§ 3°

FORZE NELL'INTERNO DI UN MAGNETE INDUZIONE MAGNETICA

77. – Campo magnetico nell'interno delle calamite. — Le nozioni esposte nel paragrafo precedente intorno alla costituzione dei magneti ed alla distribuzione del magnetismo nei medesimi ci hanno mostrato come si possa studiare un campo magnetico prodotto da dati magneti, in ogni punto dei quali sia nota la direzione e l'intensità della magnetizzazione. Vedremo come mediante correnti elettriche si possano produrre campi magnetici anche senza magneti e masse magnetiche, e studieremo come si calcoli l'intensità del campo date le intensità delle correnti e la forma dei loro circuiti. Saremo allora in grado di fare uno studio completo del campo magnetico e di risolvere qualunque problema relativo alla distribuzione delle masse, ai valori della forza e del potenziale nei singoli punti, ai lavori, e infine alla energia del sistema.

Ciò sta finchè parliamo del campo magnetico esterno ai magneti, finchè cioè restiamo nell'aria o in generale in un mezzo a noi accessibile, nel quale possiamo sperimentare. Difatti la stessa definizione di forza magnetica in un punto presuppone che si possa sperimentare sulla massa *uno* portata in esso. Perciò se consideriamo punti non accessibili alla massa di prova, e in particolare punti interni ai magneti, le definizioni e le proposizioni esposte per i campi nell'aria cessano di avere significato, a meno che non si facciano speciali convenzioni. Quella che si presenta più naturale consiste nell'estendere allo spazio occupato da magneti le stesse definizioni che valgono per lo spazio esterno. Partendo dal concetto newtoniano di masse d'agente, alle quali le forze sono dovute, è naturale ritenere che la forza non dipenda dalla natura della sostanza nel punto, ma solo dalla distribuzione delle masse magnetiche o delle correnti producenti il campo. In sostanza noi immaginiamo che in tutto lo spazio si sostituisca aria od etere alla materia occupante, e supponiamo di più che con tale sostituzione non siano per nulla variate le masse magnetiche e le correnti elettriche del sistema; supponiamo cioè che masse magnetiche e correnti elettriche esistano indipendentemente dal loro sostegno materiale. Con queste ipotesi diremo dunque:

Forza magnetica o *intensità del campo* in un punto inaccessibile alla massa di prova, e in particolare in un punto interno ai magneti, è la forza che si eserciterebbe in quel punto sulla massa magnetica unità, quando si potesse sostituire l'aria od il vuoto alla materia occupante quel punto senza alterare per nulla la distribuzione delle masse magnetiche e delle correnti elettriche nello spazio.

La definizione ora data è astratta, ma matematicamente precisa. Limitiamoci al caso di campi magnetici prodotti da magneti, data la distribuzione delle masse magnetiche, oppure data la distribuzione del vettore $\mathfrak{J}$, sapremo sempre calcolare la forza in ogni punto del campo, qualunque sia la materia che si trova nel punto considerato. Però se la forza magnetica risulta così definita con precisione in ogni punto, nei punti all'interno dei magneti essa non si potrà praticamente misurare con esperienze dirette su una massa di prova. Difatti per portare in un punto all'interno del magnete un polo magnetico contenente la massa *uno* di prova, e poter su di essa sperimentare, è necessario scavare nel magnete una cavità attorno al punto considerato. È bensì vero che la massa magnetica in tal modo asportata è nulla, perchè il pezzo staccato costituisce un magnete completo, ma intanto si manifesta libera sulla superficie della cavità una distribuzione di magnetismo, che prima era neutralizzata da una distribuzione uguale ed opposta sulla superficie del pezzo asportata. Pertanto la forza, che nella cavità si esercita sulla massa di prova, non è l'intensità del campo, quale noi la definimmo, ma piuttosto la risultante dell'intensità del campo e della forza prodotta dalle masse rese libere pel fatto di aver praticato la cavità.

Dalla definizione ora data risulta che la forza magnetica è in ogni punto del campo una forza newtoniana; potremo perciò estendere anche all'interno dei magneti tutte le proposizioni che abbiamo esposto in generale sui campi newtoniani; non avremo cioè a fare alcuna differenza fra l'interno e l'esterno dei magneti; si potranno, ad esempio, indifferentemente applicare ad una parte qualunque dello spazio i teoremi di GAUSS e di STOKES.

Dalle proprietà stesse del campo newtoniano, risulta subito che la forza magnetica non può avere una distribuzione solenoidale, poichè non è nullo il flusso di forza uscente da una superficie qualunque chiusa contenente nel suo interno una somma non nulla di masse magnetiche. Ma possiamo dire di più: la forza magnetica non solo non è distribuita solenoidalmente, ma neppure con continuità; e precisamente sono superfici di discontinuità le superfici dei magneti sempre quando non sia nulla la componente della magnetizzazione normale alla superficie. Sia $S\,S$ (fig. 73) la superficie di separazione fra un magnete e l'aria. Consideriamo due punti P, P', infinitamente vicini fra di loro, l'uno all'interno del magnete, l'altro all'esterno. Siano rispettivamente $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$ i valori della forza magnetica in P e P'; $\mathcal{H}_n$, $\mathcal{H}'_n$ le loro componenti normali alla superficie $S\,S$, prese come positive se dirette verso l'esterno del magnete. Sulla superficie $S\,S$ in corrispondenza dei punti P e P' consideriamo un elemento $A\,B$ di area $d\,S$, e supponiamo che le distanze dei punti P, P' dall'elemento siano infinitamente piccole a fronte delle dimensioni di $d\,S$. Sulla superficie $d\,S$ è distribuita una massa di magnetismo libero $d\,m = \sigma\,d\,S = \mathfrak{I}_n\,d\,S$. Consideriamo la superficie chiusa determinata dai piani condotti per P e P' parallelamente a $d\,S$, e dalla superficie cilindrica condotta per il contorno $A\,B$ normalmente a $d\,S$, ed applichiamo ad essa il teorema di GAUSS. Il flusso uscente dalla superficie laterale del cilindro $a\,a'\ b\,b'$, è infinitamente piccolo, trascurabile a fronte dei flussi $\mathcal{H}_n\,d\,S$, e $-\mathcal{H}_n\,d\,S$ uscenti dalle basi $a\,b', a\,b$. Il teorema di GAUSS ci dà dunque

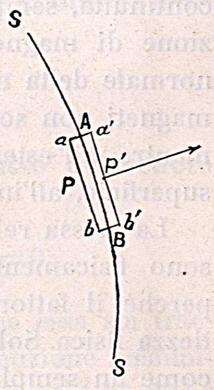

Fig. 73.

$$(\mathcal{H}'_n - \mathcal{H}_n)\,d\,S = 4\,\pi\,k\,d\,m = 4\,\pi\,k\,\mathfrak{I}_n\,d\,S;$$

da cui

$$\mathcal{H}'_n - \mathcal{H}_n = 4\pi k \mathfrak{J}_n$$

$$\mathcal{H}'_n = \mathcal{H}_n + 4\pi k \mathfrak{J}_n. \tag{17}$$

Ne risulta che la forza magnetica presenta valori differenti nei due punti P, P' infinitamente vicini fra loro; chè anzi per certi valori di $\mathfrak{J}_n$ la forza può avere direzioni opposte nei due punti. Le superfici dei magneti sono dunque superfici di discontinuità, sempre quando sulle medesime esiste una distribuzione di magnetismo libero, cioè non è nulla la componente normale della magnetizzazione. Le linee di forza all'interno dei magneti non sono il prolungamento delle linee di forza esterne; mentre all'esterno si hanno $\mathcal{H}'$ linee di forza per unità di superficie, all'interno se ne hanno $\mathcal{H}$.

La stessa relazione (17) ci fa vedere che i due vettori $\mathcal{H}$ ed $\mathfrak{J}$ sono fisicamente due grandezze di natura diversa, appunto perchè il fattore k non è un semplice numero ma una grandezza fisica. Solo nel sistema di misure nel quale si considera k come un semplice numero, $\mathcal{H}$ ed $\mathfrak{J}$ hanno le stesse dimensioni, perchè allora si ha

$$\mathcal{H}'_n = \mathcal{H}_n + 4\pi \mathfrak{J}_n; \tag{17'}$$

ma questa è puramente una nostra ipotesi.

78. – Vettori a distribuzione solenoidale. — I due vettori che abbiamo sinora considerati nei campi magnetici, cioè la forza magnetica $\mathcal{H}$ e la magnetizzazione $\mathfrak{J}$, hanno una distribuzione solenoidale solo dove non esistono masse di magnetismo libero. L'ulteriore studio dei campi magnetici sarà reso più semplice, se si potrà, combinando convenientemente questi due vettori, trovare un vettore che sia distribuito in modo solenoidale in tutto il campo.

Sia nel campo una superficie chiusa S, comunque disposta rispetto ai magneti. Indichiamo con m la massa di magnetismo libero contenuta nell'interno di questa superficie, con Φh, Φi i flussi di forza e di magnetizzazione uscenti dalla medesima. Per il teorema di Gauss si ha:

$$\Phi_{\mathfrak{h}} = 4\,\pi\,k\,m;$$

e poichè la massa contenuta nell'interno di una superficie chiusa è uguale al flusso di $\mathfrak{J}$ entrante in essa [74], si ha pure:

$$\Phi_i = -m.$$

Il flusso uscente da S del vettore $4\,\pi\,k\,\mathfrak{J}$, che si ottiene moltiplicando $\mathfrak{J}$ per il fattore scalare $4\,\pi\,k$, è

$$4\,\pi\,k\,\Phi_i = -4\,\pi\,k\,m.$$

Componendo i due vettori $\mathcal{H}$, $4\,\pi\,k\,\mathfrak{J}$, il flusso del vettore risultante è nullo:

$$4\,\pi\,k\,\Phi_i + \Phi_{\mathfrak{h}} = -4\,\pi\,k\,m + 4\,\pi\,k\,m = 0;$$

e ciò qualunque sia la superficie S, e dovunque essa sia tracciata. Questo vettore risultante ha dunque distribuzione solenoidale in tutto lo spazio. I tubi e le linee di flusso si richiudono su sè stessi a distanza finita o infinita, e sono attraversati da un flusso costante che non subisce variazione neppure alla superficie dei magneti. Queste proprietà valgono non solo per il vettore risultante di $\mathcal{H}$ e di $4\,\pi\,k\,\mathfrak{J}$, ma ancora per ogni altro vettore che da questo si ottenga moltiplicandolo per una costante scalare qualunque.

Questo fattore scalare può non essere un numero, ma una grandezza fisica di date dimensioni; si potrà quindi sempre fare in modo che il vettore solenoidale presenti dimensioni fisiche prestabilite.

Fra tutti questi vettori due meritano una speciale considerazione: cioè il vettore

$$B = \textit{risultante di } \mathcal{H} \textit{ e di } 4\,\pi\,k\,\mathfrak{J},$$

ed il vettore

$$B = \textit{risultante di } \frac{\mathcal{H}}{k} \textit{ e di } 4\,\pi\,\mathfrak{J};$$

i quali si ottengono ponendo il fattore costante rispettivamente uguale all'unità e ad $\frac{1}{k}$.

79. – Definizione polare e definizione elettromagnetica della forza magnetica. Forze nell'interno di cavità praticate nei magneti. — Consideriamo dapprima il vettore

$$B = \textit{risultante di } \mathcal{H} \textit{ e di } 4\pi k \mathfrak{I};$$

che, come risulta da questa relazione, è una grandezza della stessa natura delle forze magnetiche.

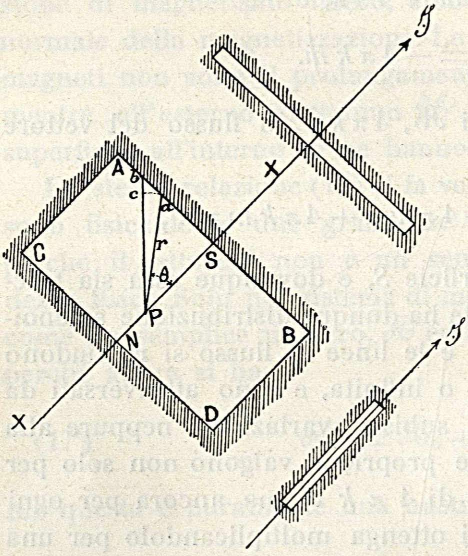

Fig. 74.

Per giungere ad una interpretazione fisica del vettore B, conviene che calcoliamo il valore della forza in un punto di una cavità scavata all'interno di un magnete, forza che notammo già essere diversa dall'intensità $\mathcal{H}$ del campo in quel punto.

Dentro ad un magnete immaginiamo scavata una cavità cilindrica $ABCD$ (fig. 74) a base circolare, avente l'asse nella direzione della magnetizzazione. Supponiamo che il vano sia abbastanza piccolo perchè la magnetizzazione si possa ritenere costante in grandezza e direzione in tutti i punti del pezzo asportato e della superficie della cavità, e di più supponiamo che siasi praticata la cavità senza alterare per nulla la distribuzione della magnetizzazione nelle altre parti del magnete.

Si sono in tal modo rese libere due distribuzioni di magnetismo uguali ed opposte sulle due basi del cilindro, nord su CD, sud su AB, le quali, colle ipotesi fatte, hanno densità costante $\sigma = \mathfrak{I}$.

Se consideriamo una massa magnetica *uno* posta in un punto P sull'asse XX della cavità, la forza cui è soggetta tale massa è la risultante di due altre forze, cioè della $\mathcal{H}$ dovuta alle masse magnetiche, o alle correnti elettriche preesistenti alla formazione della cavità, e della R dovuta alle due nuove distribuzioni sulle due faccie. Per semplice ragione di simmetria la R è diretta secondo l'asse XX da N ad S; per calcolarla consideriamo dapprima una delle basi, AB. Un suo elemento qualunque ab di area dS, alla distanza r da P contiene una massa $\sigma\, dS = \mathfrak{J}\, dS$, che esercita in P una forza $k\dfrac{\mathfrak{J}\, dS}{r^2}$. La forza in P, dovuta a tutte le masse distribuite sulla faccia AB, è la risultante delle forze dovute ai singoli elementi; e poichè sappiamo che la risultante è diretta secondo la XX, così basterà che consideriamo le proiezioni su XX delle singole componenti, e le sommiamo algebricamente. La componente secondo XX della forza dovuta all'elemento ab è

$$k\frac{\mathfrak{J}\, dS}{r^2}\cos\theta = k\,\mathfrak{J}\, d\omega,$$

ove $d\omega$ indica la superficie apparente di dS vista dal punto P [22]. Se facciamo la somma di queste componenti elementari, e rappresentiamo con $\omega = \int d\omega$ la superficie apparente di AB vista da P, la forza in P prodotta dalle masse distribuite su AB è $k\,\mathfrak{J}\,\omega$.

Analogamente le masse distribuite su CD esercitano in P una forza $k\,\mathfrak{J}\,\omega'$, se con ω' si indica l'angolo solido sotto cui la base CD è vista dal punto P. In complesso dunque la forza R è data da

$$R = k\,\mathfrak{J}\,(\omega + \omega').$$

Se, in particolare, il punto P si trova sulla metà dell'asse, $\omega = \omega'$, e perciò:

$$R = 2k\,\mathfrak{J}\,\omega,$$

ed è facile dimostrare che, detto a il diametro della base del cilindro, ed h l'altezza, si ha:

$$R = 4\pi k\,\mathfrak{J}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{h}\right)^2}}\right].$$

In generale il valore della forza R dipende dalle ampiezze dei due coni che dal punto P proiettano le basi del cilindro; dipende cioè dal rapporto $\frac{a}{h}$ fra il diametro della base e l'altezza del cilindro.

Sono singolarmente importanti i due casi limiti: il caso di $\frac{a}{h}$ infinitamente piccolo, e quello di $\frac{a}{h}$ infinitamente grande.

Il primo caso corrisponde ad un cilindretto scavato parallelamente alla magnetizzazione con base infinitamente piccola a fronte dell'altezza. Si ha allora $\omega = \omega' = 0$, perciò $R = 0$; la forza si riduce a quella che in quel punto si avrebbe, ove non si fosse praticata alcuna cavità; cioè alla forza magnetica $\mathcal{H}$ in quel punto.

Purchè la cavità sia infinitamente sottile sussistono le cose dette anche quando essa non sia cilindrica, perchè si potrà sempre considerare divisa in porzioni cilindriche. Se quindi si immagina nel magnete scavato un canaletto secondo un tubo di magnetizzazione, in ogni suo punto la massa di prova *unità* è soggetta ad una forza uguale alla forza magnetica in quel punto. Ne risulta una definizione meno astratta dell'intensità del campo magnetico all'interno dei magneti:

Intensità del campo magnetico o forza magnetica in un punto all'interno dei magneti è la forza che in tale punto si esercita sopra la massa magnetica unità, quando per il punto siasi scavato un canaletto infinitamente sottile secondo una linea di magnetizzazione.

Il secondo caso limite, nel quale il rapporto $\frac{a}{h}$ è infinitamente grande, corrisponde ad un cilindro di altezza infinitamente piccola a fronte del diametro delle basi. La cavità si riduce ad una fessura infinitamente sottile, normale alla direzione della magnetizzazione. In tale caso si ha $\omega = \omega' = 2\pi$,

$$R = 4\pi k \mathfrak{I}. \tag{18}$$

La forza R ci rappresenta dunque il secondo vettore che entra come componente di B.

Pertanto il vettore B, che è la risultante di $\mathcal{H}$ e di R, cioè della forza dovuta alle masse magnetiche ed alle correnti elettriche preesistenti, e della forza dovuta alle due distribuzioni uguali ed opposte che si formano sulle due basi della cavità, ci rappresenta la forza che si eserciterebbe sulla massa magnetica *uno*, portata in un punto all'interno di una fessura infinitamente sottile scavata nel magnete normalmente alla direzione della magnetizzazione.

Siccome il magnetismo esistente sulle parti periferiche delle basi della cavità esercita su di un punto sull'asse forze infinitamente piccole a fronte di quelle dovute alle parti centrali, così è evidente che la forza rimane ancora la stessa, anche se le basi non siano circolari, ma abbiano una forma qualunque, alla sola condizione che le loro dimensioni siano infinitamente grandi rispetto all'altezza del cilindro.

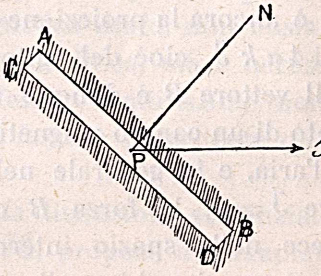

Fig. 75.

Possiamo generalizzare questa proposizione e dimostrare che, se si scompone il vettore B in due, l'uno perpendicolare, l'altro parallelo ad una direzione qualunque PN (figura 75), quest'ultimo è uguale alla componente secondo PN della forza che sulla massa unità si eserciterebbe dentro ad una fessura infinitamente sottile $ABCD$ normale a PN. Infatti se l'altezza della cavità è infinitamente piccola a fronte delle basi, le masse di magnetismo libero, esistenti sulla superficie cilindrica della cavità, esercitano sul punto P forze infinitamente piccole a fronte di quelle dovute alle masse magnetiche distribuite sulle basi.

Perciò la forza esercitata in P dalle masse distribuite sulla superficie della cavità si riduce a quella dovuta alle due distribuzioni eguali ed opposte sulle due basi, e si calcola come abbiamo fatto dianzi per la R. Tale forza è quindi diretta secondo la PN, ed ha il valore

$$4\pi k \mathfrak{I}_n,$$

ove con $\mathfrak{I}_n$ si indica la densità del magnetismo libero sulle due basi, cioè la componente della magnetizzazione secondo PN.

Se indichiamo rispettivamente con $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_n$ la forza magnetica in P e la sua proiezione su PN, la forza che nel punto P della fessura si esercita sulla massa *uno* è la risultante di $\mathcal{H}$ e di $4\,\pi\,k\,\mathfrak{I}_n$. La sua componente secondo PN è

$$\mathcal{H}_n + 4\,\pi\,k\,\mathfrak{I}_n,$$

che è ancora la proiezione sulla stessa PN della risultante di $\mathcal{H}$ e di $4\pi\,k\,\mathfrak{I}$, cioè del vettore B; il che volevasi dimostrare.

Il vettore B è dunque una forza, la quale esiste in ogni punto di un campo magnetico, e vi è distribuita solenoidalmente. Nell'aria, e in generale nello spazio non occupato da magneti, dove $\mathfrak{I} = 0$, la forza B coincide colla forza magnetica $\mathcal{H}$; invece nello spazio interno ai magneti B è uguale alla forza che si eserciterebbe sulla massa magnetica *uno* posta entro ad una cavità infinitamente sottile, praticata nel magnete normalmente alla direzione della magnetizzazione. La componente della B in una direzione qualunque è uguale alla componente, nella stessa direzione, della forza che sulla massa *uno* si eserciterebbe in una fessura praticata nel magnete normalmente alla direzione considerata.

Occorre distinguere bene fra le due forze B ed $\mathcal{H}$. Solo all'esterno dei magneti le due forze coincidono, ma all'interno esse sono nettamente distinte. La forza $\mathcal{H}$ non è distribuita solenoidalmente; le sue linee di flusso non sono mai linee chiuse; nè potrebbe essere altrimenti trattandosi di campi dovuti a condizioni statiche.

Se infatti si avesse una linea di forza chiusa, basterebbe scavare nel magnete un sottile canaletto lungo la medesima e disporre una massa magnetica, ad esempio nord, in modo che potesse circolare sulla linea chiusa. Allora questa massa sarebbe in ogni punto della linea sollecitata da una forza tendente a farla circolare sempre nel medesimo verso; la forza farebbe in tutti gli elementi della linea un lavoro sempre positivo; si ricaverebbe così dalle forze magnetiche un lavoro continuo, il quale non costerebbe nulla.

Noi vedremo che per mezzo di correnti elettriche si producono campi magnetici ove le linee di forza possono essere chiuse; ma le correnti elettriche sono sempre prodotte e mantenute mediante spesa di energia, ed allora il lavoro continuo che si può ricavare rappresenta una parte di questa energia.

La forza B ha invece distribuzione solenoidale in tutto lo spazio; le sue linee di flusso sono linee chiuse; nè si cade per ciò nell'assurdo del moto perpetuo, perchè, per far percorrere una di queste linee alla massa magnetica *unità*, non basta scavare nel magnete un canaletto lungo la linea, ma è necessario praticare nel magnete successive fessure sottilissime normali alla magnetizzazione, riempiendo la fessura precedente quando si passa da un punto all'altro.

Lord Kelvin, per stabilire bene la distinzione sostanziale fra le definizioni delle due forze B ed $\mathcal{H}$, propose di chiamare la prima *definizione elettromagnetica* e la seconda *definizione polare della forza magnetica.*

In molti libri tecnici si dà puramente la definizione polare della forza, e poi si attribuiscono ad essa le proprietà della forza definita elettromagneticamente: così si parla spesso delle linee di forza nell'interno dei magneti, come se esse fossero la continuazione delle linee di forza esterne e formassero con queste altrettante linee chiuse. Dalle considerazioni precedenti risulta che un tal modo di esporre le cose non è ammissibile, se non alla condizione di rinunziare alla definizione polare della forza magnetica come forza newtoniana anche all'interno dei magneti.

Noi siamo venuti alla considerazione della forza B, partendo dalla condizione che essa dovesse avere una distribuzione solenoidale. È bene però che notiamo come, partendo dalle relazioni che abbiamo dimostrato passare tra la forza B e la forza che in speciali cavità entro al magnete si esercita sulla massa *uno*, si possa direttamente dimostrare che la forza B ha distribuzione solenoidale. Basta perciò che dimostriamo che è nullo il flusso di B uscente da una superficie chiusa qualunque.

Tre sono i casi che si possono presentare: 1° La superficie chiusa è per intiero tracciata in mezzi non magnetici, fuori delle calamite; — 2° La superficie chiusa è per intiero tracciata dentro ad una calamita; — 3° La superficie chiusa è tracciata in parte nello spazio esterno alle calamite, ed in parte all'interno.

1° Caso. Se la superficie chiusa S non taglia alcuna calamita, in ogni suo punto la forza B coincide colla $\mathcal{H}$, il flusso di B è uguale al flusso di $\mathcal{H}$; questo per il teorema di Gauss è uguale a $4\pi M$, ove con M si rappresenta la somma delle masse magnetiche esistenti entro alla superficie. Ora M è necessariamente nullo, perchè, se la superficie S non taglia calamite, essa, o non racchiude alcuna calamita, oppure racchiude una o più calamite complete, per ognuna delle quali è sempre nulla la somma delle masse di magnetismo libero; è quindi ancora nullo il flusso del vettore B uscente dalla superficie.

2° Caso. La superficie chiusa S è tracciata tutta dentro ad una calamita (fig. 76). Dentro e fuori della superficie S, ed infinitamente vicino ad essa, si immaginino due altre superfici chiuse, e si supponga che venga esportata la materia della calamita dallo spazio fra esse compreso; si immagini, in altri termini, praticato nella calamita, secondo la superficie S, un taglio infinitamente sottile. Una piccola porzione di questo si può sempre considerare come un taglio infinitamente sottile, fatto secondo un piano tangente alla superficie S, quindi in un punto qualunque della superficie S la componente normale del vettore B è uguale alla componente normale della forza che in quel punto si esercita sulla massa *uno*; il flusso di B è perciò uguale al flusso di tale forza. Ma questa è una vera forza newtoniana: è la forza magnetica $\mathcal{H}$ del sistema di magneti che si ottiene dopo praticato il taglio; ad essa si può applicare il teorema di Gauss. Il flusso di tale forza uscente da S è nullo, perchè è nulla la massa contenuta nell'interno, essendo il pezzo M staccato un magnete completo; è quindi ancora nullo il flusso di B uscente da S.

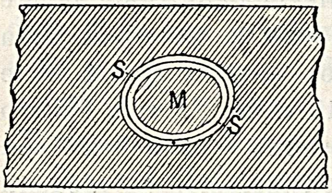

Fig. 76.

3° Caso. Se la superficie S (fig. 77) è in parte tracciata nell'aria e in parte entro ai magneti, si dimostra in modo analogo che il flusso di B uscente da S è nullo. Basta immaginare nei magneti praticati dei tagli infinitamente sottili secondo la superficie S. In tal modo in ogni punto della superficie la componente normale di B è uguale alla componente normale della forza che si esercita sulla massa *uno* situata nel punto; i due flussi sono uguali. Il flusso della forza magnetica del nuovo sistema è nullo per il teorema di Gauss, è quindi ancora nullo il flusso di B.

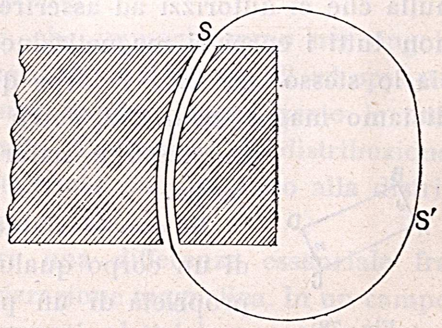

Fig. 77.

80. – Induzione magnetica. Polarizzazione. Spostamento. — Il secondo vettore a distribuzione solenoidale

$$\mathfrak{B} = \textit{risultante di } \frac{\mathcal{H}}{k} \textit{ e di } 4\pi\mathfrak{J}$$

è una grandezza fisicamente omogenea con $\mathfrak{J}$, ha cioè le dimensioni di una forza magnetica divisa per il fattore k. Il vettore $\mathfrak{B}$ così definito è nettamente distinto dalla forza B, e dicesi *induzione magnetica;* esso ha un significato fisico notevole, per la esatta interpretazione del quale è necessario ricordare altri fatti ed altre proprietà fondamentali dei campi magnetici.

Sin qui abbiamo considerate le forze magnetiche come forze newtoniane esercitantisi a distanza fra masse di agente; e ciò era naturale, perchè le esperienze ricordate ci dimostravano solo l'esistenza delle forze. Ma se ora noi pensiamo alla natura fisica di queste forze, siamo condotti a quello stesso ordine di idee, alle quali già ci ha guidato la considerazione delle forze elettriche; ad ammettere cioè che la sede dei fenomeni magnetici non risegga solo nei magneti, là dove si manifestano le masse di magnetismo libero, ma in tutto il campo.

Di fatti l'esperienza ci prova che tutti i corpi, compresi l'aria e l'etere, possono presentare fenomeni magnetici, sebbene in grado molto minore del ferro e dei derivati. Non vi è dunque nulla che ci autorizzi ad asserire che in un campo magnetico non tutti i corpi si magnetizzino, ed è naturale supporre che sia lo stesso per tutti i corpi quello stato speciale per cui li diciamo magnetizzati. Nel ferro ogni elemento è un magnete; lo stesso è naturale ammettere in ogni altro corpo.

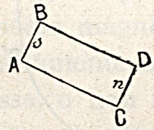

Fig. 78.

Se consideriamo un elemento $A\,B\,C\,D$ (fig. 78) di un corpo qualunque magnetizzato, esso ha le proprietà di un piccolo magnete, presenta cioè due masse n, s uguali e di segno contrario sulle due faccie opposte. Tutto il campo magnetico, tanto la parte occupata dai magneti quanto quella occupata da materia non magnetica, può immaginarsi diviso in tanti elementi, come quello considerato. Noi diremo che un tale spazio è *polarizzato.* Il concetto di *polarizzazione magnetica* è perfettamente analogo a quello di polarizzazione elettrica; entrambi i campi si immaginano divisi in elementi infinitesimi, tali che da una parte presentino masse positive, dall'altra masse negative.

Se per ogni elemento si prende la massa nord e si porta a coincidere colla massa sud sulla faccia opposta dell'elemento, le due masse uguali ed opposte si elidono, non dànno più luogo a forze magnetiche. Ora se con tale spostamento si distrugge la polarizzazione, si fa cioè cessare quello stato speciale del corpo, per cui diciamo che esso è magnetizzato, si può benissimo supporre, inversamente, che la polarizzazione sia stata prodotta per mezzo di uno spostamento uguale ed opposto. Noi siamo così indotti ad ammettere che, quando un corpo non è magnetizzato, esistono in ogni punto di esso masse uguali ed opposte di magnetismo, le quali si elidono. L'atto per cui la polarizzazione si forma consiste in uno spostamento nella direzione di $\mathfrak{J}$ della massa nord, rispetto alla massa sud; le due masse, rese così libere, possono manifestarsi. Questo effetto si ottiene in ogni caso mediante lo spostamento relativo di una massa rispetto all'altra; si può quindi per ogni elemento ritenere che la massa sud sia fissa e che la massa nord si sposti infinitamente poco, oppure che la massa nord sia fissa e la massa sud si sposti nella direzione contraria, o infine che le due masse nord e sud si muovano per versi opposti.

L'insieme di queste masse, che immaginammo nei singoli elementi del campo, forma due distribuzioni uguali ed opposte di magnetismo; quando il corpo non è magnetizzato le due distribuzioni coincidono; quando si polarizza, la distribuzione positiva risulta spostata infinitamente poco rispetto alla distribuzione negativa nella direzione di $\mathfrak{J}$.

Occorre però subito notare una differenza essenziale fra polarizzazione elettrica e polarizzazione magnetica. In un campo elettrico si possono avere correnti elettriche continue, cioè spostamenti che hanno luogo sempre nella stessa direzione lungo linee chiuse; mentre non si possono avere correnti continue di magnetismo, perchè in qualunque corpo si formi la polarizzazione magnetica, sempre si sviluppano reazioni elastiche che si oppongono allo spostamento. In sostanza, la polarizzazione magnetica equivale alla polarizzazione elettrica nei dielettrici, non nei conduttori.

Attraverso ad un elemento superficiale qualunque normale alla direzione secondo la quale avviene lo spostamento, passa, mentre si produce la polarizzazione, una data massa magnetica. Il vettore che ha per grandezza questa massa riferita all'unità di superficie, e per direzione la direzione in cui si sposta la massa nord, dicesi *spostamento magnetico.*

Con queste considerazioni noi non facciamo alcuna ipotesi sulla natura fisica del magnetismo; non affermiamo che avvenga realmente uno spostamento di qualche cosa. La polarizzazione prodotta per mezzo dello spostamento non è che una rappresentazione di quello stato speciale al quale sono dovuti i fenomeni magnetici. Questa rappresentazione si presta bene ad una trattazione matematica, e si accorda con tutte le spiegazioni che si sono tentate della costituzione dei campi magnetici e della natura del magnetismo. La teoria maxwelliana, che da tali concetti deriva, non presenta alcuna maggiore arbitrarietà della teoria newtoniana delle masse agenti a distanza, ma ha su questa il vantaggio di tener conto del fatto che tutti i corpi presentano fenomeni magnetici.

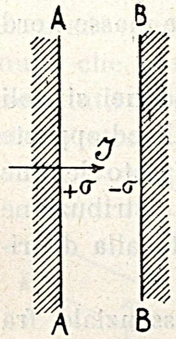

Fig. 79.

Si è visto che la quantità di magnetismo contenuta in una superficie chiusa qualunque, comunque essa sia segnata attraverso a magneti od a corpi non magnetici, è costantemente nulla; non si può nè portarvi nè estrarne magnetismo, è quindi nullo il flusso dello spostamento attraverso ad una superficie chiusa qualunque; in altri termini:

Lo spostamento magnetico ha distribuzione solenoidale.

In ogni punto dello spazio spostamento e forza magnetica sono fra loro collegati come causa ed effetto, come deformazione e forza elastica. Consideriamo dapprima lo spazio occupato dall'aria. Sia il campo prodotto da due distribuzioni uguali ed opposte di magnetismo, di densità uniforme σ, su due faccie piane parallele $A\,A$, $B\,B$ (fig. 79), poste a distanza piccola a fronte delle loro dimensioni. Questa distribuzione si otterrebbe, ad esempio, praticando un taglio infinitamente sottile normale all'asse in un toro di materiale magnetico, nel quale la magnetizzazione abbia il valore costante $\mathfrak{J} = \sigma$. In un punto di questo campo la forza ha il valore (18)

$$\mathcal{H} = 4\,\pi\,k\,\sigma.$$

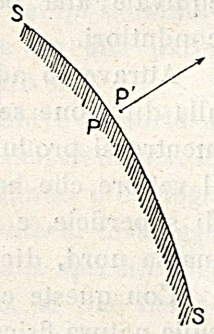

Fig. 80.

Ora in corrispondenza di una delle faccie del taglio per ogni unità di superficie passa una quantità di magnetismo σ; lo spostamento è $b = \sigma$, e quindi

$$\mathcal{H} = 4\,\pi\,k\,b, \qquad b = \frac{\mathcal{H}}{4\,\pi\,k}. \tag{19}$$

Tale è la relazione che passa fra i valori dello spostamento e della forza in un punto qualunque dello spazio occupato da aria.

Consideriamo ora lo spazio interno ai magneti. Sia SS (fig. 80) la superficie di separazione fra un magnete e l'aria, e siano P, P' due punti, l'uno interno, l'altro esterno al magnete, infinitamente vicini fra loro ed alla superficie SS. Indichiamo con b'_n, $\mathcal{H}'_n$, b_n, $\mathcal{H}_n$, i rispettivi valori delle componenti normali dello spostamento e della forza magnetica in quei punti. Avendo il vettore b distribuzione solenoidale, ed essendo i due punti P, P' infinitamente vicini si ha a meno d'infinitesimi:

$$b_n = b'_n.$$

Ora le (19) e (17) dànno:

$$b'_n = \frac{\mathcal{H}'_n}{4\pi k},$$

$$\mathcal{H}'_n = \mathcal{H}_n + 4\pi k \mathfrak{I}_n,$$

per cui:

$$(19') \qquad b_n = \frac{\mathcal{H}_n}{4\pi k} + \mathfrak{I}_n.$$

Essendo $\mathcal{B}$ la risultante di $\frac{\mathcal{H}}{k}$ e di $4\pi\mathfrak{I}$, si ha ancora:

$$\mathcal{B}_n = \frac{\mathcal{H}_n}{k} + 4\pi\mathfrak{I} = 4\pi b_n.$$

A questa equazione si può soddisfare ponendo:

$$(20) \qquad b = \frac{\mathcal{B}}{4\pi}, \qquad \mathcal{B} = 4\pi b.$$

Questa relazione è generale e vale sia all'interno sia all'esterno dei magneti, perchè i due vettori $\mathcal{B}$, b hanno entrambi distribuzione solenoidale; il che del resto è evidente perchè nello spazio non magnetico $\mathfrak{I} = 0$, $\mathcal{B} = \mathcal{H}$, e quindi le (19) e (20) sono equivalenti.

Le relazioni (19), (19') conducono ad una interpretazione fisica notevole della magnetizzazione $\mathfrak{I}$.

Si supponga che in due punti, l'uno nell'interno di un magnete, l'altro nell'aria, la componente della forza magnetica una data direzione abbia lo stesso valore $\mathcal{H}_n$. La componente dello spostamento nella stessa direzione ha i valori:

$$b_n = \frac{\mathcal{H}_n}{4\pi k} + \mathfrak{I}_n$$

e nel punto interno al magnete,

$$b'_n = \frac{\mathcal{H}_n}{4\pi k}$$

nell'aria. Quindi sottraendo:

$$b_n - b'_n = \mathfrak{I}_n .$$

La magnetizzazione rappresenta dunque il maggiore spostamento che con una stessa forza si produce per il fatto di avere un materiale magnetico.

La relazione (20) dimostra che b e $\mathfrak{B}$ hanno le stesse dimensioni, sono grandezze fisiche della stessa natura. Anche la induzione magnetica è dunque una grandezza della natura degli spostamenti; essa non è una forza, come già abbiamo notato, ma è collegata alla forza da una relazione di causa ad effetto.

Era necessario stabilire bene queste differenze fisiche tra la forza $\mathcal{H}$ definita polarmente, la forza B definita elettromagneticamente, e l'induzione magnetica $\mathfrak{B}$, anche perchè se si adotta il sistema di unità per il quale $k = 1$, le due relazioni che definiscono i vettori B e $\mathfrak{B}$ si riducono ad una sola:

$$B = \mathfrak{B} = \textit{risultante di } \mathcal{H} \textit{ e di } 4\pi\mathfrak{I} ;$$

la quale non è una vera uguaglianza fisica: $\mathfrak{B}$ e B sono due vettori di natura fisica ben distinta; è soltanto per la scelta fatta delle unità di misura che in ogni punto coincidono i valori numerici di $\mathfrak{B}$ e di B, che le linee di induzione si confondono con le linee della forza definita elettromagneticamente, che infine i flussi dei due vettori sono uguali. Tali avvertenze sono da tenersi presente specialmente nell'enunciato pratico di molte proposizioni, quali, ad esempio, le seguenti:

« L'induzione magnetica è uguale alla forza magnetica entro alla fessura di un magnete ».

« L'induzione magnetica è uguale alla forza magnetica $\mathcal{H}$ nello spazio esterno dei magneti »,

nelle quali l'uguaglianza deve intendersi limitata ai valori numerici. Già nei concetti di Faraday e di Maxwell induzione e forza magnetica sono due grandezze fisiche ben distinte. Ciò risulterà anche meglio dall'esame dell'energia di un campo magnetico.

81. – Circuito magnetico. Forza magnetomotrice. — L'induzione magnetica è un vettore che esiste in ogni punto d'un campo magnetico e vi è distribuito solenoidalmente; le linee ed i tubi di induzione si chiudono su sè stessi a distanza finita o infinita. Il campo magnetico si può immaginare diviso in tanti tubi di induzione in cui il flusso è costante, precisamente come il flusso di un liquido che abbia moto permanente. Spesso ad un tubo di induzione si dà il nome di *circuito magnetico.* In molti apparecchi si ha un sistema di corpi magnetici, nei quali si produce un flusso di induzione; tutte o quasi le linee di induzione si chiudono entro al sistema: ad esso si dà ancora il nome di *circuito magnetico.* Il circuito vien detto *chiuso* od *aperto,* secondo che è formato solo da materiale magnetico, oppure anche da strati d'aria o di altro materiale poco magnetico.

In un circuito magnetico lo spostamento si fa contro reazioni che ad esso si oppongono; per produrlo occorrono forze esterne le quali sono della stessa natura delle forze magnetiche, e si possono chiamare *forze magnetomotrici;* precisamente come per produrre uno spostamento elettrico nel dielettrico occorrono forze elettromotrici.

82. – Linea di induzione e linee di forza. — Abbiamo visto che attraverso alla superficie dei magneti la forza magnetica $\mathcal{H}$ varia in modo discontinuo, mentre l'induzione $\mathcal{B}$ ha distribuzione continua e solenoidale in tutto il campo.

Un esempio chiarirà bene la cosa.

Si abbia un magnete $A\,B\,C\,D$ (fig. 81) cilindrico magnetizzato in modo uniforme nella direzione $\mathfrak{J}$. Si sa che le masse di magnetismo libero si riducono a due distribuzioni uniformi di densità $\sigma = \mathfrak{J}$, sud sulla faccia $A\,B$, nord sulla faccia $C\,D$.

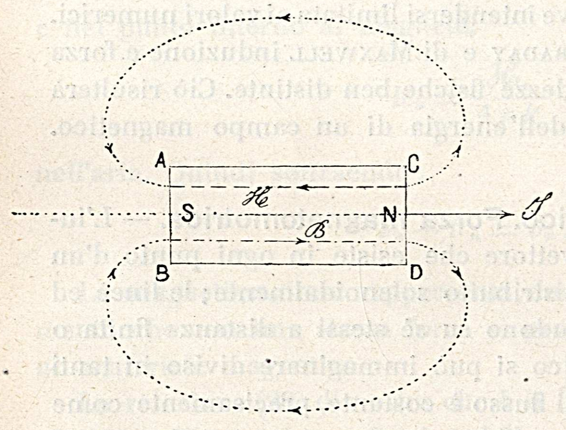

Fig. 81.

Consideriamo le linee di forza. La massa magnetica $+$ *uno*, posta in un punto qualunque esterno al magnete, vicinissima alla faccia *Nord* $C\,D$, viene respinta; posta invece vicinissima alla faccia *Sud* $A\,B$, viene attratta; dunque le linee di forza partono da $C\,D$, si ripiegano e vengono a finire sulla faccia $A\,B$. In corrispondenza delle basi del magnete, nei punti non infinitamente vicini al contorno, il numero delle linee di forza per unità di superficie, cioè il valore della forza, è $2\,\pi\,\mathfrak{J}$. Per tracciare le linee di forza interne al magnete, occorre immaginare che le due distribuzioni di magnetismo sussistano anche quando lo spazio $A\,B\,C\,D$ sia occupato da aria e non da materia magnetica. Una massa nord posta fra $A\,B$ e $C\,D$ è respinta dal magnetismo nord di $C\,D$, attratta dal magnetismo sud di $A\,B$; quindi anche all'interno del magnete le linee di forza vanno da $C\,D$ ad $A\,B$. In corrispondenza delle basi, in punti non vicini al contorno, la forza ha all'interno lo stesso valore che all'esterno ma ha direzione opposta. Se consideriamo le forze come positive quando hanno la direzione di $\mathfrak{J}$, possiamo dire che attraverso alla superficie del magnete la forza varia da $2\,\pi\,\mathfrak{J}$ a $-\,2\,\pi\,\mathfrak{J}$, varia cioè di $4\,\pi\,\mathfrak{J}$.

Le linee d'induzione invece sono linee chiuse che non presentano discontinuità attraverso alle due basi. E di fatti, considerando ad esempio la faccia $A\,B$, ove il numero delle linee di forza per unità di superficie diminuisce repentinamente di $4\pi\mathfrak{J}$, l'induzione, che all'esterno è uguale alla forza, diventa d'un tratto, all'interno, uguale alla forza $+4\pi\mathfrak{J}$ e quindi il numero delle linee di induzione diventa uguale a quello delle linee di forza $+4\pi\mathfrak{J}$, si conserva cioè uguale a quello che è all'esterno; l'induzione ha dunque all'interno lo stesso valore e la stessa direzione che all'esterno.

Se invece di considerare il magnete uniforme isolato, lo si considera nel campo generato da altri magneti o da correnti elettriche, la forza può avere all'interno ed all'esterno del magnete la stessa direzione, ma in ogni caso attraverso alla superficie AB, CD subisce una variazione brusca $4\pi\mathfrak{J}$; invece l'induzione non subisce alcuna variazione.

83. — Suscettività e permeabilità magnetica. Corpi diamagnetici e paramagnetici. — Abbiamo ricordato già come tutti i corpi possano dare luogo a fenomeni magnetici. Ogni corpo posto in un campo magnetico si polarizza; in ogni suo punto esistono i diversi vettori $\mathcal{H}$, $\mathfrak{J}$, $\mathcal{B}$ che siamo venuti considerando nel nostro studio. Importa vedere se fra questi vettori passino relazioni tali che, dato il valore di uno di essi, si possa per ogni corpo trovare il valore degli altri.

Nell'aria le relazioni cercate sono, come abbiamo veduto: $\mathfrak{J}=0$, $\mathcal{H}=\mathcal{B}$: Nei corpi magnetici vedremo che $\mathcal{B}$ ed $\mathfrak{J}$ non sono semplici funzioni di $\mathcal{H}$; ad uno stesso valore di $\mathcal{H}$ possono corrispondere infiniti valori di $\mathcal{B}$ e di $\mathfrak{J}$, secondo la serie dei valori per cui si fa passare $\mathcal{H}$. Di questi corpi, per i quali il fenomeno è più complicato, ci occuperemo in seguito. Nei corpi poco magnetici si può ritenere che $\mathcal{B}$ ed $\mathfrak{J}$ variino proporzionalmente ad $\mathcal{H}$. Lo stesso si può dire dei corpi magnetici, quando però si considerino variazioni molto piccole di $\mathcal{H}$.

In tali casi si potranno scrivere le relazioni:

$$\mathcal{B}=\mu\mathcal{H}, \qquad \mu=\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{H}}; \tag{21}$$

$$\mathfrak{J}=\kappa\mathcal{H}, \qquad \kappa=\frac{\mathfrak{J}}{\mathcal{H}}. \tag{22}$$

Lord Kelvin diede a μ il nome di *permeabilità magnetica*, ed a κ il nome di *suscettività magnetica*. Per i corpi poco magnetici μ e κ sono due costanti specifiche; per il ferro invece e per i suoi derivati, per il nikel, per il cobalto e per il cromo, si possono ancora applicare le (21) e (22), quando si considerino piccole variazioni di $\mathcal{H}$ e si trattino μ e κ come variabili, funzioni di $\mathcal{H}$; che se poi le variazioni di $\mathcal{H}$ sono grandi, le formule in parola non esprimono più le leggi del fenomeno, perchè μ e κ non si possono più ritenere funzioni di $\mathcal{H}$.

Consideriamo il caso in cui le formule [21] e [22] sono applicabili, e supponiamo che il corpo sia magnetizzato solo per influenza della forza $\mathcal{H}$; supponiamo cioè che si porti nel campo un corpo isotropo, omogeneo, che non sia stato magnetizzato in precedenza. Esiste allora una notevole relazione fra μ e κ; difatti in queste circostanze i tre vettori $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{J}$, $\mathcal{H}$, hanno la stessa direzione; e perciò:

$$\mathfrak{B} = \mathcal{H} + 4\pi\mathfrak{J}, \tag{23}$$

da cui:

$$\mu = 1 + 4\pi\kappa. \tag{24}$$

In questo caso μ e κ non sono fra loro indipendenti; per conoscere le proprietà magnetiche dei varii corpi basterà conoscere una di esse; secondo i diversi casi converrà considerare l'una piuttosto che l'altra.

La permeabilità magnetica μ ha un valore positivo per tutti i corpi; grandissimo per i materiali magnetici, vicino all'unità invece per i corpi poco magnetici; e precisamente alquanto maggiore di uno per alcuni corpi, alquanto minore per altri.

Nei corpi per i quali $\mu > 1$ si ha $\kappa > 0$, ed $\mathfrak{J}$ ha la stessa direzione di $\mathcal{H}$. Invece nei corpi per i quali $\mu < 1$ si ha $\kappa < 0$, e allora $\mathfrak{J}$ ha direzione opposta ad $\mathcal{H}$. I primi corpi si dicono *magnetici* o *paramagnetici*: gli altri si dicono *diamagnetici*.

I corpi paramagnetici ed i diamagnetici sottoposti all'influenza di forze magnetiche, si comportano diversamente.

Un corpo magnetico $A\,B$ (fig. 42), posto in un campo d'intensità $\mathcal{H}$, assume una magnetizzazione $\mathfrak{I}$ nella direzione di $\mathcal{H}$; presenta cioè un polo sud in B, un polo nord in A; per cui esso è soggetto ad una coppia che tende a disporlo col suo asse $S\,N$ nella direzione di $\mathcal{H}$. Se invece (fig. 83) nel campo si porta un corpo diamagnetico $C\,D$, poichè la $\mathfrak{I}$ ha direzione opposta alla $\mathcal{H}$, si forma un polo nord in D, un polo sud in C,

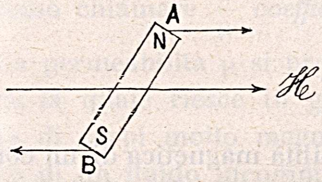

Fig. 82.

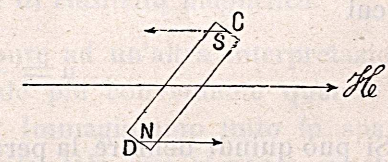

Fig. 83.

sui quali il campo esercita una coppia che tende a disporre il corpo col suo asse $C\,D$ in direzione normale ad $\mathcal{H}$, un corpo diamagnetico è in posizione di equilibrio stabile quando ha direzione trasversale al campo. Il corpo più diamagnetico è il bismuto.

Le proprietà dei corpi diamagnetici e quelle dei corpi paramagnetici si possono spiegare quando si consideri anche la polarizzazione del mezzo in cui essi sono posti. Nel mezzo (aria) si ha $\mu = 1$ e perciò $\mathcal{B} = \mathcal{H}$; nel corpo invece per uno stesso valore dell'induzione e quindi dello spostamento, si hanno valori diversi di $\mathcal{H}$ secondochè $\mu > 1$ ovvero $\mu < 1$. Nel primo caso la forza $\mathcal{H}$ è maggiore nel mezzo che non nel corpo; l'inverso succede nel secondo caso. Ciò che noi constatiamo sperimentalmente è la differenza delle due forze nel corpo e nel mezzo, differenza che nei due casi ha segni contrari, e produce quindi masse magnetiche e intensità di magnetizzazione opposte; precisamente come nel campo della gravità, un corpo immerso in un fluido può essere sollecitato verso il basso o verso l'alto, secondo che esso sia più o meno denso del fluido.

La permeabilità magnetica può essere definita anche altrimenti. Sia $S\,S$ (fig. 84) la superficie di separazione fra un corpo magnetico di permeabilità μ e l'aria; siano due punti P' e P infinitamente vicini fra di loro, l'un nell'aria, l'altro nel corpo.

Fra le componenti normali $\mathcal{H}'_n$, $\mathcal{H}_n$ della forza magnetica in P' e P e la componente normale $\mathfrak{J}_n$ della magnetizzazione passa la relazione (17')

$$\mathcal{H}'_n = \mathcal{H}_n + 4\pi\mathfrak{J}_n$$

ossia

$$\mathcal{H}'_n = \mathcal{H}_n(1 + 4\pi\kappa) = \mu\mathcal{H}_n$$

da cui

$$\mu = \frac{\mathcal{H}'_n}{\mathcal{H}_n}.$$

Si può quindi definire la permeabilità magnetica di un corpo come il rapporto fra i valori della forza magnetica in due punti vicinissimi alla superficie, l'uno all'esterno, l'altro all'interno del corpo. Se $\mu > 1$ la forza ha valore minore all'interno che non all'esterno, e la differenza può essere molto forte per i corpi nei quali è grande μ.

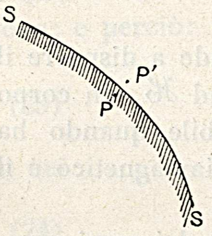

Fig. 84.

Abbiamo ricordato ciò per notare una confusione che spesso si fa in qualche libro tecnico nel definire la permeabilità magnetica. Si dice: « Se in un campo magnetico d'intensità $\mathcal{H}$ si pone in direzione del campo una sbarra della sostanza da sperimentare, il numero di linee di forza che prima era $\mathcal{H}$ diviene $\mathcal{B}$; il rapporto $\mathcal{B} : \mathcal{H}$ dicesi permeabilità ». Secondo tale definizione parrebbe che per $\mu > 1$ sia maggiore il numero di linee di forza all'interno che non all'esterno, mentre invece succede appunto il contrario. Si potrebbe accettare questa definizione quando si considerasse la definizione elettromagnetica della forza, ma allora questa forza all'interno dei magneti non si potrebbe trattare come una forza newtoniana.

La permeabilità magnetica ha un significato fisico notevole. Dalle relazioni (20), (21) si ricava:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathcal{H}}{b}, \qquad \mu = 4\pi\frac{b}{\mathcal{H}}.$$

La permeabilità è proporzionale allo spostamento che si può produrre con una data forza. Se paragoniamo i fenomeni magnetici ai fenomeni di elasticità, potremo chiamare la μ *coefficiente di cedevolezza magnetica*, precisamente come abbiamo chiamata la costante dielettrica ε coefficiente di cedevolezza elettrica, il reciproco $\frac{1}{\mu}$ della permeabilità dà invece la misura della forza necessaria per produrre un dato spostamento; noi potremo chiamare $\frac{1}{\mu}$ *coefficiente di elasticità magnetica.*

La permeabilità μ si presta pure ad un'altra interpretazione fisica, la quale riesce in generale più conveniente quando si tratta di corpi molto magnetici. Immaginiamo tutto lo spazio pieno di un fluido incomprensibile, tale che si possa spostare vincendo forze dovute a vincoli, le quali siano inversamente proporzionali alla grandezza μ, oppure tale che sotto l'azione di date forze subisca spostamenti proporzionali a μ. Se in ogni punto supponiamo applicata una forza uguale alla forza magnetica $\mathcal{H}$, il fluido subisce uno spostamento proporzionale a b, che è diverso da punto a punto secondo la diversa permeabilità. Vediamo così che μ ci rappresenta il coefficiente di permeabilità del mezzo al movimento del fluido; ed è appunto tale paragone che suggerì a Lord Kelvin il nome di permeabilità dato alla μ.

Il concetto di spostamento non è se non una finzione della nostra mente, un modo di presentare i fatti tanto legittimo quanto quello delle azioni a distanza; ma, essendo esso basato su una definizione matematica, tutte le deduzioni che ne possiamo trarre sono rigorose, finchè almeno noi non usciamo dalle questioni relative alla distribuzione dei vettori $\mathcal{H}$ e $\mathcal{B}$.

Servendoci del concetto di spostamento e dell'interpretazione fisica della permeabilità magnetica, possiamo prevedere l'andamento delle linee di induzione per date distribuzioni della forza e della permeabilità.

Consideriamo alcuni esempi.

Si abbia nell'aria o in altro mezzo non magnetico un campo uniforme; le linee di forza sono rette parallele, uniformemente

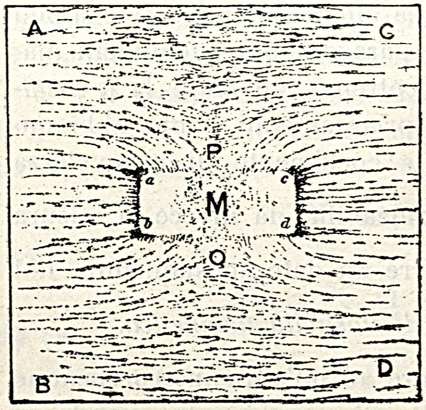

Fig. 85.

distribuite; le superfici di livello sono piani paralleli, equidistanti e normali alle linee di forza. In tale campo si porti un pezzo M (fig. 85) di grande permeabilità, ad esempio un pezzo di ferro. Per questo fatto viene alterata la distribuzione delle linee di forza e delle linee di induzione.

E di fatti mentre dapprima era la stessa in ogni punto la cedevolezza, o, se vogliamo, la permeabilità, e quindi anche lo spostamento, ora invece entro al volume M si è aumentata la permeabilità, e devono quindi necessariamente crescere i valori dello spostamento e dell'induzione. Al di là di due piani $A B$, $C D$ di livello, a conveniente distanza, il campo si può ritenere inalterato; ma a partire da $A B$, a causa della solenoidalità, le linee di induzione non sono più rette, ma vengono convergendo verso la superficie $a b$ di M, ed escono dalla superficie $c d$ divergenti verso il piano $C D$. L'intensità del campo sarà perciò assai maggiore in vicinanza delle faccie $a b$, $c d$; e invece assai minore nelle regioni $P Q$.

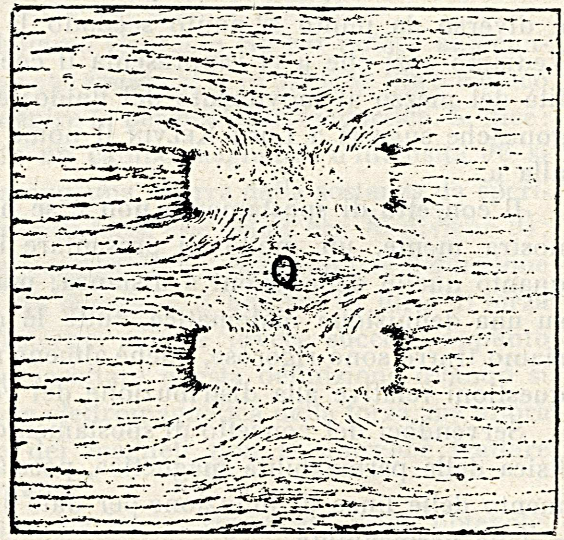

Fig. 86.

Le cose si passano come se in una corrente d'acqua circolante in un mezzo ugualmente poroso si venisse a sostituire ad una porzione M di esso un corpo più permeabile; l'acqua che prima passava ugualmente in tutto lo spazio, viene a passare in maggior copia per M.

Se invece di una sola sbarra di ferro, nel campo uniforme se ne dispongono due parallele fra di loro ed alla direzione del campo, si trova, con ragionamento analogo, che le linee di induzione prendono l'andamento indicato nella fig. 86. Ne risulta che nello spazio Q fra le due sbarre è minima l'intensità del campo.

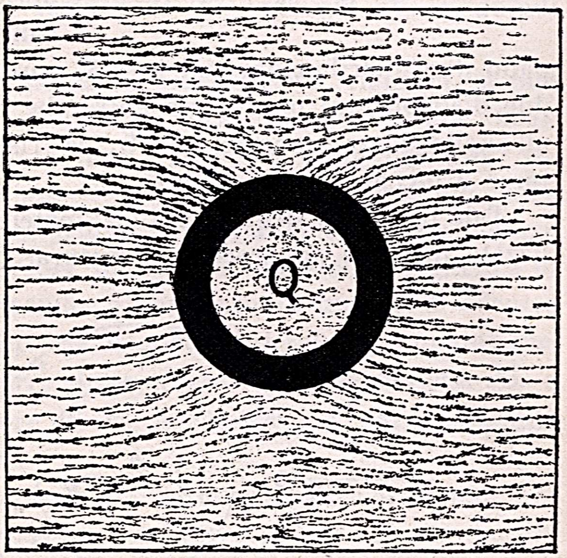

Fig. 87.

Se lo scopo che ci proponiamo è quello di rendere minima l' intensità del campo nello spazio Q, potremo anche meglio raggiungerlo dando alle due sbarre forma incurvata; anzi l'effetto è tanto maggiore quanto più le sbarre sono vicine. L'effetto è massimo quando le due sbarre costituiscono un unico cerchio (figura 87). Le linee d'induzione percorrono le due metà dell'anello, evitando lo spazio Q interno. Un anello di ferro costituisce quindi uno *schermo magnetico*.

L'esperienza conferma queste nostre deduzioni, come risulta dall'esame delle figure 85, 86, 87, che riproducono gli spettri magnetici corrispondenti ai casi considerati.

Alle stesse conseguenze si può giungere considerando le masse magnetiche che sul pezzo di ferro si sviluppano per il solo fatto di averlo posto in un campo magnetico. Così, nel primo caso considerato (fig. 88), si ha una distribuzione di magnetismo sud in ab, nord in cd. La forza in ogni punto è la risultante della forza $\mathcal{H}$ e delle forze dovute alle masse magnetiche libere.

Sulla massa *uno*, posta in un punto P, si esercitano la forza $\mathcal{H}$ dovuta al campo, la f_1 dovuta alla distribuzione sud su $a\,b$, e la f_2 dovuta alla distribuzione nord su $c\,d$, le quali dànno una risultante R diretta verso $a\,b$.

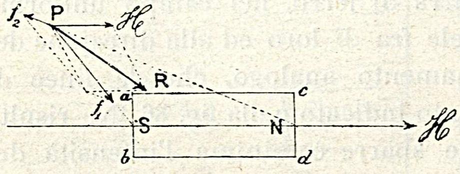

Fig. 88.

Se analogamente consideriamo l'anello posto in un campo uniforme, si sviluppano due distribuzioni sud in $S\,S$, nord in $N\,N$ (fig. 89). Queste due distribuzioni producono entrambe in un punto O interno all'anello forze opposte ad $\mathcal{H}$; la risultante R di queste tre forze è piccolissima o nulla.

Tale proprietà degli anelli di materia magnetica viene utilizzata in molti apparecchi di misura.

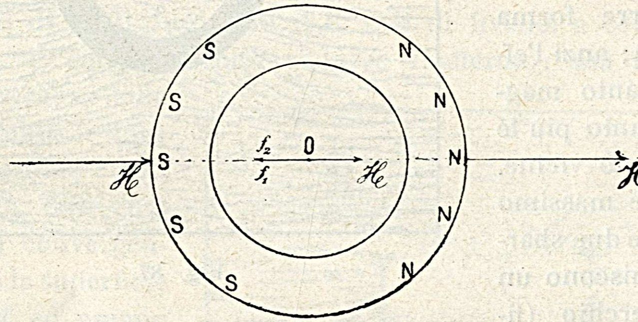

Fig. 89.

Noi ci siamo limitati a semplici considerazioni qualitative, ma partendo sia dal concetto della permeabilità, sia da quello delle masse magnetiche indotte, potremmo sottoporre a calcoli i varii casi.

84. – Proprietà magnetiche dei materiali magnetici. – Le relazioni che abbiamo dianzi trovate valgono solo quando si considerano corpi nei quali la permeabilità magnetica è molto prossima all'unità; non valgono più, se non per variazioni molto piccole, per i materiali fortemente magnetici. Per questi corpi la induzione e la magnetizzazione non sono più proporzionali alla forza magnetica, anzi non sono neppure funzioni di $\mathcal{H}$, perchè ad uno stesso valore di $\mathcal{H}$ possono corrispondere infiniti valori di $\mathcal{B}$ o di $\mathcal{J}$, secondo i precedenti valori per cui è passata la forza magnetica.

Qui ci proponiamo appunto di studiare le proprietà magnetiche del ferro e de' suoi derivati, cioè di studiare il modo col quale in tali corpi col variare di $\mathcal{H}$ varia la $\mathcal{B}$, e quindi anche la $\mathcal{J}$.

Vedremo come, per mezzo di una corrente elettrica, si può produrre in un dato spazio una forza magnetica, che facilmente si calcola quando è nota l'intensità della corrente; vedremo pure come, mediante le azioni elettriche prodotte dalle variazioni del flusso di induzione in un dato circuito magnetico, si può determinare il valore medio dell'induzione magnetica in una data sezione del circuito; avremo quindi quanto ci occorre per poter studiare le proprietà magnetiche di un corpo qualunque, potendo in esso produrre determinate forze magnetiche $\mathcal{H}$, e sapendo per ogni valore di $\mathcal{H}$ determinare il corrispondente valore dell'induzione $\mathcal{B}$.

A noi però non interessa qui descrivere i varii metodi coi quali tali esperienze si possono stabilire; ci basta averne accennata la possibilità, e senz'altro ricordiamo i risultati a cui il Prof. Ewing ed il Dott. Hopkinson arrivarono nelle loro classiche esperienze, e le conseguenze che ne dedussero.

Ferro dolce. Sperimentiamo dapprima su una sbarra di ferro dolce, quanto più è possibile privo di impurità, battuto o trafilato e ricotto. La relazione fra $\mathcal{B}$ ed $\mathcal{H}$ in tale sbarra non è, come si è già detto, esprimibile con una funzione algebrica, e converrà rappresentarla geometricamente per mezzo di una curva riferita a due assi ortogonali, sull'uno dei quali si portino i valori di $\mathcal{H}$, sull'altro i corrispondenti valori di $\mathcal{B}$. In pratica si suole riferire i valori di $\mathcal{H}$ ad una lunghezza unità mille volte maggiore di quella cui si riferiscono i valori di $\mathcal{B}$. Supponiamo che prima di cominciare l'esperienza, la sbarra sia stata privata di ogni traccia di preesistente polarizzazione magnetica, siasi cioè ridotto il corpo allo stato naturale pel quale sono nulle la $\mathcal{H}$ e la $\mathcal{B}$; nella nostra rappresentazione grafica (fig. 90) l'origine O delle coordinate è un punto della curva.

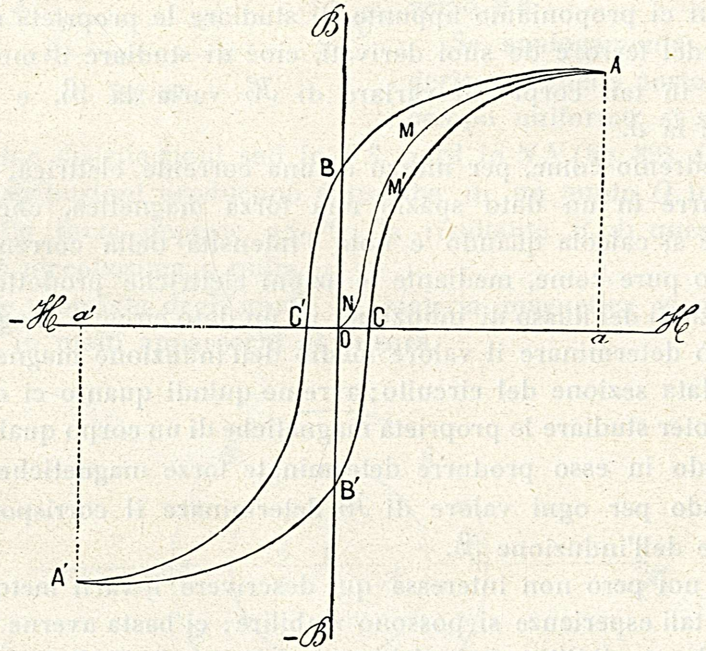

Fig. 90.

Diamo ad $\mathcal{H}$ valori gradatamente crescenti a partire da zero; la induzione $\mathcal{B}$ cresce pur essa dapprima lentamente, poi più rapidamente mantenendosi per un certo tratto quasi proporzionale ad $\mathcal{H}$, poi cresce assai meno rapidamente e tende ad essere ancora proporzionale ad $\mathcal{H}$. La curva che ci rappresenta tali variazioni parte dunque da O sensibilmente tangente all'asse $\mathcal{H}$ delle ascisse, poi si viene ripiegando, presentando la convessità verso l'asse delle ascisse. Al di là del punto N di curvatura massima la curva si avvicina sensibilmente ad una retta, in corrispondenza della quale presenta un punto di flesso, per incurvarsi poi in senso opposto e presentare le concavità verso l'asse delle ascisse. In corrispondenza del punto M presenta un punto di massima curvatura, che viene detto il *ginocchio*. Al di là diminuisce la curvatura, e la linea presenta di nuovo un andamento sensibilmente rettilineo, tendendo essa ad un assintoto, che se si prendessero scale uguali per la $\mathcal{B}$ e per la $\mathcal{B}$, avrebbe pendenza uguale ad *uno*, essendo per valori grandissimi $\mathcal{H}$ e $\mathcal{B}$ uguali.

Calcolando la permeabilità magnetica, che qui non è più una costante ma un rapporto variabile fra $\mathcal{B}$ ed $\mathcal{H}$, possiamo dire che la permeabilità μ parte dal valore $\mu = 1$ all'origine, va man mano crescendo più o meno lentamente sino ad un punto M' vicino al ginocchio M, nel quale punto la curva è toccata dalla tangente condotta per l'origine, poi va diminuendo e tende di nuovo a $\mu = 1$ per $\mathcal{H}$ e $\mathcal{B}$ grandissimi. Correlativamente la suscettività magnetica κ parte dal valore *zero* nell'origine va crescendo sino al punto M', per poi diminuire e tendere di nuovo a *zero*.

Questo è l'andamento del fenomeno, che nelle sue linee generali si verifica per tutte le qualità di ferro dolce. Se si considerano però i valori numerici, essi sono notevolmente diversi secondo le qualità e la purezza del ferro. Per ferro molto dolce, ricotto e di grande purezza si possono ritenere questi numeri medii:

Il primo punto N di massima curvatura corrisponde ad una ascissa $\mathcal{H} = 1$; il ginocchio M ad un'ascissa $\mathcal{H} = 5$, cui corrisponde un'ordinata $\mathcal{B} = 10\,000$; per $\mathcal{H} = 11$ si ha $\mathcal{B} = 12\,500$, per $\mathcal{H} = 17$ si ha $\mathcal{B} = 13\,500$; il massimo valore di μ può variare fra 2 000 e 3 000, cui corrisponde un valore di κ fra 150 e 250.

Sin qui abbiamo fatto crescere gradatamente la $\mathcal{H}$. Raggiunto un valore $O\,a$ di $\mathcal{H}$, cui corrisponde un valore $a\,A$ di $\mathcal{B}$ diamo ad $\mathcal{H}$ valori gradatamente decrescenti; anche $\mathcal{B}$ va diminuendo, ma osserviamo subito un fatto assai notevole: per uno stesso valore di $\mathcal{H}$, la $\mathcal{B}$ non riprende il valore che aveva quando si faceva crescere $\mathcal{H}$, ma conserva un valore superiore; perciò il nuovo ramo di curva non coincide col ramo $O\,M\,A$ prima tracciato, ma sta al disopra di esso; parte da A con tangente sensibilmente parallela all'asse delle ascisse, e scende assai lentamente per modo che quando $\mathcal{H}$ è ritornato a *zero*, $\mathcal{B}$ conserva ancora un valore molto grande $O B$, che in generale per il ferro dolce, è circa i $\frac{2}{3}$ del valore massimo $a A$.

Se ora si dànno ad $\mathcal{H}$ valori negativi crescenti, i valori di $\mathcal{B}$ vanno diminuendo rapidamente, finchè $\mathcal{B}$ si annulla per un valore $O C'$ di $\mathcal{H}$; si ha quindi una curva che scende rapidamente, per l'ultimo tratto ha andamento quasi rettilineo e taglia la porzione negativa dell'asse delle ascisse in un punto C'. Per il ferro dolce, se il valore massimo $a A$ di $\mathcal{B}$ era di 12 000 a 15 000, il valore di $O B$ è di 8 000 a 9 000, ed il valore di $O C'$ è di circa 2.

Se si seguita a far crescere $\mathcal{H}$ negativamente, anche $\mathcal{B}$ diviene negativo, e cresce prima rapidamente, poi man mano più lentamente; la curva presenta un tratto sensibilmente rettilineo presso a C', poi si incurva presentando la concavità verso l'asse negativo delle ascisse e tende assintoticamente ad una retta che sarebbe indicata a 45° cogli assi, se le scale di $\mathcal{H}$ e di $\mathcal{B}$ si prendessero uguali nel disegno. Per un valore $O a' = - O a$ di $\mathcal{H}$, la $\mathcal{B}$ prende il valore $a' A' = - a A$, cioè il punto A' simmetrico ad A rispetto all'origine è un punto della curva. Se, giunti in A', si fanno subire ad $\mathcal{H}$ le stesse variazioni in senso opposto, facendolo cioè passare gradatamente dal valore $O a'$ a *zero*, e poi al valore Oa, si ottiene un secondo ramo di curva che è con moltissima approssimazione simmetrico al ramo già tracciato rispetto all'origine. Si ha cioè una curva che parte da A' con tangente quasi parallela all'asse delle ascisse, sale lentamente per un gran tratto, sino a tagliare l'asse delle ordinate in un punto B' di ordinata $O B' = - O B$, poi sale rapidamente, per $\mathcal{H} = O C = - O C'$ taglia l'asse delle ascisse, e infine collo stesso andamento della curva $C' A'$ viene a finire con grandissima approssimazione nel punto A.

Acciaio. Eseguendo le stesse esperienze per l'acciaio si ricava una curva la quale ha lo stesso andamento, ma è più allungata nel senso dell'asse delle ascisse, perchè l'ordinata $\mathcal{B}$ cresce assai meno rapidamente col crescere di $\mathcal{H}$.

Così per acciaio molto temperato, qual è quello delle corde da pianoforte, il primo ramo OMA della curva (fig. 91), presenta un ginocchio M per un valore di $\mathcal{H}$ di circa 50, cui corrisponde un valore di $\mathcal{B}$ di 7 000 ad 8 000, e perchè $\mathcal{B}$ raggiunga il valore di 12 000 è necessario che $\mathcal{H}$ raggiunga il valore di 100. Il ramo discendente $ABC'A'$ è ancora tutto superiore; tutto inferiore è il ramo ascendente $A'B'CA$: i due rami si possono ritenere ancora simmetrici rispetto all'origine;

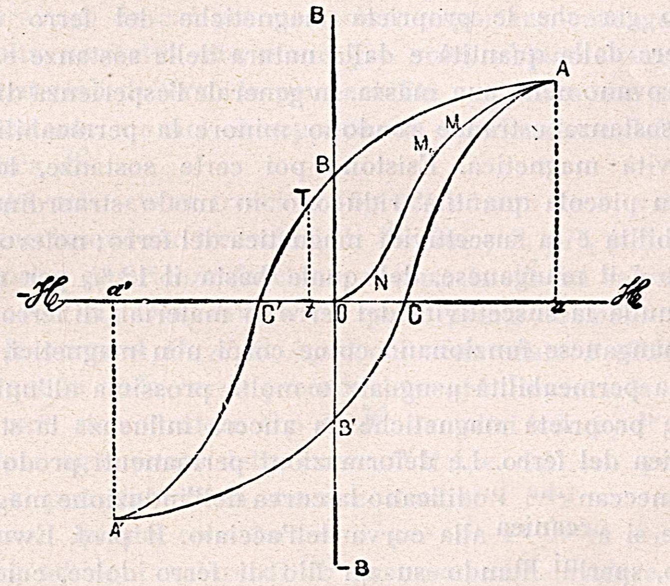

Fig. 91.

generalmente però il secondo ramo non viene a terminare esattamente in A; le tangenti in A al primo ramo, ed in A' al secondo sono ancora sensibilmente parallele all'asse delle ascisse. Come numeri medii per l'acciaio ben temperato si può ritenere che sia

$$OB = -OB' = \text{da } 6000 \text{ a } 7000;$$
$$OC = -OC' = 40.$$

Il valore massimo della permeabilità nelle vicinanze del ginocchio è di circa 150, il corrispondente valore massimo della suscettività è di circa 12.

Secondo la composizione e lo stato fisico dell'acciaio variano i valori delle ordinate della curva.

La ghisa, le cui proprietà generali sono intermedie fra quelle dell'acciaio e quelle del ferro dolce, ha pure proprietà magnetiche intermedie.

85. – **Influenza della composizione chimica e delle condizioni fisiche.** — Le differenze che abbiamo notato nel comportamento magnetico del ferro, della ghisa e dell'acciaio ci provano già che le proprietà magnetiche del ferro devono dipendere dalla quantità e dalla natura delle sostanze estranee che si trovano nella sua massa. In generale l'esperienza dimostra che le sostanze estranee rendono minore la permeabilità e la suscettività magnetica. Esistono poi certe sostanze, le quali anche in piccola quantità riducono in modo straordinario la permeabilità e la suscettività magnetica del ferro; notevolissima fra tutte è il manganese, del quale basta il 12 $^0/_0$ per rendere affatto nulla la suscettività del ferro; i materiali di ferro contenenti manganese funzionano come corpi non magnetici, hanno cioè una permeabilità μ uguale o molto prossima all'unità.

Sulle proprietà magnetiche ha ancora influenza la struttura meccanica del ferro. Le deformazioni permanenti prodotte con azioni meccaniche modificano la curva dell'induzione magnetica, la quale si avvicina alla curva dell'acciaio. Il prof. Ewing, per esempio, sperimentando su un filo di ferro dolce, cui aveva fatto subire un allungamento permanente, trovò che per questo solo fatto erano diminuiti i valori di $\mathcal{B}$ per gli stessi valori di $\mathcal{H}$.

Un'altra proprietà degna di nota è che le vibrazioni producono un avvicinamento dei due rami $A\,C'\,A'$, $A'\,C\,A$ della curva. Tale fatto ha praticamente grande importanza, perchè quasi tutti gli apparecchi industriali, avendo porzioni mobili, sono necessariamente soggetti a scosse e vibrazioni.

La temperatura, sino a limiti abbastanza elevati, non ha influenza sensibile sulle proprietà magnetiche del ferro, ma oltre a detti limiti la sua influenza diviene grandissima. Se si pone una sbarra di ferro dolce in un campo magnetico di intensità $\mathcal{H}$, e si fa variare la temperatura della sbarra, se per ogni valore della temperatura si determina il valore della magnetizzazione nel ferro, si trova che tale valore è sensibilmente costante sino ad una temperatura di circa 680°, poi diminuisce rapidamente, e si annulla per una temperatura di circa 750°.

86. – **Cicli magnetici. Istèresi.** — Le curve che abbiamo tracciate ci rappresentano il comportamento magnetico dei varii materiali: conviene che ci fermiamo a fare su di esse alcune considerazioni da cui potremo trarre importanti conseguenze.

Risulta anzitutto che, come più volte abbiamo accennato, per i materiali di ferro la permeabilità magnetica non solo non è una costante, ma non è neppure una data funzione della forza magnetica $\mathcal{H}$.

Difatti nella curva tracciata (fig. 92) ad uno stesso valore $o\,p$ di $\mathcal{H}$ corrispondono tre valori di $\mathcal{B}$ cioè pP, pP', pP''. Ora se nella nostra esperienza facciamo variare la $\mathcal{H}$ fra valori uguali ed opposti $O\,a_1$, $O\,a'_1$ diversi da quelli prima considerati, otteniamo la curva $A_1\,C'_1\,A'_1\,C_1\,A_1$, il cui andamento è affatto analogo a quello della curva precedentemente tracciata, la quale ci dà per uno stesso valore $O\,p$ di $\mathcal{H}$, due altri valori $p\,P'_1$ e $p\,P''_1$ di $\mathcal{B}$: per ogni punto della curva $O\,M\,A$ e del suo prolungamento, si può ripetere la stessa costruzione.

Bastano queste considerazioni per autorizzarci a conchiudere che ad ogni valore di $\mathcal{H}$ possono corrispondere infiniti valori di $\mathcal{B}$ compresi fra certi limiti. Perciò, a definire il valore di $\mathcal{B}$, non basta dare il valore di $\mathcal{H}$, ma è ancora necessario dare tutta la serie di valori, per cui $\mathcal{H}$ è precedentemente passato.

L'esperimento si può modificare in infiniti modi. Si consideri il punto P, in cui si ha $\mathcal{H} = O\,p$, $\mathcal{B} = p\,P$, e si faccia diminuire $\mathcal{H}$ sino a *zero*, e poi lo si faccia di nuovo crescere sino al valore $O\,p$. L'estremità dell'ordinata che rappresenta il valore di $\mathcal{B}$ descrive un contorno chiuso formato da un tratto discendente, e da un tratto ascendente tutto sottoposto a quello: le tangenti nelle origini dei due rami sono sensibilmente parallelle all'asse delle ascisse.

In generale possiamo dire che ogniqualvolta si fa variare $\mathcal{H}$ con una legge qualunque, in modo che ritorni al valore primitivo, anche $\mathcal{B}$ riprende lo stesso valore. L'estremità dell'ordinata che rappresenta i valori di $\mathcal{B}$ in funzione di $\mathcal{H}$ percorre una linea chiusa, cui si dà il nome di *ciclo magnetico*. Si dice che al materiale si fa percorrere un ciclo magnetico quando in esso si producono queste variazioni di $\mathcal{H}$ e di $\mathcal{B}$.

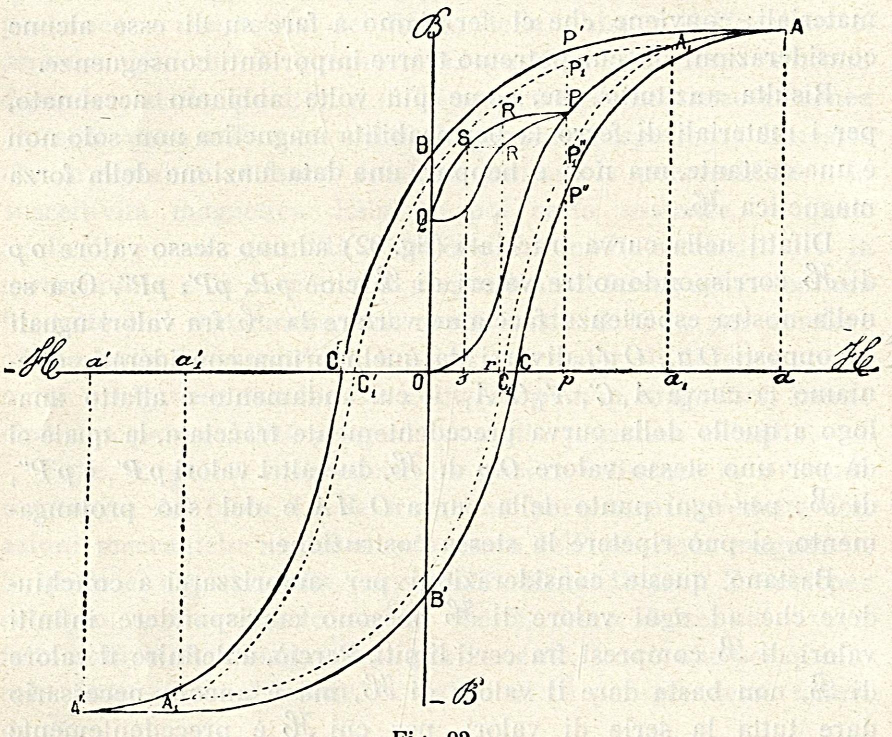

Fig. 92.

In un ciclo magnetico, qualunque ne sia la forma, si hanno sempre da considerare due rami, l'ascendente percorso per valori crescenti di $\mathcal{H}$, ed il discendente per valori decrescenti di $\mathcal{H}$; nei loro punti di partenza i due rami hanno sempre tangenti sensibilmente parallele all'asse delle ascisse, di più il ramo discendente è sempre superiore. Possiamo altrimenti esprimere ciò dicendo che, presa la direzione positiva delle $\mathcal{H}$ da sinistra a destra, e quella delle ordinate $\mathcal{B}$ verso l'alto, il ciclo deve essere sempre percorso nel verso opposto al movimento delle lancette d'un orologio.

Nel ciclo $P\,Q$ che abbiamo considerato ad uno stesso valore $o\,r$ di $\mathcal{H}$, corrispondono due valori di $\mathcal{B}$: il valore $r\,R$ nel ramo discendente è sempre maggiore di quello $r\,R$ nel ramo ascendente. Sul valore di $\mathcal{B}$ per un dato valore di $\mathcal{H}$ influisce il valore precedente; si può dire che $\mathcal{B}$ conserva ancora qualche cosa della sua precedente grandezza o piccolezza; in altri termini, $\mathcal{B}$ tarda ad ubbidire alle variazioni a cui noi vogliamo sottoporlo mediante le variazioni di $\mathcal{H}$.

Il fenomeno si può ancora considerare in questo modo. A partire da R per cui $\mathcal{H} = O\,r$, $\mathcal{B} = r\,R$ si faccia percorrere al corpo il ramo ascendente $R\,P$, e poi si segua il ramo discendente quando $\mathcal{H}$ ha ripreso lo stesso valore, $\mathcal{B}$ ha un valore $r\,R' > r\,R$; perchè $\mathcal{B}$ riprenda lo stesso valore è necessario che $\mathcal{H}$ prenda un valore $O\,s < O\,r$. Se consideriamo i moti delle proiezioni del punto mobile sugli assi, si vede come il moto della proiezione sull'asse delle ordinate viene in ritardo rispetto al moto della proiezione sull'asse delle ascisse, cioè le variazioni di $\mathcal{B}$ si seguono con un ritardo nella serie dei valori rispetto alle variazioni di $\mathcal{H}$.

Il prof. Ewing diede a questa proprietà dei materiali magnetici il nome di *istèresi*, che derivò dal vocabolo greco ὕστερος che significa *tardivo*.

L'esistenza dei cicli magnetici è una conseguenza dell'istèresi. Possiamo paragonare il fenomeno dell'istèresi a noti fenomeni mecanici.

Se si applica una forza crescente dal valore *zero* ad un corpo sul quale altri corpi esercitino attriti, esso si pone in movimento non subito, ma solo quando la forza ha raggiunto un certo valore; la serie dei valori degli spostamenti segue le variazioni della forza con ritardo. Questo basta a farci vedere come l'istèresi si possa immaginare dovuta ad un attrito interno che rende tardivo il moto di orientamento delle molecole, se a tale orientamento supponiamo dovuta la magnetizzazione.

Assai più completa è l'analogia tra i fenomeni magnetici ed i fenomeni elastici, quando si paragoni lo spostamento o la induzione magnetica alla deformazione elastica, e la forza magnetica alla forza deformatrice. I corpi, nei quali l'induzione magnetica è una funzione nota della forza magnetica, corrispondono ai corpi perfettamente elastici, per i quali ad un dato valore della forza deformatrice corrisponde un solo valore determinato della deformazione. I corpi magnetici invece, nei quali esiste l'istèresi, si comportano come corpi imperfettamente elastici, che presentano deformazioni residue. Se consideriamo, ad esempio, una verga di sostanza imperfettamente elastica, e ad essa applichiamo una forza crescente gradatamente dallo *zero*, che tenda ad allungarla, la verga non incomincia ad allungarsi se non quando la forza ha raggiunto un certo valore. Se raggiunto un dato allungamento, si fa gradatamente diminuire la forza, l'asta non si raccorcia che dopo qualche tempo; la deformazione conserva sempre valori superiori a quelli che per gli stessi valori della forza aveva durante l'allungamento. Vi ha dunque perfetta analogia con quanto accade nei fenomeni di istèresi.

87. – Ritentiva. Forza coercitiva. – Abbiamo notato che dopo aver fatto crescere $\mathcal{H}$ da *zero* ad un certo valore Oa, se riconduciamo a *zero* la $\mathcal{H}$, la $\mathfrak{B}$ non ritorna a *zero*, ma conserva un certo valore OB; si ha quindi una induzione magnetica residua, cui corrisponde una magnetizzazione residua, il cui valore si ricava facilmente dalla (23)

$$\mathfrak{B} = \mathcal{H} + 4\pi \mathfrak{J},$$

la quale per $\mathcal{H} = 0$ dà

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{B}}{4\pi}.$$

Per far scomparire la magnetizzazione residua non basta annullare la forza magnetica, ma è necessario invertirla e darle un certo valore OC' opposto.

Il dottore Hopkinson diede alla induzione residua OB il nome di *ritentiva;* alla forza OC' necessaria per annullare la induzione, il nome di *forza coercitiva.*

Un tempo alla proprietà nota del ferro e de' suoi derivati, in ispecial modo dell'acciaio, di conservare un magnetismo residuo al cessare della forza magnetizzante, si dava il nome di « ritentiva »; dicevasi poi « forza coercitiva » la causa di questo magnetismo residuo, e si prendeva lo stesso magnetismo residuo come misura della forza coercitiva; il che evidentemente non era esatto, perchè il magnetismo non è una forza. L'Hopkinson diede alle antiche denominazioni un significato ben definito ed appropriato; la forza coercitiva, quale viene da esso definita, è una vera forza magnetica.

Un tempo, per il fatto che al cessare della causa producente la magnetizzazione rimane in generale molto più potentemente magnetizzato l'acciaio che non il ferro, si diceva che nell'acciaio la ritentiva è molto maggiore che nel ferro.

Il fatto è vero in sè, ma è errata la spiegazione che se ne dava. Dalle curve dell'induzione magnetica per il ferro e per l'acciaio (fig. 90, 91) risulta che la ritentiva è maggiore nel ferro che nell'acciaio, mentre invece nel ferro la forza coercitiva è di molto inferiore.

Vediamo come si possa con tali proprietà spiegare il fatto, cui sopra accennammo, che in generale l'acciaio al cessare della causa magnetizzante si mantiene più potentemente magnetizzato che non il ferro.

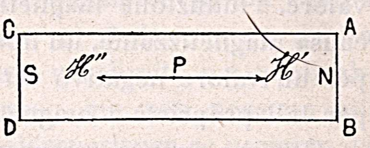

Fig. 93.

Immaginiamo (figura 93) una sbarra prismatica di ferro posta in un campo magnetico uniforme, la cui intensità $\mathcal{H}'$ si possa far variare a piacimento. Per effetto della forza $\mathcal{H}'$ si ha nella sbarra una certa magnetizzazione $\mathfrak{J}$, e si producono due distribuzioni di magnetismo libero, nord su $A\,B$, sud su $C\,D$. Su di un punto P interno al magnete agiscono due forze, quella $\mathcal{H}'$ dovuta al campo uniforme, e quella $\mathcal{H}''$ dovuta alle masse di magnetismo libero, la quale è opposta alla forza $\mathcal{H}'$ agisce cioè come una *forza demagnetizzante*. La forza $\mathcal{H}$ che agisce effettivamente sul punto P è la risultante delle due $\mathcal{H}'$ ed $\mathcal{H}''$; è tale forza $\mathcal{H}$ che noi dobbiamo considerare per stabilire le relazioni tra forza e induzione magnetica.

Un tempo si diceva che quando si annulla l'intensità $\mathcal{H}'$ del campo magnetico uniforme, si annulla con ciò la forza magnetica che agisce in P. Ora ciò non è vero; rimane infatti ancora una forza demagnetizzante, perchè, a causa della ritentiva, non si annullano completamente le masse magnetiche libere distribuite sulle faccie opposte della sbarra. Annullando dunque la prima causa della magnetizzazione, ad esempio, nel caso delle esperienze pratiche, annullando la corrente elettrica magnetizzatrice, non si annulla la forza magnetica, ma la si inverte. Per avere il valore dell'induzione e quindi della magnetizzazione corrispondente ad un tale stato del corpo, si dovrà nelle nostre curve cercare il valore di $\mathcal{B}$ che corrisponde non ad $\mathcal{H}$ nullo, ma al valore negativo di $\mathcal{H}$ dato dalla forza demagnetizzante.

Nel ferro, nel quale la forza coercitiva è piccola, può facilmente la forza demagnetizzante uguagliare la forza coercitiva, ed è perciò che in generale cessa completamente o quasi la magnetizzazione al cessare della causa che la produsse.

Nell'acciaio invece, in cui la forza coercitiva ha un grande valore, l'induzione magnetica conserva ancora, al cessare della causa magnetizzante, un notevole valore, ad esempio $t\,T$ (fig. 91), per un valore negativo $O\,t$ della forza magnetica. È noto che per tali proprietà i magneti permanenti si fanno di acciaio.

Occorre ancora osservare, a conferma delle cose dette, che, se nel ferro dolce usiamo una disposizione, la quale permetta di avere una piccola forza demagnetizzante anche con notevoli valori della magnetizzazione, usando ad esempio sbarre sottili e lunghissime, o, meglio ancora, sbarre piegate ad anello, si potrà nel ferro dolce constatare valori dell'induzione e della magnetizzazione maggiori che non nell'acciaio, al cessare della corrente elettrica magnetizzante, o, in generale, al cessare della causa cui la magnetizzazione era dovuta.

È a causa dell'istèresi che hanno dei valori la ritentiva e la forza coercitiva; è quindi a causa dell'istèresi che esistono magneti permanenti. Se l'istèresi non esistesse, non si potrebbero avere campi magnetici dovuti a condizioni statiche. I magneti permanenti, dai quali nel nostro studio siamo necessariamente partiti, devono dunque considerarsi come una eccezione.

§ 4°

ENERGIA DI UN CAMPO MAGNETICO

88. – **Lavoro fatto dalle forze magnetiche per una variazione dello spostamento.** — Nel nostro studio al concetto newtoniano di massa agente a distanza siamo venuti sostituendo il concetto maxwelliano di spostamento, meglio corrispondente al fatto che i fenomeni magnetici si verificano in tutto lo spazio. Matematicamente lo spostamento è ben determinato, perchè noi lo abbiamo definito per mezzo della relazione che lo lega alla induzione magnetica $\mathfrak{B}$; ma sotto il punto di vista fisico non sappiamo in che esso consista; lo abbiamo paragonato allo spostamento di un fluido incompressibile occupante tutto lo spazio, ma nulla ci autorizza ad asserire che un tale spostamento avvenga realmente in un campo magnetico. Perciò le conseguenze che si deducono da questa teoria, sono legittime finchè restiamo nei limiti nei quali abbiamo definito lo spostamento stesso; ma non possono più essere accettate senza il controllo dell'esperienza se usciamo da tali limiti.

Così, ad esempio, poichè nella definizione di spostamento non abbiamo parlato di lavori, nulla possiamo affermare *a priori* su questo proposito. Ma se calcoliamo il lavoro fatto dalle forze magnetiche per una variazione dello spostamento, facendo l'ipotesi che quel lavoro corrisponda al lavoro fatto da eguali forze agenti sopra un fluido incompressibile, ogni particella del quale subisca uno spostamento uguale alla variazione dello spostamento magnetico in quel punto, e giungiamo a risultati, i quali siano confermati dall'esperienza, ne concluderemo che il concetto di spostamento si può anche estendere alla considerazione dei lavori.

Calcoliamo in questa ipotesi il lavoro di un campo magnetico per una data variazione dello spostamento.

Sia (fig. 94) un tubo di induzione o di spostamento, infinitamente sottile, del quale consideriamo una porzione, compresa fra due sezioni rette $A\,A$, $B\,B$, di lunghezza l grande a fronte delle dimensioni delle sezioni, ma abbastanza piccola perchè la porzione di tubo considerata possa trattarsi come cilindrica. Se in una sezione qualunque $M\,M$ di area a, lo spostamento subisce una variazione infinitesima $d\,b$, attraverso a questa sezione passa, nella direzione b in cui varia lo spostamento, una quantità $a\,d\,b$ di fluido. Poichè il fluido è incompressibile passa attraverso ad ogni sezione del tubo una stessa quantità $a\,d\,b$ di fluido; l'effetto della variazione dello spostamento si riduce dunque ad avere introdotto nel volume considerato per la faccia $A\,A$ una quantità $a\,d\,b$ di fluido, e ad averne estratto dalla faccia $B\,B$ un'eguale quantità, si riduce cioè ad aver trasportato la quantità $a\,d\,b$ di fluido dalla posizione $A\,A\,A'\,A'$, alla posizione $B\,B\,B'\,B'$. Il lavoro fatto per la variazione dello spostamento è quello necessario a compiere un tale trasporto. Se $\mathcal{H}$ è il valore della forza, ad angolo θ collo spostamento b, sulla massa $a\,d\,b$ agisce una forza $a\,d\,b\,\mathcal{H}$, che ha per componente tangenziale $a\,d\,b\,\mathcal{H}\cos\theta$, e che quindi fa sulla massa mobile per lo spazio l il lavoro

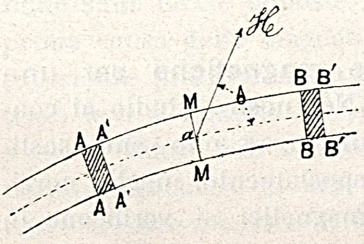

Fig. 94.

$$l\,a\,d\,b\,\mathcal{H}\cos\theta.$$

È questa l'espressione del lavoro fatto nella porzione di tubo considerato, e poichè tale porzione ha volume $l\,a$, possiamo dire che il lavoro per unità di volume è:

$$w = \mathcal{H}\,d\,b\cos\theta. \tag{25}$$

Questa è l'espressione del lavoro corrispondente ad un effettivo spostamento; nello studio dei campi magnetici prodotti per mezzo di correnti elettriche vedremo come essa sia confermata dall'esperienza; per ora noi possiamo senz'altro estenderla ai campi magnetici già studiati.

Consideriamo dapprima il caso particolare importante, nel quale $\theta = 0$, e perciò $\mathcal{H}$ e b hanno la stessa direzione; caso che corrisponde ad un campo magnetico prodotto esclusivamente dalla forza $\mathcal{H}$ in un mezzo omogeneo ed isotropo. Il lavoro per unità di volume è dato allora dall'espressione

$$w = \mathcal{H}\, d\, b,$$

la quale per la (20) si può porre sotto la forma:

$$(26) \quad w = \frac{1}{4\,\pi}\, \mathcal{H}\, d\, \mathfrak{B}.$$

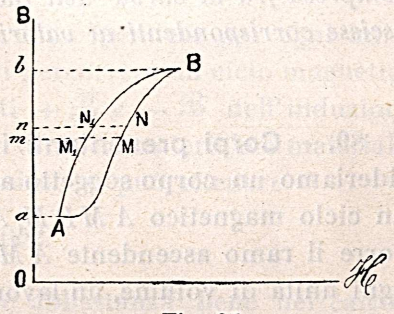

Fig. 95.

Data la curva che ha per ascisse i valori di $\mathcal{H}$ e per ordinate i valori di $\mathfrak{B}$ è facile trovare la rappresentazione grafica del lavoro per unità di volume dovuto ad una variazione infinitesima o finita dell'induzione.

Sia $A\,B$ (fig. 95) la curva della $\mathfrak{B}$ in funzione della $\mathcal{H}$. Consideriamo un punto M di ascissa $m\,M$; diamo all'ordinata $O\,m$ un incremento infinitesimo

$$m\,n = d\,\mathfrak{B};$$

e sia $n\,N$ la nuova ascissa. L'area infinitamente piccola $M\,m\,n\,N$, a meno di infinitesimi di ordine superiore ci rappresenta il prodotto $\mathcal{H}\, d\,\mathfrak{B}$, e quindi il lavoro w, dovuto alla variazione $d\,\mathfrak{B}$, moltiplicato per $4\,\pi$.

Se ora si considera una variazione finita dell'induzione, la quale avvenga secondo la linea $A\,B$, il lavoro complessivo

$$W = \frac{1}{4\,\pi} \int_{o\,a}^{o\,b} \mathcal{H}\, d\,\mathfrak{B}$$

è la somma di tanti lavori elementari, ognuno dei quali è rappresentato a meno di un fattore costante da un'area come $M\,m\;n\,N$; quindi il lavoro complessivo è rappresentato dall'area totale $A\,a\;b\,B$.

Il lavoro per ogni unità di volume, fatto dalle forze magnetiche di un campo, nel quale l'induzione subisce una data variazione, è espresso, a meno del fattore costante $\frac{1}{4\pi}$, *dall'area compresa fra la curva dell'induzione, l'asse delle ordinate e le ascisse corrispondenti ai valori estremi dell'induzione.*

89. – Corpi presentanti istèresi. Cicli magnetici. — Consideriamo un corpo soggetto ad istèresi e facciamogli percorrere un ciclo magnetico $A\,M\,B\,M_1\,A$ (fig. 95). Mentre il corpo percorre il ramo ascendente $A\,M\,B$, le forze del campo fanno per ogni unità di volume, un lavoro positivo rappresentato dall'area $a\,A\,M\,B\,b\,a$. Mentre invece il corpo percorre il ramo discendente $B\,M_1\,A$ per il quale $d\,\mathfrak{B}$ è negativo, le forze del campo fanno un lavoro negativo, che per ogni unità di volume è rappresentato dall'area $B\,b\,a\,A\,M_1\,B$. Il lavoro complessivo fatto dalle forze del campo quando il corpo percorre il ciclo completo $A\,M\,B\,M_1\,A$ è quindi rappresentato dalla differenza delle due aree considerate, cioè dall'area del ciclo.

Il lavoro che le forze magnetiche fanno per ogni unità di volume di un corpo il quale percorra un dato ciclo magnetico è espresso dall'area del ciclo divisa per 4π.

Come abbiamo già notato, un ciclo magnetico è sempre percorso in modo che il tratto discendente sia superiore, in modo cioè che l'area sia positiva. Perciò il lavoro fatto dalle forze del campo quando un corpo percorre un ciclo magnetico è sempre un lavoro speso, il cui equivalente si ritrova come calore nel mezzo in cui l'induzione varia.

Nel caso di cicli percorsi fra valori uguali e di segno opposto della forza e dell'induzione magnetica, dato il materiale, l'area del ciclo, e quindi anche il lavoro speso, dipendono unicamente dai lavori massimi di $\mathcal{H}$ o di $\mathfrak{B}$. Tale funzione si dovrà dedurre dai risultati sperimentali. Ewing ed Hopkinson misurando le aree dei diversi cicli e dividendole per 4π compilarono delle tabelle che dànno, in funzione dei valori massimi di $\mathfrak{B}$, per diversi materiali, il lavoro speso per unità di volume. Lo

Steinmetz trovò che i risultati sperimentali si possono compendiare nella seguente formula:

$$W = \eta\, \mathcal{B}^{1,6} \quad (*), \tag{27}$$

nella quale W è il lavoro che si deve spendere per ogni unità di volume del materiale per fargli percorrere un ciclo magnetico fra due valori uguali ed opposti $+\mathcal{B}$ e $-\mathcal{B}$ dell'induzione magnetica, η è una costante che varia da materiale a materiale. Per il ferro dolce ricotto e purissimo si può ritenere

$$\eta = 0{,}002.$$

La formula di Steinmetz serve abbastanza bene nei calcoli pratici per valori di $\mathcal{B}$ corrispondenti alla porzione NM sensibilmente rettilinea della curva, ove la pendenza è massima. Più recenti esperienze hanno provato che per valori di $\mathcal{B}$ corrispondenti a punti al di là del ginocchio M, nella (27) si deve assumere per l'esponente di $\mathcal{B}$ un valore maggiore, più vicino a 2.

90. – Corpi privi di istèresi. Energia del campo. — Consideriamo ora un corpo privo di istèresi: l'induzione magnetica è semplicemente proporzionale alla forza magnetica, per modo che sussistono le relazioni:

$$\mathcal{B} = \mu\, \mathcal{H}, \qquad \mathcal{J} = \kappa\, \mathcal{H}.$$

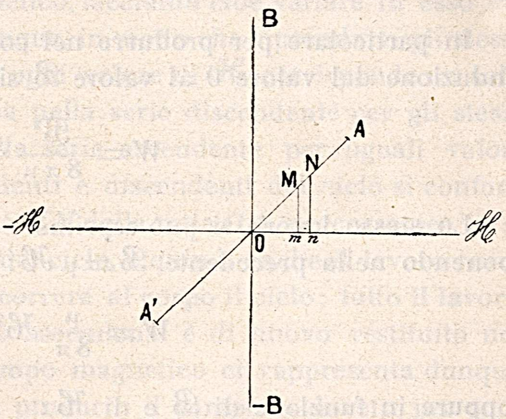

Fig. 96.

Così accade nell'aria ed in generale in tutti i materiali poco magnetici e nei diamagnetici.

(*) Nelle formule (26) e (27) il lavoro è espresso in erg per ogni cm³, quando la forza e l'induzione magnetica si esprimano in unità assolute C. G. S.

In questo caso la linea dell'induzione magnetica si riduce ad una retta OA (fig. 96) condotta per l'origine.

Immaginiamo di far passare il corpo dal punto M al punto N, cioè di far variare in esso l'induzione magnetica dal valore $\mathcal{B}_1 = m M$ al valore $\mathcal{B}_2 = n N$.

Possiamo facilmente esprimere in funzione della sola $\mathcal{B}$ o della sola $\mathcal{H}$ il lavoro per unità di volume necessario per produrre una tale variazione.

Nell'espressione generale del lavoro

$$W = \frac{1}{4\pi} \int \mathcal{H} \, d\,\mathcal{B}$$

sostituiamo ad $\mathcal{H}$ il valore $\mathcal{H} = \frac{1}{\mu} \mathcal{B}$ ed integriamo fra i limiti $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$:

$$W = \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \mathcal{B} \, d\,\mathcal{B} = \frac{1}{8\pi\mu} (\mathcal{B}_2^2 - \mathcal{B}_1^2).$$

In particolare per produrre nel corpo una variazione della induzione dal valore 0 al valore $\mathcal{B}$ si deve spendere un lavoro

$$W = \frac{\mathcal{B}^2}{8\pi\mu}.$$

Lo stesso lavoro si può esprimere in funzione della sola $\mathcal{H}$; ponendo nella precedente $\mathcal{B} = \mu\,\mathcal{H}$:

$$W = \frac{\mu}{8\pi} \mathcal{H}^2,$$

oppure in funzione di $\mathcal{B}$ e di $\mathcal{H}$:

$$W = \frac{\mathcal{B}\,\mathcal{H}}{8\pi}.$$

In particolare se si fa nelle espressioni trovate $\mu = 1$, come si può per approssimazione ritenere nei corpi non magnetici e nei diamagnetici, si avranno le seguenti espressioni del lavoro che si deve spendere per ogni unità di volume per far passare l'induzione e la forza dal valore zero rispettivamente ai valori $\mathcal{B}$ ed $\mathcal{H}$:

$$W = \frac{\mathcal{B}^2}{8\pi} = \frac{\mathcal{H}^2}{8\pi} = \frac{\mathcal{B}\,\mathcal{H}}{8\pi}.$$

Il lavoro si può ancora esprimere in funzione della forza e dello spostamento magnetico. Nell'espressione $W = \frac{\mathcal{B}\,\mathcal{H}}{8\pi}$ ponendo $\mathcal{B} = 4\pi b$, si ha

$$W = \frac{1}{2}\, b\,\mathcal{H}; \tag{38}$$

espressione affatto analoga alla (2) [45] che dà il lavoro elettrico in funzione della forza e dello spostamento elettrico, ed ancora analoga all'espressione del lavoro col quale si produce con una data forza una deformazione in un corpo perfettamente elastico.

Ad un corpo nel quale la permeabilità μ è costante, facciamo percorrere un ciclo magnetico, facciamo cioè variare in esso $\mathcal{H}$ e $\mathcal{B}$ con una legge qualunque, in modo che riprendano gli stessi valori iniziali; poichè ad ogni valore di $\mathcal{H}$ corrisponde un solo valore di $\mathcal{B}$, la $\mathcal{B}$ ripassa nella serie discendente per gli stessi valori che essa aveva nella serie ascendente per uguali valori di $\mathcal{H}$; i due rami ascendenti e discendenti del ciclo si confondono in un unico segmento MN della retta OA, percorso per versi opposti. Si annulla l'area del ciclo, e quindi anche il lavoro complessivo speso per far percorrere al corpo il ciclo; tutto il lavoro che viene speso nel ramo ascendente è di nuovo restituito nel ramo discendente. Un campo magnetico ci rappresenta dunque una *energia potenziale;* a produrre il campo si dovette per ogni unità di volume spendere un lavoro $\frac{1}{2}\, b\,\mathcal{H}$, che rimane in esso accumulato, e che viene completamente restituito quando scompare lo spostamento magnetico.

Se invece si considerano corpi presentanti istèresi, non tutto il lavoro speso a produrre il campo viene restituito quando esso si annulla, perchè una parte è dispersa sotto forma di calore.

CAPITOLO IV

ELETTROMAGNETISMO

§ 1°

CAMPI MAGNETICI GENERATI DA VARIAZIONI DELLO SPOSTAMENTO ELETTRICO

91. – Azioni magnetiche prodotte da correnti elettriche. Corrente rettilinea e circolare - Solenoide. — Ci siamo occupati dello studio dei fenomeni elettrici e dei fenomeni magnetici, considerando gli uni indipendentemente dagli altri. In uno stesso spazio possono coesistere un campo elettrico ed un campo magnetico; questi campi rimangono fra di loro indipendenti, fino a che entrambi si mantengono costanti; ma se variano le condizioni di uno di essi, si producono variazioni anche nell'altro, cessa la loro indipendenza.

Le relazioni generali tra i fenomeni elettrici ed i fenomeni magnetici si possono riassumere in questi due principii:

Ogniqualvolta lo spostamento elettrico varia col tempo si producono forze magnetiche.

Ogniqualvolta lo spostamento magnetico varia col tempo si producono forze elettromotrici.

Vedremo che le forze prodotte sono nei due casi collegate alle variazioni dello spostamento dalla stessa legge.

Si presentano dunque al nostro studio due nuove classi di fenomeni, cioè le modificazioni prodotte in un campo magnetico da una variazione dello spostamento elettrico, e le modificazioni prodotte in un campo elettrico da una variazione dello spostamento magnetico.

Noi ci occuperemo anzitutto degli effetti magnetici prodotti da una variazione dello spostamento elettrico.

Ci converrà considerare dapprima variazioni dello spostamento elettrico costanti per grandezza e per segno, cioè considerare correnti elettriche continue; potremo poi facilmente estendere il nostro studio al caso di correnti variabili in modo qualunque.

Una corrente elettrica continua produce attorno a sè un campo magnetico. È fondamentale a questo riguardo l'esperienza di OERSTED, il quale dimostrò che un ago magnetico disposto parallelamente ad un conduttore rettilineo percorso da corrente devia e tende a disporsi normalmente alla corrente. Consideriamo ad esempio un filo rettilineo assai lungo, normale al piano del disegno, percorso da una corrente i diretta dal davanti al di dietro del piano di figura (fig. 97) (*).

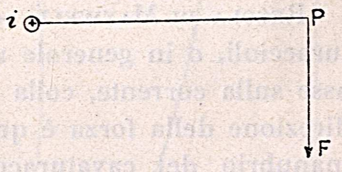

Fig. 97.

Nello spazio intorno al conduttore i si ha un campo magnetico. Se in un punto P si pone una massa magnetica nord, essa è sollecitata da una forza normale al piano iP, e diretta secondo la freccia; sarebbe opposta la direzione della forza quando fosse opposta la direzione della corrente. Se in P si porta un ago magnetico, le due forze sulle due masse uguali ed opposte dànno una coppia che tende a disporre l'ago normalmente alla corrente.

In questo semplice caso di una corrente rettilinea, la direzione del campo magnetico viene determinata mediante le seguenti regole.

(*) Seguendo una notazione proposta dal prof. SILVANUS P. THOMPSON indicheremo la direzione della corrente, nella sezione di un conduttore normale al piano di figura, con un punto o con una croce, secondochè la corrente ha la direzione dal di dietro al davanti del piano di figura, oppure quella opposta: il punto sta ad indicare la punta della freccia diretta verso l'osservatore, la croce invece indica la coda di penne, di cui è munita la freccia che si allontana.

Regola di Ampère. — Se si immagina un osservatore disteso sul conduttore in modo che la corrente gli entri per i piedi ed esca per il capo, rivolto verso l'ago, il polo nord tende a portarsi alla sinistra, il polo sud alla destra dell'osservatore. Per brevità chiameremo sinistra e destra della corrente la sinistra e la destra dell'osservatore di Ampère e quindi potremo più brevemente dire che:

Il campo magnetico generato da una corrente rettilinea è in ogni punto diretto alla sinistra della corrente.

Regola di Maxwell. — Se si immagina un ordinario cavaturaccioli, o in generale una vite destrorsa, disposto col suo asse sulla corrente, colla punta in direzione della corrente, la direzione della forza è quella nella quale si deve far rotare il manubrio del cavaturaccioli perchè esso avanzi secondo la corrente.

Possiamo ancora immaginare il cavaturaccioli disposto diversamente, e cioè piantato in P coll'asse normale al piano $i\,P$; se si fa rotare il manubrio in modo che la parte vicina ad i ruoti nel verso indicato da i, il cavaturaccioli si sposta nella direzione della forza.

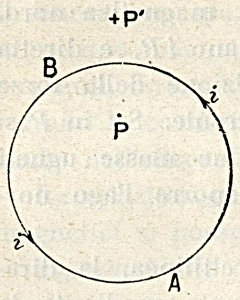

Fig. 98.

In generale raggruppando in una queste due regole, possiamo dire che:

La direzione di una corrente rettilinea e la direzione del campo magnetico da esso generato, sono collegate dalla stessa relazione reciproca che passa fra i moti progressivo e rotatorio di un ordinario cavaturaccioli, o di una vite destrorsa.

Consideriamo ora anzichè una porzione rettilinea di corrente un circolo completo; possiamo facilmente renderci conto dell'andamento generale del campo magnetico da esso generato, osservando che una piccola porzione del circuito si può considerare come rettilinea e si possono ad essa applicare i principii esposti. Consideriamo ad esempio il circuito $A\,B$ (fig. 98) percorso dalla corrente i. In un punto qualunque P interno i singoli elementi di corrente producono forze aventi la stessa direzione dal di dietro al davanti del piano di figura, le quali si sommano. Invece in un punto P' esterno le porzioni B ed A

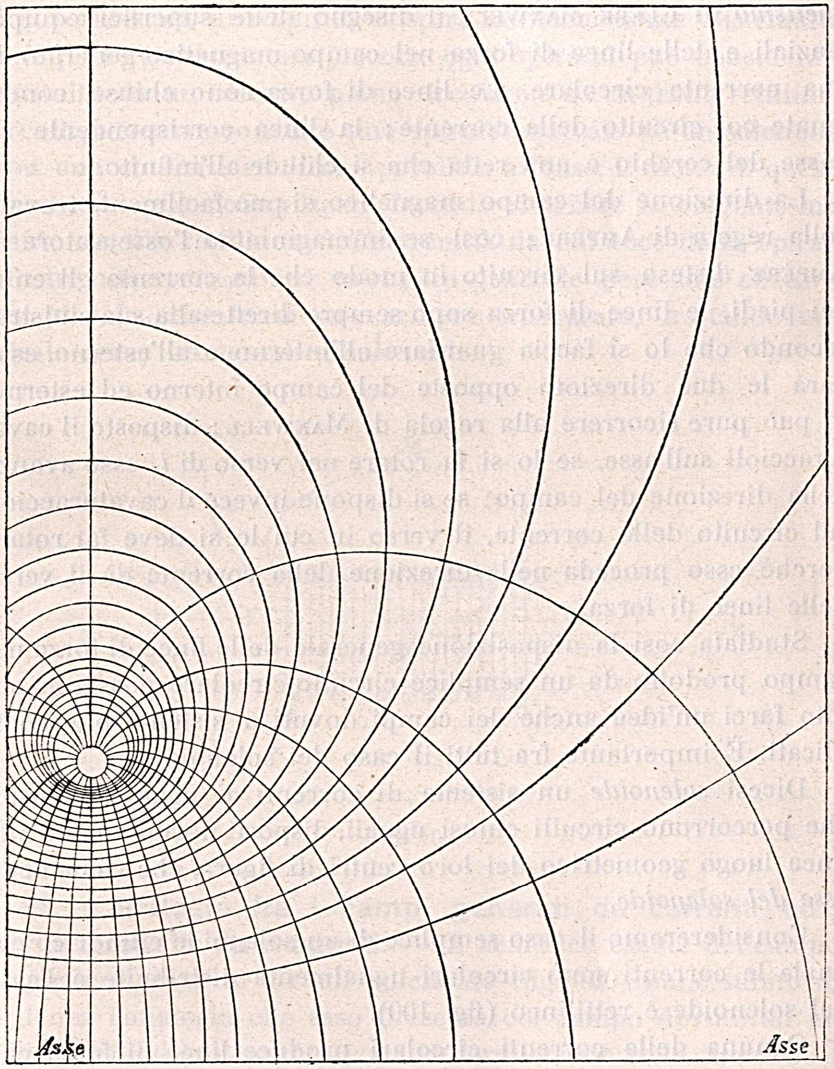

Fig. 99.

di circuito producono forze opposte e prevale naturalmente l'effetto della più vicina che è diretta dal davanti al di dietro del piano di figura. In questo campo la forza ha dunque in tutti i punti interni la stessa direzione e così pure in tutti i punti esterni, ma la direzione all'esterno è opposta a quella all'interno.

Nella fig. 99 riproduciamo dal *Trattato di Elettricità e Magnetismo* di Clerk Maxwell il disegno delle superfici equipotenziali e delle linee di forza nel campo magnetico generato da una corrente circolare. Le linee di forza sono chiuse, concatenate col circuito della corrente; la linea corrispondente all'asse del cerchio è una retta che si chiude all'infinito.

La direzione del campo magnetico si può facilmente trovare colla regola di Ampère; così se immaginiamo l'osservatore di Ampère disteso sul circuito in modo che la corrente gli entri pei piedi, le linee di forza sono sempre dirette alla sua sinistra; secondo che lo si faccia guardare all'interno o all'esterno, esso darà le due direzioni opposte del campo interno ed esterno. Si può pure ricorrere alla regola di Maxwell; disposto il cavaturaccioli sull'asse, se lo si fa rotare nel verso di i, esso avanza nella direzione del campo; se si dispone invece il cavaturaccioli sul circuito della corrente, il verso in cui lo si deve far rotare perchè esso proceda nella direzione della corrente dà il verso delle linee di forza.

Studiata così la disposizione generale delle linee di forza nel campo prodotto da un semplice circuito circolare possiamo subito farci un'idea anche dei campi dovuti a sistemi più complicati. È importante fra tutti il caso dei solenoidi.

Dicesi *solenoide* un sistema di correnti di uguale intensità che percorrono circuiti chiusi uguali, disposti normalmente alla linea luogo geometrico dei loro centri di figura, che viene detta *asse del solenoide.*

Considereremo il caso semplice di un solenoide cilindrico nel quale le correnti sono circolari ugualmente distribuite e l'asse del solenoide è rettilineo (fig. 100).

Ognuna delle correnti circolari produce linee di forza che hanno all'interno la direzione $\mathcal{H}$, ed all'esterno la direzione opposta $\mathcal{H}'$. Il complesso di tutte le correnti circolari ci darà un fascio di linee di forza che attraversano il solenoide nel verso $\mathcal{H}$, con direzione media parallela al suo asse, escono per l'estremità destra e si chiudono all'esterno; la direzione del campo si trova facilmente applicando le regole di MAXWELL o di AMPÈRE.

Un sistema che praticamente si comporta come un solenoide ci è fornito da una spirale a spire uniformemente distribuite. Se il passo è abbastanza piccolo, ogni spira si può considerare costituita da un circuito piano circolare e da un tratto rettilineo di collegamento; cosicchè una spirale equivale ad un solenoide e ad una corrente rettilinea parallela all'asse. L'effetto di questa corrente si può neutralizzare facendo ritornare la corrente mediante un filo rettilineo dall'estremità da cui esce dalla spirale all'estremità per cui vi entra; in generale però tale effetto è così piccolo, che lo si può sempre trascurare, trattando una spirale come un semplice solenoide.

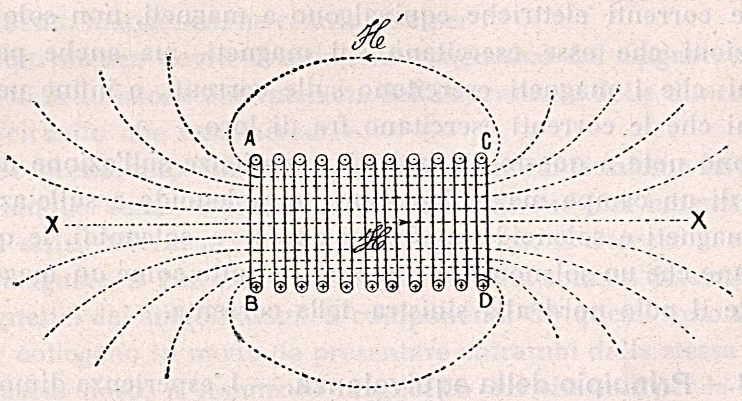

Fig. 100.

92. – Analogia fra i campi generati da correnti, ed i campi prodotti da magneti. — Il semplice esame del campo magnetico generato da un solenoide (fig. 100) pone subito in evidenza l'analogia che esso presenta col campo dovuto ad un magnete cilindrico, magnetizzato uniformemente nella direzione $\mathfrak{J}$ (fig. 81). In entrambi i casi le linee di forza partono da una faccia del cilindro ed arrivano all'altra, presentando la stessa disposizione all'esterno del magnete e del solenoide.

L'analogia fra i due campi non sta solo nella distribuzione delle linee di forza ma è affatto completa; tutte le proprietà dei campi dovuti a masse magnetiche sono comuni ai campi generati per mezzo di correnti elettriche. Anche in questi campi ha luogo l'influenza o induzione magnetica, per cui un corpo portato nel campo si magnetizza, nella direzione della forza se paramagnetico, nella direzione opposta se diamagnetico. Se, per esempio, nell'interno di un solenoide si pone un pezzo di ferro, questo si magnetizza presentando un polo nord alla sinistra della corrente, un polo sud alla destra. Si ha così modo di ottenere potenti calamite temporanee che si chiamano *elettromagneti* o *elettrocalamite.* Se il nucleo è d'acciaio anzichè di ferro dolce, per le proprietà che abbiamo studiate, al cessare della corrente magnetizzante, esso conserva parte della sua magnetizzazione; è questo il modo più semplice per fabbricare dei magneti permanenti.

Le correnti elettriche equivalgono a magneti, non solo per le azioni che esse esercitano sui magneti, ma anche per le azioni che i magneti esercitano sulle correnti, e infine per le azioni che le correnti esercitano fra di loro.

Sono note a questo riguardo le esperienze sull'azione direttrice di un campo magnetico sopra un solenoide e sulle azioni fra magneti e solenoidi, e fra solenoidi e solenoidi, le quali provano che un solenoide si comporta in tutto come un magnete avente il polo nord alla sinistra della corrente.

93. – Principio della equivalenza. — L'esperienza dimostra che in tutti i casi pratici, qualunque siano le dimensioni dei circuiti, il campo magnetico generato da una corrente elettrica equivale per tutte le sue proprietà al campo generato da un conveniente magnete; noi siamo quindi autorizzati ad ammettere che ciò accada anche nel caso di correnti infinitamente piccole.

Consideriamo un circuito chiuso infinitamente piccolo AB (fig. 101) percorso da una corrente elettrica. Per effetto della corrente si produce uno spostamento magnetico, che attraversa il circuito AB dalla destra verso la sinistra della corrente, e che si richiude all'esterno. Se ora immaginiamo un magnete elementare disposto nel centro O (fig. 102) col suo asse normale al piano del circuito e col polo nord alla sinistra della corrente, si ha anche in questo caso uno spostamento magnetico nella stessa direzione. Gli spostamenti magnetici prodotti dalla corrente e dal magnete sono fenomeni identici, della stessa natura, di più è analoga nei due casi la distribuzione delle linee di forza all'esterno; è quindi naturale che gli effetti a distanza dei due sistemi debbano equivalersi, quando fra le grandezze che li determinano passino date relazioni. Siccome le azioni a distanza di un magnete elementare non dipendono dalle sue dimensioni ma esclusivamente dal suo momento magnetico, ne risulta che per la equivalenza dovrà il momento magnetico del magnete essere una data funzione dell'intensità della corrente e delle dimensioni del circuito che essa percorre.

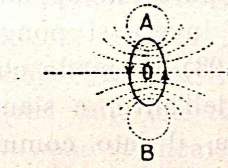

Fig. 101.

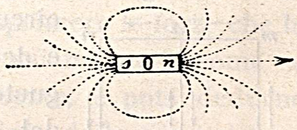
Fig. 102.

Se prendiamo due magneti elementari e li riuniamo in modo qualunque senza modificarne la distribuzione del magnetismo, cioè senza alterarne il momento magnetico, il sistema è ancora un magnete, il cui momento magnetico è la somma dei momenti magnetici dei singoli magneti componenti. Se questi sono uguali e si collegano in modo da presentare entrambi dalla stessa parte la faccia nord, il momento magnetico del sistema, per la stessa definizione di momento magnetico [64], è doppio del momento magnetico di ognuno dei singoli magneti.

Dato un tale principio è naturale ammettere che il momento magnetico del magnete equivalente al sistema di due correnti identiche poste vicine, sia doppio del momento magnetico del magnete equivalente ad ognuna delle correnti.

Siano due circuiti uguali rettangolari di area dS, percorsi da correnti di uguale intensità i. Se sovrapponiamo i due circuiti in modo che vengano a ricoprirsi, e che siano percorsi entrambi nello stesso verso, per le azioni a distanza il sistema che ne risulta equivale evidentemente ad una corrente di intensità doppia $2i$, che percorra uno dei circuiti; d'altra parte, per quanto abbiamo detto, il momento magnetico equivalente al sistema delle due correnti sovrapposte è il doppio di quello dovuto ad una sola corrente, onde duplicando la corrente, ne viene pure raddoppiato il momento magnetico equivalente.

Se invece si pongono i due circuiti l'uno accanto all'altro (fig. 103) in modo che un lato dell'uno si sovrapponga ad un lato dell'altro, e siano percorsi nelle direzioni indicate dalle freccie, il lato comune $a b$ risulta percorso da due correnti uguali ed opposte, i cui effetti si elidono. Tale sistema equivale dunque ad una corrente unica di intensità i, che percorra il circuito $m n p q$ di area doppia. Per quanto si è detto sopra, il momento magnetico del magnete equivalente a questo sistema è doppio del momento magnetico corrispondente ad uno solo dei circuiti, onde ancora duplicando l'area del circuito viene raddoppiato il momento magnetico del magnete equivalente.

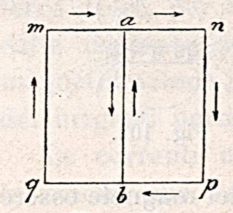

Fig. 103.

Ne segue che il momento magnetico del magnete elementare equivalente ad una data corrente circolante in un circuito chiuso infinitesimo è proporzionale all'intensità della corrente ed alla superficie del circuito. Detto $d\mathcal{M}$ il momento magnetico del magnete equivalente, i l'intensità della corrente, dS l'area del circuito, ed h una costante di proporzionalità potremo scrivere:

$$d\mathcal{M} = h\, i\, d S. \tag{1}$$

Possiamo quindi stabilire il seguente principio:

Una corrente elementare, circolante in un circuito chiuso infinitamente piccolo, produce nello spazio un campo magnetico analogo a quello che sarebbe prodotto da un magnete elementare posto nel centro del circuito, col suo asse normale al piano della corrente, e col suo polo nord alla sinistra della corrente stessa; si ha l'equivalenza fra i due campi, sono cioè uguali le azioni a distanza prodotte dalla corrente e dal magnete, quando il momento magnetico del magnete è proporzionale alla intensità della corrente ed all'area del circuito.

Noi siamo venuti al principio della equivalenza con semplici ragionamenti, partendo dall'analogia che in tutti i casi pratici l'esperienza dimostra esistere fra i campi magnetici prodotti da correnti elettriche ed i campi dovuti a magneti permanenti. Questo principio è confermato dalle esperienze eseguite già da AMPÈRE, e in seguito in modo più rigoroso da WILHELM WEBER; esso ha una conferma anche maggiore nel fatto che tutte le deduzioni che da tale principio si traggono sono verificate dalla esperienza.

Noteremo ancora come AMPÈRE nella sua meravigliosa teoria dei fenomeni elettrodinamici riuscì ad esprimere le forze che le correnti esercitano sia fra di loro, sia sui magneti, come se fossero dovute ai singoli elementi di corrente, e potè dedurne ed enunciare per la prima volta il principio della equivalenza.

Noi, per cammino inverso, ritenendo per quanto si è detto rigorosamente stabilito il principio dell'equivalenza, lo prendiamo a base del nostro studio, e ne dedurremo tutte le proprietà dei campi magnetici generati da correnti elettriche.

94. – Equivalenza fra lamina magnetica e corrente in un circuito chiuso finito. Sistema elettromagnetico di misura. — Applichiamo il principio dell'equivalenza ad una corrente in un circuito chiuso non infinitamente piccolo.

Sia un circuito qualunque AB (fig. 104) piano o sghembo, di area non infinitamente piccola, percorso nella direzione della freccia da una corrente continua di intensità i. Immaginiamo una superficie qualunque S limitata dal contorno AB; e dividiamola in elementi infinitesimi mediante due sistemi di linee tracciate con una legge qualunque. Immaginiamo il contorno di ognuno di questi elementi percorso da una corrente nello stesso verso e colla stessa intensità di corrente i. Per le azioni a distanza il complesso di queste correnti equivale alla corrente unica in AB. Difatti consideriamo un lato ab qualunque di separazione fra due elementi contigui p, q; esso come appartenente ad ognuno dei due elementi p, q, è percorso da due correnti di uguale intensità e per versi opposti, le quali producono effetti eguali ed opposti, che si elidono. Per gli effetti esterni le cose avvengono come se tutti i lati di separazione fra due elementi contigui non fossero percorsi da corrente; rimangono quindi solo le azioni delle correnti che percorrono le parti del contorno della superficie, le quali correnti nel loro complesso formano la corrente unica AB. Alla corrente unica AB si può dunque sostituire per le azioni a distanza il complesso delle correnti di uguale intensità nei circuiti elementari.

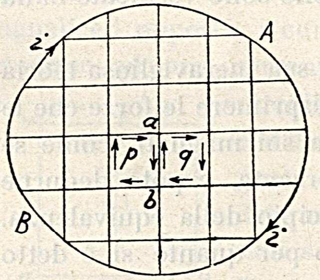

Fig. 104.

Ora ognuna delle correnti elementari equivale ad un piccolo magnete coll'asse normale al piano dell'elemento e col polo nord alla sinistra della corrente; di questo magnete è determinato il momento magnetico, mentre sono arbitrarie la forma e le dimensioni. Possiamo quindi immaginare che ogni magnete elementare sia costituito da un prismetto di materia magnetica avente per sezione il corrispondente circuito elementare della corrente, e sia limitato da due superfici infinitamente vicine, l'una da una parte l'altra dall'altra della superficie S. Per tal modo il complesso dei magneti costituisce uno strato continuo di materia magnetica avente una distribuzione nord alla sinistra della corrente, ed una distribuzione sud alla destra; di più, poichè ogni magnete è normale al piano della corrente, l'asse del magnete, e quindi anche la direzione della magnetizzazione, sono in ogni punto normali alla superficie S, o se vogliamo alle due superfici di base. Il complesso dei magneti elementari costituisce dunque una lamina magnetica, che equivale per gli effetti magnetici alla corrente AB.

La lamina che consideriamo è semplice. Difatti il momento magnetico dei singoli elementi è

$$d\mathcal{M} = h\,i\,d\,S;$$

quindi il momento magnetico per unità di superficie, ossia la potenza della lamina vale

$$\mathfrak{T} = \frac{d\mathcal{M}}{d\,S} = h\,i \tag{2}$$

ed è costante, essendo la stessa per ogni circuito elementare l'intensità i della corrente.

Il principio dell'equivalenza nel caso di una corrente in un circuito di area finita può dunque enunciarsi così:

Una corrente elettrica in un circuito chiuso per le sue azioni magnetiche equivale ad una lamina magnetica semplice, avente lo stesso perimetro del circuito, ed una potenza proporzionale all'intensità della corrente. La faccia nord di questa lamina è alla sinistra dell'osservatore di AMPÈRE.

Possiamo altrimenti definire la posizione delle distribuzioni di magnetismo sulle due faccie della lamina ricorrendo alla regola di MAXWELL.

Nella lamina magnetica equivalente la magnetizzazione ha la direzione in cui procederebbe il cavaturaccioli di MAXWELL, qualora il manubrio venisse girato nel verso della corrente i.

La superficie S che abbiamo considerata è arbitraria; ne segue che sono definiti la potenza ed il contorno della lamina equivalente, ma non la forma, che può essere scelta in modo arbitrario. Ciò era prevedibile poichè in un punto qualunque del campo di una lamina semplice il potenziale e la forza non dipendono dalla forma di questa [76].

Nelle espressioni (1) e (2) entra una costante h di proporzionalità, la quale non è un semplice numero, ma una grandezza fisica. Il valore e le dimensioni di h possono variare in dipendenza della scelta delle unità di misura. Come nelle questioni di elettrostatica si sono definite le unità elettrostatiche, per modo che la costante k della formola di COULOMB risultasse uguale ad *uno* e priva di dimensioni, così nelle questioni, che stiamo trattando, converrà fare una nuova scelta delle unità per modo che risulti priva di dimensioni ed uguale ad *uno* la costante h. Si ha così un nuovo sistema di unità che viene detto *elettromagnetico*. Naturalmente nelle applicazioni di una data formula occorrerà ricordare in quale sistema siano espresse le varie grandezze; si potrà facilmente passare da un sistema all'altro, quando siano noti i rapporti delle varie unità.

Se si scelgono unità elettromagnetiche si ha $h = 1$; per cui

$$\mathfrak{L} = i. \tag{2'}$$

La potenza della lamina semplice equivalente ad una corrente è uguale all'intensità della corrente espressa in unità elettromagnetiche.

Se nella (2') si fa $\mathfrak{L} = 1$ risulta pure $i = 1$, per cui:

Unità elettromagnetica di intensità di corrente è l'intensità della corrente che, circolando in un circuito chiuso, equivale per le azioni magnetiche ad una lamina semplice di potenza magnetica unità.

95. – Portata del principio dell'equivalenza. — La teoria che noi siamo venuti svolgendo si basa su esperienze eseguite nello spazio esterno al magnete equivalente; le conseguenze che noi ne abbiamo dedotte valgono quindi finchè rimaniamo in tale spazio; ma non valgono più per lo spazio interno al magnete.

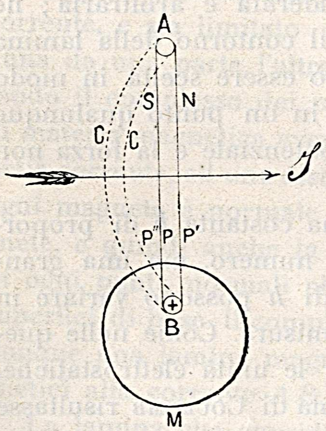

Fig. 105.

Consideriamo una corrente di intensità i in un circuito AB (fig. 105), che per semplicità supponiamo piano e disposto normalmente al piano della figura. Immaginiamo che la lamina magnetica equivalente di potenza $\mathfrak{L} = i$ sia disposta secondo il piano AB. La sua grossezza è affatto arbitraria, e noi possiamo supporre che essa abbia un valore costante λ; con ciò sarà ancora costante l'intensità della magnetizzazione.

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{L}}{\lambda} = \frac{i}{\lambda}.$$

Sulle due faccie della lamina si avranno due distribuzioni di magnetismo uniformi, uguali ed opposte, di densità

$$\sigma = \mathfrak{J} = \frac{i}{\lambda}.$$

Consideriamo un punto P interno alla lamina, e, infinitamente vicini a P, due punti P', P'' esterni, l'uno da una parte, l'altro dall'altra. Calcoliamo le forze prodotte in questi punti dalla lamina magnetica. Il punto P si trova nelle stesse condizioni di un punto interno ad una fessura infinitamente sottile praticata in un magnete; la forza in P ha direzione opposta a quella della magnetizzazione ed ha il valore

$$\mathcal{H} = 4\pi\sigma = 4\pi\frac{i}{\lambda}.$$

Nei due punti P' e P'' si hanno due forze uguali aventi entrambe la direzione della magnetizzazione. Ne risulta che se un punto contenente l'unità di massa passa da una parte all'altra di una lamina magnetica attraverso alle sue faccie, la forza che agisce su di esso subisce una variazione discontinua, che può anche essere infinitamente grande.

Consideriamo invece le forze magnetiche prodotte dalla corrente elettrica. Nei punti P' e P'' esterni alla lamina la forza dovuta alla corrente coincide con quella dovuta alla lamina, ma nel punto P questa coincidenza più non si verifica. Nel caso della corrente il punto P, infinitamente vicino ai punti P' e P'', non è separato da essi da alcuna superficie di discontinuità, quindi l'intensità del campo in P è la stessa che si ha in P' e P''. Possiamo anche meglio renderci ragione di ciò, ricordando che la lamina magnetica equivalente ad una corrente può avere una forma qualunque purchè il suo contorno coincida con quello della corrente. Noi possiamo immaginare la lamina disposta secondo la superficie ACB: le forze che essa esercita nei tre punti esterni P', P, P'', infinitamente vicini fra di loro, sono uguali a meno di infinitesimi; sono quindi ancora uguali le forze dovute alla corrente.

Si ha dunque fra i due campi questa differenza essenziale che, mentre nel campo della lamina le faccie della lamina stessa sono superficie di discontinuità e le linee di forza sono linee aperte, nel campo della corrente le linee di forza sono linee chiuse, che all'esterno coincidono colle linee di forza prodotte dalla lamina, all'interno sono la prosecuzione delle linee esterne.

Il circuito della corrente e le linee di forza da essa generate sono linee concatenate, cioè non si possono fra di loro separare senza rompere l'una di esse.

Si può pertanto asserire che non esistono distribuzioni di magnetismo, le quali diano lo stesso campo che viene prodotto dalle correnti elettriche, per il fatto che le distribuzioni di magnetismo dànno delle superfici di discontinuità che non esistono nel campo della corrente. L'equivalenza fra correnti e magneti sta solo nello spazio esterno, ma non più nell'interno dei magneti.

L'equivalenza fra i due campi è completa quando, invece della forza newtoniana $\mathcal{H}$ definita polarmente, si consideri la forza B definita elettromagneticamente, o (ciò che fa lo stesso nel sistema magnetico di unità in cui i due valori numerici $\mathfrak{B}$ e B coincidono) l'induzione magnetica $\mathfrak{B}$.

In entrambi i casi l'induzione varia in modo solenoidale e non presenta alcuna superficie di discontinuità; i valori della induzione in punti infinitamente vicini come P, P', P'', anche se uno è interno alla lamina e gli altri esterni, sono uguali a meno di infinitesimi; le linee di induzione sono linee chiuse. Dunque:

In ogni punto del campo il valore dell'induzione prodotta dalla corrente elettrica è uguale al valore dell'induzione dovuta alla lamina equivalente.

Se nel campo generato dalla corrente non esiste alcun materiale magnetico, si sa che forza ed induzione magnetica hanno in ogni punto lo stesso valore, sono fra loro coincidenti; possiamo quindi dire:

Se nel campo non esiste materiale magnetico il valore della forza magnetica prodotta dalla corrente è uguale al valore della induzione dovuta alla lamina equivalente.

96. – Corrente rettilinea. Legge di Biot e Savart. — Applichiamo il principio della equivalenza allo studio dei campi prodotti da alcuni sistemi speciali di correnti.

Se il circuito di una corrente racchiude una superficie grandissima, ed una sua porzione di grande lunghezza è rettilinea, nei punti vicini alla metà di questa porzione sono trascurabili le azioni dovute alle altre parti; cosicchè questo caso pratico può rappresentarci il caso limite ideale di un circuito rettilineo, chiuso all'infinito, che comprende una superficie abbastanza grande.

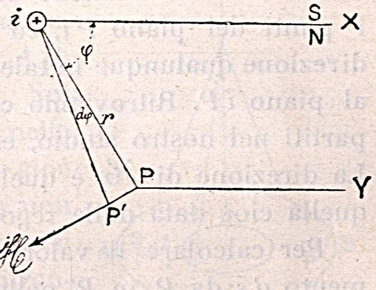

Fig. 106.

Abbiasi (fig. 106) una corrente i rettilinea diretta dal davanti al di dietro del piano di figura. La lamina magnetica semplice di potenza $\mathfrak{L} = i$, equivalente a questa corrente, è limitata solo dalla retta i ed estesa sino all'infinito, con forma arbitraria; possiamo quindi immaginarla disposta secondo il piano ix, colla faccia nord in basso, la faccia sud in alto.

La forza e quindi anche il potenziale prodotti dalla corrente e dalla lamina in un punto qualunque P esterno, alla distanza r da i, hanno gli stessi valori. La relazione (15) [76] ci dà il valore del potenziale:

$$V = \mathfrak{L}\,\omega = i\,\omega.$$

In questo caso l'angolo solido ω è positivo perchè da P si vede la faccia nord, e si riduce al fuso sferico determinato sulla sfera di raggio *uno* dai due piani $P\,i$, e P Y parallelo ad ix. Detto φ l'angolo $\widehat{P\,i\,\mathrm{x}}$, l'ampiezza del diedro che determina il fuso è

$$i\,\widehat{P}\,\mathrm{Y} = \pi - \varphi,$$

e l'area del fuso vale

$$\omega = 2\,(\pi - \varphi)\,;$$

perciò il potenziale in P è, a meno di una costante:

$$V = 2\,i\,(\pi - \varphi). \tag{3}$$

La relazione generale $\mathcal{H}_s = -\frac{\partial V}{\partial s}$ ci permette di ricavare facilmente dalla (3) il valore e la direzione della forza nel punto P.

Poichè V è funzione della sola φ esso è costante per tutti i punti del piano $P\,i$, ed è nulla la componente $\mathcal{H}_s$ in una direzione qualunque in tale piano; per ciò la forza $\mathcal{H}$ è normale al piano $i\,P$. Ritroviamo così una proprietà dalla quale siamo partiti nel nostro studio, e che ci è dimostrata dall'esperienza. La direzione di $\mathcal{H}$ è quella in cui V diminuisce e φ cresce: quella cioè data dalle regole di AMPÈRE e di MAXWELL.

Per calcolare il valore della forza diamo a P uno spostamento $d\,s$ da P in P' nella direzione $P\,\mathcal{H}$, e siano rispettivamente $d\,\varphi$, $d\,V$ gl'incrementi corrispondenti di φ e di V. Si ha:

$$d\,s = r\,d\,\varphi, \qquad d\,V = -2\,i\,d\,\varphi,$$

per cui

$$\mathcal{H} = -\frac{d\,V}{d\,s} = \frac{2\,i\,d\,\varphi}{r\,d\,\varphi},$$

$$\mathcal{H} = \frac{2\,i}{r}. \tag{3'}$$

L'intensità del campo magnetico prodotto da una corrente rettilinea è proporzionale all'intensità della corrente ed inversamente proporzionale alla distanza del punto considerato dalla corrente.

Nel campo di una corrente rettilinea le linee di forza sono dunque cerchi aventi il centro sul conduttore, e giacenti in piani ad esso normali; la forza ha un valore costante lungo ogni cerchio.

Questa legge, da noi ricavata come conseguenza del principio dell'equivalenza, fu trovata sperimentalmente da BIOT e SAVART, ed è anzi una delle leggi che l'esperienza dimostra nel modo il più rigoroso. Essa conferma il principio da cui siamo partiti. È appunto da tale legge che AMPÈRE prese le mosse per stabilire la sua teoria dell'elettromagnetismo, e dedurre il principio dell'equivalenza.

Senza occuparci della verifica sperimentale completa di questa legge, è opportuno ricordare una semplice esperienza, la quale dimostra che la forza è inversamente proporzionale alla distanza.

Un conduttore $i\,i$ (fig. 107) rettilineo, di grande lunghezza, disposto verticalmente, porti mediante fili un disco leggero $A\,B$, libero di rotare attorno all'asse $i\,i$. Sul disco si disponga un magnete $N\,S$ nella direzione del campo terrestre, in modo cioè che l'azione direttrice di detto campo non abbia a torcere i fili di sospensione, e si equilibri il disco per mezzo di un contrappeso P. Così disposte le cose, se noi mandiamo una corrente nel conduttore $i\,i$ non constatiamo alcun movimento. Ciò prova che è nulla la somma dei momenti rispetto all'asse $i\,i$ delle forze che agiscono sul magnete; dette m, $-m$ le masse magnetiche uguali ed opposte nei due poli, $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$ le intensità del campo in essi, r, r' le rispettive distanze dall'asse $i\,i$, si ha:

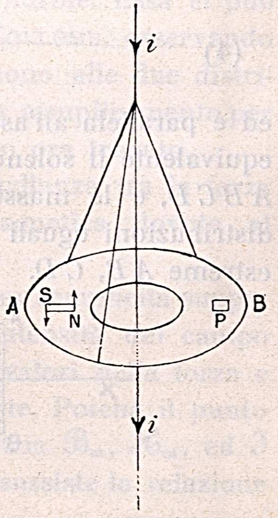

Fig. 107.

$$m\,\mathcal{H}\,r - m\,\mathcal{H}'\,r' = 0,$$

da cui:

$$\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}'} = \frac{r'}{r},$$

come si voleva dimostrare.

97. – Solenoide cilindrico rettilineo. — Consideriamo un solenoide cilindrico rettilineo, che praticamente può essere realizzato da una spirale cilindrica a spire molto serrate, di piccolo passo, uniformemente distribuite sulla superficie del cilindro. Sia $A\,B\,C\,D$ (fig. 108) la proiezione del cilindro, $X\,X$ l'asse del solenoide, n il numero delle correnti del solenoide, o il numero di spire della spirale per unità di lunghezza. Ogni corrente equivale ad una lamina magnetica di potenza $\mathfrak{P} = i$, limitata dal contorno della corrente, lamina che possiamo supporre piana e di grossezza $\lambda = \frac{1}{n}$, cosicchè ognuna combaci colla vicina.

La magnetizzazione ha in ogni punto il valore costante

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{L}}{\lambda} = n\, i, \tag{4}$$

ed è parallela all'asse $X X$. L'insieme di queste lamine, a cui è equivalente il solenoide, forma un magnete cilindrico uniforme $A B C D$, e le masse di magnetismo libero si riducono a due distribuzioni uguali ed opposte di densità $\sigma = \mathfrak{J}$ sulle due faccie estreme $A B$, $C D$.

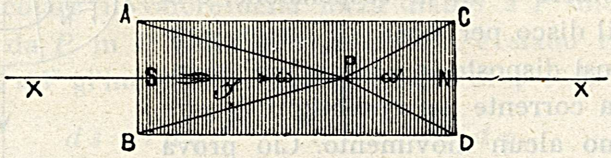

Fig. 108.

Calcoliamo il momento magnetico di questo sistema. Detta a la sezione ed l la lunghezza del cilindro, la massa di magnetismo distribuita su ognuna delle basi è

$$m = \sigma\, a = a\, n\, i$$

e perciò il momento magnetico è

$$\mathfrak{M} = l\, a\, n\, i,$$

o ancora, indicando con N il numero totale $n\, l$ delle spire:

$$\mathfrak{M} = N\, a\, i.$$

Al prodotto $N a$, che rappresenta la somma delle superfici delle spire, si dà il nome di *superficie totale della spirale o del solenoide;* indicandolo con S si avrà infine:

$$\mathfrak{M} = S\, i : \tag{5}$$

Il momento magnetico della calamita equivalente ad un solenoide è uguale al prodotto dell'intensità della corrente per la superficie totale del solenoide.

Servendoci del magnete uniforme equivalente ci e facile studiare il campo prodotto dal solenoide.

Per un punto esterno la forza magnetica dovuta al solenoide è uguale a quella prodotta dal magnete uniforme. Essa si può calcolare o per mezzo della formola di Coulomb, osservando che le masse di magnetismo libero si riducono alle due distribuzioni sulle faccie $A\,B$, $C\,D$; od anche più semplicemente per mezzo del momento magnetico che abbiamo ora trovato.

Per un punto interno si ha invece uguaglianza tra la forza prodotta dalla corrente e l'induzione magnetica dovuta al magnete.

Consideriamo un punto P interno, che per semplicità supponiamo sull'asse $X\,X$. Indichiamo con $\mathcal{H}$ l'intensità del campo dovuto alla corrente, con $\mathcal{H}_m$ e con $\mathcal{B}_m$ i valori della forza e dell'induzione magnetica prodotti dal magnete. Poichè il punto considerato è sull'asse, per ragione di simmetria $\mathcal{B}_m$, $\mathcal{H}_m$, ed $\mathfrak{J}$ sono paralleli fra di loro ed all'asse $X\,X$, e sussiste la relazione

$$\mathcal{B}_m = \mathcal{H}_m + 4\,\pi\,\mathfrak{J}.$$

La forza $\mathcal{H}_m$ prodotta dalle due distribuzioni uniformi di densità $\sigma = \mathfrak{J}$ sulle due faccie ha il valore [79]

$$\mathcal{H}_m = \mathfrak{J}\,(\omega + \omega')$$

in cui ω, ω' sono le superficie apparenti delle due faccie viste dal punto P. Di più la forza $\mathcal{H}_m$ ha direzione opposta alla $\mathfrak{J}$ e si deve considerare come negativa, si avrà dunque:

$$\mathcal{B}_m = 4\,\pi\,\mathfrak{J} - \mathfrak{J}\,(\omega + \omega') = n\,i\,(4\,\pi - \omega - \omega');$$

e per il principio dell'equivalenza

$$\mathcal{H} = n\,i\,(4\,\pi - \omega - \omega'). \tag{6}$$

La forza $\mathcal{H}$, che è sempre positiva perchè $4\,\pi > \omega + \omega'$, varia da punto a punto: per punti vicini ad una delle basi ω od ω' possono raggiungere il loro valore massimo $2\,\pi$; per punti lontani dalle basi ω ed ω' hanno valori piccolissimi. Se si considera un cilindro di grande lunghezza a fronte del diametro, e si prende il punto P verso la metà del cilindro, si può trascurare ω ed ω', e ritenere per approssimazione

(7) $$\mathcal{H} = 4\,\pi\,n\,i.$$

Quando ω ed ω' sono trascurabili, la forza $\mathcal{H}$ è data dalla (7) anche per punti non situati sull'asse; perciò all'interno di un solenoide molto lungo nella regione lontana dalle estremità si ha un campo sensibilmente uniforme. Se si considera invece il campo nelle vicinanze delle estremità, l'intensità varia non solo da punto a punto della stessa sezione, ma anche per i varii punti situati sull'asse. Così per un punto sull'asse infinitamente vicino ad una delle estremità si ha $\omega = 2\,\pi$, $\omega' = 0$, quindi $\mathcal{H} = 2\,\pi\,n\,i$; la forza ha verso le estremità un valore metà di quello che ha nella regione mediana.

Nell'applicare il principio dell'equivalenza invece di ricorrere all'eguaglianza tra la forza dovuta alla corrente e l'induzione dovuta al magnete equivalente, possiamo considerare soltanto l'uguaglianza tra forza e forza nei due campi; occorre perciò disporre il magnete in modo che il punto che si considera si trovi ad esso esterno. Così ad esempio, nel caso del solenoide le lamine possono essere spostate infinitamente poco, per modo che il punto P si trovi nell'aria. Allora esso è posto in una fessura infinitamente sottile praticata nel magnete, e la forza che in esso agisce è appunto quella che abbiamo chiamata forza definita elettromagneticamente, o badando solo ai valori numerici, induzione magnetica. I due modi di considerare la cosa sono dunque affatto coincidenti.

Notiamo intanto come un solenoide ci dia un modo facile di ottenere in un dato spazio un campo praticamente uniforme, e variabile per noti valori quando si faccia variare per noti valori l'intensità della corrente i. Il campo prodotto da un solenoide potrà perciò riuscire utile nelle esperienze dirette alla determinazione delle proprietà magnetiche del ferro e dei suoi derivati [84]. Occorre però che facciamo a questo riguardo una importante osservazione.

Se immaginiamo posto entro al solenoide rettilineo un nucleo di ferro, per l'influenza del campo generato dalla corrente il nucleo di ferro si magnetizza, si sviluppano su di esso delle masse di magnetismo libero, le quali alla loro volta dànno luogo a forze magnetiche. Per tal modo la forza in un punto qualunque interno al solenoide, non è più solo la forza $\mathcal{H}$ dovuta al solenoide, ma è la risultante della forza $\mathcal{H}$ e della forza dovuta alle masse di magnetismo libero sul nucleo di ferro. Questa seconda forza è sempre una forza demagnetizzante [87] opposta alla $\mathcal{H}$; il suo valore è tanto maggiore quanto maggiore è il diametro del cilindro a fronte della lunghezza; essa però non si può esattamente calcolare se non quando è nota la densità del magnetismo libero, cioè l'intensità della magnetizzazione; non è quindi nota quando non si conoscano prima le proprietà del nucleo introdotto.

Nella pratica si ovvia a tale inconveniente annullando questa forza, o rendendola così piccola da poterla senza possibile errore trascurare. Perciò Ewing usa piccole sbarre della lunghezza di 300 a 400 volte il diametro; Hopkinson ed altri usano sbarre piegate ad anello, o in generale circuiti magnetici chiusi, nei quali non si hanno masse di magnetismo libero.

Con tali disposizioni si può ancora ritenere il campo uniforme di intensità

$$\mathcal{H} = 4\pi n i.$$

98. – Distribuzione del potenziale magnetico. — Nei campi generati da correnti il potenziale magnetico è una funzione *polidroma*, e non una funzione *monodroma*, come nei campi dovuti a semplici masse magnetiche newtoniane.

Consideriamo una corrente i in un circuito $A\,B$ (fig. 109), che per semplicità supponiamo piano, e la lamina

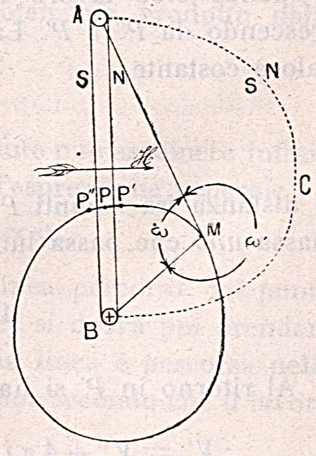

Fig. 109.

magnetica piana equivalente. Sia un punto P interno alla lamina, e due punti esterni P', P'' infinitamente vicini ad essa, l'uno da una parte, l'altro dall'altra.

Finchè si considerano punti esterni alla lamina, sono le stesse le condizioni del campo dovuto alla lamina, e quelle del campo prodotto dalla corrente. Perciò, a meno di una costante, il potenziale ha nei due casi il valore

$$V' = 2\pi \mathfrak{L} = 2\pi i$$

nel punto P' infinitamente vicino alla faccia nord, ed il valore

$$V'' = -2\pi \mathfrak{L} = -2\pi i$$

nel punto P'' infinitamente vicino alla faccia sud.

Se a partire dal punto P', seguendo una linea qualunque $P'MP''$ che non attraversi la lamina, si fa passare la massa magnetica *unità* da P' in P'', le forze del campo fanno sulla massa mobile un lavoro positivo

$$V' - V'' = 2\pi i - (-2\pi i) = 4\pi i.$$

Se ora, nel caso della lamina, si fa ritornare la massa *uno* da P'' in P' lungo un canaletto infinitamente sottile scavato in essa, poichè la forza nell'interno è opposta alla direzione del movimento, si fa sulla massa mobile *uno* un lavoro negativo, si spende cioè lavoro dall'esterno, e perciò il potenziale va crescendo da P'' a P'. La forza nell'interno della lamina ha il valore costante

$$4\pi \mathfrak{J} = 4\pi \frac{i}{\lambda};$$

la distanza fra i punti P'' e P' è λ, per cui il lavoro fatto sulla massa *uno* che passa lungo il canaletto da P'' in P' è

$$4\pi \frac{i}{\lambda} \cdot \lambda = 4\pi i.$$

Al ritorno in P' si ha un potenziale

$$V'_1 = V'' + 4\pi i = -2\pi i + 4\pi i = 2\pi i = V',$$

eguale al primitivo.

Nel campo generato dalla lamina il potenziale è dunque una funzione monodroma; è nullo il lavoro lungo una linea chiusa qualunque, come deve necessariamente essere, perchè il campo è dovuto a condizioni statiche.

Invece nel campo della corrente si fa nel passaggio da P'' a P' un lavoro infinitamente piccolo, poichè la forza ha valori finiti che variano in modo continuo fra questi punti e agisce per uno spazio infinitamente piccolo. Perciò, dopo percorsa la linea chiusa, si trova all'arrivo in P' un valore del potenziale non diverso da quello che si aveva in P'' cioè:

$$V'_1 = V'' = -2\pi i.$$

Nel campo della corrente percorrendo una linea chiusa con essa concatenata si fa dunque sulla massa mobile *uno* un lavoro positivo

$$V' - V'_1 = 4\pi i.$$

Ciò è possibile in questo campo, perchè il lavoro viene ricavato a spesa dell'energia fornita dalla corrente. Se da P' con una linea concatenata si ritorna in P' ad ogni giro il potenziale diminuisce di $4\pi i$; il potenziale in P' può avere infiniti valori che differiscono l'un dall'altro di $4\pi i$.

In un punto qualunque M, dal quale la faccia nord di $A B$ è vista sotto un angolo solido ω, il potenziale prodotto dalla lamina ha il valore

$$v = \omega i + \text{cost.},$$

invece il potenziale prodotto dalla corrente può assumere infiniti valori che si possono raggruppare nell'espressione generale

$$V = \omega i \mp 4\pi N i + \text{cost.}, \tag{8}$$

in cui N è il numero di volte che la linea percorsa dal punto si concatena col circuito della corrente; si dovrà poi prendere il segno *meno* od il *più* secondo che la linea è percorsa nella direzione della forza o nella opposta, cioè secondo che il lavoro fatto è positivo o negativo.

A questa stessa espressione possiamo giungere con ragionamento alquanto diverso.

Partendo dal punto M, nel quale il potenziale ha il valore $\omega i + \text{cost.}$, immaginiamo di percorrere una linea chiusa concatenata colla corrente; poichè la forma e la disposizione della lamina sono arbitrarie, noi potremo sempre fare in modo che in tale movimento non si abbia ad attraversare la lamina; basterà che giunti nelle vicinanze di P'' la lamina vada deformandosi come spinta avanti dal punto mobile. Con ciò, quando si sia ritornati in M, la lamina avrà presa una posizione come la $A\,C\,B$. In tali condizioni dal punto M si vede non più la faccia nord, ma la faccia sud, sotto l'angolo $\omega' = 4\pi - \omega$, e quindi il potenziale non ha più il valore $\omega\, i +$ cost., ma un nuovo valore

$$-(4\pi - \omega)\, i + \text{cost.} = (\omega - 4\pi)\, i + \text{cost.},$$

come volevasi dimostrare.

Il campo generato da una corrente è uno *spazio ciclico*, un campo cioè nel quale il potenziale è una funzione polidroma; la costante $4\pi i$ dicesi la *costante ciclica*. Se si considerano linee chiuse non concatenate colla corrente, il lavoro fatto lungo di esse è nullo; si può quindi rendere lo spazio *aciclico* conducendo una superficie qualunque limitata dal contorno $A\,B$, e ponendo come condizione di non mai attraversarla; solo allora si può parlare di potenziale monodromo.

99. – Distribuzione del potenziale nel campo di una corrente rettilinea. — Nel caso di una corrente rettilinea le proprietà dimostrate circa la distribuzione dei potenziali si possono direttamente ricavare dalla legge di Biot e Savart.

Sia un punto qualunque A nel campo della corrente i; poichè la forza $\mathcal{H} = \dfrac{2\,i}{r}$ è normale al piano $A\,i$, comunque si faccia muovere una massa magnetica in tale piano, il lavoro fatto è nullo. Se invece si passa dal piano $A\,i$ ad un altro piano $B\,i$ ad angolo α col precedente seguendo l'arco di cerchio di raggio $A\,i = r$, il lavoro fatto è

$$L = \frac{2\,i}{r} \cdot \alpha\, r = 2\,\alpha\, i.$$

Questo lavoro è indipendente dalla distanza del punto dalla corrente e dipende esclusivamente dall'ampiezza dell'angolo α.

Supponiamo ora che la massa *uno* mobile passi dal punto A al punto B, seguendo una linea qualunque piana o sghemba (fig. 110). Conduciamo per il conduttore i un serie di piani che taglino la linea in punti proiettati in figura in M, N, P..... Nel piano normale ad i, col centro sul conduttore i, e con raggio $i\,A$ conduciamo un arco di cerchio, che intersechi il piano $i\,M$ in un punto proiettato in m; analogamente nel piano normale ad i, con centro su i, e con raggio $i\,M$ si tracci un arco di cerchio, che tagli il piano $i\,N$ in un punto proiettato in n; si faccia lo stesso per tutti gli altri punti. Uniamo M con m, N con n....., con linee qualunque giacenti nei piani $i\,M$, $i\,N$..., e proiettantisi in figura in $M\,m$, $N\,n$...

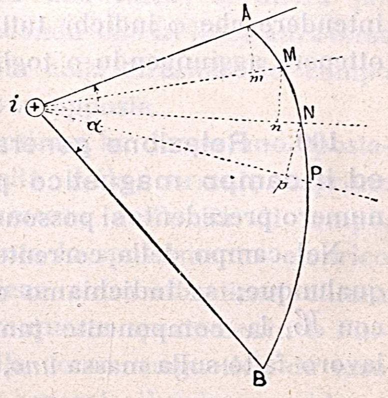

Fig. 110.

Se si immagina che il numero dei piani condotti per i cresca indefinitamente, si ha una linea spezzata a lati infinitesimi, il cui limite è la linea data $A\,B$. Il lavoro che le forze del campo fanno quando la massa magnetica *uno* percorre la linea $A\,B$, è il limite cui tende il lavoro fatto dalle forze del campo sulla massa *uno* che percorre la linea spezzata. Ora sono nulli tutti i lavori fatti nei tratti di linea $m\,M$, $n\,N$..., e il lavoro si riduce alla somma dei lavori corrispondenti agli archi di cerchio $A\,m$, $M\,n$... Su uno qualunque di essi che sottende un angolo $d\,\alpha$ il lavoro è $2\,i\,d\,\alpha$, quindi il lavoro totale è

$$2\,i\,\alpha,$$

ove α è l'angolo piano compreso fra i due piani $i\,A$, $i\,B$.

Il lavoro fatto è indipendente dalla linea percorsa, dipende solo dall'ampiezza α compresa fra i piani passanti per i e pei punti estremi. In tale campo le forze ammettono dunque un potenziale, il quale però non è monodromo, perchè l'angolo α e quindi il lavoro fatto, può avere infiniti valori secondo il numero delle volte che la linea $A\,B$ considerata gira attorno alla corrente i. I varii valori di α differiscono l'un l'altro di 2π, e quindi i diversi valori del lavoro e del potenziale differiscono di $4\pi i$, perciò nell'espressione generale (3) del potenziale nel campo di una corrente rettilinea $V = 2i(\pi - \varphi)$, si dovrà intendere che φ indichi tutti i possibili valori che si possono ottenere aggiungendo o togliendo un multiplo intero di 2π.

100. – Relazione generale fra lo spostamento elettrico ed il campo magnetico prodotto. — I risultati ottenuti nel numero precedente si possono porre sotto forma alquanto diversa.

Nel campo della corrente consideriamo una linea chiusa l qualunque; se indichiamo con $d\,l$ un elemento della linea, e con $\mathcal{H}_l$ la componente tangenziale della forza magnetica, il lavoro fatto sulla massa *uno*, che si sposta lungo questo elemento è $\mathcal{H}_l\,d\,l$, e quindi il lavoro fatto lungo tutta la linea $\int \mathcal{H}_l\,d\,l$. Ora se la linea considerata è semplicemente concatenata, e viene percorsa N volte, il lavoro fatto è $4\pi N i$, e si ha perciò

$$\int \mathcal{H}_l\,d\,l = 4\pi N i.$$

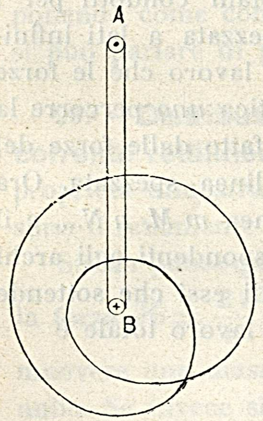

Fig. 111.

La stessa espressione del lavoro vale quando si percorre una sola volta una linea chiusa, che si concatena N volte colla corrente (fig. 111), e ancora quando si percorre una linea chiusa che passa una sola volta entro ad una spirale formata da N spire, perchè il lavoro è indipendente della forma della linea e della corrente, e dipende esclusivamente dal numero di volte che la corrente e la linea insieme si concatenano.

Questa relazione si può subito estendere al caso in cui il campo è prodotto da un sistema di correnti; il lavoro complessivo è la somma dei lavori dovuti alle singole correnti, e quindi

$$\int \mathcal{H}_l\,d\,l = 4\pi \Sigma N i. \tag{9}$$

In ogni termine della sommatoria N è il numero di volte che la linea si concatena colla corrente, nulla importando se sia la linea che passi N volte entro al circuito della corrente, o se la corrente passi N volte entro alla linea; si dovrà poi prendere N positivo o negativo, secondo che la linea attraversa il circuito della corrente considerata nella direzione del campo da questa prodotto, o nella direzione opposta.

Nel circuito di una corrente continua ha luogo uno spostamento elettrico costante; l'intensità della corrente esprime appunto la variazione dello spostamento nell'unità di tempo. Pertanto il termine $\Sigma N i$ rappresenta lo spostamento elettrico totale che null'unità di tempo avviene entro alla linea chiusa considerata; la (9) è la relazione fra questo spostamento e l'integrale lungo la linea chiusa della forza magnetica da esso prodotta, e perciò risolve in modo generale il primo problema che ci siamo proposto sull'elettromagnetismo.

101. – Influenza delle masse magnetiche libere e della natura dei materiali del campo. — Nelle considerazioni svolte al numero precedente abbiamo tacitamente supposto che la linea l fosse tracciata nell'aria, e che nel campo generato dalla corrente non esistessero masse magnetiche libere. Trattiamo ora il caso generale; nel campo della corrente esistano masse magnetiche libere, distribuite o su pezzi di ferro magnetizzati per l'azione induttiva della corrente, o su magneti preesistenti; la linea l sia tracciata comunque nello spazio occupato da aria o da materiale magnetico.

In ogni punto del campo la forza $\mathcal{H}$ è la risultante della forza $\mathcal{H}'$ dovuta alla corrente, che si calcola come abbiamo detto precedentemente, e della forza $\mathcal{H}''$ dovuta alle masse di magnetismo libero, che si calcola colla formola di Coulomb, quando sia nota la distribuzione delle masse. In ogni punto della linea si ha $\mathcal{H}_l = \mathcal{H}'_l + \mathcal{H}''_l$, e perciò il lavoro fatto sulla massa *uno* che percorre la linea è:

$$\int \mathcal{H}_l \, d\, l = \int \mathcal{H}'_l \, d\, l + \int \mathcal{H}''_l \, d\, l.$$

Ora, si ha per la (9):

$$\int \mathcal{H}'_l \, d\, l = 4\pi \Sigma N i,$$

di più qualunque sia la linea l:

$$\int \mathcal{H}''_l \, d\, l = 0,$$

perchè è nullo l'integrale lungo la linea chiusa della forza $\mathcal{H}'$ dovuta a masse newtoniane, le quali ammettono sempre un potenziale monodromo.

Pertanto sta ancora la relazione:

$$\int \mathcal{H} \, d\, l = 4\pi \Sigma N i.$$

L'integrale della forza magnetica lungo una linea chiusa qualunque dipende esclusivamente dalla intensità delle correnti, e dal numero di volte che la linea si concatena; è affatto indipendente dalla natura dei materiali attraversati e dalla distribuzione delle masse magnetiche libere nel campo.

Quando la linea chiusa non è concatenata con alcuna corrente è nullo l'integrale della forza lungo di essa, qualunque sia la distribuzione del campo; quando non è nullo l'integrale della forza magnetica lungo una linea chiusa, questa linea certamente si concatena col circuito di qualche corrente. Questa proprietà potrebbe anzi servire come definizione della corrente: esiste corrente in un dato circuito quando non è nullo l'integrale della forza magnetica lungo una linea qualunque con esso concatenata. Si definirebbe in tal modo la corrente per mezzo dei suoi effetti magnetici, sui quali sono fondati molti dei mezzi pratici di misura.

Importa già sin d'ora notare che la corrente elettrica è un fenomeno che non ha sede soltanto nel conduttore, ma si estende a tutto lo spazio circostante; questo si trova in condizioni speciali, è sede di un campo magnetico, nel quale l'integrale della forza lungo una linea chiusa è diverso da zero.

Se è vero che una variazione qualunque dei corpi che si trovano nel campo generato da una corrente non fa variare l'integrale della forza lungo una linea chiusa qualunque, non ne consegue però che tutto il campo rimanga immutato.

Varia anzitutto colla natura dei mezzi attraversati l'integrale dell'induzione magnetica.

Infatti, se indichiamo con μ il valore della permeabilità magnetica in un punto qualunque della linea corrispondente allo stato in cui quel materiale si trova, si ha per ogni punto $\mathcal{B}_l = \mu \mathcal{H}_l$, e sostituendo nella (9):

$$\int \frac{\mathcal{B}_l}{\mu} d\, l = 4\, \pi\, \Sigma\, N i.$$

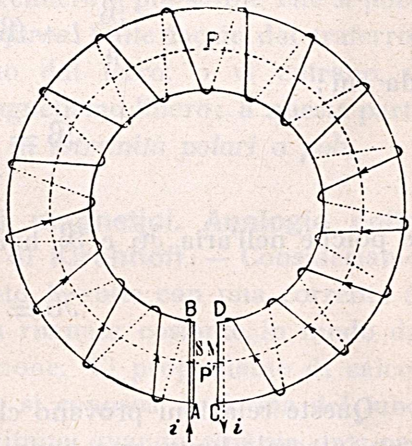

Fig. 112

Se, come caso speciale, la linea è tracciata tutta nello stesso materiale, μ ha un valore costante lungo tutta la linea, e allora

$$\int \mathcal{B}_l\, d\, l = 4\, \pi\, \mu\, \Sigma\, N i.$$

L' integrale dell' induzione magnetica lungo una linea chiusa qualunque dipende dalla permeabilità dei mezzi attraversati; ed è proporzionale alla permeabilità quando il mezzo attraversato è unico.

Anche il valore della forza e l'integrale della forza lungo una linea aperta variano colla natura della sostanza. Immaginiamo un circuito magnetico fatto in massima parte di ferro con una piccola porzione di aria. Sia, ad esempio, un toro di ferro (fig. 112) dal quale siasi asportata la materia magnetica fra due sezioni vicine $A\, B$, $C\, D$, e su di esso sia avvolta una spirale uniforme percorsa da corrente. Il complesso costituisce un tubo di induzione, o circuito magnetico, lungo il quale il flusso di induzione è costante; le linee di induzione sono cerchi coassiali all'asse del toro.

Consideriamo una qualunque di queste linee di induzione, e distinguiamo le due parti, la $S\, P\, N$ compresa nel ferro, e la $N\, P'\, S$ nell'aria. Per il ferro si ha $\mathcal{H} = \frac{\mathcal{B}}{\mu}$, per l'aria $\mathcal{H} = \mathcal{B}$, è perciò l'integrale della forza lungo questa linea è

$$\int \mathcal{H}_l \, d\, l = \frac{1}{\mu} \int_{SPN} \mathcal{B}\, d\, l + \int_{NP'S} \mathcal{B}\, d\, l = 4\pi N i.$$

Se supponiamo l'induzione $\mathcal{B}$ costante ed indichiamo con l la lunghezza della linea $S\,P\,N$ nel ferro, con d la lunghezza della linea $N P' S$ nell'aria, si ha:

$$\frac{\mathcal{B}}{\mu}\, l + \mathcal{B}\, d = 4\pi N i,$$

da cui:

$$\mathcal{B} = \frac{4\pi N i}{\frac{l}{\mu} + d},$$

e poichè nell'aria $\mathcal{H}$ e $\mathcal{B}$ hanno lo stesso valore:

$$\mathcal{H} = \frac{4\pi N i}{\frac{l}{\mu} + d}.$$

Queste relazioni provano che i valori della forza $\mathcal{H}$ e del suo integrale lungo una linea aperta dipendono della permeabilità del mezzo. È bensì costante l'integrale della forza lungo una linea chiusa, ma la distribuzione di questa forza lungo la linea varia colla natura dei materiali.

Se nel toro si avesse un materiale unico, la forza avrebbe un valore costante lungo la linea: costituendo invece il toro con materiali diversi, diminuisce la forza nel mezzo più permeabile, cresce nell'aria. Se si fa μ grandissimo, d molto piccolo, la forza $\mathcal{H}$ nell'aria può avere valori grandissimi.

Indichiamo con Φ, $\mathcal{B}$, S rispettivamente i valori del flusso, dell'induzione e della sezione nel toro dianzi considerato, valori che possiamo ritenere costanti. Si ha allora:

$$\Phi = \mathcal{B}\, S = S\, \frac{4\pi N i}{\frac{l}{\mu} + d}.$$

Il valore del flusso non dipende soltanto dall'intensità della corrente magnetizzante e dal numero di volte che essa si concatena col circuito magnetico, ma anche dalla permeabilità dei materiali. Se d è piccolo e μ assai grande, il flusso può avere valori grandissimi.

A disposizioni di questa natura si ricorre nella pratica per ottenere nell'aria notevoli valori del flusso e della forza magnetica. Si usano perciò circuiti costituiti quasi completamente da materiale magnetico, su cui sono avvolte le spirali induttrici; allo strato d'aria, che conviene rendere il più sottile che si può, si dà il nome di *traferro* o *interferro*. Sulle faccie del traferro, dove le linee d'induzione escono dal ferro, o vi entrano, si formano due distribuzioni di magnetismo libero; a queste parti si dà perciò dai pratici il nome di *estremità polari* o *poli*.

102. – Calcolo dei circuiti magnetici. Analogie colla legge di Ohm e coi principii di Kirchhoff. — Consideriamo un circuito magnetico concatenato N volte con una corrente i, nel quale il flusso sia o si possa ritenere costante, in modo da costituire un vero tubo di induzione. Ci proponiamo di calcolare il valore del flusso, quando si conosca la forma del tubo ed i materiali di cui esso è costituito, quando cioè sia data per ogni sezione l'area S e la permeabilità μ.

Perciò non occorre che noi consideriamo il valore dell'induzione magnetica nei singoli punti di una stessa sezione, ma possiamo invece in ogni sezione considerare un valore medio $\mathcal{B} = \frac{\Phi}{S}$, tale che, se esso esistesse in tutti i punti della sezione, il flusso avrebbe lo stesso valore che ha effettivamente.

Per ogni sezione del tubo le grandezze $\mathcal{B}$, $\mathcal{H}$, μ, S si possono determinare come date funzioni dalle distanze l misurate su di una linea d'induzione a partire da un punto arbitrario. Tra queste grandezze passano le relazioni:

$$\mathcal{H} = \frac{\mathcal{B}}{\mu}, \qquad \mathcal{B} = \frac{\Phi}{S}, \qquad \mathcal{H} = \frac{\Phi}{\mu S},$$

perciò la (9) applicata ad una linea d'induzione qualunque ci dà

$$\Phi \int \frac{d\,l}{\mu S} = 4 \pi N i,$$

o ancora

(10) $$\mathfrak{R}\,\Phi = 4\pi N i,$$

ove si ponga

(11) $$\mathfrak{R} = \int \frac{dl}{\mu S}.$$

Importa notare l'analogia fra queste relazioni e quelle che esprimono la legge di Ohm per un circuito elettrico completo $\left(r i = e,\ r = \int \frac{ds}{cS}\right)$, quando si faccia corrispondere il flusso di induzione all'intensità della corrente, cioè lo spostamento elettrico allo spostamento magnetico, la forza elettromotrice a $4\pi N i$, la resistenza r ad $\mathfrak{R}$.

Alla grandezza $4\pi N i$ si può dare per analogia il nome di *forza magnetomotrice*. Con tale denominazione abbiamo già indicato [81] una grandezza della stessa natura delle forze magnetiche; ora invece indichiamo una grandezza che, come risulta dalla (9), è un integrale lineare della forza magnetica, ossia è una grandezza della natura dei potenziali; precisamente come in elettricità si dà il nome di forza elettromotrice a due grandezze, delle quali l'una è una vera forza, mentre l'altra è della natura dei potenziali.

Alla grandezza $\mathfrak{R}$ si dà il nome di *resistenza magnetica del circuito magnetico*, o, come fu proposto da O. Heaviside, *riluttanza*. La riluttanza è legata alla lunghezza ed alla sezione del circuito magnetico dalla relazione (11), la quale è perfettamente analoga a quella che lega la residenza ohmica alla lunghezza ed alla sezione del circuito elettrico.

Si può ancora porre $\varrho = \frac{1}{\mu}$, e proseguendo nell'analogia si può dare alla μ il nome di *conduttività magnetica*, ed al reciproco ϱ il nome di *resistenza magnetica specifica* o *riluttività*.

Nel caso speciale di un circuito a sezione uniforme ed a riluttività costante, si ha $\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu S} = \varrho \frac{l}{S}$; forma analoga a quella che serve per un circuito elettrico a sezione uniforme ed a resistività costante.

Abbiamo considerato il caso di un tubo di induzione concatenato colla corrente, nella quale il flusso è costante. In pratica si hanno sempre dei flussi perduti, e riesce in generale impossibile ottenere un flusso costante lungo tutto il circuito; è però sempre possibile dividere il circuito magnetico in porzioni nelle quali il flusso si possa ritenere costante, cosicchè si ha

$$\int \mathcal{H}_l \, d\, l = \Sigma\, \mathcal{R}\, \Phi.$$

Per semplificare il calcolo delle riluttanze $\mathcal{R}$, converrà che le porzioni in cui si divide il circuito siano tali che si possano considerare costanti non solo Φ, ma anche μ ed S.

Nel caso generale in cui il circuito si concateni con diverse correnti, la (9) ci darà:

$$\Sigma\, \mathcal{R}\, \Phi = 4\, \pi\, \Sigma\, N\, i, \tag{12}$$

relazione analoga a quella che costituisce il secondo principio di Kirchhoff.

Anche il primo principio di Kirchhoff trova il suo corrispondente nei circuiti magnetici; poichè lo spostamento magnetico è solenoidale, fra i varii flussi che si incontrano in un punto sussiste la relazione

$$\Sigma\, \Phi = 0, \tag{13}$$

nell'applicazione della quale è da ricordare che, mentre la corrente elettrica ha sede solo nei corpi conduttori, il flusso magnetico ha luogo non solo nei materiali magnetici, ma anche nell'aria e in generale in qualunque mezzo, poichè non si hanno corpi magneticamente coibenti, nei quali sia $\mu = 0$.

Valgono dunque per i circuiti magnetici le stesse relazioni che per i circuiti elettrici, ed il calcolo potrà essere condotto nei due casi in modo perfettamente analogo.

Le analogie che abbiamo notato fra le due categorie di fenomeni stanno solo nella forma delle equazioni, ma non hanno alcuna base nella natura fisica dei fenomeni stessi. E difatti in un circuito elettrico r e ϱ dipendono dalla natura, dalla forma e dalle dimensioni del corpo, e dalle sue condizioni fisiche di struttura e di temperatura, ma sono indipendenti dalle grandezze elettriche e, i; o, se vogliamo, ne dipendono solo indirettamente, in quanto la temperatura dipende dall'intensità della corrente.

Invece le grandezze $\mathcal{R}$, ϱ e μ, non sono costanti per un dato circuito magnetico, ma dipendono, direttamente dai valori di $\mathcal{H}$ e di $\mathcal{B}$; che anzi non sono sempre funzioni che si possano esprimere con formule, perchè dipendono non solo dai valori attuali, ma anche dai valori precedenti di $\mathcal{H}$ e di $\mathcal{B}$. Nel circuito elettrico i è proporzionale ad e, mentre nel circuito magnetico Φ non è proporzionale a $4\pi\Sigma Ni$.

103. – Corrente posta in un campo magnetico. Energia. Lavori. — Il principio dell'equivalenza ci dà modo di ricavare l'espressione dell'energia di una corrente elettrica posta in un campo magnetico.

Difatti l'energia di una lamina magnetica semplice di potenza $\mathfrak{L}$ posta in un campo magnetico è (16), [76]:

$$W = \mathfrak{L}\,\Phi,$$

dove Φ indica il numero di linee di forza del campo che arrivano sulla faccia nord della lamina.

Ora una corrente elettrica in un circuito chiuso equivale ad una lamina magnetica semplice di potenza $\mathfrak{L} = i$, e perciò l'energia di una corrente posta in un campo magnetico è espressa da

$$W = i\,\Phi,$$

in cui Φ è il flusso di induzione, dovuto al campo, che attraversa il circuito nella direzione opposta a quella del flusso prodotto dalla corrente.

Nella trattazione delle correnti conviene assumere sempre come direzione positiva dei flussi entro al circuito la direzione del flusso prodotto dalla corrente stessa; con questa ipotesi si dovrà considerare Φ come un flusso negativo, cioè, indicando con $\varphi = -\Phi$ il flusso concatenato nella direzione positiva, l'espressione dell'energia di una corrente in un campo magnetico è

$$(14) \qquad W = -i\,\varphi .$$

Se, con uno spostamento della corrente i, o con una variazione nel campo prodotta con una variazione delle masse o delle correnti che lo generano, il flusso concatenato si fa passare dal valore φ_1, al valore φ_2, le forze che il campo esercita sulla corrente fanno un lavoro

$$L = -i\,(\varphi_1 - \varphi_2) = i\,(\varphi_2 - \varphi_1),$$

il quale è positivo o negativo, ossia è un lavoro ricavato o un lavoro speso dall'esterno, secondo che φ_2 è maggiore o minore di φ_1, cioè secondo che l'energia del sistema è diminuita od aumentata.

Se nel sistema si hanno parti mobili, queste, per l'azione delle forze che su di esse agiscono, si spostano in modo da produrre un lavoro positivo, ossia in modo da diminuire l'energia del sistema. È posizione di equilibrio stabile quella in cui il flusso φ ha il valore massimo.

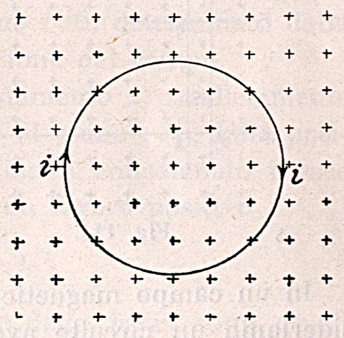

Fig. 113.

Così, per esempio, se in un campo magnetico uniforme si ha una corrente circolare, libera di rotare attorno ad un asse normale alla direzione del campo, il circuito girerà sino a porsi nel piano perpendicolare alle linee di forza, in modo che queste lo attraversino nella direzione positiva, come è indicato nella fig. 113, in cui si è supposto che le linee magnetiche vadano dal davanti al di dietro del piano di figura. Nel campo magnetico terrestre una corrente libera di rotare attorno ad un asse verticale si dispone normalmente al piano meridiano magnetico per modo che il polo magnetico terrestre nord si trovi alla sinistra dell'osservatore di Ampère rivolto verso l'interno del circuito.

Negli esempi considerati la posizione del circuito girato di π, la quale corrisponde al valore minimo di φ, è ancora una posizione di equilibrio, ma instabile.

104. – Circuiti deformabili. Forze che il campo magnetico esercita su porzioni finite o infinitesime di corrente. — Le considerazioni svolte nel numero precedente ci permettono di calcolare la forza che un campo magnetico esercita su una data porzione di corrente.

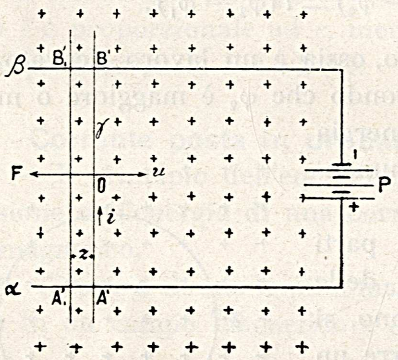

Fig. 114.

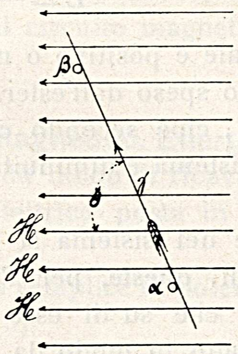

Fig. 114 *a*.

In un campo magnetico uniforme fisso ed invariabile, consideriamo un circuito avente una porzione rettilinea mobile, costituito, ad esempio, da due conduttori paralleli α, β, sui quali può scorrere un conduttore rettilineo γ (fig. 114); una pila P di f. e. m. e mantenga in questo circuito una corrente di intensità i costante nella direzione della freccia. Per maggior generalità supponiamo che il piano del circuito non sia normale al campo, supponiamo cioè che le linee di forza magnetiche $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$, normali al piano di figura dall'avanti all'indietro, facciano un angolo θ colla direzione del conduttore mobile γ (come si scorge dalla fig. 114 *a* rappresentante una sezione normale ai conduttori α, β).

Per una data posizione del conduttore γ, cui corrisponde un flusso φ concatenato, l'energia del sistema ha il valore

$$W = -i\,\varphi.$$

Se con uno spostamento del conduttore γ si produce una variazione del flusso, si ricava o si spende un lavoro; il campo esercita dunque sul conduttore delle forze, alle quali il lavoro è dovuto. Per trovare quali sono queste forze possiamo ragionare così:

Se il filo γ, rimanendo a contatto dei conduttori α, β, ruota attorno al punto di mezzo O della porzione $A\,B$, non varia il numero di linee di forza concatenate, e perciò non si ricava, nè si spende lavoro; le forze che il campo esercita sul conduttore γ ammettono dunque una risultante F applicata nel punto O.

Il lavoro fatto è ancora nullo se, mantenendo sempre il contatto elettrico con α e con β, si fa scorrere il conduttore γ nella propria direzione, o parallelamente alle linee di forza $\mathcal{H}$; la forza F è dunque normale al piano $i\,\mathcal{H}$, determinato dalla direzione della corrente, e dalla direzione del campo.

Se si dà al conduttore γ uno spostamento z parallelamente a sè stesso nella direzione F, normale al piano $i\,\mathcal{H}$, dalla posizione $A'\,B'$, alla posizione $A'_1\,B'_1$, il flusso concatenato cresce dal valore φ_1 al valore φ_2; si ricava un lavoro positivo

$$F z = i\,(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Pertanto la direzione ed il verso della forza sono quelli indicati dalla freccia F. Calcoliamone ora l'intensità.

La variazione del flusso è data dal prodotto dell'intensità $\mathcal{H}$ del campo per la proiezione $A'\,B'\,B'_1\,A'_1$ dell'area generata sul piano normale ad $\mathcal{H}$; cioè, indicando con l la lunghezza effettiva del conduttore γ compresa fra i punti A, B di contatto, si ha

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \mathcal{H}\, z\, l \operatorname{sen} \theta.$$

Sostituendo nell'equazione precedente si ricava

$$F = i\,\mathcal{H}\, l \operatorname{sen} \theta,$$

e perciò la forza sull'unità di lunghezza del conduttore è

$$f = i\,\mathcal{H} \operatorname{sen} \theta. \tag{15}$$

Possiamo quindi concludere:

Un campo magnetico uniforme esercita sopra un conduttore rettilineo percorso da corrente forze normali alla direzione della corrente ed alla direzione del campo, rivolte verso la sinistra della corrente, cioè verso la sinistra di un osservatore che guardi nella direzione del campo e sia disteso sul conduttore in modo che la corrente gli entri per i piedi.

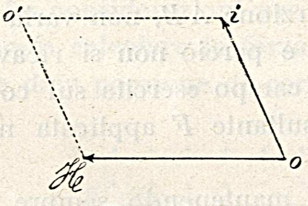

Fig. 115.

L'intensità della forza per unità di lunghezza del conduttore è data dal prodotto delle intensità della corrente e del campo, per il seno dell'angolo compreso fra le loro direzioni, o, se vogliamo, dall'area del parallelogramma $O\,i\,o'\,\mathcal{H}$ (fig. 115) *costrutto sui due vettori che rappresentano la corrente e la forza magnetica del campo.*

Il verso della forza si può ancora definire in questo modo:

Se si immagina il cavaturaccioli di MAXWELL *piantato in O, la direzione della forza è quella nella quale avanza il cavaturaccioli, quando il manubrio si fa rotare in modo che i, supposta trascinata dal manubrio, si avvicini ad* $\mathcal{H}$.

Abbiamo considerato l'azione che un campo uniforme esercita su una corrente rettilinea; quando il campo non è uniforme, o la corrente non è rettilinea, si può ancora per mezzo della (15) calcolare la forza che sulla corrente si esercita, immaginandola divisa in tante porzioni, nelle quali si possano ritenere verificate le dette condizioni. In particolare la (15) si può sempre applicare a correnti elementari.

Se si considera un elemento di lunghezza $d\,l$ di un circuito percorso da una corrente i, possiamo ammettere che nella regione infinitesima ove è situato l'elemento l'intensità $\mathcal{H}$ del campo sia uniforme; e perciò la forza $d\,f$ che il campo esercita sull'elemento di corrente è

$$d\,f = i\,\mathcal{H}\,d\,l \operatorname{sen} \theta. \tag{16}$$

Questa relazione risolve tutti i problemi che ci possiamo proporre riguardo alle forze che un campo magnetico esercita su di una corrente; essa è generale, ed applicata ai singoli elementi, riduce il problema fisico ad un problema matematico di integrazione.

105. - Correnti nel campo prodotto da un'unica massa magnetica. Corrente circolare. Unità elettromagnetica di corrente. — Si consideri un elemento di corrente AB di lunghezza $d\,l$, a distanza r dal punto M in cui si trova la massa $+m$, che da sola produce il campo. Questo ha l'intensità $\mathcal{H} = \frac{m}{r^2}$ ed esercita sull'elemento $d\,l$ la forza

$$d\,f = \frac{m\,i\,d\,l}{r^2}\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

normale al piano MAB.

Se $\theta = 90^\circ$, la forza ha il valore massimo

$$d\,f = \frac{m\,i\,d\,l}{r^2}.$$

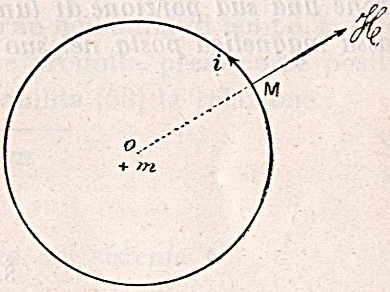

Fig. 116.

In particolare consideriamo una massa $+m$ posta al centro di una corrente i circolare, avente la direzione segnata nella figura 116; per ogni elemento si ha $\theta = 90^\circ$, e quindi la forza che il campo esercita su una porzione del circuito di lunghezza l è

$$(17) \qquad F = \frac{m\,i}{r^2}\,l,$$

ed è diretta dal davanti al di dietro del piano di figura. La forza che la porzione l di circuito esercita sulla massa m è uguale ma opposta a quella esercitata dalla massa sulla corrente, e cioè diretta alla sinistra di un osservatore che guardi non più nella direzione del campo, ma verso la massa m; il che d'altronde ci era già noto per la regola di Ampère sui campi prodotti da correnti.

Se consideriamo l'intera circonferenza la forza ha il valore

$$F = 2\pi \frac{m\,i}{r},$$

Il caso che consideriamo serve a darci una nuova definizione dell'unità di misura elettromagnetica di corrente.

Una porzione di lunghezza $l = 1$ di un circuito circolare di raggio $r = 1$ percorsa da una corrente i esercita sull'unità di massa posta nel suo centro una forza $f = i$.

Sarà perciò $i = 1$ quando $f = 1$, cioè:

L'unità elettromagnetica di corrente è l'intensità di quella corrente che deve circolare sopra una circonferenza di raggio uno, perchè una sua porzione di lunghezza uno eserciti sulla unità di massa magnetica posta nel suo centro una forza unità.

---

§ 2°.

FORZE ELETTROMOTRICI PRODOTTE DA VARIAZIONI DELLO SPOSTAMENTO MAGNETICO.

106. – Induzione elettromagnetica. — Nel paragrafo precedente abbiamo visto come una corrente elettrica posta in un campo magnetico rappresenti una energia, e come si possa con una variazione in questo sistema produrre una variazione dell'energia; abbiamo così un nuovo modo di ricavare o spendere lavoro per mezzo di una corrente elettrica.

Se il principio generale che abbiamo dedotto come conseguenza della legge di Ohm e della stessa definizione di potenziale [58], e che abbiamo già verificato nel caso dei lavori chimici della corrente [59], è ancora applicabile ai casi che qui stiamo considerando, possiamo facilmente prevedere che sempre quando si produce un lavoro con una variazione qualunque nel sistema di un campo magnetico e di una corrente elettrica, il circuito della corrente deve essere sede di una f. e. m.

Così, riferendoci al sistema costituito da un campo magnetico uniforme e da un circuito con una porzione rettilinea γ mobile [104], se con spesa di lavoro obblighiamo il filo γ a muoversi nel verso u opposto a quello della forza F, che sulla corrente esercita il campo, il filo γ dev'essere sede d'una f. e. m. avente la direzione della corrente i; sarà invece sede di f. e. m. opposta, se si lascia il filo γ libero di muoversi sotto l'azione della forza F.

I fatti, che ora noi prevediamo, furono scoperti sperimentalmente dal Faraday, e sono dall'esperienza confermati nel modo più completo.

Fra il lavoro w speso dall'esterno nell'unità di tempo, la intensità i della corrente, e la f. e. m. e prodotta, presa come positiva nella direzione di i, abbiamo stabilita [58] la relazione:

$$e = \frac{w}{i}.$$

Ora, nel caso nostro, l'energia del sistema è

$$W = -i\varphi;$$

se nel tempo dt il flusso subisce un aumento $d\varphi$, il lavoro fatto dall'esterno è $-i\,d\varphi$ nel tempo dt, e perciò nell'unità di tempo è

$$w = -i\frac{d\varphi}{dt}.$$

Pertanto se la relazione $e = \frac{w}{i}$ è ancora applicabile in questo caso, il circuito deve essere sede di una f. e. m.

$$e = -\frac{d\varphi}{dt}. \tag{18}$$

La f. e. m. considerata come positiva nella direzione della corrente, è uguale alla diminuzione che subisce nell'unità di tempo il numero di linee di flusso concatenato col circuito.

Dalla (18) risulta che la f. e. m. è indipendente dall'intensità della corrente; deve quindi essere la stessa, qualunque sia il valore della corrente nel circuito. Se ciò è vero, si dovrà ancora sviluppare una f. e. m. in un circuito, entro al quale varia il flusso concatenato, anche quando esso non è percorso da corrente.

Anche questo fatto fu scoperto sperimentalmente dal FARADAY, il quale diede al complesso dei fenomeni descritti il nome di *induzione elettromagnetica* o *magnetoelettrica*. Si dice *forza elettromotrice di induzione* o *indotta* la f. e. m. sviluppata, *corrente indotta* la corrente che questa f. e. m. produce nel *circuito indotto* se esso è chiuso, *campo induttore* il campo magnetico.

La relazione (18), che regge i fenomeni d'induzione elettromagnetica, da noi dedotta in modo teorico, è in perfetto accordo coi risultati sperimentali; il che ci dà una prova sempre maggiore dell'esattezza dei principii sui quali abbiamo basato la teoria esposta.

Gioverà dare alcune regole pratiche che permettono di determinare facilmente la direzione della f. e. m. indotta.

Consideriamo ancora il caso semplice del conduttore rettilineo γ [104] mobile in un campo uniforme. Immaginiamo l'osservatore di AMPÈRE rivolto nella direzione del campo e disteso sul filo in modo che la corrente gli entri per i piedi. Quando il conduttore si muove nel verso u, esso taglia linee di forza col braccio destro, la f. e. m. ha la stessa direzione della corrente, dai piedi verso il capo dell'osservatore: quando invece il conduttore si muove nel verso F, esso taglia linee di forza col braccio sinistro, la f. e. m. ha direzione opposta. Secondochè nel movimento si tagliano linee di forza col braccio destro o col braccio sinistro, la f. e. m. ha la direzione dai piedi al capo dell'osservatore, o la direzione opposta.

In generale, in un movimento qualunque del conduttore, si ha un certo numero di linee di forze tagliate col braccio destro, e un certo numero corrispondente al braccio sinistro; la differenza di questi due numeri dicesi *numero di linee di forza tagliate*, ed è uguale alla variazione del flusso concatenato.

La regola ricavata nel caso semplice del conduttore rettilineo γ si può senz'altro estendere al caso generale:

Un conduttore mobile in un campo magnetico è sede di f. e. m. quando è diverso da zero il numero di linee di forza tagliate; la f. e. m. è diretta dai piedi al capo di un osservatore, disteso sul conduttore, rivolto nella direzione del campo, che nel movimento tagli le linee di forza colla destra; se le linee di forza sono tagliate colla sinistra, la f. e. m. è diretta dalla testa ai piedi dell'osservatore.

Un'altra regola assai conveniente nell'uso pratico è quella di FLEEMING-JENKIN:

Se si dispongono il pollice, l'indice ed il medio della mano destra in modo da formare gli spigoli di un triedro, e si prende come direzione positiva delle dita quella dalla mano alla punta, disposto il pollice nella direzione del movimento, l'indice nella direzione del campo induttore, il medio dà la direzione della f. e. m. indotta.

Una regola che si può sempre applicare, comunque sia prodotta la variazione del flusso, anche senza il movimento di alcuna parte del circuito, è la seguente:

La f. e. m. indotta ha la direzione del moto rotatorio del cavaturaccioli che avanza nella direzione del campo, quando il flusso concatenato diminuisce.

107. – Leggi di Lenz e di Neumann. — Nel caso semplice di un conduttore γ rettilineo si è visto [104] che il campo magnetico uniforme esercita forze che hanno la direzione F, o la direzione u opposta, secondochè la corrente che lo percorre ha la direzione i o la direzione opposta; ora se il conduttore si muove nel verso F, la corrente indotta ha la direzione opposta ad i; ha invece la direzione i, quando si fa muovere il conduttore nel verso u. In entrambi i casi il campo magnetico esercita sulla corrente indotta forze che si oppongono al movimento da cui essa è prodotta.

Questa proprietà è vera anche in generale, quindi:

Sulla corrente che in un circuito chiuso si sviluppa mediante il movimento di qualche sua parte, il campo induttore esercita forze che si oppongono al movimento stesso.

Questa legge, che fu per la prima volta enunciata da Lenz, allo stato attuale degli studi fisici si può dire una conseguenza evidente del principio della conservazione dell'energia; l'energia rappresentata dalla corrente indotta deve necessariamente risultare dalla trasformazione di un'altra energia, e cioè dal lavoro speso per produrre il movimento contro le forze di reazione del campo che si oppongono al movimento stesso.

Dall'espressione generale

$$e = \frac{w}{i}$$

possiamo dedurre la *legge di Neumann*, la quale determina il valore della f. e. m. indotta.

Se in questa espressione si pone $i = 1$, risulta

$$e = w,$$

onde:

La f. e. m. d'induzione che si produce col movimento di un conduttore in un campo magnetico è numericamente uguale al lavoro, riferito all'unità di tempo, che si deve spendere per produrre il movimento del conduttore, quando esso è percorso da una corrente di intensità uguale ad uno.

108. - Quantità di elettricità indotta. — Calcoliamo la quantità totale Q di elettricità che si trasmette nel circuito indotto per una data variazione del flusso induttore dal valore φ_1 al valore φ_2.

Indicando con r la resistenza del circuito, in un dato istante, nel quale la f. e. m. d'induzione ha il valore $e = -\frac{d\varphi}{dt}$, l'intensità della corrente indotta è, per la legge di Ohm [111]:

$$i = \frac{e}{r} = -\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dt},$$

da cui:

$$i\,dt = -\frac{1}{r}\,d\varphi.$$

Ora $i\,d\,t$ è la quantità di elettricità che passa nel tempo $d\,t$, perciò, integrando per tutto il tempo in cui dura la variazione del flusso, si ha:

$$(19) \qquad Q = \int i\,d\,t = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r}.$$

La quantità totale di elettricità indotta da una variazione del flusso induttore è espressa dal rapporto di questa variazione alla resistenza del circuito.

La quantità Q dipende dunque soltanto dai valori estremi del flusso e non dai valori intermedii.

In particolare se $\varphi_1 = \varphi_2$, risulta $Q = 0$, cioè quando il flusso induttore si fa variare in modo che riprenda al fine lo stesso valore iniziale, si hanno nel conduttore due passaggi opposti di elettricità, fra di loro uguali, cosicchè la quantità totale di elettricità indotta è nulla.

109. – Relazione generale fra la variazione dello spostamento magnetico e la forza elettromotrice indotta. — Nelle considerazioni svolte nei numeri precedenti ci siamo preferibilmente riferiti al caso semplice di un circuito avente una porzione rettilinea mobile in un campo magnetico uniforme; però, come abbiamo già notato, la relazione (18) è affatto generale; il modo stesso col quale l'abbiamo ricavata dimostra che la f. e. m. indotta dipende esclusivamente dalla variazione del flusso magnetico concatenato col circuito, e non dal modo in cui questa variazione viene prodotta. La variazione del flusso si può ottenere col movimento del circuito elettrico o col movimento del campo magnetico, o con una variazione della permeabilità del mezzo in cui si ha il campo, o infine con una variazione nelle cause producenti il campo, comunque si produca la variazione del flusso e quindi dello spostamento magnetico concatenato col circuito, si genera sempre in questo una f. e. m. $e = -\frac{d\,\varphi}{d\,t}$.

In principio di questo capitolo abbiamo detto che nell'elettromagnetismo si hanno ha considerare due categorie di fenomeni, cioè uno spostamento magnetico prodotto per mezzo di una variazione dello spostamento elettrico, ed uno spostamento elettrico prodotto per mezzo di una variazione dello spostamento magnetico, e di più che è la stessa la legge da cui le due categorie di fenomeni sono governati.

Possiamo ora riconoscere che questa nostra asserzione è esatta.

Difatti per la prima categoria vale la relazione generale:

$$(9) \qquad \int \mathcal{H}_l\, d\, l = 4\, \pi\, \Sigma\, N\, i\,;$$

per la seconda:

$$(18) \qquad e = -\frac{d\,\varphi}{d\,t}.$$

Ora se ricordiamo che $\Sigma\, N\, i$ è la quantità totale di elettricità che nell'unità di tempo passa entro alla linea chiusa considerata, vale a dire la variazione dello spostamento elettrico entro alla linea, e che la somma e delle f. e. m. agenti in un circuito chiuso è l'integrale della forza elettrica lungo questo circuito, e di più che $\frac{d\,\varphi}{d\,t}$ è uguale alla variazione per unità di tempo dell'induzione magnetica entro al circuito, cioè, per la (20) [80], è uguale alla variazione dello spostamento moltiplicata per $4\,\pi$, facilmente vediamo come le due relazioni (9) e (18) si possano riassumere in questa unica legge:

L'integrale della forza magnetica o della forza elettrica lungo una linea chiusa qualunque, è, a meno del fattore costante $4\,\pi$, *uguale rispettivamente alla variazione dello spostamento elettrico o dello spostamento magnetico entro a questa linea.*

110. – Correnti indotte da variazioni di corrente. Coefficiente di induzione mutua e propria. — Merita di essere particolarmente studiato il caso nel quale il campo magnetico induttore è prodotto da una corrente elettrica: una variazione di questa corrente produce una variazione nell'intensità del campo e nel flusso concatenato col circuito indotto, e sviluppa perciò in questo una f. e. m. di induzione. Questo fatto fu pure scoperto sperimentalmente dal FARADAY, il quale chiamò *corrente induttrice* quella a cui è dovuto il campo induttore. Anche in questo caso l'esperienza dimostra che la f. e. m. indotta è numericamente eguale alla variazione del flusso d'induzione.

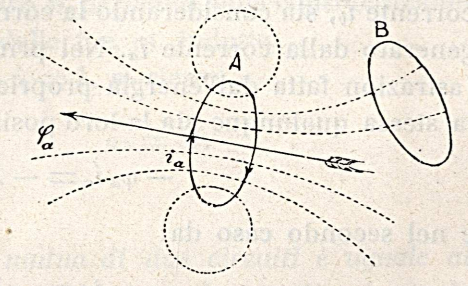

Fig. 117.

Consideriamo un caso speciale semplice al quale ci riferiremo per stabilire alcune definizioni.

Siano due circuiti chiusi A, B (fig. 117), e supponiamo che lo spazio attorno ad essi, lo spazio cioè nel quale corrono le linee di induzione generate da una corrente circolante in uno qualunque di essi, sia occupato da materia di permeabilità magnetica costante, affatto indipendente dai valori della forza e dell'induzione magnetica, ad esempio, da aria.

Se nel circuito A circola una corrente i_a nel verso della freccia, entro ad esso passerà un certo numero di linee d'induzione nella direzione φ, le quali si richiudono all'esterno. Di queste linee alcune passeranno pure entro al circuito B; il valore del flusso φ_b, che la corrente i_a produce entro al circuito B, avendo supposto costante la permeabilità del mezzo, dipende unicamente dall'intensità della corrente i_a dalle dimensioni e dalla posizione reciproca dei due circuiti; potremmo perciò porre

$$\varphi_b = M i_a,$$

in cui M è una costante che dipende solo dalle condizioni geometriche del sistema dato.

In modo analogo una corrente i_b nel circuito B produce un flusso magnetico, di cui una parte φ_a passa entro al circuito A.

Se con M' indichiamo una costante che dipende anch'essa solo dalle condizioni geometriche del sistema, potremo ancora porre

$$\varphi_a = M' i_b.$$

Supponiamo ora che esistano contemporaneamente le due correnti i_a, i_b nei due circuiti. Questo sistema ci rappresenta una certa energia della quale possiamo trovare il valore sia considerando la corrente i_a come posta nel campo generato dalla corrente i_b, sia considerando la corrente i_b come posta nel campo generato dalla corrente i_a. Nel primo caso l'energia del sistema (astrazion fatta dall'energia propria dei due circuiti, la quale è la stessa qualunque sia la loro posizione relativa) è espressa da:

$$-\varphi_a\, i_a = -M'\, i_b\, i_a,$$

e nel secondo caso da:

$$-\varphi_b\, i_b = -M\, i_a\, i_b.$$

Uguagliando le due espressioni dell'energia del sistema si ricava

$$M = M';$$

e per ciò

$$\varphi_a = M i_b, \qquad \varphi_b = M i_a. \tag{20}$$

Consideriamo ancora il circuito A come induttore, ed il circuito B come indotto; se si produce una variazione nella corrente i_a, varia perciò il flusso φ_b e si genera nel circuito B una f. e. m.

$$e_b = -\frac{d\,\varphi_b}{d\,t} = -M\frac{d\,i_a}{d\,t}. \tag{21}$$

In modo analogo se si considera il circuito B come induttore ed il circuito A come indotto, per una variazione nella corrente i_b si produce in A una f. e. m.

$$e_a = -\frac{d\,\varphi_a}{d\,t} = -M\frac{d\,i_b}{d\,t}.$$

Risulta dunque che quando si ha un mezzo di permeabilità costante, la f. e. m. indotta nell'un circuito, dipende solo dalla variazione dell'intensità della corrente nell'altro circuito.

Il fattore M che è una costante per due dati circuiti, ed è lo stesso qualunque dei due circuiti si prenda come indotto, o come induttore, dicesi *coefficiente d'induzione mutua dei due circuiti*.

Del coefficiente d'induzione mutua si possono dare due definizioni (che nel caso semplice che stiamo considerando si equivalgono); possiamo cioè definire M, partendo dalla considerazione dei flussi, oppure da quella delle f. e. m. indotte.

Se nelle (20) si fa $i_b = 1$, $i_a = 1$, si ricava

$$\varphi_a = M, \qquad \varphi_b = M,$$

possiamo per ciò dire:

Il coefficiente d'induzione mutua di due circuiti è uguale al flusso d'induzione che passa entro ad uno qualunque di essi quando l'altro è percorso da una corrente d'intensità uguale ad uno.

Se nelle (21) si fa:

$$\frac{d\,i_a}{d\,t} = 1, \qquad \frac{d\,i_b}{d\,t} = 1,$$

tenendo puramente conto dei valori assoluti, risulta:

$$e_a = M, \qquad e_b = M.$$

Possiamo quindi dare quest'altra definizione:

Il coefficiente d'induzione mutua di due circuiti è in valore assoluto uguale alla f. e. m. d'induzione che si produce in uno qualunque di essi, quando nell'altro l'intensità della corrente varia nella ragione di un'unità nell'unità di tempo.

Il valore del coefficiente M varia col variare della forma e della posizione dei due circuiti. Supponiamo di mantenere fisso e immutato l'uno di essi A, e di far variare in modo continuo la forma e la posizione di B; anche M varia in modo continuo, perchè varia in modo continuo il flusso prodotto entro B da una corrente in A. Se nelle sue variazioni B tende ad avvicinarsi sempre più alla forma ed alla posizione di A, in modo da venire a coincidere con esso, M prende una serie di valori ben determinati, ed al limite tende verso un valore definito, dipendente unicamente dalla forma e dalla posizione del circuito A. Questo valore limite, che indicheremo con L, dicesi *coefficiente di induzione del circuito su sè stesso*, oppure *coefficiente di induzione propria*, o *di autoinduzione*, o *di selfinduzione*, o con nome proposto dai pratici inglesi, ed ufficialmente adottato dal Congresso internazionale di Chicago, *induttanza*.

Facendo uso di un tale coefficiente, il flusso di induzione che una corrente i produce nel suo circuito è espresso da

$$\varphi = L\,i; \tag{20'}$$

se la corrente i varia, varia pure il flusso φ, e quindi si produce nel circuito una f. e. m.

$$e = -L\,\frac{d\,i}{d\,t}. \tag{21'}$$

Quando l'intensità della corrente varia in un circuito, questo è sede di una f. e. m., che ha la stessa direzione della corrente se l'intensità di questa diminuisce, ha direzione opposta se la intensità cresce, cioè se $d\,i$ è positivo.

Anche questo fatto, che noi abbiamo dedotto come conseguenza della (18), fu scoperto sperimentalmente dal Faraday.

Abbiamo sin qui considerati due circuiti posti in uno spazio nel quale la permeabilità magnetica μ ha un valore costante, indipendente dai valori della forza magnetica e della intensità della corrente induttrice. Quando però la μ non è costante, il flusso prodotto in un circuito da una corrente nell'altro non è più proporzionale all'intensità di questa corrente, ma dipende dai valori della permeabilità magnetica. Tutte le formule e le definizioni che abbiamo dianzi stabilite perdono ogni significato, e cessa in generale il vantaggio di considerare i coefficienti di induzione mutua e propria, perchè non essendo essi costanti, torna più utile per il calcolo della f. e. m. indotta ricorrere alla formula generale (18).

Può tuttavia in alcuni casi tornare utile anche per uno spazio a permeabilità magnetica variabile la considerazione dei coefficienti di induzione. Questi non dipendono più soltanto dalle condizioni geometriche del sistema, ma anche dall'intensità della corrente induttrice; anzi, se il mezzo presenta istèresi, essi dipendono non solo dal valore attuale della corrente, ma anche dai valori precedenti.

Si possono estendere al caso generale entrambe le definizioni date nel caso particolare dianzi considerato; esse però cessano allora di essere equivalenti.

Così se si considera il flusso di induzione, non esiste più un rapporto costante tra il flusso indotto e la corrente induttrice, cioè le relazioni (20), (20′) sussistono solo quando *M*, *L* si considerino come variabili. Potremo però ancora chiamare coefficienti di induzione mutua e propria i rapporti variabili,

$$M = \frac{\varphi_a}{i_b} = \frac{\varphi_b}{i_a}, \qquad L = \frac{\varphi}{i}, \tag{22}$$

o, se vogliamo, i loro valori corrispondenti all'unità di corrente, cioè il valore del flusso indotto da una corrente induttrice unità. In questo caso le relazioni che dànno le f. e. m. indotte si dovranno necessariamente scrivere sotto la forma:

$$e_a = -\frac{d}{dt}(M i_b), \quad e_b = -\frac{d}{dt}(M i_a), \quad e = -\frac{d}{dt}(L i).$$

Le f. e. m. indotte si potranno però ancora porre sotto la forma (21), (21′), quando si indichino con *M*, *L* due coefficienti variabili che hanno valori diversi da quelli dianzi considerati. E infatti dalla (21′) si ricava:

$$L = -\frac{e}{\frac{di}{dt}} = -\frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{di}{dt}} = \frac{d\varphi}{di}, \tag{22'}$$

e in modo analogo dalle (21):

$$M = \frac{d\varphi_a}{d i_b} = \frac{d\varphi_b}{d i_a}. \tag{22''}$$

Anche qui potremo chiamare coefficiente di induzione mutua e propria questi coefficienti variabili *M*, *L*, cioè le grandezze variabili per cui si deve moltiplicare la variazione della corrente induttrice riferita all'unità di tempo, per avere la f. e. m. d'induzione.

Questa definizione si deve intendere adottata ufficialmente, perchè essa è supposta nella definizione dell'unità di coefficiente di selfinduzione *(henry)*, che venne stabilita dal Congresso internazionale di Chicago:

Un circuito nel quale si sviluppa una f. e. m. unità quando la corrente induttrice varia di un'unità nell'unità di tempo presenta l'unità di induttanza.
