ANNO XXV. Torino, 15 Marzo 1899 NUM. 6.

L'INGEGNERIA CIVILE
E
LE ARTI INDUSTRIALI

PERIODICO TECNICO BIMENSILE

Si discorre in fine del Fascicolo delle opere e degli opuscoli spediti franchi alla Direzione dai loro Autori od Editori.

MECCANICA APPLICATA

LE MOTRICI EQUILIBRATE A PIU' MANOVELLE

Nell'ultimo fascicolo pubblicato il novembre dell'anno 1898 dall'Associazione degli Ingegneri tedeschi è inserita una pregevole Memoria del prof. Riedler (*) sull'opportunità di un Ufficio esaminatore per la concessione dei brevetti e sui criteri direttivi, che i suoi componenti dovrebbero costantemente seguire nelle loro deliberazioni.

Il chiarissimo professore tratta l'argomento con eccezionale competenza e con quella minutezza di analisi, che è dote degli studiosi tedeschi. Egli accenna all'importanza delle scienze pure, quale efficace sussidio nella risoluzione dei problemi tecnici, ma combatte il pregiudizio di chi vuole disconoscere il merito inventivo ai pratici, che, applicando teorie già note, seppero conseguire in qualsiasi ramo dell'industria segnalati progressi.

Queste considerazioni sono suggerite all'autore dal lungo dibattito, a cui diede luogo il brevetto ottenuto dallo Schlick (10 novembre 1893) per la costruzione di motrici equilibrate senza contrappesi con più di tre manovelle calettate sullo stesso albero.

Infatti, nella revoca del brevetto, decretata il 7 maggio 1896 dalla competente Sezione dell'Ufficio, in seguito alla causa mossa un anno prima, si negava il carattere di scoperta al metodo proposto dallo Schlick, qualificandolo una semplice applicazione teorica di principii ben noti in meccanica per determinare quali debbano essere i rapporti fra i pesi e fra le dimensioni di alcune parti d'una motrice, acciocchè le forze applicate al suo telaio durante il movimento si facciano equilibrio.

Si discuteva infine la novità dell'idea, opponendo l'applicazione ben nota dello stesso principio alle macchine con tre manovelle e citando gli studi del prof. Radinger (**) e dell'ingegnere Taylor (***), che fra gli altri avevano trattato di proposito l'argomento.

Contro la deliberazione dell'Ufficio dei brevetti lo Schlick si appellò al Tribunale dell'Impero, il quale riconobbe nel modo più esplicito non potersi negare i caratteri d'invenzione e di novità ad un metodo, solo perchè i principii teorici su cui si fonda erano precedentemente noti, e se ne era fatta una parziale applicazione, ovvero perchè esso non serve che alla determinazione di rapporti fra le dimensioni ed i pesi di meccanismi già comunemente adoperati.

Chiarì la differenza fra i mezzi adottati per ottenere un momento motore costante e quelli proposti dallo Schlick per elidere le forze applicate all'incastellatura, li paragonò colla risoluzione dello stesso problema stata data fin dal 1891 dal Taylor, ingegnere navale degli Stati Uniti, nella sua Memoria *Sulle cause delle trepidazioni dei battelli ad elice* (****), e conchiuse, riconfermando il brevetto, con una sentenza pronunciata il 20 giugno 1898 (*), cinque anni dopo la prima domanda dell'inventore.

Questa, in pochissimi cenni, la storia che il Riedler svolge minutamente nella sua Memoria. I particolari di una procedura così lunga ed intralciata non hanno interesse per noi, regolati a questo riguardo da tutt'altre leggi; l'argomento del brevetto è invece d'un'importanza tecnica eccezionale, trattandosi della risoluzione pratica di un problema reso ogni giorno più grave dall'uso di velocità angolari sempre crescenti nelle motrici a vapore.

*

È noto che all'incastellatura di ogni cilindro d'una macchina a regime, che trasmetta il lavoro direttamente col proprio albero, sono applicate in ogni istante:

1° Una coppia, le cui forze sono costantemente uguali alla pressione sopportata dalla slitta e il cui braccio di leva è pari alla distanza fra la testa a croce e l'albero motore;

2° Una forza normale all'asse del movimento, diretta alternativamente in sensi opposti, dovuta al moto oscillante della biella intorno a detto asse;

3° Una forza centrifuga diretta costantemente secondo l'asse della manovella, sviluppata dalla sua massa rotante;

4° Una forza avente per linea d'azione l'asse del movimento, diretta alternativamente in sensi opposti ed uguale in grandezza alla forza acceleratrice degli organi dotati di moto alterno.

Facendo astrazione dall'obliquità della biella, le due prime azioni si debbono trascurare, e l'ultima, che è di gran lunga la più considerevole, diviene perfettamente uguale alla componente, presa sull'asse del movimento, della forza centrifuga P, che si svilupperebbe, se le masse propellenti di peso Q fossero concentrate nel bottone della manovella di raggio r.

Indicando quindi con φ l'angolo che essa ha descritto, partendo da uno dei punti morti, la forza (4) si esprime analiticamente così:

$$P \cos \varphi = \frac{Q}{g} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 r \cos \varphi . \qquad (1)$$

La legge con cui essa varia in funzione dell'angolo φ, supponendo il moto di rotazione uniforme $\left(\frac{d\varphi}{dt} = \text{costante} \right)$, è come quella di $\cos \varphi$ periodica ed alternativa: una tal forza non si può dunque equilibrare con una massa rotante, senza sviluppare in direzione normale un'altra forza alternata; di qui l'uso di calcolare i contrappesi in modo di elidere soltanto una parte della prima, per non generarne una seconda di eccessiva intensità.

La costruzione di motrici equilibrate è invece un problema di facile soluzione nei tipi a più manovelle, che l'uso comune dell'espansione multipla ha tratto di conseguenza, e i metodi ideati dal Taylor e dallo Schlick, quali risultano nelle

(*) *Das deutsche Patentgesetz und die wissenschaftlichen Hülfsmittel des Ingenieurs*, von A. RIEDLER, Professor (*Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*. — Berlin, 1898).

(**) Cfr. RADINGER, *Le motrici a gran velocità*, 1892.

(***) *Journal of the American Society of Naval Engineers*, 1891, vol. III.

(****) Vi è anche un cenno sul brevetto inglese Yarrow per la costruzione di macchine equilibrate, ricorrendo a contrappesi sostituibili dalla pompa ad aria del condensatore. Uno scrittore anonimo anzi aveva illustrato questo brevetto in un articolo dell'*Engineering* (8 aprile 1892), domandando se non si sarebbe potuto far di meglio, col sostituire alla pompa ad aria un altro cilindro motore. Non vi è però alcun accenno a una soluzione possibile.

(*) *Urteil des Reichgerichtes in der Patentstreitsache*, ecc. — *Zeitscrift*, 17 settembre 1898.

pubblicazioni dell'ing. Fränzel (*) e del prof. Riedler, conducono in modo assai semplice al risultato.

Però, a meglio precisare il numero delle variabili ed il grado di risolvibilità del problema, mi pare convenga premettere una trattazione più generale della questione.

*

In una motrice con n manovelle, che distingueremo cogli indici 0 1 ..... $n-1$, le n forze applicate all'incastellatura della macchina sono date dall'espressione generale (1):

$$P_i \cos \varphi_i = \frac{Q_i}{g} \left(\frac{d \varphi_i}{d t} \right)^2 r_i \cos \varphi_i ,$$

ove i varia da 0 ad $n-1$, ma il valore di $\frac{d \varphi_i}{d t}$ rimane immutato.

Le condizioni di equilibrio per un tal sistema di forze compiane, variabili con legge sinusoidale alternativamente in funzione dell'angolo φ, e quindi del tempo, si possono scrivere molto facilmente, considerandole come proiezioni degli n vettori rotanti P_i.

Allora:

1° La somma delle proiezioni di questi vettori rotanti P_i, fatte sul piano che contiene gli assi dei cilindri, dev'essere in un istante qualunque uguale a zero. O, ciò che fa lo stesso, dev'essere nulla la somma delle proiezioni dei vettori P_i (supposti fissi), fatte su di un piano qualunque, passante per l'asse di rotazione della macchina;

2° La somma dei momenti delle forze (proiezioni dei vettori P_i sul piano contenente gli assi dei cilindri) rispetto ad un punto qualunque del piano dev'essere in ogni istante uguale a zero. O, in altre parole, dev'essere nulla la somma dei momenti dei vettori P_i (supposti fissi) rispetto ad un asse qualunque normale all'albero motore.

Ma queste sono le condizioni di equilibrio di un sistema di forze nello spazio, costanti in grandezza e posizione, dirette parallelamente ad uno stesso piano, e precisamente delle n forze centrifughe P_i, che conservano invariate nel loro movimento le distanze e gli angoli relativi.

Analiticamente, tenuto conto che la proiezione di dette forze sull'asse di rotazione e i loro momenti rispetto ad esso sono tutti nulli, per la speciale giacitura delle loro linee di azione, le equazioni di equilibrio si riducono a quattro.

Esse sono:

$$P_0 + \sum_1^{n-1} P_i \cos \omega_i = 0 \quad , \quad \sum_1^{n-1} P_i \operatorname{sen} \omega_i = 0 ,$$

$$\sum_1^{n-1} P_i \operatorname{sen} \omega_i \, d_i = 0 \quad , \quad \sum_1^{n-1} P_i \cos \omega_i \, d_i = 0 ,$$

se con ω_i si indica l'angolo che la manovella contrassegnata coll'indice i fa con quella d'indice 0, e con d_i la distanza che le separa, e se il centro dei momenti fu scelto nell'intersezione dell'asse del cilindro 0 coll'asse di rotazione della macchina.

Trattandosi di equazioni omogenee, si possono dividere ambi i membri delle due prime per P_0, ambi i membri delle ultime per $P_0 \, d_1$; ottengo allora:

$$\left.\begin{aligned} & 1 + \sum_1^{n-1} p_i \cos \omega_i = 0 \quad , \quad \sum_1^{n-1} p_i \operatorname{sen} \omega_i = 0 , \\ & p_1 \operatorname{sen} \omega_1 + \sum_2^{n-1} p_i \, \alpha_i \operatorname{sen} \omega_i = 0 , \\ & p_1 \cos \omega_1 + \sum_2^{n-1} p_i \, \alpha_i \cos \omega_i = 0 , \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

avendo posto:

$$p_i = \frac{P_i}{P_0} \quad , \quad \alpha_i = \frac{d_i}{d_1} .$$

Le variabili distinte immediate del problema sono dunque:

1° Gli $n-1$ rapporti p_i fra le forze centrifughe relative ai cilindri 1, 2 ... $n-1$ e quella del cilindro di indice 0;

2° Gli $n-2$ rapporti α_i fra le distanze degli assi dei cilindri 2 ... $n-1$ dal cilindro 0 e la distanza d_1 dei cilindri 0 ed 1;

3° Gli $n-1$ angoli di calettamento ω_i delle manovelle 1, 2 ... $n-1$ colla manovella 0.

In tutto, per una macchina ad n manovelle, $3n-4$ variabili, fra le quali non compaiono nelle equazioni in modo esplicito nè i raggi delle manovelle, nè i pesi degli organi propellenti. Infatti, tanto gli uni quanto gli altri influiscono unicamente sui valori p_i e non vanno considerati perciò come grandezze indipendenti, che aumentino il grado di risolvibilità del problema.

*

Le equazioni generali di equilibrio scritte sono di facile applicazione in ogni caso particolare.

Per una motrice a tre manovelle distinte si riducono a:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 1 + p_1 \cos \omega_1 + p_2 \cos \omega_2 = 0 , \\ \text{(II)} & p_1 \operatorname{sen} \omega_1 + p_2 \operatorname{sen} \omega_2 = 0 , \\ \text{(III)} & p_1 \operatorname{sen} \omega_1 + \alpha p_2 \operatorname{sen} \omega_2 = 0 , \\ \text{(IV)} & p_1 \cos \omega_1 + \alpha p_2 \cos \omega_2 = 0 . \end{array}$$

Sottraendo la (II) dalla (III) si ottiene:

$$p_2 (\alpha - 1) \operatorname{sen} \omega_2 = 0 ;$$

e, non potendosi porre $\alpha = 1$, perchè il secondo ed il terzo cilindro diverrebbero coassiali, si deduce:

$$\operatorname{sen} \omega_2 = 0 .$$

In conseguenza la (II) dà $\operatorname{sen} \omega_1 = 0$, cioè le *tre manovelle devono giacere in uno stesso piano.*

Esse non possono però essere dirette nello stesso verso, poichè in tal caso le forze acceleratrici si sommerebbero invece di elidersi.

Rimangono quindi tre ipotesi possibili sui valori degli angoli ω, le quali conducono tutte allo stesso risultato, salvo ad attribuire alle manovelle gli indici 0 1 2 in un ordine diverso da quello con cui effettivamente si seguono.

Per evitare questo scambio bisogna porre: $\omega_1 = 180$, e $\omega_2 = 0$; se ne ricava:

$$p_1 = 1 + p_2 \quad , \quad \alpha = \frac{p_1}{p_2} ;$$

cioè la manovella del cilindro di mezzo è diametralmente opposta alle altre due, e la forza centrifuga che le corrisponde è la risultante, cambiata di segno, delle forze relative ai cilindri estremi. Come caso speciale, se $\alpha = 2$, cioè se il cilindro di mezzo equidista dagli estremi, le forze acceleratrici dei tre meccanismi stanno fra loro come 1 : 2 : 1.

*

Per una macchina a quattro manovelle il problema è indeterminato; occorre quindi fissare, in vista di altri scopi costruttivi o meccanici, alcune delle otto variabili indipendenti, fra le quali sussistono le equazioni di condizione:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & 1 + p_1 \cos \omega_1 + p_2 \cos \omega_2 + p_3 \cos \omega_3 = 0 \\ \text{(II)} & p_1 \operatorname{sen} \omega_1 + p_2 \operatorname{sen} \omega_2 + p_3 \operatorname{sen} \omega_3 = 0 \\ \text{(III)} & p_1 \operatorname{sen} \omega_1 + \alpha p_2 \operatorname{sen} \omega_2 + \beta p_3 \operatorname{sen} \omega_3 = 0 \\ \text{(IV)} & p_1 \cos \omega_1 + \alpha p_2 \cos \omega_2 + \beta p_3 \cos \omega_3 = 0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Il prof. Riedler tratta direttamente il caso in cui sia noto l'angolo γ delle manovelle dei cilindri intermedi, siano inoltre date le forze acceleratrici ad esse relative, e si ritengano tutte uguali le distanze fra gli assi di due cilindri consecutivi.

Ricorrendo alle equazioni generali (3), poniamo in conformità alle sue ipotesi:

$$\omega_2 = \omega_1 + \gamma :$$

allora, moltiplicando la III per $\operatorname{sen} \omega_1$, la IV per $\cos \omega_1$ e sommando, si ottiene:

$$\cos (\omega_1 - \omega_3) = - \frac{p_1 + \alpha p_2 \cos \gamma}{\beta p_3} .$$

Sottraendo invece la IV moltiplicata per $\operatorname{sen} \omega_1$ dalla III moltiplicata per $\cos \omega_1$, risulta:

$$\operatorname{sen} (\omega_1 - \omega_3) = \frac{\alpha p_2 \operatorname{sen} \gamma}{\beta p_3} .$$

(*) *Das Taylorsche Verfahren zur Ausbalanzirung der Schiffmaschinen*, von T. Fränzel. — *Zeitscrift d. V. d. I.*, 1898, pagina 907.

Dalle due prime con operazioni analoghe per mezzo delle espressioni ottenute si ricava:

$$\operatorname{sen} \omega_1 = p_2 \operatorname{sen} \gamma \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

$$\cos \omega_1 = p_1 \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) + p_2 \cos \gamma \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right).$$

In oltre per la relazione fondamentale, che lega il seno ed il coseno di uno stesso angolo, dev'essere:

$$p_1^2 + \alpha^2 p_2^2 + 2 \alpha p_1 p_2 \cos \gamma = \beta^2 p_3^2 .$$

$$p_1^2 (\beta - 1)^2 + p_2^2 (\beta - \alpha)^2 +$$
$$+ 2 p_1 p_2 (\beta - 1)(\beta - \alpha) \cos \gamma = \beta^2 .$$

Introducendo ora gli altri valori supposti dal Riedler, col porre $\alpha = 2$ $\beta = 3$, si ottiene:

$$p_3 = \sqrt{\left(\frac{p_1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2 p_2}{3}\right)^2 + \frac{4}{9} p_1 p_2 \cos \gamma} .$$

$$p_1^2 + \frac{1}{4} p_2^2 + p_1 p_2 \cos \gamma = \frac{9}{4}$$

$$\operatorname{sen} \omega_1 = \frac{p_2 \operatorname{sen} \gamma}{3} \qquad \operatorname{sen} (\omega_1 - \omega_3) = \frac{2 p_2 \operatorname{sen} \gamma}{3 p_3} .$$

E come caso speciale, se $\gamma = -\frac{\pi}{2}$ (fig. 58):

$$p_1^2 + \frac{1}{4} p_2^2 = \frac{9}{4} \qquad p_3 = \sqrt{\left(\frac{p_1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2 p_2}{3}\right)^2}$$

$$\operatorname{tg} \sigma = \operatorname{tg} \omega_1 = \frac{p_2}{2 p_1} \qquad \operatorname{tg} \rho = \cot (\omega_1 - \omega_3) = \frac{p_1}{2 p_2}$$

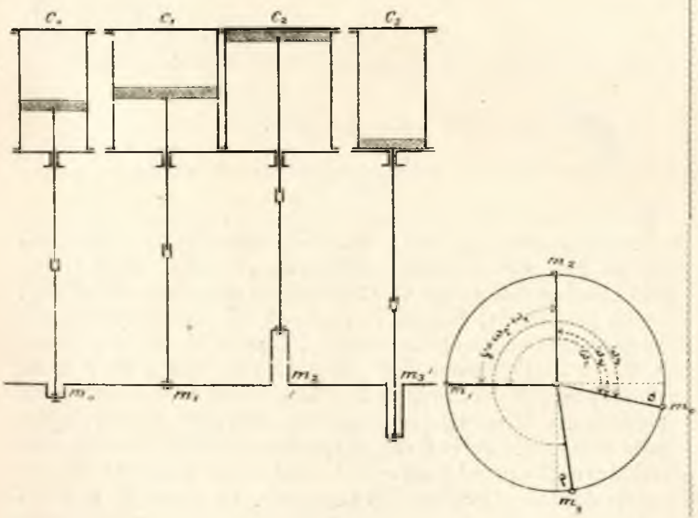

Fig. 58.

che prendono la forma dei risultati ottenuti dal Riedler, se alle p_i si sostituiscono i rapporti fra le forze centrifughe P_i, che rappresentano.

*

La generalità del metodo seguito permette di dedurre con ugual prontezza la risoluzione del problema in casi meno facili a trattarsi direttamente.

Noterò fra gli altri il caso in cui la scelta degli angoli di calettamento ω e dei pesi degli organi propellenti sia fatta dal costruttore in vista della massima uniformità del momento motore, riservandosi di fissare le altre grandezze variabili secondo i criteri esposti in modo di ottenere una macchina praticamente equilibrata.

Però la risoluzione delle due prime equazioni di condizione (2) non è possibile, supposti determinati tutti gli angoli ω, se due dei rapporti p non sono tuttora arbitrari. E ciò importa, nel caso in cui si adottino manovelle di ugual raggio, che i corrispondenti pesi degli organi propellenti non siano stati ancor fissati.

Trattasi dunque di risolvere il seguente quesito:

Costruire una motrice equilibrata ad n manovelle, delle quali siano stati fissati tutti gli angoli di calettamento ω_i, ed $n - 3$ rapporti p_i fra le forze centrifughe P_i.

Nel caso di $n = 4$, se gli angoli ω non sono multipli di $\frac{\pi}{2}$, e il rapporto che si suppone noto è p_3, si deduce subito dalle due prime equazioni (3) lineari in p_1 e p_2:

$$p_1 = \frac{p_3 \operatorname{sen} (\omega_3 - \omega_2) - \operatorname{sen} \omega_2}{\operatorname{sen} (\omega_2 - \omega_1)}$$

$$p_2 = \frac{p_3 \operatorname{sen} (\omega_1 - \omega_3) + \operatorname{sen} \omega_1}{\operatorname{sen} (\omega_2 - \omega_1)}$$

e dalle due ultime lineari in α e β:

$$\alpha = \frac{p_3 - \dfrac{\operatorname{sen} \omega_2}{\operatorname{sen} (\omega_3 - \omega_2)}}{p_3 + \dfrac{\operatorname{sen} \omega_1}{\operatorname{sen} (\omega_1 - \omega_3)}} \qquad \beta = 1 - \frac{\operatorname{sen} \omega_2}{p_3 \operatorname{sen} (\omega_3 - \omega_2)} .$$

I quali valori sono praticamente possibili, soltanto se p_1 e p_2 sono positivi e compresi fra limiti convenienti, e se le distanze fra le manovelle non risultano dal calcolo minori di quelle che sono strettamente necessarie, date le dimensioni dei cilindri e degli organi distributori.

Dunque la scelta degli angoli di calettamento e degli $n - 3$ rapporti p_i non è del tutto arbitraria in un problema reale. Solo una serie di tentativi potrebbe condurre ad una risoluzione pratica, di qui la convenienza di adottare metodi grafici, nei quali è più facile prevedere le modificazioni da farsi ai dati del problema per ottenere un buon risultato.

L'ingegnere Taylor per primo li aveva proposti per determinare la massa del contrappeso dotato di moto alterno e l'angolo di calettamento della corrispondente manovella, che aggiungeva ad ogni motrice per equilibrare le forze applicate alla sua incastellatura durante il movimento.

Un tal metodo di risoluzione non era, come ognun vede, il più razionale, anche ammessa la possibilità di sostituire il contrappeso collo stantuffo della pompa ad aria del condensatore, ma conteneva però in germe l'invenzione dello Schlick.

Preso come centro di riduzione delle forze il punto dell'asse, nel quale voleva aggiungere la manovella sussidiaria, l'ingegnere Taylor tracciava la poligonale degli assi momenti delle forze P_i rispetto a detto punto, modificando gli angoli ω e i pesi degli organi propellenti, in modo che essa riuscisse chiusa.

Ritenendo allora invariabili le distanze fra gli assi dei cilindri, anche il poligono delle forze era determinato, cosicchè il suo lato di chiusa dava in direzione e senso la manovella sussidiaria e in grandezza la forza centrifuga, che avrebbe sviluppato il contrappeso concentrato nel suo bottone rotante.

Erano così soddisfatte ambe le condizioni di equilibrio, perchè il momento della nuova forza aggiunta rispetto al centro di riduzione scelto è naturalmente nullo.

L'ingegnere Fränzel nella sua nota già citata adattò il metodo di Taylor alla soluzione dello Schlick, e ne fece due casi distinti:

Nel primo suppone date le distanze fra gli assi dei cilindri. Allora, scelto il centro dei momenti sull'asse di rotazione della motrice e in corrispondenza di una delle n manovelle, traccia la poligonale degli assi momenti (che è ridotta ad $n - 1$ lati soltanto) in modo che risulti chiusa. Riescono così determinate le forze P_i e gli angoli ω_i relativi a tutte le manovelle, eccetto a quella che contiene il centro dei momenti. Questa poi si deduce in modo ovvio dalla sola condizione che sia chiuso il poligono delle forze, poichè il suo momento rispetto al centro di riduzione del sistema è certamente nullo.

Nel secondo caso si suppongono note le forze P_i.

Allora conviene prima costruire la poligonale delle forze, poi quella degli assi momenti, determinando gli angoli di calettamento e le distanze fra gli assi dei cilindri in modo che ambi i poligoni risultino chiusi.

Però, sempre quando la scelta delle quantità arbitrarie sia tale che il problema abbia soltanto una od un numero finito di soluzioni, occorre l'interpolazione grafica di cui l'autore svolge un esempio per ciascuno dei casi citati.

Primo esempio. — La motrice a 5 manovelle di ugual raggio della torpediniera americana Cushing ha gli organi propellenti di ciascun cilindro pesanti kg. 95 e le distanze dei singoli assi contate dal primo, che contrassegniamo coll'indice 0 pari a:

$$d_1 = \text{m. } 1{,}219 \qquad d_2 = \text{m. } 2{,}515 \qquad d_3 = \text{m. } 3{,}886$$
$$d_4 = \text{m. } 5{,}258.$$

Vogliansi determinare gli angoli di calettamento delle manovelle in modo che la motrice, ritenuta trascurabile l'obliquità della biella, sia equilibrata.

Preso il centro di riduzione del sistema di forze nella manovella m_0 (fig. 59), la poligonale degli assi-momenti ha quattro

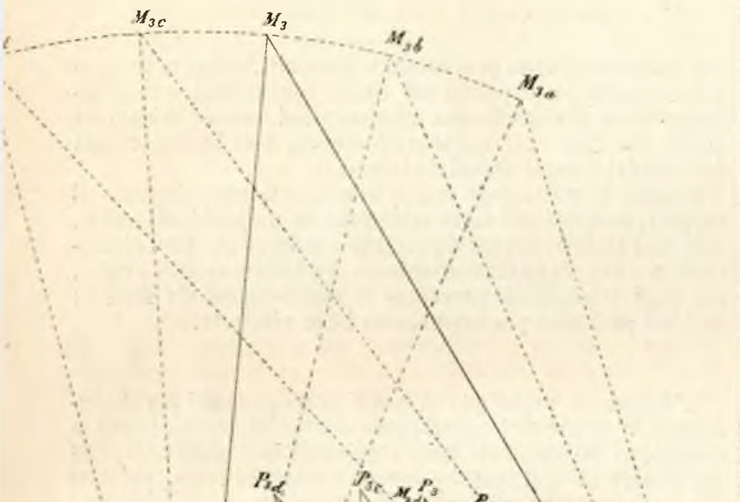

Fig. 59.

soli lati di nota grandezza M_1 M_2 M_3 M_4, che per semplicità di costruzione conviene tracciare parallelamente alle forze. Segnato $O\,M_1$ gli estremi dei lati equipollenti a M_2 ed M_3 debbono trovarsi sulle circonferenze di centri M_1 ed O e di raggi M_2 ed M_4 e distare di M_3 l'uno dall'altro, acciocchè la poligonale riesca effettivamente chiusa.

Sia $O\,M_1\,M_{2a}\,M_{3a}\,O$ una delle infinite configurazioni possibili del quadrilatero deformabile; ad essa corrisponderà una certa orientazione delle manovelle m_1 m_2 m_3 m_4, e quindi una poligonale delle forze $O\,P_1\,P_{2a}\,P_{3a}\,P_{4a}$ ben determinata.

Se il suo lato di chiusa $P_{4a}O$ fosse uguale, nella scala scelta, alla forza centrifuga P_0, (che in questo caso ha il valore comune a tutte le altre P_i) il problema sarebbe senz'altro risolto: in caso diverso si segni il quadrilatero degli assi momenti in altre posizioni *b*, *c*, *d*; si deducano i primi quattro lati della poligonale delle forze nelle configurazioni corrispondenti, e si tracci la linea luogo degli estremi P_4. Ogni punto di essa, che disti da O di P_0 dà una soluzione del problema.

Secondo esempio. — Una motrice a 4 manovelle di ugual raggio ha gli organi propellenti di noti pesi, e la distanza fra il secondo e il terzo cilindro uguale a quella fra il primo e il secondo. Si vogliono determinare i 3 angoli di calettamento delle manovelle e la posizione del quarto cilindro in modo che la motrice, ritenuta trascurabile l'obliquità delle bielle, sia equilibrata.

Indicate con P_0 P_1 P_2 P_3 le forze note in grandezza, che debbono costituire un sistema in equilibrio, si tracci (fig. 60) una delle infinite configurazioni possibili del quadrilatero chiuso P_{0a} P_1 P_2 P_{3a}, ritenendo il lato P_1 P_2 come fisso.

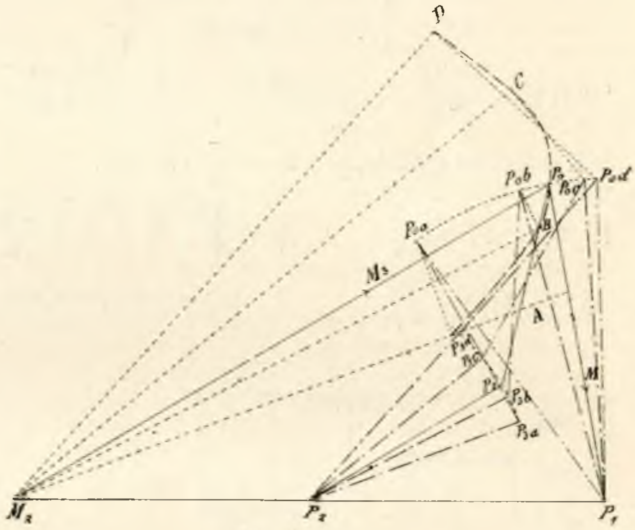

Fig. 60.

La poligonale degli assi momenti, prendendo il centro di riduzione del sistema nella manovella m_0, si riduce ad un triangolo con due lati uguali in grandezza ai momenti M_1 ed M_2. Scelta la scala del disegno in modo che M_1 sia rappresentata dal segmento stesso che misura P_1, si porti M_2 nella direzione P_1 P_2, e dall'estremo si conduca la parallela a P_2 P_3. Se questa passasse per l'origine P_{0a} della trilatera, l'orientazione conveniente delle manovelle sarebbe senz'altro quella fissata dalla poligonale delle forze, e la posizione dell'ultimo cilindro si dedurrebbe prontamente dal valore del momento M_3 misurato dal lato di chiusa del triangolo. In generale non accadrà la coincidenza fortuita: si segni quindi il quadrilatero deformabile P_0 P_1 P_2 P_3 in altre configurazioni possibili *b*, *c*, *d*, alle quali corrisponderanno altre posizioni M_2 B, M_2 C del terzo lato della poligonale degli assi momenti. Poi calate dai corrispondenti punti P_{0a} P_{0b} P_{0c} le perpendicolari alle rette M_2 A, M_2 B, M_2 C si tracci la linea luogo geometrico dei piedi di queste perpendicolari. Le intersezioni di detta linea col cerchio avente il centro in P_1 e raggio uguale al momento M_1 forniscono le soluzioni possibili del problema.

*

Il metodo seguìto in questi due esempi si applicherebbe ad una gran parte dei casi pratici con artifizi che è sempre facile ideare. Meno esatto e spedito del procedimento analitico, esso presenta al costruttore il vantaggio di valersi di mezzi più convenienti al suo occhio sperimentato, agevolandogli una buona scelta delle variabili arbitrarie.

Così le motrici termiche acquistano coi sistemi equilibrati senza contrappesi un nuovo pregio meccanico della massima importanza, preludio ad una serie di progressi nelle costruzioni navali e nell'industria ordinaria, potendosi collocare tali macchine anche nei piani superiori degli edifici.

In ogni caso poi il materiale adoperato alla costruzione dell'incastellatura si troverà sottoposto a sforzi assai minori, e si potranno limitare con vantaggio economico le sezioni resistenti e il peso delle fondazioni in muratura.

Ho detto sforzi minori, non già nulli; poichè tutti i ragionamenti fatti stanno nell'ipotesi che sia trascurabile l'obliquità della biella; e quest'ipotesi non è che lontanamente verificata nelle motrici moderne di costruzione assai compatta, ma sopratutto nelle macchine navali e nei tipi a grandissima velocità per la piccola industria.

Il problema che lo Schlick ha saputo risolvere per approssimazione si presenta di nuovo sotto una forma più complessa, e le equazioni generali dell'equilibrio si possono scrivere anche qui senza gravi difficoltà.

Ecco in qual modo sono riuscito ad ottenerle:

*

La forza acceleratrice degli organi dotati di moto alterno, se si tien conto dei termini contenenti il rapporto fra il raggio r_i della manovella e la lunghezza l_i della biella, ma si trascurano i termini moltiplicati per le potenze superiori di questo rapporto, è data (*) da:

$$F_i = \frac{Q_i}{g}\left(\frac{d\varphi_i}{dt}\right)^2 r_i\left(\cos\varphi_i - \frac{r_i}{l_i}\cos 2\varphi_i\right) \qquad (4)$$

ove φ_i indica l'angolo descritto dalla manovella, partendo dal punto morto più lontano dallo stantuffo motore, supposto il senso della rotazione destrorso per un osservatore, che abbia alla sua destra il cilindro.

Supposto il moto di rotazione uniforme con velocità angolare θ, l'angolo φ_i è funzione lineare del tempo espressa dall'uguaglianza:

$$\varphi_i = \theta t + \omega_i ,$$

ove ω_i è l'angolo che al tempo $t = 0$ la manovella m_i faceva con una direzione fissata.

Introducendo questo valore nella (4), supposto che le manovelle abbiano tutte lo stesso raggio r e le bielle la stessa lunghezza l, si ottiene:

$$F_i = P_i\,[\cos(\theta t + \omega_i) - \lambda\cos 2(\theta t + \omega_i)]$$

se $\lambda = \frac{r}{l}$, e se con P_i si indica, come si è fatto prima, la forza centrifuga delle masse propellenti, supposte concentrate nel bottone della manovella m_i.

Le singole forze F_i hanno per linee d'azione gli assi dei singoli cilindri: sono dunque compiane e parallele, ma variabili col tempo.

Le condizioni di equilibrio sono quindi espresse dalle equazioni:

$$\Sigma F_i = 0 \qquad \Sigma F_i d_i = 0 \qquad (5)$$

le quali però devono essere verificate qualunque sia il tempo t.

Ora la prima delle (5) sviluppata diventa:

$$\cos(\theta t)\,\Sigma P_i \cos\omega_i - \operatorname{sen}(\theta t)\,\Sigma P_i \operatorname{sen}\omega_i -$$
$$- \lambda\cos(2\theta t)\,\Sigma P_i\cos(2\omega_i) +$$
$$+ \lambda\operatorname{sen}(2\theta t)\,\Sigma P_i \operatorname{sen}(2\omega_i) = 0$$

perchè dunque sia soddisfatta qualunque sia t devono essere:

$$\Sigma P_i\cos\omega_i = 0 \qquad \Sigma P_i \operatorname{sen}\omega_i = 0$$
$$\Sigma P_i\cos 2\omega_i = 0 \qquad \Sigma P_i \operatorname{sen} 2\omega_i = 0 \qquad (**)$$

Analogamente si dedurrebbero dalla seconda uguaglianza (5) quattro altre equazioni di condizione per l'equilibrio alla rotazione del sistema:

$$\Sigma P_i d_i \operatorname{sen}\omega_i = 0 \qquad \Sigma P_i d_i \cos\omega_i = 0$$
$$\Sigma P_i d_i \operatorname{sen} 2\omega_i = 0 \qquad \Sigma P_i d_i \cos 2\omega_i = 0.$$

Scelta poi come direzione fissa, dalla quale si contano gli angoli, quella che occupava la manovella m_0 al tempo $t = 0$, e preso il centro dei momenti sull'asse di rotazione e nel piano di m_0, si dividano ambi i membri delle 4 prime equazioni per P_0, ambi i membri delle 4 ultime per $P_0\,d_1$; adottando le notazioni già usate risulta:

$$\left.\begin{array}{ll}
(\mathrm{I}) & 1 + \sum_1^{n-1} p_i \cos\omega_i = 0 \\
(\mathrm{II}) & \sum_1^{n-1} p_i \operatorname{sen}\omega_i = 0 \\
(\mathrm{III}) & 1 + \sum_1^{n-1} p_i \cos(2\omega_i) = 0 \\
(\mathrm{IV}) & \sum_1^{n-1} p_i \operatorname{sen}(2\omega_i) = 0 \\
(\mathrm{V}) & p_1 \operatorname{sen}\omega_1 + \sum_2^{n-1} p_i \alpha_i \operatorname{sen}\omega_i = 0 \\
(\mathrm{VI}) & p_1 \cos\omega_1 + \sum_2^{n-1} p_i \alpha_i \cos\omega_i = 0 \\
(\mathrm{VII}) & p_1 \operatorname{sen}(2\omega_1) + \sum_2^{n-1} p_i \alpha_i \operatorname{sen}(2\omega_i) = 0 \\
(\mathrm{VIII}) & p_1 \cos(2\omega_1) + \sum_2^{n-1} p_i \alpha_i \cos(2\omega_i) = 0 .
\end{array}\right\} \quad (6)$$

Il quale sistema di equazioni contiene le (2) ottenute nella trattazione approssimata del problema, e ci dice quindi che *le soluzioni esatte si possono cercare soltanto fra le disposizioni meccaniche che soddisfano alle condizioni di equilibrio nell'ipotesi di bielle di lunghezza infinita.*

Questo importante risultato ci permette di verificare prontamente l'impossibilità di elidere le forze corrispondenti al termine di primo grado in λ nelle motrici a due ed a tre manovelle.

*

Alla prima categoria appartengono le macchine ad un solo cilindro con due stantuffi (costruite per la prima volta da Sickels e da Wells) e quelle con stantuffo e cilindro mobili simultaneamente (*).

In entrambe si costruiscono i due sistemi propellenti di ugual peso e si calettano le due manovelle (di cui una per necessità costruttiva è doppia) diametralmente opposte. Così i termini indipendenti da l si elidono e quelli di primo grado in $\frac{r}{l}$ si sommano; ne risulta una forza diretta secondo l'asse del movimento, uguale a:

$$\frac{2Q}{g}\,\frac{W^2}{l}\cos 2\varphi$$

ove W è la velocità lineare del bottone della manovella. Questa forza per macchine assai compatte e celeri è tutt'altro che trascurabile.

Per motrici a tre manovelle si trovò per condizione nella teoria approssimata $\operatorname{sen}\omega_1 = \operatorname{sen}\omega_2 = 0$.

In conseguenza $\cos 2\omega_1 = \cos 2\omega_2 = +1$ cosicchè la III equazione del sistema (6) conduce all'assurdo che la somma di tre quantità positive e diverse da zero sia nulla:

$$1 + p_1 + p_2 = 0 .$$

Per motrici a quattro manovelle invece la risoluzione è possibile e presenta il massimo interesse.

Scritte le equazioni (6) per questo caso speciale, si sottragga la V dalla II e la VII dalla IV; risulta:

$$\left.\begin{array}{l}
(1-\alpha)\,p_2 \operatorname{sen}\omega_2 + (1-\beta)\,p_3 \operatorname{sen}\omega_3 = 0 \\
(1-\alpha)\,p_2 \operatorname{sen}(2\omega_2) + (1-\beta)\,p_3 \operatorname{sen}(2\omega_3) = 0
\end{array}\right\} \quad (7)$$

Si sommi la prima, dopo averne moltiplicati ambi i membri per $-2\cos\omega_2$, colla seconda:

$$(1-\beta)\,p_3 \operatorname{sen}\omega_3(\cos\omega_3 - \cos\omega_2) = 0 .$$

Sono allora possibili tre ipotesi:

$$\beta = 1 \qquad \omega_3 = 0 \qquad \cos\omega_2 = \cos\omega_3 ;$$

(*) R. H. Thurston, *La macchina a vapore*, 1892.

(**) Si può anche darne una dimostrazione diretta scrivendo le eguaglianze in cui degenera l'equazione generale supponendo successivamente: $\theta t = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$.

(*) La Casa Pattison di Napoli ne presentò un esemplare all'Esposizione di Torino, 1898.

qualunque di esse ci condurrebbe allo stesso risultato, salvo ad attribuire alle manovelle gli indici 0 1 2 3 in un ordine differente, come si vedrà assai chiaramente dopo aver ottenuta la risoluzione.

Supponendo: $\cos \omega_2 = \cos \omega_3$,

cioè: $\omega_3 = 2\pi - \omega_2$ (8), e quindi $\operatorname{sen} \omega_3 = - \operatorname{sen} \omega_2$

si ottiene dalle (7):

$$(1 - \alpha) p_2 = (1 - \beta) p_3 .$$

Dalla I e VI e analogamente dalla III ed VIII si ricava, tenendo conto delle uguaglianze ottenute:

$$1 + 2 (1 - \alpha) p_2 \cos \omega_2 = 0$$
$$1 + 2 (1 - \alpha) p_2 \cos (2 \omega_2) = 0$$

e quindi:

$$\cos (2 \omega_2) = \cos \omega_2 \qquad (9)$$

che ammette per ω_2 due soluzioni possibili, trattandosi di angoli compresi fra 0 e π:

$$\omega_2 = 0 \qquad\qquad \omega_2 = \frac{2}{3} \pi .$$

Fatta la seconda ipotesi, ottengo subito dalla (8):

$$\omega_3 = \frac{4}{3} \pi ;$$

e quindi $\cos (2 \omega_3) = \cos \omega_3$ (10).

Allora, sommando la I colla VI e la III colla VIII, ottengo:

$$1 + 2 p_1 \cos \omega_1 + (1 + \alpha) p_2 \cos \omega_2 + (1 + \beta) p_3 \cos \omega_3 = 0$$
$$1 + 2 p_1 \cos (2 \omega_1) + (1 + \alpha) p_2 \cos (2 \omega_2) +$$
$$+ (1 + \beta) p_3 \cos (2 \omega_3) = 0$$

e valendomi delle (9) e (10) ricavo:

$$\cos (2 \omega_1) = \cos \omega_1 .$$

Ora le tre manovelle $m_0\ m_2\ m_3$ sono pei risultati già ottenuti a 120° fra loro: quindi le due ipotesi possibili sul valore di ω_1 si equivalgono. Pongo per semplicità $\omega_1 = 0$, e sostituendo nelle otto equazioni generali (6) i seni e coseni dei tre angoli noti, deduco:

$$1 + p_1 - \frac{1}{2} p_2 - \frac{1}{2} p_3 = 0$$
$$\frac{1}{2} \sqrt{3}\, p_2 - \frac{1}{2} \sqrt{3}\, p_3 = 0$$
$$\frac{1}{2} \sqrt{3}\, \alpha p_2 - \frac{1}{2} \sqrt{3}\, \beta p_3 = 0$$
$$p_1 - \frac{1}{2} \alpha p_2 - \frac{1}{2} \beta p_3 = 0 .$$

Di qui la risoluzione del problema:

$$\alpha = \beta \qquad\qquad 1 + p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{1 - \alpha} .$$

Dunque α e β devono essere minori dell'unità, ed uguali fra loro. Cioè le manovelle m_2 ed m_3 appartengono ad uno stesso cilindro intermedio fra i cilindri di indice 0 ed 1 (fig. 61); esse sono calettate a 120° fra loro e formano pure angoli di 120° colle manovelle m_0 ed m_1 parallele l'una all'altra ed ugualmente dirette. La somma dei pesi degli organi propellenti relativi ai cilindri esterni è uguale inoltre al peso di ciascuna delle due masse mobili nel cilindro di mezzo (*).

Analogamente si risolverebbe il problema per macchine aventi un maggior numero di manovelle: in esse però è na-

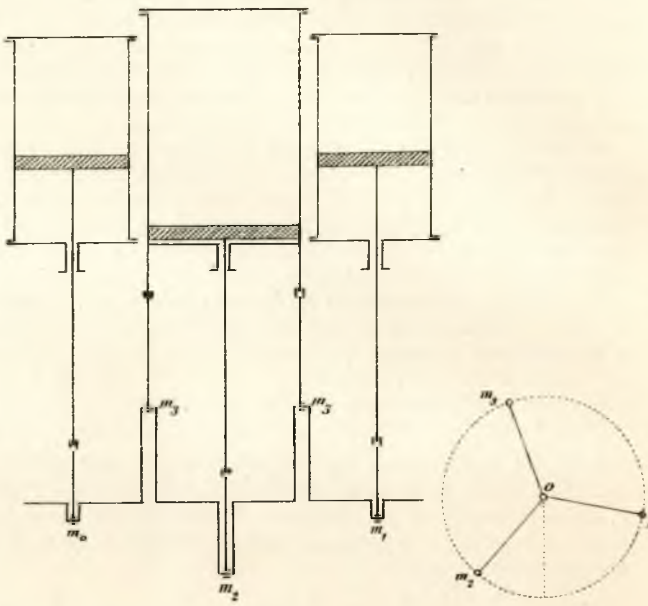

Fig. 61.

turalmente più grande il numero delle variabili arbitrarie che si possono fissare allo scopo di ottenere l'uniformità del momento motore, o di ripartire meglio le fasi dell'espansione multipla nei singoli cilindri.

*

I risultati ottenuti non sono applicabili ad una categoria speciale di motrici a più cilindri cogli assi diretti come i raggi di un circolo, avente il proprio centro nell'albero motore della macchina, e con una sola manovella (sostituita praticamente da un eccentrico), alla quale si articolano tutte le bielle del sistema. Tali motrici si costruiscono generalmente solo per piccole potenze; meritano tuttavia un cenno speciale, poichè l'intensità delle forze applicate al telaio della macchina in movimento è assai notevole, date le grandi velocità angolari che comunemente si adottano.

Siano (fig. 62) O C_1 O C_2 . . . O C_n gli assi degli n cilindri che costituiscono il motore; O M la manovella che ha già

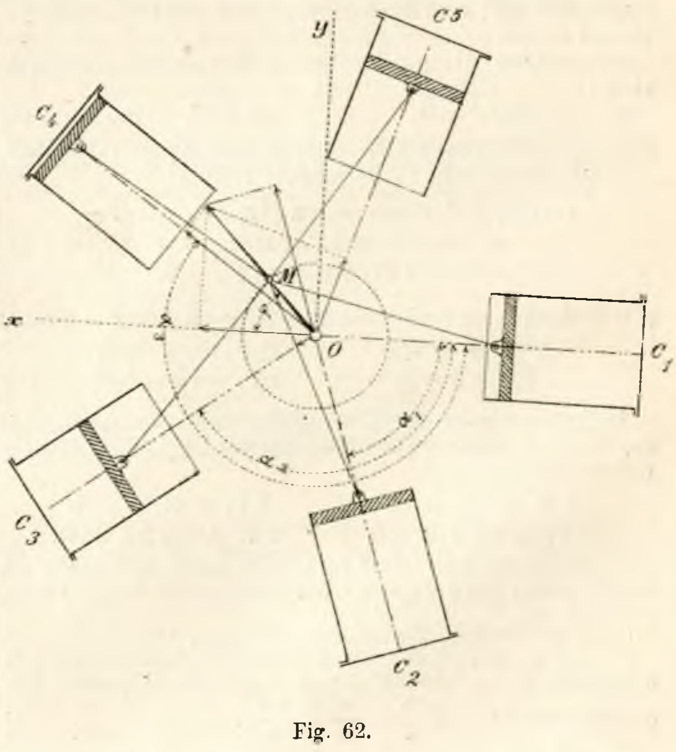

Fig. 62.

(*) Il risultato ottenuto verifica l'asserzione fatta sull'equivalenza delle 3 ipotesi possibili per soddisfare l'uguaglianza dedotta dalle (7).

In vero il tipo di motrice ottenuto come riduzione del problema ha due manovelle giacenti nello stesso piano; condizione imposta dall'ipotesi: $\beta = 1$.

Le altre due manovelle poi sono parallele e dirette nello stesso senso, come è richiesto dalla seconda ipotesi possibile: $\omega_3 = 0$.

descritto l'angolo ϕ, partendo dal punto morto di sinistra del cilindro C_1.

Se si ritiene trascurabile l'obliquità delle bielle, la forza acceleratrice, dovuta a ciascuno dei sistemi dotati di moto alterno, è la proiezione, fatta sull'asse, del corrispondente cilindro $0\,C_i$, o sul suo prolungamento, della forza centrifuga che si svilupperebbe, se gli organi propellenti di C_i fossero concentrati nel bottone della manovella.

Si tratta dunque di un sistema di forze compiane, variabili in grandezza col variare dell'angolo ϕ, e aventi per linee d'azione i singoli assi dei cilindri. Esse sono le proiezioni su detti assi delle corrispondenti forze centrifughe P_i dirette tutte dal centro al bottone dell'unica manovella esistente; quindi le direzioni positive di queste forze sono in un dato istante contenute nella coppia di angoli retti adiacenti alla posizione occupata dalla manovella.

Dunque la loro risultante non può essere nulla; ed è perciò impossibile ottenere in questo tipo di macchine l'equilibrio delle forze applicate all'incastellatura, dovute all'inerzia delle masse dotate di moto alterno.

Indicando con P_i la forza centrifuga $\frac{Q_i}{g}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 r$ relativa al cilindro C_i, il cui asse forma l'angolo α_i coll'asse del cilindro C_1, la forza alterna avente per linea d'azione la $0\,C_i$ vale:

$$P_i \cos(\phi - \alpha_i).$$

La risultante di tutte queste forze ha quindi per componenti secondo gli assi x ed y:

$$X = \sum_1^n P_i \cos(\phi - \alpha_i)\cos\alpha_i$$

$$Y = \sum_1^n P_i \cos(\phi - \alpha_i)\,\text{sen}\,\alpha_i$$

ovvero, sviluppando il coseno della differenza:

$$\left.\begin{aligned} X &= \cos\phi \sum_1^n P_i \cos^2\alpha_i + \text{sen}\,\phi \sum_1^n P_i\,\text{sen}\,\alpha_i \cos\alpha_i \\ Y &= \cos\phi \sum_1^n P_i \cos\alpha_i\,\text{sen}\,\alpha_i + \text{sen}\,\phi \sum_1^n P_i\,\text{sen}^2\alpha_i \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

È assai facile verificare anche per via analitica l'impossibilità di costruire macchine di questo tipo equilibrate; infatti bisognerebbe a questo scopo determinare gli angoli α in modo che per qualunque valore di ϕ si avesse:

$$X = 0 \qquad\qquad Y = 0;$$

occorrerebbe quindi che i coefficienti di sen ϕ e cos ϕ fossero in entrambe le equazioni nulli; cioè:

$$\text{(I)} \qquad \sum_1^n P_i \cos^2\alpha_i = 0$$

$$\text{(II)} \qquad \sum_1^n P_i\,\text{sen}\,\alpha_i\cos\alpha_i = 0$$

$$\text{(III)} \qquad \sum_1^n P_i\,\text{sen}^2\alpha_i = 0.$$

Sommando membro a membro le tre uguaglianze precedenti, dopo aver moltiplicato la II per 2, si ottiene:

$$\sum_1^n P_i\,(\text{sen}\,\alpha_i + \cos\alpha_i)^2 = 0$$

la quale, essendo le forze P quantità tutte positive, è un evidente assurdo.

*

È assai importante il caso pratico di motrici appartenenti a questo tipo, costruite in modo che le masse dei sistemi propellenti siano tutte uguali, e gli n assi dei cilindri motori siano diretti come le proiettanti gli n vertici di un poligono regolare dal suo centro.

In un tal sistema, essendosi scelto uno dei raggi $0\,C_1$ come origine degli angoli α, gli altri riescono disposti a due a due simmetricamente rispetto ad esso, cosicchè nella:

$$\Sigma\,\text{sen}\,\alpha_i \cos\alpha_i$$

che compare nelle formole (11), ad ogni termine sen α_h cos$_h$ corrisponde un termine sen $(2\pi - \alpha_h)$ cos $(2\pi - \alpha_h)$ uguale e di segno opposto.

Sono da eccettuarsi naturalmente i termini relativi ai cilindri aventi per asse la $0\,C_1$ stessa, ma questi sono nulli, poichè il corrispondente angolo α non può essere che 0 o π. Concludendo:

$$\sum_1^n \text{sen}\,\alpha_i\cos\alpha_i = 0 \qquad (12)$$

e quindi le (11) prendono la forma più semplice:

$$X = P\cos\phi \sum_1^n \cos^2\alpha_i \qquad Y = P\,\text{sen}\,\phi \sum_1^n \text{sen}^2\alpha_i \qquad (13)$$

D'altra parte se si sommano tutti gli angoli α_i del sistema con uno qualunque di essi α_h, si ottengono nuovamente tutti gli angoli α_i del sistema in un ordine diverso; così, essendo $\alpha_1 = 0$, si ha:

$$\alpha_1 + \alpha_h = \alpha_h \qquad \alpha_2 + \alpha_h = \alpha_{h+1} \ldots \qquad \alpha_n + \alpha_h = \alpha_{h-1}$$

Dunque, nelle sommatorie delle formole (13), posso al posto degli angoli α_i sostituire $\alpha_i + \alpha_h$, ed ottengo, tenendo conto della (12) già dimostrata:

$$\sum_1^n \cos^2\alpha_i = \sum_1^n \cos^2(\alpha_i + \alpha_h) =$$

$$= \cos^2\alpha_h \sum_1^n \cos^2\alpha_i + \text{sen}^2\alpha_h \sum_1^n \text{sen}^2\alpha_i.$$

$$\sum_1^n \text{sen}^2\alpha_i = \sum_1^n \text{sen}^2(\alpha_i + \alpha_h) =$$

$$= \text{sen}^2\alpha_h \sum_1^n \cos^2\alpha_i + \cos^2\alpha_h \sum_1^n \text{sen}^2\alpha_i$$

o anche, ponendo nella prima:

$$\sum_1^n \text{sen}^2\alpha_i = n - \sum_1^n \cos^2\alpha_i \qquad (14)$$

e nella seconda:

$$\sum_1^n \cos^2\alpha_i = n - \sum_1^n \text{sen}^2\alpha_i$$

si ottiene:

$$(1 - \cos^2\alpha_h + \text{sen}^2\alpha_h)\sum_1^n \cos^2\alpha_i = n\,\text{sen}^2\alpha_h$$

$$(1 - \cos^2\alpha_h + \text{sen}^2\alpha_h)\sum_1^n \text{sen}^2\alpha_i = n\,\text{sen}^2\alpha_h.$$

Dalle quali si deduce:

$$\sum_1^n \cos^2\alpha_i = \sum_1^n \text{sen}^2\alpha_i$$

e per la (14) si riconosce che il valore comune a queste due sommatorie è $\frac{n}{2}$, cosicchè le (13) diventano:

$$X = \frac{nP}{2}\cos\phi = \frac{n}{2}\,\frac{Q}{g}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 r\cos\phi$$

$$Y = \frac{nP}{2}\,\text{sen}\,\phi = \frac{n}{2}\,\frac{Q}{g}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 r\,\text{sen}\,\phi.$$

Concludendo: *la forza applicata al telaio d'una macchina ad* n *cilindri, disposti secondo i raggi di una stella regolare, supponendo i sistemi propellenti tutti di ugual massa e l'obliquità delle bielle trascurabile, è una forza rotante diretta costantemente secondo l'asse dell'unica manovella di raggio* r *ed uguale in grandezza a* $\frac{n}{2}\,\frac{Q}{g}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 r$, ove con $\frac{Q}{g}$ si indichi la massa di ciascuno degli n sistemi propellenti.

In altre parole, la forza applicata al telaio della macchina è la metà della forza centrifuga, che si svilupperebbe se tutte le masse propellenti fossero concentrate nel bottone della manovella.

Questo importante risultato ci dice che nella categoria di motrici testè discussa, sebbene le masse siano distribuite regolarmente attorno al centro, l'equilibrio non può essere raggiunto senza ricorrere ai contrappesi. Essi possono elidere in questo caso le forze applicate al telaio della macchina in movimento, senza generarne delle nuove, e ciò perchè le forze da equilibrare non sono alternative, ma rotanti.

*

In questi tipi di macchine però l'obliquità della biella non è praticamente trascurabile; converrà quindi nell'espressione della forza acceleratrice tener conto anche del termine che contiene il rapporto λ fra il raggio r della manovella e la lunghezza l comune a tutte le bielle del sistema.

Consideriamo a parte l'effetto di queste forze espresse dal secondo termine della (4), poichè dei primi termini ci siamo già occupati.

Ciascuna di esse vale $-\mathrm{P}\lambda\cos 2(\varphi-\alpha_i)$, cosicchè le somme delle loro proiezioni sugli assi $0x$ ed $0y$ sono rispettivamente nelle ipotesi fatte sui valori delle P_i e degli angoli α_i:

$$\mathrm{X}'=\mathrm{P}\lambda\sum_1^n\cos 2(\varphi-\alpha_i)\cos\alpha_i$$

$$\mathrm{Y}'=\mathrm{P}\lambda\sum_1^n\cos 2(\varphi-\alpha_i)\operatorname{sen}\alpha_i.$$

Anche qui, sviluppando il coseno della differenza $2\varphi-2\alpha_i$, e notando che:

$$\sum_1^n\operatorname{sen}2\alpha_i\cos\alpha_i=0 \qquad \sum_1^n\cos 2\alpha_i\operatorname{sen}\alpha_i=0$$

per le ragioni esposte nella precedente dimostrazione, si deduce:

$$\mathrm{X}'=-\mathrm{P}\lambda\cos 2\varphi\sum_1^n\cos 2\alpha_i\cos\alpha_i$$

$$\mathrm{Y}'=-\mathrm{P}\lambda\operatorname{sen}2\varphi\sum_1^n\operatorname{sen}2\alpha_i\operatorname{sen}\alpha_i.$$

Sostituendo nelle espressioni di X' e di Y' al prodotto di coseni o di seni la somma di coseni secondo le note formole, risulta:

$$\mathrm{X}'=-\frac{\mathrm{P}\lambda}{2}\cos 2\varphi\left\{\sum_1^n\cos\alpha_i+\sum_1^n\cos 3\alpha_i\right\}$$

$$\mathrm{Y}'=-\frac{\mathrm{P}\lambda}{2}\operatorname{sen}2\varphi\left\{\sum_1^n\cos\alpha_i-\sum_1^n\cos 3\alpha_i\right\}$$

ove gli angoli α_i formano una progressione aritmetica. La somma dei loro coseni si può dunque calcolare colla nota relazione trigonometrica (*):

$$\cos a+\cos(a+h)+\cos(a+2h)+\ldots+\cos[a+(n-1)h]=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\dfrac{nh}{2}\cos\left(a+\dfrac{n-1}{2}h\right)}{\operatorname{sen}\dfrac{h}{2}}.$$

Ora nel caso presente si ha:

$$a=\alpha_1=0 \qquad h=\frac{2\pi}{n};$$

si ottiene quindi:

$$\sum_1^n\cos\alpha_i=-\frac{\operatorname{sen}\pi\cos\dfrac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{n}}=0.$$

(*) Si può dedurre, come fece il Serret, dall'eguaglianza:

$$2\operatorname{sen}\frac{h}{2}\cos(a+ih)=$$

$$=\operatorname{sen}\left(a+\frac{2i+1}{2}h\right)-\operatorname{sen}\left(a+\frac{2i-1}{2}h\right)$$

dando ad i successivamente i valori 0, 1, 2 . . . . . $n-1$, e sommando le uguaglianze ottenute membro a membro.

Anche la serie degli angoli $3\alpha_i$ costituisce una progressione aritmetica per la quale:

$$a=3\alpha_1=0 \qquad h=\frac{6\pi}{n};$$

applicando la relazione citata, risulta:

$$\sum_1^n\cos 3\alpha_i=-\frac{\operatorname{sen}3\pi\cos\dfrac{3\pi}{n}}{\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{n}},$$

cosicchè, supposto n diverso da 3, e quindi il denominatore diverso da zero, anche questo secondo termine si annulla, e per conseguenza:

$$\mathrm{X}'=0 \qquad \mathrm{Y}'=0.$$

Cioè, nelle motrici del tipo che stiamo trattando, *se il numero dei cilindri non è uguale a 3, i secondi termini dell'espressione delle forze acceleratrici si elidono perfettamente; e quindi il risultato ottenuto, trascurando l'obliquità de la biella, è esatto anche se si tiene conto dei termini di primo grado in λ.*

È poi davvero curiosa l'eccezione per le macchine a tre cilindri, rivelata dalla formola generale. In esse l'obliquità della biella modifica la forza applicata all'incastellatura, prodotta dall'inerzia degli organi dotati di moto alterno; si ha infatti, essendo $\alpha_1=0 \quad \alpha_2=\dfrac{2\pi}{3} \quad \alpha_3=\dfrac{4\pi}{3}$:

$$\mathrm{X}'=-\frac{\mathrm{P}\lambda}{2}\cos 2\varphi\sum_1^3\cos 3\alpha_i=-\frac{3}{2}\mathrm{P}\lambda\cos 2\varphi$$

$$\mathrm{Y}'=-\frac{\mathrm{P}\lambda}{2}\operatorname{sen}2\varphi\sum_1^3\cos 3\alpha_i=\frac{3}{2}\mathrm{P}\lambda\operatorname{sen}2\varphi.$$

Cioè, oltre alla forza $\mathrm{F}=\dfrac{3}{2}\mathrm{P}$ diretta costantemente secondo l'asse della manovella e quindi rotante con essa, è applicata all'albero un'altra forza $\mathrm{F}'=\lambda\dfrac{3}{2}\mathrm{P}$, la cui intensità sta quindi a quella di F come $r:l$ sta ad uno.

Anche la forza F' rota, ma, come risulta dall'espressione delle sue componenti X' ed Y', la sua velocità angolare è doppia ed il senso della rotazione è opposto a quello della manovella. Non sarebbe quindi così facile in pratica compensarla coll'uso dei contrappesi.

*

Gli esempi trattati colla massima generalità possibile mostrano quanto sia fecondo di applicazioni, anche in questo campo essenzialmente pratico, il principio fondamentale della meccanica che definisce le condizioni di equilibrio di un sistema di forze. Esso ci permise, nel caso di motrici con più di tre manovelle, la trattazione più esatta del problema, che lo Schlick ha risolto trascurando l'obliquità delle bielle, e potrebbe condurre ad una soluzione rigorosa, la quale tenesse conto di tutte le forze applicate al telaio di una macchina in movimento, qualora il numero delle variabili fosse sufficientemente grande per soddisfare alle condizioni necessarie.

Ottenuto così nella motrice a manovella l'equilibrio perfetto delle sue parti, essa potrà gareggiare anche pei pregi meccanici coi motori rotativi; e sarà dimostrato ancora una volta nel modo più evidente che le nuove scoperte non sono destinate a mandare in disuso i sistemi antichi; ma costituiscono un incitamento a migliorarli per conseguire in essi anche quei pregi che parevano meno adatti alla loro natura.

Torino, 9 febbraio 1899.

Ing. M. PANETTI.

GIOVANNI SACHERI, *Direttore*. Tip. e Lit. CAMILLA e BERTOLERO di NATALE BERTOLERO, Editore. PAOLO MARIANO, *Gerente*.