All'amico Cerruti

M. G.

DISSERTAZIONE E TESI

PRESENTATE

ALLA COMMISSIONE ESAMINATRICE

della Regia Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri in Torino

DA

MALINVERNI GIACINTO

da Vercelli

PER OTTENERE IL DIPLOMA

DI

INGEGNERE LAUREATO

1869

TORINO
TIPOGRAFIA C. FAVALE E COMP.

ALLA SACRA E VENERATA MEMORIA DELLA MIA AVOLA

AI MIEI CARISSIMI GENITORI.

EFFLUSSO DEI GAS E DEI VAPORI SATURI

Equazione generale relativa all'efflusso dei liquidi e dei gas. — Si immagini un recipiente indefinito e ripieno di un fluido liquido o gassoso, mantenuto sotto una pressione costante p_1; praticando nella parete del serbatoio una luce, e supponendo che esternamente regni una pressione p_2 minore di p_1, determiniamo la velocità d'efflusso del liquido o gas. Diciamo u questa velocità, e facciamo astrazione della resistenza d'attrito, ossia immaginiamo la luce scolpita in parete sottile.

Consideriamo una massa di fluido di peso 1^{kg}, v_1 e v_2 sieno i volumi di questa massa, prima e dopo l'efflusso, ossia i volumi specifici del fluido dentro e fuori del vaso. L'efflusso della massa di gas considerata è un fenomeno in cui si possono distinguere tre periodi:

1° Un volume di fluido v_1 è spinto fuori dal serbatoio sotto la pressione costante p_1;

2° La massa di fluido cambia stato, passando da $(p_1\ v_1)$ a $(p_2\ v_2)$;

3° In questo cangiamento di stato la stessa massa prende posto nell'atmosfera, ossia scaccia un volume d'aria v_2 alla pressione p_2.

Siccome p_2 è minore di p_1, le molecole della massa che si considera saranno animate da una certa velocità che è quella che cerchiamo.

Applicando il principio delle forze vive, troveremo l'equazione d'efflusso.

Il fluido che resta nel vaso compie il lavoro $p_1 v_1$, e lo comunica alla massa che esce; questa massa, cambiando di stato, produce un lavoro esterno rappresentato da $\int_{v_1}^{v_2} p\,dv$; per prender posto nel mezzo esterno deve produrre un lavoro resistente $p_2 v_2$; la forza viva delle molecole alla fine dell'efflusso è $\frac{u^2}{2g}$. Dunque avremo l'equazione:

$$p_1 v_1 + \int_{v_1}^{v_2} p\,dv - p_2 v_2 = \frac{u^2}{2g}$$

da cui:

$$u = \sqrt{2g\left(p_1 v_1 - p_2 v_2 + \int_{v_1}^{v_2} p\,dv\right)}$$

Caso in cui il volume del fluido si conserva costante. — Avremo:

$$v_2 = v_1 \qquad dv = o;$$

quindi:

$$u = \sqrt{2 g v_1 (p_1 - p_2)} \tag{1}$$

Se il fluido non varia di volume, esso è di necessità incompressibile, quindi la (1) è l'equazione d'efflusso dei liquidi.

Indicando con G il peso specifico del liquido alla pressione p_1, si ha $G v_1 = 1$; perciò:

$$u = \sqrt{2g\frac{p_1 - p_2}{G}}$$

Ossia, se p_1 e p_2 le supponiamo misurate in chilogrammi per metro quadrato, la differenza $p_1 - p_2$ esprimerà in chilogrammi l'eccesso della pressione interna sull'esterna, ed il quoziente $\frac{p_1 - p_2}{G}$ non è che l'altezza di una colonna del fluido che si considera di base l'unità, e tale da far equilibrio a quell'eccesso di pressione, quindi l'ultima equazione trovata non è altro che il teorema di Torricelli:

$$u = \sqrt{2gH}$$

Vediamo in quali casi si può applicare questo teorema ai gas.

L'equazione generale d'elasticità dei gas è:

$$p\,v = R\,\tau;$$

la sua differenziale:

$$p\,d\,v + v\,d\,p = R\,d\tau;$$

ponendo $d\,v = o$, avremo:

$$v\,d\,p = R\,d\,\tau;$$

integrando:

$$\tau_1 - \tau_2 = t_1 - t_2 = \frac{v_1}{R}(p_1 - p_2)$$

Ossia, perchè il volume del gas si possa considerare costante, nell'efflusso l'abbassamento di temperatura deve essere proporzionale all'abbassamento di pressione. Ciò ha luogo quando tra p_1 e p_2 passa un piccolo divario, e allora si potrà applicare ai gas, con una certa approssimazione, il teorema di Torricelli. Accade questo fatto per il moto dei gas nei forni e nelle condotte di gas-luce.

Formola di Bernouilli per determinare la velocità d'efflusso dei gas sotto deboli pressioni. — Nella pratica le pressioni si misurano generalmente in colonna di mercurio; indichiamo rispettivamente le pressioni interna ed esterna così valutate con P, p, con t la temperatura del gas nel serbatoio, con δ la sua densità tabulare; siccome a 0° ed alla pressione di m. 0,760, il peso specifico dell'aria è $1^{kg},3$, il peso specifico dell'aria alla pressione P ed alla temperatuea t sarà:

$$1{,}3 \frac{\alpha}{\alpha + t} \cdot \frac{P}{0{,}760}$$

quello del gas:

$$1{,}3 \frac{\alpha\,\delta}{\alpha + t} \cdot \frac{P}{0{,}760}$$

e siccome il peso specifico del mercurio è kg. 13596, avremo:

$$H\,1{,}3 \frac{\alpha\,\delta}{\alpha + t} \cdot \frac{P}{0{,}760} = 13596\,(P - p)$$

sostituendo:

$$u = 396 \sqrt{\frac{\alpha + t}{\alpha\,\delta} \cdot \frac{P - p}{P}}$$

Questa seconda espressione del teorema di Torricelli è dovuta a Bernouilli.

Dispensa teorica di una luce scolpita in lastra sottile, sotto debole pressione, in peso ed in volume. — Indichiamo con s l'area della luce d'efflusso ed in metri quadrati, con Q la dispensa in metri cubi, con Π la stessa dispensa in chilogrammi; avremo:

$$Q = 396\,s \sqrt{\frac{\alpha + t}{\alpha\,\delta} \cdot \frac{P - p}{P}}$$

$$\Pi = 1{,}3 \frac{\alpha\,\delta}{\alpha + t_2} \frac{p}{0{,}760} \cdot 396\,s \sqrt{\frac{\alpha + t}{\alpha\,\delta} \cdot \frac{P - p}{P}}$$

essendo t e t_2 le temperature interna ed esterna.

Riducendo:

$$\Pi = 677 \frac{\alpha \delta p s}{\alpha + t_2} \sqrt{\frac{\alpha + t}{\alpha \delta} \cdot \frac{P - p}{P}}$$

Se $t = t_2$:

$$\Pi = 677 \, p s \sqrt{\frac{\alpha \delta}{\alpha + t} \cdot \frac{P - p}{P}}$$

Dispensa effettiva o reale. — Sia Q la portata teorica (volume di gas alla pressione e temperatura esterna che effluisce nell'unità di tempo), q la dispensa effettiva o reale, φ un numero minore dell'unità; dietro esperienze si è riconosciuto che per luci nelle stesse condizioni, e per certi limiti di pressioni, q è minore di Q, ossia:

$$q = \varphi Q.$$

φ dicesi coefficiente di riduzione della dispensa teorica.

Debbonsi a Péclet le esperienze relative alla determinazione del coefficiente φ. Egli trovò che per eccessi di pressioni non molto maggiori a m. 0,04 di acqua, e per luci circolari di diametro minore di m. 0,01, e per l'aria, il coefficiente φ si può ritenere mediamente di 0,65.

Caso in cui la temperatura del gas effluente è costante. — Formola di Navier. — In questo caso sarà soddisfatta l'equazione di Mariotte:

$$p v = p_1 v_1 = p_2 v_2.$$

Avremo:

$$\int_{v_1}^{v_2} p \, d v = \int_{v_1}^{v_2} p_1 v_1 \frac{d v}{v} = p_1 v_1 \log' \frac{v_2}{v_1} = p_1 v_1 \log' \frac{p_1}{p_2}$$

Sostituendo nell'equazione d'efflusso

$$p_1 v_1 - p_2 v_2 + \int_{v_1}^{v_2} p\, d v = \frac{u^2}{2 g}$$

avremo:

$$u = \sqrt{2 g p_1 v_1 \log' \frac{p_1}{p_2}}$$

ossia, dicendo G il peso specifico del fluido alla pressione interna, sarà:

$$u = \sqrt{2 g \frac{p_1}{G} \log' \frac{p_1}{p_2}}$$

che è la formola di Navier.

Quando tra p_1 e p_2 passa poca differenza, si può rendere algebrica questa formola: sviluppando in serie:

$$\log' \frac{p_1}{p_2} = \log' \left(1 + \frac{p_1 - p_2}{p_2}\right) = \frac{p_1 - p_2}{p_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{p_1 - p_2}{p_2}\right)^2 + \ldots$$

e trascurando per rapporto al primo i termini che seguono, e sostituendo, avremo:

$$u = \sqrt{2 g \frac{p_1}{p_2} \frac{p_1 - p_2}{G}}$$

e siccome $\frac{p_1}{p_2}$ ed *a fortiori* $\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}$ è assai prossimo ad 1, la formola di Navier diviene quella di Bernouilli·

$$u = \sqrt{2 g \frac{p_1 - p_2}{G}}$$

Effusso dei gas quando questi non ricevono nè emettono calore. — L'evoluzione si fa secondo un'adiabatica di equazione:

$$p\, v^{\gamma} = p_1\, v_1^{\gamma} = p_2\, v_2^{\gamma},$$

in cui $\gamma = \frac{c}{c_1}$, essendo c e c_1 i calori specifici a pressione ed a volume costante.

In questa ipotesi il termine $\int_{v_1}^{v_2} p\, d\, v$ dell'equazione generale d'efflusso diviene:

$$\int_{v_1}^{v_2} p\, d\, v = p_1\, v_1^{\gamma} \int_{v_1}^{v_2} \frac{d\, v}{v^{\gamma}} = \frac{p_1\, v_1^{\gamma}}{\gamma - 1} \left(\frac{1}{v_1^{\gamma-1}} - \frac{1}{v_2^{\gamma-1}} \right) =$$

$$= \frac{p_1\, v_1}{\gamma - 1} \left\{ 1 - \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\gamma-1} \right\}$$

Osservo ora che possiamo scrivere:

$$p_1\, v_1 - p_2\, v_2 = p_1\, v_1 \left(1 - \frac{p_2\, v_2}{p_1\, v_1} \right)$$

ossia:

$$p_1\, v_1 - p_2\, v_2 = p_1\, v_1 \left\{ 1 - \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\gamma-1} \right\}$$

Sostituendo nell'equazione d'efflusso, avremo:

$$p_1\, v_1 \left\{ 1 - \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\gamma-1} \right\} \left(1 + \frac{1}{\gamma - 1} \right) = \frac{u^2}{2\, g}$$

Riducendo e ricordando che pel caso di un'adiabatica si ha la relazione:

$$\left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\gamma-1} = \frac{\tau_2}{\tau_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

si avrà:

$$u=\sqrt{2g\frac{\gamma p_1 v_1}{\gamma-1}\left\{1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right\}} \qquad (\alpha)$$

Abbiamo poi ancora $c - c_1 = AR$, da cui $\gamma - 1 = \frac{AR}{c}$ e $\frac{\gamma}{\gamma-1}=\frac{c}{AR}$ di più $p_1 v_1 = R\tau_1$; sostituendo:

$$u=\sqrt{2g\frac{c\tau_1}{A}\left\{1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right\}}$$

ossia essendo la quantità fra parentesi eguale ad $1-\frac{\tau_2}{\tau_1}$

$$u=\sqrt{2g\frac{c(t_1-t_2)}{A}}$$

Vediamo cosa diventi la (α) nel caso in cui $\frac{p_1}{p_2}$ è prossimo ad 1.

Abbiamo:

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=\left(1-\frac{p_1-p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=$$

$$=1-\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(\frac{p_1-p_2}{p_1}\right)+\ldots$$

possiamo, rispetto ai due primi, ommettere i termini che seguono, allora sostituendo e semplificando:

$$u=\sqrt{2gp_1v_1\frac{p_1-p_2}{p_1}}=\sqrt{2g\frac{p_1-p_2}{G}}$$

Luci armate esternamente con tubo addizionale cilindrico. — La dispensa in tal caso è accresciuta come accade nell'efflusso dei liquidi nel caso analogo. Si debbono pure a Péclet le esperienze fatte sull'aria effluente attraverso a tubi addizionali cilindrici e conici. Ne risulta che l'eccesso di pressione non essendo maggiore di m. 0,04 di acqua, ed il diametro essendo circa di m. 0,01, il coefficiente di riduzione si deve prendere di 0,83.

Tubi addizionali conici. — Per essi la dispensa deve sempre intendersi riferita alla base minore. Le esperienze di Péclet hanno dimostrato che il coefficiente di riduzione varia col variare dell'angolo di inclinazione. Così quando l'angolo al vertice che dico θ è di 10°, φ è uguale a 0,97 per $\theta = 30°$ $\varphi = 1$, $\theta = 50°$ $\varphi = 0{,}83$. Dunque la dispensa, come pei liquidi, anche pei gas, cresce aggiungendo un tubo conico; ma non conviene mai che θ sia minore di 10° o maggiore di 50°, perchè, oltrepassando questi limiti, la luce si avvicina ad esser armata di tubo cilindrico, o ad essere scolpita in parete sottile. Quanto si è detto è relativo all'aria e solo per deboli pressioni.

Weissbach trovò per forti pressioni:

$\varphi = 0{,}671$ per luci scolpite di pareti sottili;

$\varphi = 0{,}782$ per tubi addizionali cilindrici:

$\varphi = 0{,}937$ per tubi conici convergenti d'angolo di 7°.

Altra forma che si può dare all'equazione generale dei liquidi e gas. — Per studiare l'efflusso dei vapori conviene dare un'altra forma all'equazione generale di efflusso, trasformando il termine $\int_{v_1}^{v_2} p\,dv$. Questo termine rappresenta il lavoro esterno fatto dal fluido dilatandosi da $(p_1\ v_1)$ a $(p_2\ v_2)$ e risentendo dall'esterno una pressione eguale alla propria. Questo lavoro esterno può essere calcolato in altro modo. Dico Υ_1 Υ_2 i valori del calor totale del fluido ($1^{kg.}$) al principio ed al termine dell'efflusso; Q il calore speso nell'efflusso. Durante l'efflusso, il fluido avrà ceduto ai corpi circostanti la quantità di calore:

$$\Upsilon_1 + Q - \Upsilon_2;$$

ma tale calore si è convertito nel lavoro esterno $\int_{v_1}^{v_2} p\,dv$; quindi:

$$A \int_{v_1}^{v_2} p\,dv = \Upsilon_1 + Q - \Upsilon_2$$

e sostituendo:

$$u = \sqrt{2g\left(p_1 v_1 - p_2 v_2 + \frac{\Upsilon_1 + Q - \Upsilon_2}{A}\right)}$$

Equazioni determinatrici della velocità d'efflusso dei vapori saturi e della loro composizione fisica dopo l'efflusso. — Alle precedenti denominazioni aggiungiamo queste: diciamo m_1, m_2 i pesi di vapore contenuti in un chilogramma di miscuglio dentro e fuori del vaso, ossia prima e dopo l'efflusso; L_1, L_2 i valori del calore di vaporizzazione iniziale e finale per un chilogramma di liquido; u_1, u_2 i valori del volume differenziale del vapore dentro e fuori del vaso; τ_1, τ_2 le temperature dentro e fuori del serbatoio; facciamo l'ipotesi che il fluido non riceva nè emetta calore.

Per l'equazione di Clausius:

$$d\,Q = c\,d\,\tau + d\,m\,L - \frac{m\,L\,d\,\tau}{\tau}$$

avremo:

$$o = c\,d\,\tau + d\,m L - \frac{m\,L\,d\,\tau}{T}$$

ossia:

$$o = \frac{c\,d\,\tau}{\tau} + d\,\frac{m\,L}{\tau}$$

integrando:

$$o = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{c\,d\,\tau}{\tau} + \frac{m_2\,L_2}{\tau_2} - \frac{m_1\,L_1}{\tau_1}$$

possiamo quindi già avere il valore di m_2:

$$m_2 = \frac{\tau_2}{L_2}\left(\frac{m_1\,L_1}{\tau_1} - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{c\,d\,\tau}{\tau}\right).$$

Ricordando ora che abbiamo:

$$\Upsilon = \int_{\alpha}^{\tau} c\, d\tau + m\,(L - A\,p\,u),$$

equazione che dà il calor totale del miscuglio, avremo subito:

$$\Upsilon_1 = \int_{\alpha}^{\tau_1} c\, d\tau + m_1\,(L_1 - A\,p_1\,u_1)$$

$$\Upsilon_2 = \int_{\alpha}^{\tau_2} c\, d\tau + m_2\,(L_2 - A\,p_2\,u_2)$$

Osserviamo ora che potremo con assai grande approssimazione trascurare il volume specifico del liquido a fronte del volume specifico del vapore; ne segue che il volume del miscuglio prima dell'efflusso sarà rappresentato da $m_1\,u_1$ e quello dopo da $m_2\,u_2$, onde potremo scrivere:

$$p_1\,v_1 - p_2\,v_2 = m_1\,p_1\,u_1 - m_2\,p_2\,u_2.$$

Sostituendo:

$$u = \sqrt{\frac{2\,g}{A}\left(\int_{\tau_2}^{\tau_1} c\, d\tau + m_1\,L_1 - m_2\,L_2\right)}$$

Applicazione al vapor d'acqua. — Nei limiti delle temperature della pratica è lecito pel vapor d'acqua supporre $c = 1$. Quindi:

$$\int_{\tau_2}^{\tau_1} c\, d\tau = \tau_1 - \tau_2 = t_1 - t_2$$

inoltre, dietro la stessa ipotesi:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{c\, d\tau}{\tau} = log'\,\frac{\tau_2}{\tau_1} = -\,log'\,\frac{\tau_1}{\tau_2} =$$

$$= -\,log'\left(1 + \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2}\right) = -\,\frac{t_1 - t_2}{\tau_2}$$

se si svolge in serie il logaritmo, e nello sviluppo si trascura a fronte del primo termine tutti gli altri, sostituendo si ha:

$$u=\sqrt{\frac{2g}{A}\left\{t_1-t_2+m_1 L_1-\tau_2\left(\frac{m_1 L_1}{\tau_1}+\frac{t_1-t_2}{\tau_2}\right)\right\}}$$

ossia:

$$u=\sqrt{\frac{2g}{A}\left(m_1 L_1-\frac{\tau_2}{\tau_1}m_1 L_1\right)}=\sqrt{\frac{2g\,m_1 L_1}{A}\,\frac{t_1-t_2}{\tau_1}} \quad (\beta)$$

Esempio numerico. — Si supponga che le pressioni p_1 e p_2 siano rispettivamente di 7 e di 1 atmosfera; allora $p_1=72331^{\text{kg}}$; $p_2=10333^{\text{kg}}$; e che il vapor d'acqua nel serbatoio si conservi saturo ed asciutto, onde $m_1=1$; avremo $t_1=165^{\circ},34$ $t_2=100^{\circ}$; colla formola di Reynault relativa al calore di vaporizzazione $L=606{,}5-0{,}695\,t$ potremo calcolare L_1 ed L_2, ed avremo rispettivamente $L_1=491{,}6$, $L_2=537$ calorie; la quantità di vapore saturo asciutto che si troverà alla fine dell'efflusso sarà:

$$m_2=\frac{\tau_2}{L_2}\left(\frac{m_1 L_1}{\tau_1}+\frac{t_1-t_2}{\tau_2}\right)=0{,}901\,kilog.$$

la velocità di efflusso si avrà sostituendo nella (β) la quale, fatti i calcoli, ci dà $u=829^{\text{m}}$ per minuto secondo.

MALINVERNI GIACINTO.

TESI LIBERE

MECCANICA APPLICATA ED IDRAULICA PRATICA.

Condotte d'acque per canali scoperti — Risoluzione del problema per cui vuolsi determinare la forma di un canale per renderlo capace di una data dispensa — Indeterminazione di questo problema — Condizione della minima spesa.

COSTRUZIONI CIVILI, STRADALI E IDRAULICHE.

Resistenza viva dei tubi — Teoria del generale Menabrea.

MACCHINE A VAPORE E FERROVIE.

Resistenza alla trazione di un convoglio lungo una ferrovia curvilinea ed in pendenza.

GEOMETRIA PRATICA

Riduzione di un angolo al centro di stazione.