

L'INGEGNERIA CIVILE

LE ARTI INDUSTRIALI

PERIODICO TECNICO MENSILE

Si discorre in fine del Fascicolo delle opere e degli opuscoli spediti franchi alla Direzione dai loro Autori od Editori

GEOMETRIA DESCRITTIVA

STRUMENTO RIDUTTORE A PROIEZIONE CENTRALE. PROSPETTOGRAFO DELL'INGEGNERE FIORINI (1).

Veggasi la Tav. XII

Lo strumento serve a ricavare disegni in proiezione centrale (prospettiva) di un corpo, date due sue proiezioni ortogonali qualunque, come per es., una pianta ed una elevazione, oppure due sezioni perpendicolari fra loro.

(1) Veggasi la *Nota* in fine dell'articolo.

Un calcatoio, un segnatoio ed una riga sono in esso cinematicamente collegati fra loro per modo che la punta del segnatoio determina la proiezione centrale di un punto dello spazio ogniquale volta ad una delle proiezioni ortogonali di questo punto sia sovrapposto il calcatoio e per l'altra proiezione ortogonale passi lo spigolo della riga.

Il problema può essere risolto nel modo più generale e per qualunque posizione del punto di vista e del piano di proiezione centrale (piano prospettico o piano del quadro), potendo il primo essere scelto in qualsiasi posizione rispetto a quest'ultimo (nei limiti, beninteso, delle esigenze della pratica) e potendo essere rispetto a questo collocato comunque il disegno in proiezione ortogonale, non esclusi i casi nei quali detto disegno venga toccato o tagliato dal

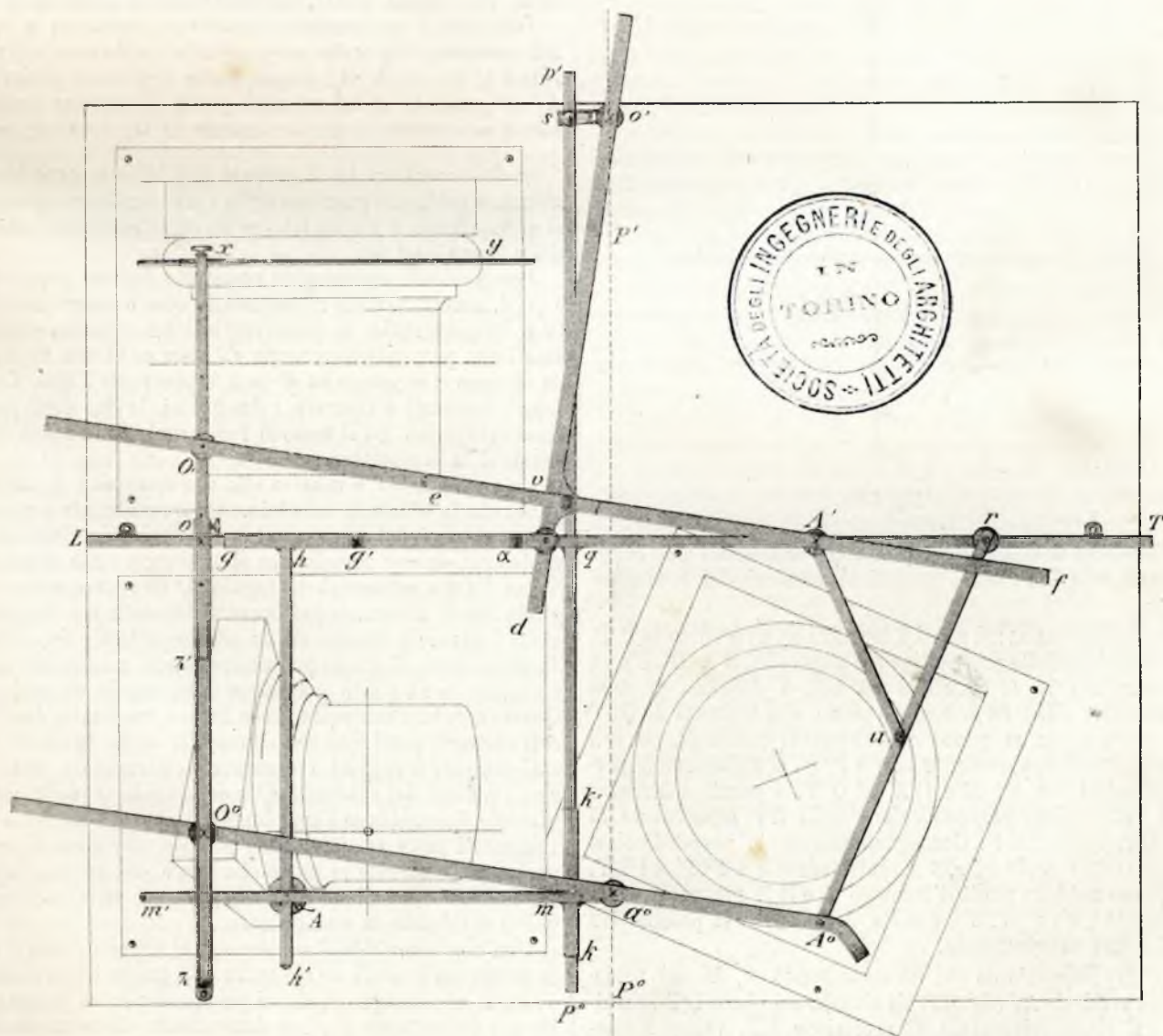


Fig. 58.

piano prospettico, casi che danno una prospettiva le cui parti più vicine al punto di vista sono di dimensioni eguali o maggiori di quelle corrispondenti nel disegno in proiezione ortogonale. Tutto ciò senza che sia necessario di eseguire alcun disegno preparatorio nè costruzioni geometriche ausiliarie e senza neppure far uso di scale, ma valendosi semplicemente e solamente delle stesse date proiezioni ortogonali, le quali per ogni determinata prospettiva (sia di una figura piana, sia di un corpo solido) rimangono fisse sulla tavoletta, unitamente al foglio di disegno, sino ad operazione finita. Inoltre, per ottenere dalle stesse o da altre proiezioni ortogonali tutte le differenti prospettive possibili, non occorre neppure smontare e rimontare lo strumento, bastando spostare in certi casi una sola od ambe le proiezioni, e nei rimanenti casi due perni dell'apparecchio.

Lo strumento si fonda sulle seguenti considerazioni geometriche:

Su due piani coordinati ortogonali, la cui linea comune è LT (figura 59), siano proiettati in A^o, A' e B^o, B' due punti comunque situati sul piano orizzontale. Sia inoltre proiettato in O^oO' il punto di vista ed in P^oP' la traccia del piano di proiezione centrale o piano del quadro.

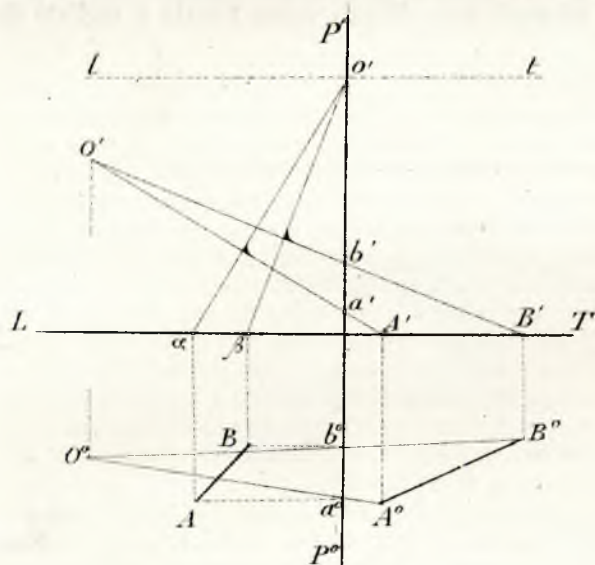


Fig. 59.

Condotte le O^oA^o, O^oB^o , proiezioni orizzontali dei raggi visuali, e le $O'A', O'B'$, proiezioni verticali dei medesimi raggi:

I) si avranno nei punti d'incontro a^o, a', b^o, b' colla P^oP' le proiezioni delle prospettive dei punti (A^o, A') , (B^o, B') , ed immaginata la lt parallela ad LT , a distanza da essa eguale alla *distanza principale* (ossia alla distanza di O^oO' da P^oP'), se da un punto qualunque di questa lt , per es., dal punto o' , appartenente pure a P^oP' , si abbassano le perpendicolari $o'a, o'b$ alle $O'A'$ ed $O'B'$, i punti d'incontro α e β delle dette perpendicolari colla LT segneranno la distanza $\alpha\beta = a'b'$. Conseguentemente le perpendicolari condotte da a^o, b^o ed α, β rispettivamente a P^oP' ed LT , daranno nei loro punti d'incontro A e B le prospettive dei punti (A^o, A') e (B^o, B') , e nella AB si avrà la prospettiva della loro congiungente.

II) Supponiamo che un certo punto A , la cui proiezione verticale A' (fig. 60) sia situata nel piano L_1T_1 , parallelo al piano orizzontale di proiezione LT , venga a spo-

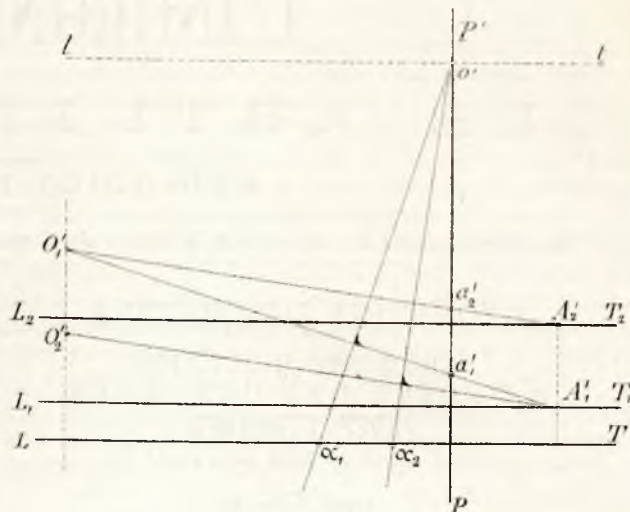


Fig. 60.

starsi verticalmente per collocarsi in un altro piano orizzontale L_1T_1 ; la proiezione verticale della prospettiva rispetto al punto O_1' sarà venuta da a_1' , sul raggio $A_1'O_1'$, in a_1' sul raggio $A_1'O_1'$, spostandosi della quantità $a_1'a_2'$.

Ora, questo spostamento è eguale al segmento $\alpha_1\alpha_2$ di LT compreso fra le due perpendicolari abbassate da o_1' ai raggi $A_1'O_1'$ ed $A_1'O_2'$ diretti dalla primitiva proiezione A_1' al punto O_1' e ad un altro punto O_2' , situato verticalmente al disotto di O_1' a distanza $O_1'O_2' = A_1'A_2'$.

Si descriverà ora lo strumento (fig. 58) supponendolo in azione, e nella designazione delle parti che lo compongono si adopereranno le stesse lettere dei corrispondenti elementi delle figure 59 e 60.

Due guide di scorrimento costituite da due regoli LT e P^oP' , aventi sezione rettangolare, con o senza scanalatura longitudinale, o qualsivoglia altra sezione, sono fissate l'una perpendicolarmente all'altra su di una tavoletta da disegno e separano su di essa i quadranti Tqp^o, Lqp' , Lqp^o , destinati a ricevere, i due primi, le due date proiezioni ortogonali, ed il terzo il foglio sul quale dovrà disegnarsi la prospettiva.

Un regolo A^oO^o è munito alla sua estremità A^o di una punta che fa ufficio di calcatoio e che è mantenuta perpendicolare al piano del disegno, ad una distanza piccolissima dal medesimo, da uno zoccolo che si appoggia sulla tavoletta. Verso l'altra estremità il regolo A^oO^o scorre entro una guida che lo abbraccia per breve tratto della sua lunghezza e che è girevole attorno ad un pernio verticale O^o , portato da un corsoio, il quale può essere fissato mediante vite di pressione in un punto qualunque di un regolo di guida zo . Questo regolo a sua volta viene fissato, mediante due piccoli sostegni posti alle sue estremità, sulla tavoletta, parallelamente a P^oP' ed a distanza arbitraria da essa. Gli assi verticali del calcatoio A^o e del pernio O^o della guida girevole determinano l'asse longitudinale del regolo A^oO^o . Parimenti tutte le altre guide girevoli alle quali si accennerà, sono costrutte in modo che l'asse del proprio pernio sia contenuto nel piano verticale passante per l'asse dei regoli e delle aste da esse guidate.

Una crociera $o'dfeO'$ è composta di tre aste $o'd, fe, vO'$, la prima delle quali scorre entro una guida imperniata in o' , su di un sostegno s , che si può fissare in un punto qualunque della guida P^oP' , a determinata distanza da LT .

Per l'asse del pernio o' passa il piano di proiezione centrale o piano del quadro, la cui traccia P^0P' è parallela a p^0p' . Le altre due aste componenti la crociera sono fissate in v a breve distanza dalla estremità d ed in direzione perpendicolare alla prima $o'd$, alla quale una è sottoposta e sporge pel tratto vf alla destra e pel tratto ev , molto più corto, alla sinistra, e l'altra vO' è invece sovrapposta, e sporge interamente alla sinistra di $o'd$; quest'ultima ha il suo asse che incontra, costantemente quello di un pernio O' di una guida che l'abbraccia per una piccola porzione della sua lunghezza. Questo pernio è sorretto da un regolo $z'x$, sovrapposto al regolo fisso zo e capace di scorrere nel senso della sua lunghezza, mantenendosi col suo asse nello stesso piano perpendicolare ad LT e passante per O^0 . Inoltre il regolo $z'x$ porta fissa ad angolo retto alla sua estremità x una riga xy , appoggiata con uno dei suoi spigoli acuti sulla superficie del disegno situato nella porzione di tavoletta Lqp' (disegno che nei casi ordinari è una elevazione od una sezione verticale).

Un *parallelogramma* o *sistema articolato di Evans*, composto di un'asta A^0r e di una seconda asta A^ku , articolata in u a metà lunghezza della prima, serve a mantenere costantemente l'asse del calcoio A^0 nel medesimo piano perpendicolare alla LT passante per l'asse A' , intersezione dei piani verticali contenenti gli assi di ef ed LT . A tale scopo i perni situati alle estremità del detto sistema articolato, equidistanti da u , sono impegnati, l'uno in A^0 , col proprio asse sul prolungamento di quello del calcoio in modo da muoversi con esso sulle linee del disegno, l'altro r sulla LT in modo da poter scorrere mercè una piccola guida lungo la stessa LT , ed il terzo egualmente, scorrendo lungo la suddetta LT , si prolunga superiormente e termina con un'altra piccola guida che abbraccia l'asta ef della crociera per un breve tratto della sua lunghezza.

Due bracci a squadra gg' ed hh' sono destinati, il primo a scorrere sopra la guida LT , e sostenere in α , sul suo prolungamento, il pernio di una guida, entro la quale passa l'asta $o'd$ della crociera; il secondo, disposto perpendicolarmente al primo, a spostarsi parallelamente a se stesso ed alla p^0p' della medesima quantità di cui si sposta α nella direzione LT .

Un'altra squadra composta del braccio kk' , scorrevole sulla guida p^0p' , e del braccio più lungo mm' , perpendicolare ad esso, porta in α^0 , sul prolungamento di mm' , un pernio munito di guida entro la quale può scorrere il regolo A^0O^0 . L'asse di questo pernio si trova nel piano verticale passante per P^0P' ed in quello passante per l'asse del regolo A^0O^0 .

Infine il segnatoio A , munito di molla di pressione e leva di sollevamento, è portato da un piccolo carrello mobilissimo, sorretto da rotelle a gambo snodato ed attraversato dalle braccia hh' ed mm' delle squadre, in modo da esser obbligato a spostarsi nello stesso senso e della stessa quantità di cui spostano le braccia stesse ed i perni α^0 ed α .

Per porre lo strumento in grado di funzionare, bisogna: 1° situare il regolo zo col relativo corsoio O^0 in modo che l'asse del pernio portato dal detto corsoio venga a passare per la proiezione orizzontale del punto di vista; 2° fissare il sostegno s in modo che l'asse del pernio o' risulti distante dalla LT quanto O^0 lo è da P^0P' . Queste due distanze, rappresentanti la *distanza principale*, si misurano nel modo più agevole allorchando si porti il regolo A^0O^0 in posizione perpendicolare a p^0p' , cioè sovrapposto esattamente all'asta mm' , ed inoltre, facendo scorrere il regolo $z'x$ sull'altro zo fintantochè il pernio O' dal primo

sorretto, venga a situarsi col proprio asse nel piano verticale passante per l'asse longitudinale della LT ; condizione che si verifica allorchando le braccia $o'd$ ed ef della crociera si trovano nelle direzioni della P^0P' ed LT rispettivamente.

I due disegni rappresentanti le proiezioni ortogonali si fissano con punte sulla tavoletta, l'uno nella regione Tqp^0 e l'altro nella regione Lqp' . Nei casi ordinari si assegna al primo di questi spazii la proiezione orizzontale ed al secondo la proiezione verticale. Il disegno situato in Tqp^0 è quello le cui linee devono essere percorse dal calcoio e si colloca nella posizione voluta rispetto alla traccia P^0P' del piano di proiezione centrale, rappresentato nello strumento dal piano verticale passante per α^0 ed o' .

È da notarsi come, senza spostare i perni O^0 ed o' , nè alcun'altra parte dell'apparecchio, si possa ottenere un numero infinito di prospettive dipendenti soltanto dall'orientamento che si dà al disegno rispetto alla P^0P' , (e per essa alla p^0p' che le è parallela) e dalla distanza del disegno dalla P^0P' stessa.

La proiezione, che occupa la regione Lqp' deve essere collocata in modo che la linea d'orizzonte, cioè la traccia del piano orizzontale passante pel punto di vista, coincida collo spigolo della riga xy allorchando O' trovasi sovrapposto ad o sulla LT , ossia allorchando le braccia della crociera si trovano nelle direzioni LT e p^0p' . In tale posizione, qualunque movimento faccia il calcoio, il segnatoio descrive sul foglio collocato nel quadrante Lqp^0 una retta rappresentante la linea d'orizzonte. Allorchando il calcoio percorre proiezioni di punti situati in altri piani orizzontali al disopra od al disotto del piano di orizzonte, lo spigolo della riga xy dev'essere trasportato sulle corrispondenti proiezioni segnate nel disegno collocato in Lqp' , mediante opportuno spostamento nel senso della sua lunghezza del regolo $z'x$ al quale detta riga è fissa.

Giova qui osservare come detto disegno che occupa il posto Lqp' può esser collocato com'è indicato nella figura, oppure in posizione rovesciata; in quest'ultimo caso la prospettiva risulta eguale alla prima che è la vera, ma le sue parti a destra ed a sinistra sono invertite, od in altri termini l'intera prospettiva rimane disposta come lo sarebbe se fosse riflessa da uno specchio.

Le prospettive di linee rette o curve contenute in piani paralleli a quello della proiezione collocata nella regione Tqp^0 percorsa dal calcoio, sono date dal segnatoio in linee continue. Le prospettive delle rette perpendicolari al piano della suddetta proiezione si ottengono pure in linee continue, lasciando fermo il calcoio sul punto in cui si proiettano e muovendo la xy da un estremo all'altro della corrispondente proiezione collocata in Lqp' .

In generale, come si è già detto, la punta del segnatoio determina la proiezione centrale d'un punto qualunque dello spazio quando ad una delle sue proiezioni ortogonali sia sovrapposto il calcoio A^0 e per l'altra proiezione ortogonale passi il filo della riga xy . È quindi possibile procedendo per punti di ottenere prospettive di linee rampanti o curve gobbe. Ma per le applicazioni ordinarie, ed in special modo trattandosi di rappresentare soggetti architettonici, la forma dei corpi dovendo risultare dall'insieme di varie sezioni parallele (come piante dei diversi piani, se si tratta di un edificio) si disegneranno queste varie sezioni con tratti continui e con tutta speditezza e facilità spostando la xy solo nel passaggio dall'una all'altra sezione ed aprendo e richiudendo la vite di pressione che rende fisso il regolo $z'x$ alla guida zo .

Non è indispensabile di aver su d'un solo foglio tutte le proiezioni che individuano un oggetto; se invece esse sono

ripartite in più disegni, come succede p. es. nel caso dianzi accennato delle piante dei vari piani di un edificio, si comincerà ad operare sulle linee di uno di essi e poscia si sovrapporranno gli altri al primo, servendosi di un mezzo qualunque per ottenere la sovrapposizione perfetta, ricorrendo, p. es., alla squadratura dei fogli, ove essa fu fatta appositamente esatta, o meglio ancora a due spilli.

Per guidare il calcatoio allorchando deve percorrere tratti rettilinei, può tornar utile far uso di una riga; si ottiene così una maggior speditezza ed una maggiore esattezza nell'operazione. Del resto i movimenti che la mano fa eseguire al calcatoio si trasmettono agevolmente e senza sforzi alle parti dello strumento ed al segnatoio: quindi le linee tracciate da quest'ultimo riescono nitide e prive di ondulazioni.

Il sistema articolato $A'urA^0$ può essere invertito nel corso del lavoro, scambiando fra loro di posto gli estremi A^0 ed r dell'asta A^0r , onde permettere al calcatoio di portarsi sui punti del disegno più lontani dalla p^0p' senza essere obbligati a dare alla porzione di guida qT una lunghezza eccessiva.

Detto sistema inoltre può essere vantaggiosamente sostituito nella costruzione dello strumento da una squadra simile alla $kk' mm'$ dianzi descritta, la quale abbia un braccio sorreggente il pernio della guida A' e scorrevole lungo la LT e l'altro braccio passante entro una guida girevole intorno all'asse del calcatoio.

Le dimensioni dello strumento sono relativamente piccole, non misurando in lunghezza e larghezza che allo incirca la somma della lunghezza e larghezza massima di una delle proiezioni ortogonali e del foglio sul quale si disegna la prospettiva, e non occupando in altezza che pochi centimetri al disopra della tavoletta. Esso si può smontare e riporre in apposita cassetta di custodia senza difficoltà alcuna e senza ricorrere ad utensili speciali, ma facendo uso tutt'al più di un cacciavite.

Nella Tavola XII sono riprodotte alcune applicazioni dello strumento. Da una stessa pianta (fig. 1) e da una stessa mezza elevazione (fig. 2) furono ricavate le due prospettive (fig. 3 e 4) molto differenti fra loro.

La prima di esse, col punto centrale in O_6 , suppone la distanza del punto di vista dal piano del quadro di millimetri 32, e l'oggetto collocato in modo da essere tagliato dal detto piano del quadro: per quest'ultima ragione essa è risultata nelle parti più vicine all'occhio di dimensioni maggiori delle corrispondenti nei disegni in proiezione ortogonale.

La seconda prospettiva (fig. 4) è una delle infinite altre che si possono ricavare spostando ad arbitrio, od a seconda dei dati, uno solo od ambi i disegni sulla tavoletta; le sue dimensioni sono molto più piccole, ed il punto centrale è situato in O_7 , molto più in alto di quello della fig. 3.

Analogamente, le figure prospettiche (fig. 6 e 7), rappresentanti una fontana, sono state ottenute servendosi della elevazione o profilo (fig. 5) e di una corrispondente pianta nella stessa scala, beninteso, del profilo, che si credeva inutile riprodurre.

Tutte le linee, rette o curve, componenti le suddette prospettive, furono disegnate dal prospettografo con andamento continuo e nessun'altra fu aggiunta a quelle con esso ottenute. Alcune, anzi, furono omesse per brevità ed anche perchè, risultando già a sufficienza determinate dal tracciato già eseguito, possono essere semplicemente, e con sicurezza, segnate a mano o coll'aiuto della riga.

Converrebbe fare ora un confronto fra lo strumento descritto ed alcuni altri già esistenti e proponentisi uno scopo

consimile, comunque fondati su principii diversi. Senonchè per essere essi poco pratici, sia per la loro complicazione, sia perchè non risolvono che incompletamente il problema ed obbligano a ricorrere a costruzioni geometriche ausiliarie, si accenneranno solo di volo alcune caratteristiche principali ed i motivi particolari pei quali essi riescono disadatti allo scopo.

Lo strumento per disegnare prospettive di figure geometriche di A. Brix (1) non opera che sulla proiezione orizzontale, disegnando prospettive di figure piane parallele a detta proiezione, e richiede l'uso di due scale, che servono a riportare sullo strumento in centimetri e frazioni di centimetro le varie quote corrispondenti alle altezze della proiezione verticale.

Esso presenta un insieme assai complicato di parti disposte su di una doppia piattaforma e comunicantisi a vicenda il movimento per trasmetterlo in ultimo al segnatoio per mezzo di un lungo filo flessibile, che si avvolge su rotelle di rinvio. Questa complicazione e la necessità di far uso delle scale e del filo, il quale ultimo non è mai assolutamente inestensibile, esclude la possibilità di ottenere un disegno non solo esatto, ma anche sufficientemente approssimato.

Meno complicato del precedente, lo strumento H. Ritter di Francoforte (2) si limita pure a disegnare prospettive di una figura piana orizzontale percorsa dal calcatoio, ed ove si supponga questa figura trasportata in altri piani orizzontali, obbliga a ricorrere a due scale ricavate dalla proiezione verticale, le quali devono essere riportate sullo strumento mediante due strisce di carta, onde servire di guida a certi indici. Oltre a ciò, vi sono casi nei quali nel corso dell'operazione si rende indispensabile lo spostamento del disegno o quello di una delle scale, ed altri nei quali debbesi eseguire la riduzione della proiezione data e di ambe le scale. Ha poi grandi dimensioni relativamente al disegno sul quale si può operare e non è suscettibile di molta esattezza di lavoro per i punti che trovansi in vicinanza della linea d'orizzonte, dovendosi, nel passaggio di questa linea, cambiare di posto alcune sue parti. Finalmente esso non funziona affatto se la figura da riprodursi si suppone tagliata dal piano del quadro o le è anche soltanto vicina; e così risulta limitato il campo delle sue applicazioni alle sole prospettive di piccole dimensioni rispetto alla figura data.

Preferibile ai precedenti sarebbe forse l'ingegnoso *Apparecchio prospettico* del prof. G. Hauck di Berlino (3). Ma presenta anch'esso una doppia serie di inconvenienti tanto rispetto al modo di adoperarlo quanto rispetto alla sua materiale costruzione, e tali da renderne impossibile l'uso nella pratica. Questo apparecchio, di assai grandi dimensioni relativamente al disegno che se ne può ottenere (cinque volte all'incirca più lungo e più largo di esso), consta di sedici regoli o guide cinematicamente combinati fra loro, con ventun centri o perni di rotazione e di scorrimento, oltre a due calcatoio e ad un segnatoio. I regoli vengono posti sopra una tavoletta ed i perni fissati in gran parte su di essa per mezzo di una punta acutissima di cui ciascuno è munito. La posizione loro però è quella delle

(1) *Instrument zum Aufzeichnen perspectivischer Bilder von geometrischen Figuren*. Patentschrift, n. 27646.

(2) *Instrument zur mechanischen Herstellung perspectivischer Bilder aus geometrischen Figuren, etc.* Patentschrift, n. 29002.

(3) *Mein Perspectivischer Apparat* von GUIDO HAUCK. Separatdruck aus der Festschrift der Königlichen Technischen Hochschule zu Berlin 1884.

due proiezioni ortogonali, deve essere previamente stabilita mercè un disegno preparatorio da rinnovarsi ad ogni cambiamento di dati.

I due calcolatori, uno per la proiezione orizzontale e l'altro per la verticale, devono percorrere contemporaneamente queste proiezioni, cosa che obbliga l'operatore a tenerli d'occhio entrambi nello stesso tempo, guidandoli l'uno colla destra e l'altro colla sinistra, pur senza perdere di vista il segnatoio. L'inventore, preoccupandosi di questa difficoltà, suggerisce di ricorrere a due operatori, notando come nei casi in cui si possa procedere per sezioni parallele ad uno dei piani di proiezione, basta muovere un solo calcolatore, chiudendo certe viti dell'apparecchio. Ed infatti, a parte la necessità del disegno preparatorio, in questi casi l'uso dello strumento riuscirebbe possibile se la sua particolare struttura e la sua complicazione non offrissero altri notevoli inconvenienti, come ad esempio quello della difficoltà di configgere gli aghi o punte dei perni nelle fibre legnose della tavoletta senza che abbiano a deviare dalla posizione loro assegnata (la quale deve essere anche scrupolosamente perpendicolare al piano della tavoletta stessa); l'altro dell'attrito e dei *giuochi* o ritardi di movimenti delle molte sue parti, ecc.; inconvenienti tutti che, sommandosi insieme, danno luogo a difficoltà d'azione e ad inesattezze non trascurabili. Finalmente, malgrado il già ristretto campo utile dell'apparecchio, potrebbero alcune sue parti assumere, in certi casi, posizioni tali da impedirsi il moto a vicenda.

Molto imperfettamente dunque corrispondono allo scopo gli apparecchi sinora esistenti, dappoichè non offrono gran risparmio di tempo di fronte alle costruzioni geometriche, nè, offrendolo, presentano quella facilità di maneggio e quella esattezza nei risultati che sarebbero desiderabili.

Per contro il Prospettografo precedentemente descritto è essenzialmente pratico ed il suo buon funzionamento è stato luminosamente provato dai molti risultati che se ne sono ottenuti, disegnando prospettive di edifici tanto all'esterno che all'interno, monumenti, macchine, particolari di decorazione, ecc. Risulta quindi evidente la sua utilità per ingegneri, architetti, pittori, scenografi, ecc., nonchè per l'insegnamento scientifico ed artistico. In generale poi, chiunque sa quanto siano lunghe e complicate le operazioni geometriche che occorrono per ottenere un disegno in prospettiva, specialmente quando trattasi di linee curve, apprezzerà uno strumento, il quale, eliminata ogni costruzione, offre modo di ottenere gli stessi risultati, passando semplicemente una punta sulle linee di ordinari disegni in proiezione ortogonale.

In ultimo riesce opportuno fare osservare come colla disposizione cinematografica dianzi descritta, scambiando nello strumento il segnatoio col calcolatore, si possa risolvere anche il problema inverso di quello sinora preso in considerazione, vale a dire si possa ricavare una proiezione ortogonale allorché sia data un'altra proiezione ortogonale ed una proiezione centrale o prospettiva di un dato oggetto.

Ing. PIETRO FIORINI.

Nota. — Lo strumento su descritto dell'Ing. Fiorini è brevettato in Italia ed all'estero. Esso funziona tutti i giorni a comodità dei visitatori della I^a Esposizione Italiana di Architettura testè inaugurata in Torino. E la Giuria gli assegnò la medaglia d'oro. Venne, al prezzo di L. 350, acquistato dalla Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri di Torino, da quella di Bologna, dal Municipio di Torino per l'Ufficio tecnico, dal Ministero della Pubblica Istruzione, ecc.

APPLICAZIONI DELLA MATEMATICA

IL METODO DEI MINIMI QUADRATI NELL'INSEGNAMENTO PROFESSIONALE.

Continuazione e fine

8. — Gli esempi considerati finora possono bastare, nell'insegnamento elementare, per estendere il teorema dei minimi quadrati al caso della compensazione di un numero qualunque di osservazioni condizionate. Tale induzione può venire avvalorata dal ragionamento seguente.

Supponiamo che le grandezze cercate siano sei, legate da quattro equazioni. Immaginiamo che tre delle sei quantità potessero valutarsi con assoluta esattezza, in guisa che le loro correzioni dovessero esser nulle; si tratterà allora di compensare le altre tre. Eliminando dalle quattro equazioni le tre grandezze esattamente valutate, resterà una equazione sola fra le tre da compensare; e trovandoci così ridotti ad uno dei casi già conosciuti, potremo applicare il teorema. Così, se si suppongono esattamente conosciute le X_1, X_2, X_3 , la compensazione delle altre darà $\delta_4^2 + \delta_5^2 + \delta_6^2 = \text{minimo}$; se invece si suppongono determinate senza errore le X_2, X_3, X_4 , dovrà aversi $\delta_1^2 + \delta_5^2 + \delta_6^2 = \text{minimo}$, ecc. Ora, tutti questi casi particolari devono risultare dalla formula generale quando si supponga rispettivamente $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$, ovvero $\delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0$, ecc. Apparisce così giustificato che la condizione generale della compensazione debba essere:

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 + \delta_5^2 + \delta_6^2 = \text{minimo}.$$

9. — Indipendentemente da ragionamenti di quest'ordine, i quali senza dubbio non hanno il rigore voluto, possiamo giungere alla dimostrazione diretta del teorema in tutta la sua generalità, ora che gli esempi considerati nei numeri 4, 5, 6 hanno spianato la via all'intelligenza del concetto generale su cui intendiamo basare la compensazione; che cioè l'ufficio di questa debba essere di rendere soddisfatta tutte le equazioni di condizione, *alterando il meno possibile il complesso delle attestazioni dell'esperienza*. L'illustrazione e la espressione analitica di questo concetto sono divenute facilissime, nei casi sopra esaminati, col solo aver introdotto una rappresentazione sensibile del complesso delle diverse grandezze osservate. Nel caso generale di n grandezze non abbiamo più questo aiuto, ma tuttavia non è difficile arrivare a risultati analoghi.

Considerando un sistema di valori $O_1, O_2, \dots, O_n$, attribuiti ad n grandezze $X_1, X_2, \dots, X_n$, possiamo dire che esso rappresenta una speciale entità matematica, la quale non è caratterizzata da nessuno dei singoli valori considerati isolatamente, ma soltanto dal complesso dei medesimi. È a questa speciale entità matematica che dovremo applicare il nostro concetto della compensazione, considerando la variazione complessiva che essa subisce per le singole variazioni che possono attribuirsi alle n grandezze da cui risulta costituita. Gioverà a questo scopo ricorrere al linguaggio convenzionale della teoria degli spazi ad n dimensioni, e perciò cominciamo col richiamarne qui le definizioni fondamentali.

10. — Facendo variare in tutti i modi possibili le n grandezze $X_1, X_2, \dots, X_n$, supposte indipendenti, si può formare un numero n volte infinito di sistemi di valori. L'insieme di tutti questi sistemi costituisce ciò che chiamasi *spazio analitico* o *campo di variabilità ad n dimensioni*. Ognuno di questi sistemi costituisce, col suo complesso, un *elemento* o *punto* di quello spazio.

Se alle variabili si impone una equazione di condizione $F_1(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$, è chiaro che, fissando arbitrariamente $n - 1$ delle variabili, ne risulta di conseguenza il valore dell'altra; perciò non potrà più aversi un numero n volte infinito di sistemi di valori, ma solo un numero $n - 1$ volta infinito. In altri termini, il campo di variabilità delle n grandezze viene a trovarsi ristretto ad uno spazio di $n - 1$ dimensioni, che viene definito dall'equazione $F_1 = 0$.

Aggiungendo una seconda equazione $F_2 = 0$, il campo di variabilità dell'elemento $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ viene a limitarsi ancor più, non potendo allora disporsi arbitrariamente che di $n-2$ delle n grandezze. Si dice perciò che l'elemento non può muoversi che entro un campo ad $n-2$ dimensioni definito dalle equazioni $F_1 = 0, F_2 = 0$.

In generale, imponendo i equazioni di condizione $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_i = 0$, queste definiranno uno spazio analitico ad $n-i$ dimensioni nel quale è costretto a trovarsi l'elemento $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Così, per esempio, per $n=3$ abbiamo lo spazio geometrico a tre dimensioni, nel quale il punto rappresentativo potrà assumere un numero tre volte infinito di posizioni; imponendo una equazione $F_1(X_1, X_2, X_3) = 0$, il punto è costretto a stare nella superficie rappresentata da questa, che forma uno spazio a due dimensioni; imponendo una seconda condizione $F_2 = 0$, il campo di variabilità del punto viene a limitarsi ancor più, riducendosi alla linea d'intersezione di queste due superficie, la quale costituisce uno spazio ad una sola dimensione.

11. — Prendiamo a considerare due sistemi di valori:

$$\begin{array}{ccccccc} (X_1, X_2, \dots, X_n) & : & : & : & : & : & (P) \\ (O_1, O_2, \dots, O_n) & : & : & : & : & : & (p) \end{array}$$

che definiscono i due elementi P e p dello spazio ad n dimensioni, e proponiamoci di studiare la differenza analitica fra l'insieme dei valori (P) complessivamente considerati e l'insieme dei valori (p) . Questa differenza fra i due sistemi costituisce lo spostamento che subisce l'elemento per passare dall'uno all'altro di essi; ed è pure chiamato, per analogia cogli spazi geometrici ordinari, *distanza analitica* fra i due punti P e p .

È facile intendere che la differenza fra i due complessi di valori (P) (p) dipenderà dalle differenze $\delta = (X - O)$ fra i valori corrispondenti delle variabili; ma potendo essere alcune di esse maggiori, altre minori, alcune positive, altre negative, è pur evidente che queste differenze dovranno essere considerate nel loro insieme, non già isolatamente. In altri termini, lo spostamento cercato sarà una funzione di tali differenze. Per indagare la forma che deve avere questa funzione, basterà esaminare le proprietà che devono caratterizzarla; la qual cosa ci servirà anche a ben chiarire e precisare il concetto di spostamento o distanza fra i due elementi P, p .

1° Se, tanto nell'uno come nell'altro dei due sistemi, si fa uno stesso scambio fra i valori di due qualunque delle variabili, ciò equivale a considerare queste come disposte in diverso ordine, la qual cosa non deve influire sulla differenza fra i due sistemi: così, per esempio, fra i due gruppi $(7, 5, 4, 6)$, $(3, 9, 5, 4)$ passa evidentemente la stessa differenza complessiva che fra i due altri $(5, 6, 4, 7)$, $(9, 4, 5, 3)$. Perciò la funzione cercata dovrà essere simmetrica rispetto alle differenze $\delta = X - O$.

2° Quando i due sistemi dati differiscono solo per una delle variabili, e tutte le altre coincidono esattamente, lo spostamento dovrà ridursi alla differenza corrispondente a quell'unica variabile; ossia la funzione cercata dovrà ridursi ad $X_1 - O_1$ quando si supponga $\delta_2 = \delta_3 = \dots = \delta_n = 0$; ovvero ad $X_2 - O_2$ quando vi si introduca $\delta_1 = \delta_3 = \dots = \delta_n = 0$; e così di seguito. Perciò la funzione cercata dovrà avere una delle forme

$$\Sigma \delta, \text{ ovvero } \sqrt{\Sigma \delta^2}, \text{ ovvero } \sqrt[3]{\Sigma \delta^3}, \text{ ecc.}$$

3° La divergenza fra i due sistemi non dovendo riuscire nulla che quando essi siano identicamente uguali (ossia quando si annullino contemporaneamente tutte le differenze), dovranno escludersi le forme:

$$\Sigma \delta, \sqrt{\Sigma \delta^3}, \dots$$

perchè queste potrebbero ridursi a zero, senza esser nulli tutti i δ , nel caso in cui alcuni di essi siano positivi, altri negativi.

Restano dunque come possibili le funzioni di indici pari:

$$\sqrt{\Sigma \delta^2}, \sqrt[4]{\Sigma \delta^4}, \text{ ecc.},$$

le quali hanno anche il carattere di dare due valori uguali e di segno contrario secondo che si considera lo spostamento di (P) rispetto a (p) , ovvero quello reciproco di (p) rispetto a (P) .

4° Per poter scegliere fra le diverse funzioni di indice pari sopra accennate, basterà esaminare i casi particolari $n=2$, $n=3$, nei quali la rappresentazione geometrica permette di meglio concretizzare il concetto della distanza fra i due elementi. In tal modo si riconosce che la funzione cercata deve essere tale da ridursi a:

$$\sqrt{(X_1 - O_1)^2 + (X_2 - O_2)^2}$$

ovvero a:

$$\sqrt{(X_1 - O_1)^2 + (X_2 - O_2)^2 + (X_3 - O_3)^2}$$

secondo che vi si supponga $n=2$ ovvero $n=3$.

Dal complesso di tutti i caratteri precedenti si può concludere che la funzione esprimente la differenza Δ fra i due sistemi (P) (p) , considerati nel loro complesso, non potrà essere che la seguente:

$$\Delta = \sqrt{\Sigma (X - O)^2}.$$

12. — Premesse queste spiegazioni, torniamo al nostro problema della compensazione.

Il campo di variabilità delle n grandezze da determinare costituisce uno spazio analitico S_n ad n dimensioni, nel quale trattasi di determinare la posizione di un elemento. Le equazioni di condizione $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_i = 0$, obbligano questo elemento a trovarsi nello spazio ad $n-i$ dimensioni S_{n-i} definito dalle medesime. Invece l'esperienza, dandoci i valori di osservazione $O_1, O_2, \dots, O_n$ che non soddisfano esattamente alle equazioni date, assegnerebbe al punto cercato una posizione non compresa nello spazio analitico S_{n-i} . La compensazione dovrà avere per scopo di correggere i valori osservati in guisa da ricondurre il punto p allo spazio S_{n-i} dal quale venne ad uscire per effetto degli errori avvenuti. E se vogliamo che lo spostamento che facciamo subire al punto p non abbia nulla di arbitrario, bisognerà che esso si limiti a quello che è strettamente necessario per rendere soddisfatte le equazioni; in altri termini la compensazione dovrà essere regolata in modo da alterare il meno possibile il complesso dei risultati dell'esperienza. Dovremo dunque assumere, per posizione corretta dell'elemento cercato, quello fra tutti i punti dello spazio S_{n-i} che meno si discosta dall'elemento osservato; ossia lo spostamento di questo dovrà farsi secondo la più breve distanza che lo separa dallo spazio S_{n-i} . E siccome la misura dello spostamento che si produce colle correzioni $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ è data da $\sqrt{\Sigma \delta^2}$, ne segue che la condizione analitica della compensazione sarà:

$$\Sigma \delta^2 = \text{minimo.}$$

A schiarimento e conferma del ragionamento precedente, possiamo aggiungere considerazioni analoghe a quelle svolte nel n. 4.

Gli errori commessi nelle osservazioni, alterando i valori veri delle grandezze X , hanno prodotto nell'elemento cercato uno spostamento che noi non conosciamo, ma che però possiamo immaginare scomposto in diversi altri, uno dei quali sia appunto quello per il quale l'elemento è venuto ad uscire dallo spazio S_{n-i} in cui doveva trovarsi, e gli altri siano avvenuti entro lo spazio stesso. Di questi ultimi noi non abbiamo alcun indizio; mentre del primo abbiamo l'esatta valutazione, che ci viene data dalla distanza Δ che separa l'elemento osservato dallo spazio S_{n-i} . Tutto quello che noi possiamo dunque fare è di eliminare colle correzioni questo spostamento componente Δ ; ed è ciò appunto che si fa riconducendo per la via più breve il punto osservato allo spazio S_{n-i} .

13. — Il concetto della compensazione, quale fu da noi formulato, potrebbe condurre anche nel caso generale, ad

ottenere direttamente le equazioni determinatrici dei valori corretti senza passare per il teorema dei minimi quadrati. Basterebbe perciò formare le equazioni dello spazio S_i ad i dimensioni che contiene il punto osservato ed è normale a quello S_{n-i} . Si avrebbero così altre $n - i$ equazioni che, unite alle i date, determinerebbero completamente i valori compensati. Così, per esempio, nel caso di una sola equazione $F = 0$ si dimostra che la normale allo spazio S_{n-1} , da essa definito, dà luogo alle $n - 1$ equazioni:

$$\left(\frac{dF}{dX_1} \right)_0 = \left(\frac{dF}{dX_2} \right)_0 = \dots = \left(\frac{dF}{dX_n} \right)_0.$$

Nel caso però di più equazioni, questa via diretta riuscirebbe troppo complicata, ed è meglio valersi di quella basata sul teorema generale dei minimi quadrati, mercè cui la compensazione è ridotta ad un problema analitico che si risolve colla teoria dei massimi e minimi.

I dettagli del metodo di risoluzione sono ampiamente svolti, sulle tracce di Gauss, da tutti gli autori, anche elementari.

14. — Finora abbiamo supposto che tutte le osservazioni fossero dello stesso peso. Il caso più generale di pesi differenti può agevolmente ricondursi a quello, colle considerazioni per le quali da una osservazione di peso p si passa ad un'altra di peso 1; invece delle correzioni $\delta = X - O$ si vengono allora a considerare nuove correzioni δ' da applicarsi a delle grandezze fittizie $\sqrt{p}X$; i cui valori osservati siano $\sqrt{p}O$, tutti di peso 1; a queste osservazioni potrà applicarsi il teorema, e nasce così l'equazione:

$$\sum \delta'^2 = \text{minimo}$$

ed introducendo in questa:

$$\delta' = \sqrt{p}X - \sqrt{p}O = \sqrt{p}(X - O) = \sqrt{p}\delta$$

si ottiene:

$$\sum p \delta^2 = \text{minimo}$$

che è l'espressione più generale del teorema dei minimi quadrati.

15. — Non ci resta ora che di dimostrare come per effetto della compensazione si raggiunga un maggior grado di esattezza nei risultati. Il concetto intuitivo dal quale siamo partiti, ci permette non solo di provar ciò, indipendentemente da ogni considerazione sulla probabilità degli errori, ma anche di precisare quale sia il vero significato di questo guadagno di esattezza, meglio di quanto non possa farsi per mezzo della funzione di Gauss. Per semplicità ragioneremo sul caso più elementare del N. 4; ma sappiamo che nel caso generale i ragionamenti sono in sostanza i medesimi.

Sia AB (fig. 61) la retta su cui deve trovarsi il punto cercato; P_0 sia la posizione vera di questo, a noi ignota; p la posizione che gli venne assegnata dall'esperienza. Gli errori di osservazione hanno avuto per effetto, complessivamente, di produrre lo spostamento P_0p che non possiamo conoscere, ma che risulta dai due componenti: P_0P lungo la retta, e Pp

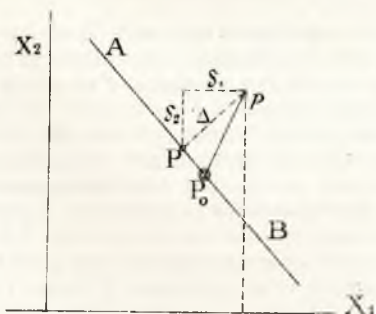


Fig. 61.

normale ad essa. È il primo di questi che ci è veramente ignoto; ma il secondo è perfettamente conosciuto, ed è nella eliminazione di esso che consiste sostanzialmente la compensazione. Ora, dopo fatta questa correzione, col sostituire al punto osservato p il piede P della perpendicolare Δ , questo punto corretto P potrà ancora essere affetto da uno spostamento incognito P_0P , ma si è sempre certi che questo errore residuo sarà minore dell'errore primitivo P_0p . Da ciò il guadagno di esattezza *sul complesso delle osservazioni*.

Giova far notare che questo miglioramento complessivo dei risultati può essere talvolta a danno di una delle osservazioni considerata isolatamente. Nel caso della figura precedente si riconosce che non solo si è avvicinata al vero la posizione del punto cercato, ma allo stesso tempo si sono approssimati anche i due valori osservati per le coordinate. Questo caso non avviene però sempre, e se ne vede un esempio nella figura 62, nella quale, essendosi supposto il punto

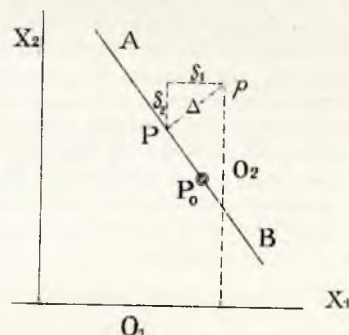


Fig. 62.

vero P_0 molto vicino all'ordinata del punto osservato p , è evidente che la compensazione ha avuto per effetto di migliorare l'osservazione O_2 , ma di peggiorare l'osservazione O_1 ; e malgrado ciò, non può negarsi che nel complesso vi sia stato un guadagno di precisione, trovandosi il punto corretto P più prossimo al vero P_0 che non il punto osservato.

Dobbiamo dunque concludere che colla compensazione si consegue *sempre* un guadagno di precisione; ma ciò non deve intendersi nel senso generalmente accettato (in base alla Teoria di Gauss) che *ognuna* delle osservazioni si avvicini, per suo conto, al vero; ma solo nel senso che si approssima al vero quella speciale entità matematica che è costituita dal complesso delle medesime.

Ora, è appunto da questo complesso, e non già dalle singole osservazioni, che dipendono i risultati finali che formano lo scopo di tutto il lavoro. Possiamo dunque dire che la compensazione delle osservazioni conduce sempre ad un guadagno di esattezza *sui risultati finali*.

16. — L'ing. Francesco Crotti (*), proponendosi in un'opera elementare lo stesso nostro scopo di liberare lo studio del metodo dei minimi quadrati dalle ipotesi su cui riposa la deduzione della funzione di Gauss (che egli con troppa leggerezza considera non solo oscura ma fallace), ha tentato una via che avremo occasione di indicare più innanzi, e che non è assolutamente disprezzabile. Molte obiezioni potrebbero farsi alle idee che egli premette, ed alle critiche che muove alla Teoria di Gauss. Ciò che però non può lasciarsi passare inosservato è questo, che egli nega l'efficacia obbiettiva del metodo, in quanto esso tenda ad avvicinare al vero i risultati.

Ecco le sue testuali parole:

« Spero di poter persuadere i miei Colleghi che la vera » portata del metodo dei minimi quadrati non è quale comunemente si crede, ossia una ricerca diretta ad avvicinarsi » al vero valore delle quantità osservate; ma bensì un semplice metodo per ricavare da osservazioni discordanti quel » valore unico che le rappresenti con imparzialità ».

(*) Sulla compensazione degli errori. Hoepli, 1888.

« È ovvio ora lo scorgere che, scemata l'efficacia obbiettiva » del metodo, nel senso di tendere alla scoperta del vero valore, la sua applicazione si riduce ad un affare di convenienza, poichè cessa la necessità imperiosa di doverlo proprio applicare anche a costo di un enorme dispendio di tempo e di fatica ».

Nulla di più erroneo e dannoso di queste idee, tendenti a demolire uno dei più ammirabili monumenti dell'ingegno umano e delle fecondità delle scienze matematiche. Praticamente poi, la sola enunciazione di quelle idee, invece di contribuire a divulgare l'uso del metodo, non può che raggiungere un risultato opposto. Dati i giudizi riferiti dell'ing. Crotti, era perfettamente inutile proporsi una trattazione elementare della compensazione degli errori.

Del resto questi giudizi non sono appoggiati da alcuna seria argomentazione. I dubbi da lui esposti sulla funzione di Gauss potrebbero tutt'al più aver qualche valore per quelle classi di osservazioni alle quali non fu applicata finora la verifica sperimentale della legge di probabilità degli errori; non già alle osservazioni topografiche e geodetiche in cui la conferma sperimentale è sempre riuscita luminosamente.

A parte tutto ciò, noi abbiamo dimostrato in modo abbastanza elementare che l'efficacia obbiettiva del metodo dei minimi quadrati dipende dal concetto sostanziale della compensazione, e non già da alcuna ipotesi più o meno dubbia sulla probabilità degli errori accidentali. Poco importa se il guadagno di esattezza non avviene realmente sulle singole osservazioni, purchè esso si produca sul loro complesso, da cui dipendono i risultati finali.

Osservazioni indirette.

17. — Siano da determinare i valori di i grandezze $Y_1, Y_2, \dots, Y_i$ le quali, per loro natura, non si prestino all'osservazione diretta. Sapendo però che esse sono legate, in modo conosciuto, ad altre n grandezze $X_1, X_2, \dots, X_n$ direttamente osservabili, si potranno determinare i valori di quelle per mezzo dei risultati di osservazione $O_1, O_2, \dots, O_n$ ottenuti per queste ultime. Le relazioni che stabiliscono la dipendenza fra le quantità osservabili X e quelle Y che si tratta di valutare indirettamente, sogliono essere della forma seguente:

$$\begin{aligned} X_1 &= a_1 Y_1 + b_1 Y_2 + \dots + i_1 Y_i \\ X_2 &= a_2 Y_1 + b_2 Y_2 + \dots + i_2 Y_i \\ &\vdots \\ X_n &= a_n Y_1 + b_n Y_2 + \dots + i_n Y_i \end{aligned}$$

del resto i ragionamenti che faremo sono indipendenti dalla forma e dalla natura di tali relazioni.

Introducendovi i valori osservati per le X , esse si riducono ad un sistema di n equazioni fra le i incognite Y . Si capisce tosto che, se fosse $n < i$, le incognite resterebbero indeterminate; se fosse $n = i$ le equazioni sarebbero esattamente sufficienti a determinare le Y , e non rimarrebbe alcun controllo per l'esattezza dei risultati. Se dunque si vuole che le osservazioni siano in numero esuberante al bisogno per dar luogo a delle verifiche e quindi ad una compensazione, bisogna supporre $n > i$.

Ciò posto se noi, dopo aver introdotti i valori $O_1, O_2, \dots, O_n$ al posto delle X nelle n date equazioni, le combiniamo i ad i in tutti i modi possibili, potremo formare tanti gruppi di i equazioni ad i incognite quante sono le combinazioni diverse di n cose i ad i , cioè:

$$N = \frac{n(n-1) \dots [n-(i-1)]}{1 \cdot 2 \dots i},$$

risolvendo questi N gruppi di equazioni, potremo ottenere altrettanti sistemi di valori per le Y , i quali dovrebbero essere tutti concordanti fra loro se fossero assolutamente esatti i valori $X = O$ da cui siamo partiti. Siccome però questi sono ottenuti coll'osservazione, e quindi possono essere affetti da piccoli errori, così avverrà in generale che quelli N sistemi di valori delle Y riusciranno fra loro discordanti. Il problema della compensazione consiste in questo caso nel correggere opportunamente le osservazioni in guisa da togliere quella

discordanza, ossia di ottenere un unico sistema di valori per le Y , qualunque siano le equazioni scelte per determinarle.

È facile ricondurre questo problema a quello delle osservazioni condizionate, immaginando che, colle n equazioni date, si proceda all'eliminazione delle Y . Si otterranno così $n-i$ nuove equazioni, contenenti soltanto le X , e che potranno essere considerate come equazioni di condizione a cui devono soddisfare le osservazioni fatte per rendere compatibili fra loro tutte le n equazioni date. Così trasformato il problema, è chiaro che le correzioni dei valori $O_1, O_2, \dots, O_n$ saranno date dall'equazione già nota $\sum p \delta^2 = \text{minimo}$.

Notisi che per l'applicazione di questa non è necessario eseguire di fatto l'eliminazione che abbiamo immaginato per passare dalle n equazioni date alle $n-i$ equazioni di condizione fra le X . Basterà applicare il metodo dei massimi e minimi servendosi direttamente delle n equazioni date le quali, considerate come coesistenti, contengono implicitamente quelle equazioni di condizione.

18. — Invece di ridurre alle osservazioni condizionate il caso delle osservazioni indirette, possiamo anche trattare in modo diretto questo problema, ottenendo così un'altra dimostrazione indipendente del teorema dei minimi quadrati.

Si presenta spontanea una via che a prima giunta apparisce assai semplice. Abbiamo già detto come dalle n equazioni osservate possano ricavarsi N sistemi di valori, in generale discordanti, per le incognite Y ; la media fra tutti questi sistemi potrà darci i valori definitivi delle Y . Quando però si rifletta che, nel fare questa media, bisogna tener conto dei pesi dei vari sistemi di valori, e che questi pesi riescono diversi a seconda dei coefficienti delle equazioni da cui derivano, e ciò anche quando si suppongono di ugual peso tutte le osservazioni O , si capirà facilmente come questa via sia troppo complicata per costituire un metodo diretto di compensazione. Se poi dal concetto ora esposto si vuole dedurre il teorema dei minimi quadrati, si richiede un largo impiego dell'analisi, con svantaggio della semplicità e della chiarezza (*).

Noi preferiamo invece dimostrare il teorema, anche in questo caso, con un metodo basato sulla rappresentazione geometrica, che conferisce maggior evidenza ai ragionamenti.

19. — Cominciamo dal caso di n equazioni lineari a due incognite

$$\begin{aligned} a_1 Y_1 + b_1 Y_2 + X_1 &= 0 \\ a_2 Y_1 + b_2 Y_2 + X_2 &= 0 \\ &\vdots \\ a_n Y_1 + b_n Y_2 + X_n &= 0 \end{aligned}$$

nelle quali al posto delle X dovranno introdursi i valori di osservazione $O_1, O_2, \dots, O_n$.

Assumendo Y_1, Y_2 come coordinate ortogonali di un punto del piano, le equazioni precedenti rappresenteranno altrettante rette, le quali, se le osservazioni fatte fossero esatte, dovrebbero passare tutte per un unico punto, le cui coordinate darebbero i valori cercati di Y_1, Y_2 . A causa degli errori di cui sono affette quelle osservazioni, questa condizione non si verifica; e considerando le n rette due a due si hanno

invece $\frac{n(n-1)}{2}$ punti di intersezione. Bisogna dunque sot-

toporre le osservazioni fatte sulle X ad opportune correzioni, in guisa che, spostandosi convenientemente tutte le rette, esse siano condotte a passare per un unico punto. Al solito, questo scopo potrebbe raggiungersi in infinite guise; ma perchè non si producano spostamenti arbitrari, all'infuori di quelli che sono strettamente richiesti dalla necessità che tutte le rette passino per uno stesso punto, bisognerà imporre la condizione che le correzioni alterino il meno possibile il complesso dei valori osservati. Nel caso che ora studiamo, questo concetto assume una forma ancora più evidente: poichè, come vedremo, il punto comune a tutte le

(*) È questo il metodo proposto dall'Ing. Crotti nella pubblicazione da noi citata nel § 16.

rette compensate dovrà esser tale da rappresentare nel miglior modo possibile l'insieme di tutte le rette osservate.

Prima di svolgere ed applicare questo concetto, converrà esporre qualche considerazione intorno al grado di fiducia che si deve accordare alla posizione, assegnata dall'esperienza, ad ognuna delle n rette.

20. — Sia (fig. 63): $aY_1 + bY_2 + X = 0$ una qualunque delle equazioni date, ed AB la retta rappresentativa di essa. La posizione di questa retta nel piano può essere definita dall'angolo α che essa fa coll'asse OY_1 , e dalla

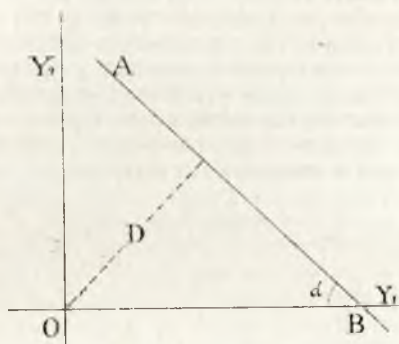


Fig. 63.

lunghezza D della perpendicolare ad essa condotta dall'origine; questi due elementi sono dati da:

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}, \quad D = \frac{X}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Nel caso nostro, i due coefficienti a, b sono quantità numeriche perfettamente conosciute; invece il parametro X viene determinato coll'esperienza, e può quindi essere affetto da errore. Ciò equivale a dire che della retta AB noi conosciamo con sicurezza la direzione, non però la sua distanza dall'origine. Se supponiamo che il valore osservato $X = 0$ sia affetto da un errore $\pm \omega$, ne risulterà uno spostamento nella retta per cui essa, conservando inalterata la sua direzione, verrà a trovarsi allontanata od avvicinata all'origine di una distanza:

$$\frac{\omega}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Perciò, se e esprime l'errore medio attribuibile alla valutazione $X = 0$, potremo attribuire alla retta $aY_1 + bY_2 + X = 0$ un errore medio di posizione espresso da:

$$\frac{e}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Estendendo alla posizione di una retta nel piano il concetto di *peso*, per cui questo dovrà essere inversamente proporzionale all'errore medio di posizione, potremo assumere come misura del *peso di posizione* della retta osservata, ossia del grado di fiducia da accordare alla posizione che le fu assegnata dall'esperienza, il valore:

$$p = \frac{a^2 + b^2}{e^2} = p(a^2 + b^2),$$

essendo p il peso dell'osservazione $X = 0$.

21. — Ciò premesso, immaginiamo che le osservazioni $O_1, O_2, \dots, O_n$ abbiano pesi tali da riuscire tutti uguali all'unità i pesi π di posizione delle n rette.

Basterà perciò che quei pesi p rendano soddisfatte le condizioni:

$$p_1(a_1^2 + b_1^2) = p_2(a_2^2 + b_2^2) = \dots = p_n(a_n^2 + b_n^2) = 1.$$

In questa ipotesi, tutti i punti delle n rette hanno diritto ad ugual fiducia per rappresentare il punto cercato, ed è dall'insieme di tutti questi punti che deve desumersi la posizione più verosimile del punto cercato.

Analiticamente parlando, abbiamo un numero n volte infinito di sistemi di valori di ugual peso per le due incognite Y_1, Y_2 ; quindi i valori corretti delle medesime dovranno risultare dalla media generale di tutti quei sistemi. Geometricamente, ciò equivale a dire che il punto cercato dovrà essere il centro delle medie distanze di tutti i punti delle n rette, ossia il centro di gravità di queste rette indefinite, considerate come linee materiali omogenee.

Quantunque il centro di gravità di una retta indefinita sia per se stesso indeterminato, questa indeterminazione cessa evidentemente appena si tratti, non più di una sola retta, ma del complesso di tre almeno: e tale è il nostro caso, in cui le equazioni date devono essere sempre in numero $n > 2$.

Messo il problema sotto questa forma, riesce facilissimo arrivare al teorema dei minimi quadrati, ricordando la nota proprietà secondo la quale il centro di gravità di un sistema di punti materiali di ugual peso è quel punto per cui riesce minima la somma dei quadrati delle distanze dai medesimi. Perciò, chiamando d' la distanza del punto cercato da un punto qualunque della prima retta, d'' da quella un punto qualunque della seconda, ecc., la proprietà ora accennata sarà espressa da

$$\sum_1 d'^2 + \sum_2 d''^2 + \dots + \sum_n d^{(n)2} = \text{minimo},$$

essendo la sommatoria $\sum_1$ estesa a tutta la prima retta, quella $\sum_2$ a tutta la seconda, ecc. Dalla figura 64 si riconosce che per ogni retta i valori dei d possono esprimersi con:

$$d = \frac{\Delta}{\cos \varphi},$$

in cui si diano a φ tutti i valori da 0 a 90° e da 0 a -90° . La condizione precedente si trasforma allora in:

$$\sum \frac{\Delta_1^2}{\cos^2 \varphi} + \sum \frac{\Delta_2^2}{\cos^2 \varphi} + \dots = (\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots) \sum \frac{1}{\cos^2 \varphi} = \text{min.}$$

la quale non può essere soddisfatta che da:

$$\sum \Delta^2 = \text{minimo}.$$

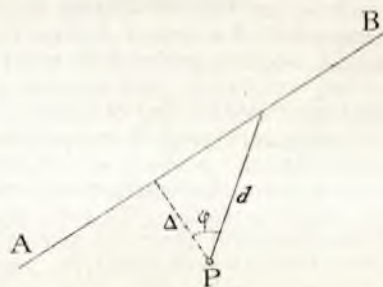


Fig. 64.

Allo stesso risultato si arriverebbe osservando che il punto cercato deve trovarsi, rispetto alle rette osservate, nella stessa condizione del centro di gravità di altrettanti pesi uguali supposti applicati ai piedi delle perpendicolari Δ abbassate da esso alle diverse rette; basta allora applicare direttamente a questi pesi la nota proprietà del centro di gravità.

Se nell'espressione $\sum \Delta^2$ a cui siamo giunti, si sostituiscono i Δ coi loro valori:

$$\frac{\delta}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

in funzione delle correzioni δ delle osservazioni, e si nota che nell'ipotesi fatta, sui pesi di queste, deve essere in generale:

$$p = \frac{1}{a^2 + b^2},$$

si arriva al teorema dei minimi quadrati:

$$\sum p \delta^2 = \text{minimo}.$$

Se invece del caso ipotetico, in cui i pesi p sono tali da rendere tutti uguali ad 1 i pesi π di posizione delle n rette, si trattasse del caso generale dei p qualunque, gli stessi ragionamenti potrebbero ripetersi con poche varianti.

Del resto il passaggio al caso generale può farsi col solo notare che una retta alla cui posizione deve assegnarsi il peso π , può essere considerata come equivalente a π rette coincidenti di peso 1. L'espressione $\Sigma \Delta^2$ si cambia allora in:

$$\Sigma \pi \Delta^2 = \Sigma \pi \frac{\delta^2}{a^2 + b^2};$$

ed infine, essendo $\pi = p(a^2 + b^2)$, giungiamo al risultato generale $\Sigma p \delta^2 = \text{minimo}$.

22. — Lo stesso metodo di dimostrazione può applicarsi ad un numero qualunque di equazioni a tre incognite, che rappresenterebbero altrettanti piani nello spazio.

E anche nel caso generalissimo di n equazioni ad i incognite, dovremo fare la media generale di tutti gli n volte infiniti sistemi di valori per le Y che possono ottenersi colle i equazioni considerate isolatamente; la qual cosa ci condurrebbe in modo simile al teorema dei minimi quadrati.

Del resto, ci basta aver indicato il concetto fondamentale su cui può basarsi la compensazione, tanto più che è ben raro in pratica, e specialmente nella Topografia, il caso di osservazioni indirette con più di tre incognite.

23. — Riassumendo, le vie da noi indicate forniscono due distinte dimostrazioni del teorema dei minimi quadrati. Ottenute entrambe senza l'aiuto della funzione di Gauss, e senza servirsi di alcuna considerazione sulla probabilità degli errori, esse sono molto adatte per l'insegnamento elementare; il quale può riuscire per tal modo più semplice e spoglio da quelle ipotesi e da quei concetti che per taluni sono oggetto di dubbio, e che da molti sogliono essere considerati come astruserie metafisiche.

Il primo dei metodi da noi indicati ha poi il beneficio di mettere in luce quale sia il vero significato e la sostanza del teorema dei minimi quadrati, rettificando alcune idee poco esatte che discendono dal metodo di Gauss. In fondo, quel teorema non è già una conseguenza della natura e delle proprietà degli errori accidentali; esso sussiste invece per se stesso, indipendentemente da ogni considerazione di questo genere, ed è in sostanza la semplice espressione analitica del concetto di compensazione quale fu da noi formulato, che cioè si debbano applicare alle osservazioni, considerate nel loro complesso, quelle correzioni che sono *strettamente indispensabili* per eliminare il disaccordo che nasce fra le osservazioni stesse. Abbiamo pure dimostrato, sempre indipendentemente da ogni considerazione sulla probabilità degli errori, che col metodo dei minimi quadrati non solo si conciliano le osservazioni discordanti, ma, ciò che è più, si raggiunge maggior precisione nei risultati. Abbiamo pure fatto vedere come debba intendersi questo aumento di precisione sul complesso delle grandezze incognite e non già sulle singole grandezze considerate isolatamente.

Cosicchè, l'esattezza della funzione di Gauss e delle ipotesi su cui riposa, potrà essere messa in dubbio, senza che perciò rimanga menomata la verità e la efficacia obbiettiva del metodo dei minimi quadrati. E non sarà perciò necessario limitare la bontà di esso, come si fa da molti autori, a quelle sole classi di grandezze osservabili per le quali l'esperienza ha permesso di ottenere una conferma pratica diretta della legge di Gauss.

In questa breve memoria ci siamo limitati alla dimostrazione del teorema dei minimi quadrati; ma il metodo da noi seguito potrà forse essere suscettibile di maggiori sviluppi, specialmente per quanto riguarda i bisogni della topografia.

RESISTENZA DEI MATERIALI

RESISTENZA DEI GRANITI E DELLE BEVOLE ALLA FLESSIONE.

Studio dell'Ing. E. GREGOTTI.

I.

Nelle pietre da taglio che si usano per le costruzioni civili ed idrauliche è provocata in generale la sola resistenza agli sforzi di semplice pressione, essendo esse addatte in modo speciale a sopportarli. Tuttavia non è neppure infrequente il caso in cui le pietre dure sono anche cimentate alla flessione. Così nelle costruzioni civili le medesime si impiegano comunemente per la formazione dei gradini delle scale a sbalzo, delle mensole e delle lastre di fondo dei balconi e dei balconi; e talvolta si sono anche impiegate con vantaggio per la formazione di solai incombustibili, o di terrazze a perfetta tenuta d'acqua ordite di lastroni di pietra da taglio appoggiati ai muri perimetrali o a travi in ferro. Nelle costruzioni stradali si usano per surrogare il volto nei ponticelli di portata non superiore a circa m. 2.00: e questi ponticelli, detti *a lastrone*, si costruiscono tanto a servizio di strade carrozzabili quanto di strade ferrate. E nelle costruzioni idrauliche si usano assai frequentemente per comporre lesponde e il fondo dei ponti-canali di portate alquanto limitate. Infine un altro caso in cui le pietre da taglio soffrono sforzi di flessione, lo si ha nei solidi caricati in punta.

È chiaro adunque che al costruttore deve presentarsi non infrequente il caso di dover conoscere il modo di resistere di questi materiali alla flessione.

In generale, per calcolare la resistenza di un solido soggetto a flessione è necessario conoscere la resistenza per trazione e per pressione della materia di cui consta, o almeno, in molti casi speciali, quello dei due coefficienti che ha valore numerico minore.

Per le pietre il coefficiente di resistenza alla trazione è assai minore del coefficiente di resistenza alla pressione; e mentre è stato sperimentato molte volte e per molte varietà di esse il carico di rottura per pressione, sono invece pochi ed incerti i dati che si hanno sul modo di resistere alla estensione (1).

E questi dati sono tuttavia tali che, usando i metodi universalmente indicati nelle varie opere che trattano di resistenza dei materiali, si arriva a conseguenze manifestamente erronee.

Così, ad esempio, se riteniamo coi più eguale ad $1/10$ il coefficiente di stabilità per le pietre da taglio, e se il coefficiente di rottura del granito provocato alla trazione è di chilogrammi 34.68 per cm.², come risulta dalle esperienze eseguite dalla Direzione generale delle pubbliche costruzioni di Lombardia, questo materiale non si dovrebbe cimentare ad uno sforzo di trazione superiore a chilogr. 3.468 per cm.².

Ma se invece, mediante le formole in uso per il calcolo dei solidi metallici, atte a dare lo sforzo che un solido omogeneo subisce provocato a semplice flessione, si calcolano gli esempi pratici più comuni e più sicuri in cui i graniti soggiacciono a tali sforzi, si troverà, come in seguito sarà fatto vedere, che non solo quello sforzo unitario di chilogr. 3.468 per cm.² è raggiunto, ma sorpassato di molto.

Quanto è ora indicato in questo esempio per i graniti si può ripetere a proposito delle altre pietre da taglio.

Questo fatto così rimarchevole e che altri avrà prima di me osservato, può trovare la sua spiegazione in un altro fatto già noto e in un'ipotesi verosimile.

È noto che se si assoggetta a semplice trazione un dato campione di un solido omogeneo, per es. di ferro, il medesimo si rompe sotto un dato sforzo, per es. di chilogr. 37 per ogni mm² di sezione resistente. Se poi questo stesso campione si assoggetta alla semplice flessione si troverà che lo

(1) È tuttavia degno di essere rammentato lo studio: *Sulla resistenza alla flessione della pietra Serena*, del tenente colonnello Conti. Vedi nota A in fine di questa memoria.

sforzo di trazione riferito all'unità di superficie che può sopportare la fibra più tesa, è molto superiore a chilogrammi 37 per mm². Veggasi a questo proposito le interessanti osservazioni indicate nell'opera *Résumé des leçons par Navier*, compilate da M. Barré de Saint-Venant. Del resto, il fatto è facilmente esplicabile quando si rifletta che nell'un caso tutte le fibre del solido sono egualmente sollecitate all'allungamento, e nel secondo ne è sollecitata solamente una parte di esse, ed in misura a grado a grado decrescente, in modo che la fibra che subisce lo sforzo massimo è teoricamente una sola; la più lontana dall'asse neutro, in quella parte della sezione dove le fibre sono tese (1).

È anche verosimile supporre che il modulo di elasticità delle pietre da taglio provocate all'estensione differisca dal modulo di elasticità delle medesime provocate alla compressione, per cui, nei casi di flessione, gli allungamenti e gli accorciamenti non avvenendo in egual misura per forze eguali, le deformazioni del solido non si manifestano più secondo è supposto in quelle ipotesi, colle quali si arriva alle formole di resistenza che si usano comunemente.

Adunque gli autori che, dando le indicazioni più o meno attendibili degli sforzi unitari sotto i quali le pietre si rompono per trazione, non fanno alcuna riserva particolare intorno al modo col quale conviene praticamente servirsi dei numeri dai medesimi esposti, inducono nell'errore di ritenere come non resistenti o pericolose molte costruzioni che effettivamente sono sicure.

A portare maggior confusione in questo argomento si aggiunge il fatto, ammesso alla leggera dalla generalità dei costruttori, di ritenere eguale ad $\frac{1}{10}$ il coefficiente di stabilità nelle pietre da taglio tanto per la trazione quanto per la pressione.

Quando siano noti i moduli di elasticità e gli sforzi unitari di rottura per una data specie di pietra da taglio, tanto da poter compilare formole che diano i veri allungamenti e accorciamenti di una data fibra e gli sforzi cui la medesima soggiace in ragione di date forze sollecitanti esterne, si potrà allora istituire un confronto fra i casi che la pratica considera come sicuri e i risultati dei calcoli, e fissare i limiti fra i quali si può far variare il vero coefficiente di stabilità per quelle date specie di pietra da taglio, coefficiente che è sempre estraneo ai calcoli di resistenza, e solo rappresenta il rapporto trovato con un grande numero di osservazioni, fatte sulle opere esistenti da lunga serie d'anni, fra lo sforzo di rottura e lo sforzo per cui è ancora assicurata la stabilità del solido contro tutte le possibili imperfezioni del campione e contro tutte le degradazioni del tempo. E per ora si può ben dire che i predetti autori hanno tenuto all'oscuro i loro lettori di tutte quelle osservazioni per mezzo delle quali dovrebbero essere arrivati a stabilire eguale ad $\frac{1}{10}$ un tale coefficiente.

Quando sarà fatto questo studio si scorgerà come il coefficiente di stabilità per trazione deve ritenersi diverso secondo le varie specie di pietre, e come in alcune di esse è da assumersi minore di $\frac{1}{10}$.

Le pietre da taglio che si assoggettano a flessione sono in realtà in numero ristretto, e si riducono ai graniti, ai *gneiss* e a un limitato numero di arenarie dure. Per l'Italia si sono accennate tutte le principali, quando si sono citati i graniti, le bevole (*gneiss*), il Malanaggio, la Luserna, la pietra di Sgorgora, la pietra Serena forte, e poche altre.

Nelle costruzioni civili si impiegano, secondo le varie regioni, tutte le accennate pietre; così nell'Alta Italia sono di

granito di Montorfano o di Baveno, o di Bevola d'Ossola, o di Luserna le scale a sbalzo; e queste nei dintorni di Roma si fanno con pietra di Sgorgora, e nei pressi di Firenze con pietra Serena. I pratici hanno trovato che per tutti questi materiali, fatta eccezione del granito, non conviene oltrepassare lo sbalzo di m. 1,50 ed è più prudente non oltrepassare per la pietra di Sgorgora e per la pietra Serena l'aggetto di m. 1,20. I gradini di bevola si fanno con lastre dello spessore vario fra cent. 4, 5 e 8; i gradini di Sgorgora e di pietra Serena si fanno invece a tutta alzata, e così quelli di granito, per i quali l'aggetto può essere anche maggiore di m. 2.

Nell'Alta Italia le lastre dei balconi e ballatoi sono talvolta di granito, ma più spesso di Luserna o di bevola d'Ossola, il quale ultimo materiale con spessori molto esili manifesta tuttavia una resistenza sufficiente allo scopo.

Per speciali circostanze ho potuto maggiormente portare la mia attenzione sulle bevole e sui graniti, che sono di uso generale nella Lombardia.

Il granito ha il vantaggio di presentare una grande omogeneità di struttura e una rimarchevole uniformità fra campione e campione: per cui si può essere sicuri che lo sforzo di rottura varia di poco nei vari esemplari: e questo è un carattere per cui si può assumere abbastanza grande il coefficiente di stabilità.

Lo stesso non può dirsi delle bevole, delle quali le migliori sono quelle dell'Ossola. Infatti, mentre alcune cave mettono in commercio esemplari perfettamente comparabili, alcune altre invece insieme ad una lastra perfettamente sana ne consegnano un'altra che, o presentando troppo marcati i piani di sfaldatura, per cui può anche diventare geliva e prodursi talora il distacco di qualche lama, o perchè inquinata di materie piritose che si modificano sotto l'azione atmosferica, o per altre cause, è di resistenza assai minore.

Tuttavia non è difficile eliminare con certezza questi esemplari, poichè infatti vediamo nell'uso continuo che di tali lastre si fa per comporre i ballatoi, come di tale materiale si sappia usare in modo ardito, ma sicuro.

II.

Dopo aver lamentata la deficienza di esperienze dirette, colle quali si siano cimentate le pietre dure alla flessione, e dopo aver osservato come tali esperienze non risolverebbero ancora completamente la questione, perchè nulla si saprebbe intorno al coefficiente di stabilità, senza ricorrere ai casi pratici di resistenza, si vede quanta luce possa portare sull'argomento l'esame delle opere costrutte per avere un criterio sulla scelta dello sforzo di sicurezza, che solo interessa il costruttore: intendendo per sforzo di sicurezza il prodotto dello sforzo di rottura pel coefficiente di stabilità.

Fra i molti usi pratici che mi fu dato osservare, mi sono limitato a quelli soltanto, per i quali si potevano facilmente conoscere ed esattamente misurare le forze esterne: e questi casi si trovano, come in seguito sarà fatto vedere, nella costruzione dei ponti-canali di pietra da taglio, di uso comunissimo in Lombardia, nella costruzione dei ballatoi e delle scale a sbalzo e delle mensole.

Ma di tutti questi casi, è appunto quello dei ponti-canali dove le lastre di pietra da taglio hanno uffizi più importanti e dove le forze esterne sono esattamente misurabili.

Di tali opere adunque mi occuperò in modo particolare.

Quanto alle formole che si applicheranno, esse sono quelle stesse di uso generale per calcolare le costruzioni metalliche.

Si è già detto che esse non sono esatte; ma nello stesso modo che si manifestano ottime per la pratica delle costruzioni metalliche molte formole che non sono senonchè approssimate, così anche per le lastre di pietra da taglio i risultati ottenuti con quelle formole si dovranno ritenere sufficientemente esatti e fra loro comparabili, quando l'esperienza li avrà confermati, come nel caso nostro li conferma pienamente.

Per citare un solo caso già accennato, è noto come nel calcolo, per es., delle travate di ferro si suole ritenere di chilogrammi 35 o 40 per mm. il coefficiente di rottura per trazione e per pressione, quantunque si sappia che la rottura

(1) Altri hanno cercato di spiegare diversamente questo fenomeno, ammettendo altre ipotesi e formulando altre teorie. Per la ghisa William Henry Barlow (*Philosophical Transactions*, 1885) ha trovato sperimentalmente che, detto f lo sforzo di rottura provocata coll'allungamento diretto, lo sforzo di rottura f' provocata per flessione è mediamente dato dalla $f' = 2.25 f$. Tale sforzo f' varia per altro secondo la forma della sezione.

Per la ghisa a produrre un tale fenomeno concorre anche il fatto (RANKINE, *A Manual of applied Mechanics*. Parte II, Cap. III, § 294) che gli strati superficiali sono più resistenti della massa interna.

non avviene quando questo sforzo di tensione o compressione è provocato in causa di semplice flessione nella sola fibra più lontana dall'asse del solido.

III.

Prima di procedere oltre, ritengo utile riassumere brevemente i coefficienti di rottura per alcune pietre da taglio provocate alla trazione.

Cito anzitutto i seguenti dati nell'Arte del fabbricare, di Curioni, e che sono in gran parte dovuti al generale Morin: *Leçons de mécanique pratique*:

« Stando a limiti molto estesi, e » distinguendo le pietre che possono » tornare utili nelle costruzioni in » tenere, mezzane e dure, secondo » che il peso del loro decimetro cubo » è di chg. 1,40 a 2,20; di chg. 2,20 » a 2,60; e più di chg. 2,60, relativi » vamente alla loro resistenza alla » rottura per trazione riferita al mm. » della loro sezione normale alla di- » rezione della forza traente, si può » dire:

« 1° Che varia fra chg. 0,06 e » 0,13 nelle pietre calcari tenere, » fra chg. 0,13 e 0,30 nelle pietre » calcari mezzane e fra chg. 0,30 e » 0,65 nelle pietre calcari dure;

« 2° Che oscilla fra chg. 0,04 e 0,10 nelle pietre silicee » e tenere, fra chg. 0,10 e 0,42 nelle pietre silicee mezzane » e fra chg. 0,42 e 0,80 nelle pietre silicee dure;

« 3° Che sta fra chg. 0,04 e 0,15 nelle pietre vulcaniche » tenere, fra chg. 0,15 e 0,40 per le pietre vulcaniche mez- » zane, e fra chg. 0,40 e 0,90 per le pietre vulcaniche dure ».

In modo più specificativo leggesi nella stessa opera la seguente tabella:

Indicazione dei corpi	Resistenza alla rottura per trazione riferita al mm ²
Basalto d'Alvernia	Chg. 0.770
Calcere di Portland	» 0.600
Calcere bianco a grana fina ed omogenea	» 0.144
Calcere litografico compatto.	» 0.308
Calcere a tessuto arenario	» 0.229
Calcere a tessuto oolitico.	» 0.137

Più recentemente (1884) l'Ing. Cantalupi ha riassunto le esperienze precedenti, convalidate da nuove da lui eseguite, pubblicando la seguente tabella, che riguarda appunto le pietre più in uso nella Lombardia.

Indicazione dei materiali	Carico per centim. quadrato	
	che ha prodotto la rottura per estensione	cui si possono sottoporre in via permanente
Puddinga di Camerata.	Chg. 30.29	Chg. 3.02
Ceppo di Brembate (qualità scadente) »	3.08	» 0.30
Arenaria di Sarnico (qualità sup.) »	23.17	» 2.31
Arenaria di Mapello.	29.63	» 2.96
Granito di Baveno	34.68	» 3.46

I carichi di rottura delle varie pietre cimentate alla pressione sono riprodotti minutamente in tutti i trattati di costruzione, per cui mi dispenso dal citarli, osservando che si può mediamente ritenere che essi siano 8 e 20 volte maggiori dei carichi di rottura per estensione.

Per i graniti e le bevole si può ammettere:

Carichi di rottura per compressione:

Granito . . . 5 a 8 chg. per mm. di sezione
Bevole (*gneiss*) . 3 a 5 » » » »

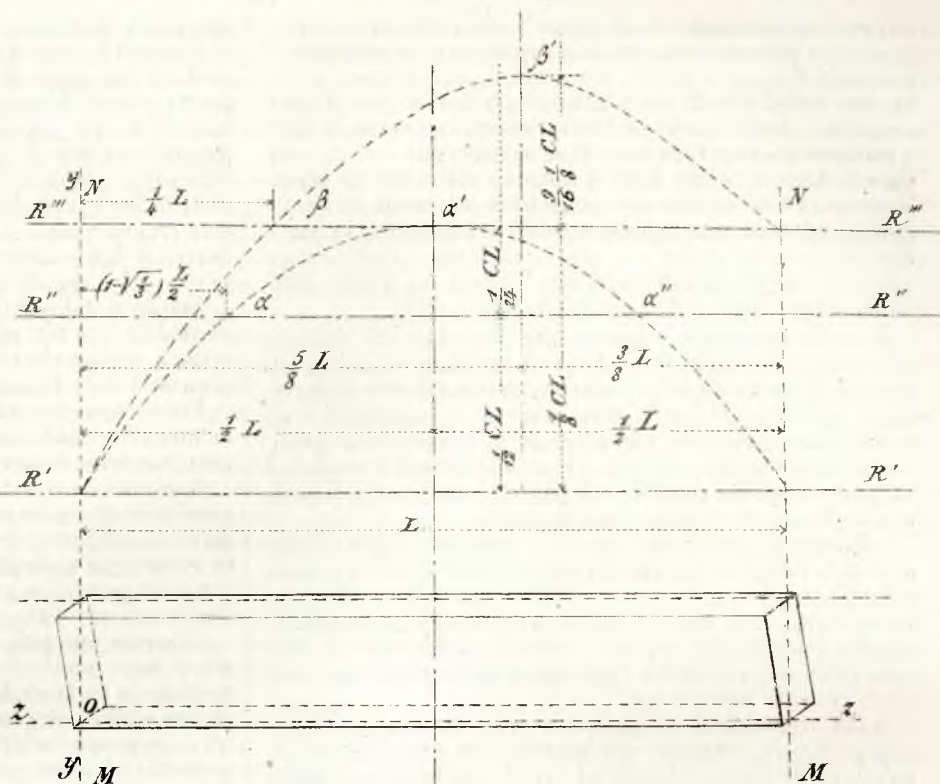


Fig. 65.

IV.

Le figure che verranno mano mano inserite, rappresentano alcune varietà di ponti-canali tolti dal vero, che si possono classificare in due tipi principali:

a) *Ponti-canali di pietra da taglio colle sponde portanti*, in cui la travata (1), o parte resistente principale, soggetta a flessione, appoggiandosi su due piedritti, che costituiscono le spalle o le pile dell'edificio, è formata dalle sponde: ed il fondo invece è composto con alcune lastre di minore importanza che resistono alla flessione appoggiandosi fra le due sponde;

b) *Ponti-canali di pietra da taglio col fondo portante*, in cui la travata, o parte resistente principale, è costituita invece dal fondo, e le sponde resistono alla semplice flessione dovuta alla spinta dell'acqua.

Per queste costruzioni le pietre da taglio comunemente usate sono i graniti e le bevole (*gneiss*). Nelle opere del primo tipo le sponde sono quasi sempre di granito e il fondo sempre di bevola. Se l'edificio deve presentare poca eleganza, i lastroni si pongono in opera lavorando semplicemente a grana grossa la faccia interna, sulla quale si pratica la scanalatura, e lasciando le altre faccie quali risultarono dalla spaccatura del pezzo, o facendovi solo qualche ritocco.

Le bevole del fondo, anche con poca lavorazione, si presentano, per la loro stessa struttura, abbastanza piane e regolari. Esse si infilano nelle due scanalature, profonde circa quattro centimetri, dopo aver poste in opera le sponde, e se ne stuccano i lembi con cemento idraulico per ottenere la chiusura perfetta.

Nelle opere del secondo tipo il fondo è per lo più di bevola: se è di granito, per lo più è lavorato sulla faccia superiore ridotta a piano, sui fianchi e sulla faccia inferiore solo per due o tre centimetri al contorno. Le sponde si appoggiano semplicemente sul fondo e la connessura è stuccata con cemento. Talvolta invece sulla faccia superiore del fondo sono praticate due scanalature, profonde due centim. circa,

(1) La parola *travata*, che si riferisce più propriamente ad opera di legname, ed è divenuta di uso comune anche per indicare le opere di ferro soggette a flessione, parmi si possa estendere alle opere di granito soggette a simili sforzi.

in cui entrano le sponde. Con questo mezzo, oltrecchè ottenere una più perfetta chiusura, si aumenta assai la resistenza delle sponde.

In ambidue i tipi di ponti-canali le lastre di pietra da taglio sono in condizioni assai favorevoli per poter calcolarne con esattezza gli sforzi esterni cui sono soggette.

Consideriamo il primo tipo: il lastrone che funge da travata portante è un solido omogeneo ad asse rettilineo. Sul medesimo agiscono le seguenti forze esterne (fig. 66): la spinta

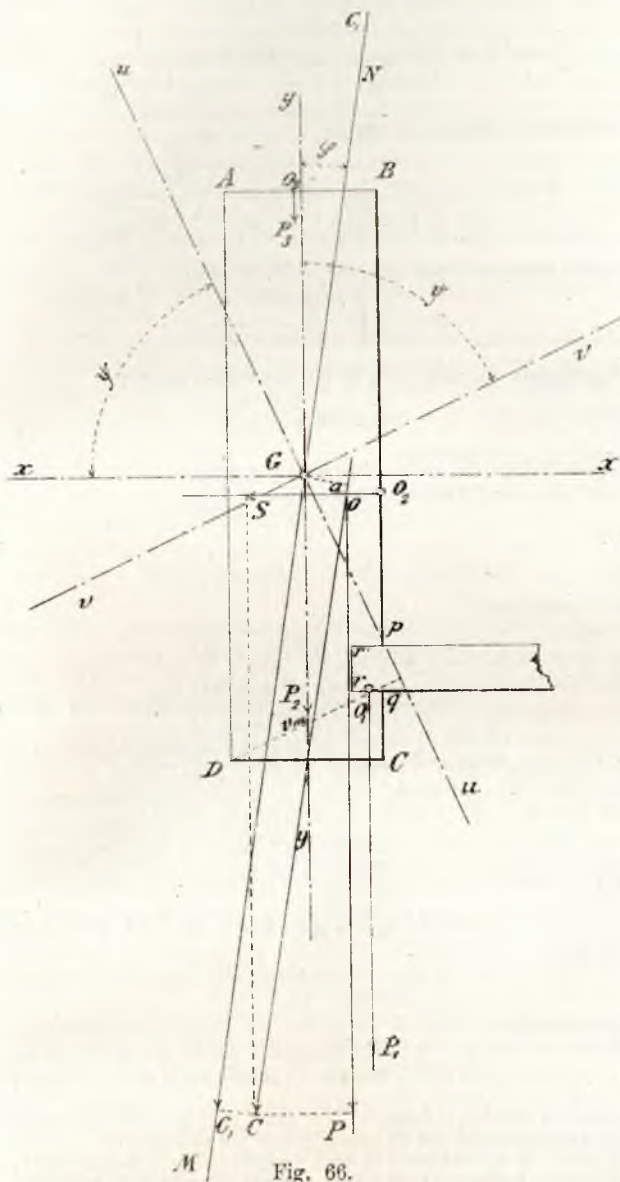


Fig. 66.

S dell'acqua contenuta nel ponte-canale, diretta orizzontalmente dall'interno all'esterno e distribuita uniformemente secondo la lunghezza del solido fra gli appoggi; e la forza verticale P pure uniformemente distribuita secondo la lunghezza del solido fra gli appoggi.

Questa forza P è la risultante di tutti i pesi che gravitano sul lastrone: cioè del peso P_1 (composto del peso dell'acqua contenuta nella metà del ponte-canale e del peso della metà della lastra di fondo), che supporremo applicato nel punto di mezzo O , della retta rq ; del peso P_2 della parte di lastrone verticale posto fra gli appoggi, distribuito uniformemente lungo l'asse G del solido; e del peso P_3 , sempre piccolo in confronto di P_1 e P_2 , che rappresenta il sovraccarico accidentale, uniformemente distribuito sopra un segmento parallelo all'asse della travata proiettato sul punto O_2 di mezzo della faccia superiore del lastrone.

Componendo la spinta S col peso P si ottiene una risultante r , uniformemente distribuita lungo tutta la portata, non passante in generale per l'asse del lastrone resistente. Il solido è adunque sottoposto alla resistenza composta di *flessione e torsione*.

Consideriamo separatamente queste due resistenze; ossia alla forza C sostituiamo il sistema equivalente di una forza C_1 equipollente a C , ma passante per l'asse G , e di un momento M eguale a quello della forza C rispetto all'asse G , e dello stesso segno.

Se diciamo R_z lo sforzo provocato per torsione in una sezione normale all'asse del solido, distante di una lunghezza z dall'appoggio, per effetto del momento M uniformemente distribuito lungo tutto l'asse del solido fra gli appoggi, è facile vedere che questo sforzo R_z varia proporzionalmente alla funzione:

$$\frac{1}{2} M - \int_z^0 M \frac{dz}{L} = M \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{L} \right)$$

dove L rappresenta la portata del solido, cioè la distanza fra le due sezioni d'appoggio.

Ossia lo sforzo R_z è nullo nella sezione mediana, è massimo nelle sezioni estreme, dove però ha un valore che è solo la metà di quello dovuto ad un momento torcente M applicato in un punto qualunque dello stesso solido, incastrato ad un solo estremo e libero all'altro.

Ma siccome, finchè il momento torcente non ha un valore assai più grande di quello che può assumere nei casi che ora consideriamo, la sezione pericolosa del solido sottoposto alla forza C è la mediana, dove è massimo il momento flettente, e nella sezione mediana il momento torcente è nullo, così il valore dello sforzo massimo trovato nell'ipotesi che il solido sia sottoposto a semplice flessione, rappresenta lo sforzo massimo a cui realmente il solido è sottoposto.

Un calcolo affatto simile è quello che i costruttori sogliono istituire per gli arcarecci, che sono soggetti, come nel caso nostro, a sforzi di torsione e flessione. E si noti che per tetti di grande pendenza e per arcarecci di rilevante altezza, lo sforzo di torsione è assai più rilevante che nel caso nostro.

Ciò osservato, lo sforzo massimo di tensione e di pressione

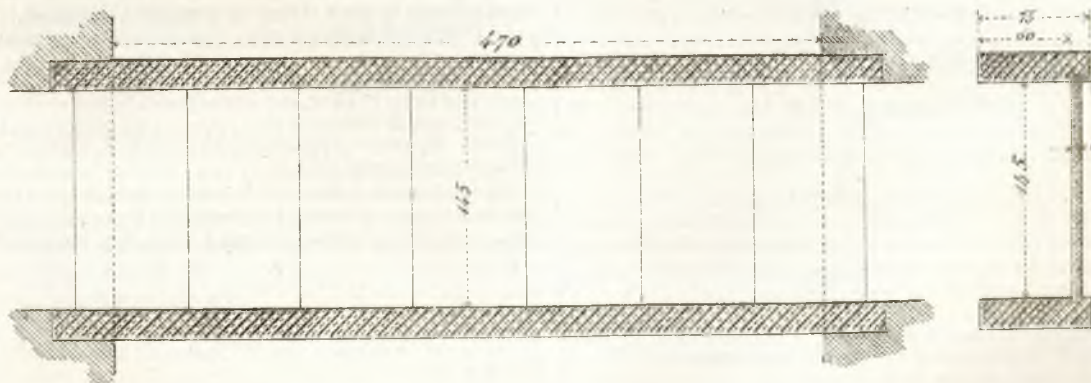


Fig. 67 e 68. — Ponte-canale sul canale Mora.

che in qualsiasi sezione del solido normale all'asse si avvera, è dato dalla nota formula:

$$R = J \mu v_{\text{mass}} \quad (1)$$

dove (se G è il centro di gravità della sezione, e se xx yy sono gli assi principali centrali di inerzia fra loro perpendicolari, se ϕ è l'angolo che il piano di sollecitazione di traccia MN fa coll'asse yy , se vv è la traccia del piano di flessione, e uu è l'asse neutro, perpendicolare al piano di flessione; se inoltre si indicano con J_x e J_y i momenti principali d'inerzia della sezione, rispettivamente relativi agli assi xx e yy)

$$J = \sqrt{\frac{\cos^2 \phi}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \phi}{J_y^2}},$$

μ è il momento flettente relativo alla sezione che si considera, e v_{mass} è la massima distanza dall'asse neutro a cui si trova una fibra tesa o compressa della sezione che si considera, e questa distanza si può calcolare colla relazione:

$$\tan \psi = \frac{J_x}{J_y} \tan \phi$$

che permette di passare dagli assi coordinati xx yy a quelli vv uu , e allora v_{mass} rappresenta il massimo valore della variabile v nell'equazione della sezione riferita agli assi uu e vv .

Colle formule dianzi citate si può adunque, per qualsiasi forma della sezione e per qualsiasi modo di variare dal momento μ calcolare lo sforzo R in ogni sezione, ed avere il massimo sforzo R , che diremo R_{mass} , che si verifica nel solido.

Quando il solido ha sezione costante, il valore di R_{mass} varia solo col variare di μ .

Nel caso particolare in cui la sezione del solido è rettangolare, il valore di R_{mass} diventa:

$$R_{\text{mass}} = \frac{3}{4} \frac{L}{ab} \left(\frac{S}{a} + \frac{P}{b} \right) \quad (2)$$

quando il solido è semplicemente appoggiato ai due estremi, o quando è semplicemente appoggiato ad un estremo e completamente incastrato nell'altro.

Quando invece il solido è completamente incastrato ai due estremi, la formula (1) si riduce alla seguente:

$$R_{\text{mass}} = \frac{1}{2} \frac{L}{ab} \left(\frac{P}{b} + \frac{S}{a} \right) \quad (3)$$

nelle quali formule $a = AB$ e $b = BC$, ossia a è il lato della sezione rettangolare parallelo alla spinta S e b è il lato parallelo al peso P (1).

(1) Per chi desidera vedere per disteso il procedimento per cui si arriva alle formule (2) e (3) facciamo la seguente nota:

$$R_{\text{mass}} = J \mu_{\text{mass}} v_{\text{mass}} \quad (1')$$

dove:

$$J = \sqrt{\frac{\cos^2 \phi}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \phi}{J_y^2}} \quad (a)$$

$$\mu_{\text{mass}} = \frac{1}{8} CL \quad (b)$$

nel caso del solido liberamente appoggiato; e:

$$\mu_{\text{mass}} = \frac{1}{12} CL \quad (b')$$

nel caso del solido completamente incastrato:

$$v_{\text{mass}} = \frac{1}{2} (a \sin \psi + b \cos \psi) \quad (c)$$

nella quale:

$$\tan \psi = \frac{J_x}{J_y} \tan \phi \quad (d)$$

E ricordando che abbiamo chiamata S la componente di C parallela ad xx e P la componente parallela ad yy , avremo:

$$C = \frac{S}{\sin \phi} \quad C = \frac{P}{\cos \phi} \quad (e)$$

Oltre questi casi semplici non sarebbe difficile considerare i casi in cui l'incastramento sopra di uno o sopra ambedue gli appoggi fosse incompleto.

E da osservare per ultimo che facendo uso delle formule (2) e (3) per calcolare le resistenze delle sponde, a sezione

ossia:

$$\tan \phi = \frac{S}{P}$$

$$\cos^2 \phi = \frac{1}{1 + \frac{S^2}{P^2}} \quad \sin^2 \phi = \frac{\frac{S^2}{P^2}}{1 + \frac{S^2}{P^2}} \quad (f)$$

Sostituendo nella (a), si ottiene:

$$J^2 = \frac{1}{J_x^2 \left(1 + \frac{S^2}{P^2} \right)} + \frac{\frac{S^2}{P^2}}{J_y^2 \left(1 + \frac{S^2}{P^2} \right)}$$

la quale, osservando che $C^2 = S^2 + P^2$, si riduce:

$$J = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{P^2}{J_x^2} + \frac{S^2}{J_y^2}}$$

Sostituendo ora nella (d) a $\tan \phi$ il suo valore, avremo:

$$\tan \psi = \frac{J_x}{J_y} \frac{S}{P}$$

quindi v_{mass} si trasforma:

$$2 v_{\text{mass}} = \frac{a J_x S + b J_y P}{\sqrt{J_y^2 P^2 + J_x^2 S^2}}$$

Ora:

$$J_x = \frac{1}{12} a b^2 \quad J_y = \frac{1}{12} b a^2$$

per cui sostituendo:

$$J = \frac{12}{C a^3 b^3} \sqrt{P^2 a^4 + S^2 b^4}$$

$$2 v_{\text{mass}} = \frac{a b (P a + S b)}{\sqrt{P^2 a^4 + S^2 b^4}}$$

$$R_{\text{mass}} = \mu_{\text{mass}} \times \frac{6}{C} \left(\frac{P a + S b}{a^3 b^2} \right) \quad (g)$$

Se ora:

$$\mu_{\text{mass}} = \frac{1}{8} CL,$$

la (g) si riduce:

$$R_{\text{mass}} = \frac{3}{4} \frac{L}{ab} \left(\frac{P}{b} + \frac{S}{a} \right) \quad (2)$$

Se invece:

$$\mu_{\text{mass}} = \frac{1}{12} CL,$$

la (g) diventa:

$$R_{\text{mass}} = \frac{1}{2} \frac{L}{ab} \left(\frac{P}{b} + \frac{S}{a} \right) \quad (3)$$

Invece di dedurre le formole (2) e (3) dal caso generale, si potevano trovare direttamente con un procedimento più elementare.

Il punto D in cui trovasi la fibra maggiormente cementata per trazione è sulle due rette AD e CD . Ma la retta AD è quella lungo la quale si verifica il massimo sforzo di trazione r'_{mass} dovuto alla semplice spinta S , che sola agisse sull'asse del solido; e la retta CD è quella lungo la quale si verifica il massimo sforzo di tensione r''_{mass} , per effetto del semplice peso P , quando da solo agisse sull'asse del solido.

In questo caso particolare adunque gli sforzi massimi parziali dovuti alle forze P ed S , che sostituiscono la loro risultante C , si verificano sopra la medesima fibra D , e poichè questi sforzi hanno la medesima direzione perpendicolare al piano di sezione, la loro somma rappresenta lo sforzo totale.

Ma per essere le forze S e P dirette ciascuna secondo un asse centrale principale d'inerzia della sezione rettangolare, gli sforzi massimi r'_{mass} ed r''_{mass} sono dati, come è noto, dalle semplici formole:

$$r'_{\text{mass}} = \mu'_{\text{mass}} \frac{a}{2 J_x} = \frac{6}{a^2 b} \mu'_{\text{mass}}$$

$$r''_{\text{mass}} = \mu''_{\text{mass}} \frac{b}{2 J_y} = \frac{6}{b^2 a} \mu''_{\text{mass}}$$

E perciò:

$$R_{\text{mass}} = r'_{\text{mass}} + r''_{\text{mass}} = \frac{6}{ab} \left(\frac{\mu'_{\text{mass}}}{a} + \frac{\mu''_{\text{mass}}}{b} \right) \quad (h)$$

rettangolare costante, dei ponti-canali di pietra da taglio del primo tipo, si accettano ancora due ipotesi: quella cioè che dal solido non sia stato tolto il piccolo parallelepipedo di base $pqr'r'$; e quella che sia nullo lo sforzo di tensione che si può manifestare nella giuntura con cemento idraulico del lastrone di sponda colle lastre del fondo, per effetto della inflessione del primo.

Per la prima di queste ipotesi il lastrone è soggetto in realtà ad uno sforzo maggiore; per la seconda invece soffre uno sforzo minore di quello che è dato dalle formule. Ma le differenze sono affatto trascurabili, visto quanto sia piccola l'area $pqr'r'$ e quanto sia tenue l'aderenza delle malte alle pietre naturali, la quale inoltre si esercita sopra una superficie assai limitata. È pure da notarsi che la presenza d'una intaccatura determina sempre nei solidi di struttura fibrosa o granulare condizioni speciali di resistenza, le quali si manifestano quando sono al limite con segni particolari di rottura (peli) determinati dalla posizione delle intaccature stesse, le quali hanno per effetto di diminuire alquanto il limite del carico di rottura.

Veniamo a considerare il secondo tipo di ponti-canali di pietra da taglio.

Sul fondo portante, considerato come un solido rettilineo ed omogeneo agisce semplicemente una forza diretta secondo uno degli assi centrali principali d'inerzia delle sezioni normali, e applicata uniformemente lungo l'asse del solido stesso.

Detta P questa forza, lo sforzo massimo di tensione riferito all'unità di superficie, relativo ad una sezione normale qualsiasi, è dato dalla formula:

$$R = \mu \frac{v_{\text{mass}}}{J_x} \quad (4)$$

dove μ è il momento flettente a cui la sezione è soggetta, v_{mass} è la distanza dal centro di gravità del solido dell'elemento di fibra più teso, e J_x è il momento d'inerzia relativo all'asse neutro, cioè a quello degli assi principali centrali d'inerzia che è perpendicolare alla forza P .

Quando la sezione nel solido è costante, ed è un rettangolo con un lato a normale e l'altro b parallelo alla direzione della forza P , avremo le seguenti formule per calcolare lo sforzo massimo R_{mass} che si verifica in tutto il solido:

1° Se il solido è completamente incastrato alle due estremità, lo sforzo massimo, si avvera nella sezione d'appoggio, ed è rappresentato da:

$$R_{\text{mass}} = \frac{1}{2} \frac{P L}{a b^2} \quad (5)$$

2° Se il solido è completamente incastrato ad un estremo e completamente libero all'altro, oppure se è liberamente appoggiato alle due estremità, avremo invece:

$$R_{\text{mass}} = \frac{3}{4} \frac{P L}{a b} \quad (6)$$

e il massimo sforzo si avvera: nel primo di questi due sottocasi, nella sezione d'appoggio; nel secondo nella azione mediana.

Quando il valore del momento che si verifica nell'uno e nell'altro appoggio è diverso da zero o dal momento per cui si ha l'incastramento completo, si potrà egualmente calco-

Se il solido è semplicemente appoggiato:

$$\mu'_{\text{mass}} = \frac{1}{8} S L \quad \mu''_{\text{mass}} = \frac{1}{8} P L$$

e sostituendo nella (4):

$$R_{\text{mass}} = \frac{3}{4} \frac{L}{a b} \left(\frac{S}{a} + \frac{P}{b} \right) \quad (2)$$

Se il solido è completamente incastrato:

$$\mu'_{\text{mass}} = \frac{1}{12} S L \quad \mu''_{\text{mass}} = \frac{1}{12} P L$$

$$R_{\text{mass}} = \frac{1}{2} \frac{L}{a b} \left(\frac{S}{a} + \frac{P}{b} \right) \quad (3)$$

lare in ogni caso il valore di μ_{mass} , e la formula generale sarà:

$$R_{\text{mass}} = \frac{6}{a b^2} \mu_{\text{mass}} \quad (7)$$

Negli esempi pratici dai quali noi torremo i dati per conoscere quale coefficiente di sicurezza si possa adottare in ogni caso per le lastre di pietra da taglio, supporremo che l'incastramento sia completo in ambedue le estremità, o in una soltanto essendo libero l'altro estremo.

È chiaro che nel primo di questi due casi lo sforzo massimo di tensione trovato presenta il più sicuro criterio per giudicare del coefficiente di resistenza per trazione da adottarsi in tutti i casi per lastre dello stesso materiale soggette a flessione, perchè lo sforzo massimo calcolato nell'ipotesi dell'incastramento completo non può mai essere minore del vero. Potrà invece essere maggiore quando, per cause di cui non si tiene conto, l'incastramento non sia completo come si suppone.

Veniamo a considerare le sponde di questo tipo di ponti-canali in pietra da taglio.

Si può calcolarne la resistenza con un metodo che può ritenersi sufficiente per la pratica, cioè considerando ciascuna sponda come un solido semplicemente appoggiato ai due estremi e soggetto ad una forza uniformemente distribuita fra gli appoggi, risultante dalla composizione del peso proprio della lastra (1) e della spinta dell'acqua.

Si trascura in tal modo lo sforzo di torsione, e si fa uso delle formule (1)... (2)... (3).

È chiaro però che così facendo si opera sufficientemente bene per la pratica, ma non per stabilire in modo assoluto il coefficiente di resistenza che cerchiamo. Perciò non conviene per il nostro scopo occuparsi di questo caso di resistenza.

Si osservi per ultimo che il fondo dei ponti-canali del primo tipo si dovrà calcolare colle formule (4)... (5)... (6)... (7): e precisamente colla formula (6), quando si supponga nullo l'incastramento, che in fatti è del tutto trascurabile.

(Continua).

BIBLIOGRAFIA

Ing. CAMILLO BOGGIO. — **Torri, Case e Castelli nel Canavese.** — Op. in-4° di pag. 18 con 9 grandi tavole e figure nel testo. — Torino, Camilla e Bertolero, editori, 1890. — Prezzo L. 4.

Il nome del Boggio non è nuovo agli studiosi dell'architettura medioevale in Piemonte. Questa sua recente Monografia è complemento ad un'altra ch'egli ha pubblicata pochi anni sono sull'arte religiosa del Canavese. Egli descrive ora i più notevoli avanzi di quella antica architettura militare e civile, accenna alle condizioni politiche che la promossero e favorirono lo sviluppo, alle rocche, ai fortificati, alle mura merlate, alle torri o bicoche, alle porte turrite meritevoli di essere rilevate e studiate. Ricorda le rozze abitazioni private, delle quali appena resta memoria nei documenti dell'epoca e le confronta ai ricchi e forti manieri comitali rispettati dal tempo e dagli uomini fino ai nostri giorni; e fra tutti si arresta particolarmente a quelli di Montalto, di Strambino, di Ozegna, di Settimo Vittore, di Ivrea, illustrandoli con gran copia di disegni misurati sul vero, eseguiti in iscala con molta e pregevole diligenza.

Belli, ben scelti e bene riprodotti sono i particolari del palazzo municipale di Ivrea e del castello di S. Giorgio, di una casa a Cuornè, del castello di Montalto e segnatamente quelli del castello di Strambino, ammirabile fra tutti per la ricchezza degli ornamenti non più ingenui e rozzi come negli edifici anteriori; essi arieggiano le grazie del rinascimento e paiono quasi preludere alla introduzione della nuova architettura in Piemonte.

Meno felici e meno ben riprodotte sono le vedute di assieme e le vignette inserite fra il testo, fredde e inefficaci a rendere la espressione del vero, per chi ricordi di avere vedute fra i greppi delle vallate alpine, pittoresche, imponenti nelle loro rovine, quelle bieche dimore di cinque secoli addietro, presso le quali la fantasia si compiace di evocare i ricordi e le immagini di vecchie, malinconiche istorie, di strani costumi.

T.

(1) Non può ammettersi che al peso si opponga direttamente la sottostante lastra del fondo, giacchè la saetta di incurvamento del fondo è assai maggiore che il cedimento nel senso verticale delle lastre di sponda.

II.

Corso d'Estimo dell'Ing. G. FETTERAPPA, Professore ordinario di Economia ed Estimo rurale nella R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri in Torino. Volume II (in-8° di pag. XLVIII-736) intitolato: *Principii di Economia applicati alle stime e Conteggi relativi*. Torino, 1890. Prezzo L. 14.

Di quest'opera che si pubblicava a fascicoli, abbiamo già parlato mentre essa era in corso di stampa (V. *Ingegneria Civile*, Anno XIII, settembre 1887) e crediamo utilissima cosa continuare la rivista degli argomenti principali che il chiarissimo professore con indiscutibile competenza ha trattato nei successivi fascicoli. Al Capitolo dei *Prodotti*, a cui lasciammo la nostra rivista, fa seguito quello delle *Eventualità*, di somma importanza tanto per le stime ordinarie, quanto per le stime catastali, e l'argomento è studiato in modo completo, e il metodo è precisato e corredato con esempi che possono trovare diretta applicazione in parecchi casi pratici. Qui termina la Parte II del libro.

La Parte III è dedicata al *Profitto*, alla *Rendita*, al *Capitale terra* ed al *Capitale fondiario*, ed è la più sostanziale non solo di questo volume, ma di tutta l'opera. Essa è anche la più intricata e difficile, perchè gli argomenti ora enumerati sono tuttora controversi e nella scienza e nella pratica. L'A. li tratta con particolare studio, mirando direttamente al suo scopo, che è quello di ridurli al punto da servire alle applicazioni numeriche dell'Estimo, ed anche in ciò a noi pare sia molto bene riuscito, tenuto conto delle difficoltà che si incontrano a rendere concrete siffatte idee, ond'è che raccomandiamo in modo speciale questa parte del libro all'attento esame di tutti gli studiosi delle scienze economiche.

Distinguendo nelle questioni economiche il lato soggettivo proprio della scienza pura, dal lato oggettivo proprio invece delle applicazioni, dimostra come si debba intendere il *Profitto* nelle questioni estimative. La sua esposizione è ancor meglio chiarita da opportuni esempi numerici, riguardanti alcuni problemi più importanti dell'agricoltura, come sarebbe l'applicazione delle macchine, quella dei correttivi e delle abbondanti e speciali concimazioni, dei miglioramenti fondiari in genere; cogliendo l'opportunità per mettere sotto forma concreta ed algebrica certi principii fondamentali di economia rurale che di solito nei libri sono stemprati in un mare di parole.

Vien dopo il Capitolo che tratta della *Rendita*, la più controversa forse fra le questioni di Economia Politica, nella quale l'A. assegna la parte giusta a ciò che è pura discussione scientifica, ed a ciò che si deve ritenere come ben definito, e, come ha fatto in precedenza, circonscrive per modo tale nozione da rappresentarne anche qui le applicazioni ai casi pratici mediante segni algebrici e formule.

Dalla nozione di Rendita risale a quella di Capitale terra, che le è correlativa, e così il lettore è condotto a grado a grado alla conoscenza esatta del Capitale fondiario, e quindi della Rendita, nel senso proprio delle stime, che è la rendita del Capitale fondiario, essendochè il principio fondamentale delle stesse è questo: che un fondo, e, più in generale, un immobile, vale in ragione di ciò che rende, per cui la rendita, esplicitamente determinata od implicitamente nota, dev'essere la base del suo valore. Di qui la ragione degli speciali procedimenti che si dicono appunto di stima, e della loro distinzione in razionali ed empirici; distinzione di carattere preliminare, e, ciononostante, fraintesa dai più ed anche nei libri che da taluni si vorrebbero autorevoli in materia d'Estimo.

Chiude la discussione risolvendo la questione, tanto dibattuta fra i trattatisti, se debbasi prendere per base della stima lo stato d'*attualità* dell'immobile da stimare, buono o cattivo, oppure la sua *suscettività* e *potenzialità* produttiva, dimostrando come nel principio fondamentale, ora rammentato, si debba sottintendere la *Rendita ordinaria*, la quale presuppone lo stabile in condizioni ordinarie ed usufruito nel modo ordinario, cioè con quella destinazione che essendo in relazione colle condizioni particolari dello stabile da stimare e con quelle economiche generali del luogo e del tempo, rivestono il carattere di permanenza o continuità economica, al quale deve rispondere la nozione di rendita. Questa dimostrazione forma il punto culminante di tutta la discussione, e, più ancora, di tutto il libro, giacchè ad essa mirano direttamente od indirettamente tutti i principii precedentemente esposti.

Nel Capitolo seguente, che è l'ultimo del volume, sono completati alcuni argomenti trattati negli altri Capitoli, ossia: 1° si dimostra come si debba comportare il perito nei casi in cui l'immobile da stimare non si trovi nelle condizioni ordinarie; 2° si spiega come si debba fare la stima di una piantagione fruttifera quando si trova ad una epoca intermedia qualunque della sua esistenza; 3° si completa la trattazione delle operazioni di stima del Catasto Particolare.

Non entreremo in maggiori particolari avendo l'A. premesso al suo libro una accurata prefazione nella quale è spiegato minutamente il modo con cui l'opera procede; solo aggiungeremo che all'indice generale fece seguire un indice speciale della materia catastale. E fu questo lodevolissimo proposito da parte dell'A., poichè essendo tale materia esposta a misura che lo svolgimento dei principii generali presentava l'opportunità per la sua trattazione, si trova sparsa un

po' per tutto il libro, mentre poi, nel suo insieme, forma una completa esposizione dell'ardua questione.

A questo libro possono per conseguenza ricorrere fiduciosi tutti coloro che dovranno occuparsi delle stime del Catasto; i quali troveranno in esso cognizioni utilissime al soddisfacimento del loro compito, anche quando le idee dell'A. non concordano colle disposizioni emanate dagli Uffici superiori del Catasto, essendochè il coscienzioso professore non dimenticò di spiegare le ragioni del disaccordo.

Concludiamo elogiando l'A. e gli Editori per aver dato alla letteratura tecnica un buon libro; e se ne aveva veramente bisogno.

G. S.

III.

Impianto di illuminazione pubblica a luce elettrica nella città di Cuneo. — Relazione dell'ing. C. PONZO. — Op. in-8° di pag. 25, con due tavole litografate. — Torino, 1890.

La città di Cuneo vide inaugurarsi il sistema di illuminazione elettrica il 15 gennaio di quest'anno, e nella Relazione stampata dell'ingegnere del Municipio troviamo utili dati pratici che ci facciamo un dovere di registrare.

Per la necessaria forza motrice si utilizzò quella idraulica del canale Grassa che serviva per un antico mulino detto *delle sei ruote*, situato a 600 metri appena dal centro della città, ed a 300 metri dalla strada di circonvallazione verso Stura. Ivi venne impiantata una turbina Girard, uscita dall'officina meccanica dell'ing. Enrico di Torino, della forza effettiva di 120 cavalli-vapore, utilizzandosi una portata di 2 metri cubi, ed una caduta di metri 6. In caso di deficienza d'acqua si può ricorrere ad altro canale laterale, denominato *Garavella*, della portata ordinaria di m. c. 1,5. Inoltre fu impiantata una macchina a vapore sussidiaria della forza di 60 cavalli, dell'officina Tosi di Legnano.

La produzione della elettricità ha luogo per mezzo di due dinamo Zipernowski a correnti alternate, n. 5, costrutte dalla casa Ganz e C. di Buda-Pest; esse sono eccitate da dinamo Ganz e C., tipo A, n. 1, a corrente continua.

Dall'officina partono tre conduttori principali:

- 1° Circuito per lampade in serie ad incandescenza, dette municipali, e per servizio a tutta notte, con filo di mm. q. 4,6 di sezione;
- 2° Circuito per lampade come sopra, ma di sola prima mezzanotte;
- 3° Condotta primaria ai trasformatori, con filo di mm. q. 16,4 di sezione.

Le stazioni secondarie nelle quali sono collocati i trasformatori sono due, e ciascuna di esse dà luogo a tre circuiti derivati, cioè:

- 1° Circuito a tre fili (quello mediano compensatore) per archi Zipernowski a correnti alternate, con filo di mm. q. 9 di sezione;
- 2° Circuito per lampade ad incandescenza Edison, ordinarie e per servizio a tutta notte, con filo di mm. q. 4,6 di sezione;
- 3° Circuito per lampade come sopra, di sola seconda mezzanotte.

In tutto esistono:

N. 12 lampade ad arco da cento <i>carcels</i> , ossia con un quantitativo totale di	candele 9000
N. 177 lampade ad incandescenza da 24 candele	» 4248
N. 30 lampade ad incandescenza da 16 candele	» 480

Totale candele N. 13728

Delle lampade ad incandescenza, n. 93 sono a tutta notte, 83 a prima mezzanotte e 31 a sola seconda mezzanotte.

Costanti delle dinamo. — Dinamo *eccitatrici* Ganz, tipo A, n. 1: rotazioni al 1'900; volt 110; ampère 30. — Dinamo Zipernowski a correnti alternate, n. 5; rivoluzioni al 1': 500; volt 2000; ampère 25: poli di inversione 10.

Trasformatori. — Rapporti fra le correnti 16:1; corrente primaria, volt 1925, ampère 4,24; secondaria, volt 118, ampère 66.

Il prezzo della luce stipulato colla civica Amministrazione è regolato dalla seguente tariffa:

	Annualità
Per ogni lampada ad arco di 100 <i>carcels</i> a mezza notte	L. 500
Per ogni lampada ad incandescenza da 24 candele a tutta notte	» 135
Id. id. a 1 ^a mezzanotte »	» 60
Id. id. a 2 ^a mezzanotte »	» 75
Id. da 16 candele a tutta notte »	» 90
Id. id. a 1 ^a mezzanotte »	» 50
Id. id. a 2 ^a mezzanotte »	» 55

La forza motrice utilizzata, secondo l'ing. C. Ponzo, non sarebbe che di 50 cavalli-vapore circa, ed in vista della rilevante forza motrice che rimane ancora disponibile, la Società assuntiva dell'esercizio della illuminazione pubblica ha intrapreso il servizio della illuminazione privata a lire 0,105 per ogni ampère-ora; e quindi ai seguenti prezzi:

Costo orario della lampada da 10 candele l.	0,034
» » 16 »	» 0,048
» » 24 »	» 0,072
» » 32 »	» 0,096
» » 50 »	» 0,151

Non troviamo nell'opuscolo del signor ing. Ponzo di quanti anni sia la durata della convenzione stipulata dalla Società assuntiva colla civica Amministrazione, nè a quanto possa valutarsi la totalità dell'impianto.

G. S.

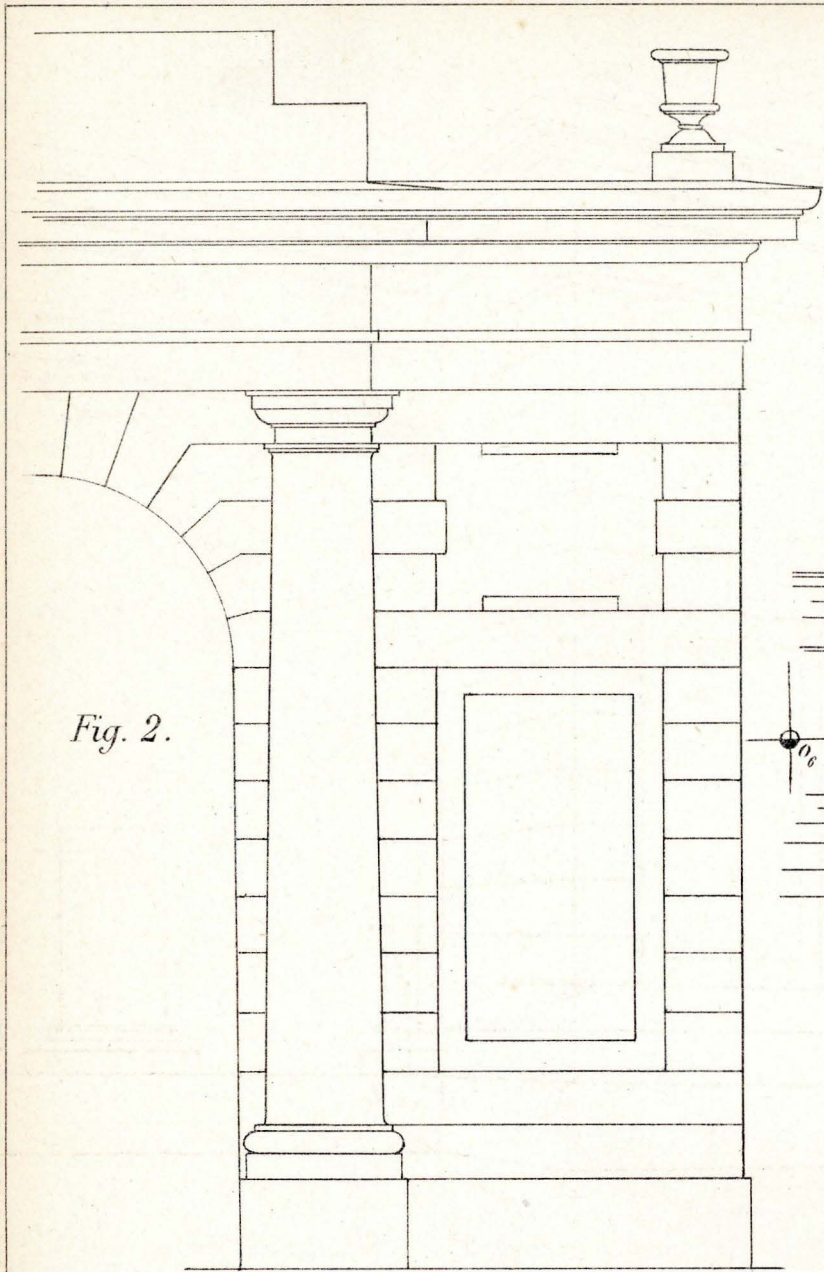


Fig. 2.

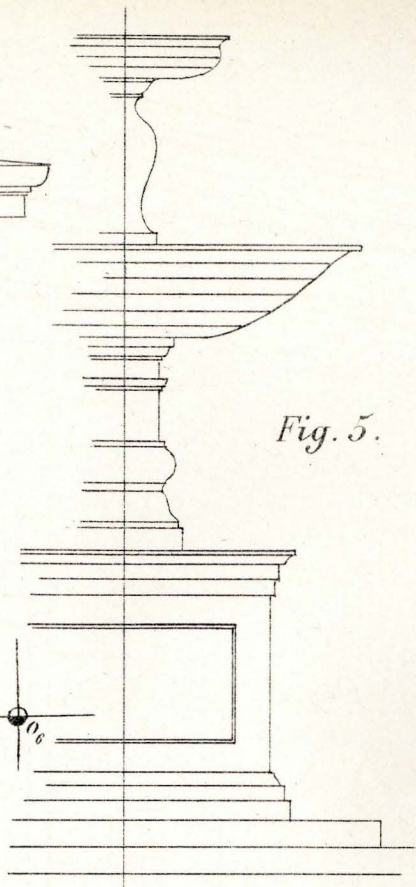


Fig. 5.

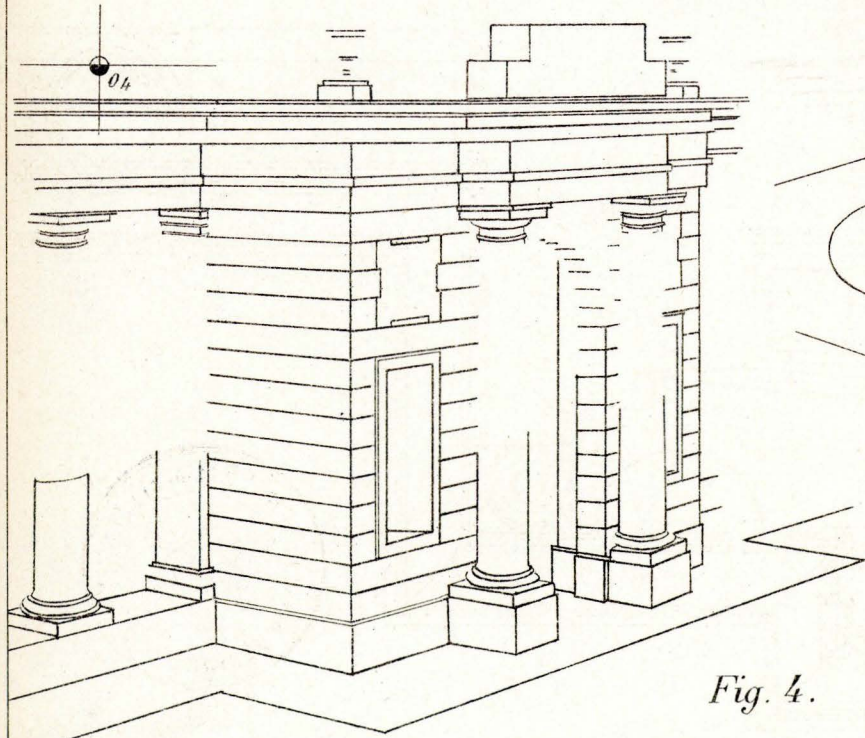


Fig. 4.

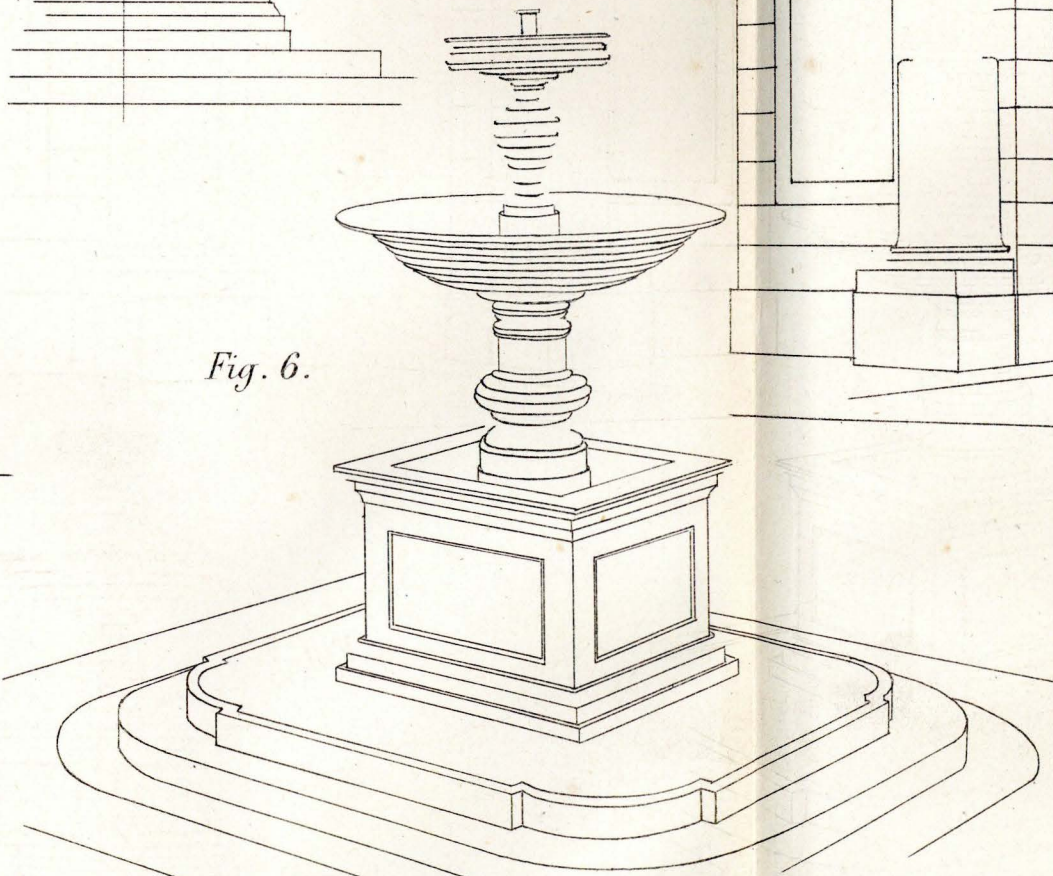


Fig. 6.

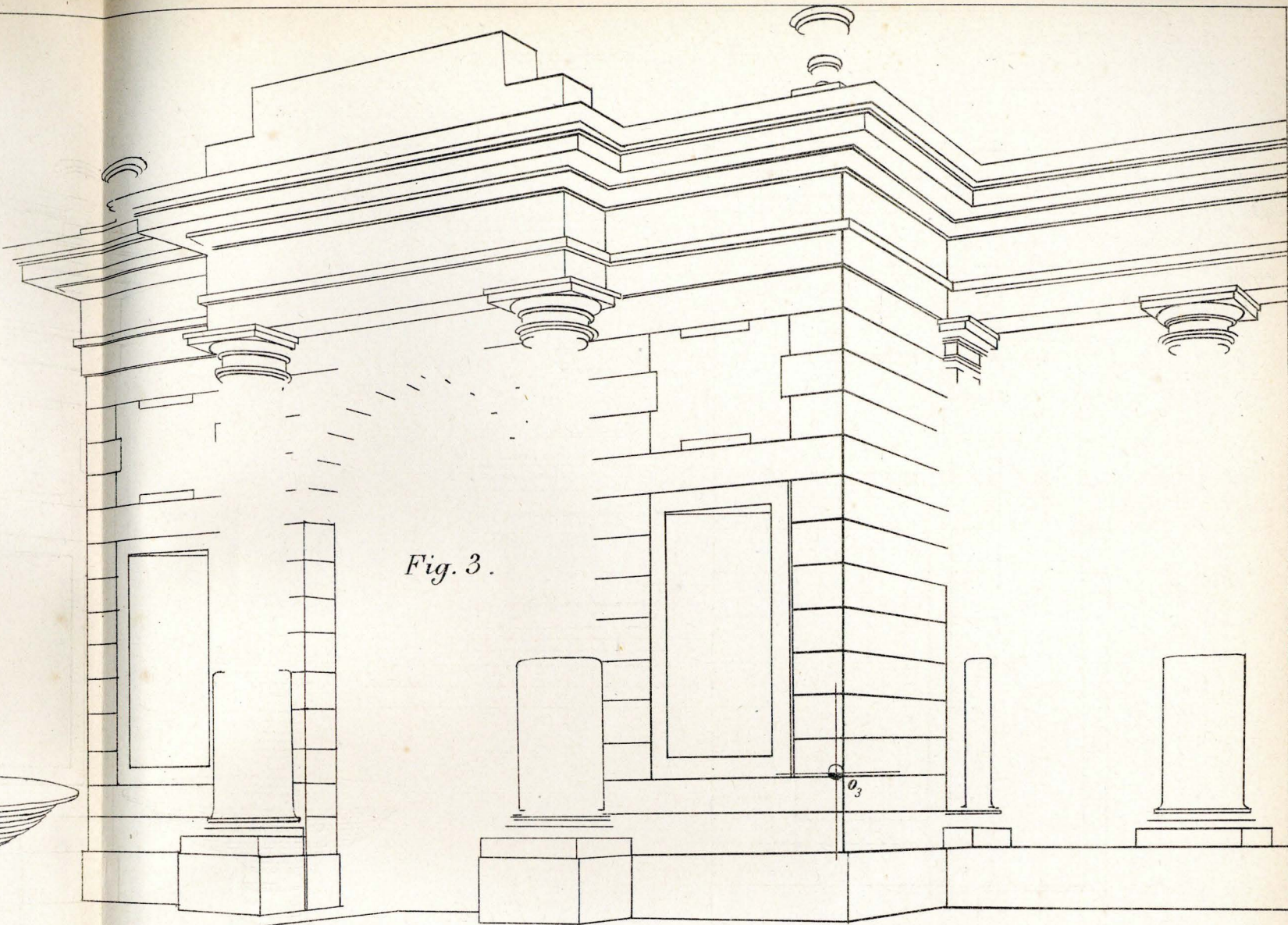


Fig. 3.

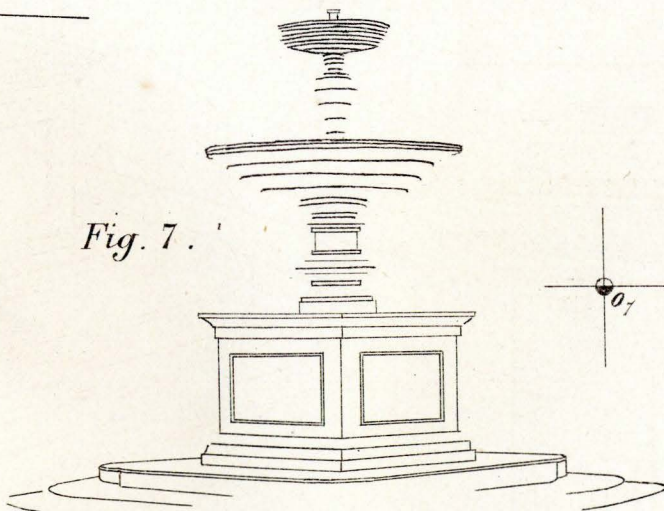


Fig. 7.

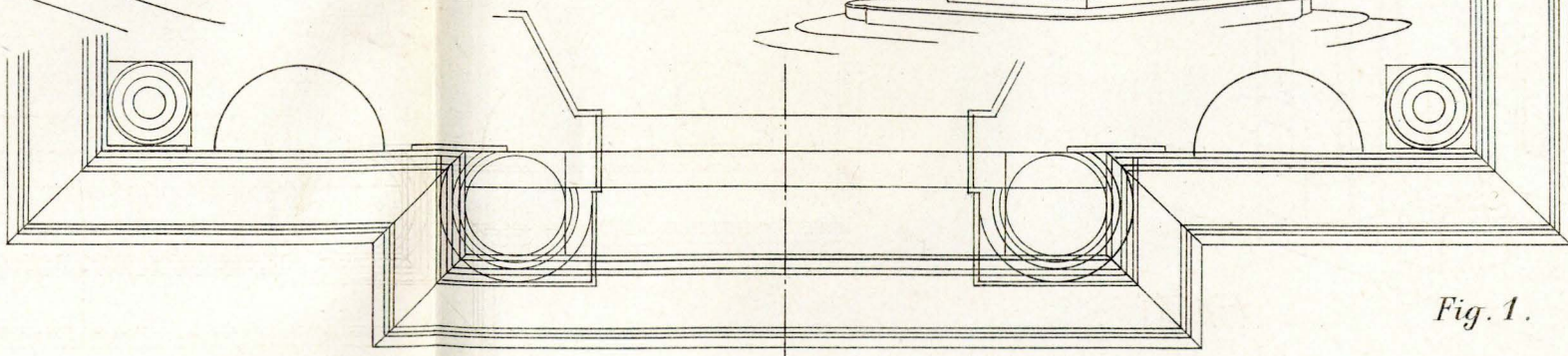


Fig. 1.

