticali concatenate colla linea chiusa percorsa. Se, come si è supposto, si percorre la linea chiusa $PJ''P$ in quel verso che è segnato nella figura, il valore finale del potenziale in P è uguale al valore iniziale meno U ; se si percorre quella linea chiusa in senso inverso, il valore finale sarebbe uguale all'iniziale più U . Se sulla medesima linea $PJ''P$ o su altre linee qualunque partenti da P e terminanti in P si facessero non uno solo, ma N giri attorno al tubo vorticale C , si troverebbe tra il potenziale di arrivo e quello di partenza una differenza uguale a $\pm NU$. Detta adunque V_0 una funzione delle coordinate di P , il potenziale V in un punto P qualunque del campo si può esprimere con

$$(37) \quad V = V_0 \pm NU:$$

il potenziale è una funzione polidroma, ed U è la costante ciclica.

Se per mezzo di una acconcia superficie escludiamo dal campo i tubi vorticali e ci limitiamo a considerare la parte di campo che rimane, noi rientriamo nel primo

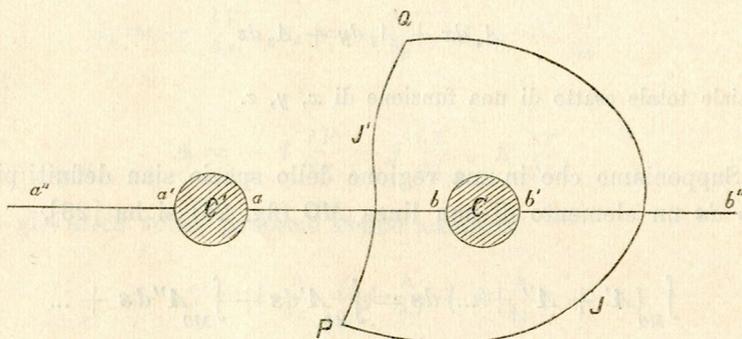


Fig. 28.

caso già trattato all'articolo precedente [30]. Ma per applicare le conclusioni allora trovate dobbiamo osservare che la parte di campo che ora siamo condotti a considerare è ciclica, e che dobbiamo ridurla ad essere aciclica per mezzo di qualche acconcia sezione. Per fissare le idee riferiamoci ancora all'esempio precedente, nel quale le linee vorticali sono tutte contenute dentro ad un toro, e per rendere più chiara la figura rappresentiamo non più una prospettiva come dianzi, ma una sezione del toro: per esempio supponiamo che il piano della fig. 28 determini nel toro le

due sezioni C, C' . Per rendere aciclico il campo, dobbiamo allora chiudere il toro medesimo con una superficie ab in modo che non si possa condurre più alcuna linea come $PJ'Q$ passante dentro di esso; oppure, se vogliamo poter passare in $PJ'Q$, dobbiamo tagliare lo spazio esterno con una superficie $a'a'', b'b''$, la quale impedisca di passare da P a Q con una linea come la PJQ . Soltanto dopo di avere in questo modo reso aciclico il campo si può dire che esiste un potenziale V avente per ogni punto un unico valore.

32. — TERZO CASO: *In ogni punto del campo la rotazione C è diversa da zero: ossia in tutto il campo la distribuzione del vettore A è circuitale.*

In questo caso la linea $PJQjP$ (fig. 25) è sempre concatenata con linee vorticali; e quindi l'integrale J è sempre diverso da j , qualunque sieno le due linee PJQ, PjQ . Se si fa variare per spostamenti gradualmente infinitamente piccoli la linea sulla quale si fa l'integrazione, il valore J dell'integrale preso da P fino a Q subisce anch'esso variazioni infinitamente piccole. Dati i punti P e Q , l'integrale non ha più nè un valore determinato nè una serie di valori equidifferenti, ma può avere infiniti valori succedentisi con continuità. In questo caso l'integrale non è determinato se non è completamente data la linea d'integrazione; non vi ha dunque più luogo a parlare di potenziale.

Osservazione. La condizione $\text{rot } A = 0$ si traduce [29] nelle tre equazioni

$$\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = 0.$$

Ora sono appunto queste, espresse nella forma solita, le condizioni necessarie acciocchè il trinomio

$$A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

sia il differenziale totale esatto di una funzione di x, y, z .

33. — Supponiamo che in una regione dello spazio sian definiti più vettori A', A'', \dots . Detto ds un elemento di una linea MO (fig. 26) si ha [23],

$$\int_{MO} (A' + A'' + \dots) ds = \int_{MO} A' ds + \int_{MO} A'' ds + \dots$$

Se in quella regione sono nulle le rotazioni di A', A'', \dots , per la proposizione (28) è pure nulla la rotazione di $A' + A'' + \dots$. Tenendo fisso il punto O e lasciando variare il punto M gl'integrali scritti definiscono [30] il potenziale in M del vettore $A' + A'' + \dots$, e dei vettori A', A'', \dots . Dunque: il potenziale di una somma di vettori è uguale alla somma dei potenziali dei singoli vettori.

34. — Il potenziale è una grandezza scalare, il cui valore in ogni punto è determinato, a meno di una costante arbitraria, quando è data la distribuzione del vet-

tore. Viceversa, dato il potenziale in funzione delle coordinate, il vettore risulta anch'esso determinato in ogni punto.

Per chiarire questa cosa, consideriamo, invece della linea di lunghezza finita PQ trattata negli articoli precedenti, un semplice elemento pq (fig. 29); prendiamo pq come direzione positiva, definendola, se vogliamo, con un vettore-unità \mathbf{s} , e rappresentiamo la lunghezza pq dell'elemento con ds . Invece dell'integrale J dianzi considerato [30] abbiamo ora un semplice elemento; e se rappresentiamo con \mathbf{A} , la proiezione del vettore \mathbf{A} su \mathbf{s} , ossia il prodotto scalare $\mathbf{A}\mathbf{s}$, questo elemento è

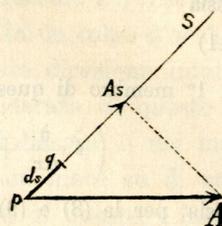


Fig. 29.

$$A_s ds.$$

Se, d'altra parte, colla notazione solita del calcolo differenziale rappresentiamo con $\frac{\partial V}{\partial s}$ il limite del rapporto $\frac{V_q - V_p}{pq}$ quando, tenendo fissa la direzione data \mathbf{s} , si fa diminuire pq fino a zero, possiamo scrivere $V_p - V_q = -\frac{\partial V}{\partial s} ds$. Con ciò l'equazione (36), che è la definizione del potenziale, si riduce nel caso ora considerato a

$$A_s ds = -\frac{\partial V}{\partial s} ds.$$

Quindi:

$$(38) \quad A_s = -\frac{\partial V}{\partial s}.$$

Supponiamo che il vettore-unità \mathbf{s} coincida successivamente coi tre vettori fondamentali \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , e poniamo, per conseguenza, successivamente dx , dy , dz al posto di ds . Otteniamo così le tre componenti A_1 , A_2 , A_3 di \mathbf{A} ; esse sono:

$$(39) \quad A_1 = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad A_2 = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad A_3 = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Così abbiamo:

$$(40) \quad \mathbf{A} = -\mathbf{i} \frac{\partial V}{\partial x} - \mathbf{j} \frac{\partial V}{\partial y} - \mathbf{k} \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Se, come già altre volte, poniamo simbolicamente

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

e trattiamo questo simbolo ∇ come quello di un vettore, possiamo scrivere la (40) anche così:

$$(40') \quad \mathbf{A} = -\nabla V.$$

Non è inutile riassumere qui gli effetti dell'operatore ∇ . Applicato ad una quantità scalare V , funzione delle coordinate, esso dà, come or ora abbiamo veduto, a meno del segno, il vettore \mathbf{A} , di cui V è il potenziale; applicato ad un vettore \mathbf{A} alla maniera di un moltiplicatore in un prodotto scalare, dà la $\text{div } \mathbf{A}$ [18]; applicato al medesimo vettore alla maniera di un moltiplicatore in un vettorprodotto dà la $\text{rot } \mathbf{A}$ [29].

Se V è il potenziale del vettore \mathbf{A} , applicando due volte l'operatore ∇ ed indicando con ∇^2 l'operazione che ne risulta, si ha per la (40')

$$\nabla^2 V = \nabla(\nabla V) = -\nabla \mathbf{A}$$

ossia

$$(41) \quad \nabla^2 V = -\operatorname{div} \mathbf{A}.$$

Il 1° membro di questa relazione si può scrivere in modo più esplicito così:

$$\left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 V = \left(i^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots + 2jk \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \dots \right) V$$

ossia, per le (8) e (9):

$$(42) \quad \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Dunque la (41) equivale a

$$(41') \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\operatorname{div} \mathbf{A}.$$

In particolare, se in una regione dello spazio la distribuzione del vettore \mathbf{A} è solenoidale [20], il potenziale V verifica l'equazione (di LAPLACE)

$$(43) \quad \nabla^2 V = 0,$$

ossia

$$(43') \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

35. Superficie equipotenziali. — L'equazione $V = \text{costante}$ rappresenta una superficie. Tale superficie, in tutti i punti della quale il potenziale ha un medesimo valore, dicesi: *equipotenziale*. Dando alla costante diversi valori si hanno le equazioni di infinite superficie equipotenziali; per ogni punto del campo se ne può far passare una.

Se il versore \mathbf{s} dianzi considerato [34] si prende tangente alla superficie equipotenziale passante pel punto p considerato, il punto q giace anch'esso sulla medesima superficie, e quindi si ha $\frac{\partial V}{\partial s} = 0$. Perciò la (38) dà $A_s = 0$. La proiezione A_s di \mathbf{A} è nulla per tutte le direzioni \mathbf{s} prese nel piano tangente alla superficie di livello; dunque \mathbf{A} è perpendicolare a tale piano; in ogni punto di una superficie equipotenziale il vettore è normale alla superficie medesima: *le superficie equipotenziali sono superficie di livello* [14].

Se \mathbf{s} si prende sulla normale \mathbf{n} alla superficie di livello passante pel punto considerato, A_s è lo stesso tensore A di \mathbf{A} . Quindi rappresentando con dn il valore scalare di un elemento di lunghezza preso sulla normale, abbiamo

$$(44) \quad A = -\frac{dV}{dn}.$$

Il valore di A risulta positivo se \mathbf{n} si prende nella direzione nella quale V diminuisce.

Rappresentazione del campo per mezzo di superficie equipotenziali. — Nell'art. 21 si è fatto vedere come per mezzo di un disegno o di un modello di linee di flusso convenientemente scelte si possa fare una rappresentazione della distribuzione del vet-

tore. Ora possiamo vedere come una rappresentazione ugualmente chiara ed istruttiva si possa ottenere per mezzo di un disegno o di un modello di superficie equipotenziali.

Che un disegno od un modello, dove sieno rappresentate parecchie superficie di livello sufficientemente vicine le une alle altre, possa far vedere in un colpo d'occhio quale sia in ogni punto la direzione del vettore, è evidente. Tale direzione infatti è normale alla superficie equipotenziale passante pel punto considerato. Se questo si trova sopra una delle superficie materialmente rappresentate nel disegno o nel modello, la direzione risulta direttamente determinata; se esso non giace su di una delle superficie materialmente rappresentate, ma si trova fra due di queste, è facile immaginare per approssimazione, colla scorta delle superficie vicine, la superficie di livello che vi si potrebbe far passare, e vedere quindi quale sia approssimativamente la direzione della normale a questa superficie. Ma scegliendo convenientemente le superficie di livello da rappresentarsi si può fare di più: si può far sì che il disegno od il modello indichi approssimativamente, non solo la direzione, ma anche il valore del vettore. Basta a quest'uopo che le superficie disegnate, o costrutte, corrispondano a potenziali equidifferenti, e che sieno abbastanza vicine perchè le porzioni di linee di flusso comprese fra due superficie equipotenziali consecutive si possano praticamente, ad occhio, confondere con segmenti di rette. Diciamo Δn uno di questi segmenti e ΔV la differenza costante fra i potenziali su due superficie di livello consecutive; il quoziente $\frac{\Delta V}{\Delta n}$ ha per limite $\frac{dV}{dn}$; quindi esso, se, come si è supposto,

Δn è piccolo, rappresenta un valore approssimativo di $\frac{dV}{dn}$. Ora $\frac{dV}{dn}$ è appunto, a meno del segno, il valore di A . Basta adunque che sia data la differenza ΔV costante scelta nella costruzione del disegno o del modello, per potere determinare in ogni punto del campo il valore di A mediante la semplice misura di una lunghezza Δn . L'aver scelto, nel fare il disegno od il modello, superficie corrispondenti a potenziali equidifferenti non solamente è utile per ridurre ad uno solo, a ΔV , i dati necessari per fare nel modo detto il calcolo di A , ma è anche utile per fare sì che il disegno od il modello indichi in un colpo d'occhio la distribuzione del vettore nel campo. Infatti se ΔV è costante la relazione approssimativa $A = -\frac{\Delta V}{\Delta n}$ dice che approssimativamente A è inversamente proporzionale a Δn : là dove Δn è piccolo, dove le superficie equipotenziali disegnate o costrutte sono vicine le une alle altre, il vettore ha un valore grande; là dove Δn è grande, dove le superficie equipotenziali sono lontane le une dalle altre, il vettore ha un valore piccolo.

Una rappresentazione più completa si ha se si combina un disegno od un modello di superficie equipotenziali fatto come ora si è detto con quello di un sistema di linee di flusso fatto come è stato esposto all'art. 21. Si ottiene così un reticolato nelle maglie del quale l'occhio è guidato e trova colla massima facilità gli elementi per le valutazioni approssimative delle quali si è parlato.

36. Campo uniforme. — Merita un cenno speciale il caso di un campo nel quale tutte le linee di flusso sono rette parallele. È facile vedere che in un tale campo il vettore ha un medesimo valore in tutti i punti. Infatti: 1° Tutti i tubi di flusso sono

a sezione costante, e perciò, in virtù della proposizione dimostrata all'art. 22, il vettore ha un medesimo valore in tutti i punti di una medesima linea di flusso. 2° Le superficie equipotenziali, che sono normali alle linee di flusso, sono in questo caso altrettanti piani tutti paralleli tra di loro. Perciò la distanza dn fra due superficie equipotenziali, tra le quali la differenza di potenziale è dV , è la stessa su tutta la estensione di esse; e quindi il vettore $-\frac{dV}{dn}$ [35] ha un medesimo valore in tutti i punti di una superficie di livello qualunque. Per conseguenza il vettore è lo stesso in tutti i punti del campo. Un campo come quello di cui abbiamo parlato, nel quale il vettore ha una medesima direzione ed una medesima grandezza in tutti i punti, si dice *uniforme*.

§ 5.

Distribuzioni non circuitali. Forze newtoniane. Vettori newtoniani.

37. — Data la distribuzione di un vettore \mathbf{A} , noi sappiamo determinare per ogni punto del campo due altre grandezze con esso collegate, una scalare: la $\text{div } \mathbf{A}$, l'altra vettoriale: la $\text{rot } \mathbf{A}$. Inoltre, quando la $\text{rot } \mathbf{A}$ è uguale a zero sappiamo che esiste, e possiamo determinare per ogni punto, un'altra grandezza scalare importante: il potenziale V .

Viceversa, possiamo risalire da queste grandezze al vettore \mathbf{A} . Il problema si riduce a ricavare \mathbf{A} da un sistema di equazioni differenziali comprese nelle seguenti

$$(45) \quad \text{div } \mathbf{A} = \delta, \quad \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{C}, \quad \mathbf{A} = -\nabla V,$$

ove δ , \mathbf{C} , V sono date funzioni delle coordinate.

Ora qui si presenta subito una osservazione importante. La div. , la rot. , il potenziale della somma di più vettori sono uguali [art. 17, 27, 33] alle somme delle div. , delle rot. , dei potenziali dei singoli vettori. Perciò se poniamo

$$\delta = \delta' + \delta'' + \dots, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}' + \mathbf{C}'' + \dots, \quad V = V' + V'' + \dots,$$

e se sappiamo trovare i valori \mathbf{A}' , \mathbf{A}'' , ..., che soddisfano alle equazioni:

$$\text{div } \mathbf{A}' = \delta', \quad \text{rot } \mathbf{A}' = \mathbf{C}', \quad \mathbf{A}' = -\nabla V',$$

$$\text{div } \mathbf{A}'' = \delta'', \quad \text{rot } \mathbf{A}'' = \mathbf{C}'', \quad \mathbf{A}'' = -\nabla V'',$$

.....

possiamo dire subito che le equazioni (45) sono soddisfatte dal vettore

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \mathbf{A}'' + \dots$$

E questa osservazione ci permetterà di trattare molti dei casi complicati, che si presentano nelle applicazioni, come combinazioni di casi più semplici.

Qui ci conviene considerare dapprima alcune distribuzioni non circuitali [30], nelle quali cioè la rotazione \mathbf{C} è nulla, e poi alcune distribuzioni circuitali.

38. *Distribuzioni non circuitali.* — Sia dato un campo, nel quale si sappia che $\mathcal{C} = 0$ in ogni punto, un campo a distribuzione non circuitali; e per ogni punto di esso sia data la divergenza δ . Il vettore \mathbf{A} deve allora soddisfare alle equazioni differenziali

$$(46) \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = \delta, \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0,$$

ove δ è una data funzione delle coordinate. Noi vogliamo considerare alcune soluzioni di queste equazioni. A tale uopo cominceremo a supporre che il punto P , pel quale si vuole conoscere \mathbf{A} , si trovi in una regione ove sia $\delta = 0$, cominceremo cioè a supporre che sia $\delta = 0$ per tutto lo spazio all'interno di una certa superficie S (fig. 30) circondante il punto P . Ci sarà facile, in seguito, eliminare questa restrizione.

Immaginiamo il campo diviso in elementi di volume, e diciamo v il volume di uno di questi. Per definire poi la posizione del punto P rispetto a questo elemento, consideriamo come vettore il segmento di retta mP che congiunge un punto m dell'elemento al punto P ; rappresentiamo con r il tensore di questo vettore, ossia la distanza mP , e con \mathbf{r} il versore, ossia un vettore unità preso nella direzione mP .

Diciamo δ il valore dato della divergenza del vettore \mathbf{A} nel punto m , e, prima di considerare la distribuzione data, immaginiamo una distribuzione nella quale la rotazione sia nulla, e la divergenza abbia il valore dato δ soltanto nell'interno dell'elemento v mentre fuori di questo essa è da pertutto uguale a zero. Se mai troveremo un vettore \mathbf{A}' pel quale la divergenza abbia una tale distribuzione, se la stessa cosa faremo per tutti gli altri elementi di volume, e se sommeremo tutti i vettori \mathbf{A}' che avremo trovati, avremo nella somma, in grazia della osservazione fatta all'art. precedente [37], un vettore \mathbf{A} il quale soddisfa alle equazioni (46) in tutto il campo.

Ora, tra i vettori \mathbf{A}' che soddisfanno alla condizione $\operatorname{rot} \mathbf{A}' = 0$ vi hanno tutti quelli aventi la direzione \mathbf{r} ed un tensore funzione della sola distanza r . Infatti se \mathbf{A}' ha una rotazione \mathcal{C}' , questa si può scomporre in tre $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$, la prima parallela e le altre due perpendicolari ad \mathbf{r} . La grandezza di \mathcal{C}_1 si calcola dividendo la circuitazione attorno ad un elemento superficiale dS_1 perpendicolare ad \mathbf{r} per l'area dell'elemento medesimo. Ma se il vettore \mathbf{A}' ha la direzione \mathbf{r} , esso in ogni punto del contorno di dS_1 è normale al contorno stesso; quindi la circuitazione è nulla, e con essa è nulla \mathcal{C}_1 . La componente \mathcal{C}_2 si può calcolare per mezzo della circuitazione attorno ad un elemento superficiale piano contornato da due porzioncelle uguali dr, dr' di due raggi vettori r, r' infinitamente vicini l'uno all'altro e da due archi infinitamente piccoli di due cerchi di centro m e di raggi r ed $r + dr$. Ma se il vettore \mathbf{A}' ha la direzione \mathbf{r} , le porzioni della circuitazione corrispondenti ai due archi di cerchio sono nulle; e se \mathbf{A}' è inoltre funzione della sola r , le porzioni della circuitazione corrispondenti ai due lati radiali uguali dr, dr' sono uguali e di segni con-

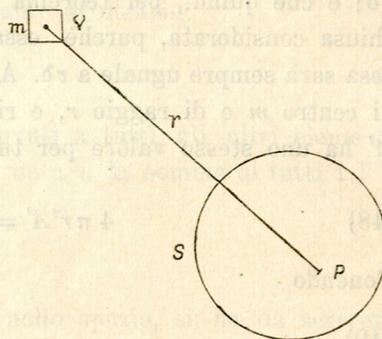


Fig. 30.

trari. Quindi anche C_2 è nulla. Similmente si dimostra che è nulla C_3 . Noi avremo adunque uno dei valori possibili di A' se porremo

$$(47) \quad A' = r A',$$

e se determineremo il tensore A' funzione di r in modo che la divergenza abbia un valore uguale a δ dentro di v ed a zero fuori di v .

A quest'uopo basta osservare che l'integrale di $\text{div } A' \cdot dv$ esteso allo spazio limitato da una superficie chiusa circondante l'elemento di volume v si ridurrà qui a $v\delta$; e che quindi, pel teorema della divergenza (23), qualunque sia la superficie chiusa considerata, purchè essa circondi v , l'integrale del vettore A' preso su di essa sarà sempre uguale a $v\delta$. Applicando questa proposizione ad una superficie sferica di centro m e di raggio r , e ricordando che A' è normale a questa superficie e che A' ha uno stesso valore per tutti i punti di essa, si ha:

$$(48) \quad 4 \pi r^2 A' = v\delta, \text{ e quindi } A' = \frac{v\delta}{4 \pi r^2}.$$

Ponendo

$$(49) \quad \frac{\delta}{4 \pi} = \rho \quad \text{e} \quad v\rho = m,$$

il valore di A' si scrive più semplicemente così:

$$(50) \quad A' = \frac{v\rho}{r^2}, \text{ oppure } A' = \frac{m}{r^2};$$

e portando questo valore nella (47) si ottiene

$$(51) \quad A' = r \frac{m}{r^2}.$$

Ciò che abbiamo fatto per l'elemento di volume v facciamo ora per tutti gli altri elementi di volume: consideriamo tante distribuzioni in ciascuna delle quali la divergenza δ abbia il valore dato solamente dentro all'elemento e sia nulla in tutto il rimanente spazio; per ciascuna di tali distribuzioni determiniamo pel punto P il vettore A' colla formola (51). La somma dei vettori A' soddisfa alle equazioni (46): essa è un vettore la cui divergenza ha in ogni punto del campo il valore voluto e la cui rotazione è nulla in tutto lo spazio. Se diciamo A la somma dei vettori A' , la soluzione trovata si scrive

$$(52) \quad A = \sum r \frac{m}{r^2};$$

e questa formola si traduce nel seguente enunciato: Il vettore A è il risultante di tanti vettori quanti sono gli elementi di volume, nei quali la divergenza è diversa da zero; ciascuno di questi vettori ha la direzione r della retta che congiunge il corrispondente elemento di volume al punto P considerato ed ha un valore inversamente proporzionale al quadrato della distanza del punto P dall'elemento di volume.

Il potenziale si trova facilmente. A tal fine consideriamo ancora dapprima un solo elemento di volume v situato in m ed il corrispondente vettore A' nel punto P alla distanza r da m . Siccome le superficie equipotenziali sono normali al vettore,

così la superficie equipotenziale passante per P è la superficie sferica di centro m e di raggio r , ed il potenziale V' del vettore A' è funzione della sola variabile r . Per determinare questa funzione abbiamo l'equazione (44) nella quale dobbiamo scrivere A' in luogo di A , V' in luogo di V , ed r in luogo di n . Abbiamo così:

$$A' = -\frac{dV'}{dr}; \text{ e quindi, ricordando che } A' = \frac{m}{r^2} :$$

$$\frac{dV'}{dr} = -\frac{m}{r^2}.$$

Di qui ricaviamo, rappresentando con cost. una costante arbitraria:

$$(53) \quad V' = \frac{m}{r} + \text{cost.}$$

Nel medesimo modo si calcolano i potenziali dovuti a tutti gli altri elementi di volume. Il potenziale V dovuto alla distribuzione data è la somma di tutti i V' ; si ha quindi

$$(54) \quad V = \Sigma \frac{m}{r} + \text{cost.}$$

Se la divergenza δ è distribuita con continuità nello spazio, si ha da scrivere in luogo di una somma un integrale; si ha allora:

$$(54') \quad V = \int \frac{\rho dv}{r} + \text{cost.,}$$

e l'integrazione si deve estendere a tutte le parti dello spazio nelle quali ρ è diverso da zero.

Il potenziale V così determinato ha per ogni punto del campo un valore unico; esso è una funzione monodroma delle coordinate. Ciò noi sapevamo in precedenza, poichè avevamo già veduto che la rot A è nulla in tutto il campo.

In tutto ciò che precede abbiamo supposto che dentro ad una superficie chiusa S di dimensioni finite circondante il punto P fosse $\delta = 0$. Se ciò non è, bisogna aggiungere ai valori (52) e (54) o (54') trovati per A e per V un termine, che possiamo rappresentare rispettivamente con A_0 e con V_0 , dovuto alla parte del campo contenuto dentro della superficie S . Ma se la divergenza δ non è infinita in nessun punto della regione limitata dalla superficie S , è facile vedere che A_0 e V_0 convergono verso zero quando la superficie S si riduce infinitamente piccola. Per dimostrare ciò, cominciamo ad osservare che anche facendo la superficie S infinitamente piccola, noi possiamo pur sempre immaginare che il volume da essa limitato sia scomposto in elementi, le dimensioni dei quali sieno infinitamente piccole a fronte delle distanze degli elementi stessi dal punto P : questa osservazione ci permette di far servire le espressioni or ora trovate per A e per V anche per calcolare A_0 e V_0 .

Ciò posto consideriamo A_0 . Questo vettore è il risultante $\Sigma r \frac{m}{r^2}$ di tanti vettori $r \frac{m}{r^2}$, che in generale non sono paralleli. Evidentemente il suo tensore A_0 è minore della somma dei tensori dei vettori componenti; quindi se col segno Σ si indica una somma estesa a tutto l'interno della superficie S , si ha

$$A_0 < \Sigma \frac{m}{r^2}. \quad (55)$$

Se immaginiamo dentro ad S una distribuzione continua e poniamo $m = \rho dv$, questa disuguaglianza si scrive

$$A_0 < \int \frac{\rho dv}{r^2}.$$

Se con ρ_0 si rappresenta il massimo valore assoluto di ρ dentro alla superficie S , si ha ancora con maggior ragione

$$A_0 < \rho_0 \int \frac{dv}{r^2}.$$

Ora possiamo supporre che S , la quale può essere una superficie qualunque, sia una superficie sferica di centro P e di raggio a ; e come elemento di volume dv possiamo prendere il volume compreso tra due superficie sferiche descritte col centro in P e coi raggi r ed $r + dr$. Per tal modo abbiamo

$$dv = 4\pi r^2 dr, \quad \text{onde:} \quad \int \frac{dv}{r^2} = 4\pi \int_0^a dr = 4\pi a,$$

e quindi

$$A_0 < 4\pi \rho_0 a.$$

Ora, se si fa infinitamente piccolo il raggio a della sfera S , ρ_0 tende verso il valore di ρ in P , che è finito in causa della (49) perchè si è supposto che δ sia finita. Dunque, per la relazione precedente, anche A_0 si riduce infinitamente piccolo; e se la sfera si restringe fino a ridursi al punto P , A_0 si annulla.

La stessa cosa si può affermare, ed anche con maggior ragione, per V_0 . Infatti se si suppone ancora che S sia una superficie sferica di centro P e di raggio a , se si scompone ancora questa sfera in elementi per mezzo di superficie sferiche concentriche e se si indica ancora con ρ_0 il massimo valore assoluto di ρ dentro la sfera, il valore assoluto di V_0 è minore di

$$\rho_0 \int \frac{dv}{r}, \quad \text{ossia di} \quad \rho_0 \int_0^a 4\pi r dr, \quad \text{ossia di} \quad 2\pi \rho_0 a^2,$$

e perciò esso si annulla con a .

Dopo questa osservazione noi siamo autorizzati ad adoperare le espressioni (52), (54), (54') anche quando il punto P considerato si trova in una regione ove δ è diverso da zero: quelle formole sono generali. Esse costituiscono una soluzione particolare delle equazioni differenziali (46).

Se in una regione dello spazio la distribuzione del vettore è solenoidale, cioè nelle (46) si ha $\delta = 0$, sarà in quella regione

$$m = 0, \quad \rho = 0.$$

In ogni caso dalla soluzione particolare delle (46) che è fornita dalle formole (52), (54), (54'), si hanno altre soluzioni delle (46) sommando col vettore A da esse dato un altro vettore qualunque avente una distribuzione solenoidale (e non circuitale).

Con l'introduzione del nuovo simbolo ρ definito dalla (49) $\frac{\delta}{4\pi} = \rho$ l'equazione (41) o (41') diventa, riferendosi tanto ρ quanto il potenziale V e le xyz ad uno stesso punto dello spazio

$$(55) \quad \nabla^2 V = -4\pi\rho$$

ossia

$$(55') \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho$$

(equazione di Poisson).

39. — Nel precedente articolo abbiamo supposto che fosse data la divergenza δ in ogni punto del campo e che esistessero delle distribuzioni non circuitali corrispondenti; ed abbiamo trovato che una distribuzione non circuitale che dà luogo alla data distribuzione di δ si ha col porre

$$(52) \quad \mathbf{A} = \Sigma \mathbf{r} \frac{m}{r^3},$$

ove $m = \rho v = \frac{v\delta}{4\pi}$. È facile dimostrare la proposizione reciproca, dimostrare che se il vettore ha in ogni punto un valore esprimibile nella forma (52), se cioè \mathbf{A} è il risultante di tanti vettori \mathbf{A}' , dei quali le direzioni sono quelle \mathbf{r} delle rette congiungenti col punto considerato P altrettanti punti m determinati, e le grandezze sono inversamente proporzionali ai quadrati delle distanze r del punto P dai punti medesimi, il flusso del vettore \mathbf{A} uscente da una superficie chiusa qualunque dipende soltanto dalla somma Σm estesa ai soli punti situati all'interno della superficie medesima, ed è uguale a $4\pi\Sigma m$; donde poi si trarrà che la divergenza di \mathbf{A} è uguale a δ .

A quest'uopo cominciamo a considerare il caso in cui i punti m si riducono ad un solo (fig. 31), supponiamo data una superficie SS e consideriamo su questa un elemento PQ di area dS ; diciamo r la distanza mP di questo elemento dal punto m , \mathbf{A}' il vettore PA' in P , e θ l'angolo della retta mPA' con la normale positiva PN alla superficie. Il flusso di \mathbf{A}' attraverso all'elemento PQ è $A' \cos \theta dS$,

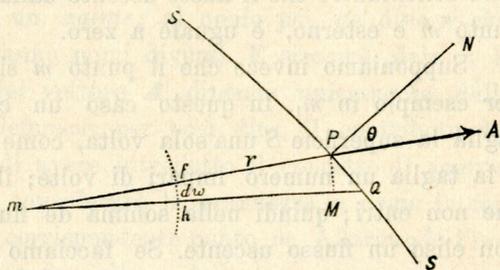


Fig. 31.

ossia essendo $A' = \frac{m}{r^2}$:

$$m \frac{\cos \theta dS}{r^2}.$$

Ora immaginiamo col vertice in m un cono mPQ circoscritto all'elemento superficiale PQ e diciamo dw la superficie della sezione fh fatta in questo cono per mezzo di una superficie sferica di centro m e di raggio uguale ad uno; dw è ciò che si denomina *angolo solido del cono* mPQ od anche *superficie apparente* dell'elemento PQ visto dal punto m . Se col centro in m e con raggio $mP = r$ descriviamo una superficie sferica, questa determina nel cono una sezione PM di area $r^2 dw$. Ma PM si può anche considerare come la proiezione di PQ , ossia di dS , sul piano normale in P a Pm , e quindi la sua superficie vale anche $\cos \theta dS$; dunque abbiamo $r^2 dw = \cos \theta dS$, e quindi $\frac{\cos \theta dS}{r^2} = dw$. Se portiamo questo valore nella espressione del flusso attraverso a PQ , questa si riduce a

$$m dw.$$

Questo valore è indipendente dalla distanza dell'elemento superficiale PQ dal punto m , e dall'area di esso, dipende soltanto dall'angolo solido dw . Se, oltre all'elemento PQ , il medesimo cono di angolo solido dw taglia sulla medesima superficie SS , o su altre superficie, altri elementi superficiali, i flussi attraverso a tali elementi, se presi nella medesima direzione, sono tutti uguali.

Ora consideriamo una superficie chiusa S (fig. 32), e supponiamo che il punto m sia fuori di essa. Un cono infinitesimo mPQ di vertice m , se taglia la superficie

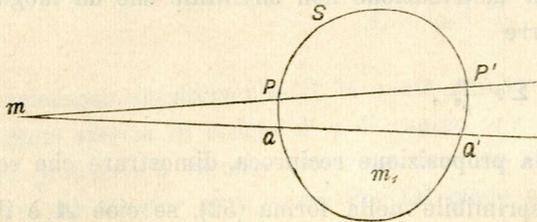


Fig. 32.

S , la taglia un numero pari di volte (nel caso più semplice, rappresentato in figura, la taglia due volte); ed attraverso alle successive sezioni PQ , $P'Q'$ ecc. esso alternativamente entra nell'interno della superficie ed esce dalla medesima. I flussi del vettore A' attraverso alle successive se-

zioni PQ , $P'Q'$ ecc. ... sono, rispetto alla superficie S , alternativamente entranti ed uscenti; essi sono tutti uguali tra di loro quando si assume per tutti una medesima direzione positiva, ma se si prende come positiva la direzione uscente e come negativa la entrante in S , essi sono alternativamente negativi e positivi; sicchè se si sommano essi danno una somma uguale a zero. La stessa cosa si deve dire per tutti i coni infinitamente sottili che si possono immaginare col vertice in m ; e quindi si deve concludere che il flusso uscente dalla superficie chiusa S , rispetto alla quale il punto m è esterno, è uguale a zero.

Supponiamo invece che il punto m sia nell'interno della superficie S , che sia per esempio in m_1 . In questo caso un cono infinitamente sottile di vertice m_1 o taglia la superficie S una sola volta, come nel caso semplice rappresentato in figura, o la taglia un numero impari di volte; il cono esce dalla superficie una volta di più che non entri; quindi nella somma de' flussi corrispondenti al cono medesimo rimane non eliso un flusso uscente. Se facciamo questa osservazione per tutti gli infiniti coni elementari che si possono immaginare col vertice in m_1 , e se sommiamo i flussi uscenti che ad essi corrispondono troviamo $m \int dw$. Ora la somma $\int dw$ degli angoli solidi di tutti i coni che hanno il vertice in un medesimo punto m_1 è uguale alla intera superficie della sfera di raggio uno sulla quale essi vengono misurati; dunque il totale flusso uscente dalla superficie chiusa S , nell'interno della quale giace il punto m_1 , è uguale a $4 \pi m$.

Si abbia ora non più un solo punto m od m_1 , ma un numero qualunque di punti comunque distribuiti nello spazio. Di tali punti quelli che stanno all'esterno della superficie chiusa S non portano alcun contributo al flusso uscente dalla superficie medesima; quelli invece, che stanno all'interno, apportano alla somma che rappresenta tale flusso altrettanti termini, uno qualunque dei quali è espresso da $4 \pi m$. Il flusso risultante vale adunque $4 \pi \Sigma m$.

Se introduciamo altri simboli, cioè poniamo (indicando con v un elemento di volume racchiudente il punto m):

$$m = \rho v \quad \text{e} \quad 4 \pi \rho = \delta,$$

l'espressione del flusso ora trovata prende la forma: $\Sigma v \delta$; e se δ è distribuita con continuità $\int \delta dv$. Per un solo elemento di volume dv il flusso uscente è δdv . Dividendolo pel volume dv dell'elemento otteniamo la divergenza; questa adunque è uguale a δ , o, se si vuole, a $4\pi\rho$.

40. *Forze newtoniane.* — Distribuzioni come quelle che siamo stati condotti a considerare si incontrano in parecchi casi nella meccanica e nella fisica. Fra questi casi poi hanno una importanza speciale quelli ove il vettore A è una forza. Se, come nelle distribuzioni ora studiate, la forza A è la risultante di forze A' con direzioni passanti per punti m determinati ed intensità funzioni delle sole distanze da questi punti, le forze si dicono *centrali*. Se poi l'intensità di ciascuna forza A' è inversamente proporzionale al quadrato della distanza r del punto su cui essa agisce dal corrispondente punto m , le forze si dicono *newtoniane*. Tale denominazione deriva dal fatto, che la legge della ragione inversa dei quadrati delle distanze è quella delle forze dovute alla gravitazione universale, scoperta da NEWTON.

Siccome, nel caso delle forze newtoniane, il vettore A si esprime in forma semplicissima per mezzo delle distanze r del punto considerato dai punti m , così è possibile, e può anche parere naturale, presentare e descrivere i fatti e parlare di essi come se alla esistenza dei punti m fosse dovuta l'esistenza delle forze A' , o, comunque, dei vettori A' medesimi, come se nei punti m risiedesse la *causa* de' vettori. Alludendo a tale causa si va talvolta più oltre: la si materializza, per così dire, col pensiero, e si dice che nei punti m esiste un *agente*; al quale poi, ne' diversi casi speciali che si presentano nella fisica, si danno nomi diversi. E siccome, dato r , la grandezza della forza o più in generale del vettore A' dipende unicamente dalla grandezza m , siccome questa grandezza definisce, per così dire, il contributo del punto m nella produzione di A , così, dopo di avere introdotto il concetto di agente, si suole, e può presentarsi come naturale, considerare la grandezza m come la misura o la *quantità* dell'agente esistente nel corrispondente punto m . Allargando l'impiego di un concetto e di una locuzione resa famigliare dalla meccanica celeste, si dice anche, invece di quantità: *massa* di agente. La grandezza che noi abbiamo rappresentato colla lettera ρ , il valore della quale si ottiene dividendo m pel volume entro al quale questa esiste, la quale quindi rappresenta la m riferita all'unità di volume, dicesi allora naturalmente la *densità* dell'agente nel punto considerato.

La massa contenuta in un dato spazio, come sopra definita, è il flusso uscente dallo spazio medesimo diviso per 4π ; come questo flusso adunque essa può essere positiva o negativa; una massa negativa significa un flusso entrante. Così pure la densità; a meno del fattore 4π , essa è la divergenza del vettore nel punto considerato e può perciò, come questa, essere positiva o negativa; una densità negativa corrisponde ad una convergenza.

41. *Significato delle precedenti locuzioni ed estensione del loro impiego.* — Se in una questione di fisica si ha da considerare un campo di un vettore A , può presentarsi la questione di sapere dove veramente sia la sede de' fenomeni elementari, i quali danno luogo alla esistenza del vettore. Nel caso particolare di una distribu-

zione centrale, come quella or ora considerata, può domandarsi se la causa dell'esistenza del vettore A stia nei punti stessi nei quali A esiste, o se risiede invece nei punti m che hanno col versore e col tensore di A una relazione così semplice. E la risposta a questa questione, qualora sia possibile, ha per la fisica una importanza fondamentale. Se infatti si ritiene che la causa del vettore stia ne' punti m , si è condotti a pensare a qualche cosa, ad una materia, o ad una condizione della materia esistente in tali punti, ad un agente, il quale esercita nei punti P , a distanza, azioni definibili per mezzo dei vettori A' . Se invece si ritiene che la causa immediata del vettore A stia nel punto P stesso in cui A viene osservato, non si hanno a considerare azioni a distanza, ma si è condotti a pensare ad un mezzo riempiente tutto lo spazio, ed a considerare A come la manifestazione di una condizione di tale mezzo, per esempio di una speciale deformazione di esso, deformazione la quale si trasmette da punto a punto con continuità, per passi infinitamente piccoli. Dalla scelta fra le due interpretazioni deriva poi naturalmente quella del modo più conveniente di descrivere il campo e di trattare le equazioni matematiche che a questo si riferiscono. Nel primo caso infatti, quando cioè si considera un agente situato ne' punti m ed esercitante azioni a distanza, le grandezze m e le ρ , che figurano nelle nostre equazioni, hanno a considerarsi come le principali; risulta allora conforme alla natura delle cose prenderle come date ed esprimere in funzione di esse le altre grandezze, fra queste la A . Nel secondo caso invece, quando non si considerano azioni a distanza, la grandezza che si ha da trattare come principale, come fondamentale, è la A stessa; le altre, e fra queste le m , si presentano come secondarie.

Ma le considerazioni che noi abbiamo svolto negli articoli precedenti [37, 38, 39], le quali, essendo puramente geometriche, sono affatto generali, mettono in chiaro che a risolvere la cennata questione non basta avere dimostrato coll'esperimento l'esistenza del campo e la distribuzione newtoniana. Data l'esistenza del campo, la distribuzione in esso esistente si può descrivere in vari modi. Uno di questi consiste nel dare direttamente il vettore A in funzione delle coordinate dei punti del campo: è il modo più diretto, è quello che noi abbiamo seguito da principio e che abbiamo svolto negli articoli dal [12] al [36]. Un altro modo consiste nel dare in funzione delle coordinate non direttamente il vettore A , ma la $\text{div. } A$, aggiungendo a tale dato altre condizioni sufficienti a definire completamente la distribuzione: è il secondo modo da noi seguito, quello trattato negli articoli [37] e [38]. I due procedimenti si riducono a due scelte diverse delle quantità che in un medesimo sistema di equazioni si vogliono assumere come date e di quelle che si vogliono trattare come incognite; essi sono ugualmente legittimi e si equivalgono; scegliere l'uno o l'altro non significa risolvere alcuna questione fisica. La cennata questione fisica si può risolvere soltanto quando oltre ai fatti che dimostrano la esistenza del campo e la distribuzione newtoniana sieno dimostrati dalla esperienza altri fatti, per esempio fatti relativi alla influenza che può avere sul valore del vettore la natura de' corpi riempienti il campo, oppure fatti relativi al tempo ed al modo nel quale una variazione del vettore prodotto in una data regione si propaga alle altre parti dello spazio.

Dopo queste osservazioni, ed appunto in grazia di esse, noi possiamo adoperare, senza inconvenienti, le locuzioni sovra esposte, massa e densità, delle quali si suole fare un uso continuo nella trattazione delle forze newtoniane. Possiamo anche estendere l'uso di quelle locuzioni ai casi nei quali il vettore a distribuzione newtoniana non è una forza, possiamo adoperarle anche quando il vettore non ha nessuna interpretazione fisica e viene trattato come un semplice ente geometrico. Ma coll'atto stesso di estenderne l'uso anche ai casi di pure considerazioni geometriche noi veniamo implicitamente a privare le sovra dette locuzioni, nel modo più assoluto, di qualunque interpretazione fisica; esse rimangono per noi semplici vocaboli utili per facilitare l'enunciazione a parole di relazioni matematiche importanti e frequenti.

§ 6.

Casi di discontinuità. Strati.

42. — In tutta la precedente trattazione abbiamo sempre supposto che il vettore fosse distribuito con continuità. Nel caso che qualche discontinuità si presentasse, noi abbiamo una volta per sempre [13] convenuto di escluderla dal campo tagliando via da questo, per mezzo di opportune superficie, le regioni ove essa si presenta, oppure sostituendo col pensiero alla discontinuità una variazione rapidissima sì, ma continua. Ora, quando si tratta di distribuzioni non circuitali, la considerazione dei vettori newtoniani e l'impiego del concetto di massa conducono ad un modo di presentare e di trattare i casi di discontinuità, il quale, nello stato attuale della scienza, ha una importanza speciale e notevole nella trattazione dei fenomeni elettrici e magnetici.

Si abbia una superficie DD di discontinuità (fig. 33), si supponga cioè che tra due punti infinitamente vicini P e Q uno sull'una e l'altro sull'altra faccia della superficie il vettore presenti una differenza finita, che per esempio esso sia A , rappresentato da PA , in P , e B , rappresentato da QB , in Q . I vettori A e B si possono scomporre in due, uno tangenziale, e l'altro normale alla superficie DD . Sieno, per esempio, PA' , QB' e si rappresentino con A' , B' , le componenti tangenziali, e sieno $A'A$, $B'B$ e si rappresentino con A'' , B'' le componenti normali.

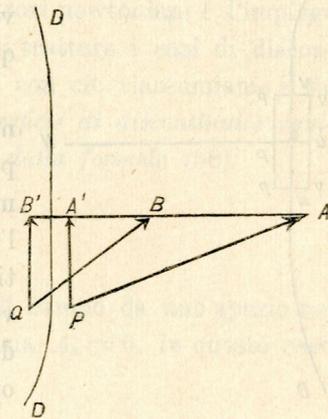


Fig. 33.

Dobbiamo cominciare ad osservare che se, come abbiamo supposto, la distribuzione non è circuitale, le componenti tangenziali A' , B' non possono presentare tra loro alcuna differenza finita; se la presentassero si avrebbe sulla superficie DD rot A diverso da zero. Infatti in un piano qualunque normale alla superficie DD

immaginiamo (fig. 34) un rettangolo $pp\ qq$ infinitesimo coi lati pp, qq passanti pei punti P e Q e coi lati pq, pq infinitamente piccoli a fronte di pp, qq . Diciamo s la lunghezza dei lati pp, qq e rappresentiamo con a e con b le proiezioni di \mathbf{A}, \mathbf{B} , cioè di \mathbf{A}', \mathbf{B}' , sui lati pp, qq . La circuitazione attorno al rettangolo, a meno della parte infinitamente piccola d'ordine superiore dovuta ai lati pq, pq , è uguale a $s(a - b)$. Acciocchè la rotazione sia zero, bisogna che tale circuitazione sia nulla qualunque sia il piano normale a DD che si è scelto per tracciarvi sopra il rettangolo. Dunque per tutti i piani normali alla superficie DD dev'essere $a = b$; e ciò vuol dire che dev'essere $\mathbf{A}' = \mathbf{B}'$. Per conseguenza possiamo dire che la componente tangenziale non soffre alcuna discontinuità; la discontinuità esiste solo per la componente normale.

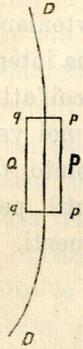


Fig. 34.

Giova notare subito, incidentalmente, un importante *corollario* di questa proposizione. Si supponga $\mathbf{B} = 0$; allora è $\mathbf{B}' = 0$, e quindi, in grazia della proposizione ora dimostrata, è anche $\mathbf{A}' = 0$. Dunque \mathbf{A} è allora normale alla superficie DD . Se una superficie separa un campo a distribuzione non circuitale da una regione ove il vettore è nullo, il vettore nei punti del campo infinitamente vicini a tale superficie è normale alla superficie medesima. In altri termini: in tutti i punti di una superficie separante una regione ove esiste un vettore con distribuzione non circuitale da una regione ove questo non esiste il vettore è normale alla superficie. La superficie è di livello e quindi [35] equipotenziale. Questa osservazione troverà applicazioni nello studio de' fenomeni elettrostatici.

43. — Dopo la fatta osservazione, possiamo limitarci a considerare la componente del vettore normale alla superficie di discontinuità. Ciò è quanto dire che possiamo limitarci a considerare il caso, nel quale il vettore è normale alla superficie di discontinuità; tutti gli altri casi si dedurranno da questo componendo semplicemente col vettore considerato un altro vettore il quale nei punti della superficie è tangente a questa e non presenta alcuna discontinuità.

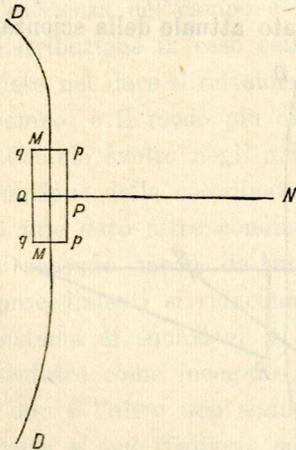


Fig. 35.

Ciò posto, sia DD (fig. 35) una superficie di discontinuità normale in ogni punto al vettore e sieno P e Q due punti infinitamente vicini situati su di una medesima normale QPN , uno da una parte della superficie e l'altro dall'altra. Si scelga sulla normale una direzione QPN positiva, e si rappresentino con A_1 e con A_2 i tensori del vettore in P ed in Q intesi come positivi quando hanno la direzione PN e come negativi quando hanno la direzione opposta.

Prendiamo sulla superficie DD un elemento MM di area dS , e su questo, preso come sezione retta, costruiamo un prisma infinitamente piccolo, del quale le basi pp e qq contengano i punti P e Q . Dalla faccia pp del prismetto esce un flusso $A_1 dS$, mentre per la faccia qq entra un flusso $A_2 dS$; quindi si ha un flusso uscente dal prismetto uguale complessivamente a $(A_1 - A_2) dS$. Ora possiamo far uso anche in questo caso del concetto di

massa, ed esprimere il fatto col dire che dentro del prismetto vi ha una massa dm definita dalla relazione:

$$(56) \quad 4 \pi dm = (A_1 - A_2) dS.$$

Con ciò noi non facciamo altro che estendere anche a questo caso la definizione di massa contenuta nelle formole (49) dell'articolo 38.

La massa dm si ha da considerare dentro al prismetto anche quando l'altezza PQ di questo è infinitamente piccola; ciò equivale a dire che essa si ha da considerare come distribuita sulla superficie dS dell'elemento MM della superficie di discontinuità. Se le stesse considerazioni si fanno per gli altri elementi della superficie DD , si viene ad assegnare a ciascuno di essi una corrispondente massa, e così si viene ad immaginare una distribuzione di masse su tutta la superficie. Una superficie come quella considerata, sulla quale è distribuita con continuità una massa, si dice uno *strato*.

Se dividiamo dm per dS , otteniamo la massa distribuita sull'unità di superficie o riferita alla unità di superficie, e questa si dice: la *densità* dello strato, o la densità superficiale, o di superficie, o sulla superficie, in un punto dell'elemento dS . Se rappresentiamo con σ tale densità, questa risulta definita dalla formola

$$(57) \quad \sigma = \frac{dm}{dS}.$$

Se poi dividiamo i due membri della (56) per dS e vi introduciamo la notazione σ definita dalla (57), otteniamo:

$$(58) \quad 4 \pi \sigma = A_1 - A_2.$$

Per tal modo risulta dimostrato ciò che abbiamo annunziato in principio dell'art. 42, risulta dimostrato come la considerazione di vettori newtoniani e l'impiego del concetto di massa offrano un modo di presentare e di trattare i casi di discontinuità nelle distribuzioni non circuitali. Risulta infatti, e con ciò riassumiamo il fin qui detto, che *in una distribuzione non circuitale una superficie di discontinuità equivale ad uno strato avente in ogni punto la densità σ data dalla formola (58).*

44. — Importa considerare due casi particolari:

1° caso. Si supponga che la superficie DD separi il campo da uno spazio nel quale il vettore non esiste; si supponga per esempio che sia $A_2 = 0$. In questo caso la (58) dà

$$(59) \quad A_1 = 4 \pi \sigma, \quad \sigma = \frac{A_1}{4 \pi}.$$

Ciò fa vedere come l'esistenza di un campo non circuitale si possa interpretare per mezzo della finzione di masse distribuite sulle superficie che lo limitano; e le formole (59) mostrano come, dato il vettore in vicinanza della superficie, si possa

calcolare la densità dello strato che si deve immaginare sulle superficie medesime, o viceversa come, data questa densità, si possa calcolare il vettore nelle vicinanze.

Qui devesi anche ricordare ciò che si è detto alla fine dell'articolo 42, che cioè quando A_2 , ossia B , è uguale a zero, come qui si suppone, il vettore A è normale alla superficie DD , ossia il valore di A_1 ora calcolato non è soltanto una componente, ma è l'intero tensore di A . Se vogliamo, possiamo ciò ricordare scrivendo

$$A = 4 \pi \sigma n,$$

ove n rappresenta un vettore unità normale alla superficie. Ricordando la convenzione fatta pel segno di A_1 , risulta anche che A è diretto dalla superficie DD verso il campo quando σ è positiva, dal campo verso la superficie DD quando σ è negativa.

Superficie corrispondenti. — In un campo a distribuzione non circuitale supponiamo che esistano due regioni Q, Q' , (fig. 36) limitate da due superficie S, S' , nel-

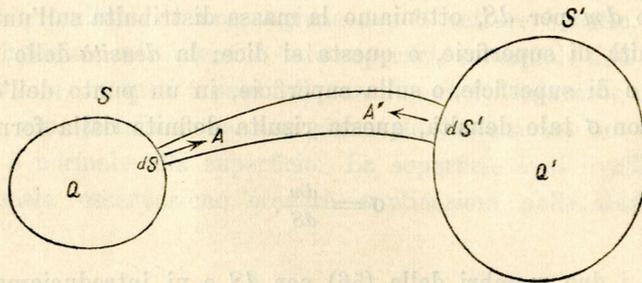


Fig. 36.

l'interno delle quali il vettore sia nullo, mentre all'esterno di esse ha valori diversi da zero. Supponiamo inoltre che fuori delle superficie S ed S' la distribuzione sia solenoidale. In questo campo consideriamo un tubo di flusso infinitamente sottile, il quale parta da un elemento dS di S e termini su di un elemento dS' di S' . Questi due elementi superficiali dS e dS' si dicono "corrispondenti". Se diciamo A il tensore del vettore in un punto dell'elemento dS , ed A' quello del vettore in un punto di dS' , e se, conformemente alla convenzione dei segni ora ricordata, li prendiamo come positivi quando sono diretti verso la regione ove A è diverso da zero, i flussi attraverso a dS ed a dS' , presi nella direzione da dS verso dS' sono rispettivamente $A dS$ e $-A' dS'$. Per la proprietà solenoidale, che si è supposto esistere lungo tutto il tubo, questi due flussi sono uguali; quindi si ha $A dS = -A' dS'$. Ora la proposizione precedente, applicata ad A e ad A' , dà

$$A = 4 \pi \sigma \quad \text{ed} \quad A' = 4 \pi \sigma';$$

dunque

$$\sigma dS = -\sigma' dS'.$$

Se diciamo dm e dm' le masse esistenti sui due elementi dS e dS' , questa uguaglianza si scrive più semplicemente

$$dm = -dm';$$

essa dice: *due elementi superficiali corrispondenti contengono masse uguali e di segni contrarii.*

Sia ora (fig. 37) $MMM'M'$ un tubo di flusso di dimensioni finite qualunque, il quale parta da una porzione MM della superficie S e termini su di una porzione $M'M'$ della superficie S' ; le due porzioni di superficie MM ed $M'M'$ si dicono *superficie corrispondenti*. Scomponendo il tubo $MMM'M'$ in tubi elementari infinitamente sottili, si possono scomporre le superficie MM ed $M'M'$ in elementi in modo che a ciascun elemento di MM sia corrispondente un elemento di $M'M'$. Ed applicando allora a tutte le coppie di elementi corrispondenti la proposizione ora dimostrata si trova che a ciascuna massa contenuta su MM corrisponde una massa uguale e di segno contrario su $M'M'$. Dunque le due superficie corrispondenti contengono masse uguali e di segni contrarii.

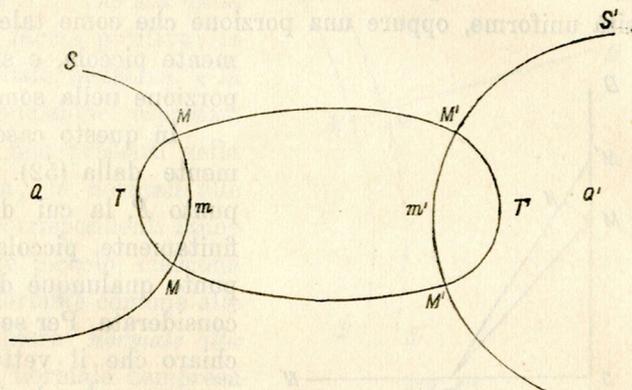


Fig. 37.

Ciò si può dimostrare direttamente e semplicissimamente così. Immaginiamo due superficie T, T' , quali si vogliano, situate negli spazi Q e Q' ove il vettore è nullo ed aventi per contorni i contorni delle superficie corrispondenti $MM, M'M'$; formiamo per tal modo, con queste superficie T, T' e colla superficie laterale del tubo, una superficie chiusa $TMM'T'M'M$. Il flusso uscente da questa superficie chiusa è nullo, perchè il vettore è nullo nei punti delle superficie T, T' ed è tangente nei punti della superficie laterale del tubo. Ora, per la definizione data all'art. 40, il flusso uscente da una superficie chiusa, diviso per 4π , dà la massa esistente nell'interno della superficie stessa; dunque la massa contenuta nell'interno della superficie chiusa ora considerata è uguale a zero. Ma, poichè la distribuzione nello spazio tra S ed S' è solenoidale e perciò non v'hanno masse in tale spazio, la massa contenuta entro la superficie chiusa si riduce alla somma di quelle esistenti sulle superficie di discontinuità $MM, M'M'$; se noi rappresentiamo tali masse con m, m' , abbiamo adunque $m + m' = 0$, che è ciò che si voleva dimostrare.

Un caso particolare degno di nota è quello nel quale la superficie S' circonda completamente la superficie S (fig. 38). In questo caso tutti i tubi di flusso esistenti nello spazio tra le due superficie partono dalla superficie S e terminano sulla S' . Quindi a tutte le masse contenute su S corrispondono masse uguali e di segni contrarii sulla S' , e per conseguenza le masse totali contenute sulle due superficie sono uguali e di segni contrarii; la loro somma algebrica è uguale a zero.

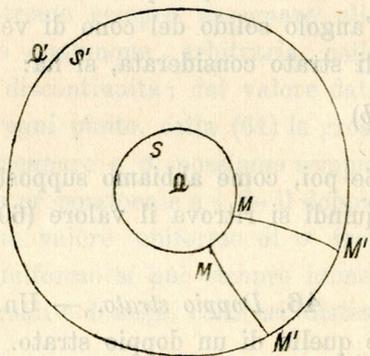


Fig. 38.

45. — 2° Caso. Si supponga $A_2 = -A_1$. Allora la (58) dà

$$(60) \quad A_1 = 2\pi\sigma.$$

Questo caso si presenta quando dello strato si considera una porzione piana, di densità uniforme, oppure una porzione che come tale si possa trattare perchè infinitamente piccola, e si calcola la parte spettante a tale porzione nella somma (52).

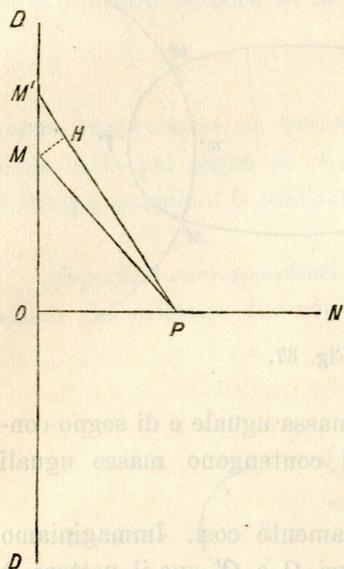


Fig. 39.

In questo caso la (60) si può ricavare direttamente dalla (52). Si consideri infatti (fig. 39) un punto P , la cui distanza PO dal piano DD sia infinitamente piccola a fronte della distanza da un punto qualunque del contorno della porzione di strato considerata. Per semplice ragione di simmetria risulta chiaro che il vettore A espresso nella (52) dev'essere normale al piano DD e che la sua direzione si deve capovolgere quando il punto P passa da una faccia all'altra dello strato. Il suo tensore poi si ottiene sommando le componenti normali a DD dei termini $r \frac{m}{r^3}$ della somma vettoriale (52). Ora uno di questi termini, quello corrispondente all'elemento MM' , di area dS , è $r \frac{\sigma dS}{r^3}$, e la sua componente normale è

$$(a) \quad rn \frac{\sigma dS}{r^3},$$

ove si rappresenti con n un vettore unità perpendicolare al piano DD . Ma rn è il coseno dell'angolo OPM [7], e quindi $rndS$ è l'area della proiezione MH di dS su di una superficie sferica di centro P e di raggio r , o, ciò che val lo stesso, l'area della sezione fatta su tale superficie sferica dal cono PMM' di vertice P , circoscritto all'elemento dS . Se si dice $d\omega$ l'angolo solido [39] di questo cono, si ha adunque $rndS = r^2 d\omega$, e quindi il termine (a) di A dovuto a dS si riduce a $\sigma d\omega$. Se si dice ω l'angolo solido del cono di vertice P avente per direttrice il contorno della porzione di strato considerata, si ha:

$$(b) \quad A = \sigma \omega.$$

Se poi, come abbiamo supposto, P è infinitamente vicino al piano DD , è $\omega = 2\pi$; quindi si ritrova il valore (60).

46. Doppio strato. — Un caso importante, che ci conviene ancora considerare, è quello di un doppio strato.

Immaginiamoci data una superficie S (fig. 40). Da ciascun punto M di questa eleviamo la normale e portiamo su di essa, in una direzione MN scelta come positiva, una lunghezza infinitamente piccola $MM' = n$, costante oppure variabile con una legge qualunque, ma senza discontinuità. Otteniamo così per ciascun punto M

di S un punto M' , che diremo ad esso *corrispondente*, e come luogo geometrico dei punti M' otteniamo una seconda superficie S' infinitamente vicina alla S . Il solido geometrico limitato dalle superficie S ed S' è una lamina infinitamente sottile, e le due superficie si dicono: le faccie di essa; la superficie $S'S'$, che sta dalla parte della normale positiva, è la faccia positiva; la SS , che sta dalla parte della normale negativa, è la faccia negativa. In grazia della condizione espressa, che n , quando non sia costante, non presenti nella sua variazione alcuna discontinuità, le normali alle due faccie in due punti M ed M' corrispondenti fanno tra di loro un angolo infinitamente piccolo, ciascuna di esse si può trattare come una normale comune alle due faccie, ciascuna si può denominare: *normale alla lamina*. La porzione $MM' = n$ di normale compresa dentro la lamina si dice: la *groszza di questa*.

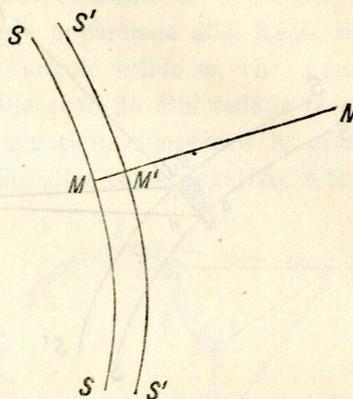


Fig. 40.

Ora immaginiamo che sulla faccia positiva $S'S'$ vi sia uno strato, la cui densità abbia in ogni punto come M' un valore positivo σ , e che sulla faccia negativa SS vi sia un secondo strato, del quale la densità sia in ogni punto negativa ed uguale, in valore assoluto, a quella che vi è nel punto corrispondente del primo strato; in questo sistema di due strati infinitamente vicini, di densità uguali e di segni contrari, noi abbiamo ciò che si dice: un *doppio strato*. La groszza n della lamina si dice anche: groszza del doppio strato; il prodotto della groszza per la densità σ dello strato positivo si dice: *potenza* del doppio strato, od anche: *potenza della lamina*. Noi supporremo che la potenza abbia un valore finito, e la rappresentiamo con i ; scriveremo cioè:

$$(61) \quad i = n\sigma.$$

Se la potenza i ha lo stesso valore su tutta la lamina, il doppio strato si dice: *uniforme*.

Data per ogni punto della lamina la potenza, potremo sempre assegnare alla densità σ sull'una o sull'altra faccia una distribuzione qualunque, arbitraria, colla sola restrizione che essa non deve presentare alcuna discontinuità; dal valore dato di i e da quello assegnato a σ potremo dedurre, per ogni punto, colla (61) la groszza n . Fra le infinite distribuzioni, che possiamo assegnare a σ , possiamo sempre scegliere quella uniforme; allora n risulta direttamente proporzionale a i . Se il doppio strato è uniforme, se cioè i è costante, la scelta di un valore uniforme di σ trae seco la conseguenza $n = \text{costante}$: un doppio strato uniforme si può sempre immaginare costituito da due strati uniformi, di densità uguali e di segni contrari, distesi sulle due faccie di una lamina di groszza uniforme.

Dato un doppio strato $SS, S'S'$, uniforme, di potenza i (fig. 41), proponiamoci di calcolare colla formola (54) dell'art. 38, ossia colla $V = \sum \frac{m}{r}$ a meno di una costante, il potenziale che esso produce in un punto qualunque P . A quest'uopo con-

sideriamo della lamina un elemento prismatico $MQM'Q'$ avente per basi un elemento MQ della faccia SS ed il corrispondente elemento $M'Q'$ della faccia $S'S'$; diciamo

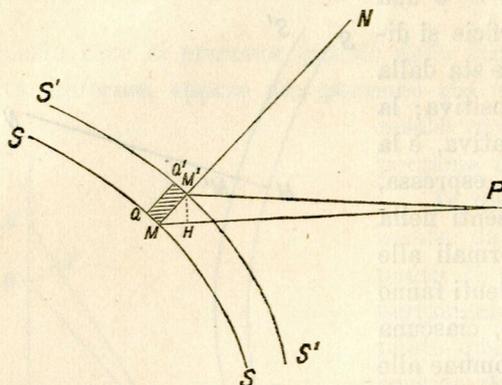


Fig. 41.

poi dS la superficie delle basi, n ed \mathbf{n} il tensore ed il versore dell'elemento di normale MM' , r ed \mathbf{r} il tensore ed il versore della congiungente $M'P$, σ e $-\sigma$ le densità sugli elementi $M'Q'$ ed MQ . L'elemento prismatico apporta alla somma $\Sigma \frac{m}{r}$ due termini, corrispondenti alle masse σdS e $-\sigma dS$ esistenti sulle basi $M'Q'$ ed MQ . La prima di queste masse si può ritenere concentrata in M' alla distanza r da P ; essa quindi dà il termine $\frac{\sigma dS}{r}$. L'altra massa si può ritenere

concentrata in M , ad una distanza da P uguale a PM . Ora se col centro in P e con un arco di circolo $M'H$ di raggio r si taglia PM in H , si ha: $PM = PH + HM = r + HM$, o ancora, poichè a meno di un infinitesimo di ordine superiore, HM è la proiezione di $\mathbf{n}n$ su PM , e poichè la direzione di PM differisce infinitamente poco da quella di \mathbf{r} , $PM = r + \mathbf{r}n$. Dunque il termine corrispondente alla massa $-\sigma dS$ è: $-\frac{\sigma dS}{r + \mathbf{r}n}$. La somma dei due termini dovuti all'elemento $M'Q'MQ$ è per conseguenza: $\sigma dS \frac{\mathbf{r}n}{r^2 + \mathbf{r}n}$. Ma nel denominatore il termine $\mathbf{r}n$, che è infinitamente piccolo, scompare a fronte del termine finito r^2 ; dunque il potenziale in P dovuto all'elemento di lamina considerato è

$$\sigma dS \frac{\mathbf{r}n}{r^2}, \text{ ossia } i \frac{\mathbf{r}n dS}{r^2}.$$

Ora si è dimostrato nell'articolo precedente [45] che se si rappresenta con $d\omega$ l'angolo solido del cono di vertice P e di base dS , si ha $\mathbf{r}n dS = r^2 d\omega$; dunque l'espressione trovata si può ridurre alla forma più semplice

$$(62) \quad i d\omega.$$

Questa è la parte del potenziale dovuta all'elemento dS . Il potenziale dovuto alla lamina intiera è la somma di quelli dovuti agli elementi; esso è adunque uguale al prodotto della costante i per la somma delle superficie apparenti $d\omega$. Se rappresentiamo questa somma, ossia la superficie apparente della intiera lamina vista dal punto P , colla lettera ω , il potenziale in P risulta espresso, a meno di una costante arbitraria, dalla formola

$$(63) \quad V = i \omega.$$

Siccome per arrivare a questa formola abbiamo posto $\mathbf{r}n dS = r^2 d\omega$, così si deve ricordare che $d\omega$ vuol essere preso come positivo o come negativo secondochè è

positivo o negativo rn . E siccome rn è il coseno dell'angolo compreso tra la normale positiva n e la retta rr condotta dall'elemento dS al punto P [7], così dw vuol essere preso come positivo o come negativo secondo che l'elemento di superficie dS visto dal punto P appartiene alla faccia positiva oppure appartiene alla faccia negativa della lamina. Per conseguenza nel calcolare l'angolo solido ω , che figura nella (63) bisogna distinguere le parti della lamina delle quali da P si vede la faccia positiva da quelle delle quali da P si vede la faccia negativa, computare le grandezze apparenti delle prime come positive e quelle delle altre come negative, e fare la somma algebrica. Così, per esempio, nel caso della fig. 42 si deve prendere come positivo tutto l'angolo solido del cono PAB tangente alla lamina, dentro al quale si vede da P la parte AEB della faccia positiva; da esso poi si deve sottrarre l'angolo solido corrispondente allo spazio compreso fra i due coni PAB e PCD , perchè in questo spazio si vede da P la porzione anulare AC, BD della faccia negativa. Ciò che rimane è l'angolo solido del cono PCD che ha per direttrice il contorno CFD della lamina. Questo esempio mette in chiaro una regola semplicissima per trovare in ogni caso, senza bisogno di sottrazioni, il valore ed il segno di ω : l'angolo solido ω , del quale si ha da far uso nella formola (63), è quello del cono di vertice P , che ha per direttrice il contorno della lamina. Il segno di ω è quello della faccia che si vede dentro a questo cono.

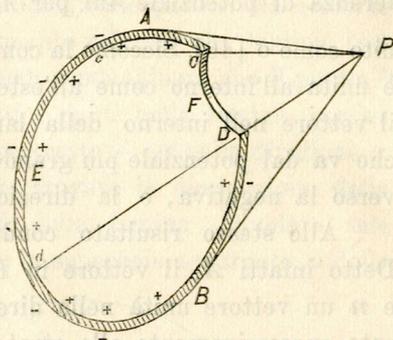


Fig. 42.

47. — Su di una normale ad una lamina AB (fig. 43) di potenza i consideriamo due punti P_1 e P_2 infinitamente vicini, l'uno, P_1 , dalla parte della faccia positiva e l'altro, P_2 , dalla parte della faccia negativa. Se diciamo ω_1 ed ω_2 gli angoli solidi coi quali la lamina è veduta dai due punti, e V_1, V_2 i corrispondenti potenziali, abbiamo:

$$V_1 = i\omega_1 \quad \text{e} \quad V_2 = i\omega_2,$$

e quindi

$$V_1 - V_2 = i(\omega_1 - \omega_2).$$

Ora se, come si è supposto, P_1 e P_2 sono infinitamente vicini, e se si ricorda quanto testè è stato detto relativamente al segno degli angoli solidi, si ha:

$$\omega_2 = -(4\pi - \omega_1).$$

Dunque

$$(64) \quad V_1 - V_2 = 4\pi i.$$

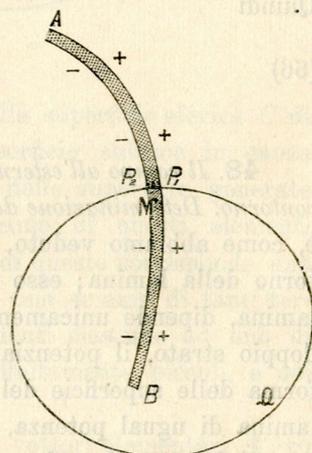


Fig. 43.

Questa differenza di potenziale si ha quando si passa da una faccia all'altra della lamina, qualunque, del resto, sia la via che si percorre; essa ha sempre il

medesimo valore, sia che per andare da P_1 a P_2 si percorra una linea P_1QP_2 la quale giri fuori del contorno AB , sia che si segua il cammino più breve P_1MP_2 attraverso alla lamina. Se, partendo da P_1 , si percorre l'intera linea chiusa $P_1QP_2MP_1$, si ritrova in P_1 , all'arrivo, il medesimo potenziale che si aveva alla partenza.

Se, come stiamo osservando, nell'interno della lamina, la quale ha una grossezza n infinitamente piccola, si ha da una faccia all'altra una differenza di potenziale finita $4\pi i$, dobbiamo dire che dentro della lamina il vettore è infinitamente grande. La sua componente normale alla lamina si ottiene infatti dividendo la differenza di potenziale $4\pi i$ per n , ed ha perciò il valore $4\pi \frac{i}{n}$, ossia $4\pi\sigma$, che è infinito come σ [46]. Siccome la componente tangenziale, che non soffre discontinuità [42], è finita all'interno come all'esterno, così, a meno di un angolo infinitamente piccolo, il vettore nell'interno della lamina è normale a questa. La sua direzione è quella che va dal potenziale più grande al più piccolo; essa va adunque dalla faccia positiva verso la negativa, è la direzione della normale negativa.

Allo stesso risultato conduce direttamente l'applicazione della relazione (58). Detto infatti A_1 il vettore in P_1 , A_2 quello in P_2 , A_0 quello nell'interno della lamina e n un vettore unità nella direzione della normale positiva, la formola (58), applicata successivamente allo strato positivo di densità σ ed a quello negativo di densità $-\sigma$, dà le due equazioni:

$$nA_1 - nA_0 = 4\pi\sigma, \quad nA_0 - nA_2 = -4\pi\sigma,$$

le quali, sommate, danno:

$$(65) \quad nA_1 - nA_2 = 0,$$

e sottratte

$$nA_1 + nA_2 = 2nA_0 + 8\pi\sigma.$$

Quindi

$$(66) \quad nA_1 = nA_2 = nA_0 + 4\pi\sigma.$$

48. *Il campo all'esterno di un doppio strato uniforme di data potenza dipende solo dal contorno. Determinazione del vettore.* — L'angolo solido ω , che figura nella formola (63) è, come abbiamo veduto, quello del cono di vertice P avente per direttrice il contorno della lamina; esso adunque non dipende dalla forma della superficie della lamina, dipende unicamente dal contorno di essa. Dunque, data la potenza i del doppio strato, il potenziale V in un punto esterno qualunque è indipendente dalla forma delle superficie del doppio strato, dipende solamente dal contorno. Un'altra lamina di ugual potenza, limitata dal medesimo contorno, qualunque, del resto, sia la sua forma, alla sola condizione che il punto P non sia nel suo interno, produrrebbe in P il medesimo potenziale. Tutte le infinite lamine di ugual potenza i che si possono immaginare col medesimo contorno produrrebbero, coll'esclusione del solo spazio da ciascuna di esse occupato, esattamente un medesimo campo. Per conseguenza il vettore A deve potersi determinare, quando semplicemente sieno date la

potenza e la linea di contorno della lamina. Noi possiamo, in modo molto semplice, arrivare ad esprimere \mathbf{A} con una somma vettoriale, della quale i singoli termini corrispondono uno ad uno ai singoli elementi del contorno, in modo che ciascuno di essi rappresenta il contributo di uno di questi elementi. Per arrivare a ciò noi ragioniamo nel modo seguente.

Per trovare la componente A , del vettore \mathbf{A} in una data direzione \mathbf{s} , dobbiamo [34] ricorrere alla relazione (38); ossia dobbiamo immaginare di spostare il punto P in tale direzione per un tratto infinitamente piccolo ds , vedere quale sia la diminuzione di V dovuta a tale spostamento, e dividere questa diminuzione per ds . Ma siccome lo spostamento di P , di cui qui si tratta, è lo spostamento relativo alla lamina, così possiamo anche modificare il procedimento in questo modo: immaginare che il punto P rimanga immobile e che vengano invece spostati tutti i punti della lamina per un tratto uguale a ds nella direzione opposta, ossia per un tratto $-ds$ nella direzione \mathbf{s} . Nel caso nostro V è uguale a $i\omega$; dobbiamo adunque trovare la diminuzione della superficie apparente ω , dovuta allo spostamento $-ds$ della lamina, dividere tale diminuzione per ds e moltiplicarla per i . Ora (fig. 44) la superficie apparente ω della

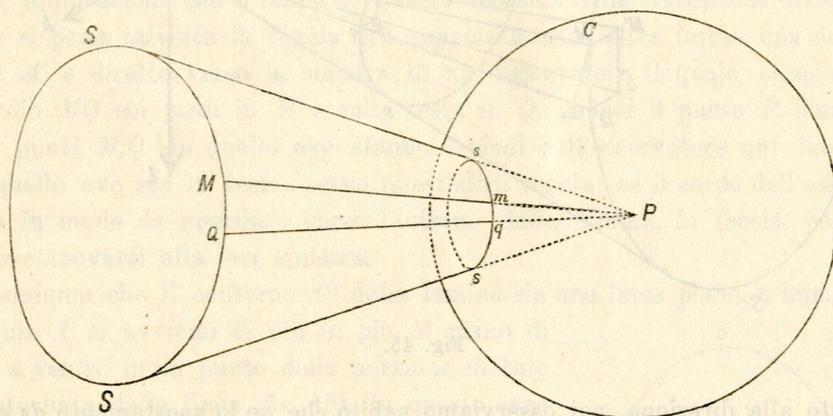


Fig. 44.

lamina SS è l'area della sezione ss fatta nel cono PSS dalla superficie sferica C di centro P e di raggio uno; e la variazione che questa superficie subisce in causa dello spostamento di SS è uguale alla somma algebrica delle superficie generate sulla sfera C da tutti gli elementi del contorno ss . A ciascuno di questi elementi corrisponde una parte della variazione di ω , e a ciascuna di queste corrisponde una parte di \mathbf{A} . Dunque il vettore \mathbf{A} si può considerare come una somma di tanti termini quanti sono gli elementi MQ del contorno, corrispondenti ciascuno ad uno di questi elementi. Tali termini saranno altrettanti vettori infinitamente piccoli, e noi rappresenteremo uno qualunque di questi con \mathbf{A}' .

Noi dobbiamo vedere come si trovi uno qualunque dei vettori elementari \mathbf{A}' ; ed a quest'uopo dobbiamo prendere a considerare uno qualunque degli elementi del contorno SS e vedere quale sia la superficie generata sulla sfera dal corrispondente elemento del contorno ss .

Sia MQ l'elemento scelto. Esso corrisponde ad un elemento mq del contorno ss e questo è l'intersezione della superficie sferica C coll'elemento PMQ della superficie

conica, compreso tra le generatrici PM , PQ . Trascurando grandezze infinitamente piccole di ordine superiore, possiamo trattare la faccetta PMQ del cono come piana e sostituire alla superficie sferica C il suo piano tangente in m ; e per tal modo il compito nostro si riduce a considerare l'intersezione mq del piano PMQ col piano perpendicolare in m a MP ed a trovare l'area generata da questa intersezione quando, rimanendo fissi questo piano perpendicolare ed il punto P , l'elemento di retta MQ subisce lo spostamento $-ds$ e trae seco la faccetta PMQ . Per maggiore chiarezza noi ridisegneremo nella fig. 45 la faccetta mobile PMQ e l'intersezione mq di essa col piano perpendicolare in m ad MP ; e servendoci di questa figura cercheremo di determinare prima la direzione, o versore, $-$ e poi la grandezza, o tensore del vettore A' in questione.

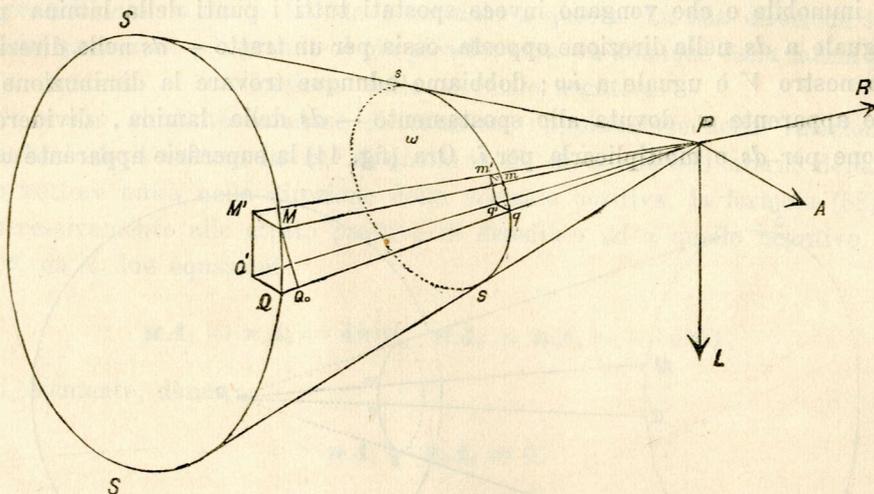


Fig. 45.

Quanto alla direzione, noi osserviamo subito che, se lo spostamento ds si facesse nel piano della faccetta PMQ , l'area generata da mq nel piano perpendicolare in m alla faccetta medesima sarebbe uguale a zero. Ciò vuol dire che A' non ha alcuna componente nel piano PMQ ; ciò vuol dire, in altri termini, che A' è *perpendicolare a questo piano*. Rimane ora a vedere con quale ramo della normale esso coincide.

A tal fine basta ricordare che la direzione del vettore è quella nella quale il potenziale diminuisce [35], e che perciò la direzione di A' è quella nella quale, tenendo immobile MQ , bisogna spostare P , per fare sì che la superficie w diminuisca; ossia è opposta a quella, nella quale, tenendo immobile P , bisogna spostare MQ perchè w diminuisca. Ora supponiamo che la faccia della lamina veduta dal punto P sia la positiva; in tale caso w è positiva [46], e diminuisce quando diminuisce il suo valore assoluto, ossia quando per lo spostarsi di MQ , mentre P sta immobile, il latercolo mq del contorno ss entra nell'interno della superficie w . La direzione di A' è adunque opposta a quella nella quale bisogna spostare MQ per far sì che esso entri nell'interno della superficie SS della lamina. Per fissare le idee, supponiamo che la faccetta PMQ sia nel piano della figura, e per facilitare il confronto colla figura precedente supponiamo che la lamina SS e la corrispondente superficie apparente w si trovino al di là del piano medesimo; in questo caso la direzione,

nella quale bisogna spostare MQ per far sì che esso entri nella superficie SS della lamina, è quella che va verso il di dietro del piano della figura; la direzione di A' è adunque quella che viene dal piano della figura verso il davanti. Per esprimere questo risultato in termini precisi e generali, diciamo r e rappresentiamo sulla figura con PR un vettore-unità nella direzione MP della retta che va da un punto M dell'elemento MQ al punto P considerato; diciamo l e rappresentiamo con PL un vettore-unità avente la direzione MQ , che è quella di una circolazione verso destra [3] sul contorno della lamina attorno alla normale positiva, ossia quella del movimento delle lancette di un orologio per un osservatore che guardi la faccia negativa della lamina; diciamo finalmente a e rappresentiamo in PA un vettore-unità nella direzione di A' , ossia il versore di A' ; con queste denominazioni noi possiamo dire: *il vettore a è perpendicolare al piano dei vettori l ed r , ed i tre vettori, presi nell'ordine lra , costituiscono un sistema destrorso*. Questo enunciato, giova ricordarlo, significa che chi, guardando nella direzione a , voglia far girare l (di un angolo retto) in modo da farlo venire a coincidere con r , lo deve far girare verso destra, nel verso in cui si muovono le lancette di un orologio.

Nelle applicazioni che si fanno di questo teorema nella trattazione delle correnti elettriche si pone talvolta la regola ora enunciata sotto altre forme, una delle quali è questa: A' è diretto verso la sinistra di un osservatore il quale, stando disteso sul latercolo MQ coi piedi in M e colla testa in Q , guardi il punto P . Per trovare quale dei punti M, Q sia quello ove stanno i piedi dell'osservatore qui immaginato e quale quello ove sta la testa, serve quest'altra regola: se il corpo dell'osservatore si orienta in modo da guardare verso l'interno della lamina, la faccia positiva di questa deve trovarsi alla sua sinistra.

Supponiamo che il contorno SS della lamina sia una linea piana, e immaginiamo che il punto P si avvicini di più in più al piano di essa fino a venire in un punto della porzione di tale piano contornata dalla linea (fig. 46). In questo caso i tre vettori-unità l, r, a prendono le posizioni indicate nella figura. I due primi, l ed r , giacciono nel piano della linea SS ; il terzo, a , risulta allora perpendicolare al piano medesimo ed è diretto nel verso della normale positiva della lamina. Allora la regola per trovare la direzione di A' si può mettere anche sotto questa forma: il vettore A' ha la direzione nella quale si avanzerebbe, parallelamente al suo asse, una vite ordinaria destrorsa che fosse fatta girare nel verso di l .

Con ciò abbiamo determinato il versore di A' : ora dobbiamo determinare il tensore. A quest'uopo osserviamo che spostare il punto P infinitamente poco nella direzione a , la quale sappiamo essere perpendicolare alla faccetta PMQ (fig. 45), equivale a far rotare per un angolo infinitamente piccolo la faccetta PMQ attorno al latercolo MQ ; e che perciò, se vogliamo immaginare che il punto P stia immobile e che invece si muova MQ , dobbiamo figurarci che la faccetta ruoti in senso opposto,

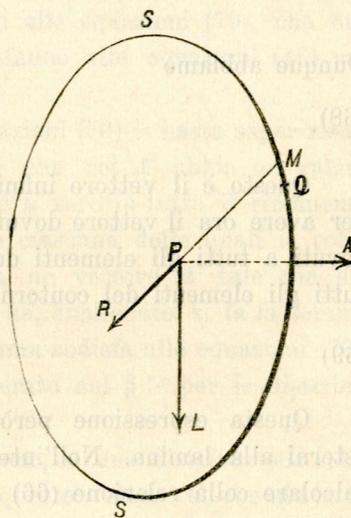


Fig. 46.

di un uguale angolo, attorno alla retta PL parallela ad MQ e venga nella posizione $PM'Q'$. In questo movimento della faccetta l'elemento di retta mq , intersezione della faccetta medesima col piano perpendicolare in m , genera su questo piano l'area del rettangolo $mqm'm'$, ossia l'area $mq \times mm'$; ed è quest'area quella che, moltiplicata per i e divisa per lo spostamento MM' di MQ , dà come quoziente il valore del tensore A' di A' cercato. Abbiamo adunque

$$A' = i \frac{mq \times mm'}{MM'}$$

Ora pei triangoli simili PMM' , Pmm' abbiamo $\frac{mm'}{MM'} = \frac{mP}{MP} = \frac{1}{r}$. Se poi tiriamo MQ_0 parallela ad mq , in modo che risultino i triangoli simili Pmq , PMQ_0 , e se diciamo l la lunghezza dell'elemento MQ e θ l'angolo LPR , uguale a QMP , uguale, a meno di un infinitesimo, al supplemento di Q_0QM , abbiamo $mq = \frac{MQ_0}{r} = \frac{l \sin \theta}{r}$. Dunque concludiamo:

$$(67) \quad A' = \frac{il \sin \theta}{r^2}$$

Ora che abbiamo versore e tensore, possiamo scrivere l'espressione del vettore A' ; ci basta moltiplicare ambi i membri della (67) pel vettore-unità a . Così abbiamo:

$$A' = A'a = \frac{il}{r^2} a \sin \theta$$

Ora sappiamo che il vettore-unità a è perpendicolare al piano dei vettori-unità l , r e che questi comprendono tra di loro l'angolo θ ; quindi possiamo servirci della relazione (16) dell'art. 11, e scrivere

$$a \sin \theta = \sqrt{lr}$$

Dunque abbiamo

$$(68) \quad A' = \frac{il}{r^2} \sqrt{lr}$$

Questo è il vettore infinitamente piccolo dovuto ad un elemento ll del contorno; per avere ora il vettore dovuto alla lamina, non abbiamo che da sommare i vettori A' dovuti a tutti gli elementi del contorno. Rappresentando con Σ una somma estesa a tutti gli elementi del contorno abbiamo

$$(69) \quad A = i \Sigma \frac{l}{r^2} \sqrt{lr}$$

Questa espressione però, giova ben ricordare, è valida solamente pei punti esterni alla lamina. Nell'interno della lamina, tra i due strati, il vettore si deve calcolare colla relazione (66) dell'articolo precedente [47]; esso si ottiene sommando col vettore esistente in un punto infinitamente vicino a quello considerato, ma esterno alla lamina, un vettore avente la direzione della normale negativa ed il tensore $4\pi\sigma$. Questo vettore normale è infinitamente grande se la potenza i del doppio strato è finita. La distribuzione del vettore dovuto alla lamina presenta una discontinuità su ciascuna superficie di questa; invece il vettore calcolato colla (69) non presenta alcuna discontinuità.

§ 7.

Distribuzioni circuitali.

49. — L'espressione (52), trovata all'art. 38 e discussa ne' due ultimi paragrafi non è che una soluzione particolare delle equazioni differenziali (46). Come notammo alla fine del detto articolo, altre soluzioni delle equazioni (46) si hanno aggiungendo semplicemente al vettore espresso colla (52) un altro vettore qualunque a distribuzione solenoidale e non circuitale. E se trattiamo questo vettore aggiunto come arbitrario, otteniamo senz'altro la soluzione generale delle equazioni (46), che comprende tutti i casi di distribuzioni non circuitali.

Ora dobbiamo ritornare alle equazioni più generali (45) [art. 37] e considerare i casi che finora abbiamo escluso, i casi nei quali la rotazione C non è nulla in tutto il campo, i casi di distribuzioni *circuitali*.

In grazia della osservazione fatta nell'art. 37, noi potremo, nel fare ciò, supporre che sia $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ in tutto il campo, e limitarci così a considerare i vettori che soddisfanno alle equazioni

$$(70) \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{C},$$

ove C ha in ogni punto del campo un valore dato. Nel caso più generale delle equazioni (45), ove tanto $\operatorname{div} \mathbf{A}$ quanto $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ sono diversi da zero, il vettore \mathbf{A} sarà sempre la somma di uno di quelli che soddisfanno alle equazioni (70), che ora ci accingiamo a trattare, con uno di quelli che soddisfanno alle equazioni (46) già trattate.

Per trovare poi il vettore \mathbf{A} che soddisfa alle equazioni (70) ci basta saper risolvere quest'altro problema: trovare un vettore \mathbf{A}' tale che $\operatorname{rot} \mathbf{A}'$ abbia un valore dato dentro ad una data parte del campo e sia uguale a zero in tutto il rimanente spazio. Se infatti si divide il campo in tante parti, in ciascuna delle quali la rotazione abbia un valore C , se si trova per ciascuna un vettore \mathbf{A}' tale che sia $\operatorname{rot} \mathbf{A}' = C$ dentro di essa e $\operatorname{rot} \mathbf{A}' = 0$ fuori di essa, e se, finalmente, si fa la somma $\mathbf{A} = \Sigma \mathbf{A}'$ di tutti i vettori \mathbf{A}' così trovati, questa somma soddisfa alle equazioni (70). Il procedimento è analogo a quello che abbiamo adoperato nel § 5° per le distribuzioni non circuitali.

Ora si è dimostrato [28] che la rotazione C ha sempre una distribuzione solenoidale; e da ciò si è dedotto che i tubi di flusso di questo vettore C , che abbiamo anche denominato *tubi vorticali*, e quando sono infinitamente sottili *filetti vorticali*, o hanno i capi sulle superficie limitanti il campo, o sono chiusi su se stessi in forma di anelli. Lungo ciascuno di questi tubi, o filetti, il flusso di C è costante. Quindi fra le varie maniere di dividere il campo in parti od in elementi, per applicare il sovraesposto procedimento, si presenta da sè naturalmente, come la più acconcia, la divisione in tubi od in filetti vorticali. Se adottiamo questo modo di divisione, il

nostro problema si riduce a questo: Supposto che esista nel campo un unico filetto vorticale SS (fig. 47), determinare la distribuzione di un vettore A' tale che $\text{rot } A'$

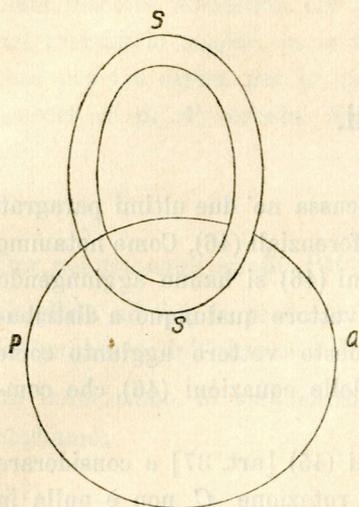


Fig. 47.

sia uguale a zero in tutto lo spazio esterno al filetto, ed abbia invece un valore dato in ogni punto dell'interno o della superficie del filetto medesimo. Siccome si sa che il vettore C ha in ogni punto della superficie o dell'interno del filetto una direzione tangenziale, e siccome si sa che il suo tensore è inversamente proporzionale alla sezione retta del filetto [22], così, invece di dare C per ogni punto del filetto vorticale, basta dare il valore costante del flusso; e siccome il flusso di C lungo il filetto è uguale [28] alla circuitazione di A' lungo una linea chiusa qualunque PQ concatenata col filetto medesimo, così il problema si presenta ancora sotto questa forma: Dato un filetto vorticale SS , unico nel campo, determinare un vettore A' tale che la circuitazione di esso su di una linea chiusa qualunque sia uguale a zero se questa non è concatenata col filetto SS ed abbia invece un valore diverso da zero, e dato, se è concatenata.

È questo il problema del quale ora ci occuperemo.

50. *Campo dovuto ad un semplice filetto vorticale.* — Al campo del vettore A' , che sodisfa alla condizione ora detta, possiamo dare il nome di: campo dovuto al filetto vorticale detto. Noi qui ci proponiamo di determinarlo.

Il tubo vorticale infinitamente sottile dato può essere rientrante in se stesso in forma di anello, come nella fig. 47, oppure avere i capi sulle superficie limitanti il campo [28]. Noi, per fissare le idee, ragioneremo sul primo caso; ma risulterà chiaro che quanto stiamo per dire si applicherà intieramente, senz'altro, anche al secondo.

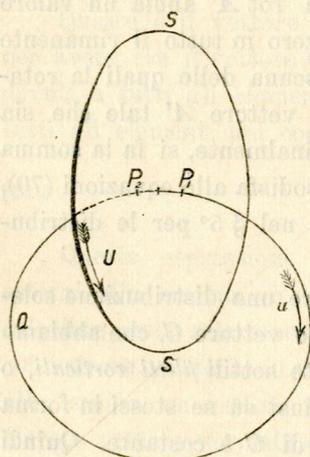


Fig. 48.

Ciò posto, rappresentiamo in SS (fig. 48), con una semplice linea, il tubo infinitamente sottile o filetto vorticale dato e diciamo U il flusso, pure dato, del vettore C attraverso ad una sezione qualunque di esso. La condizione a cui il vettore A' dovrà sodisfare, è semplicemente questa: che la circuitazione su di una linea chiusa qualunque $P_1QP_2P_1$ concatenata colla SS sia uguale ad U [28], mentre quella su di una linea chiusa non concatenata con SS è uguale a zero. In quanto al verso del flusso U e della circuitazione si ha a ricordare che questa si deve fare verso la destra rispetto alla direzione nella quale U passa dentro alla linea chiusa $P_1QP_2P_1$. Se per direzione positiva del flusso U si assume quella indicata dalla freccia U , la direzione positiva della circuitazione su $P_1QP_2P_1$ risulta quella indicata dalla freccia u .

Immaginiamo una superficie qualunque avente per contorno il filetto SS e chiu-

dente intieramente il vano dell'anello da questo formato; una superficie, cioè, la quale, tagliando la regione ciclica esterna all'anello, la renda aciclica. Sulla linea $P_1QP_2P_1$ consideriamo due punti P_1 e P_2 infinitamente vicini l'uno all'una e l'altro all'altra faccia di tale superficie. Se, come riteniamo, tra P_2 e P_1 il campo non presenta alcuna discontinuità, l'integrale di \mathbf{A}' lungo la linea aperta P_1QP_2 differisce infinitamente poco da quello preso sulla intiera linea chiusa $P_1QP_2P_1$, e per conseguenza, a meno di un infinitesimo, esso è uguale ad U .

Ora immaginiamo, disposto sulla superficie considerata, un doppio strato uniforme di potenza i colla faccia positiva verso P_1 e colla negativa verso P_2 . Tra le due faccie di esso abbiamo per la (64) una differenza di potenziale $4\pi i$, e ciò vuol dire che l'integrale del vettore sulla linea aperta P_1QP_2 ha il valore $4\pi i$. Dentro alla lamina, tra i due strati, da P_2 a P_1 , il vettore ha un valore infinitamente grande ed è diretto da P_1 verso P_2 [46], così che se l'integrale sopra detto si estendesse oltre a P_2 , fino a P_1 , su tutta la linea chiusa, al valore di esso si aggiungerebbe un termine finito negativo, uguale a $-4\pi i$, che lo ridurrebbe a zero. Ma immaginiamoci un campo il quale in tutto lo spazio esterno alla lamina sia identico a quello dovuto alla lamina medesima, ma che non presenti sulle faccie di questa le discontinuità [46] presentate da quest'ultimo, così che anche nell'interno della lamina, tra i due strati, il vettore abbia un valore finito. In un tale campo l'integrale sulla linea chiusa $P_1QP_2P_1$, a meno di un termine infinitamente piccolo corrispondente all'elemento P_2P_1 , è uguale a quello fatto sulla linea aperta P_1QP_2 , uguale a $4\pi i$. In tale campo adunque si ha una distribuzione circuitale, per la quale il tubo infinitamente sottile SS è un filetto vorticale. E se alla potenza i della lamina attribuiamo un valore tale che sia

$$(71) \quad 4\pi i = U,$$

la circuitazione su di una linea chiusa qualunque $P_1QP_2P_1$ concatenata col filetto risulta uguale a quella data, U . Su di una linea non concatenata col filetto la circuitazione è uguale a zero. La distribuzione immaginata sodisfa adunque alle condizioni imposte: il vettore \mathbf{A}' che ad essa corrisponde rappresenta una soluzione particolare delle equazioni differenziali (70).

Tutte le altre soluzioni si ottengono aggiungendo al vettore \mathbf{A}' così ottenuto un vettore arbitrario a distribuzione non circuitale (e solenoidale). Se infatti \mathbf{A}'' è un altro vettore del quale la circuitazione su di una linea chiusa qualunque è uguale a quella di \mathbf{A}' , e se poniamo $\mathbf{A}'' - \mathbf{A}' = \mathbf{A}_0$, abbiamo, facendo la circuitazione su di una linea qualunque:

$$\text{Circuit. } \mathbf{A}'' - \text{circuit. } \mathbf{A}' = \text{circuit. } \mathbf{A}_0; \text{ e quindi circuit. } \mathbf{A}_0 = 0.$$

La lamina immaginata di contorno SS e di potenza $i = \frac{U}{4\pi}$, dicesi *equivalente* al filetto vorticale SS dato. Per mezzo della considerazione della lamina equivalente, il vettore dovuto al filetto vorticale, in un punto P qualunque, si determina nel modo seguente:

1° Se il punto P considerato è esterno alla lamina, il vettore dovuto al filetto è senz'altro uguale a quello dovuto alla lamina, sommato con un vettore arbitrario a distribuzione non circuitale. Se con \mathbf{A}'_1 si rappresenta il vettore dovuto alla lamina e con \mathbf{A}_0 un vettore arbitrario a distribuzione non circuitale, si ha

$$(72) \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A}'_1 + \mathbf{A}_0.$$

2° Se il punto P considerato è nell'interno della lamina equivalente al filetto vorticale, il vettore cercato, dovuto al filetto, è uguale a quello calcolato come sopra per un punto preso all'esterno della lamina infinitamente vicino a P .

La differenza tra il vettore così determinato e quello che si avrebbe nell'interno della lamina, qualora questa esistesse effettivamente, è uguale ad un vettore avente la direzione della normale positiva della lamina ed un tensore uguale a $4\pi\sigma = 4\pi \frac{i}{n} = \frac{U}{n}$. Colle notazioni usate nella (72), si ha dunque per un punto interno alla lamina:

$$(72') \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A}'_1 + \frac{U}{n} \mathbf{n} + \mathbf{A}_0.$$

Le formole e le osservazioni dell'art. 48 del § precedente conducono ad una espressione di \mathbf{A}' , la quale è valevole per tutti i casi, tanto per un punto interno quanto per un punto esterno. Nel cennato articolo si è infatti trovato che il vettore dovuto ad una lamina è per un punto esterno:

$$(a) \quad i \Sigma \frac{l}{r^2} \mathbf{V} \mathbf{l} \mathbf{r},$$

e per un punto interno [47]:

$$i \Sigma \frac{l}{r^2} \mathbf{V} \mathbf{l} \mathbf{r} - 4\pi\sigma \mathbf{n},$$

ossia, colle notazioni attuali:

$$(b) \quad i \Sigma \frac{l}{r^2} \mathbf{V} \mathbf{l} \mathbf{r} - \frac{U}{n} \mathbf{n}.$$

Portando i valori (a) e (b) rispettivamente nella (72) e nella (72') si trova *per tutti i casi*:

$$(72'') \quad \mathbf{A}' = i \Sigma \frac{l}{r^2} \mathbf{V} \mathbf{l} \mathbf{r} + \mathbf{A}_0.$$

Questa espressione presenta \mathbf{A}' come una somma di tanti termini quanti sono gli elementi del filetto vorticale; ad un elemento di lunghezza l e di direzione \mathbf{l} , la posizione del quale rispetto al punto P sia definita dal vettore \mathbf{r} , corrisponde nella somma il termine $\frac{1}{r^2} \mathbf{V} i \mathbf{l} \mathbf{l} \mathbf{r}$. Per esprimere questo risultato si può fare così: 1° definire l'elemento di filetto vorticale come un vettore il cui versore è \mathbf{l} ed il cui tensore è il prodotto della potenza i per la lunghezza l ; 2° dire che l'elemento $i \mathbf{l} \mathbf{l}$ produce nel punto P , situato alla distanza r nella direzione \mathbf{r} , un vettore uguale a $\frac{1}{r^2} \mathbf{V} i \mathbf{l} \mathbf{l} \mathbf{r}$.

È questo un modo di dire, del quale si fa uso in alcune considerazioni di fisica, e propriamente in quelle relative alle correnti elettriche. Esso allude alla finzione che nell'elemento del filetto abbia sede la causa del corrispondente vettore. Ma su questa finzione si hanno a ripetere le cose dette nell'art. 41 relativamente a quella colla quale si localizza la causa dei vettori a distribuzione non circuitale e si materializza la divergenza del vettore coi concetti di massa e di densità. Per giustificarla come ipotesi fisica non bastano le esperienze dimostranti la esistenza e la distribuzione del vettore.

51. *Campo dovuto ad un sistema qualunque di filetti vorticali.* — Se sono dati più tubi vorticali, si può determinare, come sopra, per ciascuno di essi il vettore A' . La somma A di questi è un vettore il quale soddisfa alla condizione di avere una circuitazione nulla su tutte le linee chiuse non concatenate con alcuno dei tubi vorticali dati e di avere invece una circuitazione uguale a ΣU su di una linea qualunque concatenata con alcuni dei filetti. Il vettore A così calcolato rappresenta la soluzione generale delle equazioni (70).

Se poi si somma questa soluzione con una di quelle relative ai casi più sopra studiati di distribuzioni non circuitali, si ha la soluzione più generale delle equazioni (45).

L'osservazione fatta alla fine dell'articolo precedente [50] ci permette di riassumere in un enunciato molto semplice, e comodo per le applicazioni, quanto nel presente § e nei due precedenti è stato detto intorno alla risoluzione delle equazioni generali (45). Eccolo:

Si immaginino le masse, che per ogni elemento di volume corrispondono ai dati valori di $\text{div } A$, e quelle costituenti i doppi strati equivalenti a tutti i filetti vorticali dati. Tutte queste masse formano un sistema complessivo al quale corrisponde per ogni punto P un vettore che si può calcolare colla legge Newtoniana espressa nella formola (52). Si dica A_1 il vettore newtoniano così calcolato, calcolato cioè colla (52), e si rappresenti con A_0 un vettore arbitrario pel quale sia dappertutto $\text{div } A_0 = 0$ e $\text{rot } A_0 = 0$, un vettore cioè a distribuzione solenoidale e non circuitale. Con ciò si può subito trovare per ogni punto P il vettore A che soddisfa alle equazioni (45), e precisamente così: Se il punto P non è nell'interno di nessuna delle lamine immaginate come equivalenti ai filetti vorticali, si ha:

$$(73) \quad A = A_1 + A_0;$$

Se invece il punto P sta nell'interno di qualcuna delle lamine immaginate, il vettore A si ottiene aggiungendo ad $A_1 + A_0$ un terzo vettore: un vettore il cui tensore è $4\pi\sigma = 4\pi\frac{i}{n} = \frac{U}{n}$, e la cui direzione è quella della normale positiva della lamina nel punto P . Detto n un vettore unità avente la direzione della ora detta normale positiva, il terzo vettore, che bisogna aggiungere ad $A_1 + A_0$ si può esprimere con

$$4\pi\sigma n = 4\pi\frac{i}{n}n = \frac{U}{n}n;$$

quindi si ha

$$\begin{aligned}
 A &= A_1 + A_0 + 4\pi\sigma n \\
 (74) \quad &= A_1 + A_0 + 4\pi \frac{i}{n} n \\
 &= A_1 + A_0 + \frac{U}{n} n.
 \end{aligned}$$

52. *Solenoido*. — Faremo una applicazione di questa proposizione al caso semplice ed importante nel quale i filetti vorticali dati sono tutti uguali, hanno la forma di anelli piani e sono in grande numero, regolarmente distribuiti coi loro centri di figura a distanze uguali su di una linea data e coi loro piani normali a questa. Se si suppongono i filetti vicinissimi l'uno all'altro, in modo che essi coprano una superficie tubolare, il sistema si dice: *solenoido*. La linea su cui stanno i centri di figura degli anelli vorticali dicesi: *asse*, le superficie piane contornate dal primo e dall'ultimo anello si dicono: *le basi* del solenoide.

Per applicare al solenoide la proposizione dimostrata nell'articolo precedente, dobbiamo sostituire col pensiero ai singoli anelli vorticali le lamine equivalenti. A queste lamine, del resto, possiamo assegnare quella forma e quella grossezza che più ci aggrada, colla sola condizione che ciascuna di esse abbia per contorno il filetto vorticale corrispondente ed abbia una potenza i data dalla relazione $4\pi i = U$. Immaginiamo che le lamine abbiano faccie piane ed assegniamo alle medesime grossezze tali, che ciascuna faccia di ognuna di esse combaci esattamente con una faccia della lamina contigua. Per tale modo le lamine riempiono completamente il solido geometrico avente per superficie la superficie tubolare e le basi del solenoide. Se per fissare le idee rappresentiamo nella fig. 49 una sezione fatta nel solenoide con

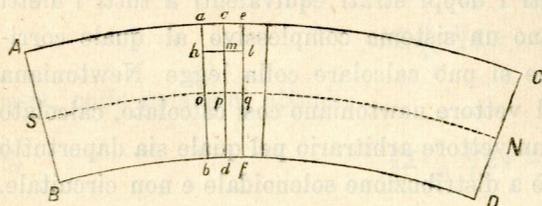


Fig. 49.

una superficie passante per l'asse SN , e se supponiamo che AB, CD sieno le sezioni delle due basi ed AC, BD quelle della superficie tubolare, le lamine infinitamente sottili equivalenti agli anelli vorticali risultano rappresentate in $abcd, cdef, ecc., ecc.$, e riempiono, prese insieme, tutto il solido geometrico $ABCD$. Se, come abbiamo supposto, i filetti vorticali, tutti uguali, corrispondono ad uguali valori di U , le lamine ad essi equivalenti hanno tutte una uguale potenza i . Se poi, come abbiamo pure supposto, le distanze, da centro a centro, fra gli anelli vorticali successivi sono tutte uguali, risultano uguali le grossezze op, pq, \dots ; e se il raggio di curvatura dell'asse SN non varia con discontinuità, risultano uguali, a meno di infinitesimi di ordine superiore, anche le grossezze hm, ml di due lamine contigue, qualunque sia il punto m della faccia comune, in corrispondenza del quale queste grossezze si misurano. Perciò in un punto qualunque m del piano cd , col quale coincidono la faccia positiva di una lamina qualunque $abcd$ e quella negativa della lamina contigua $cdef$, le densità dei due strati distribuiti sulle faccie medesime sono uguali e di segni contrari; su ogni elemento della superficie colla quale i due strati coincidono vi hanno due masse

uguali e di segni contrari, la somma delle quali è uguale a zero; nella somma (52) i termini corrispondenti a tali masse si elidono mutuamente; possiamo dire che i due strati si elidono. Rimangono non elisi soltanto lo strato negativo della prima lamina e quello positivo dell'ultima; e noi, dando alla parola *equivalenza* il senso dianzi stabilito, possiamo dire che questi due strati equivalgono al solenoide. Concludiamo adunque che il vettore \mathbf{A}_1 figurante nelle formole (73) e (74) è semplicemente quello dovuto a due strati di masse uguali e di segni opposti distribuiti sulle due basi del solenoide; esso si calcola colla formola (52) mettendo in questa al posto di m , per ogni elemento superficiale dS , il valore σdS ossia $\frac{i}{n} dS$ della massa su questo distribuita.

Con ciò le formole (73) e (74) dell'articolo precedente danno subito il vettore \mathbf{A} in un punto qualunque del campo.

I segni dei due strati, che si hanno ad immaginare sulle due basi del solenoide, si deducono dalla osservazione fatta nell'art. 50 relativamente alla lamina equivalente ad un semplice filetto vorticale. Se relativamente alla direzione SN il flusso U nei filetti vorticali ha la direzione destra, lo strato positivo devesi immaginare sulla base CD del solenoide e quello negativo sulla AB .

53. Solenoide cilindrico. — Importa considerare il caso semplice nel quale l'asse del solenoide è una linea retta. In questo caso il solenoide ha la forma di un cilindro, e le lamine $abcd$, $cdef$, ecc. ... hanno la forma di tanti cilindri tutti uguali. La grossezza n è una medesima non solo per tutte le lamine, ma anche per ciascun punto di ogni singola lamina; il suo valore si può esprimere per mezzo del numero dei filetti vorticali esistenti su ogni unità di lunghezza misurata sull'asse del solenoide. Detto N_1 questo numero, abbiamo infatti

$$N_1 n = 1, \text{ e quindi } \frac{1}{n} = N_1.$$

Portando questo valore di $\frac{1}{n}$ nelle formole (73) e (74), queste diventano

$$(73') \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0 + 4\pi i N_1 \mathbf{n}$$

$$(74') \quad = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0 + U N_1 \mathbf{n}.$$

In queste formole, giova ricordarlo, la lettera \mathbf{n} rappresenta un vettore-unità parallelo all'asse del solenoide nella direzione rispetto alla quale il flusso U nei filetti vorticali ha il verso destro. Per un osservatore che fosse disteso su uno dei filetti vorticali in modo da ricevere il flusso U coi piedi e di emetterlo dalla testa, e che guardasse verso l'interno del solenoide, \mathbf{n} sarebbe diretto verso la sinistra.

Essendo costante n , è costante anche la densità $\sigma = \frac{i}{n}$; i due strati, che si hanno da immaginare sulle due basi del solenoide, sono adunque uniformi.

Dopo ciò, se ci limitiamo a considerare il caso nel quale il punto P (fig. 50) giace sull'asse del solenoide, possiamo calcolare subito il vettore \mathbf{A}_1 in modo semplicissimo. Esso è la somma dei due dovuti rispettivamente allo strato positivo CD

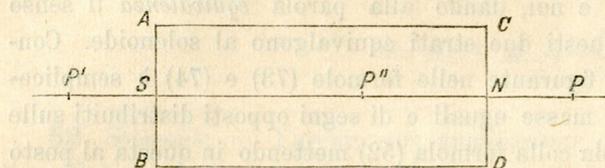


Fig. 50.

ed allo strato negativo AB . Ora è evidente, per semplice ragione di simmetria, che questi sono entrambi paralleli all'asse; dunque anche \mathbf{A}_1 è parallelo all'asse, e così noi abbiamo senz'altro il suo versore. Quanto al tensore,

questo è uguale alla somma algebrica di quelli dei vettori dovuti ai due strati, e questi noi sappiamo calcolare nel modo già indicato nell'art. 45. Se diciamo ω_1 ed ω_2 gli angoli solidi dei coni di vertice P e di basi CD ed AB , se rappresentiamo con σ il valore assoluto della densità dei due strati e se prendiamo come positiva la direzione \mathbf{n} , ossia la SN , sappiamo che i tensori dei vettori dovuti ai due strati sono rispettivamente (vedi la formola (b) dell'art. 45):

$$+\sigma\omega_1 \quad \text{e} \quad -\sigma\omega_2,$$

ove ω_1 ed ω_2 si debbono prendere come positivi o come negativi secondochè P è a destra od a sinistra del corrispondente strato. Quindi il tensore di \mathbf{A}_1 è $\sigma(\omega_1 - \omega_2)$.

E siccome $\sigma = \frac{i}{n} = iN_1 = \frac{UN_1}{4\pi}$, così abbiamo

$$(75) \quad \mathbf{A}_1 = iN_1(\omega_1 - \omega_2) = \frac{1}{4\pi} UN_1(\omega_1 - \omega_2),$$

e quindi

$$(76) \quad \mathbf{A}_1 = iN_1\mathbf{n}(\omega_1 - \omega_2) = \frac{1}{4\pi} UN_1\mathbf{n}(\omega_1 - \omega_2).$$

Se P è fuori del solenoide, a destra di CD , ω_1 ed ω_2 sono entrambi positivi ed ω_1 è maggiore di ω_2 ; quindi \mathbf{A}_1 è positivo, \mathbf{A}_1 è diretto verso destra, ha la direzione \mathbf{n} . Se P è fuori del solenoide, verso sinistra, per esempio in P' , ω_1 ed ω_2 sono entrambi negativi ed ω_1 ha un valore numerico minore di ω_2 ; quindi \mathbf{A}_1 risulta ancora positivo, \mathbf{A}_1 ha ancora la direzione positiva \mathbf{n} , la direzione verso destra. Ma se invece il punto P è dentro al solenoide, per esempio in P'' , ω_1 è negativo ed ω_2 è positivo; quindi $\omega_1 - \omega_2$ è negativo, \mathbf{A}_1 è negativo, \mathbf{A}_1 è diretto nel verso opposto ad \mathbf{n} , verso sinistra.

In quest'ultimo caso, se rappresentiamo con w' e con w'' i valori assoluti di ω_1 e di ω_2 , possiamo scrivere

$$(77) \quad \mathbf{A}_1 = -iN_1\mathbf{n}(w' + w'') = -\frac{1}{4\pi} UN_1\mathbf{n}(w' + w'').$$

Portando questi valori nella (74'), otteniamo le seguenti espressioni di \mathbf{A} , le quali valgono per un punto qualunque dell'asse nell'interno del solenoide:

$$(77') \quad \begin{aligned} \mathbf{A} &= iN_1\mathbf{n}(4\pi - w' - w'') + \mathbf{A}_0, \\ &= UN_1\mathbf{n}\left(1 - \frac{w' + w''}{4\pi}\right) + \mathbf{A}_0. \end{aligned}$$

Se al vettore arbitrario solenoidale e non circuitale A_0 diamo il valore zero, il vettore A espresso dalla (77') risulta parallelo all'asse del solenoide ed ha il tensore

$$(78) \quad A = iN_1(4\pi - \omega' - \omega'') = UN_1 \left(1 - \frac{\omega' + \omega''}{4\pi} \right).$$

Se il solenoide ha una piccola sezione trasversale ed è molto lungo, e se il punto P considerato è molto lontano dalle basi, $\omega' + \omega''$ risulta piccolo. Al limite, per un solenoide di sezione finita e di lunghezza infinitamente grande, oppure di lunghezza finita e di sezione infinitamente piccola, la somma degli angoli solidi $\omega' + \omega''$ diventa infinitamente piccola. Allora si ha semplicemente:

$$(79) \quad A = 4\pi iN_1 = UN_1.$$

Il medesimo valore si trova per un punto dell'asse di un solenoide, l'asse del quale formi una linea chiusa, o, come si suol dire, per un punto dell'asse di un solenoide chiuso.

54. *Altro modo di trattare il caso del solenoide.* — Quello che abbiamo svolto è uno dei modi di applicare al caso del solenoide la proposizione generale dell'art. 51. Ma siccome alle lamine equivalenti ai filetti vorticali si possono assegnare forme arbitrarie, così la stessa proposizione si può applicare in infinite maniere diverse. Fra queste, se si vuole, si può scegliere in modo che il punto P considerato, qualunque esso sia, non venga a trovarsi nell'interno di alcuna delle lamine immaginate; e per tal modo si può sempre, qualunque sia il punto P , calcolare il vettore A colla semplice formola (73) [51], senza bisogno di ricorrere alla (74). È utile che noi qui indichiamo uno dei procedimenti possibili.

Sia ancora $ABCD$ (fig. 51) la sezione del solenoide fatta con una superficie passante per l'asse, e sia P il punto pel quale si vuole determinare il vettore A . Tale punto sia dentro al solenoide, comunque collocato; solamente supponiamo che esso non sia infinitamente vicino alla superficie.

Noi possiamo ancora, esattamente come abbiamo fatto dianzi, immaginare le lamine piane riempienti tutto il volume del solenoide; ma poi, per fare sì che il punto P non si trovi nell'interno di alcuna di esse, possiamo immaginare che la lamina $cdef$, nella quale il punto P verrebbe a cadere, venga leggermente deformata, immaginare per esempio che essa venga incurvata presso il contorno, come è indicato nella fig. 51, in modo che la parte mediana $c'd'$, pur rimanendo piana e normale all'asse, si trovi spostata di un tratto infinitamente piccolo, per esempio verso la destra. Lo spazio necessario per lo immaginato spostamento infinitamente piccolo della lamina $cdef$ si può ottenere mediante spostamenti infinitamente piccoli delle lamine che stanno a destra della lamina stessa; lo si può, per esempio, ripartire fra tutte col diminuire infinitamente poco la loro grossezza.

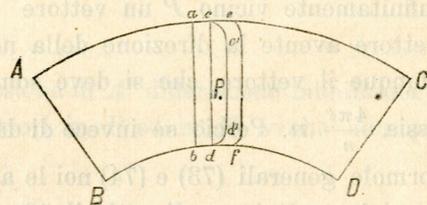


Fig. 51.

Se, come abbiamo supposto, il punto P non è infinitamente vicino alla superficie del solenoide, possiamo anche, senza dar luogo ad alcuna variazione finita del vettore, spostare infinitamente poco non solamente la parte mediana, ma anche il contorno della lamina $cdef$; e così, se lo preferiamo, possiamo conservare alla lamina la sua forma piana, e semplicemente spostare la lamina stessa verso la destra in

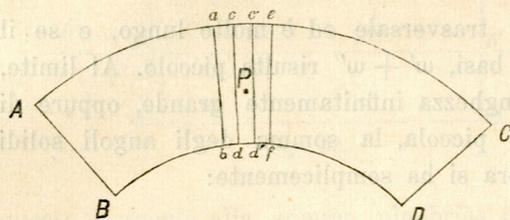


Fig. 52.

$c'd'ef$, come è indicato nella fig. 52. Il posto necessario per lo spostamento si può ottenere, come si è detto, ripartendo lo spostamento medesimo fra le grossezze di tutte le lamine situate da una medesima parte del punto P . Se poi il numero delle lamine è infinitamente grande, possiamo anche fare una cosa

più semplice: sopprimere la lamina $cdef$, nella quale si trova il punto P , e lasciare al loro posto tutte le altre.

Con uno qualunque di questi artifici noi possiamo fare sì che il punto P venga a trovarsi non più dentro alla lamina $cdef$, ma in una fessura infinitamente sottile tra la faccia negativa $c'd'$ di questa lamina e la faccia positiva cd della lamina $abcd$ che la precede. Ma il sistema di masse che così si è condotti a considerare come equivalente al solenoide non è più quello di prima. Prima si avevano solamente due strati di masse uguali e di segni contrari distribuiti sulle due basi AB e CD del solenoide; attualmente, invece, si hanno oltre a questi due strati altri due strati, uno positivo e l'altro negativo, sulle faccie cd e $c'd'$ fra le quali è compreso il punto P . Questi due strati, che prima si elidevano mutuamente, adesso, dopo lo spostamento, non si elidono più. Perciò il vettore rappresentato con A_1 nella formola (73) non è più semplicemente quello dovuto ai due strati AB e CD , al quale si riferiscono le espressioni (76) e (77) dell'articolo precedente; esso invece è uguale alla somma di questo con un altro vettore, col vettore dovuto ai due strati cd e $c'd'$. Ora tanto lo strato positivo cd , quanto il negativo $c'd'$, producono nel punto infinitamente vicino P un vettore che sappiamo calcolare colla (b) dell'art. 45, un vettore avente la direzione della normale positiva n ed un tensore uguale a $2\pi\sigma$. Dunque il vettore, che si deve sommare con quello dovuto alle due basi, è $4\pi\sigma n$, ossia $\frac{4\pi i}{n} n$. Perciò se invece di dare alla lettera A_1 il significato che essa ha nelle formole generali (73) e (74) noi le attribuiamo il significato che essa ha preso nel caso speciale trattato negli articoli 52 e 53, se cioè rappresentiamo con A_1 il vettore dovuto alle due basi, noi ricadiamo sui risultati ai quali siamo giunti per altra via negli articoli 52 e 53 medesimi.

55. Superficie vorticali. — Le sovra esposte conclusioni sono valide sempre quando la grossezza delle lamine sia infinitamente piccola a fronte della distanza del punto P dalla superficie del solenoide. Se si suppone che le lamine sieno infinitamente sottili, tali conclusioni si hanno a ritenere valide anche quando il punto P sia infinitamente vicino alla superficie. Fermiamoci su questo caso: immaginiamo che i filetti vorticali sieno infinitamente sottili e l'uno all'altro infinitamente vicini; e in tale ipotesi con-

sideriamo un punto P infinitamente vicino alla superficie luogo geometrico de' filetti medesimi.

In questo caso la lettera n nell'equazione (74) rappresenta la grossezza della lamina misurata sul contorno, infinitamente vicino al punto P ; quindi $\frac{1}{n}$ rappresenta il numero dei filetti vorticali che si trovano su di una unità di lunghezza normale ai filetti medesimi, presa sulla superficie del solenoide, infinitamente vicino al punto P ; ed $\frac{U}{n}$ rappresenta la somma dei flussi del vettore C che si hanno nei filetti vorticali medesimi. Noi possiamo denominare la superficie del solenoide, la quale è luogo geometrico dei filetti vorticali: *superficie vorticale*. In ogni punto di tale superficie il vettore C , che rappresenta la rotazione di A , è tangente alla superficie medesima; fuori della superficie da una parte o dall'altra di essa a distanza finita, C non esiste. Se da un punto della superficie vorticale infinitamente vicino a P si traccia sulla superficie una linea normale in ogni suo punto al vettore C , n è un elemento di tale linea ed U è il flusso di C che lo attraversa; $\frac{U}{n}$ è il flusso attraversante l'unità di lunghezza.

Se rappresentiamo questo flusso $\frac{U}{n}$ con la semplice lettera U_1 e portiamo questa notazione nella equazione (74) dell'art. 51, questa diventa:

$$A = U_1 n + A_1 + A_0.$$

Ivi A_1 ed A_0 stanno, come dianzi, a rappresentare rispettivamente il vettore dovuto alle basi del solenoide ed un vettore arbitrario a distribuzione solenoidale e non circuitale.

Questo è il vettore in un punto P infinitamente vicino alla superficie vorticale nell'interno del solenoide. In un punto P' infinitamente vicino a P , ma dall'altra parte della superficie vorticale, all'esterno del solenoide, il vettore ha un altro valore A' , e precisamente

$$A' = A_1 + A_0.$$

I valori di A_1 e di A_0 che figurano nella espressione di A' differiscono infinitamente poco da quelli che figurano in A ; fra i due vettori in P ed in P' vi ha adunque la differenza

$$A - A' = U_1 n.$$

Supponiamo che U_1 abbia un valore finito; allora questa equazione ci dice che i vettori A ed A' nei due punti infinitamente vicini P e P' presentano tra di loro una differenza finita: la superficie vorticale è allora una superficie di discontinuità. La differenza tra A ed A' è un vettore $U_1 n$ il cui versore n è tangente alla superficie vorticale; dunque la discontinuità che qui si presenta è nella componente tangenziale. Si ricorderà che all'art. 42 abbiamo veduto come nelle distribuzioni non circuitali la discontinuità su di una superficie si possa presentare soltanto per la componente del vettore normale alla superficie medesima. Ora qui troviamo che nelle distribuzioni solenoidali e circuitali la discontinuità che si può presentare su

di una superficie riguarda soltanto l'altra componente del vettore, la componente tangenziale. Sono superficie di discontinuità per la componente normale le superficie contenenti strati di masse, sono superficie di discontinuità per la componente tangenziale le superficie vorticali. Combinando le cose dette nell'art. 42 con quelle svolte nel presente articolo si possono trattare tutti i casi di discontinuità che si possono presentare.

§ 8.

Sui due modi di definire e di trattare il campo di un vettore.

56. — In grazia delle osservazioni fatte nell'art. 37, i risultati esposti nei tre ultimi paragrafi (5°, 6° e 7°) comprendono tutti i casi di distribuzione che si possono presentare. Ora, nel chiudere l'esposizione di tali risultati, è utile richiamare e riassumere alcune osservazioni fatte negli articoli 41 e 50 intorno all'impiego di alcuni concetti e di alcune locuzioni ed intorno ai modi di presentare, di definire e di trattare il campo di un vettore che risultano da tale impiego.

Nel caso delle distribuzioni non circuitali (§§ 5° e 6°) abbiamo trovato [38] che il vettore \mathbf{A} in un punto qualunque P si può esprimere, a meno di un termine a distribuzione solenoidale, colla somma (52) di tanti vettori \mathbf{A}' quanti sono gli elementi di volume v nei quali la divergenza ha un valore δ diverso da zero, e che ciascuno di questi vettori è espresso da $\mathbf{r} \frac{m}{r^2}$, ove m è il prodotto $\frac{v\delta}{4\pi}$ ed \mathbf{r} è il vettore che definisce la posizione del punto P rispetto all'elemento v di volume. Volendo esprimere questo risultato a parole, in forma semplice, ci fece comodo dare un nome alla grandezza m ; e noi abbiamo adoperato il nome: *massa*. Ci fece comodo inoltre indicare nella somma $\mathbf{A} = \Sigma \mathbf{r} \frac{m}{r^2}$ il termine \mathbf{A}' dipendente da una qualunque delle masse m ; e noi abbiamo detto \mathbf{A}' : il vettore in P dovuto alla massa m , o prodotto dalla massa m . Questo modo di parlare, il quale torna comodo ed utile quando il campo viene definito col dare i valori della divergenza, così che il vettore si abbia a determinare per mezzo di questa, si può considerare come l'espressione di una finzione, secondo la quale si suppone che negli spazi ove esistono le m risieda la causa del campo; o, se si vuole, come l'espressione di una rappresentazione fisica del campo, nella quale si materializza la divergenza o la massa in ogni punto, considerandola come un agente. E nelle considerazioni di fisica questa finzione e questa rappresentazione si possono presentare come una interpretazione od una ipotesi fisica, secondo la quale le masse hanno una esistenza fisica e sono la causa di grandezze vettoriali che in grazia di esse esistono a distanza, con direzioni e con valori calcolabili colla legge newtoniana.

Similmente nelle distribuzioni circuitali abbiamo trovato [art. 50 e 51] che il vettore \mathbf{A} in un punto qualunque P si può esprimere, a meno di un vettore a distribuzione non circuitale, come una somma di tanti vettori \mathbf{A}' quanti sono gli elementi dei filetti vorticali esistenti nel campo. Ad un elemento di lunghezza l e di dire-

zione \mathcal{L} , attorno al quale la circuitazione sia $U = 4\pi i$, e rispetto al quale la posizione del punto P sia definita dal vettore rr , corrisponde nella somma un vettore A' dato dalla formola

$$A' = \frac{1}{r^2} \nabla i l r.$$

Volendo esprimere questo risultato a parole, in forma semplice; e volendo indicare che il termine A' della somma vettoriale A corrisponde ad un determinato elemento $i l$ di un dato filetto vorticale, ci fece comodo dire che il vettore A è dovuto al cennato elemento, od è prodotto dal medesimo. Questo modo di parlare, il quale riesce comodo e naturale quando sono dati i filetti vorticali e si vuole determinare il vettore per mezzo di essi, si può presentare come la espressione di una finzione, secondo la quale si ripone nell'elemento del filetto vorticale la causa del vettore A' . E nelle questioni di fisica questa finzione può anche trasformarsi in una interpretazione fisica dei fatti, o in una ipotesi, secondo la quale si materializza l'elemento di filetto e gli si attribuisce la proprietà di produrre a distanza, nel punto definito dal vettore rr , un vettore A' avente il versore $\nabla l r$ ed il tensore $\frac{i l}{r^2}$.

Combinando le due finzioni, quella delle masse agenti a distanza secondo la legge newtoniana, e quella dei filetti vorticali agenti pure a distanza secondo la legge sovraricordata, si possono definire e descrivere tutti i campi, qualunque sia in essi la distribuzione. E se si tratta di questioni fisiche, si fa in questo modo una rappresentazione del campo, nella quale si attribuisce una esistenza fisica alle masse ed ai filetti vorticali occupanti nello spazio determinate regioni, mentre tutto lo spazio rimanente si considera semplicemente come spazio geometrico, ove la grandezza vettoriale studiata esiste come prodotta a distanza dalle masse e dai filetti.

Di fronte a questo sta un altro modo di considerare un campo, un modo che, se nelle interpretazioni fisiche cominciò ad essere adoperato molto più tardi del precedente, a noi invece, qui, in questa nostra trattazione geometrica, si è presentato pel primo, e come il più diretto ed il più naturale. Tale modo è quello che abbiamo esposto nell'art. 13 e sul quale dopo d'allora siamo tornati più volte, segnatamente negli articoli 14, 15, 17 e 20. Esso è derivato direttamente dal concetto stesso di vettore. Un vettore [1] è l'operazione colla quale si trasporta un punto per un dato tratto in una data direzione. Quando adunque si definisce per mezzo di un vettore la grandezza vettoriale esistente in un campo, si immagina, con ciò stesso, in ogni punto del campo un punto mobile, un punto che si sposta nella direzione e per un tratto che si dicono rispettivamente: direzione e grandezza del vettore. Noi nell'art. 13, per fare una rappresentazione fisica, tangibile, del campo, non abbiamo fatto altro che sostituire col pensiero ai punti mobili geometrici altrettanti punti materiali; e così siamo stati, senz'altro, condotti alla finzione di un mezzo, per esempio di un fluido, che si sposta nello spazio. Invece di materializzare, con una finzione della mente, la divergenza e la rotazione del vettore, noi abbiamo materializzato il vettore stesso. Nell'art. 13 si è veduto come a qualunque campo si possa applicare questa finzione. All'art. 15 poi si è dimostrato che in una tale rappresentazione fisica il flusso attraverso ad una superficie è proporzionale al volume di fluido che nel movimento ha attraversato la superficie medesima, e che perciò il

cosa sola: un corpo, o mezzo, riempiente tutto lo spazio. E intorno alle proprietà di questo mezzo non si inventa nulla; unicamente si ritiene che lo spostamento di esso sia proporzionale al vettore. Invece coll'altra finzione si introducono colla immaginazione due enti distinti, uno scalare ed uno vettoriale, la massa e l'elemento di filetto vorticale, e a questi due enti si hanno ad attribuire, per spiegare i fatti sperimentali, speciali proprietà, prima fra le quali quella di agire a distanza secondo le leggi espresse dalla formola (52) dell'art. 38 e dalla (72'') dell'art. 50.

In secondo luogo si può notare con quanta maggiore semplicità e naturalezza la finzione dello spostamento permetta di presentare i casi di discontinuità, che nel § 6 ci hanno condotti alla considerazione degli *strati*. In tutti i casi che si incontrano nella fisica gli strati si presentano sempre e soltanto sulle superficie di separazione tra due parti dello spazio occupate da materie diverse; le superficie di discontinuità pel vettore sono anche superficie di discontinuità per qualche proprietà fisica della materia riempiente lo spazio. È adunque molto più naturale pensare direttamente alla differenza tra i valori del vettore ne' due spazi separati dalla superficie, che non pensare ad uno strato di un agente immaginato disteso sulla superficie medesima col solo scopo di considerarlo poi come la causa di tale differenza. Il modo più semplice di interpretare e di presentare la discontinuità è di immaginare che questa non si verifichi già nello spostamento, ma si verifichi invece semplicemente nel valore del fattore pel quale bisogna moltiplicare lo spostamento per calcolare il vettore; di immaginare cioè che lo spostamento abbia luogo in tutto lo spazio, senza discontinuità, ma che il vettore corrispondente ad un medesimo valore dello spostamento sia diverso nei diversi mezzi e vari perciò bruscamente quando si passa da una parte all'altra della superficie secondo la quale due mezzi combaciano. Nelle trattazioni fisiche questo modo di presentare la cosa conduce a considerare due vettori distinti: il vettore A del quale si tratta, e pel quale si considerano superficie di discontinuità, ed uno spostamento B al quale A è dovuto. I fatti allora si interpretano supponendo lo spostamento B distribuito senza discontinuità in tutto lo spazio, e ritenendo che l'esistenza di un dato spostamento B dia luogo ad un vettore A il cui valore è diverso ne' diversi mezzi. Uno dei casi più importanti che si presentano nello studio delle questioni fisiche è quello ove il vettore A è una forza. In tale caso il complesso de' fatti ci condurrà a considerare la forza come dovuta ad una speciale deformazione di un mezzo, come le forze in un corpo elastico sono dovute e legate alle deformazioni di questo; e la deformazione si potrà nei casi che noi avremo a studiare, definire e rappresentare per mezzo di uno spostamento B .

Nel caso semplice di mezzi isotropi si potrà ritenere che A e B abbiano il medesimo versore e si potrà quindi porre $A = \epsilon B$ ove ϵ è un fattore scalare. Questo fattore però sarà diverso pe' diversi mezzi, diverso perciò sulle due faccie della superficie di separazione tra due mezzi diversi. Se si dicono ϵ ed ϵ_1 i valori di ϵ nei due mezzi in due punti infinitamente vicini, la (58) dell'art. 43 dà

$$4 \pi \sigma = (\epsilon - \epsilon_1) B_n.$$

Se la superficie considerata è una di quelle che limitano il campo, così che al di là

di essa il vettore sia nullo, si ha semplicemente da porre $\epsilon_1 = 0$ ed allora questa formola dà

$$\epsilon B_n = A_n = 4 \pi \sigma,$$

che è la (59) del citato art. 43.

Il teorema delle superficie corrispondenti [44] scaturisce direttamente dalla considerazione che se la distribuzione è solenoidale, il mezzo, nel quale ha luogo lo spostamento, si ha a supporre di volume invariabile. E qui spicca la differenza di semplicità tra la finzione dello spostamento e quella delle masse di agente. Infatti si supponga dato lo strato di masse esistente sopra una delle due superficie corrispondenti. Se si fa uso della finzione dello spostamento di un fluido, o, più in generale, di un mezzo di volume invariabile, riempiente il campo, si ricorda subito, senza bisogno di altri dati, o di altre ipotesi, che anche sull'altra superficie si ha uno strato, e precisamente uno strato di uguale massa e di segno contrario. Se invece si fa uso del concetto di masse esercitanti azioni newtoniane, bisogna spiegare l'esistenza di questo secondo strato per mezzo di una nuova ipotesi: attribuendo cioè all'agente ed ai corpi, in cui questo è pensato, proprietà tali che la presenza di uno strato su una delle superficie abbia a provocare la formazione di un altro strato, uguale e di segno contrario, sull'altra superficie.

Il caso di un doppio strato si riduce, secondo il concetto dello spostamento, a quello di una lamina infinitamente sottile, nello interno della quale la costante ϵ ha un valore diverso da quello che essa ha all'esterno, mentre quest'ultimo è lo stesso da entrambe le parti.