OPERAZIONI

TOPOGRAFICHE

LAVORO AD USO

degl'Ingegneri, degli Architetti, dei Periti in costruzione
e di quanti si trovano applicati alla direzione ed alla sorveglianza di costruzioni
civili, stradali ed idrauliche

UTILE

**agli studenti delle scuole d'applicazione per gl'Ingegneri
e dei corsi tecnici pei Periti in costruzione**

PER

GIOVANNI CURIONI

Ingegnere, Architetto e Dottore aggregato al Collegio della Facoltà di scienze fisiche e matematiche della R. Università di Torino, Professore di costruzioni civili, stradali ed idrauliche nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri, Professore di geometria pratica e costruzioni nel R. Istituto industriale e professionale di Torino, Membro ordinario residente della Società Reale d'agricoltura, industria e commercio, Membro effettivo residente della Società degl'Ingegneri e degl'industriali di Torino, e Socio onorario dell'Associazione di Conferenze di Matematiche pure ed applicate di Napoli.

TORINO
Presso AUGUSTO FEDERICO NEGRO, Editore
4, Via Alfieri, 4.

1869

Torino 1869. — Stamperia dei Compositori-Tipografi, A. Oddenino e Comp.
via del Teatro d'Angennes, 16.

La rappresentazione di una parte più o meno estesa di superficie terrestre è per certo uno dei lavori che ben di frequente si presentano agl'Ingegneri ed a quanti trovansi applicati alla direzione ed alla sorveglianza di costruzioni civili, stradali ed idrauliche: e la Topografia che sempre presiede a tale rappresentazione e che, abbracciando nei suoi elementi la modesta arte del Misuratore, si estende fino alle teorie geodetiche, va considerata, anche indipendentemente da queste, come scienza della massima importanza e non priva di operazioni delicate e difficili, che vogliono essere condotte a compimento con somma accuratezza e con molto criterio.

In questo lavoro, diviso in quattro parti e che va considerato come una riproduzione corretta ed ampliata del mio *Corso di Topografia*, di cui già vennero esaurite quattro edizioni, oltre la descrizione e l'uso degli strumenti topografici maggiormente impiegati, ho cercato di esporre tutti quei quesiti pratici che ho creduto utili nelle operazioni aventi per iscopo la rappresentazione di una porzione di superficie terrestre, nelle più frequenti circostanze della pratica. Nella prima parte vi è un esposizione dei preliminari allo studio della Topografia, ossia delle definizioni e delle nozioni generali, dei mezzi per costrurre sulla carta lunghezze proporzionali a lunghezze date e dei mezzi per costrurre angoli eguali ad angoli dati. La seconda parte si raggira sulle operazioni topografiche elementari di planimetria e di livellazione; in essa trovansi descritti gli strumenti che finora vennero maggiormente usati nella pratica; s'insegna con quali norme vengono generalmente eseguite le operazioni topografiche sul terreno, e come da esse si deducono i piani ed i profili. Nella terza parte vien trattato l'importante argomento delle triangolazioni topografiche. Finalmente la quarta parte è destinata a far conoscere come dovrebbero essere eseguite le moderne operazioni topografiche, applicandovi i metodi della *Celerimensura,* la quale, in grazia degli studii, dei perfezionamenti e delle invenzioni del distinto professore I. Porro, costituisce un assieme di metodi, per arrivare, colla massima semplicità e con una speditezza inaudita, a risultamenti di grande esattezza nelle importanti e frequenti operazioni che hanno per oggetto di dare la rappresentazione di una parte più o meno estesa di superficie terrestre.

G. Curioni.

PARTE PRIMA

PRELIMINARI ALLO STUDIO DELLA TOPOGRAFIA.

CAPITOLO I.

Nozioni e definizioni generali.

1. Brevi cenni sulla forma e sulle dimensioni della terra. — Molte sono le osservazioni che confermano la rotondità della terra, ed i risultati della scienza, nel mentre dimostrano essere questo corpo irregolare, anche astrazion fatta dalle montagne e dalle cavità, pure lo presentano siccome di molto avvicinantesi in forma ad un'ellissoide di rivoluzione intorno al suo asse minore; ed è precisamente dietro quest'ipotesi che si compiono i più sublimi lavori, tendenti a determinare le dimensioni e la forma della terra.

Da appositi studii risultò essere il semi-asse minore di questo grand'ellissoide terrestre di 6356649^{m}, ed il semi-asse maggiore di 6375739^{m}, cosicchè l'eccesso di questo su quello sarebbe di 19090^{m}, e lo schiacciamento ai poli di circa 1/333 dell'asse minore.

Per rendere facili gli studii elementari sulla forma e sulle dimensioni della terra, si suppone generalmente la sua superficie sferica col raggio medio fra i due semi-assi accennati e di 6366194^{m}, oppure col raggio di 6366198^{m}, che sarebbe appunto quello del circolo massimo della sfera terrestre, supposta la sua circonferenza di 40000000^{m}.

2. **Superficie, piano e linea orizzontale; linea, piano e superficie verticale.** — Una superficie qualunque parallela alla superficie terrestre, supposta questa costituita da quella delle acque dei mari debitamente protese, si dice *orizzontale* o *di livello;* e tali sono le superficie libere degli stagni, quando le acque e l'aria sovrastante sono tranquille.

Se in un dato punto della superficie terrestre, o più generalmente di una superficie di livello, s'immagina condotto un piano ad essa tangente, si ha ciò che dicesi *piano orizzontale,* il quale, tenendo conto dell'immensa mole del globo terracqueo, si può per un'estensione non troppo grande ritenere come coincidente colla superficie che tocca; d'onde consegue che le superficie delle acque stagnanti, considerate come poco estese, determinano dei piani orizzontali.

Una linea qualunque, tracciata su una superficie orizzontale, dicesi *linea orizzontale* o *di livello*; e una retta qualunque, segnata in un piano orizzontale, dicesi *retta orizzontale.*

Qualunque retta normale ad una superficie orizzontale o, in altri termini (supposta la terra sferica), qualunque retta che unisce un punto della superficie terrestre col suo centro, si chiama *verticale.* La linea verticale poi si conosce comunemente sotto il nome di *linea a piombo,* poichè essa è quella che viene segnata da un piombino o filo perfettamente flessibile, sospeso per un suo estremo e tirato all'altro estremo da un corpo pesante.

Tutte le superficie orizzontali, supposte sferiche, sono fra loro parallele, e quindi ne segue che la retta normale ad una di esse è anche normale a tutte le altre, e che le porzioni di diverse normali intercette fra due medesime superficie orizzontali sono eguali.

Qualunque piano passante per una retta verticale si chiama *piano verticale;* e se immaginasi sulla superficie terrestre una curva e le verticali condotte dai diversi punti di questa curva, si ha nel loro luogo geometrico una superficie conica col suo vertice nel centro della terra e costituente una *superficie verticale.*

Dall'osservazione che un piano orizzontale si può, per un tratto non troppo esteso di terreno, considerare come confondentesi colla superficie che tocca, consegue potersi ritenere fra loro parallele le verticali condotte per diversi punti poco distanti. Questo porta ancora a considerare le superficie verticali, non più come superficie coniche, ma sibbene come superficie cilindriche a generatrici verticali, aventi per direttrici i loro termini sulla superficie terrestre.

3. **Pianta naturale e piano d'una porzione di terreno; definizione e divisione della Topografia.** — Se considerasi una porzione di globo terracqueo poco estesa; se immaginasi il piano orizzontale condotto pel punto della superficie delle acque stagnanti in cui questa è incontrata dalla verticale passante pel punto medio dell'accennata porzione di terreno; se su questo piano si suppongono segnati i diversi punti in cui le verticali condotte dai punti singolari lo incontrano: si viene a fare la *pianta naturale* del terreno. Una figura simile a questa pianta costituisce il *piano* o *mappa*; e *Topografia* si dice la scienza che ha per oggetto di determinare questa pianta naturale e di farne il corrispondente piano, rappresentando su di esso la configurazione di una parte di terreno, che in natura presenta per le sue ondulazioni una superficie qualunque.

La topografia si compone di due distinte operazioni: la prima, detta *Planimetria*, insegna i mezzi per proiettare e determinare su di una superficie piana orizzontale le posizioni dei punti importanti della superficie ondulata del terreno; la seconda, detta *Altimetria* o *Livellazione*, consiste nel far conoscere il rilievo del terreno, cioè la distanza di ciascun punto rimarchevole del suolo da una convenzionale superficie di livello. — I metodi per condurre a compimento tali operazioni variano dipendentemente dall'estensione del terreno, dalla natura del lavoro e dallo scopo per cui vien esso intrapreso: indi le *operazioni topografiche elementari*, sufficienti nel maggior numero dei casi pratici, e le *operazioni topografiche con triangolazione* da adottarsi nel rappresentare una vasta estensione di terreno.

4. **Distinzione fra le carte ed i piani.** — Qualunque rappresentazione di una porzione di superficie terrestre su di un piano dicesi *piano* o *carta*. I piani si eseguiscono generalmente per uno scopo speciale; ed in essi tutti gli oggetti locali più importanti vengono riprodotti nella vera loro forma, con dimensioni ridotte; le carte invece, rappresentando porzioni di terreno più estese e circoscritte da limiti naturali o politici di grande importanza, riproducono i terreni con dimensioni ridotte assai piccole, e per l'indicazione di molti oggetti convien ricorrere a segni convenzionali.

Alla costruzione dei piani e delle carte dei terreni poco estesi, cioè tali da potervisi sostituire, senza errore sensibile, la loro pianta naturale, presiede la scienza della topografia. Col crescere della estensione a rappresantarsi, cresce pure l'inconveniente che si presenta, adottando un piano come superficie di proiezione, e alla topografia bisogna accoppiare la *Geodesia*, avente per oggetto di determinare con mezzi di precisione i punti più importanti di una vasta regione, e di rappresentarli su una superficie piana, mediante opportuni metodi, nella loro situazione rispettiva, onde possano poscia servire al collegamento dei successivi particolari, la cui rappresentazione viene compita dalla sola topografia.

5. **Limite delle operazioni topografiche**. — Dalla definizione della pianta naturale, non che dall'osservazione che le verticali condotte pei diversi punti di una porzione di superficie terrestre poco estesa si possono considerare come sensibilmente parallele, risulta che si viene a supporre piana la porzione di terreno a rappresentarsi e confondentesi colla sua proiezione orizzontale. Quest'ipotesi è solo ammissibile fra certi limiti, i quali furono determinati dietro calcoli tendenti a far vedere, che appartengono ancora al dominio della topografia le operazioni aventi per oggetto la determinazione e la rappresentazione di una parte di terreno estendentesi nel senso della sua maggior lunghezza fino a 111111^{m}; quantunque in lavori di qualche importanza si tenga conto della sfericità della terra per un'estensione anche minore della suaccennata, e si limitino le operazioni topografiche solo a 12 o 15 chilometri.

In conferma dell'anzidetto, si supponga che la calotta sferica, generata dalla rotazione dell'arco AC (*fig.* 1) di $0°30'$ intorno al suo raggio $\overline{OA}=6366198^{m}$, sia una porzione di superficie terrestre; che il circolo descritto dalla tangente AT ne sia il piano tangente nel suo punto di mezzo A; e che sia O il centro della terra: si troverà il limite delle operazioni topografiche vedendo se la tangente $\overline{TT'}$ si può considerare come eguale alla corda $\overline{CC'}$, con un errore nella differenza fra l'una e l'altra al disotto delle più ristrette tolleranze ammissibili in pratica; imperocchè, per essere la differenza fra la tangente ed il seno maggiore della differenza fra la tangente e l'arco, la prestabilita tolleranza sarà sempre meglio verificata, paragonando questo a quella, e quindi si potrà dire che la calotta sensibilmente si confonde col piano tangente.

Ciò premesso, considerando i due triangoli OBC e OAT, si ha

$$\overline{CC'}=2\times 6366198 \operatorname{sen} 0°30'=111110^{m},$$

$$\overline{TT'}=2\times 6366198 \operatorname{tang} 0°30'=111114^{m};$$

d'onde

$$\overline{TT'} - \overline{CC'} = 4^m.$$

Errore sicuramente al di sotto di quelli che non si possono evitare nelle operazioni di determinare la forma del terreno di una sì vasta estensione, e che giunge appena ad 1/27777 della lunghezza dell'arco di un circolo massimo, avente l'ampiezza di 1°.

Il limite delle operazioni topografiche si può dedurre, con un metodo più diretto, in dipendenza dell'approssimazione che vuolsi avere; così, supponendo che la differenza fra l'arco AC ed il suo seno $\overline{CB}$ debba essere $\frac{1}{\varepsilon}$ della lunghezza dell'arco, si avrà, chiamando R il raggio terrestre, $R\varphi$ la lunghezza dell'arco AC,

$$R\varphi - R\operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{\varepsilon} R\varphi,$$

d'onde, dividendo per R, sviluppando in serie il sen φ ed omettendo le potenze dell'arco superiori alla terza si ricava

$$\frac{\varphi^3}{6} = \frac{\varphi}{\varepsilon},$$

e finalmente

$$\varphi = \sqrt{\frac{6}{\varepsilon}}.$$

Quest'ultima formoletta dà la lunghezza dell'arco φ nel raggio eguale all'unità, dalla quale è agevole il dedurre sia l'ampiezza, sia la lunghezza dell'arco terrestre $R\varphi$.

CAPITOLO II.

Mezzi per costrurre in carta lunghezze proporzionali a lunghezze date.

ARTICOLO I.

Delle scale.

6. **Scala di proporzione; lunghezza naturale; lunghezza grafica.** — La rappresentazione di una porzione di superficie terrestre su un piano si fa costruendo, in uno o più fogli di carta, una figura ad essa simile, ed il rapporto costante fra le dimensioni lineari del disegno e le omologhe del terreno, che è ciò che dicesi *scala di proporzione*, serve a qualificare e a denominare la scala stessa. Cosicchè, se le dimensioni lineari si riducono nel disegno al cinquecentesimo, ai tre settecentesimi della loro lunghezza effettiva, la figura che ne risulterà dirassi fatta nella scala del cinquecentesimo, dei tre settecentesimi; oppure nella scala del 1 a 500, del 3 a 700; o ancora nella scala del 1/500, del 3/700.

La lunghezza vera di una linea dicesi *lunghezza naturale*, e col nome di *lunghezza grafica* s'appella la sua riduzione in iscala.

7. **Riduzione di qualunque scala alla forma di frazione avente per numeratore l'unità.** — Quando una scala di proporzione non ha per numeratore l'unità, si può ridurre a tal forma dividendo i suoi due termini per il numeratore; se il denominatore è esattamente divisibile per il numeratore, la riduzione risulta esatta, altrimenti è solo approssimata.

Le scale proporzionali dei piani si esprimono talvolta sotto forma concreta, e non è raro il caso di trovare, ad esempio, scala di 5 centimetri per 180 metri, di 3 oncie per 100 trabucchi. Queste espressioni indicano: che 5 centimetri sulla carta rappresentano una lunghezza di 180 metri sul terreno; che 3 oncie rappresentano 100 trabucchi. Osservando che 180 metri valgono 18000 centimetri, si troverà essere la prima scala di proporzione del $5/18000 = 1/3600$; ed osservando che 100 trabucchi valgono 7200 oncie, si avrà che la seconda scala è del $3/7200 = 1/2400$.

8. Relazione esistente fra una scala di proporzione, una lunghezza naturale e la corrispondente lunghezza grafica. — Una scala di proporzione è il rapporto fra una lunghezza grafica e al corrispondente lunghezza naturale, per cui, chiamando

L una lunghezza naturale,

l la lunghezza grafica corrispondente nella scala del $\frac{m}{n}$,

si può stabilire la seguente eguaglianza

$$\frac{l}{L}=\frac{m}{n},$$

dalla quale, ricavando successivamente l ed L, si hanno :

$$l=L\times\frac{m}{n}, \qquad L=l:\frac{m}{n},$$

le quali formolette dànno evidentemente luogo a queste regole:

1° Data una lunghezza naturale, si riduce in iscala, moltiplicandola per la frazione scala, o, men generalmente, dividendola per il denominatore, quando il numeratore è eguale all'unità;

2° Data una lunghezza su un disegno, eseguito in una determinata scala, si trova la lunghezza naturale corrispondente, dividendola per la frazione scala, o moltiplicandola semplicemente pel denominatore, quando il numeratore è eguale all'unità.

Quantunque le due suaccennate regole conducano, con semplici operazioni aritmetiche, a trovare le lunghezze grafiche corrispondenti a lunghezze qualunque naturali date, e viceversa a rintracciare le lunghezze naturali omologhe ad altre grafiche ; pure nei casi usuali della pratica si preferisce l'uso delle scale grafiche, siccome quelle che in modo più spedito e facile conducono alla soluzione delle due suaccennate quistioni, come in seguito vedremo.

Osservazione. — In questo corso di topografia ben di frequente si presenterà il caso di ridurre in iscala una data lunghezza; per esprimere quest'idea in un modo conciso si porrà avanti alla lunghezza da ridursi in iscala la notazione $\frac{1}{n}$: così $\frac{1}{n}\,\overline{AB}$ indicherà la rappresentativa o la lunghezza grafica di $\overline{AB}$ nella scala del $\frac{1}{n}$; $\frac{1}{n}\,20^m$ indicherà la rappresentativa o la lunghezza grafica corrispondente a 20^m nella scala del $\frac{1}{n}$. — Viceversa $n.\overline{ab}$ sarà la lunghezza naturale corrispondente alla lunghezza grafica $\overline{ab}$ disegnata alla scala del $\frac{1}{n}$.

9. **Scala grafica.** — Ad effettuare l'operazione di ridurre una figura in una determinata scala, basta valutare le lunghezze con una nuova unità che sia la riduzione nella data scala dell'unità reale; perchè gli è chiaro che se si ha una lunghezza, per esempio di 700^m, essa si ridurrà nella scala del 1/1000, ossia se ne prenderà il millesimo, valutandola con una nuova unità che sia il millesimo del metro naturale, poichè tutte le settecento parti di cui si compongono 700^m essendo ridotte a 1/1000, anche la lunghezza totale lo sarà. Questa nuova unità lineare, dedotta a seconda della scala di proporzione, non che i suoi multipli si sogliono portare su una retta, la quale, convenientemente divisa, costituisce ciò che chiamasi *scala grafica*.

Le scale grafiche si classificano per rapporto alle unità che rappresentano le loro suddivisioni: così, se queste rappresentano misure metriche, si hanno delle *scale metriche*, e se rappresentano trabucchi, multipli o sottomultipli di questi, si hanno delle scale a trabucchi.

10. **Approssimazione delle scale.** — Fissando una determinata unità lineare e riducendola a differenti scale colla prima regola enunciata al numero 8, si vede come, col diminuire della scala, scema pure quella lunghezza che rappresenta l'unità, e come al di là di un certo limite diventa talmente piccola da non potersi valutare, pel fatto che, nè l'ordinaria vista, nè la conformazione degli strumenti generalmente usati permettono che le lunghezze si abbiano esatte fino ad 1/5 di millimetro ossia oltre $0^m,0002$.

Segue da ciò che, se l'unità di misura deve in una scala essere rappresentata con meno di $0^m,0002$, bisogna limitarsi a rappresentare nella stessa scala le unità d'ordine superiore; che anzi nel maggior numero dei casi pratici conviene attenersi ad un altro limite, conchiudendo che le minime suddivisioni di una scala non devono essere minori di un millimetro o tutto al più di un mezzo millimetro.

Quest'osservazione è necessaria per evitare un lavoro nella costruzione delle scale che, invece di procurare maggior esattezza nell'uso di esse, cagionerebbe una confusione dannosa, e per conoscere la minima lunghezza naturale che può essere rappresentata da una scala grafica, la qual lunghezza, ottenuta colla seconda regola del numero 8, costituisce *l'approssimazione della scala;* così, attenendosi al limite di mezzo millimetro, l'approssimazione della scala del 1/2000 è data da

$$0^m,0005 : \frac{1}{2000} = 0^m,0005 \times 2000 = 1^m.$$

Per riconoscere immediatamente quali sono le unità d'ordine più basso che possono essere rappresentate in una scala qualunque, può valere il seguente quadro, compilato nell'ipotesi che le minime suddivisioni non debbano essere minori di un millimetro.

Per le scale da	1 : 1	a 1 : 10	l'unità d'ordine più basso è	0^m,01
»	1 : 10	» 1 : 100	»	0,10
»	1 : 100	» 1 : 1000	»	1,00
»	1 : 1000	» 1 : 10000	»	10,00
»	1 : 10000	» 1 : 100000	»	100,00

11. Costruzione delle scale grafiche semplici in metri, e loro uso. — Le scale grafiche si costruiscono generalmente, trovando, colla prima regola esposta al numero 8, una lunghezza che nella scala a farsi rappresenti un multiplo esatto d'unità d'ordine immediatamente superiore a quello delle minime unità che si possono rappresentare, e tale da essere circa lunga quanto la scala a disegnarsi. Un esempio concreto renderà chiara la cosa, e supponiamo che vogliasi avere una scala grafica nel rapporto del 1/800. La minima unità che senza confusione si può rappresentare in questa scala essendo il metro, e la unità d'ordine immediatamente superiore il decametro, si cerchi la lunghezza grafica corrispondente ad un multiplo di decametro, per esempio, ad 80^m che è data da $80/800 = 0^m,1$. Si tracci una retta indefinita (*fig.* 2), sopra di essa portisi una lunghezza di $0^m,1$, si divida in otto parti eguali, l'ultima a sinistra di queste parti si suddivida in dieci altre, e ciascuna di queste suddivisioni rappresenterà il metro. Si notino i punti di divisione delle parti maggiori in modo che il primo a sinistra porti lo 0, il secondo il 10, il terzo il 20, e così di seguito; similmente ai punti di suddivisione a partire dallo 0 verso sinistra si marchino successivamente i numeri 1, 2, 3, ecc., o solo il numero 5 alla divisione di mezzo ed il numero 10 all'ultima; ed avremo nella retta così divisa una scala grafica semplice dell'1/800, che si potrà anche prolungare ripetendo un certo numero di divisioni primarie.

Chi voglia colla scorta di questa scala prendere la lunghezza grafica corrispondente ad un'altra naturale, per esempio, a 57^m, fissi una punta del compasso alla divisione segnata 50 e l'altra punta alla divisione segnata 7 della parte suddivisa, e avrà così in quest'apertura quella lunghezza che alla scala del 1 : 800 rappresenta 57^m.

Viceversa chi voglia conoscere la lunghezza naturale, che è rappresentata da una retta nell'accennata scala, prenda un'apertura di compasso eguale a questa retta, e fissi una sua punta in uno dei punti che dànno le più grandi divisioni della scala, in guisa che l'altra punta cada nella parte suddivisa. Egli è evidente che se la prima punta trovasi in 60 e l'altra in 8, si dovrà dire che la retta assunta è di 68^m. Che se la retta in considerazione è tale che, coincidendo un suo estremo colla divisione 60, l'altro non coincida esattamente con una suddivisione, e se cade, per esempio, fra 7 e 8, allora si dirà che quella retta è lunga 67^m, più una frazione che si dovrà stimare a vista.

12. **Costruzione delle scale ticoniche in metri, e loro uso.** — Ad evitare l'inconveniente di dover stimare a vista una frazione di una determinata lunghezza, si usano le *scale ticoniche* od a *trasversali*, la cui costruzione è facile ad apprendersi dal caso particolare già trattato, in cui è proposto di costrurre una scala dell'1/800.

Senza punto scostarsi da quanto si è detto al precedente numero, si faccia su una retta la scala semplice dell'1/800 (*fig.* 3); alla estremità di sinistra innalzisi una perpendicolare, e su questa si prendano dieci parti eguali qualunque; per tutti i punti di divisione si conducano tante parallele alla scala semplice, e tante perpendicolari alla medesima pei punti segnati 0, 10, 20, ecc., finchè incontrino l'ultima parallela; congiungasi l'estremo di sinistra di quest'ultima parallela col punto della parte suddivisa della scala semplice segnato 9; per tutti i punti 8, 7, 6, ecc. si conducano delle parallele a questa trasversale, e la scala ticonica sarà compiuta allorquando saranno segnati ancora coi numeri 1, 2, 3, ecc. i punti in cui la perpendicolare 0 taglia successivamente le parallele inferiori alla scala semplice.

Dalla fatta costruzione risulta chiaro che le trasversali, partenti dal punto 0 e dagli altri punti, tagliano, per la similitudine dei triangoli, le diverse parallele in modo che le loro parti intercette fra le trasversali e le rispettive perpendicolari (supposte queste condotte dagli estremi numerati di quelle) saranno successivamente 1/10, 2/10, 3/10, ecc. di una piccola divisione della scala semplice, ossia 1/10, 2/10, 3/10, ecc. di metro, e rappresenteranno per conseguenza 1, 2, 3, ecc. decimetri.

Vogliasi, mediante questa scala grafica, trovare la retta rappresentante la lunghezza naturale $53^{m},4$: si fissi una punta del compasso all'intersezione della parallela marcata 4 colla trasversale segnata 3, e l'altra punta all'intersezione dell'istessa parallela colla perpendicolare segnata 50, ed in quest'apertura si avrà la lunghezza cercata; perchè è evidente che da 50 a 3 vi saranno 53 metri, e che immaginando per l'estremo 3 la perpendicolare *pq*, la piccola parte *ab* sarà 4/10 di una divisione della scala semplice, ossia i quattro decimetri.

Se poi si vuol sapere qual lunghezza reale rappresenta una data lunghezza grafica, si prende col compasso questa lunghezza, si porta una punta su una perpendicolare in guisa che l'altra punta cada nella parte ove vi sono le trasversali, e si fanno poi scorrere le due punte del compasso, cosicchè amendue si trovino su una stessa parallela, senza che la prima punta abbandoni la perpendicolare su cui erasi collocata. Questo movimento si continua finchè la seconda punta sia all'intersezione di una parallela con una trasversale; e se, per esempio, la prima punta trovasi all'intersezione della perpendicolare 70 colla parallela 4, e la seconda all'intersezione della stessa parallela colla trasversale 9, si dirà che la lunghezza naturale corrispondente a quella data è di $79^{m},4$.

13. **Costruzione d'una scala ticonica a triplometri.** — Gli strumenti generalmente usati e tollerati presso di noi per misurare le distanze, avendo la lunghezza di tre metri esatti, a scanso di perditempo e d'errori, soglionsi, all'atto pratico, registrare le lunghezze in triplometri, metri, decimetri e centimetri senza alcuna riduzione, e riportare queste sul disegno mediante scale danti, nelle loro suddivisioni, dei triplometri, multipli e sottomultipli di essi. La costruzione di queste scale si fa con un metodo in tutto analogo al già esposto, e, per fissare le idee, sia a costruirsi la scala del 1/1500.

Trovata la lunghezza grafica di un multiplo esatto di triplometri, per esempio, di 50, che è di $0^{m},1$, si costruisca la scala semplice AB (*fig.* 4), rappresentante, nelle sue grandi divisioni, dieci triplometri, e nelle piccole triplometri; all'estremo di sinistra innalzisi una perpendicolare, e su questa si portino trenta parti eguali; per tutti i punti di divisione traccinsi altrettante parallele alla scala semplice, e pei punti segnati 0, 10, 20, ecc. le perpendicolari alla medesima, finchè incontrino l'ultima parallela EF. Congiungasi l'estremo di sinistra E di quest'ultima col punto 9 della scala semplice; pei punti 8, 7, 6, ecc. si tirino tante parallele a questa trasversale, e la scala troverassi compita, allorquando i punti d'intersezione della perpendicolare 0 colle parallele si controsegnino coi numeri 1, 2, 3, ecc.

Volendo in questa scala prendere la lunghezza di 44 triplometri, 1 metro e 7 decimetri, si fissi una punta del compasso sulla trasversale 4 all'intersezione colla parallela 17, e si apra finchè l'altra punta cada all'intersezione della stessa parallela colla perpendicolare 40.

14. **Costruzione delle scale a trabucchi**. — Tanto le scale grafiche semplici, quanto le ticoniche si possono con egual facilità costrurre nel caso in cui i varii ordini d'unità da rappresentarsi con esse non seguano la legge decimale; per maggiore spiegazione, tratterò il caso particolare di dover costrurre una scala grafica a trabucchi nel rapporto del 1/600.

Tracciata una retta AB (*fig.* 5) rappresentante un numero esatto di trabucchi in tale scala, per esempio, 20 trabucchi, la cui lunghezza è data da $\frac{20^{trab.}}{600}=\frac{1440^{onc.}}{600}=2^{onc.}\,4^{pun.}\,9^{at.}\frac{3}{5}$, si dividerà in due parti eguali. Si compirà la scala marcando i numeri 0, 10, a cominciare dal primo punto di divisione a sinistra; dividendo la parte che resta a sinistra dello 0 in dieci parti eguali; e indicando le nuove divisioni coi numeri 1, 2, 3, ecc. fino a 10.

Se poi si vuol fare su questa scala semplice una scala ticonica, si innalza per l'estremo di sinistra una perpendicolare; su questa si portano sei parti eguali; si conducono pei punti di divisione altrettante parallele alla scala semplice; si innalzano dai punti delle massime divisioni della scala semplice tante perpendicolari fino all'ultima parallela; si conducono le trasversali e si fanno le numerazioni in modo analogo a quello usato per la scala metrica.

Queste scale si prestano a prendere delle lunghezze corrispondenti a date lunghezze naturali, o viceversa a trovare le lunghezze naturali corrispondenti a certe lunghezze grafiche, in un modo affatto analogo a quello indicato per le scale metriche.

Qualora si voglia costrurre una scala a trabucchi e che si possa solo disporre di misure metriche, s'incomincerà dal cercare cosa vale in metri quel numero di trabucchi colla cui lunghezza grafica vuolsi costrurre la scala, dietro il noto rapporto del trabucco al metro, che è 3,08642: così, stando al caso particolare già trattato, si dirà che 20 trabucchi valgono $20 \times 3{,}08642 = 61^{m},7284$, che la loro lunghezza grafica è data da $\frac{61^{m},7284}{600} = 0^{m},10288$, e che, portando questa in AB (*fig.* 5) e facendo le suddivisioni già indicate, si avrà la scala semplice a trabucchi dell'1/600. In simil modo si costrurranno delle scale a misure qualunque, avendo fra le mani delle misure metriche, qualora si abbia un'opportuna tavola per ridurre quelle a queste.

15. **Scale non aventi per numeratore l'unità, e contenenti al denominatore dei fattori differenti da 2 e 5.** — Le scale generalmente adottate sono sempre frazioni aventi per numeratore l'unità e per denominatore un numero formato dai soli fattori 2 e 5, e ciò si fa onde avere esattamente in decimali quella lunghezza della scala che rappresenta una lunghezza naturale qualsivoglia data. In alcuni casi però si adottano delle scale anche aventi per numeratore un numero diverso dall'unità, e per denominatore dei numeri formati dai fattori primi, diversi da 2 e 5: in questo caso si costrurrà la scala grafica, trovando da che cosa è rappresentato un multiplo d'unità di un ordine immediatamente superiore a quello delle minime unità valutabili colla scala grafica semplice, e spingendo la divisione ad un punto tale per cui la lunghezza che si porta sulla retta indefinita per fare la scala sia esatta fino ai decimillimetri. O meglio ancora si procurerà di ridurre in iscala un numero tale delle accennate unità da far sparire i fattori primi, diversi da 2 e 5, che rendono impossibile l'esatta divisione. Alcuni esempli renderanno chiara la cosa e serviranno di guida in qualunque caso onde procedere alla costruzione di siffatte scale.

Sia a costruirsi una scala grafica dell'1/900, in cui il denominatore contiene il fattore 9, che è appunto quello che impedisce la esatta divisione del numeratore pel denominatore. Si riduca in iscala un numero che sia divisibile per 9, per esempio 90^{m} e, dietro la nota regola enunciata al numero 8, si troverà che 90^{m} sono rappresentati esattamente da $\frac{90^{m}}{900} = 0^{m},1$. Questa lunghezza di $0^m,1$ si porti sopra una retta indefinita, si divida in nove parti eguali, e si avranno i decametri; con una di queste parti si prolunghi la scala a piacimento; la prima divisione a sinistra si divida in dieci parti eguali, e si avrà così una scala semplice a metri e decametri, e si potranno anche valutare i decimetri qualora si conducano le trasversali.

Così ancora, volendosi costrurre una scala metrica del 3/3500 il cui denominatore contiene il fattore 7 diverso dai fattori 2 e 5, converrà ridurre in iscala una lunghezza che sia esattamente divisibile per 7, per esempio 140^m: si otterrà che la lunghezza grafica che li rappresenta è $140^m \times \frac{3}{3500} = \frac{42}{350} = 0^m,12$. Questa lunghezza di $0^m,12$ si divida in 14 parti eguali, e si avranno i decametri; prendendo sul suo prolungamento da sinistra a destra sei di queste divisioni, si avranno nel totale due ettometri; e conducendo le trasversali, si potranno anche avere i metri.

16. **Altro metodo per la costruzione delle scale.** — Al metodo già esposto per costrurre le scale, che ha il pregio di una certa generalità, è preferibile nel maggior numero dei casi quello che sto per dare, dedotto dall'osservazione che in una scala qualunque il numeratore è sempre la lunghezza grafica della lunghezza naturale espressa dal denominatore. Così, volendosi costrurre la scala dell'1/2000, si ragionerà come segue:

1^m	sul disegno	rappresenta	2000^m	sul terreno,
0,1	»	»	200	»
0,2	»	»	400	»

per modo che, prendendo una retta lunga $0^m,2$ e dividendola in quattro parti eguali, si avranno gli ettometri; suddividendo la prima divisione a sinistra, si avranno i decametri; e conducendo finalmente le trasversali, si otterranno i metri.

Similmente si costrurrà la scala dell'1/2500, dicendo che

1^m	sul disegno	rappresenta	2500^m	sul terreno,
0,1	»	»	250	»
0,2	»	»	500	»

e si costrurrà la scala grafica ticonica in ettometri, decametri e metri, dividendo la lunghezza di $0^m,2$ in cinque parti eguali, suddividendo la prima parte a sinistra in dieci e tracciando le trasversali.

17. Scale convenienti alle diverse operazioni topografiche. — A compimento del sin qui detto sulle scale, aggiungerò ancora come le scale dell'1/500 all'1/1000 siano quelle credute convenienti pei progetti speciali, importanti la rappresentazione di piccoli appezzamenti, adottandosi talvolta scale maggiori per le rappresentazioni dettagliate dei fabbricati; come pei piani dettagliati di città e villaggi sieno valevoli le scale dell'1/1500 sino ad 1/2500, la prima delle quali si adopera generalmente nel catasto per la formazione delle mappe originali; come pei piani topografici di un paese di mediocre estensione sieno utili le scale dell'1/5000 all'1/10000, e come finalmente la scala dell'1/25000 sia il limite ordinario per le levate topografiche, quantunque questo limite vogliasi da taluni estendere sino a scale minori dell'ultima suaccennata, ed anche sino alla scala dell'1/100000.

Occorrendo ben di frequente di dover far uso di piani antichi, può tornar utile ad alcuni di conoscere le scale usate in Piemonte fin dai primi anni del volgente secolo, che erano: la scala di Savoia, nel rapporto dell'1/2362,50: la quarta di Savoia, nel rapporto dell'1/9450; la quinta della quarta di Savoia, nel rapporto dell'1/54720.

ARTICOLO II.

Del compasso di proporzione.

18. Descrizione del compasso di proporzione. — Il compasso di proporzione è costituito da due regoli ordinariamente di metallo, mobili attorno un medesimo perno, in modo da poter fare fra di loro qualsivoglia angolo fino a 180° (*fig.* 6). — Sopra una delle due facce vi sono diverse linee concorrenti nel centro del moto, ed egualmente inclinate due a due sulla linea di mezzo. Le due linee, che attraversano i regoli diagonalmente e divise in 200 parti eguali, si dicono *linee delle parti eguali;* due altre sono indicate *linee dei piani;* e finalmente due altre, *linee dei poligoni.* Sopra l'altra faccia due linee similmente disposte hanno il nome di *linee delle corde;* due altre, quello di *linee dei solidi;* e per ultimo due altre, quello di *linee dei metalli.* Parallelamente ai due bordi del compasso si trovano, da una parte, una retta intitolata *calibri dei cannoni;* e dall'altra parte, una seconda retta intitolata *pesi delle palle.*

Questo strumento non ha un rapporto diretto colla topografia; e si parlerà soltanto, di mano in mano che si presenterà la circostanza, dell'uso delle linee delle parti eguali, delle linee dei piani e delle linee delle corde.

19. **Uso del compasso di proporzione come scala.** — Volendo disporre il compasso di proporzione in modo da poter servire a ridurre nella scala dell'$\frac{m}{n}$ date lunghezze naturali, convien scegliersi una lunghezza L contenente meno di 200 unità del più piccolo ordine rappresentabile in quella scala; prendere sulle linee delle parti eguali $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ (*fig.* 7) lunghe tante parti eguali quante sono unità in L, e aprire il compasso in modo che la distanza AB sia $\frac{m}{n}$L. Volendosi ora ridurre nell'accennata scala la lunghezza L′, basta prendere, sulle linee delle parti eguali $\overline{CA'}$ e $\overline{CB'}$, di tante parti quante sono unità in L′, e la distanza $\overline{A'B'}$ sarà la domandata. — Infatti, considerando i due triangoli ACB, A′CB′, si ha

$$\overline{A'B'}=\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}\overline{AB};$$

e siccome

$$\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}=\frac{L'}{L},\ \text{e}\ \overline{AB}=\frac{m}{n}L,$$

si trova

$$\overline{A'B'}=\frac{m}{n}L',$$

risultato il quale dimostra essere $\overline{A'B'}$ la riduzione di L′ nella scala dell'$\frac{m}{n}$ (num. 8).

Venendo ad un esempio particolare, proponiamoci di usare il compasso di proporzione come scala dell'1/1500. Essendo il metro l'unità d'ordine più basso che vuolsi rappresentare in quella scala, si trovi la lunghezza grafica corrispondente ad un numero di metri minore di 200, per esempio, a 180^m, data da $\frac{180}{1500}=0^m,12$; e si apra quindi il compasso di proporzione in modo che la distanza fra i due punti della linea delle parti eguali, segnati 180, sia appunto $0^m,12$. Una lunghezza qualsivoglia rappresentativa d'una lunghezza naturale, per esempio di 120^m, si otterrà prendendo la distanza tra i punti delle linee delle parti eguali segnati 120. Viceversa, si troverà che una lunghezza qualsivoglia pari, per esempio, alla distanza fra i punti delle parti eguali, marcati 164, rappresenta una lunghezza reale di 164^m.

ARTICOLO III.

Del nonio rettilineo.

20. **Scopo del nonio rettilineo e principio su cui fondasi la sua costruzione.** — Onde avere speditamente ed in modo chiaro le minime suddivisioni di un regolo o di una scala, senza ricorrere alle trasversali, si fa uso del *nonio*, il quale è un breve tratto di altro regolo convenientemente diviso, e che si può definire un congegno mediante cui si arriva a valutare, sopra un regolo o scala divisa in parti già piccole, delle frazioni di queste parti.

La costruzione del nonio è fondata sul seguente principio: *Se si prende una lunghezza di* m *divisioni eguali, in cui trovasi diviso un regolo; se si porta su un altro regolo, che chiamasi nonio, e si divide in* $\mathrm{m}+1$ *parti eguali, la differenza fra una divisione del regolo ed una divisione del nonio è* $\frac{1}{\mathrm{m}+1}$ *di una divisione del regolo, la differenza fra due divisioni del regolo e due divisioni del nonio è* $\frac{2}{\mathrm{m}+1}$, *ed in generale la differenza fra* p *divisioni del regolo e* p *divisioni del nonio è* $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{m}+1}$ *di una divisione del regolo.*

Infatti, chiamando

x la lunghezza di una divisione del regolo, ed

y la lunghezza di una divisione del nonio,

si avrà

$$(m+1)y=mx,$$

d'onde

$$y=\frac{m}{m+1}x.$$

Risulta da ciò che

$$x-y=x-\frac{m}{m+1}x=\frac{1}{m+1}x,$$

e quindi, moltiplicando successivamente per 2, 3,...... p i due membri di quest'equazione, si ha

$$2x-2y=\frac{2}{m+1}x,$$

$$3x-3y=\frac{3}{m+1}x, \ldots\ldots px-py=\frac{p}{m+1}x,$$

come si voleva dimostrare.

Se, per fissare le idee, si fa $m=4$, si ha

$$x-y=\frac{1}{5}x,\ 2x-2y=\frac{2}{5}x,\ 3x-3y=\frac{3}{5}x,\ 4x-4y=\frac{4}{5}x.$$

Supponendo poi che una retta portata sul regolo AB (*fig.* 8) venga da A in C, essendo quest'ultimo estremo fra la divisione 14, distinta colla lettera D, e la divisione 15, si dirà che la retta assunta è lunga 14 divisioni, più una frazione di una di queste divisioni, la qual frazione è evidentemente quel tanto di cui il punto C dista dal punto D. Se ora si fa scorrere il nonio MN finchè il suo zero sia nel punto C, avverrà che, essendo la divisione 4 del nonio che coincide esattamente colla divisione 18, la parte $\overline{DC}$, siccome differenza fra quattro divisioni del regolo e quattro divisioni del nonio, sarà i 4/5 di una divisione del regolo, e che quindi la retta in considerazione sarà lunga 14+4/5. Così pure, se fosse la divisione 3 del nonio che coincidesse esattamente con una divisione del regolo, la parte $\overline{DC}$, differenza fra tre divisioni di questo e tre divisioni di quello, sarebbe 3/5, e la retta a misurarsi 14+3/5. Ragionando in un modo analogo, quando fosse la divisione 2, poi la 1 del nonio, che coincidesse successivamente colle divisioni 16 e 15 del regolo, si potrebbe conchiudere: 1° che la lunghezza della retta in quistione sarà 14+1/5 o 2/5 o 3/5 o 4/5, secondo che coinciderà esattamente con una divisione del regolo la 1 o 2 o 3 o 4 del nonio; 2° che, per essere le frazioni da aggiungersi alla parte intera 1/5 o 2/5 o 3/5 o 4/5, lo strumento dà l'approssimazione dei quinti.

21. **Regole relative all'uso del nonio rettilineo.** — Generalizzando le conseguenze tratte dall'esempio particolare, si deduce:

1° Che l'approssimazione data da un regolo diviso in parti eguali, e munito di nonio, diviso anch'esso in tante parti eguali quante sono le divisioni abbracciate sul regolo più una, è una frazione avente per numeratore l'unità e per denominatore il numero delle divisioni del nonio;

2° Che si misura mediante un regolo munito di nonio la lunghezza di una retta, portando questa sul regolo a partire dallo zero, facendo scorrere il nonio finchè il suo zero sia all'altro estremo della retta a misurarsi, osservando qual è la divisione del nonio che coincide esattamente o che è più prossima a coincidere con una divisione del regolo, e dicendo che la retta assunta è lunga tante unità quante sono marcate nella prima delle divisioni fra cui cade l'estremo della retta, più tante volte l'approssimazione quante sono unità nella divisione del nonio che coincide esattamente o che più d'ogni altra è prossima a coincidere con una divisione del regolo;

3° Che si può prendere su un regolo munito di nonio una data lunghezza, portando lo zero del nonio fra le due tacche cui sono apposti i numeri che comprendono la parte intera della retta a prendersi, e disponendo le cose in modo che sia in coincidenza con una divisione del regolo, quella tacca del nonio che indica quante volte l'approssimazione data dallo stromento è contenuta nella rimanente frazione della retta a prendersi;

4° Che, dato un regolo diviso in parti eguali già piccole, si può costrurre un nonio che dia una data approssimazione, prendendo sul regolo una lunghezza che abbracci tante divisioni quante sono unità nel denominatore della frazione *approssimazione* meno una, e dividendo questa lunghezza, portata sul nonio, in tante parti eguali quante sono unità nell'accennato denominatore.

22. **Esercizii sull'uso del nonio rettilineo.** — Dietro le regole esposte si dirà:

1° Che un regolo diviso in millimetri, su cui scorre un nonio abbracciante nove divisioni e diviso in dieci parti eguali, dà l'approssimazione dei decimi di millimetro ossia dei decimillimetri; che un regolo diviso in punti, su cui scorre un nonio abbracciante undici divisioni e diviso in dodici, dà l'approssimazione dei dodicesimi di punto ossia degli atomi;

2° Che una retta portata sul primo dei due accennati stromenti, la quale da 0 arrivi nell'intervallo 20 e 21, essendo la divisione 7 del nonio che coincide esattamente con una divisione della scala, è lunga 20 millimetri e 7 decimillimetri; e che una retta portata sul secondo stromento e spingentesi da 0 nell'intervallo 15 e 16, mentre la divisione 9 del nonio coincide o è più prossima a coincidere con una divisione del regolo, è lunga 15 punti e 9 atomi;

3° Che, per disporre il primo stromento in modo da segnare 12 millimetri e 4 decimillimetri, convien portare lo zero del nonio fra le tacche 12 e 13 in modo che la tacca 4 del nonio coincida esattamente con una tacca del regolo: e che, per prendere sul secondo 20 punti e 7 atomi, bisogna far venire lo zero del nonio fra le tacche 20 e 21, in guisa che la 7 del nonio coincida esattamente con una del regolo;

4° Che, dato un regolo diviso in millimetri, vi si adatterà un nonio capace di dare l'approssimazione dei decimillimetri, prendendo nove divisioni del regolo e dividendole sul nonio in dieci parti eguali; e che, dato un regolo diviso in punti, si potranno con questo avere gli atomi, adattandovi un nonio abbracciante undici punti e diviso in dodici parti eguali.

23. **Nonio rettilineo sottrattivo**. — Ragionando come al numero 20, si conchiude che, prendendo una lunghezza di m divisioni eguali in cui trovasi diviso un regolo, portandola sul nonio e dividendola in $m-1$ parti eguali, la differenza fra una divisione del nonio ed una divisione del regolo è $\frac{1}{m-1}$ di una divisione del regolo. Segue da ciò che, costruendo un nonio MN, lungo, per esempio, sei divisioni eguali d'un regolo AB (*fig.* 9), e diviso in cinque parti eguali, la differenza fra una divisione del nonio ed una divisione del regolo è 1/5 di una divisione del regolo; cosicchè la lunghezza di una retta che dalla divisione 0 del regolo AB si spinge nell'intervallo delle tacche 11 e 12 in C, è 12 divisioni del regolo meno la frazione CD, che si stima portando in C lo zero del nonio ed osservando qual è la sua divisione che coincide esattamente o che più d'ogni altra è prossima a coincidere con una tacca del regolo. Se questa divisione del nonio è la 3, si dirà che la retta a misurarsi è lunga $12-\frac{3}{5}=11+\frac{2}{5}$.

Un tale nonio, dando ciò che bisogna togliere dalla parte intera letta sul regolo, per avere la esatta lunghezza della retta a misurarsi, si dice *sottrattivo*.

CAPITOLO III.

Mezzi per misurare e costrurre angoli sulla carta.

ARTICOLO I.

Del rapportatore grafico ordinario.

24. Descrizione del rapportatore grafico ordinario. — Consiste *il rapportatore grafico ordinario* o *semicircolo da tavolino* in un semicerchio di metallo o di osso trasparente, la cui semiperiferia è divisa in 180° e talvolta ancora in mezzi gradi. Le divisioni sono ordinariamente numerate di cinque in cinque gradi, sia da destra verso sinistra, sia da sinistra verso destra (*fig.* 10).

Oltre i rapportatori semicircolari, si usano anche dei rapportatori rettangolari, di costruzione facile a concepirsi, immaginando un semicircolo su cui siano segnati tutti i raggi che fanno angoli di un grado o di mezzo grado (come quello già descritto), tagliando questo semicircolo a foggia di rettangolo e conservando per uno de' suoi lati il diametro 0° e 108° oppure una retta ad esso parallela, e ritenendo sugli altri tre lati del rettangolo le divisioni determinate dagli accennati raggi.

25. Uso del rapportatore grafico ordinario. — L'uso del rapportatore consiste nella soluzione dei seguenti problemi.

I. *Misurare l'angolo che due rette* AC *e* BC, *segnate sulla carta, fanno fra loro* (*fig.* 11).

Nel trattare questo problema conviene distinguere se vuolsi l'angolo $x < 180°$, o l'angolo $y > 180°$. — Nel primo caso si collochi il semicircolo in modo che il suo centro sia al vertice C, e disposto secondo un lato, per esempio secondo CA, il diametro 0° e 180°. Se il lato CB uscirà fuori della periferia corrispondentemente ad una delle divisioni della medesima, il numero di tale divisione darà in gradi l' angolo cercato. Se il lato non venisse a passare per una delle divisioni, allora si dovrebbe stimare ad occhio la frazione di grado. — Nel secondo caso tornerà comodo di misurare l'angolo x e sottrarlo da 360° per avere nella differenza l'angolo y, quantunque si possa anche prolungare il lato CA o l'altro CB in CA' o CB', onde far nascere l'angolo A'CB o l'altro ACB', ciascuno dei quali aggiunto a 180° darà l'angolo richiesto y.

II. *Per un punto* C, *scelto sulla retta* AA', *condurne una seconda che faccia un angolo dato colla parte* CA, *presa come linea d'origine, e nell'ipotesi che l'angolo si voglia valutare dalla destra verso la sinistra di un osservatore supposto collocato in* C *e che guardi* A (*fig.* 12).

Anche in questo problema due casi si devono distinguere, se cioè l'angolo a tracciarsi è un angolo $x < 180°$ o un angolo $y > 180°$. — Nel primo caso si applicherà lo strumento sulla carta, in modo che il raggio corrispondente all'angolo che si vuol segnare coincida colla CA, e che il punto C preso come vertice dell'angolo si trovi sul diametro 0° e 180°, o sulla retta ad esso parallela che può esistere nel semicircolo; il diametro o la retta suaccennati serviranno per compiere la soluzione del problema. Oppure si applichi il semicircolo in guisa che il suo centro cada in C ed il diametro 0° e 180° sia nella direzione della CA; si segni con una punta ben fina dove cade l'estremo del raggio che porta il numero dei gradi dell'angolo a costrursi, e si avrà così un punto che, congiunto col vertice C, darà l'angolo domandato BCA. — Nel secondo caso si può diffalcare da 360° l'angolo dato, per ottenere nella differenza un angolo minore di 180° che, costrutto (con un processo analogo al suesposto) sulla CA da sinistra a destra in ACB', conduce alla soluzione del problema; la qual cosa anche facilmente si otterrebbe togliendo dall'angolo proposto 180° e facendo l'angolo differenza sul prolungamento CA' della CA.

Per costrurre angoli retti e semiretti si adoperano ben di frequente le *squadrette*, strumenti di un uso semplice, e ben famigliari a chiunque sia appena iniziato nel disegno geometrico.

III. *Per un punto* C, *preso fuori d'una retta* AB, *condurne una seconda collocata, per esempio, alla sinistra della perpendicolare* CP *ed inclinata sulla* AB *di un angolo dato* (*fig.* 13).

Si faccia scorrere il semicircolo in guisa che il raggio cui corrisponde l'angolo cercato coincida costantemente colla retta data e finchè succeda che il punto C sia contenuto nel diametro 0° e 180° o in una retta parallela, il qual diametro o retta parallela servirà poi per tracciare l'altro lato dell'angolo domandato CDA. Oppure (principalmente se il punto C dista molto dalla AB, sicchè lo strumento non possa giungere fino ad esso) si costruisca in un punto qualunque E della AB l'angolo FEA eguale al domandato, e poscia per C si conduca la CD parallela alla FE.

ARTICOLO II

Del nonio circolare.

26. Regole relative all'uso del nonio circolare. — Per poco che si rifletta alla natura della periferia circolare, è facile il convincersi come il nonio non è applicabile solo ai regoli divisi in parti eguali, ma anche ad una circonferenza, purchè esso si formi con un arco di questa. Cosicchè, se si prende un arco di circolo diviso in parti eguali (*fig.* 14), se su un arco concentrico dello stesso raggio e scorrevole sul primo si portano, ad esempio, quattro divisioni e si dividono in cinque parti eguali, si conchiude facilmente, ragionando come al numero 20, essere questo secondo arco un nonio dante l'approssimazione dei quinti delle divisioni dell'arco primitivo, e potersi quindi accettare, anche pel nonio circolare, le regole date al numero 21, che, modificate all'uopo, diventano:

1° L'approssimazione data da una circonferenza graduata e munita di nonio, diviso in tante parti eguali quante sono le parti abbracciate più una, è una frazione di una divisione della circonferenza avente per numeratore l'unità e per denominatore il numero delle divisioni del nonio; questa frazione sviluppata in numeri complessi dà l'approssimazione in suddivisioni di grado;

2° Si misura l'ampiezza di un arco, mercè una circonferenza munita di nonio, collocando il centro della circonferenza al vertice, il diametro 0° e 180° nella direzione di un suo lato, lo zero del nonio sull'altro lato, e dicendo che l'ampiezza di questo arco è tante divisioni della circonferenza graduata, quante sono espresse dal minore dei due numeri fra cui cade lo zero del nonio, più tante volte l'approssimazione quante sono unità del numero che esprime qual è la divisione del nonio che coincide esattamente o che più di ogni altra è prossima a coincidere con una divisione della circonferenza graduata;

3° A segnare coll'indice o zero del nonio un angolo dato, convien fare la differenza fra l'angolo a prendersi e quello immediatamente inferiore, leggibile sulla circonferenza graduata, e portare l'indice appena al di là della tacca corrispondente a quest'ultimo, in modo che coincida con una divisione della circonferenza quella del nonio, cui trovasi apposto il numero esprimente l'accennata differenza;

4° Ad una circonferenza graduata si può adattare un nonio dante una certa approssimazione, prendendo tante divisioni della circonferenza quante sono unità nel denominatore della frazione approssimazione meno una, e dividendo un tal arco in tante parti eguali quante sono unità nel denominatore medesimo, supposta, ben inteso, l'approssimazione ridotta ad un'espressione frazionaria della divisione della circonferenza.

27. **Esercizii sull'uso del nonio circolare.** — Dietro le accennate regole si dirà:

1° Che con una circonferenza divisa in gradi, e su cui scorre un nonio abbracciante ventinove divisioni e diviso in trenta parti eguali, si ha l'approssimazione di 1/30 di grado, ossia di 2′; e con una seconda circonferenza divisa in gradi e mezzi gradi, su cui scorre un nonio abbracciante pure ventinove divisioni e diviso in trenta, si possono leggere gli angoli esatti sino ad 1/30 di mezzo grado, ossia sino ad 1′;

2° Che un angolo misurato sulla prima circonferenza è di 39° 20′, quando lo zero del nonio cade fra le divisioni 39° e 40°, e la sua divisione dieci coincide esattamente con una divisione della circonferenza graduata; e che un angolo misurato sulla seconda circonferenza è di 58° 37′ quando lo zero del nonio cade fra 58° 1/2 e 59°, e la sua divisione sette coincide o è la più prossima a coincidere con una divisione della circonferenza graduata;

3° Che, per segnare sulla prima circonferenza un angolo di 52° 12′, convien portare lo zero del nonio fra le incisioni 52° e 53°, in modo che la divisione sei del nonio coincida esattamente con una della circonferenza; e che per segnare sulla seconda circonferenza un angolo di 43° 38′, bisogna far venire lo zero del nonio fra le divisioni della circonferenza numerate 43° 1/2 44°, facendo in modo che la divisione otto del nonio coincida esattamente con una divisione della periferia graduata;

4° Che, data una circonferenza divisa, per esempio, in gradi, vi si costruisce un nonio che dia l'approssimazione di 2′, osservando che, per essere $2' = \frac{1}{30}$ di grado, basta prendere ventinove divisioni della circonferenza e dividerle in trenta sul nonio; e che data una circonferenza divisa in gradi e mezzi gradi, vi si costruisce un nonio, che dia i minuti primi, ossia 1/30 delle divisioni della circonferenza, prendendo pure ventinove divisioni e dividendole sul nonio in trenta parti eguali.

ARTICOLO III.

Del rapportatore grafico con nonio.

28. **Descrizione del rapportatore grafico con nonio.** — Onde evitare l'incertezza nella valutazione degli angoli, mercè i rapportatori già descritti, se ne sono costrutti di quelli con nonio. Questi strumenti consistono generalmente in una semi-corona metallica, o meglio in una corona intera, divisa in gradi e talvolta anche in mezzi gradi, colla numerazione procedente in due sensi oppure in un solo, e quasi sempre da destra a sinistra per un osservatore collocato vicino alla divisione 180° e che guardi all'origine 0° della graduazione. Due rette AB e CD (*fig.* 15) segnano sempre i due diametri principali che passano rispettivamente per le divisioni 0° e 180°, 90° e 270°. Intorno al centro, che trovasi nel mezzo di un'apertura ed in cui viene individuato o da un punto fatto in una sostanza trasparente o dall'intersezione di due fili sottilissimi, gira una riga mobile R, cui è annesso un nonio N scorrevole sulla circonferenza graduata della corona, ed avente il suo zero sul filo della riga o *linea di fede* FG, la quale passa sempre pel centro del semicircolo, intorno a cui si fa girare con un piccolo pomo.

29. **Uso del rapportatore grafico con nonio.** — Servendomi di un rapportatore a circolo intero diviso in gradi, colla numerazione procedente da destra a sinistra e munito di un nonio abbracciante ventinove gradi e diviso in trenta parti eguali, sicchè dia l'approssimazione di $2'$, tratterò le questioni medesime già risolute al numero 25.

La misura di un angolo qualunque già costrutto sulla carta, come ACB (*fig.* 11), si ottiene disponendo lo strumento in modo che sieno soprapposti il centro al vertice C, il diametro 0° e 180° al lato CA, facendo cadere l'origine 0° degli angoli verso A, ed il filo della riga sull'altro lato CB. Supponendo ora che lo zero del nonio cada fra le divisioni 52° e 53° e che la tredicesima sua divisione coincida esattamente o che più d'ogni altra sia prossima a coincidere con una divisione della circonferenza graduata, nella lettura $52° + 13 \times 2' = 52°\ 26'$ si avrà l'ampiezza dell'angolo misurato.

Nel risolvere il problema di condurre pel punto C della retta AA′ (*fig.* 12) una seconda retta che colla parte AC faccia un dato angolo, per esempio, di 52° 26′, conviene distinguere due casi: se cioè, costrutto l'angolo, la retta AC rimarrà lato di destra oppure lato di sinistra. — Nel primo caso, disposto il nonio in guisa che il suo indice 0° cada fra 52° e 53°, si procurerà la perfetta coincidenza della sua divisione 13 con una di quelle della circonferenza; poi si adatterà lo strumento sulla carta in guisa che il suo centro cada nel vertice C ed il diametro 0° e 180° sulla direzione della AA′ in modo che l'estremo 0° sia dalla parte di A, onde avere nel filo stesso della riga un mezzo per tracciare il secondo lato dell'angolo richiesto. — Nel secondo caso poi, con una sottrazione dell'angolo dato da 360°, si avrà l'angolo misurato da destra a sinistra per rapporto alla CA e da costrursi come già si disse.

Il problema di condurre per un punto C preso fuori di una retta AB (*fig.* 13) una seconda retta inclinata sulla prima, per esempio, di 70° 12′, si risolve colle regole già esposte parlando del semicerchio ordinario, cioè combinando le cose in modo che lo strumento segni 70° 12′, e facendo poi scorrere il diametro 0° e 180° sulla AB, finchè il filo della riga contenga il punto C, nel qual istante l'accennato filo dà la retta CD, che si cerca: oppure facendo in un punto qualunque E della AB l'angolo richiesto, e conducendo dopo la CD parallela alla EF.

30. **Verificazioni del rapportatore grafico.** — A quanto si è già detto intorno al rapportatore grafico, credo conveniente lo aggiungere il modo di verificare se questo strumento possa dare buoni risultati.

Acciocchè l'angolo segnato dallo strumento sia il vero, bisogna evidentemente che lo zero del nonio cada nel filo della riga, perchè se ciò non avviene, l'angolo è maggiore o minore del vero, secondo che lo zero è sulla sinistra o sulla destra del filo stesso (supposto procedere la graduazione da destra verso sinistra). Per accertarsi se questa coincidenza ha luogo, si disponga il diametro 0° e 180° secondo una retta segnata sulla carta, si faccia poscia girare la riga finchè il suo filo coincida colla retta accennata, e si osservi se lo zero del nonio cade sullo zero della graduazione; in caso che ciò non avvenga, l'angolo segnato dallo zero del nonio esprimerà l'errore di cui è affetto lo strumento, che sarà sottrattivo quando lo zero del nonio cada alla sinistra dello zero della graduazione, e addiettivo quando cada alla destra.

Uno strumento che abbia un tal difetto può ancora servire a fare operazioni esatte. Essendo ACB un angolo da misurarsi (*fig.* 11), si dispone lo strumento in modo che lo zero del nonio coincida collo zero della graduazione, e si colloca quindi sulla carta, cosicchè il centro dello strumento sia al disopra del vertice C dell'angolo a misurarsi ed il filo della riga nella direzione AC. Per essere lo strumento falso, succederà che il diametro 0° e 180° non sarà nella direzione AC, ma sibbene in un'altra C*a*. Si faccia poscia girare la riga finchè il suo filo coincida con CB, e l'angolo segnato dallo zero del nonio, che cadrà su C*b* al di là o al di qua di CB, tanto quanto era prima al di là o al di qua di CA, sarà evidentemente l'angolo voluto.

Così si condurrà una retta avente una certa inclinazione con una retta data, e passante per un punto preso su essa o fuori di essa, facendo precedere, alla soluzione già data di questo problema nel precedente numero, l'operazione di far coincidere lo zero del nonio con quello della graduazione ed il filo della riga colla linea origine degli angoli.

Se può ancora servire a fare operazioni esatte un rapportatore in cui lo zero del nonio non è nel filo della riga, non così va la cosa quando la graduazione è male eseguita. Il medesimo processo serve a verificare se questa condizione si trova soddisfatta non solo nei rapportatori con nonio, ma anche nei semicircoli ordinari. — Condotte sulla carta più rette AB, AC, AD, ecc. (*fig.* 16), si misurano gli angoli che esse fanno fra di loro e quelli che fanno colla prima AB: se gli angoli semplici CAD, DAE, ecc. saranno eguali alle differenze angolari rispettive, BAD — BAC, BAE — BAD, ecc., si dirà che lo strumento è giusto.

Rimane ancora a verificare se non esiste l'errore di *eccentricità*, cioè quell'errore per cui il punto scelto come centro dello strumento non trovasi al vero centro della periferia graduata. Perciò s'incomincia dal riconoscere se detto punto trovasi nel diametro 0° e 180°, il che avviene quando, tracciando sulla carta una retta indefinita, facendo coincidere lo zero del nonio con quello della graduazione, appoggiando la linea di fede contro questa retta e girando la sola riga finchè lo zero del nonio coincida con 180°, la linea di fede cada ancora nella direzione della retta tracciata. Con un procedimento in tutto analogo si verifica se il punto preso come centro è sul diametro 90° e 270°. Detto punto è sicuramente al centro della periferia graduata, se trovasi simultaneamente sugli accennati due diametri.

ARTICOLO IV.

Tavole e scale delle corde e delle tangenti.

31. **Tavole delle corde.** — Per quanto perfetti siano i descritti rapportatori, pure l'esperienza convince non doversi giammai attendere da essi quella precisione che sembrano promettere, e ben riconoscenti dobbiamo essere a Francoeur, che, traendo partito d'una semplicissima formola di trigonometria, ebbe la felice idea di compilare una tavola in cui si trovano registrate le corde degli archi compresi fra 0° e 180°, calcolate col raggio di 1000 unità.

La formola trigonometrica conveniente al calcolo di una tavola di corde è quella che dice essere una corda eguale al doppio del seno della metà dell'arco da essa sotteso; cosicchè, considerando in un circolo di raggio $\overline{OA}=R$ una corda $\overline{AB}=x$ (*fig.* 17) e l'angolo ad essa corrispondente $AOB=\varphi$, si avrà, come facilmente si scorge conducendo la $\overline{OC}$ perpendicolare ad $\overline{AB}$,

$$x=2R\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\varphi.$$

Fissato il valore costante che vuolsi dare ad R, il qual valore suol generalmente essere 1000, si faranno prendere a φ tutti i valori compresi da 0° sino a 180°, per calcolare, mediante i logaritmi delle linee trigonometriche e dei numeri, una tavola contenente in una prima colonna gli angoli di minuto in minuto, ed in una seconda le rispettive corde. Come si vedrà nel numero che segue, basta avere le corde da 0° fino a 90° inclusivamente.

32. **Uso delle tavole delle corde.** — L'uso di queste tavole è semplicissimo; vogliasi, per esempio, costrurre sulla retta AB (*fig.* 18) un angolo di 48° 20′ col suo vertice in A.

Dal vertice A e col raggio $\overline{AC}=1000$ parti di una scala qualunque descrivasi l'arco circolare CX; si cerchi dopo nelle tavole la corda di 48° 20′, che si trova eguale a 818,78; si prendano sulla scala, che ha servito a determinare il raggio, 818 unità e 78/100; fatto centro in C, con apertura eguale a questa corda si tagli l'arco CX in D; congiungasi A con D, e si avrà in BAD l'angolo cercato.

Qualunque sia l'angolo a farsi, la sua costruzione si riduce sempre a quella d'un angolo acuto. Così, per costrurre un angolo x, o un secondo y, o un terzo z, il primo compreso fra 90° e 180°, il secondo fra 180° e 270°, ed il terzo fra 270° e 360°, si farà: nel primo caso, la differenza $180°—x$; nel secondo la differenza $y—180°$; nel terzo, la differenza $360°—z$; e queste differenze si costrurranno, colla regola già esposta, la prima in FAE, la seconda in FAG, la terza in BAH.

Qualora si operi in una scala piuttosto grande, per cui incomodo o impossibile riesca il prendere per raggio 1000 unità, si può far subire a questo una diminuzione, supponendolo di 100 o di 10 unità; allora converrà trasportare la virgola, che nella tavola separa la parte intera dalla decimale, di una o di due cifre verso sinistra. Talvolta si prendono per raggio 500 unità, e la corda che trovasi nella tavola vuol essere ridotta a metà.

Le tavole delle corde si prestano anche per misurare un angolo EOD (*fig.* 17) già costrutto, in questo modo: fatto centro nel vertice O dell'angolo, si descriva un arco di circolo ACB, di raggio eguale a mille delle piccole parti di una scala ticonica decimale, e quindi si trovi su questa la lunghezza dalla corda $\overline{AB}$ di tal arco; si cerchi nelle tavole il numero dei gradi corrispondente alla lunghezza di questa corda, e si avrà l'angolo domandato.

33. **Scale delle corde ed uso delle linee delle corde segnate sul compasso di proporzione.** — Invece di registrare in una tavola tutti gli angoli da 0° a 180°, e accanto ai medesimi le loro corde, si possono anche portare queste su una linea retta, a partire da un suo estremo e marcare all'altro estremo di ciascuna corda il numero dei gradi cui essa corrisponde. Di simili scale, dette comunemente *scale delle corde*, se ne trovano due perfettamente eguali, una per ogni riga del compasso di proporzione; in esse la corda di 60° rappresenta il raggio del circolo in cui furono prese, ed eccone il loro uso.

Per costrurre su una retta AB (*fig.* 18) e col vertice in A un angolo dato, per esempio, di 48°, si faccia centro in A e con apertura eguale alla corda di 60° si descriva l'arco indefinito CX; prendasi poscia la corda di 48°; e fatto centro in C, si tagli con tal apertura l'arco CX in D: l'angolo DAB sarà il domandato. Oppure, servendosi della proporzionalità delle corde, che sottendono archi della medesima ampiezza, ai rispettivi raggi, si può descrivere l'arco indefinito CX con apertura qualunque; aprire il compasso in modo che la distanza fra le due divisioni 60° delle scale sia questa apertura; e prendere la distanza delle due tacche 48°: descrivendo con essa l'arco di centro in C e tagliante il primo in D, si avrà in AD il secondo lato dell'angolo domandato.

Il problema di trovare l'angolo di due rette OD e OE (*fig.* 17) si può pure risolvere in due modi: o chiudendo l'angolo con un arco ACB di raggio eguale alla corda di 60°, portando la sua corda $\overline{AB}$ su una delle scale delle corde, a partire dal centro del moto del compasso di proporzione, e leggendo il numero della divisione in cui cade l'altro estremo; o chiudendo l'angolo con un arco di raggio qualunque $\overline{OB}$, riducendo ad essere eguale a questo raggio la distanza fra le divisioni 60°, e osservando quali sono le due divisioni dello stesso indice che distano fra loro tanto quanto è lunga la corda dell'arco tracciato.

34. **Tavole delle tangenti**. — Un angolo è pienamente determinato quando si conosce il raggio dell'arco che lo chiude, non che la sua tangente. Dietro questa considerazione si sono composte le tavole delle tangenti naturali di minuto in minuto per tutti gli angoli dell'ottavo di circonferenza, nell'ipotesi del raggio eguale a 1000 unità; e ben efficace è il loro impiego nella costruzione degli angoli sulla carta.

Essendo $AOB = \varphi$ un angolo chiuso dall'arco AB (*fig.* 19) di raggio $\overline{OA} = R$, ed essendo $\overline{AT} = x$ la sua tangente, si ha dal triangolo AOT

$$x = R \operatorname{tang} \varphi.$$

Questa formola è quella che, prendendo $R = 1000$ e dando a φ tutti i valori compresi da 0° a 45°, si presta alla costruzione delle tavole delle tangenti, che qui si riportano, per la loro pratica utilità nella grafica costruzione degli angoli.

Da 0° a 1°		Da 1° a 2°		Da 2° a 3°		Da 3° a 4°		Da 4° a 5°	
Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti
0'	0,00	0'	17,46	0'	34,92	0'	52,41	0'	69,93
1	0,29	1	17,75	1	35,21	1	52,70	1	70,22
2	0,58	2	18,04	2	35,50	2	52,99	2	70,51
3	0,87	3	18,33	3	35,79	3	53,28	3	70,80
4	1,16	4	18,62	4	36,09	4	53,57	4	71,10
5	1,45	5	18,91	5	36,38	5	53,87	5	71,39
6	1,75	6	19,20	6	36,67	6	54,16	6	71,68
7	2,04	7	19,49	7	36,96	7	54,45	7	71,97
8	2,33	8	19,78	8	37,25	8	54,74	8	72,27
9	2,62	9	20,07	9	37,54	9	55,03	9	72,56
10	2,91	10	20,36	10	37,83	10	55,32	10	72,85
11	3,20	11	20,66	11	38,12	11	55,62	11	73,14
12	3,49	12	20,95	12	38,42	12	55,91	12	73,44
13	3,78	13	21,24	13	38,71	13	56,20	13	73,73
14	4,07	14	21,53	14	39,00	14	56,49	14	74,02
15	4,36	15	21,82	15	39,29	15	56,78	15	74,31
16	4,65	16	22,11	16	39,58	16	57,08	16	74,61
17	4,95	17	22,40	17	39,87	17	57,37	17	74,90
18	5,24	18	22,69	18	40,16	18	57,66	18	75,19
19	5,53	19	22,98	19	40,46	19	57,95	19	75,48
20	5,82	20	23,28	20	40,75	20	58,24	20	75,78
21	6,11	21	23,57	21	41,04	21	58,54	21	76,07
22	6,40	22	23,86	22	41,33	22	58,83	22	76,36
23	6,69	23	24,15	23	41,62	23	59,12	23	76,65
24	6,98	24	24,44	24	41,91	24	59,41	24	76,95
25	7,27	25	24,73	25	42,20	25	59,70	25	77,24
26	7,56	26	25,02	26	42,50	26	60,00	26	77,53
27	7,85	27	25,31	27	42,79	27	60,29	27	77,82
28	8,15	28	25,60	28	43,08	28	60,58	28	78,12
29	8,44	29	25,90	29	43,37	29	60,87	29	78,41
30	8,73	30	26,19	30	43,66	30	61,16	30	78,70
31	9,02	31	26,48	31	43,95	31	61,46	31	78,99
32	9,31	32	26,77	32	44,24	32	61,75	32	79,29
33	9,60	33	27,06	33	44,54	33	62,04	33	79,58
34	9,89	34	27,35	34	44,83	34	62,33	34	79,87
35	10,18	35	27,64	35	45,12	35	62,62	35	80,17
36	10,47	36	27,93	36	45,41	36	62,92	36	80,46
37	10,76	37	28,22	37	45,70	37	63,21	37	80,75
38	11,05	38	28,52	38	45,99	38	63,50	38	81,04
39	11,35	39	28,81	39	46,28	39	63,79	39	81,34
40	11,64	40	29,10	40	46,58	40	64,08	40	81,63
41	11,93	41	29,39	41	46,87	41	64,38	41	81,92
42	12,22	42	29,68	42	47,16	42	64,67	42	82,22
43	12,51	43	29,97	43	47,45	43	64,96	43	82,51
44	12,80	44	30,26	44	47,74	44	65,25	44	82,80
45	13,09	45	30,55	45	48,03	45	65,54	45	83,09
46	13,38	46	30,84	46	48,32	46	65,84	46	83,39
47	13,67	47	31,14	47	48,62	47	66,13	47	83,68
48	13,96	48	31,43	48	48,91	48	66,42	48	83,97
49	14,25	49	31,72	49	49,20	49	66,71	49	84,27
50	14,55	50	32,01	50	49,49	50	67,00	50	84,56
51	14,84	51	32,30	51	49,78	51	67,30	51	84,85
52	15,13	52	32,59	52	50,07	52	67,59	52	85,14
53	15,42	53	32,88	53	50,37	53	67,88	53	85,44
54	15,71	54	33,17	54	50,66	54	68,17	54	85,73
55	16,00	55	33,46	55	50,95	55	68,47	55	86,02
56	16,29	56	33,76	56	51,24	56	68,76	56	86,32
57	16,58	57	34,05	57	51,53	57	69,05	57	86,61
58	16,87	58	34,34	58	51,82	58	69,34	58	86,90
59	17,16	59	34,63	59	52,12	59	69,64	59	87,20
60	17,46	60	34,92	60	52,41	60	69,93	60	87,49

Da 5° a 6°		Da 6° a 7°		Da 7° a 8°		Da 8° a 9°		Da 9° a 10°	
Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti
0′	87,49	0′	105,10	0′	122,78	0′	140,54	0′	158,38
1	87,78	1	105,40	1	123,08	1	140,84	1	158,68
2	88,08	2	105,69	2	123,37	2	141,14	2	158,98
3	88,37	3	105,99	3	123,67	3	141,43	3	159,28
4	88,66	4	106,28	4	123,96	4	141,73	4	159,58
5	88,95	5	106,57	5	124,26	5	142,02	5	159,88
6	89,25	6	106,87	6	124,55	6	142,32	6	160,18
7	89,54	7	107,16	7	124,85	7	142,62	7	160,48
8	89,83	8	107,46	8	125,15	8	142,91	8	160,78
9	90,13	9	107,75	9	125,44	9	143,21	9	161,07
10	90,42	10	108,05	10	125,74	10	143,51	10	161,37
11	90,71	11	108,34	11	126,03	11	143,81	11	161,67
12	91,01	12	108,63	12	126,33	12	144,10	12	161,97
13	91,30	13	108,93	13	126,62	13	144,40	13	162,27
14	91,59	14	109,22	14	126,92	14	144,70	14	162,57
15	91,89	15	109,52	15	127,22	15	144,99	15	162,86
16	92,18	16	109,81	16	127,51	16	145,29	16	163,16
17	92,47	17	110,11	17	127,81	17	145,59	17	163,46
18	92,77	18	110,40	18	128,10	18	145,88	18	163,76
19	93,06	19	110,70	19	128,40	19	146,18	19	164,06
20	93,35	20	110,99	20	128,69	20	146,48	20	164,35
21	93,65	21	111,29	21	128,99	21	146,78	21	164,65
22	93,94	22	111,58	22	129,29	22	147,07	22	164,95
23	94,23	23	111,88	23	129,58	23	147,37	23	165,25
24	94,53	24	112,17	24	129,88	24	147,67	24	165,55
25	94,82	25	112,47	25	130,17	25	147,96	25	165,85
26	95,12	26	112,76	26	130,47	26	148,26	26	166,15
27	95,41	27	113,05	27	130,77	27	148,56	27	166,45
28	95,70	28	113,35	28	131,06	28	148,85	28	166,74
29	96,00	29	113,64	29	131,36	29	149,15	29	167,04
30	96,29	30	113,94	30	131,65	30	149,45	30	167,34
31	96,58	31	114,23	31	131,95	31	149,75	31	167,64
32	96,88	32	114,53	32	132,24	32	150,04	32	167,94
33	97,17	33	114,82	33	132,54	33	150,34	33	168,24
34	97,46	34	115,11	34	132,84	34	150,64	34	168,54
35	97,76	35	115,41	35	133,13	35	150,94	35	168,84
36	98,05	36	115,70	36	133,43	36	151,24	36	169,14
37	98,34	37	116,00	37	133,73	37	151,53	37	169,44
38	98,64	38	116,29	38	134,02	38	151,83	38	169,74
39	98,93	39	116,59	39	134,32	39	152,13	39	170,04
40	99,23	40	116,88	40	134,61	40	152,43	40	170,33
41	99,52	41	117,18	41	134,91	41	152,72	41	170,63
42	99,81	42	117,47	42	135,21	42	153,02	42	170,93
43	100,11	43	117,77	43	135,50	43	153,32	43	171,23
44	100,40	44	118,06	44	135,80	44	153,62	44	171,53
45	100,69	45	118,36	45	136,09	45	153,92	45	171,83
46	100,99	46	118,65	46	136,39	46	154,21	46	172,13
47	101,28	47	118,95	47	136,69	47	154,51	47	172,43
48	101,58	48	119,24	48	136,98	48	154,81	48	172,73
49	101,87	49	119,54	49	137,28	49	155,11	49	173,03
50	102,17	50	119,83	50	137,58	50	155,40	50	173,33
51	102,46	51	120,13	51	137,87	51	155,70	51	173,63
52	102,75	52	120,42	52	138,17	52	156,00	52	173,93
53	103,05	53	120,72	53	138,47	53	156,30	53	174,23
54	103,34	54	121,01	54	138,76	54	156,60	54	174,53
55	103,63	55	121,31	55	139,06	55	156,89	55	174,83
56	103,93	56	121,60	56	139,36	56	157,19	56	175,13
57	104,22	57	121,90	57	139,65	57	157,49	57	175,43
58	104,52	58	122,19	58	139,95	58	157,79	58	175,73
59	104,81	59	122,49	59	140,25	59	158,09	59	176,03
60	105,10	60	122,78	60	140,54	60	158,38	60	176,33

Da 10° a 11°		Da 11° a 12°		Da 12° a 13°		Da 13° a 14°		Da 14° a 15°	
Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti
0′	176,33	0′	194,38	0′	212,56	0′	230,87	0′	249,33
1	176,63	1	194,68	1	212,86	1	231,17	1	249.64
2	176.93	2	194,98	2	213,16	2	231,48	2	249,95
3	177,23	3	195,28	3	213,47	3	231,79	3	250,25
4	177,53	4	195,59	4	213,77	4	232,09	4	250,56
5	177,83	5	195.89	5	214,08	5	232.40	5	250,87
6	178,13	6	196,19	6	214,38	6	232,71	6	251,18
7	178,43	7	196.49	7	214,69	7	233,01	7	251,49
8	178,73	8	196,80	8	214,99	8	233,32	8	251,80
9	179,03	9	197,10	9	215,30	9	233,63	9	252,11
10	179,33	10	197,40	10	215,60	10	233,93	10	252,42
11	179,63	11	197,70	11	215,90	11	234,24	11	252,73
12	179.93	12	198,01	12	216,21	12	234,55	12	253,04
13	180,23	13	198,31	13	216.51	13	234,85	13	253,35
14	180,53	14	198,61	14	216,82	14	235,16	14	253,66
15	180,83	15	198,91	15	217,12	15	235,47	15	253,97
16	181,13	16	199,22	16	217,43	16	235,78	16	254,28
17	181,43	17	199,52	17	217,73	17	236,08	17	254,59
18	181,73	18	199,82	18	218,04	18	236,39	18	254,90
19	182,03	19	200,12	19	218,34	19	236,70	19	255,21
20	182,33	20	200,43	20	218,64	20	237,00	20	255,52
21	182,63	21	200,73	21	218,95	21	237,31	21	255,83
22	182,93	22	201,03	22	219,25	22	237,62	22	256,14
23	183,23	23	201,33	23	219,56	23	237,93	23	256,45
24	183,53	24	201,64	24	219,86	24	238,23	24	256,76
25	183,84	25	201,94	25	220,17	25	238,54	25	257,07
26	184,14	26	202,24	26	220,47	26	238,85	26	257,38
27	184,44	27	202,54	27	220,78	27	239,16	27	257,69
28	184,74	28	202,85	28	221,08	28	239,46	28	258,00
29	185,04	29	203,15	29	221,39	29	239,77	29	258,31
30	185,34	30	203,45	30	221,69	30	240,08	30	258,62
31	185.64	31	203,76	31	222,00	31	240,39	31	258,93
32	185,94	32	204,06	32	222,30	32	240,69	32	259,24
33	186,24	33	204,36	33	222,61	33	241,00	33	259,55
34	186,54	34	204,66	34	222,91	34	241,31	34	259,86
35	186,84	35	204,97	35	223,22	35	241,62	35	260,17
36	187,15	36	205,27	36	223,53	36	241,93	36	260,48
37	187,45	37	205,57	37	223,83	37	242,24	37	260,79
38	187,75	38	205,88	38	224,14	38	242,54	38	261,10
39	188,05	39	206,18	39	224,44	39	242,85	39	261,41
40	188,35	40	206,48	40	224,75	40	243,16	40	261,72
41	188,65	41	206,79	41	225,05	41	243,47	41	262,03
42	188,95	42	207,09	42	225,36	42	243,77	42	262,35
43	189.25	43	207,39	43	225,67	43	244,08	43	262,66
44	189,56	44	207,70	44	225,97	44	244,39	44	262,97
45	189,86	45	208,00	45	226,28	45	244,70	45	263,28
46	190.16	46	208,30	46	226,58	46	245,01	46	263,59
47	190,46	47	208,61	47	226,89	47	245,32	47	263,90
48	190,76	48	208,91	48	227,19	48	245,62	48	264,21
49	191,06	49	209,21	49	227,50	49	245,93	49	264,52
50	191,36	50	209,52	50	227,80	50	246,24	50	264,83
51	191,66	51	209,82	51	228,11	51	246,55	51	265,15
52	191,97	52	210,13	52	228,41	52	246,86	52	265,46
53	192,27	53	210,43	53	228,72	53	247,17	53	265,77
54	192,57	54	210,73	54	229,03	54	247,47	54	266,08
55	192,87	55	211,04	55	229,34	55	247,78	55	266,39
56	193,17	56	211,34	56	229,64	56	248,09	56	266,70
57	193,47	57	211,64	57	229,95	57	248,40	57	267,02
58	193,77	58	211,95	58	230,25	58	248,71	58	267,33
59	194,07	59	212,25	59	230,56	59	249,02	59	267,64
60	194,38	60	212,56	60	230,87	60	249,33	60	267,95

Da 15° a 16°		Da 16° a 17°		Da 17° a 18°		Da 18° a 19°		Da 19° a 20°	
Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti
0′	267,95	0′	286,75	0′	305 73	0′	324,92	0′	344,33
1	268,26	1	287,06	1	306,05	1	325,24	1	344,65
2	268,57	2	287,38	2	306,37	2	325,56	2	344,98
3	268,88	3	287,69	3	306,68	3	325,89	3	345,30
4	269,20	4	288,00	4	307,00	4	326,21	4	345,63
5	269,51	5	288,32	5	307,32	5	326,53	5	345,95
6	269,82	6	288,63	6	307,64	6	326,85	6	346,28
7	270,13	7	288,95	7	307,96	7	327,17	7	346,61
8	370,44	8	289,26	3	308,28	8	327,49	8	346,93
9	270,76	9	289,58	9	308,60	9	327,82	9	347,26
10	271,07	10	289,90	10	308,91	10	328,14	10	347,58
11	271,38	11	290,21	11	309,23	11	328,46	11	347,91
12	271,69	12	290,53	12	309,55	12	328,78	12	348,24
13	272,01	13	290,84	13	309,87	13	329,11	13	348,56
14	272,32	14	291,16	14	310,19	14	329,43	14	348,89
15	272,63	15	291,47	15	310,51	15	329,75	15	349,22
16	272,94	16	291,79	16	310,83	16	330,07	16	349,54
17	273,26	17	292,10	17	311,15	17	330,40	17	349,87
18	273,57	18	292,42	18	311,47	18	330,72	18	350,19
19	273,88	19	292,74	19	311,78	19	331,04	19	350,52
20	274,19	20	293,05	20	312,10	20	331,36	20	350,85
21	274,51	21	293,37	21	312,42	21	331,69	21	351,17
22	274,82	22	293,68	22	312,74	22	332,01	22	351,50
23	275,13	23	294.00	*23	313,06	23	332,33	23	351,83
24	275,45	24	294,31	24	313,38	24	332,66	24	352,16
25	275,76	25	294,63	25	313,70	25	332,98	25	352,48
26	276,07	26	294,95	26	314,02	26	333,30	26	352,81
27	276,38	27	295,26	27	314,34	27	333,62	27	353,14
28	276,70	28	295,58	28	314,66	28	333,95	28	353,46
29	277,01	29	295,90	29	314,98	29	334,27	29	353,79
30	277,32	30	296,21	30	315,30	30	334,60	30	354,12
31	277,64	31	296,53	31	315,62	31	334,92	31	354,45
32	277,95	32	296,85	32	315,94	32	335,24	32	354,77
33	278,26	33	297,16	33	316,26	33	335,56	33	355,10
34	278,58	34	297,48	34	316,58	34	335,89	34	355,43
35	278,89	35	297,80	35	316,90	35	336,21	35	355,76
36	279,21	36	298,11	36	317,22	36	336,54	36	356,08
37	279,52	37	298,43	37	317,54	37	336,86	37	356,41
38	279,84	38	298,75	38	317,86	38	337,19	38	356,74
39	280,15	39	299,06	39	318,18	39	337,51	39	357,07
40	280,47	40	299,38	40	318,50	40	337,83	40	357,40
41	280,78	41	299,70	41	318,82	41	338,16	41	357,72
42	281,09	42	300,02	42	319,14	42	338,48	42	358,05
43	281,40	43	300,33	43	319,46	43	338,80	43	358,38
44	281,72	44	300,65	44	319,78	44	339,13	44	358,71
45	282,03	45	300,97	45	320,10	45	339,45	45	359,04
46	282 35	46	301,28	46	320,42	46	339,78	46	359,37
47	282,66	47	301,60	47	320,74	47	340,10	47	359,69
48	282,97	48	301,92	48	321,06	48	340,43	48	360,02
49	283,29	49	302,23	49	321,39	49	340,75	49	360,35
50	283,60	50	302,55	50	321,71	50	341,08	50	360,68
51	283,92	51	302,87	51	322,03	51	341,40	51	361,01
52	284,23	52	303,19	52	322,35	52	341,73	52	361,34
53	284,55	53	303,51	53	322,67	53	342,05	53	361,67
54	284,86	54	303,82	54	322,99	54	342,38	54	361,99
55	285,17	55	304,14	55	323,31	55	342,70	55	362,32
56	285,49	56	304,46	56	323,63	56	343,03	56	362,65
57	285,80	57	304,78	57	323,96	57	343,35	57	362,98
58	286,12	58	305,09	58	324,28	58	343,68	58	363,31
59	286,43	59	305,41	59	324,60	59	344,00	59	363,64
60	286,75	60	305,73	60	324,92	60	344,33	60	363,97

Da 20° a 21°		Da 21° a 22°		Da 22° a 23°		Da 23° a 24°		Da 24° a 25°	
Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti
0'	363,97	0'	383,86	0'	404,03	0'	424,47	0'	445,23
1	364,30	1	384,20	1	404,36	1	424,82	1	445,58
2	364,63	2	384,53	2	404,70	2	425,16	2	445,93
3	364,96	3	384,87	3	405,04	3	425,50	3	446,27
4	365,29	4	385,20	4	405,38	4	425,85	4	446,62
5	365,62	5	385,53	5	405,72	5	426,19	5	446,97
6	365,95	6	385,87	6	406,06	6	426,53	6	447,32
7	366,28	7	386,20	7	406,40	7	426,88	7	447,67
8	366,61	8	386,54	8	406,74	8	427,22	8	448,02
9	366,94	9	386,87	9	407,08	9	427,56	9	448,37
10	367,27	10	387,20	10	407,42	10	427,91	10	448,72
11	367,60	11	387,54	11	407,75	11	428,25	11	449,07
12	367,93	12	387,87	12	408,09	12	428,59	12	449,42
13	368,26	13	388,21	13	408,43	13	428,94	13	449,77
14	368,59	14	388,54	14	408,77	14	429,29	14	450,12
15	368,92	15	388,88	15	409,11	15	429,63	15	450,47
16	369,25	16	389,21	16	409,45	16	429,98	16	450,82
17	369,58	17	389,55	17	409,79	17	430,32	17	451,17
18	369,91	18	389,88	18	410,13	18	430,67	18	451,52
19	370,24	19	390,22	19	410,47	19	431,01	19	451,87
20	370,57	20	390,55	20	410,81	20	431,36	20	452,22
21	370,90	21	390,89	21	411,15	21	431,70	21	452,57
22	371,23	22	391,22	22	411,49	22	432,05	22	452,92
23	371,57	23	391,56	23	411,83	23	432,39	23	453,27
24	371,90	24	391,89	24	412,17	24	432,74	24	453,62
25	372,23	25	392,23	25	412,51	25	433,08	25	453,97
26	372,56	26	392,57	26	412,85	26	433,43	26	454,32
27	372,89	27	392,90	27	413,19	27	433,77	27	454,67
28	373,22	28	393,24	28	413,53	28	434,12	28	455,02
29	373,55	29	393,57	29	413,87	29	434,47	29	455,38
30	373,89	30	393,91	30	414,21	30	434,81	30	455,73
31	374,22	31	394,25	31	414,55	31	435,16	31	456,08
32	374,55	32	394,58	32	414,89	32	435,50	32	456,43
33	374,88	33	394,92	33	415,24	33	435,85	33	456,78
34	375,21	34	395,25	34	415,58	34	436,20	34	457,13
35	375,54	35	395,59	35	415,92	35	436,54	35	457,48
36	375,87	36	395,93	36	416,26	36	436,89	36	457,83
37	376,21	37	396,26	37	416,60	37	437,24	37	458,19
38	376,54	38	396,60	38	416,94	38	437,58	38	458,54
39	376,87	39	396,94	39	417,28	39	437,93	39	458,89
40	377,20	40	397,27	40	417,63	40	438,28	40	459,24
41	377,54	41	397,61	41	417,97	41	438,62	41	459,60
42	377,87	42	397,95	42	418,31	42	438,97	42	459,95
43	378,20	43	398,29	43	418,65	43	439,32	43	460,30
44	378,53	44	398,62	44	418,99	44	439,66	44	460,65
45	378,87	45	398,96	45	419,33	45	440,01	45	461,01
46	379,20	46	399,29	46	419,68	46	440,36	46	461,36
47	379,53	47	399,63	47	420,02	47	440,70	47	461,71
48	379,86	48	399,97	48	420,36	48	441,05	48	462,06
49	380,20	49	400,31	49	420,70	49	441,40	49	462,42
50	380,53	50	400,65	50	421,05	50	441,75	50	462,77
51	380,86	51	400,98	51	421,39	51	442,10	51	463,12
52	381,20	52	401,32	52	421,73	52	442,44	52	463,48
53	381,53	53	401,66	53	422,07	53	442,79	53	463,83
54	381,86	54	402,00	54	422,42	54	443,14	54	464,18
55	382,20	55	402,34	55	422,76	55	443,49	55	464,54
56	382,53	56	402,67	56	423,10	56	443,83	56	464,89
57	382,86	57	403,01	57	423,45	57	444,18	57	465,25
58	383,20	58	403,35	58	423,79	58	444,53	58	465,60
59	383,53	59	403,69	59	424,13	59	444,88	59	465,95
60	383,86	60	404,03	60	424,47	60	445,23	60	466,31

Da 25° a 26°		Da 26° a 27°		Da 27° a 28°		Da 28° a 29°		Da 29° a 30°	
Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti
0'	466,31	0'	487,73	0'	509,53	0'	531,71	0'	554,31
1	466,66	1	488,09	1	509,89	1	532,08	1	554,69
2	467,02	2	488,45	2	510,26	2	532,46	2	555,07
3	467,37	3	488,81	3	510,63	3	532,83	3	555,45
4	467,72	4	489,17	4	510,99	4	533,20	4	555,83
5	468,08	5	489,53	5	511,36	5	533,58	5	556,21
6	468,43	6	489,89	6	511,73	6	533,95	6	556,59
7	468,79	7	490,25	7	512,09	7	534,32	7	556,97
8	469,14	8	490,62	8	512,46	8	534,70	8	557,36
9	469,50	9	490,98	9	512,83	9	535,07	9	557,74
10	469,85	10	491,34	10	513,19	10	535,45	10	558,12
11	470,21	11	491,70	11	513,56	11	535,82	11	558,50
12	470,56	12	492,06	12	513,93	12	536,20	12	558,88
13	470,92	13	492,42	13	514,30	13	536,57	13	559,26
14	471,27	14	492,78	14	514,67	14	536,94	14	559,65
15	471,63	15	493,15	15	515,03	15	537,32	15	560,03
16	471,99	16	493,51	16	515,40	16	537,69	16	560,41
17	472,34	17	493,87	17	515,77	17	538,07	17	560,79
18	472,70	18	494,23	18	516,14	18	538,45	18	561,17
19	473,05	19	494,59	19	516,51	19	538,82	19	561,56
20	473,41	20	494,95	20	516,88	20	539,20	20	561,94
21	473,77	21	495,32	21	517,24	21	539,57	21	562,32
22	474,12	22	495,68	22	517,61	22	539,95	22	562,70
23	474,48	23	496,04	23	517,98	23	540,32	23	563,09
24	474,83	24	496,40	24	518,35	24	540,70	24	563,47
25	475,19	25	496,77	25	518,72	25	541,07	25	563,85
26	475,55	26	497,13	26	519,09	26	541,45	26	564,24
27	475,90	27	497,49	27	519,46	27	541,83	27	564,62
28	476,26	28	497,86	28	519,83	28	542,20	28	565,00
29	476,62	29	498,22	29	520,20	29	542,58	29	565,39
30	476,98	30	498,58	30	520,57	30	542,96	30	565,77
31	477,33	31	498,94	31	520,94	31	543,33	31	566,16
32	477,69	32	499,31	32	521,31	32	543,71	32	566,54
33	478,05	33	499,67	33	521,68	33	544,09	33	566,93
34	478,40	34	500,03	34	522,05	34	544,46	34	567,31
35	478,76	35	500,40	35	522,42	35	544,84	35	567,69
36	479,12	36	500,76	36	522,79	36	545,22	36	568,08
37	479,48	37	501,13	37	523,16	37	545,60	37	568,46
38	479,83	38	501,49	38	523,53	38	545,97	38	568,85
39	480,19	39	501,85	39	523,90	39	546,35	39	569,23
40	480,55	40	502,22	40	524,27	40	546,73	40	569,62
41	480,91	41	502,58	41	524,64	41	547,11	41	570,00
42	481,27	42	502,95	42	525,01	42	547,48	42	570,39
43	481,63	43	503,31	43	525,38	43	547,86	43	570,77
44	481,98	44	503,68	44	525,75	44	548,24	44	571,16
45	482,34	45	504,04	45	526,12	45	548,62	45	571,55
46	482,70	46	504,41	46	526,50	46	549,00	46	571,93
47	483,06	47	504,77	47	526,87	47	549,38	47	572,32
48	483,42	48	505,14	48	527,24	48	549,75	48	572,71
49	483,78	49	505,50	49	527,61	49	550,13	49	573,09
50	484,14	50	505,87	50	527,98	50	550,51	50	573,48
51	484,50	51	506,23	51	528,36	51	550,89	51	573,86
52	484,86	52	506,60	52	528,73	52	551,27	52	574,25
53	485,21	53	506,96	53	529,10	53	551,65	53	574,64
54	485,57	54	507,33	54	529,47	54	552,03	54	575,03
55	485,93	55	507,69	55	529,85	55	552,41	55	575,41
56	486,29	56	508,06	56	530,22	56	552,79	56	575,80
57	486,65	57	508,43	57	530,59	57	553,17	57	576,19
58	487,01	58	508,79	58	530,96	58	553,55	58	576,57
59	487,37	59	509,16	59	531,34	59	553,93	59	576,96
60	487,73	60	509,53	60	531,71	60	554,31	60	577,35

Da 30° a 31°		Da 31° a 32°		Da 32° a 33°		Da 33° a 34°		Da 34° a 35°	
Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti
0'	577,35	0'	600,86	0'	624,87	0'	649,41	0'	674,51
1	577,74	1	601,26	1	625,27	1	649,82	1	674,93
2	578,13	2	601,66	2	625,68	2	650,23	2	675,36
3	578,51	3	602,05	3	626,08	3	650,65	3	675,78
4	578,90	4	602,45	4	626,49	4	651,06	4	676,20
5	579,29	5	602,84	5	626,89	5	651,48	5	676,63
6	579,68	6	603,24	6	627,30	6	651,89	6	677,05
7	580,07	7	603,64	7	627,70	7	652,31	7	677,47
8	580,46	8	604,03	8	628,11	8	652,72	8	677,90
9	580,85	9	604,43	9	628,52	9	653,14	9	678,32
10	581,23	10	604,83	10	628,92	10	653,55	10	678,75
11	581,62	11	605,22	11	629,33	11	653,97	11	679,17
12	582,01	12	605,62	12	629,73	12	654,38	12	679,60
13	582,40	13	606,02	13	630,14	13	654,80	13	680,02
14	582,79	14	606,42	14	630,55	14	655,21	14	680,45
15	583,18	15	606,82	15	630,95	15	655,63	15	680,87
16	583,57	16	607,21	16	631,36	16	656,04	16	681,30
17	583,96	17	607,61	17	631,77	17	656,46	17	681,73
18	584,35	18	608,01	18	632,17	18	656,88	18	682,15
19	584,74	19	608,41	19	632,58	19	657,29	19	682,58
20	585,13	20	608,81	20	632,99	20	657,71	20	683,00
21	585,52	21	609,21	21	633,40	21	658,13	21	683,43
22	585,91	22	609,60	22	633,80	22	658,54	22	683,86
23	586,31	23	610,00	23	634,21	23	658,96	23	684,29
24	586,70	24	610,40	24	634,62	24	659,38	24	684,71
25	587,09	25	610,80	25	635,03	25	659,79	25	685,14
26	587,48	26	611,20	26	635,44	26	660,21	26	685,57
27	587,87	27	611,60	27	635,84	27	660,63	27	686,00
28	588,26	28	612,00	28	636,25	28	661,05	28	686,42
29	588,65	29	612,40	29	636,66	29	661,47	29	686,85
30	589,05	30	612,80	30	637,07	30	661,88	30	687,28
31	589,44	31	613,20	31	637,48	31	662,30	31	687,71
32	589,83	32	613,60	32	637,89	32	662,72	32	688,14
33	590,22	33	614,00	33	638,30	33	663,14	33	688,57
34	590,61	34	614,40	34	638,71	34	663,56	34	688,99
35	591,01	35	614,80	35	639,12	35	663,98	35	689,42
36	591,40	36	615,20	36	639,53	36	664,40	36	689,85
37	591,79	37	615,61	37	639,94	37	664,82	37	690,28
38	592,18	38	616,01	38	640,35	38	665,24	38	690,71
39	592,58	39	616,41	39	640,76	39	665,66	39	691,14
40	592,97	40	616,81	40	641,17	40	666,08	40	691,57
41	593,36	41	617,21	41	641,58	41	666,50	41	692,00
42	593,76	42	617,61	42	641,99	42	666,92	42	692,43
43	594,15	43	618,01	43	642,40	43	667,34	43	692,86
44	594,54	44	618,42	44	642,81	44	667,76	44	693,29
45	594,94	45	618,82	45	643,22	45	668,18	45	693,72
46	595,33	46	619,22	46	643,63	46	668,60	46	694,16
47	595,72	47	619,62	47	644,04	47	669,02	47	694,59
48	596,12	48	620,02	48	644,46	48	669,44	48	695,02
49	596,51	49	620,43	49	644,87	49	669,86	49	695,45
50	596,91	50	620,83	50	645,28	50	670,28	50	695,88
51	597,30	51	621,23	51	645,69	51	670,71	51	696,31
52	597,70	52	621,64	52	646,10	52	671,13	52	696,74
53	598,09	53	622,04	53	646,52	53	671,55	53	697,18
54	598,49	54	622,44	54	646,93	54	671,97	54	697,61
55	598,88	55	622,85	55	647,34	55	672,39	55	698,04
56	599,28	56	623,25	56	647,75	56	672,82	56	698,47
57	599,67	57	623,66	57	648,17	57	673,24	57	698,91
58	600,07	58	624,06	58	648,58	58	673,66	58	699,34
59	600,46	59	624,46	59	648,99	59	674,08	59	699,77
60	600,86	60	624,87	60	649,41	60	674,51	60	700,21

Da 35° a 36°		Da 36° a 37°		Da 37° a 38°		Da 38° a 39°		Da 39° a 40°	
Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti
0′	700,21	0′	726,54	0′	753,55	0′	781,29	0′	809,78
1	700,64	1	726,99	1	754,01	1	781,75	1	810,27
2	701,07	2	727,43	2	754,47	2	782,22	2	810,75
3	701,51	3	727,88	3	754,92	3	782,69	3	811,23
4	701,94	4	728,32	4	755,38	4	783,16	4	811,71
5	702,38	5	728,77	5	755,84	5	783,63	5	812,19
6	702,81	6	729,21	6	756,29	6	784,10	6	812,68
7	703,25	7	729,66	7	756,75	7	784,57	7	813,16
8	703,68	8	730,10	8	757,21	8	785,04	8	813,65
9	704,12	9	730,55	9	757,67	9	785,51	9	814,13
10	704,55	10	731,00	10	758,12	10	785,98	10	814,61
11	704,99	11	731,44	11	758,58	11	786,45	11	815,10
12	705,42	12	731,89	12	759,04	12	786,92	12	815,58
13	705,86	13	732,34	13	759,50	13	787,39	13	816,06
14	706,29	14	732,78	14	759,96	14	787,86	14	816,55
15	706 73	15	733,23	15	760,42	15	788,34	15	817,03
16	707,17	16	733,68	16	760,88	16	788,81	16	817,52
17	707,60	17	734,13	17	761,34	17	789,28	17	818,01
18	708,04	18	734,57	18	761,80	18	789,75	18	818,49
19	708,48	19	735,02	19	762,26	19	790,22	19	818,98
20	708,91	20	735,47	20	762,72	20	790,70	20	819,46
21	709,35	21	735,92	21	763,18	21	791,17	21	819,95
22	709,79	22	736,37	22	763,64	22	791,64	22	820,44
23	710,22	23	736,82	23	764,10	23	792,12	23	820,92
24	710,66	24	737,26	24	764,56	24	792,59	24	821,41
25	711,10	25	737,71	25	765,02	25	793,06	25	821,90
26	711,54	26	738,16	26	765,48	26	793,54	26	822,38
27	711,98	27	738,61	27	765,94	27	794,01	27	822,87
28	712,42	28	739,06	28	766,40	28	794,49	28	823,36
29	712,85	29	739,51	29	766,86	29	794,96	29	823,85
30	713,29	30	739,96	30	767,33	30	795,44	30	824,34
31	713,73	31	740,41	31	767,79	31	795,91	31	824,82
32	714,17	32	740,86	32	768,25	32	796,39	32	825,31
33	714,61	33	741,31	33	768,71	33	796,86	33	825,80
34	715,05	34	741,76	34	769,18	34	797,34	34	826,29
35	715,49	35	742,21	35	769,64	35	797,81	35	826,78
36	715,93	36	742,67	36	770,10	36	798,29	36	827,27
37	716,37	37	743,12	37	770,57	37	798,77	37	827,76
38	716,81	38	743,57	38	771,03	38	799,24	38	828,25
39	717,25	39	744,02	39	771,50	39	799,72	39	828,74
40	717,69	40	744,47	40	771,96	40	800,20	40	829,23
41	718,13	41	744,92	41	772,42	41	800,67	41	829,73
42	718,57	42	745,38	42	772,89	42	801,15	42	830,22
43	719,01	43	745,83	43	773,35	43	801,63	43	830,71
44	719,45	44	746,28	44	773,82	44	802,11	44	831,20
45	719,90	45	746,73	45	774,28	45	802,58	45	831,69
46	720,34	46	747,19	46	774,75	46	803,06	46	832,18
47	720,78	47	747,64	47	775,21	47	803,54	47	832,68
48	721,22	48	748,10	48	775,68	48	804,02	48	833,17
49	721,66	49	748,55	49	776,15	49	804,50	49	833,66
50	722,11	50	749,00	50	776,61	50	804,98	50	834,15
51	722,55	51	749,46	51	777,08	51	805,46	51	834,65
52	722,99	52	749,91	52	777,54	52	805,94	52	835,14
53	723,44	53	750,37	53	778,01	53	806,42	53	835,64
54	723,88	54	750,82	54	778,48	54	806,90	54	836,13
55	724,32	55	751,27	55	778,95	55	807,38	55	836,62
56	724,77	56	751,73	56	779,41	56	807,86	56	837,12
57	725,21	57	752,19	57	779,88	57	808,34	57	837,61
58	725,65	58	752,64	58	780,35	58	808,82	58	838,11
59	726,10	59	753,10	59	780,82	59	809,30	59	838,60
60	726,54	60	753,55	60	781,29	60	809,78	60	839,10

Da 40° a 41°		Da 41° a 42°		Da 42° a 43°		Da 43° a 44°		Da 44° a 45°	
Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti	Minuti	Tangenti
0′	839,10	0′	869,29	0′	900,40	0′	932,52	0′	965,69
1	839,60	1	869,80	1	900,93	1	933,06	1	966,25
2	840,09	2	870,31	2	901,46	2	933,60	2	966,81
3	840,59	3	870,82	3	901,99	3	934,15	3	967,38
4	841,08	4	871,33	4	902,51	4	934,69	4	967,94
5	841,58	5	871,84	5	903,04	5	935,24	5	968,50
6	842,08	6	872,35	6	903,57	6	935,78	6	969,07
7	842,58	7	872,87	7	904,10	7	936,33	7	969,63
8	843,07	8	873,38	8	904,63	8	936,87	8	970,20
9	843,57	9	873,89	9	905,15	9	937,42	9	970,76
10	844,07	10	874,40	10	905,68	10	937,97	10	971,32
11	844,57	11	874,92	11	906,21	11	938,52	11	971,89
12	845,07	12	875,43	12	906,74	12	939,06	12	972,46
13	845,56	13	875,95	13	907,27	13	939,61	13	973,02
14	846,06	14	876,46	14	907,81	14	940,16	14	973,59
15	846,56	15	876,98	15	908,34	15	940,70	15	974,15
16	847,06	16	877,49	16	908,87	16	941,25	16	974,72
17	847,56	17	878,01	17	909,40	17	941,80	17	975,29
18	848,06	18	878,52	18	909,93	18	942,35	18	975,86
19	848,56	19	879,04	19	910,46	19	942,90	19	976,43
20	849,06	20	879,55	20	910,99	20	943,45	20	977,00
21	849,56	21	880,07	21	911,53	21	944,00	21	977,56
22	850,06	22	880,59	22	912,06	22	944,55	22	978,13
23	850,56	23	881,10	23	912,59	23	945,10	23	978,70
24	851,07	24	881,62	24	913,12	24	945,65	24	979,27
25	851,57	25	882,14	25	913,66	25	946,20	25	979,84
26	852,07	26	882,65	26	914,19	26	946,76	26	980,41
27	852,57	27	883,17	27	914,73	27	947,31	27	980,98
28	853,07	28	883,69	28	915,26	28	947,86	28	981,55
29	853,58	29	884,21	29	915,80	29	948,41	29	982,12
30	854,08	30	884,73	30	916,33	30	948,96	30	982,70
31	854,58	31	885,24	31	916,87	31	949,52	31	983,27
32	855,09	32	885,76	32	917,40	32	950,07	32	983,84
33	855,59	33	886,28	33	917,94	33	950,62	33	984,41
34	856,10	34	886,80	34	918,47	34	951,18	34	984,99
35	856,60	35	887,32	35	919,01	35	951,73	35	985,56
36	857,10	36	887,84	36	919,55	36	952,29	36	986,13
37	857,61	37	888,36	37	920,08	37	952,84	37	986,71
38	858,11	38	888,88	38	920,62	38	953,40	38	987,28
39	858,62	39	889,40	39	921,16	39	953,95	39	987,86
40	859,12	40	889,92	40	921,70	40	954,51	40	988,43
41	859,63	41	890,45	41	922,23	41	955,06	41	989,01
42	860,13	42	890,97	42	922,77	42	955,62	42	989,58
43	860,64	43	891,49	43	923,31	43	956,18	43	990,16
44	861,15	44	892,01	44	923,85	44	956,73	44	990,73
45	861,66	45	892,53	45	924,39	45	957,29	45	991,31
46	862,16	46	893,06	46	924,93	46	957,85	46	991,89
47	862,67	47	893,58	47	925,47	47	958,41	47	992,47
48	863,18	48	894,10	48	926,01	48	958,97	48	993,04
49	863,68	49	894,63	49	926,55	49	959,52	49	993,62
50	864,19	50	895,15	50	927,09	50	960,08	50	994,20
51	864,70	51	895,68	51	927,63	51	960,64	51	994,78
52	865,21	52	896,20	52	928,17	52	961,20	52	995,36
53	865,72	53	896,72	53	928,71	53	961,76	53	995,94
54	866,23	54	897,25	54	929,26	54	962,32	54	996,52
55	866,74	55	897,77	55	929,80	55	962,88	55	997,10
56	867,25	56	898,30	56	930,34	56	963,44	56	997,68
57	867,76	57	898,83	57	930,88	57	964,00	57	998,26
58	868,27	58	899,35	58	931,43	58	964,57	58	998,84
59	868,78	59	899,88	59	931,97	59	965,13	59	999,42
60	869,29	60	900,40	60	932,52	60	965,69	60	1000,00

35. **Uso delle tavole delle tangenti.** — Per costrurre sulla AB (*fig.* 20) e col vertice in A un dato angolo compreso fra 0° e 45°, per esempio, un angolo di 33° 54′, si porti su AB, a partire da A, una distanza $\overline{AC}$ lunga 1000 parti di una scala qualunque; pel punto C si elevi la perpendicolare indefinita CX, e su essa si porti $\overline{CD}$ eguale a 671,97 parti della scala, essendo un tal numero ciò che trovasi nelle tavole per tangente 33° 54′; si congiunga il punto A col punto D, e l'angolo risultante DAC sarà l'angolo domandato.

Se trattasi di un angolo $s > 45°$ ma $< 90°$, oppure d'un angolo $t > 90°$ e $< 135°$, se ne farà la costruzione, innalzando pel vertice A e sulla AB la perpendicolare AY, portando su questa la lunghezza $\overline{AE} = 1000$, innalzandovi per E la perpendicolare FG, prendendo $\overline{EF}$ ed $\overline{EG}$ rispettivamente eguali alle tangenti degli angoli $90° - s$, e $t - 90°$, e congiungendo gli estremi F e G con A. Gli angoli FAB e GAB così costrutti sono rispettivamente eguali agli angoli proposti s e t.

Alla costruzione di un angolo minore di 45° si riduce pure quella di un angolo qualunque u compreso fra 135° e 180°, o di un angolo v compreso fra 180° e 225°, prolungando AB in AB′, costruendo su essa e colle regole esposte nel primo caso l'angolo $180° - u$ in HAB′, e l'angolo $v - 180°$ in IAB′.

Prolungando la perpendicolare AY in AY′ si potrà costrurre un angolo $x > 225°$ e $< 270°$, oppure un angolo $y > 270°$ ma $< 315°$, costruendo la differenza $270° - x$ in LAK o la differenza $y - 270°$ in MAK.

Finalmente, per costrurre un angolo $z > 315°$ ma $< 360°$, si fa la differenza $360° - z$, e quest'angolo differenza, costrutto in NAC, dà la soluzione del problema.

Qualora dalle tangenti nel raggio 1000 vogliasi passare alle tangenti nel raggio 100 o 10, basta trasportare la virgola di una o due cifre a sinistra. Con facilità si potranno anche ottenere le tangenti nel raggio 500, prendendo la metà dei numeri che si trovano nelle tavole.

Avendosi sulla carta un angolo minore di 45°, si trova approssimativamente il numero dei suoi gradi, chiudendolo con un arco di raggio eguale a 1000 parti di una scala ticonica, e segnandone la sua tangente, che, misurata sulla scala, conduce a trovare nelle tavole il valore dell'angolo ad essa corrispondente.

Se l'angolo è maggiore di 45°, sarà facile ridurre la sua misura a quella di un angolo minore.

Osservazione. Un procedimento analogo a quello che serve per dedurre dalle tavole logaritmiche quelle delle tangenti naturali, è pure giovevole alla costruzione delle tavole dei seni naturali. L'uso dei seni però nella costruzione e nella misura degli angoli è generalmente più lungo dell'uso delle tangenti e quindi credo inutile di farne parola.

56. **Scale delle tangenti**. — Come si è potuto costrurre una scala di corde, così potrebbesi costrurre una scala di tangenti, che offrisse il mezzo d'avere su una retta le tangenti di 1°, 2°, 3°, ecc. fino a 45°, convenientemente marcate. L'uso di una tale scala è come quello delle tavole, ed il raggio del circolo, cui si suppongono riferite le tangenti, si ha nella lunghezza della tangente di 45°.

PARTE SECONDA

OPERAZIONI TOPOGRAFICHE ELEMENTARI.

CAPITOLO I.

Planimetria.

ARTICOLO I.

Nozioni generali.

37. **Oggetto della Planimetria.** — La proiezione su un piano orizzontale di una determinata porzione di superficie terrestre (num. 3), e la costruzione di una figura ad essa simile, da cui risultino la sua forma, la sua superficie e le divisioni tutte, costituisce l'oggetto della Planimetria.

I lavori che conducono a questo risultato consistono nel prendere, con appositi strumenti, quei dati lineari ed angolari che sono necessarii per costrurre una figura simile ad un'altra; e lo scopo sarà raggiunto quando, per le distanze non solo, ma anche per gli angoli, si ottengano le proiezioni su un piano orizzontale.

38. **Allineamento; distanza di due punti; angolo di due visuali.** — Una direzione determinata sul terreno con segnali, o meglio il piano verticale passante per due punti del terreno, chiamasi *allineamento*.

Per distanza fra due punti A e B (*fig.* 21), comunque collocati, si deve intendere la loro distanza orizzontale $\overline{AC}$, cioè la proiezione di $\overline{AB}$ su un piano orizzontale, o in altri termini la perpendicolare comune alle due verticali AU e BV, passanti una per A e l'altra per B e sensibilmente parallele, attesa la piccola loro distanza.

Per angolo di due visuali CA e CB (*fig.* 22) si deve intendere l'angolo dei due piani verticali AD e BD per esse passanti, o l'angolo che due rette orizzontali OH e OG, condotte rispettivamente nei due piani verticali da un medesimo punto O, fanno fra di loro.

39. **Indole degli strumenti planimetrici.** — Dalle cose dette è facile l'arguire l'indole degli strumenti planimetrici. Saranno necessarii strumenti per assicurare la verticalità e la orizzontalità di linee e di piani; strumenti per individuare punti, e tracciare direzioni sul terreno; strumenti per misurare distanze; e finalmente strumenti per misurare angoli.

40. **Rilevamento.** — L'operazione mediante la quale si determinano le posizioni reciproche dei punti e delle linee principali della pianta naturale di una data porzione di terreno, onde riprodurla sulla carta con una figura ad essa simile, dicesi *rilevamento.*

La scelta delle linee ed il numero dei punti da rilevarsi dipendono dallo scopo per cui si fa il rilevamento; e, considerando, per esempio, una tale operazione come diretta a conseguire il piano topografico di una data porzione di terreno, si dovranno accertare colla massima cura:

1° Le strade carreggiabili, le mulattiere grandi e piccole, ed i sentieri;

2° I laghi, gli stagni, i fiumi, le riviere, i torrenti, i ruscelli, i canali, ecc.;

3° Il contorno delle città e dei villaggi, non che le loro vie interne;

4° Le abitazioni isolate, le costruzioni tutte di qualche importanza, come molini, ponti, fucine, ecc.;

5° I limiti di stato, di provincia, le linee territoriali dei comuni, e i perimetri delle diverse colture;

6° Le accidentalità importanti del terreno, come scoscendimenti, burroni, masse di rocce, frane, ecc.

In molte operazioni di rilevamento, che si presentano nell'esercizio privato della carriera dell'ingegnere e del misuratore, è necessario determinare ogni singolo *appezzamento*, distinguendo la qualità dei terreni e la destinazione dei fabbricati. Si ottiene questo coll'aggiungere all'accertamento dei confini che contornano i diversi poderi, e che sono individuati da termini, alberi, siepi, canali, strade divisorie, muri, creste di montagne, rivi, torrenti e simili, quello delle linee che spezzano questi poderi in parti di differente coltura ed inservienti ad usi diversi.

41. **Influenza dell'estensione del terreno e del numero dei suoi appezzamenti sui metodi di rilevamento.** — Le difficoltà di rilevare un terreno crescono col crescere della sua estensione e del numero degli appezzamenti da essa abbracciati. Il propagarsi degli errori inseparabili dalla misura, insensibile nelle piccole porzioni di terreno, diventa invece sensibilissimo nei terreni molto estesi e grandemente spezzati. Segue da ciò che i metodi, i quali possono somministrare buoni risultati in terreni ristretti e anche scomposti in piccole parti, non sono più convenienti pel caso di una porzione di superficie terrestre piuttosto ampia e minutamente suddivisa. Così i metodi, che possono convenire al rilevamento di un podere, non sono valevoli per rilevare un intiero comune. In quest'ultimo caso si fa già sentire il bisogno di operazioni preparatorie, ottenute con mezzi di precisione, atti a fissare parecchi punti che, come capi-saldi, devono poscia servire alla connessione dell'ulteriore rilevamento delle minute parti. Volendosi rilevare l'assieme di più comuni, sarà necessaria una maggiore precisione nel determinare gli accennati punti di collegamento: i migliori strumenti verranno impiegati nell'operare e si adotteranno quei metodi che dalla scienza e dall'esperienza sono raccomandati siccome i migliori.

42. **Poligonazione.** — I terreni a rilevarsi o sono accessibili in qualunque direzione, o sono accessibili al solo perimetro, o sono affatto inaccessibili, o finalmente abbracciano due o tutte e tre queste varietà. Un'attenta ricognizione, atta a mettere in evidenza la vera forma del terreno, non che il tracciamento di varii allineamenti giudiziosamente scelti, in modo che si accostino, il più che si può, alle linee naturali da rilevarsi, e costituenti un sistema ben condizionato di allineamenti che chiameremo *poligonazione*, possono con economia di tempo condurre ai migliori risultati. I principali sistemi di poligonazione sono: la poligonazione *triangolare*, l'*ortogonale*, quella per *irradiamento*, quella per *camminamento* e quella per *intersezione*.

La poligonazione triangolare si eseguisce guidando degli allineamenti in vicinanza delle linee da rilevarsi, in modo da coprire il terreno con una serie di triangoli, intersecati all'uopo da allineamenti trasversali, così disposti che due a due abbiano un lato comune, e facili a costruirsi nelle rispettive loro posizioni, unitamente alle trasversali, quando si conoscano tutti i lati, non che i loro incontri colle trasversali medesime.

La poligonazione ortogonale consiste nel tracciarsi un allineamento, detto *base* o *fondamentale*, attraversante il terreno in luoghi accessibili, e passante, per quanto si può, nel senso della sua maggior lunghezza; nell'innalzare da questo diverse perpendicolari, e nel prendere su esse dei punti in modo che, uniti fra loro, determinino varii allineamenti passanti in prossimità delle linee naturali da rilevarsi. Una simile poligonazione si può colla massima facilità portare in carta, quando si conoscano le distanze dei piedi delle perpendicolari da un estremo della base, non che quelle dei punti presi sulle perpendicolari dai piedi rispettivi; perchè, prendendo come origine di coordinate quell'estremo della base, a partire dal quale si sono contate le distanze dei piedi delle perpendicolari, si hanno per ciascun vertice della poligonazione l'ascissa e l'ordinata.

La poligonazione per irradiamento consiste nel tracciare diversi allineamenti confondentisi o passanti in prossimità dei confini da rilevarsi; nello scegliere un punto nell'interno o sul perimetro o fuori del poligono così determinato; e nel misurare intorno a questo punto gli angoli formati dalle visuali dirette ai vertici del poligono e le distanze di questi vertici da quel punto istesso. Egli è evidente che con tal modo si hanno tanti triangoli, aventi due a due un lato comune, di cui si conoscono due lati e l'angolo compreso, e quindi costruibili colla massima facilità.

Tracciata sul terreno una poligonazione in prossimità dei confini naturali, la si rileva col metodo di camminamento misurando tutti i suoi lati e tutti i suoi angoli al perimetro. Colle misure prese, riuscirà agevole di collocare i diversi lati del perimetro colle inclinazioni che loro convengono; facendo una tale costruzione, facilmente si giugnerà a conoscere come possono riuscire superflui per la costruzione della poligonazione o due lati e un angolo, o un lato e due angoli, o tre angoli.

La poligonazione per intersezione si ottiene col scegliersi un allineamento, detto *base*, nel misurarlo, nel portarsi ai suoi due estremi, e nel determinare gli angoli che con esso fanno le visuali condotte ai vertici della poligonazione da rilevarsi. Con tal procedimento si giugne ad avere una serie di triangoli, facili a costruirsi, conoscendosi per ciascuno d'essi un lato ed i due angoli adiacenti.

Le poligonazioni triangolare, ortogonale e per irradiamento si possono con successo impiegare sui terreni accessibili; la poligonazione per camminamento è specialmente applicabile ai terreni accessibili al perimetro; quella per intersezione, alle parti inaccessibili, quantunque la speditezza della sua esecuzione la renda vantaggiosa, in molti casi, anche sui terreni accessibili.

Generalmente le circostanze locali rendono conveniente la contemporanea applicazione degli ultimi tre metodi. Infatti avviene non di rado di dover combinare il metodo d'intersezione con quello di camminamento, percorrendo una linea poligonale, della quale si misurano i lati e gli angoli, nel mentre da' suoi estremi si dirigono delle visuali ad altri punti, collimando a ciascuno almeno da due stazioni, e misurando così gli angoli che queste visuali fanno coi lati della linea poligonale che si percorre.

43. **Rilevamento dei dettagli**. — Si effettua il rilevamento dei dettagli percorrendo i lati della poligonazione, chiamati allora *linee* o *allineamenti*, o meglio *basi d'operazione*. Questo lavoro, che ha per oggetto di collegare i punti da rilevarsi agli allineamenti che si percorrono, è piuttosto complicato, e richiede molto ordine per schivare ogni confusione.

Prolungando alcune linee di confine finchè incontrino gli allineamenti percorsi e prendendo, tanto sulle basi d'operazione, che sui prolungamenti, tutte quelle misure dirette che servono a fissare le rispettive posizioni dei vertici, si ha un buon metodo di rilevare i dettagli, in tutto conveniente all'uso degli strumenti che servono a misurare distanze. Il solo esame di qualche caso particolare, e principalmente l'esercizio pratico può rendere famigliare questo metodo tanto vantaggioso, che, oltre la speditezza, offre ancora tanti mezzi di verifica, che un esperto operatore deve sempre curare, perchè da questi soltanto può acquistare la certezza d'avere esattamente operato.

Se poi, nel percorrere e nel misurare i lati di una poligonazione, si abbassano delle perpendicolari dai varii vertici, tenendo conto delle distanze che i loro piedi hanno da un estremo del lato che si percorre, non che delle loro lunghezze, si fa uso del *metodo delle perpendicolari*, che è pur facile e adottato generalmente in pratica.

Quando, percorrendo gli allineamenti d'una poligonazione comunque rilevata, si collegano ad essi i punti di dettaglio, applicando o l'uno o l'altro o promiscuamente i due metodi testè indicati, si rileva col *metodo degli allineamenti*.

Un punto, molto distante dagli allineamenti d'operazione, si può rilevare, o per irradiamento, misurando la sua distanza da un vertice della poligonazione, non che l'angolo che fa il raggio con una linea contigua d'operazione: o per intersezione, trovando gli angoli, che due allineamenti, diretti ad esso da due vertici della poligonazione, fanno con un solo o con due diversi allineamenti della medesima.

44. **Abbozzi**. — Il sapersi registrare chiaramente, in appositi abbozzi, i risultati delle misure eseguite sul terreno, va riputata cosa di gran momento nelle operazioni topografiche. È mediante un buon abbozzo che un operatore può con esattezza e celerità costruirsi il piano di una porzione di terreno; è da un cattivo abbozzo che ben di frequente derivano lavori non accettabili e totalmente erronei.

All'atto della ricognizione accennata al numero 42, convien fare un primo abbozzo, in cui siano indicati i perimetri delle diverse parti da rilevarsi, distinguendo la natura dei confini ed indicandoli con appositi segni convenzionali. Questo primo abbozzo delle *indicazioni locali* serve a tener presente alla mente dell'operatore la forma del terreno, e a guidarlo nel tracciare la poligonazione nel modo più conveniente. In esso si possono far risultare i nomi dei possessori, le coerenze, o tutte quelle altre osservazioni necessarie allo scopo per cui s'intraprende l'operazione di rilevamento.

All'atto della misura si registreranno in un secondo abbozzo l'andamento delle basi d'operazione, le misure prese lungo le medesime, i modi del loro collegamento, la figura dimostrativa d'ogni singolo appezzamento e di tutti gli oggetti che si devono rilevare, non che le quote numeriche necessarie per riprodurre in disegno l'esatta rappresentazione della superficie rilevata. Quest'abbozzo vien detto dei *rilievi locali*. Qualora la natura del lavoro lo richieda, s'inscriveranno in esso le diverse colture, le destinazioni dei fabbricati, le condizioni intrinseche ed estrinseche di ciascun appezzamento, come l'indole del terreno, la giacitura, l'esposizione, se umido, asciutto, ghiaioso, piano, ripido e simili altre circostanze; non tralasciando l'intestazione di ciascun appezzamento al rispettivo possessore, qualora il terreno che si rileva sia costituito da diverse proprietà. Se le predette indicazioni non si possono marcare nella figura dell'appezzamento cui si riferiscono, si registrano altrove usando di appositi rinvii o indici.

È generalmente nociva alla chiarezza l'abitudine di far prima l'abbozzo e di registrarvi le quote numeriche di mano in mano che si procede nell'operazione; perchè, così facendo, accade sempre di dover registrare in uno spazio assai limitato molti numeri, la qual cosa produce inevitabilmente una dannosissima confusione. Invece, se l'esecuzione dell'abbozzo si fa procedere di pari passo col lavoro che si effettua sul terreno, si ha sempre la facoltà di esagerare gli spazii in quei siti ove vanno registrati molti numeri, e di collocarli colla dovuta chiarezza. A scanso d'equivoci, si raccomanda di scrivere i numeri sempre nel senso che indica come procedesi misurando sul terreno, e di distinguere gli incontri che si fanno in senso obliquo da quelli che si fanno in senso perpendicolare.

Se la porzione di terreno a rilevarsi è molto estesa, un solo abbozzo non è sufficiente, e deve essere cura dell'operatore d'indicare in modo chiaro o con richiami ben distinti in qual modo un abbozzo si collega coll'altro. Una figura della poligonazione o *rete poligonale*, stabilita pel collegamento delle diverse parti del terreno e pel facile rilievo dei dettagli, oltre di servire di guida per procedere con ordine nella misura, offre altresì un mezzo chiaro per la connessione di più abbozzi relativi a differenti frazioni del medesimo terreno, qualora si notino con apposito numero d'ordine le estremità di ciascun allineamento.

45. **Verificazioni e tolleranze**. — Misurando due volte la distanza fra due punti, o l'angolo di due allineamenti, ben di rado avviene che i due risultati s'accordino perfettamente fra di loro, ed il voler pretendere che questo succeda, sarebbe un richiedere troppo dai mezzi di cui possiamo disporre. Le differenze sulle quali si può transigere diconsi *tolleranze*, e se è indispensabile il doverle ammettere, è pur necessario lo stabilire un limite, oltre il quale si debbano ritenere nocive al buon andamento dell'operazione, e per conseguenza inammissibili.

Misurando due volte un medesimo allineamento o un medesimo angolo, misurando una distanza di cui gli estremi sono già fissi di posizione, determinando in un secondo modo lunghezze ed angoli già altrimenti determinati, misurando tutti gli angoli fatti intorno ad un punto da più allineamenti in esso concorrenti, misurando i tre angoli di un triangolo o tutti gli angoli interni di un poligono, si hanno i mezzi di verificazione per riconoscere se le misure di distanze e di angoli s'accordano fra di loro, o se ne differiscono di quantità eccedenti le tolleranze ammissibili.

Nelle operazioni ordinarie, in cui non si usano strumenti di precisione, sembra potersi ammettere per le distanze la tolleranza di $\frac{1}{200}$. La tolleranza compatibile negli angoli varia dipendentemente dalla costruzione dello strumento, ed impiegando un buon goniometro, eccezion fatta dal teodolite, non sembra sconveniente l'ammettere, nella somma degli angoli intorno ad un punto e nella somma degli angoli di un poligono, una tolleranza compresa da 2 a 4 minuti primi sessagesimali. Il professore Porro, in grazia dei nuovi perfezionamenti apportati agli strumenti ed ai metodi di rilevamenti che egli propone, asserisce di poter restringere ad $\frac{1}{1000}$ le tolleranze ammissibili nelle operazioni di celerimensura.

ARTICOLO II.

Strumenti per assicurare la verticalità e la orizzontalità di linee e di piani.

Piombino e livello a pendolo.

46. Piombino. — Consiste il *piombino* in un filo flessibile, portante ad un suo estremo un corpo pesante (*fig.* 23). È bene che un tal corpo termini in punta e che abbia il massimo peso sotto il minimo volume, acciocchè l'aria agitata non possa far deviare il filo dalla posizione verticale. Questa deviazione si può ridurre minima immergendo il piombino in un vaso contenente un liquido stagnante e di peso specifico minore di quello del piombino medesimo.

47. Uso del piombino. — Il piombino serve a determinare la direzione della verticale passante per un dato punto. Si ha questa direzione nel filo stesso sospeso al punto pel suo capo libero, e teso dal corpo pesante che è raccomandato all'altro estremo.

Per verificare col piombino se una linea è verticale, per esempio, lo spigolo di un muro, si vada ad una distanza di 12 a 15 metri dallo spigolo stesso, e traguardando lo spigolo pel filo del piombino, si osservi se quello è tutto coperto da questo. Dopo si vada in un altro sito ancora distante da 12 a 15 metri dallo spigolo e si ripeta la medesima osservazione. Se nelle due distinte posizioni lo spigolo resta coperto dal piombino, convien dire che è verticale, siccome collocato nell'intersezione di due piani verticali.

Il piombino si presta ancora per piantare un bastone verticalmente nel terreno: si vada a 6 o 8 metri di distanza dal bastone conficcato nel suolo e con un piombino pendente da una mano traguardisi il bastone. Se questo trovasi nella verticale, si lascia come è, se no, ve lo si conduce. Trovato, o reso il bastone verticale in una prima posizione, si vada in un'altra tale, che la visuale diretta da essa al bastone faccia a un dipresso angolo retto con quella già direttavi dalla prima stazione, e qui pure si riconduca il bastone nella verticale, se non lo è, muovendolo però soltanto nel piano verticale perpendicolare alla visuale che, traguardando pel piombino, va al bastone. Una verifica fatta da una terza stazione renderà certi della esatta verticalità del bastone.

48. **Livello a pendolo.** — Due regoli AC e BC (*fig.* 24) uniti ad angolo ed incastrati con un terzo DE, su cui è segnata una piccola tacca F, detta *linea di fede*, in modo che la retta CF risulti sempre perpendicolare al piano in cui trovansi i due piedi A e B, ed un piombino pendente dal vertice C dell'angolo dei due regoli, costituiscono il più comune di tutti i livelli a pendolo.

Una squadra ABC (*fig.* 25) con un piombino pendente da un vertice lungo un cateto costituisce un altro livello a pendolo; ed un terzo se ne avrebbe in un solido regolo AB (*fig.* 26), terminato da due appoggi AC e BD, nel mezzo del quale elevasi ad angolo retto un secondo regolo portante una linea di fede ed un filo a piombo.

49. **Uso del livello a pendolo.** — Per verificare, mediante un livello a pendolo, se una linea retta è orizzontale, si collocano i suoi piedi su questa linea e si osserva se il filo del piombino coincide colla linea di fede.

Per riconoscere se un piano è orizzontale, si colloca lo strumento in due diverse posizioni, non parallele; e se in tutte e due trovasi coincidere il filo del piombino colla linea di fede, il piano è orizzontale.

Mediante questo strumento si segna una linea orizzontale passante per un punto dato, collocando un suo piede in questo punto, l'altro nella direzione della linea a tracciarsi, ed innalzando o abbassando questo finchè il filo del piombino coincida colla linea di fede. Quando ciò avviene, la retta che unisce i due piedi dello strumento è orizzontale.

Se poi col livello a pendolo ci procuriamo due rette orizzontali passanti pel punto dato, noi avremo compiutamente determinato il piano orizzontale che le contiene.

50. **Verificazione del livello a pendolo.** — Per verificare l'esattezza di un tale strumento, lo si colloca su di un regolo che si innalza od abbassa, finchè abbia luogo la coincidenza del filo a piombo colla linea di fede. Lasciato quindi immobile il regolo sottostante al livello, si rivolge questo in guisa che uno de' suoi piedi prenda il posto dell'altro; se avrà ancora luogo la coincidenza del filo del piombino coll'indice o linea di fede, sarà una prova che lo strumento è ben fatto: il contrario si dirà quando l'accennata coincidenza non succede. Infatti, col livello a pendolo

esatto si acquista la certezza dell'orizzontalità di una linea retta, dopo di aver visto che il filo del piombino coincide colla tacca del regolo trasversale; quindi consegue che un tale strumento si dovrà tenere come esatto quando, avendo luogo la suddetta coincidenza, la linea d'appoggio sia orizzontale. Ora, pel fatto che una retta orizzontale non cessa di esserlo quando si capovolga lo strumento, si può asserire che essa non sarà orizzontale quando la coincidenza del filo colla linea di fede che avea luogo prima, non abbia luogo anche dopo l'inversione, e che quindi il livello a pendolo è mal fatto, perchè prima dell'inversione ci ha indotti a credere orizzontale una retta che effettivamente non lo era.

51. **Determinazione della linea di fede.** — Allorquando si ha un livello a pendolo come quello della figura 24 e col regolo trasversale DE parallelo al piano dei due piedi, si può sperimentalmente trovare la linea di fede col seguente processo: collocato lo strumento co' suoi piedi su una retta inclinata all'orizzonte, si segni il sito in cui il filo a piombo taglia il regolo trasversale, e si inverta dopo in modo che i due piedi vengano ad occupare l'uno il posto dell'altro, determinando il sito in cui il filo a piombo interseca nuovamente il regolo trasversale; dividasi per metà la distanza fra le due posizioni prese dal livello con una tacca, e si avrà in essa la linea di fede. — Infatti, sia CG la perpendicolare abbassata da C (*fig.* 27) su AB, H l'intersezione del filo a piombo CP col regolo trasversale DE prima dell'inversione. Dopo questa la perpendicolare CG ed il filo a piombo CP prenderanno le rispettive posizioni parallele C′G′, C′P′; il punto H cadrà in *h*, ed il punto d'intersezione del filo a piombo col regolo trasversale, venuto in D′E′, sarà H′. I due angoli G′C′*p* e G′C′P′, eguali al terzo GCP, saranno eguali fra loro, e quindi il triangolo H′C′*h* sarà isoscele sulla base H′*h*; d'onde consegue che l'intersezione della perpendicolare abbassata da C′ su AB col regolo trasversale dovrà essere a metà distanza fra H′ ed *h*.

Per avere i due triangoli C′G′P′ e IG′*g* i lati rispettivamente perpendicolari, sarà l'angolo P′C′G′ = BIO; ossia, dopo l'inversione, il filo del piombino si sarà allontanato, dalla direzione che marcava prima, d'un angolo doppio di quello formato dalla linea AB dei due piedi coll'orizzontale OI.

Livello a bolla d'aria.

52. **Descrizione del livello a bolla d'aria**. — Consiste il livello a bolla d'aria in un tubo di vetro ripieno d'alcool, ad eccezione di un piccolo spazio, che è occupato da una bolla d'aria. Questo tubo è collocato in una custodia metallica, aperta nella parte superiore in modo da lasciar vedere i movimenti della bolla e raccomandata inferiormente ad un regolo che, colla sua faccia inferiore, forma la base del livello (*fig.* 28).

Giova osservare che il tubo non ha forma cilindrica, ma che è incurvato nel senso longitudinale, e ciò si fa: 1° perchè se fosse cilindrico, appoggiando lo strumento su una linea orizzontale, la bolla si estenderebbe dal principio alla fine del tubo; 2° perchè, per quanto piccola fosse l'inclinazione del piano della riga coll'orizzonte, la bolla salirebbe sempre alla cima del tubo, e quindi male si potrebbe conoscere con siffatto strumento quando una linea sia prossima all'orizzontalità perfetta.

La superficie interna del tubo è quella di un cilindro vuoto il cui asse siasi piegato ad arco di circolo o, in altri termini, è quella di un toro circolare. L'arco ABC (*fig.* 29), descritto dal centro del circolo generatore della superficie interna, si chiamerà *arco direttore*. Le grandi difficoltà che si presentavano per avere internamente una superficie regolare fecero sì, che anche un secolo dopo la sua invenzione fosse poco in uso un tale strumento; e l'ingegnere francese Chezy fu il primo a trovare il mezzo di lavorare l'interno del tubo e di fare sparire le minime irregolarità. Coi procedimenti da esso impiegati si ottiene nei tubi una curvatura di qualsiasi raggio e così perfetta da far risultare eguali, tanto da una parte quanto dall'altra del suo mezzo, i prolungamenti e gli accorciamenti che prova la bolla pei cangiamenti di temperatura.

In un livello a bolla d'aria tutte le rette condotte nella base, parallelamente al piano verticale passante pel suo arco direttore, devono essere orizzontali, quando la bolla occupa un determinato sito. Questo sito viene generalmente indicato con due *indici fiduciali*, o con una graduazione incisa sul tubo che serve anche ad apprezzare i minimi spostamenti della bolla medesima; e nei livelli ben costrutti trovasi sempre un apposito congegno il quale, prestandosi a spostare il tubo rispetto alla sua base, serve a rendere soddisfatta la condizione accennata.

53. **Sensibilità d'un livello a bolla d'aria.** — La facilità con cui la bolla d'aria abbandona il posto che occupa per portarsi nella parte più elevata del tubo, quando si dà al medesimo una lieve inclinazione, dicesi *sensibilità*. La sensibilità di un livello è tanto più grande quanto più piccola è la curvatura interna del tubo, e si può essa misurare dallo spostamento che prova la bolla per una certa inclinazione del tubo medesimo.

Se supponiamo che sia ABCD (*fig.* 30) la sezione longitudinale fatta nel tubo di un livello, che il suo raggio $\overline{BO}$ sia eguale ad R, e che B sia il punto più elevato dell'arco ABC; inclinando il raggio verticale $\overline{BO}$ di un angolo $BOB'=1''$, il punto B passerà in B' ed il punto B'' in B, per modo che il centro della bolla, dovendo essere nel punto B'' portatosi in B, avrà subito, relativamente al punto B, uno spostamento $BB''=S$, e fra questo spostamento per $1''$ ed il raggio di curvatura del tubo si avrà la proporzione

$$648000'' : 1'' :: \pi R : S,$$

dalla quale si ricava, mettendo per π il suo valore,

$$S = 0{,}000004848 \, . \, R \qquad (1),$$

$$R = 206265 \, . \, S \qquad (2).$$

Mediante la prima di queste due formole si può calcolare lo spostamento della bolla per l'inclinazione di $1''$ data al livello, conoscendosi il raggio interno di curvatura; mediante la seconda si può trovare il raggio dell'arco interno, conoscendosi lo spostamento che si vuol far subire alla bolla. Si fanno anche dei tubi in cui la bolla si sposta fino da 2 a 3 millimetri per ogni $1''$ d'inclinazione nel suo tubo, il che corrisponde ad un raggio di 413 a 619 metri, come facilmente si può verificare colla formola (2). La pratica però insegna che nelle operazioni ordinarie una sì grande sensibilità è nociva anzichè utile. I livelli il cui raggio di curvatura sorpassa i 60 metri sono solo da impiegarsi nelle operazioni geodetiche ed astronomiche; per gli usi ordinarii della topografia sono sufficienti quelli il cui raggio è compreso fra 10 e 60 metri.

54. **Uso del livello a bolla d'aria.** — Ci assicuriamo col livello a bolla d'aria dell'orizzontalità di una linea, osservando se, ponendo questo su quella, la bolla trovasi compresa fra gli indici

fiduciali o, in altri termini, se la bolla d'aria si mantiene centrata; ci assicuriamo dell'orizzontalità d'un piano, se troviamo in esso due linee orizzontali non parallele.

Come si ottenga mercè lo strumento in quistione una linea orizzontale, è così facile immaginarselo, dopo quanto venne accennato parlando della stessa cosa col livello a pendolo, che mi dispenso dal dirlo.

Allorquando sul tubo di un livello è segnata una graduazione si può giungere a rendere orizzontale una linea d'appoggio col seguente processo. Si collochi il livello sulla linea da rendersi orizzontale e si noti la divisione alla quale si ferma un estremo della bolla; si faccia poscia sull'istessa linea l'inversione, e si noti la nuova posizione in cui si porta lo stesso estremo della bolla; si prenda la semisomma dei numeri indicanti le due posizioni successivamente prese dalla bolla; si faccia coincidere lo stesso estremo colla divisione che ha per suo indice questa semisomma, e sarà così resa orizzontale la linea d'appoggio. — Infatti, supponendo che sia FG (*fig.* 31) la retta da rendersi orizzontale, ABDC la posizione del livello, M il punto ove cade il centro della bolla, O il centro di curvatura della sezione longitudinale, $\overline{MO}$ il raggio verticale passante per M, ed $\overline{MP}$ la perpendicolare abbassata da M su FG, si avrà l'angolo $OMP = HFG$; capovolgendo il livello, esso prenderà la posizione ABC'D', ed il punto M verrà in M_1; essendo $D'M_1 = DM$, il raggio $\overline{MO}$ si porterà in $\overline{M_1O'}$, e la perpendicolare $\overline{MP}$ in $\overline{M_1P_1}$, per modo che sarà l'angolo $O'M_1P_1 = OMP = HFG$. La bolla poi porterassi col suo centro nel punto più elevato M', e conducendo la perpendicolare $\overline{M'P'}$ sulla FG, non che il raggio verticale $\overline{M'O'}$, nascerà l'angolo $O'M'P' = OMP = HFG$, e siccome conducendo da O' la perpendicolare O'E su FG, essa è parallela ad M'P' e ad M_1P_1, si avranno le seguenti eguaglianze di angoli

$$EO'M' = O'M'P' = HFG, \qquad EO'M_1 = O'M_1P_1 = HFG;$$

donde si deduce, sommando,

$$M'O'M_1 = 2HFG,$$

ossia che, per l'inversione, la bolla si è allontanata dalla posizione primitiva di una quantità angolare doppia dell'angolo formato dalla linea d'appoggio coll'orizzontale: cosicchè, per ridurre la linea d'appoggio orizzontale, basterà portare la bolla a metà intervallo fra le divisioni segnate la prima e la seconda volta.

Questa dimostrazione suppone essersi fatte le due letture prendendo come indice il centro della bolla. Quando l'indice è un suo estremo, la dimostrazione sussiste ancora, perchè portando un estremo a metà intervallo fra le divisioni indicate la prima e la seconda volta, anche il centro si porta da sè nel mezzo dell'arco compreso fra le due posizioni da esso prese.

55. **Verificazioni e correzioni del livello a bolla d'aria**. — Un livello a bolla d'aria si dice corretto o rettificato quando, collocandolo comunque su un piano orizzontale, la bolla d'aria trovasi fra gli indici fiduciali.

Il processo comunemente seguito per rettificare il livello a bolla d'aria consiste nel collocarlo su un piano, nell'abbassare questo dalla parte verso cui si è portata la bolla e nell'innalzare dalla parte contraria finchè la bolla venga fra gli indici fiduciali. Se, tracciando la linea determinata dal filo della base ed invertendo lo strumento, la bolla si mantiene ancora fra gli anzidetti indici, si dirà che il livello è rettificato. Che se, dopo l'inversione, la bolla d'aria non istà più nell'accennato sito, il livello non è rettificato, e se ne compie la rettificazione riducendo la bolla ad essere centrata, metà col variare l'inclinazione del piano che sostiene lo strumento, e metà col variare la posizione del tubo mediante il congegno a tal uso destinato. Questo processo è una conseguenza di quanto si disse nel numero precedente, e la sua esattezza si può mettere in chiaro come segue. Supponendo che in un piano qualunque si abbia una retta inclinata AB (*fig.* 32); che sulla direzione di questa retta trovisi un livello colla sua bolla centrata, o, in altri termini, avente orizzontale la tangente condotta nel punto di mezzo dell'arco interno risultante dalla parte di sezione longitudinale compresa fra gli indici fiduciali, questo da altro non può provenire se non dall'essere i due piedi *ab* e *cd* diversamente lunghi e di tanto quanto è la differenza d'altezza dei due estremi *a* e *c* sopra l'orizzontale AC. Se poi si inverte lo strumento, il piede più alto *cd* portandosi in *ad'*, cioè nell'estremo più alto della retta *ac*, ed il piede *ab* in *cb'*, ossia nell'estremo più basso della *ac*, succederà evidentemente che la *b'd'* sarà inclinata, e che la bolla, siccome tendente alla parte più elevata del tubo, non si manterrà più fra gli indici fiduciali. Stando così le cose, se vuolsi condurre la bolla fra gli anzidetti indici o, ciò che torna lo stesso, la inclinata $b'd'$ ad essere orizzontale, basta evidentemente fargli descrivere l'angolo $d'b'b$ portando l'estremo d' in b, e variare poscia l'inclinazione del piano su cui si opera portando la AB sull'orizzontale AC col fargli descrivere l'angolo BAC. Il primo spostamento, avente per oggetto di ridurre la retta $b'd'$ parallela al piano d'appoggio, si ottiene muovendo la vite del livello; l'altro, avente per iscopo di rendere orizzontale la stessa retta quando la bolla è centrata, si ha mediante un congegno che serve a spostare il piano. Siccome poi l'essere db parallela ad AC e $b'b$ parallela ad AB porta l'eguaglianza dei due angoli dbb' e BAC; come pure l'eguaglianza dei due triangoli $db'b$ e $d'bb'$ porta quella dei due angoli dbb' e $d'b'b$, si deduce $d'b'b$=BAC, e quindi doversi correggere metà errore colla vite del livello e metà colle viti che servono ad innalzare o ad abbassare il piano d'appoggio.

L'importanza che ha il livello a bolla d'aria nelle pratiche operazioni non mi permette di passare sotto silenzio un altro modo di rettificazione, tanto più che esso non richiede l'apparato di avere un piano disposto con opportuni meccanismi per variare la sua inclinazione. Il perchè passo ad esporre i seguenti principii geometrici: se in un piano RS, comunque inclinato (*fig.* 33) e che incontra un piano orizzontale PQ secondo una retta RI, si prende un punto C, e se per esso si conducono nel piano due rette di *egual pendìo* AC e BC, cioè tali che i due angoli CAM e CBM, che le medesime fanno colle loro proiezioni orizzontali MA e MB, siano eguali, le due rette $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$, siccome ipotenuse dei triangoli rettangoli eguali CMA e CMB, saranno pure eguali; e una retta ab, ottenuta prendendo, a partire da C, sui lati del triangolo le due quantità $\overline{Ca}$ e $\overline{Cb}$ fra loro eguali, sarà parallela alla AB e quindi orizzontale, come lo è quest'ultima.

Questa conseguenza, congiunta all'osservazione che un livello dà linee di egual pendìo quando la bolla si trova nello stesso sito del tubo che la racchiude, ci conduce al seguente processo. Per verificare e rettificare un livello a bolla d'aria, si pianti uno spillo in un punto A (*fig.* 34) di una faccia piana e ben levigata; si appoggi a questo lo strumento, e, girandolo lentamente col tenere sempre il medesimo estremo contro lo spillo, si segnino col filo della riga le due posizioni per cui la bolla d'aria occupa lo stesso sito. Su queste direzioni AX e AY, a partire dal loro incontro A, si prendano due quantità eguali $\overline{Aa}$, $\overline{Ab}$, ed a seconda della retta determinata dai due punti a e b si disponga la base del livello. Si dirà che lo strumento è o non è rettificato, secondo che la bolla sta o non sta fra gli indici fiduciali. Nel caso che lo strumento sia fuori di rettifica, vi si ridurrà colla semplice operazione di muovere le apposite viti del livello, finchè la bolla d'aria si trovi centrata. Una volta fatta la rettificazione, sarà sempre bene invertire il livello, onde meglio assicurarsi dell'esattezza della fatta operazione.

Un procedimento in tutto analogo può valere per determinare la linea di fede del livello a pendolo.

ARTICOLO III.

Paline, picchetti e mezzi per dirigere visuali.

56. **Paline.** — I tracciamenti di allineamenti si fanno con *paline,* che sono asticciuole ben diritte, cilindriche o prismatiche, alte da uno a due metri, aguzzate in un estremo e fesse nell'altro per potervi inserire un pezzo di carta bianca di forma rettangolare o triangolare (*fig.* 35) colla sua base perpendicolare alla lunghezza del fusto. La carta prende il nome di *scopo* o *mira*, e nei grandi segnali è surrogata da una banderuola. Alcune volte si sostituisce alla punta un plinto o corpo avente una faccia piana (*fig.* 36); e talvolta, invece della punta o del plinto, vi sono tre gambe in guisa da costituire un trepiede. Le paline con punta si usano nei terreni di facile penetrazione: quelle con plinto nei terreni duri e selciati; finalmente quelle a trepiede nei terreni duri non solo, ma anche montuosi.

57. **Picchetti.** — Le paline non sono i soli mezzi adoperati per individuare dei punti sul terreno; per conservare la traccia di qualche punto importante s'impiegano i *picchetti*, che non sono altro che pezzi di legno acuminati ad un estremo e con la testa piana.

58. **Mezzi per dirigere visuali.** — Per facilitare il tracciamento di allineamenti, e per collocarsi nella loro direzione, giova efficacemente l'avere dei mezzi i quali servano a determinare un piano verticale. Due punte finissime infitte verticalmente in un regolo o in un tavolato di superficie orizzontale; una delle facce minori di una riga prismatica, avente per sezione retta un triangolo rettangolo e collocata coll'altra faccia minore su un piano orizzontale; due strettissime fessure parallele, dette comunemente *traguardi*, o una fessura ed un filo finissimo, sono mezzi ben di frequente usati per determinare un piano verticale, che dicesi *piano di col-*

limazione, da collimare (mirare). Molto più vantaggiosi degli accennati mezzi sono i cannocchiali girevoli intorno ad un asse orizzontale, ed ecco un breve cenno della loro struttura e del loro uso.

Constano i cannocchiali, che generalmente si adattano agli strumenti topografici, di tre tubi disposti l'uno dentro l'altro (*fig.* 37). Una lente biconvessa detta *obbiettivo* è situata all'estremo del primo tubo verso l'oggetto che si osserva, e due altre piano-convesse, costituenti l'*oculare*, trovansi al principio del più piccolo tubo ove si suole applicare l'occhio. L'obbiettivo riproduce, nell'interno del cannocchiale e sensibilmente nel suo foco, le immagini rovesciate degli oggetti osservati; l'oculare ha per iscopo d'ingrandire questa immagine.

Entro il tubo di mezzo esistono due fili di ragnatela o di seta finissimi, tesi in croce ad angolo retto, che costituiscono unitamente all'anello a diaframma vuoto cui sono applicati, il *micrometro*. Tale micrometro serve a dare una *linea di mira* o *visuale* che si dirige all'immagine formata dall'obbiettivo; e questa linea, determinata dall'occhio applicato all'oculare e dall'intersezione dei due fili, dicesi *asse ottico* del cannocchiale. Questo però non è il solo mezzo di determinare l'asse ottico, e da taluni si sono sostituiti ai fili sottilissime linee incise sul vetro.

Per rendere distintamente visibili i fili serve il piccolo tubo *o* che contiene l'oculare, e che si fa scorrere longitudinalmente fino a conseguire l'intento. Per vedere poi, a seconda del grado di vista dell'osservatore, ben nitida l'immagine dell'oggetto, bisogna fare scorrere il tubo *t* fino a discernerla ben distinta. Così deve essere disposto il cannocchiale, sia per avere un'immagine chiara, sia ancora per distruggere quell'apparente instabilità dei fili che l'occhio rimarca quando il micrometro non trovasi nel foco dell'obbiettivo, e che è conosciuta sotto il nome di *paralasse dei fili*.

Il descritto cannocchiale è quello che serve ai topografi ed agli astronomi, pei quali il diritto ed il rovescio dell'immagine sono cose indifferenti. Al cannocchiale atto a raddrizzare l'immagine è per noi preferibile quello già accennato, siccome dante luogo ad una perdita quasi insensibile di luce.

59. **Tracciamento di allineamenti**. — Un punto del terreno è compiutamente determinato da una palina posta verticalmente in esso, ed un allineamento è pure determinato allorchè siano fissate al suolo, a discreta distanza, due paline verticali, perchè esse offrono l'esatta direzione per piantarne quante altre si vogliono.

Per *palinare* un allineamento, sia sopra un terreno quasi orizzontale, sia andando da un terreno orizzontale ad un terreno montuoso, sia ancora andando da un terreno montuoso ad un terreno orizzontale, possono lavorare due operatori oppure uno solo. Quando gli operatori sono due, uno porterà le paline e le pianterà ove gli sarà additato dai cenni dell'altro uomo, che deve sempre trovarsi nell'allineamento a tracciarsi, in modo da vedere due paline già stabilite. Se l'operatore è uno solo, convien che si porti nella direzione dell'allineamento a palinarsi, e che pianti le paline in punti tali, che la visuale diretta per la palina, che pende dalla sua mano, vada a passare almeno per due delle paline già piantate.

In generale si deve ritenere la regola di fare in guisa che la visuale vada lambendo a destra ed a sinistra i fusti delle paline, quando sono ben diritte; e invece che passi pel mezzo delle mire disposte perpendicolarmente alla visuale, quando il contrario ha luogo: in quest'ultimo caso i piedi delle paline devono trovarsi in un sol piano verticale, la cui intersezione colla superficie del terreno è generalmente una linea curva, che si proietta sul piano orizzontale in una linea retta. Meglio che coll'occhio nudo, si riconosce col filo a piombo se tutte le paline di un medesimo allineamento sono in uno stesso piano verticale.

L'operazione del tracciamento degli allineamenti ha la massima influenza sulla buona o cattiva riuscita di un lavoro, e merita perciò di essere considerata nei seguenti casi particolari:

I. *Essendo individuati con paline due punti* A *e* B *del terreno, piantarne una terza sul prolungamento dell'allineamento determinato dai due punti dati, poi una quarta, una quinta, ecc.* (*fig.* 38).

Due operatori possono eseguire tale prolungamento portandosi, quello che dirige l'operazione in *a*, qualche passo al di qua del punto A, facendo avanzare il porta-paline fino al sito ove si vuol piantare la terza palina, e indicandogli colla mano di appoggiare a destra o a sinistra, finchè la palina a piantarsi cada nella visuale AB. Ciò ottenuto, dà l'opportuno cenno per conficcare la palina nel terreno in C, e guardando di nuovo, verifica se trovasi nel luogo voluto.

Se l'operatore è uno solo, il problema non presenta maggiore difficoltà, imperocchè altro non ha da fare se non che di portarsi con una palina al sito conveniente e dirigere una visuale che, mentre passa per la palina che tiene pendente fra le mani e per la palina A, venga anche a passare per la palina B.

II. *Essendo individuati con paline i due estremi* A *e* B *di un* *allineamento accessibile ai suoi prolungamenti, piantare fra le due e sull'allineamento per esse determinato una terza palina, poi una quarta, una quinta, ecc.*

Quando gli operatori sono due, portisi uno, a poca distanza da A, in *a* (*fig.* 39), mentre l'altro si avvicina al sito ove si vuol piantare la terza palina; quest'ultimo, appoggiando ora a destra ora a sinistra, a seconda dei cenni ricevuti dal primo, pianti la terza palina in C, come fu già detto nel caso precedente.

Che se l'operatore è uno solo, pianti prima la palina D (*fig.* 40), abbastanza lontana da B, sul prolungamento di AB; e, servendosi dopo delle due B e D, collochi a sito la palina C. Piantata la terza palina C, l'operazione successiva resta ricondotta al primo caso, e sarà agevole di piantarne una quarta, una quinta, ecc. nella direzione voluta.

Che se i due punti A e B (*fig.* 41) sono molto distanti fra di loro, per cui risulti impossibile ad un osservatore collocato al di qua di A, sia di vedere il punto B, sia di piantare una palina sul prolungamento di AB, conviene abbruciare in B una sostanza che, mandando molto fumo, possa servire come segnale per far scorgere la direzione su sui trovasi il punto B e per piantare, almeno approssimativamente, una palina in C sulla presunta direzione AB, la quale poi si palinerà su tutta la sua lunghezza appoggiandosi prima alle paline A e C, poi successivamente a quelle che si andranno piantando di mano in mano.

Compiutamente palinato l'allineamento AG, si viene a pochi passi di distanza dalla palina F, e, traguardando per le paline F e G, osservasi se in questa direzione vedesi o no il punto B. Nel primo caso l'allineamento sarà ben tracciato; nel secondo non lo sarà. Allora si fa lo spostamento di tutte le paline portando la G in G′ sulla direzione FB, la F in F′ sulla direzione EG′, la E in E′ sulla direzione DF′, la D in D′ sulla direzione CE′, la C in C′ sulla direzione AD′, poi, tornando ancora indietro, la D′ in D″ sulla direzione C′F′, e si continua così a spostare di bel nuovo tutte le paline, finchè sia verificata la voluta condizione. Quest'operazione, eseguita da pratici operatori, non riesce lunga, massimamente quando, invece di spostare una sola palina intermedia a due vicine, se ne spostano parecchie, collocate fra due che si possono ancora vedere ben distinte.

III. *Essendo individuati con paline i due estremi* A *e* B *di un allineamento inaccessibile ai suoi prolungamenti, piantare in esso quante altre paline si vogliono.*

I due operatori incaricati d'una tale operazione, tenendo ciascuno pendente da una mano una palina, si portano l'uno in D (*fig.* 42) e l'altro in C sulla direzione BD. L'operatore in D dirige una visuale su A, e fa avanzare l'altro da C fino in C'; questo, a suo turno, fa andare in D', sulla direzione C'B, l'operatore che era in D, e continuano così finchè arrivano in due punti C'' e D'' tali che l'operatore che è in D'' trovasi sull'allineamento delle due paline A e C'', mentre l'altro che è in C'' si trova sopra quello delle due B e D''.

Un operatore, in un tempo più lungo e con maggior fatica, può da solo condurre a compimento l'operazione, come segue: pianti prima una palina in C (*fig.* 43), che a vista sembri essere nella direzione AB, e poscia un'altra in D nella direzione AC. Venga dopo a traguardare dalla palina C alla D, onde osservare se si vede il punto B. Se ciò non avviene, porti la palina C in C' e la D in D' sulla retta AC'; di bel nuovo venga a traguardare per le paline C' e D', onde vedere se sulla retta C'D' trovasi il punto B, e continui così per tentativi, a spostare una palina, poi l'altra, finchè la suddetta condizione sia verificata.

IV. A compimento di quanto hassi a dire sull'importante operazione del tracciamento degli allineamenti, aggiungerò il processo a seguirsi per *tracciare un allineamento su un terreno comunque accidentato, per esempio, su una parte di pianura, seguìta da una salita, cui tenga dietro un altipiano, poi una discesa in valle, dal cui fondo si risalga ad opposto poggio* (*fig.* 44).

Piantate le prime due paline in A e B, si collochino a posto, coll'aiuto di queste, le altre in C e D sulla pianura, e si prosegua lo allineamento su pel pendìo, scegliendo il punto E in guisa che la visuale diretta per le due paline *e*, *d* venga a passare per un punto qualunque del fusto della *c*. Valendosi delle paline *d* ed *e* si prolunghi l'allineamento fino alla cima, e prima di procedere oltre si verifichi l'esattezza della fatta operazione, osservando se il piano verticale che passa per F ed E contiene le paline della pianura. Ciò constatato, si continui il tracciamento al di là di F, piantando una palina in G, poi colla guida delle *f* e *g* si collochino a sito sull'altipiano alcune paline, come *h*, *i*, *k*, avendo cura che la penultima sia un po' più lunga, per servirsi poi delle *i* e *k* a prolungare lo allineamento giù per la china colle paline *o*, *p* e *q*, delle quali le due ultime serviranno ancora di guida per piantare la *r*. Si individuino i punti S, T, U e V, come si è già detto venendo da un terreno piano ad un terreno montuoso, e si avverta di allineare le ultime paline *u* e *v* colle opposte *k* e *o*, onde accertarsi se il tracciamento è stato bene eseguito.

60. **Intersezione di allineamenti.** — La determinazione della intersezione di due allineamenti è operazione molto importante in pratica e può occorrere di dover trovare questo punto di concorso: 1° quando gli allineamenti s'incontrano sui loro prolungamenti; 2° quando il punto di concorso è sul prolungamento dell'uno ed in un punto intermedio per rapporto all'altro; 3° quando il punto di concorso è intermedio per rapporto a tutti e due.

Cominciando dal primo caso, supponiamo che siano due gli operatori che devono determinare l'intersezione di due allineamenti AB e CD (*fig.* 45). Un operatore si porti in *a* di pochi passi distante da A, e traguardando per le paline A e B e per le altre intermedie, se vi sono, stia attento a far piantare quella palina che tien pendente da una mano l'altro operatore, nel mentre lo vede percorrere la direzione CD. Collocata la palina in I e verificata la giusta sua posizione, l'operazione sarà terminata.

Che se l'operatore è uno solo, allora, con una palina pendente da una mano, cammini tenendo questa costantemente nella direzione CD, volgendo di tanto in tanto l'occhio al punto B, e si fermi sul punto I quando, nella direzione determinata dalla palina che tiene in mano e dalla palina B, veda anche la palina A e tutte le altre che possono essere fra A e B.

Il secondo ed il terzo caso non differiscono dal primo, quando fra le paline estreme A e B, C e D vi siano delle altre paline intermedie in E ed F, in G ed H (*fig.* 46 e 47). Quando gli allineamenti sono soltanto determinati colle paline estreme, si può ridurre la quistione al primo caso, piantando per ciascun allineamento una palina come in E e G. Quando però agiscono due operatori, nessuna palina, oltre le estreme, sarà necessaria nel secondo caso (*fig.* 46): e basterà una sola come la E o la G nel terzo caso (*fig.* 47). Bisognerà necessariamente collocare una palina G nel secondo caso, e due, l'una in E e l'altra in G, nel terzo, se lavora un operatore solo.

ARTICOLO IV.

Strumenti per misurare le distanze.

Canne, catena e nastro da misura.

61. Descrizione delle canne. — I più semplici di tutti gli strumenti adoperati per misurare distanze sono le *canne metriche*, che consistono in bastoni cilindrici di legno, ben diritti, della lunghezza di due o di tre metri esatti, e su cui sono segnati i metri, i decimetri ed i centimetri (*fig.* 48). Per eseguire una misura speditamente, occorrono due canne eguali, coi loro estremi guerniti di metallo, onde impedire i guasti a cui andrebbero soggette; e l'esperienza ha dimostrato essere le canne della lunghezza di tre metri quelle che meglio convengono per le ordinarie operazioni topografiche.

Si possono anche avere delle canne non rappresentanti lunghezze metriche, e tali erano appunto i *trabucchi*, che, prima della introduzione del nuovo sistema metrico decimale di pesi e misure, si usavano in Piemonte.

62. Uso delle canne. — Per misurare con esattezza e speditezza una distanza colle canne, bisogna operare con metodo: il canneggiatore colla mano destra impugni un capo d'una canna, ne abbassi l'altro fino a terra nella direzione della retta a misurarsi, e poscia ritiri indietro l'estremo che ha in mano fino a sovrapporlo al punto dove dee aver principio la misura. Collocata così la prima canna alla sua diritta, parta dall'origine della misura col piede destro; supponendo che si adoperino canne lunghe tre metri, dopo quattro passi ordinarii giugnerà in posizione comoda per disporre nell'allineamento con egual metodo la seconda canna e per farle combacciare entrambe senza urto. Ottenuto il contatto, afferri tosto l'estremo della prima e la sollevi senza urtare l'altra, gridando *una*. Dopo, mentre cammina alla stessa maniera lungo la seconda canna, faccia scorrere la prima che ha in mano, finchè ne impugni l'estremo opposto a quello che afferrò nell'atto di sollevarla, la collochi a suo tempo e con cautele eguali di seguito alla canna rimasta in terra, e gridando *due* sollevi la seconda canna. Così proceda fino all'estremo della retta a misurarsi, avvertendo di gridare il numero rispettivo delle canne, soltanto all'atto di sollevarle onde non generare confusione nel conteggio. Così, se dopo aver successivamente sollevate, e contate, per esempio, 40 canne, l'ultima che resta in terra raggiunge l'estremo della linea colla sua divisione 2 metri 3 decimetri e 5 centimetri, la distanza misurata sarà di $40 \times 3^m + 2^m,35 = 122^m,35$.

Quando il terreno è orizzontale ed anche leggiermente inclinato od ondulato, nessuna avvertenza, fuorchè quella di metterle ben allineate e combaccianti, si deve avere nell'uso delle canne; perchè i minimi difetti d'orizzontalità in tali strumenti non si fanno sentire nella misura. Se però il terreno presenta una notevole inclinazione e ben sentite ondulazioni, è necessario di disporre orizzontali le canne, il che si potrebbe fare con un filo a piombo ed un livello a pendolo, oppure con un filo a piombo ed una squadra. Generalmente però una canna si dispone orizzontale a vista; e, per segnare la verticale che deve passare pel suo estremo anteriore, si lascia pendere l'altra liberamente dalle dita. Il processo di questa operazione facilmente si comprende dalla figura 49; ed un operatore ben esercitato, così facendo, non può commettere notevoli errori.

L'impossibilità di poter successivamente disporre l'una dopo l'altra le canne nella direzione su cui devesi misurare, ed in modo che i loro assi siano perfettamente collocati in linea retta, fa sì che, anche nel caso più favorevole di una distanza attraversante un terreno sensibilmente orizzontale, si abbia, invece della distanza vera di due punti, la lunghezza di una spezzata limitata dalle due verticali per essi passante, e sempre maggiore della distanza richiesta. Segue da ciò potersi rappresentare la distanza effettiva di due punti col prodotto di quella trovata per un coefficiente, e quindi con $l = \alpha L$, essendo l la vera distanza che si cerca, L la distanza trovata ed α un cofficiente di poco minore dell'unità, dipendente dal modo di adoperare le canne e dalla località in cui si opera.

Nel caso che si ripeta diverse volte e con tutta diligenza la medesima misura, il risultato minore sarà sempre il più esatto; non sembra quindi troppo conveniente la regola generalmente invalsa di prendere per distanza vera di due punti il risultato medio fra tutti quelli ottenuti in diverse misure.

63. **Descrizione della catena**. — La catena per misurare è formata da verghe di grosso filo di ferro fra loro eguali (*fig.* 50) e unite da anelli in guisa che la distanza, fra centro e centro di due anelli successivi, sia di due decimetri. La sua lunghezza è generalmente di dieci metri, quantunque non sia difficile avere delle catene anche lunghe quindici o venti metri. I metri sono distinti mediante anelli di ottone, ed i cinque metri mediante qualche altro segno

particolare. La catena termina alle sue estremità in due maniglie facenti parte della sua lunghezza totale, e queste servono per meglio maneggiare la catena mentre si fanno le misure.

Per misurare colla catena si richiedono inoltre dei *chiodi* o *piuoli*, i quali, generalmente in numero di dieci, non sono altro che picchetti in ferro (*fig.* 51), lunghi da due a tre decimetri, ed abbastanza solidi per non cedere quando si conficcano nel terreno.

64. **Uso della catena**. — Per fare la misura di una distanza colla catena, occorrono due operatori; uno di questi, presi i dieci piuoli, impugna la catena per una maniglia e corre avanti nel mentre l'altro operatore colloca il secondo estremo della catena al principio della retta a misurarsi. Appena il primo sia in sito da poter tendere la catena, guidato dai segnali del secondo, si porta nella direzione voluta, tende la catena e conficca un piuolo nel terreno esternamente alla maniglia. Ciò fatto, partono nello stesso istante, trasportando la catena lungo la distanza che misurano, e l'operatore che è in coda, giunto al chiodo conficcato nel terreno dal compagno, vi pone a contatto la maniglia e lo svelle, appena l'altro abbia ripetuta l'operazione di piantare come prima un secondo chiodo, e così procedono finchè l'operatore, che è in testa, ha chiodi. Quando questi li avrà già tutti piantati, giunto dove dovrebbe piantarne ancora uno, viene a riprendersi tutti i chiodi, e intanto l'uomo di coda nota una *consegna*, ossia la prima *muta* o *cambiamento*, dopo di che continuano allo stesso modo la intrapresa misura. Raggiunto il termine della distanza a misurarsi, per averne la lunghezza effettiva, si tiene conto del numero delle mute, del numero dei piuoli che il secondo operatore ha ritirati dopo l'ultima consegna e della frazione tesa della catena. Così, se la catena essendo di un decametro e dieci i piuoli, si fossero notate 8 mute, ritirati 3 piuoli, e la parte di catena tesa fosse di $8^m,25$, la lunghezza misurata sarebbe $(8\times 10+3)10+8,25=838,25$.

Nell'uso della catena, ancor più che nell'uso delle canne, le lunghezze trovate risultano maggiori delle vere, concorrendo, colle difficoltà già accennate parlando delle canne, l'altra di distendere la medesima in retta linea. Segue da ciò non potersi attendere da questo strumento una grande esattezza; essere miglior partito appigliarsi alle canne quando si voglia una certa precisione; e doversi adoperare la catena solo sui terreni piani e poco accidentati.

Da misure fatte con la catena in circostanze ordinarie si trovò che il coefficiente per cui convien moltiplicare la distanza trovata per avere la vera è $\alpha = 400:401$, per cui volendo $l = 20^m$, si avrebbe dalla relazione $l = \alpha L$

$$L = \frac{401}{400} 20 = 20^m,05.$$

Si possono adunque evitare o almeno diminuire assaissimo gli errori in quistione, ritenendo una catena della lunghezza di $20^m,05$ come simbolo di soli 20^m.

L'osservazione, che gli sforzi da esercitarsi per distendere la catena influiscono ad allungarla, fa conoscere la necessità di dover verificare di tanto in tanto la sua esattezza, il che si fa presentandola ad una lunghezza segnata su una superficie piana e perfettamente lunga quanto dev'essere la catena.

65. **Nastro da misura**. — In uno spazio circoscritto, come nell'interno dei fabbricati, riuscendo incomode le canne e la catena, suolsi impiegare il nastro da misura della lunghezza di 10 o 20 metri, e consistente in una fettuccia (*fig.* 52) divisa in metri, in decimetri e centimetri, che tutta si può avvolgere e svolgere da un perno collocato secondo l'asse di un astuccio cilindrico di cuoio o di lastra metallica.

Stadia.

66. **Descrizione della stadia**. — Un'asta graduata (*fig.* 53), la quale serve a misurare le distanze quando è guardata con un conveniente cannocchiale, costituisce la *stadia*. I cannocchiali che per tale scopo si adoperano sono quelli stessi adattati agli strumenti topografici; e, oltre di permettere l'orizzontalità dell'asse ottico e la conoscenza dell'angolo di *elevazione* o di *depressione* all'orizzonte, devono avere il loro micrometro munito, non solo di due fili, l'uno verticale e l'altro orizzontale (num. 58), ma di due altri da questo ultimo equidistanti.

Per ben comprendere la formazione e l'uso di questo strumento, s'immagini prima un cannocchiale ordinario, il quale abbia l'obbiettivo in AB (*fig.* 54), l'oculare in CD ed il micrometro che, oltre ai due fili vv' e oo', verticale il primo e orizzontale il secondo, ne porti due altri aa' e bb' equidistanti da oo'. Si supponga poi a distanza $\overline{OE}$ dall'obbiettivo collocata un'asta verticale FG; se questa si guarda col cannocchiale orizzontalmente disposto, i fasci luminosi, che partono dai due estremi F e G della parte dell'asta corrispondente alla parte $\overline{ab}$ dell'immagine di essa asta intercetta fra i fili, intersecandosi al centro ottico O dell'obbiettivo, formeranno due angoli FOG e bOa, eguali siccome opposti al vertice, il primo dei quali si conserva costante comunque varii la distanza dell'asta dal cannocchiale, purchè rimanga inalterato il secondo angolo. Supponendo vera pel momento quest' ipotesi, avverrà che, conosciute una volta $\overline{OE}$ ed $\overline{FG}$, se si suppone l'asta trasportata verticalmente in H, si potrà dedurre $\overline{OH}$ dalla parte $\overline{IK}$ della medesima asta intercetta fra i fasci luminosi OF ed OG, perchè, essendo l'immagine di $\overline{IK}$ quella compresa fra i fili del micrometro, risulta evidente che, se quest'immagine rappresenterà, per esempio, 1/2 o 1/3 o 1/4 ecc. di ciò che rappresentava l'immagine dell'asta collocata in E, anche la distanza $\overline{OH}$ sarà 1/2 o 1/3 o 1/4 ecc. della primitiva distanza $\overline{OE}$.

Osservazione. Per risolvere il problema di determinare una distanza senza effettivamente misurarla, si sono inventati, oltre la stadia, parecchi altri strumenti. È generalmente necessario di conoscere *a priori* l'altezza di un oggetto collocato ad un estremo della distanza a valutarsi, essendo l'occhio all'altro estremo. Fra questi strumenti meritano un posto distinto il *telemetro* di Porro ed il *diastimetro a spirale* di Goldschmid, che, consistendo in cannocchiali di piccola lunghezza e da adoperarsi a mano, tornano utili nell'arte della guerra, dove un estremo della distanza a trovarsi è quasi sempre inaccessibile, e dove trovansi sempre oggetti di altezza approssimativamente nota, come uomini a cavallo od a piedi, case, olmi, pioppi, ecc. Nelle operazioni regolari di topografia però non si possono attendere da tali strumenti risultati di sufficiente esattezza, per cui credo inutile di qui esporne la loro costruzione ed il loro uso.

67. **Modo di graduare una stadia ed uso della medesima sui terreni sensibilmente orizzontali.** — Ben compreso quanto si disse nel precedente numero, si può passare al modo di graduare una stadia, non che all'uso della medesima una volta graduata. Presa un' asta di legno tinta in bianco, della lunghezza di circa 4^m e della larghezza di circa $0^m,1$, si scelga un terreno per quanto si può orizzontale e si misuri su esso colla massima esattezza, impiegando le canne o la catena, una distanza tale che, collocando orizzontalmente il cannocchiale ad una estremità e verticalmente l'asta all'altra, l'immagine di questa resti tagliata dai due fili orizzontali equidistanti da quello di mezzo. L' operatore che trovasi

al cannocchiale osservi l'asta, e nello stesso mentre un altro operatore faccia scorrere su essa un indice, fermandolo quando riceve il segnale dal primo, segnale che questi farà tutte e due le volte che vede l'indice in coincidenza cogli accennati fili orizzontali. Segnate in nero sull'asta le due linee in cui venne fermato l'indice, si ritenga la lunghezza, così individuata sull'asta, siccome la rappresentante della distanza misurata sul terreno; e se, per esempio, si sono misurati 200^m, si divida la parte dell'asta intercetta fra le accennate linee in 200 parti eguali, e si continui la graduazione su tutta la lunghezza dell'asta. Si avrà così una stadia atta a misurare le distanze in metri; per modo che, quando sia essa in un punto che la parte di sua immagine intercetta fra i due fili abbracci 50 o 25 o 10 divisioni, si dirà che la distanza del punto ove il terreno è incontrato dalla verticale passante pel centro dell'obbiettivo da quello sul quale appoggia l'asta graduata è di 50 o 25 o 10 metri.

È facile di comprendere come l'accennata asta non possa servire per un altro cannocchiale in cui la distanza dei due fili sia differente da quella che esisteva nei fili del cannocchiale adoperato, e come neppure potrebbe servire per questo, qualora i fili del micrometro si spostassero. Quest'osservazione, nel mentre ci fa vedere la necessità di verificare di tanto in tanto se la distanza dei due fili abbia variato (col riconoscere se una distanza data dalla stadia si accorda colla misura diretta), ben ci convince quanto vantaggiosi siano quei cannocchiali in cui ai fili si sostituiscono delle finissime linee incise sul vetro; la cui distanza non può menomamente essere alterata.

Si fanno anche dei cannocchiali muniti di piccole viti, atte ad avvicinare o ad allontanare i fili che servono a leggere le distanze; cosicchè con un'asta della lunghezza di 4^m, divisa, per esempio, in 400 parti eguali, si potrà avere una stadia atta a misurare le distanze in metri, collocando quest'asta a 200 metri dal cannocchiale e facendo muovere gli accennati fili finchè abbraccino duecento suddivisioni dell'asta. È facile vedere come una sola asta possa servire per parecchi di siffatti cannocchiali, e come sia necessario verificare di tanto in tanto se i fili del micrometro non si sono spostati, cosa che può succedere facilissimamente appunto per la mobilità di questi fili.

68. **Secondo modo di graduare una stadia.** — Accennando, nel numero 66, al principio su cui è fondato l'uso della stadia, si è supposto che l'angolo aOb e che quindi anche il suo opposto al

vertice FOG (*fig.* 54) siano costanti a qualunque distanza dal cannocchiale si porti l'asta. Essendo però legge d'ottica che, coll'allontanarsi o coll'avvicinarsi d'un oggetto all'obbiettivo, si avvicina o si allontana la sua immagine dalla parte opposta, ne consegue che la distanza fra il centro ottico dell'accennata lente e la sezione del cannocchiale in cui si fa l'immagine, che è il sito appunto in cui vanno collocati i fili onde distruggere la paralasse, è variabile, il che importa una varietà nell'angolo aOb e quindi anche nel suo opposto al vertice; cosicchè, imperfetto risultando l'esposto metodo per graduare la stadia, un altro se ne deve preferire che qui sotto espongo.

Chiamando

h la distanza $\overline{ab}$ fra i due fili del micrometro,

d l'altra $\overline{cO}$ fra il foco e il centro dell'obbiettivo,

H l'altezza verticale $\overline{GF}$ dell'asta la cui immagine è compresa fra i detti due fili,

D la distanza $\overline{OE}$ fra l'asta e l'obbiettivo,

si ha dai due triangoli simili aOb ed FOG

$$D = \frac{H}{h} d \qquad (1).$$

Ma l'ottica insegna che, fra la distanza focale d corrispondente alla distanza D dell'oggetto, e la distanza focale principale F, corrispondente ad una distanza infinita dell'oggetto, esiste la relazione

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{D} \qquad (2),$$

dalla quale, ricavando il valore di d e ponendolo nell'equazione (1), si ha

$$D = \frac{DFH}{h(D-F)},$$

che dà per D il seguente valore

$$D = \frac{F}{h} H + F.$$

Mediante quest'ultima formola e quando la reticola si trovi nel vero foco corrispondente alla distanza D, si conchiuderà D dalle quantità h, F ed H, le due prime costanti e cognite per un dato cannocchiale, la terza da misurarsi.

La misura di H si può anche facilmente evitare osservando che, dividendo l'unità che vuolsi impiegare per misurare la distanza D e l'altezza H in $\frac{F}{h}$ parti eguali, nell'altezza H saranno comprese $\frac{F}{h}H$ divisioni, il cui numero si può indicare con n, e che quindi si ha

$$D = n + F.$$

Il qual ultimo risultato ci porta a conchiudere, *che per graduare una stadia, si deve cercare l'esatto rapporto fra la distanza focale e quella dei fili, e dividere la lunghezza dell'unità sull'asta in tante parti eguali, quante sono unità nell'accennato rapporto: allora ciascuna di queste parti rappresenterà un' unità, e ad ogni lettura dovrassi aggiungere la distanza focale, onde avere la distanza cercata. Dividendo ciascuna divisione dell'asta ancora in due, tre, quattro, ... parti eguali, ciascuna di queste suddivisioni deve evidentemente rappresentare nella valutazione delle distanze metà, terzi, quarti, ... dell'unità.*

Sia, ad esempio, per un dato cannocchiale munito di reticola, $F = 0^m,25$, $h = 0,005$, onde $\frac{F}{h} = 50$, e l'unità di misura sia il metro: dividesi una tale unità sulla stadia in 50 parti eguali ossia in dupli centimetri, e se, collocata poi questa ad una certa distanza dal cannocchiale, leggesi 96, ciò vuol dire che questa distanza è $96 + 0,25 = 96^m,25$. Dividendo l'unità metro in 100 parti eguali, si potrebbero stimare anche i mezzi metri.

Generalmente la distanza h fra i due fili del micrometro si assume tale che il rapporto $\frac{F}{h}$ sia un sotto multiplo di 100, perchè allora ciascuna delle parti in cui si divide l'unità metro sull'asta sarà un numero esatto di centimetri.

Difficilmente potendosi avere le due lunghezze F ed h, sarà bene ottenere il rapporto $\frac{F}{h}$ indipendentemente dalla misura dei due suoi termini. Disposto il cannocchiale col suo asse ottico orizzontale, si collochi verticalmente un'asta imbianchita ad una distanza D dall'obbiettivo, misurata con tutta l'esattezza possibile sopra un terreno ben piano e quasi orizzontale; dopo di aver tolta la paralasse dei fili, si facciano segnare sull'asta le due lineette indicanti le intersezioni apparenti dei fili con essa; si misuri con tutta la precisione possibile la parte H dell'asta fra esse compresa, e si avrà la relazione

$$D=\frac{F}{h}H+F \qquad (3).$$

Portando poi l'asta ad una distanza D′, e supponendo essere H′ la parte d'asta intercetta dai due fili, si avrà quest'altra relazione

$$D'=\frac{F}{h}H'+F.$$

Quest'ultima equazione sottratta dalla precedente darà

$$D-D'=\frac{F}{h}(H-H'),$$

d'onde

$$\frac{F}{h}=\frac{D-D'}{H-H'},$$

il che indica *essere il rapporto fra la distanza focale principale* F *e la distanza* h *dei fili eguale al rapporto delle differenze fra le due distanze misurate sul terreno e fra le lunghezze delle parti dell'asta intercette fra i fili del micrometro.*

La distanza focale F, che devesi aggiungere ad ogni lettura e che per conseguenza bisogna conoscere, si ottiene ponendo nell'equazione (3) il valore di $\frac{F}{h}$ e si ottiene allora

$$F=\frac{D'H-DH'}{H-H'}.$$

69. **Paragone fra i due metodi di graduare la stadia.** — Per acquistare un'idea dell'errore che si fa graduando la stadia col primo metodo, che è pur quello generalmente usato, supponiamo che si abbia al solito un cannocchiale di distanza focale principale F, in cui la lontananza dei due fili che servono a valutare le distanze sia h, e che si collochi a distanza D dal suo obbiettivo un'asta. Fra le quantità F, h, D e l'altezza H dell'asta, la cui immagine resterà intercetta fra i fili, si avrà la nota relazione

$$D=\frac{F}{h}H+F,$$

dalla quale ricavasi

$$H=\frac{F}{h}(D-F) \qquad (1).$$

Se si gradua la stadia col primo metodo, l'intervallo H resta diviso in D parti eguali, ciascuna di lunghezza $\frac{H}{D}$, e portando questa stadia ad un'altra distanza D' dall'obbiettivo, la parte H' apparentemente intercetta fra i fili sarà

$$H'=\frac{h}{F}(D'-F),$$

ed il numero N di divisioni in essa contenuto ed esprimente la distanza D' sarà dato da

$$N=\frac{\frac{h}{F}(D'-F)}{\frac{H}{D}}=\frac{Dh}{FH}(D'-F).$$

Se poi si gradua la stadia col secondo metodo, l'altezza H verrà divisa in $\frac{F}{h}H$ parti eguali, ciascuna della lunghezza $H:\frac{F}{h}H=\frac{h}{F}$, e collocando una simile asta alla stessa distanza D' dall'obbiettivo, il numero delle divisioni N' contenute nella parte intercetta H' sarà

$$N'=\frac{\frac{h}{F}(D'-F)}{\frac{h}{F}}=D'-F,$$

ed N'+F esprimerà, come già si disse nel precedente numero, la vera distanza D'; per cui, chiamando E l'errore proveniente dal graduare la stadia col primo metodo, si avrà

$$E=D'-\frac{Dh}{FH}(D'-F) \qquad (2).$$

Supponendo che la graduazione della stadia siasi fatta con un cannocchiale in cui $h=0^m,005$, $F=0^m,25$, ad una distanza $D=150^m$, si avrà dalla formola (1)

$$H=\frac{0,005}{0,25}(150-0,25)=2^m,995;$$

e portando una tal asta alla distanza $D'=50^m$, si troverà che l'errore calcolabile colla formola (2) è espresso da

$$E=50-\frac{150\times0,005}{0,25\times2,995}(50-0,25)=0^m,167.$$

L'errore in questione, che nel citato esempio non è tanto grande, può riuscire assolutamente non trascurabile nel caso in cui la differenza fra la distanza che si vuol stimare e quella che ha servito a graduare la stadia sia considerevole.

70. **Uso della stadia sui terreni inclinati.** — A tutto rigore, per misurare le distanze con la stadia, l'asse ottico del cannocchiale dovrebbe essere sempre orizzontale e verticale l'asta; però le piccole inclinazioni dell'asse ottico non possono essere causa di gravi errori, i quali si rendono vieppiù trascurabili col solo inclinare la stadia perpendicolarmente ad esso. Quando l'inclinazione dell'asse ottico è grande, gli errori che possono nascere sono considerevoli, e la vera distanza orizzontale tra il luogo ove è collocato il cannocchiale e quello ove è sita l'asta si dovrà derivare dalla lettura fatta sulla stadia e dalla misura dell'accennata inclinazione all'orizzonte o mediante una costruzione grafica o eseguendo un calcolo semplicissimo.

Così, se sono A e B due punti del terreno di cui si vuole la distanza orizzontale $\overline{AC}$ (*fig.* 55), si collochi in D e sulla verticale passante per A il centro dell'obbiettivo del cannocchiale cui si darà l'inclinazione stessa della retta $\overline{AB}$, e si osservi la stadia disposta perpendicolarmente al terreno in guisa che il punto E, in cui è incontrata dall'asse ottico, cada sulla verticale passante per l'estremo B. Nel numero delle divisioni che si vedranno intercette fra i due fili che servono a misurare le distanze si avrà la lunghezza $\overline{AB}$, la quale, ridotta in iscala e portata in $\overline{ab}$ sul lato ax dell'angolo xay, eguale all'inclinazione dell'asse ottico del cannocchiale coll'orizzonte, servirà alla costruzione del triangolo abc simile ad ABC, e a dare in $\overline{ac}$ la lunghezza che, portata sulla scala del disegno, somministrerà $\overline{AC}$.

Se nel punto B non si vuol inclinare la stadia perpendicolarmente al terreno e tenerla invece verticale (*fig.* 56); allora, costrutto il triangolo abc, in cui l'angolo bac sia eguale all'inclinazione dell'asse ottico del cannocchiale e il lato $\overline{ab}$ sia di tante unità della scala quante sono divisioni nella parte $\overline{HK}$ dell'asta compresa fra i due fili, si porti $\overline{ac}$ sulla ax in $\overline{ab'}$ per avere la proiezione $\overline{ac'}$, che sarà la lunghezza grafica di $\overline{AC}$. Infatti, supponendo condotta la FG perpendicolarmente al prolungamento dell'asse ottico del cannocchiale, i due angoli in E saranno eguali all'inclinazione di questo all'orizzonte, e, attesa la piccolezza dei due angoli HDE e KDE, i due triangoli HFE e KGE si potranno considerare come rettangoli l'uno in F e l'altro in G, d'onde consegue potersi ritenere approssimativamente la $\overline{FG}$ siccome la proiezione di $\overline{HK}$ sotto un angolo eguale all'inclinazione dell'asse ottico del cannocchiale: cosicchè, costruendo il triangolo rettangolo bac, come già si disse, il numero di unità contenute in $\overline{ac}$ rappresenterà il numero stesso delle divisioni che sarebbe compreso in $\overline{FG}$, ossia rappresenterà la lunghezza $\overline{DE}=\overline{AB}$, ottenuta la quale, si compie la soluzione come nel caso antecedente prendendo $\overline{ab'}=\overline{ac}$ e trovando $\overline{ac'}$, che misurata colla scala darà la distanza voluta $\overline{AC}$.

Se vuolsi impiegare il calcolo, si chiami

S la distanza letta sulla stadia, ossia il numero esprimente tante unità lineari quante sono parti eguali nella parte di stadia $\overline{KH}$, la quale trovasi intercetta nell'angolo micrometrico HDK,

D la sua riduzione all'orizzonte,

α l'inclinazione dell'asse ottico,

e si avrà: pel caso della stadia perpendicolare all'asse ottico,

$$D = S\cos\alpha;$$

e pel caso della stadia verticale,

$$D = S\cos^2\alpha.$$

71. **Scale di riduzione** — Le accennate costruzioni grafiche riescono spedite usando le scale di riduzione, delle quali ecco brevemente la costruzione e l'uso.

Onde avere una scala di riduzione, si faccia prima una scala ticonica in un determinato rapporto, per esempio, nel rapporto dell'1/4000 (*fig.* 57). Dall'estremo M di questa scala si conducano tante rette i cui angoli con MN siano successivamente di 1°, 2°, 3°, ecc. fino a 60°; si marchino sui raggi gli angoli corrispondenti di 5° in 5°, come si vede nella figura, e si avrà in essa una scala di riduzione.

L'uso di questa scala è semplicissimo. Trattisi di trovare la distanza orizzontale fra due punti, essendo, per esempio, lunga 115^m la retta che li unisce, ed inclinata all'orizzonte di 31°. Altro non hassi a fare che prendere col compasso, sulla scala ticonica, la lunghezza pq di 115^m, portare quest'apertura sul raggio segnato 31° da M in r e restringere poco a poco il compasso finchè, stando una punta in r, l'arco descritto dall'altra risulti tangente alla MO in S; nella lunghezza $\overline{Sr} = \overline{Ms}$, che si misurerà sulla scala ticonica, si avrà evidentemente la proiezione orizzontale di $\overline{Mr} = \overline{pq}$ cioè la distanza orizzontale domandata.

Operazioni planimetriche eseguite colle sole canne o colla sola catena.

72. **Problemi che si possono risolvere col solo tracciare e misurare allineamenti sul terreno.** — I. *Rilevare l'angolo di due allineamenti.*

Per risolvere questo problema si chiuda con un allineamento DE l'angolo proposto ACB (*fig.* 58), o il suo opposto al vertice A′CB′ (*fig.* 59), o il suo supplemento A′CB (*fig.* 60), e si misurino i tre lati $\overline{CD}$, $\overline{CE}$ e $\overline{DE}$. Costruendo sulla carta in una scala qualunque il triangolo dce di lati proporzionali, e quindi equiangolo con DCE, e prolungando i lati cd e ce, si avrà in acb l'angolo dimandato.

Per ottenere con questa operazione, che assai di frequente occorre in pratica, un certo grado d'approssimazione, si procuri di prendere le lunghezze $\overline{CD}$ e $\overline{CE}$ piuttosto considerevoli, anche in relazione alla scala che vuolsi adottare per le costruzioni grafiche.

Conoscendosi i tre lati del triangolo CDE, è sempre possibile, con una formola trigonometrica, trovare l'ampiezza dell'angolo domandato. In questo caso però, per semplificare i calcoli, convien prendere $\overline{CD} = \overline{CE}$: imperocchè, chiamando C l'angolo DCE, facendo $\overline{CE} = \overline{CD} = d$, e $\overline{DE} = c$, si ha

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} C = \frac{c}{2d}.$$

II. *Dividere per metà l'angolo di due allineamenti il cui vertice è accessibile.*

Sia ACB (*fig.* 61) l'angolo a dividersi. Prese le lunghezze $\overline{CD}$

e $\overline{CE}$ eguali fra loro, si tracci l'allineamento $\overline{DE}$, e mediante misure se ne fissi il punto di mezzo, piantandovi una palina F. L'allineamento voluto troverassi determinato dai due punti C ed F, perchè nel triangolo isoscele CDE la retta che unisce il vertice C col mezzo F della base, divide per metà l'angolo al vertice.

III. *Per un punto preso fuori d'un allineamento condurne un secondo ad esso parallelo, e verificare se due allineamenti dati sono paralleli fra di loro.*

Sia AB (*fig.* 62 e 63) l'allineamento dato, e C il punto per cui vuolsi condurre l'allineamento parallelo. Presi due punti D ed E sull'allineamento AB, si conducano i due allineamenti DC ed EX incontrantisi in F, e si misurino $\overline{DF}$, $\overline{CF}$ ed $\overline{EF}$: supponendo risoluto il problema, nascono i due triangoli DFE, CFG simili fra di loro, e quindi si può fissare il punto G, sufficiente alla soluzione del problema, prendendo

$$\overline{FG}=\frac{\overline{EF}\times\overline{CF}}{\overline{DF}}.$$

Dalla data soluzione generale del problema consegue la soluzione comoda per la pratica, di condurre $\overline{DC}$ e di prendere $\overline{DF}$ (quando si operi come è indicato nella figura 62) eguale ad una metà o ad un terzo o ad un quarto, ecc. di $\overline{DC}$; di tracciare poscia $\overline{EF}$ e di prendere $\overline{EG}$ doppia o tripla o quadrupla, ecc. della $\overline{EF}$ medesima. Quando poi si opera come nella figura 63, si può prolungare $\overline{CD}$ d'una quantità $\overline{CF}$ eguale o doppia o tripla, ecc., della $\overline{CD}$, e fare in guisa che la $\overline{FG}$ sia anche eguale o doppia o tripla, ecc. di $\overline{EG}$.

È facile, dietro quanto si disse, verificare se due allineamenti AB ed HI (*fig.* 62 e 63) sono fra loro paralleli, bastando per ciò di prendere due punti D ed E sull'allineamento AB, e due altri C e G sull'allineamento HI, congiungere questi quattro punti in modo da avere due allineamenti DC ed EG intersecantisi in F, e vedere se risultano fra loro eguali i rapporti $\frac{\overline{DF}}{\overline{FC}}$ ed $\frac{\overline{EF}}{\overline{FG}}$.

IV. *Verificare se due allineamenti* CA *e* CB (*fig.* 64, 65 *e* 66) *sono perpendicolari fra di loro.*

1ª *Soluzione.* A partire da C (*fig.* 64) misurinsi, da C verso A e da C verso A′, le due quantità eguali $\overline{CD}$ e $\overline{CD'}$; su CB scelgasi un punto qualunque E, e si misurino ED ed ED′: se queste due lunghezze sono eguali, il triangolo DED' sarà isoscele sulla base $\overline{DD'}$, e la retta CE, che unisce il vertice col mezzo della base, sarà perpendicolare alla base medesima.

2ª *Soluzione.* Scelti due punti D ed E (*fig.* 65), il primo su CA ed il secondo su CB, dividasi per metà $\overline{ED}$ in F: se $\overline{FC}=\overline{FD}=\overline{FE}$, la circonferenza di circolo di centro F e di raggio $\overline{FD}$ deve passare per C e per E, e quindi l'angolo DCE, siccome inscritto in un semicircolo, sarà retto.

3ª *Soluzione.* Presi sugli allineamenti dati i due punti D ed E (*fig.* 66), si misurino $\overline{CD}$, $\overline{CE}$ e $\overline{DE}$: i due allineamenti CA e CB saranno perpendicolari fra loro quando sia verificata la relazione

$$\overline{DE}^2=\overline{CD}^2+\overline{CE}^2.$$

Verificandosi questa relazione in un triangolo i cui lati stanno fra loro $::3:4:5$, si deduce che l'angolo di due allineamenti CA e CB sarà retto quando, prendendo $\overline{CD}$ di 3 stabilite lunghezze e $\overline{CE}$ di 4, si trova $\overline{DE}$ eguale a 5 di queste lunghezze.

V. *Dati due punti collocati dalla medesima parte di un ostacolo, oppure uno da una parte e l'altro dall'altra, prolungare l'allineamento da essi determinato.*

Essendo A e B (*fig.* 67 e 68) i due punti dati, scelgasi sul terreno un punto E da cui vedansi gli altri due; si misurino le lunghezze $\overline{EA}$, $\overline{EB}$; e, fissato un punto F su $\overline{EA}$, si conduca per esso l'allineamento FX parallelo ad AB, misurando per questo scopo $\overline{EG}=\dfrac{\overline{EB}\times\overline{EF}}{\overline{EA}}$, dedotta dai due triangoli ABE ed FGE che devono essere simili fra di loro. Si conducano dopo EY ed EZ, trovandone le intersezioni H e K, non che le rispettive distanze da E. Osservando che tanto AC quanto AD devono risultare parallele ad FX, risultano, per similitudine di triangoli, i valori

$$\overline{HC}=\frac{\overline{FA}\times\overline{EH}}{\overline{EF}},\qquad \overline{KD}=\frac{\overline{FA}\times\overline{EK}}{\overline{EF}},$$

che, portati rispettivamente su EY ed EZ a partire da H e K, determineranno i punti C e D, sufficienti per servire a prolungare l'allineamento AB da una sola parte o da ambe le parti dell'ostacolo, secondo che si consideri il caso della figura 67 o quello della figura 68.

In pratica si prendono generalmente $\overline{EF}$ ed $\overline{EG}$ 1/2 o 1/3 o 1/4, ecc., di $\overline{EA}$ ed $\overline{EB}$, e si fanno poscia risultare $\overline{EH}$ ed $\overline{EK}$ rispettivamente 1/2 o 1/3 o 1/4, ecc. di $\overline{EC}$ e di $\overline{ED}$.

Questo problema, che efficacemente si presta a segnare sul terreno ed in mezzo a varii ostacoli diversi punti collocati in un medesimo allineamento, può presentare in varii casi un aspetto ben più difficile, come avviene quando fra i due punti A e B (*fig.* 69) vi è, per esempio, un bosco il quale impedisca di poterli scorgere amendue da un sol punto E del terreno. In tal caso scelgasi un punto F visibile da E, da cui si possa discernere il punto B; misurinsi $\overline{FE}$ ed $\overline{AE}$, e prendasi $\overline{FC}$ 1/2 o 1/3 o 1/4, ecc. di $\overline{FE}$; conducasi dal punto C l'allineamento CU parallelo ad A E e prendasi su esso $\overline{CH}$ che sia 1/2 o 1/3 o 1/4, ecc. di $\overline{AE}$. Il punto H unito al punto I, determinato col prendere $\overline{FI}$ 1/2 o 1/3 o 1/4, ecc. di $\overline{FB}$, darà l'allineamento H X parallelo ad AB. Ciò fatto, conducansi gli allineamenti FY ed F Z e si determinino le intersezioni K ed L con HX; prendansi in seguito le $\overline{KM}$ ed $\overline{LN}$ che siano rispettivamente eguali o doppie o triple, ecc. di $\overline{FK}$ ed $\overline{FL}$ e si avranno in M ed N i due punti necessarii per prolungare l'allineamento AB.

VI. *Misurare una distanza accessibile ai suoi due estremi.*

Scelto sul terreno il punto C (*fig.* 70) da cui risultino visibili i due estremi A e B, si traccino gli allineamenti CA e CB e sui loro prolungamenti si prendano $\overline{CD}$ e $\overline{CE}$ rispettivamente eguali a $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$; misurisi la lunghezza $\overline{ED}$, ed essa sarà eguale alla cercata $\overline{AB}$, come facilmente si può dedurre dai due triangoli ACB e DCE eguali, siccome aventi due lati rispettivamente eguali e l'angolo compreso eguale.

Qualora qualche ostacolo impedisca di ottenere $\overline{ED}$, si può prendere su $\overline{CA}$ o sul suo prolungamento un punto qualunque F e trovare su $\overline{CB}$ o sul suo prolungamento il punto G tale che la retta FG risulti parallela ad AB, onde far nascere i due triangoli simili ACB e FCG da cui si deduce

$$\overline{AB} = \frac{\overline{CA} \times \overline{FG}}{\overline{CF}}.$$

Si risolve più speditamente il problema prendendo $\overline{CF}$ e $\overline{CG}$

rispettivamente 1/2 o 1/3 o 1/4, ecc. di $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$, perchè allora anche $\overline{FG}$ deve essere 1/2 o 1/3 o 1/4, ecc. di $\overline{AB}$.

VII. *Trovare una distanza con un estremo accessibile e coll'altro inaccessibile ed invisibile.*

L'enunciato problema si presenta ben di frequente nelle operazioni trigonometriche, e generalmente il punto inaccessibile ed invisibile è un punto collocato nell'interno d'un edifizio di forma nota.

1° Trattandosi di trovare la distanza tra un punto O accessibile ed il centro C di una torre circolare (*fig.* 71), si conducano due visuali O A ed O B tangenti alla periferia della sua base, si divida per meta l'angolo B O A mediante la retta O D che prolungata va a passare pel centro C, e si misurino $\overline{OA}$ ed $\overline{OD}$: per la nota relazione geometrica esistente fra una tangente, una segante e la sua parte esterna si deduca prima

$$\overline{OM}=\frac{\overline{OA}^2}{\overline{OD}},$$

per poi avere

$$\overline{OC}=\frac{\overline{OM}+\overline{OD}}{2}.$$

2° Se il punto C (*fig.* 72) trovasi nell'asse di un edifizio di base rettangolare ABDE, si ha la distanza $\overline{CO}$ conducendo le visuali OA e OD, misurando le loro lunghezze e dividendole in parti proporzionali, per esempio, per metà: la retta che unisce i due punti di mezzo *a* e *d* di questi due lati è parallela ad AD, la visuale condotta pel punto *c*, preso sulla metà di *ad*, passa evidentemente pel punto C, e per la similitudine dei due triangoli OCA e O*ca* si ha $\overline{OC}=2\overline{Oc}$.

VIII. *Trovare una distanza tutta inaccessibile.*

Sia AB (*fig.* 73) la distanza inaccessibile che vuolsi trovare. Individuato sul terreno un punto C da cui risultino visibili gli estremi A e B della distanza a misurarsi, si traccino per esso gli allineamenti indefiniti AX, BY e CZ, prendendo su quest'ultimo i due punti D ed E equidistanti da C: si determini il punto F in allineamento con A e D; si prenda $\overline{CG}=\overline{CF}$ e si trovi l'intersezione H dell'allineamento EG con CX: analogamente si fissi il punto I in allineamento con B ed E; sul prolungamento di $\overline{CI}$ si misuri $\overline{CK}=\overline{CI}$ e si cerchi l'intersezione L dell'allineamento DK con CY; si misuri la retta $\overline{LH}$, ed essa sarà eguale ad $\overline{AB}$. — Per provare l'esattezza di questa soluzione, si considerino innanzi tutto i due triangoli DFC, ECG eguali, siccome aventi due lati rispettivamente eguali e l'angolo compreso eguale: da essi si deduce immediatamente l'eguaglianza dei due angoli FDC e GEC, poi quella dei due triangoli ADC e HEC, ed in seguito quella del lato $\overline{CA}$ col lato $\overline{CH}$. Partendo dai due triangoli DKC, EIC, si può nella stessa guisa dimostrare essere $\overline{CL}=\overline{CB}$ per conchiudere che i due triangoli ACB, HCL sono eguali, siccome aventi due lati rispettivamente eguali e l'angolo compreso eguale, e che $\overline{LH}$ è eguale ad $\overline{AB}$.

Qualora si voglia operare da una sola parte dell'allineamento DZ, basta prendere $\overline{Cd}$, $\overline{Cf}$, $\overline{Ce}$, $\overline{Ci}$ rispettivamente 1/2 o 1/3 o 1/4, ecc. di $\overline{CD}$, $\overline{CF}$, $\overline{CE}$, $\overline{CI}$; condurre *df* ed *ei*, e trovare i punti d'intersezione *a* e *b* con CA e CB per determinare $\overline{ab}$ che sarà 1/2 o 1/3 o 1/4, ecc. di $\overline{AB}$.

Osservazione. Se la distanza a trovarsi è accessibile in un sol estremo, per esempio in B, e in nessun altro punto della sua direzione, si determina il punto H come qui sopra venne indicato, e si determina il punto L prendendo $\overline{CL}=\overline{CB}$. Se poi vuolsi operare da una sol parte di DZ, si trova, come già si disse, il punto *a*, e si porta su $\overline{CB}$ la $\overline{Cb}$ 1/2 o 1/3 o 1/4, ecc. di $\overline{CB}$.

IX. *Determinare la posizione di un punto per rapporto ad altri punti già fissati.*

A seconda della posizione del punto a determinarsi e dei punti già fissati si possono presentare diversi casi, e si vedranno qui sotto quei pochi che assai facilmente si risolvono con sole misure dirette.

1° Se i due punti A e B già fissati sulla carta in *a* e *b* (*fig.* 74) ed il punto C a fissarsi sono accessibili, si conducano due allineamenti AC e BC, e si misurino le loro lunghezze. Supposto che sia $\frac{1}{n}$ la scala del disegno in cui trovansi i due punti *a* e *b*, si costruisca il triangolo *abc* di lati $\overline{ac}=\frac{1}{n}\overline{AC}$ e $\overline{bc}=\frac{1}{n}\overline{BC}$, ed avrassi così il punto *c* rappresentativo di C.

2° Essendo inaccessibile uno dei punti già fissati, per esempio il punto B (*fig.* 75), si scelga il punto D sulla parte accessibile di AB, e si misurino i tre lati $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ e $\overline{CA}$; si costruisca il triangolo adc di lati $\overline{ad}=\frac{1}{n}\overline{AD}$, $\overline{ac}=\frac{1}{n}\overline{AC}$ e $\overline{dc}=\frac{1}{n}\overline{DC}$: il punto c sarà evidentemente il domandato.

3° Se è inaccessibile soltanto il punto C a determinarsi, si conducano due allineamenti, l'uno da A e l'altro da B (*fig.* 76); si determinino le loro intersezioni A′ e B′ con $\overline{BC}$ ed $\overline{AC}$; misurinsi $\overline{AA'}$ e $\overline{BA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{AB'}$, e si avrà quanto basta per compiere la soluzione del problema. Infatti, costruendo su ab il triangolo aba' simile ad ABA′, si ha la direzione bx su cui trovasi il punto voluto; e costruendo l'altro abb' simile ad ABB′, si ha un'altra direzione che, intersecando la bx in c, dà il punto richiesto.

Se l'allineamento AB (*fig.* 77) è soltanto accessibile sui prolungamenti, si costruiscano i due triangoli AA′A″, BB′B″ e si misurino i loro lati. Prendendo i prolungamenti $\overline{aa'}$ e $\overline{bb'}$ di $\overline{ab}$ rispettivamente eguali ad $\frac{1}{n}\overline{AA'}$ e $\frac{1}{n}\overline{BB'}$, si facciano su essi i triangoli $aa'a''$, $bb'b''$ simili ad AA′A″, BB′B″, e prolungando le due rette $a''a$ e $b''b$ si avrà nella loro intersezione il punto domandato c.

4° Quando si vuol riferire la posizione del punto D (*fig.* 78) a determinarsi a tre punti A, B e C già fissati sul disegno in a, b e c, si collochi una palina all'intersezione E dei due allineamenti AB e CD, e si misurino $\overline{AE}$ ed $\overline{ED}$. Prendendo sul disegno $\overline{ae}=\frac{1}{n}\overline{AE}$, tracciando la ce e portando su essa $\overline{ed}=\frac{1}{n}\overline{ED}$, si determina il punto d rappresentativo di D.

X. *Collegare un punto del terreno ad oggetti stabili.*

Il collegamento di un punto del terreno ad oggetti stabili si fa col mezzo di allineamenti diretti a punti fissi, combinati in modo che la loro intersezione cada o sul punto a determinarsi, o poco lungi del medesimo, cosicchè lo si possa ristabilire mediante alcune semplici misure di rette. A dare un'idea di tale operazione si espongono qui sotto alcuni casi semplicissimi dove P è il punto che vuolsi collegare ad oggetti stabili.

1° Se in vicinanza di P esistono due punti fissi A e B (*fig.* 79), si possono dirigere da questi due allineamenti a quello, e misurare $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$: in tali lunghezze si avrà quanto basta per ristabilire con semplici operazioni il punto P. A controllare la posizione del punto P può valere la distanza che esso ha da un altro punto D.

2° Se in vicinanza del punto P (*fig.* 80) si trovano tre oggetti fissi A, B e C, si determina la posizione di quello per rapporto a questi colle misure di $\overline{AD}$ e $\overline{DP}$.

3° Se in lontananza del punto P (*fig.* 81) esistono degli oggetti stabili A, B, C e D, si può trovare l'intersezione E delle diagonali del quadrilatero da essi determinato; tracciare un allineamento FG passante per P, intersecante AC in G e BD in F; e misurare $\overline{EF}$, $\overline{EG}$ e $\overline{GP}$.

73. **Rilevamento coi soli strumenti che servono a misurare distanze.** — Siccome gli strumenti che servono a misurare distanze, e principalmente le canne, sono i più comuni e quelli che tutti si possono procacciare colla massima facilità, è bene vedere di quali risorse possono essere nelle levate dei piani, quantunque, salvi alcuni casi, si sogliano i medesimi accoppiare ad altri strumenti onde rendere più spedita ed esatta l'operazione.

La poligonazione triangolare è la più vantaggiosa, e quasi quella da adoperarsi esclusivamente in operazioni di tal genere. I dettagli si rilevano: o col metodo delle perpendicolari, quando queste non eccedono in lunghezza i 10 o i 12 metri, usando di una canna per segnare la direzione della base e di un'altra per avere quella della perpendicolare; o traendo partito del prolungamento di alcune linee di confine finchè incontrino quella d'operazione. Le distanze si contano sempre da un estremo dell'allineamento d'operazione che si percorre; e per non essere costretti a levare la canna da questo per misurare la perpendicolare o un'altra linea qualunque, è bene operare con tre canne. Le lunghezze trovate si registrano senza ridurle in metri, cosicchè esprimendo canne la parte posta a sinistra di un punto, si hanno ordinatamente nelle tre cifre poste a diritta i metri, i decimetri ed i centimetri.

Rilevamento dei terreni accessibili nel loro interno. — Volendosi rilevare il terreno rappresentato nella figura 82, s'incomincierà dal percorrerlo e dal tracciare una poligonazione in quel modo che le circostanze locali persuaderanno come migliore. Si condurranno le diagonali per scomporla in tanti triangoli di cui si misureranno tutti i lati, collegandovi nello stesso mentre i dettagli che loro passano in prossimità. Dalla figura chiaramente appare come le parti di perimetro CD ed EF siansi rilevate con prolungamenti ed intersezioni, e le altre con perpendicolari.

Si eseguisce il piano in una determinata scala dell'$\frac{1}{n}$, incominciando dal costrurre, mediante i loro tre lati, i triangoli componenti la poligonazione. I dettagli si collocano a sito, seguendo una regola in tutto analoga a quella già tenuta sul terreno; e, se pur è superfluo il dire come si costruiscono i punti rilevati col metodo delle perpendicolari, giacchè tutti coloro, cui questo mio corso è dedicato, sanno trovare un punto conoscendo le sue coordinate, non può riuscire inutile l'aggiungere qualche cosa sul modo di disegnare i dettagli rilevati con prolungamenti ed intersezioni. Così, prendendo particolarmente in considerazione il perimetro rappresentato fra i punti C e D, si determinino prima sulla cd i punti h, l, rappresentativi di H, L, col prendere $\overline{ch} = \frac{1}{n}\overline{CH}$, $\overline{cl} = \frac{1}{n}\overline{CL}$. Su $\overline{ch}$ si costruisca il triangolo cgh, di cui si ha il lato $\overline{ch}$, non che gli altri due $\overline{cg}$, $\overline{hg}$ rispettivamente eguali ad $\frac{1}{n}\overline{CG}$, $\frac{1}{n}\overline{HG}$. Condotta la $\overline{gh}$ e prolungata della lunghezza $\frac{1}{n}\overline{HI}$, si ha il punto i rappresentativo di I, il quale congiunto con l determina la retta $\overline{il}$, su cui portando, a partire da l, la retta $\overline{lk} = \frac{1}{n}\overline{LK}$, si fissa il punto k che, congiunto con d, compie la costruzione. La misura totale di $\overline{IL}$ non venne impiegata nell'indicata costruzione: essa però non è inutile, e va considerata come un mezzo di verificazione.

Rilevamento dei terreni solo accessibili al perimetro. — La figura 83 rappresenta una porzione di terreno inaccessibile nel suo interno, per esempio, un bosco da rilevarsi circoscrivendovi un poligono ABCDEF, di cui si devono misurare tutti i lati e tutti gli angoli, come si insegnò al num. 72, e determinando i dettagli in parte con perpendicolari ed in parte con prolungamenti ed intersezioni.

La costruzione del piano si effettua incominciando dalla poligonazione, costruendo tutti gli angoli del perimetro (num. 72) e venendo ai dettagli. Se i vertici successivamente determinati furono f, a, b, c, d, e, la misura del lato $\overline{EF}$, non che quelle determinanti i due angoli in E ed F non servono alla costruzione del piano, e solo sono mezzi di verificazione.

Acciocchè una tale operazione possa raggiungere un certo grado di esattezza, bisogna procurare che il poligono circoscritto sia del minor numero possibile di lati, perchè allora diminuiscono gli elementi determinanti gli angoli al perimetro della poligonazione, dalla cui costruzione appunto derivano i più gravi errori. Se è possibile, converrà fare in guisa che la poligonazione sia un triangolo, o almeno un quadrilatero, o un pentagono, o un esagono; perchè, nel maggior numero dei casi si possono con costruzioni geometriche ottenere per queste tre ultime figure, supposte inaccessibili nel loro interno, tutte le lunghezze necessarie a ridurle ad una poligonazione triangolare, misurando quelle diagonali che sono necessarie come distanze inaccessibili ai loro estremi. Se la poligonazione ha più di sei lati, necessità vuole che si segua il metodo generale, e un accorto operatore, lavorando sul terreno, dovrà anche pensare alla costruzione del piano, procurando di prendere i lati dei triangoli, che determinano gli angoli, non troppo brevi, ed in modo che quelli inservienti al collocamento dei vertici per intersezione vengano a tagliarsi sotto un angolo nè troppo acuto nè troppo ottuso.

Rilevamento dei caseggiati. — Gli strumenti che servono a misurare distanze riescono vantaggiosi nel rilevamento dei caseggiati e loro spettanze, come cortili, giardini, orti, ecc.; e generalmente l'operazione va fatta in modo da riferire la posizione del fabbricato ad uno o più allineamenti d'operazione, già preventivamente tracciati per rilevare i terreni circostanti.

Volendosi rilevare il caseggiato ed annesso cortile rappresentato nella figura 84, ed essendo XY l'allineamento d'operazione, si prolungheranno alcune delle sue facce fino ad incontrarlo in A, B e C, e si prenderanno innanzi tutto le misure necessarie per costrurre il triangolo *acd* rappresentativo di ACD, e quelle per trovare i punti *e* ed *f*, prolungando $\overline{ad}$ in modo che risultino $\overline{ae} = \frac{1}{n}\overline{AE}$ ed $\overline{af} = \frac{1}{n}\overline{AF}$. Misurata la $\overline{AB}$, per portare sul piano $\overline{ab} = \frac{1}{n}\overline{AB}$, si devono avere le lunghezze totali di $\overline{FG}$ e di $\overline{BG}$ per porsi in istato di determinare il punto *g* nell'intersezione di due archi di centri *f* e *b* e di raggi rispettivamente eguali $\frac{1}{n}\overline{FG}$, $\frac{1}{n}\overline{BG}$: il punto *h*, rappresentativo di H, vien determinato colla misura di $\overline{BH}$ e prendendo sul piano $\overline{bh} = \frac{1}{n}\overline{BH}$. Trovando le due lunghezze $\overline{CI}$ e $\overline{BI}$ si hanno dei mezzi di verificazione. Dietro le esposte operazioni resta determinata la retta $\overline{HF}$, e prolungando le facce NM ed OP fino ad incontrarla, colle distanze $\overline{FK}$ ed $\overline{FL}$ si fissano le due intersezioni K ed L, facili a porsi sul piano, prendendo $\overline{fk}=\frac{1}{n}\overline{FK}$, $\overline{fl}=\frac{1}{n}\overline{FL}$. Coll'intersezione di due archi di centri k ed e, e di raggi rispettivamente eguali alle lunghezze grafiche delle rette cognite $\overline{KM}$ ed $\overline{EM}$, si ha il punto m rappresentativo di M: il punto N, essendo sul prolungamento di $\overline{KM}$, rimane determinato colla sola distanza $\overline{KN}$, la cui lunghezza grafica va portata sul piano in $\overline{kn}$. Colle distanze $\overline{NO}$ ed $\overline{LO}$ si ha mezzo di poter descrivere, coi centri in n ed l, due archi di raggi rispettivamente eguali ad $\frac{1}{n}\overline{NO}$ ed $\frac{1}{n}\overline{LO}$ e quindi di avere il punto o; conosciuta la misura di $\overline{LP}$, si fissa sul piano il punto P portando $\overline{lp}=\frac{1}{n}\overline{LP}$. Misurando la lunghezza totale di $\overline{FH}$, si ha un mezzo di verificazione.

Volendosi rilevare un altro caseggiato, confinante su due lati con altre fabbriche, si può innanzi tutto determinare l'angolo di CA (*fig.* 85) con AB (num. 72), misurare le lunghezze esterne $\overline{AB}$ ed $\overline{AC}$ delle due maniche, non che le loro larghezze $\overline{HI}$ ed $\overline{FG}$: con tali misure, posto che la larghezza di ciascuna manica sia costante, si ha già mezzo di determinare il punto K; misurando $\overline{KL}$, $\overline{LN}$ e $\overline{KN}$ riesce possibile la costruzione del triangolo KLN, e quindi quella dell'altro triangolo MNO quando si conoscano $\overline{KM}$, $\overline{MO}$ ed $\overline{NO}$. Colla sola misura di $\overline{OP}$ si determina il punto P, ed è sufficiente di misurare $\overline{KQ}$ per collocare sul piano il punto rappresentativo di Q.

Rilevamento dei terreni inaccessibili. Se i soli strumenti che servono a misurare distanze possono essere di qualche vantaggio nelle levate dei terreni accessibili o soltanto accessibili al loro perimetro, risultati poco soddisfacenti si possono aspettare nel rilevare terreni totalmente inaccessibili col metodo d'intersezione. Qui però, per non lasciare incompleta la quistione del rilevamento coi soli strumenti che servono a misurare distanze, si accennerà al caso semplicissimo del rilievo del terreno rappresentato nella figura 86.

Come lo indica la figura medesima, si è scelto AB come allineamento di base; si individuò su esso un punto C e su AE un punto D; si determinarono le intersezioni con DC degli allineamenti diretti da A ai vertici da rilevarsi, prendendo tutte le misure necessarie a tale oggetto; si misurò $\overline{AB}$, e finalmente venne ripetuta in B l'operazione già fatta in A.

Per costrurre il piano s'incomincia dal tracciare la $\overline{ab} = \frac{1}{n}\overline{AB}$; ai suoi estremi si fanno gli angoli xab, yba eguali agli angoli $\overline{EAB}$, GBA del terreno, non tralasciando di segnare le rette $\overline{dc}$, $\overline{hi}$. Per collocare a sito, per esempio, il punto f rappresentativo di F, si prende $\overline{cl} = \frac{1}{n}\overline{CL}$, $\overline{im} = \frac{1}{n}\overline{IM}$, e nell'intersezione dei prolungamenti di $\overline{al}$ e $\overline{bm}$ si ha il punto dimandato. Nello stesso modo si collocano a sito gli altri punti.

74. **Norme generali per il rilevamento di una grande porzione di terreno**. — Da quanto si è fin qui detto, sia nelle generalità sul rilevamento, sia nel rilevamento colle sole canne o colla sola catena, sembra che si possano ritenere le seguenti norme generali per conseguire la mappa di una grande porzione di terreno nel modo più giusto e più sicuro.

1° Si percorra innanzi tutto e in ogni direzione il terreno, facendo a vista l'abbozzo delle indicazioni locali, e indicando i confini a rilevarsi con paline piantate nei loro vertici e meno alte di quelle che voglionsi usare pel tracciamento della poligonazione.

2° Si guidino sul terreno diversi allineamenti in modo da formare una serie di triangoli piuttosto grandi, aventi due a due un lato comune, di forma sensibilmente equilatera, e coi loro lati passanti, per quanto si può, in siti accessibili ed in vicinanza delle linee da rilevarsi. Se alcune parti del perimetro si trovano ancora assai discoste dagli accennati allineamenti, si formino altri triangoli secondarii di forma sensibilmente rettangola, coi loro lati maggiori sui lati dei primi. In vicinanza dei confini interni, che rimangono dopo ciò ancora discosti dai lati dei triangoli, si conducano degli allineamenti trasversali, collegati ai lati dei triangoli.

3° Percorrendo ordinatamente i lati dei triangoli primarii, poi quelli dei triangoli secondarii, ed in seguito le trasversali, vi si colleghino i dettagli, registrando tutte le misure su un abbozzo che si fa progredire di pari passo coll'operazione del terreno.

4° Cogli abbozzi ottenuti sul terreno si eseguisca al tavolino la costruzione del piano, incominciando dal tracciare alla matita i triangoli maggiori, poi i minori, ed in seguito le trasversali. Seguendo l'ordine medesimo tenuto sul terreno, si portino su ciascuno dei lati della poligonazione così costrutta le lunghezze grafiche corrispondenti ai numeri registrati sull'abbozzo, innalzando al loro sito le perpendicolari della lunghezza voluta, e facendo quelle semplici costruzioni grafiche che sono necessarie per fissare i punti rilevati con prolungamenti di rette o misurando i tre lati di un triangolo. Fatto questo, si passi a delineare in inchiostro le linee rappresentanti i confini di proprietà, le strade, i corsi d'acqua, ecc. e quanto occorre di avere nel piano. Generalmente gl'incontri delle trasversali coi lati dei triangoli sono determinati, e allora le lunghezze delle trasversali sono altrettanti mezzi di verificazione.

1ª *Osservazione*. La maggior parte dei vertici della poligonazione si determina coll'intersezione di due archi, e questa rimanendo male precisata quando gli archi si tagliano sotto angolo troppo acuto o troppo ottuso, ne segue la necessità di trovar modo che i lati, i quali devono concorrere nei vertici a determinarsi per intersezione, abbiano fra loro una direzione quasi perpendicolare. Questo non è conseguibile nei triangoli primarii, perchè un cateto dell'uno dovendo servire come ipotenusa dell'altro, si ottiene una serie di triangoli che diminuiscono dall'uno all'altro e che ben tosto acquistano delle proporzioni non ammissibili. La forma sensibilmente equilatera, siccome quella che tende a mantenere delle medesime dimensioni tutti i triangoli primarii, è la sola ammissibile per questi, mentre pei triangoli secondarii, che non hanno fra loro alcuna dipendenza, sembra preferibile la forma sensibilmente rettangola.

2ª *Osservazione*. Se nel terreno da rilevarsi esiste qualche parte inaccessibile, come un bosco, uno stagno e simili, a cui non sia circoscrivibile uno dei triangoli della poligonazione, conviene circoscrivervi il poligono del minor numero possibile di lati; e se le inclinazioni di questi ultimi non restano determinate dalla costruzione dei triangoli e delle trasversali, bisogna prendere le misure necessarie alla costruzione dei loro angoli, come già si insegnò nel numero 72.

La stessa osservazione vale per il rilevamento di un aggregato di caseggiati, come sarebbe un villaggio, una borgata, una città. In tale caso convien condurre, lungo le contrade principali, degli allineamenti i più estesi possibili, e terminati, se le ciscostanze lo permettono, ai lati del poligono circoscritto. Per tal modo il poligono principale resta scomposto in altri secondarii, comprendenti generalmente diversi isolati, ciascuno dei quali si racchiuderà in un poligono terziario con allineamenti collegati in parte ai lati del poligono circoscritto, in parte agli allineamenti condotti nelle contrade principali, e guidati in tutte le vie, tanto grandi quanto piccole, o anche attraverso di aperture praticabili esistenti nei fabbricati. Questi allineamenti si fanno generalmente passare per il mezzo delle contrade, e quando il suolo è selciato bisogna tracciarli con paline munite di plinto; se però tutte o la maggior parte delle facce delle case, che costeggiano una via, si trovano in un medesimo piano verticale, ogni tracciamento può divenire superfluo, e la direzione delle accennate facce può essere presa come allineamento d'operazione. In generale si conservano le tracce degli accennati allineamenti o con picchetti o con piccole croci fatte sul lastrico collo scalpello.

Dopo ciò s'intraprenderanno ordinatamente le misurazioni dei lati del gran poligono, quella dei lati dei poligoni secondarii, ed in ultimo quelle dei lati dei poligoni terziarii, fissando convenientemente le loro intersezioni, collegandovi i dettagli e registrando le misure desunte sull'apposito abbozzo dei rilievi locali. Se l'aggregato di case a rilevarsi è assai ampio, converrà, a scanso di ogni confusione, ottenere un primo abbozzo di tutta la poligonazione, fatto in iscala talmente piccola da poter esser tutto contenuto in un foglio, e farsi poscia altri abbozzi dei singoli isolati in iscala maggiore, ben raccordati fra loro affinchè con facilità ed esattezza si possa giungere alla costruzione del piano.

75. **Rilevamento della pianta di un fabbricato, distinguendone i vari suoi membri.** — Il piano di un fabbricato, detto generalmente *pianta*, deve rappresentare la sezione orizzontale fatta nella fabbrica ad una determinata altezza. Un fabbricato, annoverando generalmente più piani, e non essendo questi tutti eguali fra di loro, se ne eseguirà il compiuto rilevamento facendo tante piante diverse quanti sono i piani.

Volendosi rilevare la pianta di un piano di fabbrica, si usa da taluni immaginare il piano segante guidato un po' al di sopra dei davanzali delle finestre; se non che, variando quest'altezza anche in un medesimo fabbricato, trovasi miglior partito di scegliere, come piano segante, quello stesso del pavimento del piano che si rileva, e di segnare le aperture come se il piano le tagliasse, sebbene effettivamente non le tagli. Finalmente è uso di proiettare sopra il piano, in linee piene, gli aggetti degli zoccoli, delle basi e gli spigoli dei gradini della prima rampa per cui si sale; in linee punteggiate gli aggetti di fasce, cornici, mensole, gli spigoli delle vôlte e gli spigoli dei gradini delle rampe superiori alla prima.

Molte minute avvertenze sono necessarie nel rilevamento di un fabbricato, e le principali sono le seguenti:

1° Esaminando il fabbricato, di cui si vuole la pianta, si ottenga un abbozzo a vista, e in tale scala approssimativa, che si possano in esso figurare e notare senza imbarazzo le minime dimensioni necessarie all'esattezza che si desidera nel rilevamento.

2° S'incominci dal rilevamento del perimetro esterno, avvertendo di prendere i minuti particolari, misurando le loro distanze da uno spigolo estremo della faccia percorsa, e di fissare gli angoli di due facce che si seguono, come si disse al numero 72. Succede spesso che qualche tratto di perimetro o è curvo o è costituito da brevi tratti rettilinei o anche da tratti rettilinei non tanto brevi, ma comprendenti angoli molto ottusi, o finalmente contiene risalti non rettangolari. In tal caso è necessario rilevare questo tratto col metodo delle perpendicolari e anche con qualche prolungamento, riferendo le posizioni dei varii suoi punti ad una stessa retta segnata sul terreno col mezzo di uno spago ben teso e da collegarsi alle altre del perimetro col noto metodo. Le perpendicolari, quando vogliasi operare con molta esattezza, si conducono col mezzo di una squadra di cui si applica un cateto lungo lo spago, mentre secondo l'altro si colloca una canna facendo cadere il suo estremo nel punto che vuolsi rilevare.

3° Terminata l'operazione al perimetro, si entri in un primo membro; si misurino esattamente i lati che formano il suo perimetro, fissandone anche i dettagli; si prendano le diagonali che dividono il membro stesso in triangoli, oltre ad altre di verificazione; si fissino bene le grossezze dei muri e le dimensioni di tutte le aperture in essi esistenti; finalmente si operi nello stesso modo in ciascuno degli altri membri che compongono il fabbricato.

Può succedere che in qualche muro, non trovandosi apertura, riesca impossibile di prendere direttamente la grossezza: allora converrà conchiuderla, se il muro viene ad incontrare un muro perimetrale, prendendo esternamente le distanze fra le due spalle più vicine di due finestre che lo comprendono e sottraendo la somma delle distanze delle spalle stesse alle pareti del detto muro, prese internamente; o converrà qualsiasi altro ripiego che sapranno suggerire le circostanze locali.

4° È convenientissimo, quando si può, produrre qualche retta dall'esterno all'interno par collegarvi ad essa, nel miglior modo possibile, non solo il perimetro esterno, ma anche alcune parti dell'interno, sia con triangoli ad essa appoggiati, sia con prolungamenti ed intersezioni.

Se il piano del fabbricato è alquanto esteso, converrà rilevare il perimetro sopra un abbozzo fatto in iscala minore, non segnandovi i particolari, e quindi registrare questi su altri abbozzi parziali fatti in iscala maggiore. I mezzi di verificazione si dovranno curare con tutta la diligenza: le lunghezze di alcune diagonali e la misura di una stessa retta in due diversi modi, sono i più comuni. Se le differenze non eccedono le prestabilite tolleranze, si compie il disegno della pianta, incominciando dal perimetro esterno e venendo poscia alle parti interne, seguendo in tutto un processo analogo a quello seguìto nel rilevamento e nel fare l'abbozzo; diversamente converrà riconoscere l'errore e correggerlo.

ARTICOLO V.

Squadro agrimensorio.

76. **Descrizione dello squadro agrimensorio.** — Generalmente dicesi *squadro* uno strumento il quale può servire a segnare sul suolo angoli retti, semiretti e tripli di semiretto. Quello che suolsi usare dai nostri misuratori è conosciuto sotto il nome di *squadro agrimensorio*, e consta di due parti chiamate, l'una il *bussolo* e l'altra il *sostegno* o *bastone*.

Il bussolo è costituito da un cilindro cavo, generalmente di ottone (*fig.* 87), di sette a dieci centimetri di diametro per otto a undici di altezza, chiuso al disopra e al disotto, ove trovasi un manico vuoto, foggiato a tronco di cono col suo asse sul prolungamento di quello dell'accennato cilindro. Attraverso alla lamina cilindrica e nel senso delle generatrici sono praticate otto fessure dette *traguardi;* quattro lunghe e quattro brevi, alternativamente disposte, e determinanti quattro piani passanti per l'asse dello strumento ad angoli semiretti fra loro. Nella base superiore del bussolo sono praticati altresì otto traguardi posti rispettivamente negli stessi piani dei traguardi suddetti.

La forma cilindrica non è la sola che si possa dare al bussolo, e non di rado avviene di riscontrare la forma prismatica con base ottagonale.

Il bastone dello squadro consiste in un sostegno prismatico o leggiermente piramidale di legno, ben diritto e di poco minore dell'altezza dell'occhio di chi deve operare, ferrato ad un estremo per conficcarlo verticalmente nel suolo ed avente all'altra estremità un collo a tronco di cono per adattarvi il bussolo.

77. **Uso dello squadro agrimensorio.** — Lo squadro agrimensorio serve a facilitare il tracciamento di allineamenti e a segnare sul terreno delle direzioni facenti fra loro angoli retti, semiretti

e tripli di semiretto. Per apprendere il suo uso riesce utile la risoluzione delle seguenti quistioni.

I. *Tracciare collo squadro agrimensorio un allineamento passante per due punti* A *e* B *individuati sul terreno con paline.*

1° Se è possibile far stazione in uno dei punti dati, per esempio in A (*fig.* 88), si pianta verticalmente lo squadro nell'accennato punto, e si mira per due traguardi diametralmente opposti la palina collocata in B. Facendo piantare nella direzione di questa visuale quante paline si vogliono, si avrà il cercato allineamento.

2° Se è soltanto possibile di far stazione in un punto C (*fig.* 89) del prolungamento di AB, si collocherà verticalmente lo squadro nel detto punto, in guisa che per una coppia di traguardi si scoprano le due paline A e B. Poscia si procede come nel caso antecedente.

3° Quando finalmente si possa soltanto andare collo squadro in un punto intermedio fra A e B (*fig.* 90), si sceglierà sul terreno un punto che a vista sembri nell'allineamento AB. Piantatovi lo squadro, si osserverà se scoprendo per una coppia di traguardi la palina A, si scorga per la medesima anche la palina B. Se ciò ha luogo, si fanno piantare delle paline che saranno nel voluto allineamento; ed in caso contrario, si procura di avvicinarvisi trasportando lo squadro e ripetendo l'operazione, finchè dopo poche e facili prove si giunga ad avere lo squadro in un punto C della direzione AB.

II. *Tracciare un allineamento che, partendo da una pianura, si estenda attraversando i dossi di una collina.*

Siano A e B (*fig.* 91) i due punti del terreno determinanti l'allineamento a tracciarsi. Si collochi lo squadro al piede B dell'ascesa e, giratolo finchè per una coppia di traguardi si scorga il punto A, si facciano piantare nella stessa direzione, prima le paline *a* e *b* sulla pianura, poi le *c* e *d* lungo la salita. Dopo si ponga una palina nel punto B, si trasporti lo squadro alla sommità C dell'altura, e, condotto il raggio visuale nella direzione *d*, *c* e B, si facciano stabilire le paline *e* ed *f* nella discesa, servendosi, se è necessario, dei traguardi esistenti sulla base superiore del bussolo. Collocata una palina in C al posto dello squadro, si venga in D al fine della discesa; si rivolga una coppia di traguardi sulle paline *f*, *e* e C, si osservi dalla parte opposta lungo la salita, ed agevole riuscirà il collocamento delle paline *g* ed *h*. Finalmente, stazionando alla sommità E e dirigendo un raggio visuale sulle paline *h*, *g* e D, si potrà prolungare l'allineamento in *i* e verificare se le paline poste da C in E sono ben allineate.

III. *Per un punto* C, *scelto su un allineamento* AB, *tracciarne un secondo, inclinato dalla parte* CA *di un angolo semiretto o retto o triplo di semiretto* (*fig.* 92, 93 e 94).

Posto verticalmente lo squadro nel punto C, si giri il bussolo in modo da vedere per una coppia di traguardi il punto A e si faccia fissare al suolo la palina D e quante altre si vogliono, collimando col primo o col secondo o col terzo traguardo, che ordinatamente tien dietro a quello cui si è già accostato l'occhio, secondochè vuolsi segnare sul terreno un angolo semiretto o retto o triplo di semiretto.

IV. *Per un punto* C, *preso fuori di un allineamento* AB, *condurne un secondo facente coll'allineamento dato un angolo semiretto o retto o triplo di semiretto* (*fig.* 95, 96 e 97).

Si cammini sull'allineamento dato, finchè si possa supporre di essere in vicinanza della sua intersezione con quello a tracciarsi; si pianti lo squadro, e volgendo una coppia di traguardi ad una palina, per esempio alla A, si osservi (secondochè vuolsi un angolo semiretto o retto o triplo di semiretto) se per la prima o per la seconda o per la terza fessura, che segue in ordine a quella per cui si è collimato in A, si vede il punto C. Se ciò ha luogo, il piede dello squadro è pure un punto del cercato allineamento. Se poi non si può scoprire il punto C, convien portare innanzi o indietro lo strumento sulla AB, e ripetere l'operazione per giungere, dopo tentativi più o meno lunghi, a segnare l'allineamento CD.

78. **Verificazioni dello squadro agrimensorio.** — Dal sin qui detto è facile il conchiudere che uno squadro agrimensorio può solo servire a fare operazioni esatte quando, essendo verticale l'asse dello strumento, siano adempiute le seguenti condizioni:

1° *Che i traguardi opposti sieno in quattro piani verticali;*

2° *Che questi piani s'intersechino nell'asse dello strumento; che facciano fra loro angoli retti e semiretti; e che l'asse di rotazione del bussolo sia sul prolungamento di quello del bastone.*

1ª *Verificazione.* La prima condizione sarà adempiuta quando, piantato verticalmente lo squadro nel terreno, si vegga, per tutta l'altezza della coppia di traguardi a sperimentarsi, un filo a piombo sospeso a 15 o 20 metri di distanza dallo strumento, perchè allora il piano determinato dagli accennati traguardi, passando per una linea verticale, sarà anche verticale. Girando poi il bussolo, si può analogamente verificare la verticalità dei piani di tutti i traguardi, e conchiudere che le loro intersezioni sono parallele, verticali, e quindi parallele all'asse del bastone. Uno strumento che non soddisfi a questa prima condizione è assolutamente inservibile.

2ª *Verificazione*. Per verificare se i quattro piani determinati dalle coppie di traguardo vengono ad intersecarsi nell'asse di rotazione del bussolo, e se gli angoli da essi determinati sono retti o semiretti, vale il seguente processo. Piantato verticalmente lo squadro, di cui si suppone rappresentata nella figura 98 la proiezione orizzontale, traguardando per tre fessure successive a, b e c, si facciano collocare le tre paline A, B e C. Si giri il bussolo finchè dalla fessura a, da cui vedevasi A, si scopra B; se, traguardando per b e per d, si vedono C e A, si avrà una prova: 1° che gli angoli $d'Oa'$, $a'Ob'$ e $b'Oc'$ dei piani delle quattro coppie di traguardo sono eguali, perchè l'angolo $d'Oa'$ ha preso, dopo la rotazione, il posto dell'angolo $a'Ob'$, e quest'ultimo il posto dell'altro $b'Oc'$; 2° che i quattro piani determinati dalle coppie di traguardo vengono ad intersecarsi nell'asse del bussolo, giacchè (supponendo che questi piani si taglino secondo una medesima linea verticale P (*fig.* 99) posta fuori dell'asse di rotazione O del bussolo) la rotazione del bussolo, finchè da a si vegga B, porterebbe l'accennata intersezione in un punto P', per cui sarebbe impossibile di vedere C traguardando per b, ed A per d, salvo il caso particolarissimo in cui i quattro punti A, B, C e P si trovino su una medesima circonferenza di circolo, e che P' sia nell'intersezione di questa con quella descritta col centro in O con raggio eguale ad $\overline{OP}$.

Girando il bussolo una seconda volta finchè da a scoprasi C (*fig.* 98), ed osservando se da c' e da d si vedono rispettivamente A e B, si acquisterà la certezza: 1° che i due angoli adiacenti cOa' e $a'Oc'$ sono eguali e quindi retti, perchè il primo si mette al posto dell'altro; 2° che i due angoli $a'Ob'$ e $b'Oc'$ sono semiretti, perchè ciascuno è la metà di un retto, che tale è pure l'angolo $d'Oa'$ ed il suo complemento cOd' e che per conseguenza tutti gli angoli compresi fra i piani delle quattro coppie di traguardo sono semiretti.

Ripetendo l'operazione col girare il bastone e col lasciare fisso il bussolo, si verifica se l'asse di questo è sul prolungamento dell'asse di quello.

Per fare la seconda verificazione basta evidentemente far piantare otto paline accostando successivamente l'occhio agli otto traguardi, e verificare se, girando il bussolo finchè per una coppia di traguardi diametralmente opposti si veda una palina qualunque, diversa dalle due che con essa vennero determinate sul terreno, per gli altri traguardi si scoprono le altre paline.

79. **Uso di uno squadro falso.** — Anche con uno squadro falso

si possono fare delle operazioni esatte, e possono tornar utili le seguenti avvertenze:

1° Se da un punto C (*fig.* 100), preso sopra un allineamento AB, si vuol elevare una perpendicolare, si dirigerà successivamente ciascuna delle coppie dei traguardi, che dovrebbero dare un angolo retto, secondo l'allineamento AB, e si faranno palinare coll'altra gli allineamenti CX e CY. Collocate su questi le paline D ed E ad egual distanza da C, si troverà il punto di mezzo F di $\overline{DE}$, e questo punto apparterrà alla vera perpendicolare cercata $\overline{CF}$, perchè i due angoli adiacenti ACF e BCF sono eguali e quindi retti, siccome formati ciascuno dell'angolo determinato dallo squadro, qual è ACD=BCE, e di un angolo metà di DCE qual è DCF=ECF.

2° Se da un punto C (*fig.* 101), preso fuori di un allineamento AB, vi si vuol abbassare un allineamento perpendicolare, si cercherà, operando come si disse al numero 77, il piede D della falsa perpendicolare condotta su AB; girato lo squadro in modo che la coppia di traguardi disposta secondo DC cada nell'allineamento AB, si camminerà su quest'ultimo finchè per l'altra coppia di traguardi si scopra il punto C. Supponendo che sia E il piede della nuova falsa perpendicolare, si divida in due parti eguali la distanza $\overline{DE}$, ed il punto di mezzo F sarà il piede della perpendicolare abbassata da C su AB; perchè, per costruzione, il triangolo DCE risulta isoscele su $\overline{DE}$, e la retta CF, che unisce il suo vertice C col mezzo della sua base, perpendicolare alla base stessa.

Operazioni planimetriche eseguite collo squadro agrimensorio.

80. **Problemi risoluti collo squadro agrimensorio.** — I. *Per un punto dato condurre un allineamento parallelo ad un allineamento dato.*

Si cerchi sull'allineamento dato AB (*fig.* 102 e 103) il piede D dell'allineamento perpendicolare o a 45°, abbassato dal punto C, per cui vuolsi condurre l'allineamento parallelo; si trasporti lo squadro in C e si diriga una visuale a D; l'allineamento CE, determinato dall'altra visuale ad angolo retto o ad angolo semiretto con quello da cui si scopre D, è il domandato; perchè due allineamenti come AB e CE, che tagliati da un terzo allineamento DC fanno gli angoli alterni interni eguali fra di loro, sono paralleli.

Prendendo su $\overline{AB}$ un punto F, conducendo per questo un nuovo allineamento perpendicolare o a 45° con AB, e verificando se $\overline{DC}$

ed $\overline{FG}$ sono eguali, può l'operatore accertarsi dell'esattezza del suo lavoro.

II. *Dividere per metà l'angolo* ACB *di due allineamenti* (*fig.* 104 e 105).

1ª *Soluzione.* Determinati i due punti E e D egualmente distanti da C (*fig.* 104), camminando collo squadro lungo DE si trovi il piede F della perpendicolare abbassata da C. Questo piede apparterrà all'allineamento domandato, perchè nel triangolo isoscele la retta calata dal vertice, perpendicolarmente alla base, divide per metà l'angolo al vertice.

2ª *Soluzione.* Scelti ancora i due punti D ed E (*fig.* 105) equidistanti da C, si innalzino le due perpendicolari DX ed EY. Queste, per l'eguaglianza dei due triangoli CFD e CFE, daranno nella loro intersezione F un punto, che, unitamente a C, servirà a tracciare l'allineamento voluto.

Osservazione. Se l'angolo ACB è molto ottuso, miglior partito è quello d'innalzare prima i due allineamenti CX e CY (*fig.* 106) rispettivamente perpendicolari ad AC e BC, e dividere poscia per metà, come già si insegnò, l'angolo XCY. L'eguaglianza dei due angoli ACF e BCF consegue dal potersi considerare ciascuno di essi come formato dalla metà dell'angolo XCY e da uno dei due angoli ACY e BCX fra loro eguali, siccome differenze fra un retto e lo stesso angolo XCY.

III. *Dati due punti* A *e* B (*fig.* 107 e 108) *collocati dalla medesima parte di un ostacolo, oppure uno da una parte e l'altro dall'altra, prolungare l'allineamento da essi determinato.*

Si conduca pel punto dato A un allineamento AX; si abbassi su questo la perpendicolare $\overline{BC}$ e si innalzino dai punti qualunque D ed E le perpendicolari DY ed EZ: supposto risoluto il problema, i triangoli ACB, ADF ed AEG devono risultare simili; per cui, conoscendosi $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{AD}$ ed $\overline{AE}$, sarà facile il conchiudere $\overline{DF}$ ed $\overline{EG}$, poichè

$$\overline{DF}=\frac{\overline{CB}\times\overline{AD}}{\overline{AC}}, \qquad \overline{EG}=\frac{\overline{CB}\times\overline{AE}}{\overline{AC}}.$$

Queste lunghezze, portate su DY e su EZ, daranno in F e G i punti necessarii al compiuto tracciamento della direzione AB.

IV. *Trovare una distanza accessibile ai suoi due estremi.*

1ª *Soluzione.* Condotto per A (*fig.* 109) l'allineamento AX perpendicolare ad AB, si corra su esso fino a trovare il punto C, da cui vedasi B sotto un angolo di 45°; misurisi $\overline{AC}$, ed essa sarà eguale ad $\overline{AB}$, perchè il triangolo BAC è isoscele sulla base $\overline{BC}$.

Osservazione. La data soluzione non esige di far stazione in B, e quindi può anche servire a risolvere il problema di misurare una distanza accessibile ad un solo estremo, quando da questo si vede l'altro.

2ª *Soluzione.* Si può anche risolvere il problema costruendo il triangolo ABC′ (*fig.* 109) rettangolo in A, misurando la sua ipotenusa $\overline{C'B}$, il cateto $\overline{C'A}$, e deducendo l'altro cateto $\overline{AB}$ dalla nota verità che nel triangolo rettangolo il quadrato di un cateto è eguale al quadrato dell'ipotenusa, meno il quadrato dell'altro cateto.

3ª *Soluzione.* Innalzati dai due punti A e B (*fig.* 110) gli allineamenti AX e BY perpendicolari ad AB, si prendano due lunghezze $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ fra loro eguali: si misuri $\overline{CD}$, e questa sarà la misura di $\overline{AB}$, perchè il quadrilatero ABCD è un rettangolo per costruzione.

Si perviene anche alla soluzione del problema innalzando per C una perpendicolare a BY, e prendendo la parte $\overline{CD}$ intercetta fra le due perpendicolari primitive: oppure, senza andare in A, tracciando le due perpendicolari successive BY, CZ, e abbassando da A la perpendicolare AD su quest'ultima.

4ª *Soluzione.* Quando da un estremo della distanza a trovarsi non si vede l'altro (*fig.* 111), si cercherà sul terreno un punto C, tale che si scoprano da esso i due punti A e B ad angolo retto, si misureranno i due cateti $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ del triangolo rettangolo ACB, e si dedurrà poi $\overline{AB}$ dalla notissima relazione

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2}.$$

V. *Trovare una distanza con un estremo accessibile e coll'altro inaccessibile ed invisibile, ma collocato in un determinato sito di un edifizio di forma nota.*

1° Sia $\overline{OC}$ (*fig.* 112) la distanza a trovarsi, accessibile all'estremo O ed inaccessibile all'estremo C, posto nel centro di un edifizio di sezione rettangolare. Abbassato da O un allineamento perpendicolare al prolungamento della faccia AB, e segnato il punto di mezzo E della medesima, si misurino $\overline{ED}$, $\overline{BG}$ e $\overline{DO}$; considerando i due triangoli rettangoli simili CEF, ODF, ed osservando che

$\overline{CE} = \frac{1}{2}\overline{BG}$, sarà agevole dedurre $\overline{FE}$, che, oltre di servire a fissare la posizione del punto F, si presta anche a calcolare l'ipotenusa $\overline{FC}$, la quale, aggiunta alla lunghezza misurata $\overline{FO}$, dà la richiesta distanza. La lunghezza $\overline{FO}$ si può anche calcolare, o considerando i citati triangoli simili CEF ed ODF, oppure deducendo prima $\overline{DF} = \overline{ED} - \overline{FE}$, ed osservando quindi che essa è ipotenusa del triangolo rettangolo ODF, nel quale si conoscono i due cateti $\overline{DO}$ e $\overline{DF}$.

2° Se è impossibile abbassare da O un allineamento perpendicolare al prolungamento della faccia AB (*fig.* 113), si può condurre la retta OE, che unisce il punto di mezzo dell'accennata faccia col punto O, innalzare per un punto qualunque D la perpendicolare DX, determinare il suo incontro G colla EO e misurare $\overline{BH}$, $\overline{OG}$ ed $\overline{OE}$. Osservando che $\overline{CE} = \frac{1}{2}\overline{BH}$, si fissa il punto F deducendo $\overline{GF}$ dalla similitudine dei due triangoli CEO e FGO; e, misurata la lunghezza $\overline{OF}$, si calcola $\overline{OC}$ dietro la similitudine dei medesimi triangoli.

VI. *Trovare una distanza accessibile in un sol estremo, nel quale non si può far stazione collo squadro.*

Quando l'estremo accessibile A (*fig.* 114) è tale da essere impossibile collocare in esso lo strumento, si può seguire questo semplice procedimento: si stabilisca un allineamento AX; si abbassi da B la perpendicolare $\overline{BC}$ su esso; si misuri direttamente $\overline{AC}$, e si trovi $\overline{BC}$, percorrendo la AX fino a scoprire il punto B sotto angolo di 45°; finalmente dal triangolo rettangolo ABC, in cui $\overline{BC} = \overline{CD}$, si deduca l'ipotenusa

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}.$$

VII. *Trovare una distanza tutta inaccessibile.*

Sia $\overline{AB}$ (*fig.* 115) la distanza a trovarsi. Tracciato un allineamento qualunque AH passante per A, si innalzi l'altro CX ad esso perpendicolare. Dal punto B si abbassi la perpendicolare BD su CX, e dai punti A e B si conducano a 45° su CX gli allineamenti AE, BF: si avranno $\overline{CE} = \overline{CA}$ e $\overline{DF} = \overline{DB}$. Si faccia la differenza $\overline{DB} - \overline{CA} = \overline{DF} - \overline{CE}$, e si porti da D in G o da C in H. Si hanno in $\overline{CG}$ e $\overline{DH}$ due rette eguali e parallele ad $\overline{AB}$, perchè $\overline{AC}$ e $\overline{BG}$

o $\overline{AH}$ e $\overline{BD}$ essendo eguali e parallele, le due figure ABGC, ABDH sono due parallelogrammi, e perciò $\overline{AB}=\overline{CG}=\overline{HD}$.

Tuttora che siasi misurata la distanza $\overline{CD}$, si può dedurre $\overline{AB}$ con un calcolo semplicissimo, perchè, supposta condotta la CG parallelamente ad AB, nasce il triangolo CDG rettangolo in D, da cui si ricava

$$\overline{AB}=\overline{CG}=\sqrt{\overline{CD}^2+\overline{DG}^2}=\sqrt{\overline{CD}^2+(\overline{DF}-\overline{CE})^2}.$$

VIII. *Determinare la posizione di un punto, per rapporto ad altri punti già fissati.*

1° Se almeno uno dei punti dati, per esempio A, è accessibile, e se è accessibile il punto C a determinarsi (*fig.* 116), si può abbassare da C la perpendicolare CD su AB e misurare $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$: prendendo sul disegno $\overline{ad}=\frac{1}{n}\overline{AD}$ e la perpendicolare $\overline{dc}=\frac{1}{n}\overline{DC}$, si avrà nell'estremo *c* di quest'ultima il punto richiesto.

2° Se i punti dati A e B sono inaccessibili, ed accessibile il punto C a trovarsi (*fig.* 117), si condurranno sull'allineamento BC due allineamenti AD ed AE, il primo perpendicolare ed il secondo inclinato a 45°, e si misureranno $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$. Descrivendo poscia su $\overline{ab}$ una semi-circonferenza e facendo centro in *a* con apertura eguale ad $\frac{1}{n}\overline{DE}$, si trova, nell'intersezione di due archi, il punto *d;* tirando la retta $\overline{bd}$ e portando su essa $\overline{dc}=\frac{1}{n}\overline{DC}$, si determina il punto *c*.

3° Se il punto C a determinarsi è inaccessibile (*fig.* 118), essendo accessibile almeno uno dei punti A e B, torna generalmente utile di percorrere l'allineamento AB, di determinare gli incontri D ed E del medesimo con due allineamenti passanti per C, l'uno perpendicolare e l'altro a 45°, e di misurare $\overline{AD}$ e $\overline{DE}$. Prendendo $\overline{ad}=\frac{1}{n}\overline{AD}$ ed innalzando ad $\overline{ab}$ la perpendicolare $\overline{dc}=\frac{1}{n}\overline{DC}$, si trova nell'estremo *c* di quest'ultima il punto domandato.

4° Quando le circostanze locali lo permettono, si possono segnare sul terreno due allineamenti OX, OY (*fig.* 119) perpendicolari fra di loro, di cui uno passi per A e B; abbassare su questi le due perpendicolari CD e CE, e misurare $\overline{AD}$ e $\overline{OE}$. Prendendo su $\overline{ab}$ la lunghezza $\overline{ad}=\frac{1}{n}\overline{AD}$ ed innalzandovi la perpendicolare $\overline{dc}=\frac{1}{n}\overline{OE}=\frac{1}{n}\overline{DC}$, si determina il punto c, rappresentativo di C.

IX. *Collegare un punto del terreno ad oggetti stabili.*

L'importante operazione di collegare un punto del terreno ad oggetti stabili, della quale già si è fatto cenno al numero 72, si rende generalmente più spedita e più facile aggiungendo all'uso delle canne quello di uno squadro agrimensorio, come facilmente si vede dalle due seguenti soluzioni:

1° Se è possibile tracciare un allineamento passante per un punto stabile A (*fig.* 120), situato in vicinanza del punto a fissarsi P, e per un punto B anche assai lontano, basterà abbassare da P una perpendicolare su AB e misurare $\overline{AC}$ e $\overline{CP}$.

2° Se poi trovansi due oggetti A e B molto lontani da P (*fig.* 121); e se, poco distante da P, trovasi un terzo oggetto D, si potrà abbassare da D una perpendicolare ED su AB, e misurare $\overline{EC}$ e $\overline{CP}$.

81. **Rilevamento collo squadro agrimensorio.** — Lo squadro agrimensorio, assieme alle canne o alla catena, è uno dei mezzi più di frequente usati nel rilevamento dei piani; e le norme da seguirsi variano secondo la natura del terreno. Se il terreno da rilevarsi è accessibile, più conveniente di ogni altra è la poligonazione ortogonale; se è inaccessibile nell'interno, s'impiega una poligonazione per camminamento, avente gli angoli al perimetro retti o semiretti o tripli di semiretto. I dettagli si rilevano percorrendo i lati della poligonazione ed adottando principalmente il metodo degli allineamenti.

Rilevamento dei terreni accessibili. Per fissare le idee, suppongasi di dover rilevare la porzione di terreno accessibile, rappresentata nella figura 122. Si incomincierà dal tracciare una poligonazione ortogonale e si prenderanno i dati necessarii a disegnarla in una determinata scala, percorrendone ordinatamente i lati. A questi lati si collegheranno i minuti particolari col citato metodo, e tutte le misure si collocheranno ordinatamente e ben distinte su apposito abbozzo. Dalla figura appare essersi scelta AB per fondamentale, essersi innalzate su questa le perpendicolari CD, LK, ME, NI ed HG, ed essersi stabiliti come allineamenti d'operazione, oltre le perpendicolari CD, LK ed HG, gli altri allineamenti DE, FG, BI ed IK.

La costruzione del piano si eseguisce costruendo innanzi tutto la poligonazione *cdefghbikl* mediante le coordinate di ciascuno dei suoi vertici e collocando poscia al loro posto i minuti particolari.

Le lunghezze totali dei lati $\overline{DE}$, $\overline{FG}$, $\overline{BI}$ ed $\overline{IK}$ della poligonazione non s'impiegano nella costruzione del piano, ed esse vanno considerate come altrettanti mezzi di verificazione. In tali operazioni si ha il notevole vantaggio di poter verificare sul terreno stesso l'esattezza del lavoro; imperocchè il quadrato di una retta qualunque compresa fra due perpendicolari deve essere eguale al quadrato della distanza delle perpendicolari medesime, aumentato del quadrato della loro differenza; e se la base si è misurata in due sensi, la seconda misura deve essere d'accordo colla prima, ammessa, ben inteso, la necessaria tolleranza.

Si può talvolta ridurre la poligonazione al perimetro stesso del terreno e, se non molto distante da esso passa la fondamentale, si può compiere il rilevamento abbassandovi da ciascun vertice delle perpendicolari, di cui si misureranno le lunghezze non che le distanze dei loro piedi dall'origine della base medesima. È anche comodo, se si può, ridurre la poligonazione ad un triangolo o ad un rettangolo o ad un trapezio avente due angoli retti coi lati avvicinantisi al perimetro che vuolsi rilevare. Nel caso di una poligonazione rettangolare, i lati opposti devono essere eguali o almeno le loro discrepanze non devono eccedere i limiti delle tolleranze ammissibili: nel caso di un trapezio, la radice quadrata della somma del quadrato della differenza delle due basi parallele col quadrato del lato perpendicolare alle basi deve essere eguale al quarto lato, o almeno presentare una diversità trascurabile.

Rilevamento dei terreni accessibili soltanto al loro perimetro. Allorquando il terreno da rilevarsi è soltanto accessibile al perimetro, si traccia la poligonazione girandovi attorno con allineamenti inclinati fra di loro di angoli retti, semiretti e tripli di semiretto, secondo i casi. — La figura 124, che suppongo rappresentare una porzione di terreno inaccessibile nel suo interno, indica a sufficienza come siasi tracciata e rilevata la poligonazione, e come ad essa siensi collegati i minuti particolari: i vertici molto lontani dai lati della poligonazione, come I e K, si sono rilevati riferendoli ad una *linea morta* AB, ed il punto L, da cui non si può abbassare una perpendicolare sui lati della poligonazione, si è fissato misurando le distanze che esso ha dai punti fissi M ed N.

Per costrurre il piano, s'incomincia dal disegnare la poligonazione *cdefgh*, di cui si conoscono i lati e gli angoli. La lunghezza totale di $\overline{HC}$, non che i due angoli in H e C servono a verificare se l'operazione procede esattamente: altri mezzi di controllo sono le lunghezze totali delle due linee $\overline{AB}$ ed $\overline{OP}$.

A diminuire sempre più gli errori che indubitatamente vanno annessi a tali operazioni, convien procurare di ridurre la poligonazione al minor numero possibile di lati e, quando le circostanze locali lo permettono, fare in modo che la poligonazione sia un triangolo o un rettangolo o un trapezio colle sue basi perpendicolari ad uno dei lati. Per gli ultimi due casi si avranno gli stessi mezzi di verificazione già notati parlando del rilevamento dei terreni accessibili.

Rilevamento dei terreni inaccessibili. L'osservazione che un triangolo rettangolo con un angolo acuto di 45° è isoscele, ci conduce facilmente a rilevare un punto inaccessibile: basterà abbassare da esso un allineamento perpendicolare a quello di base, ed un altro a 45°, e la distanza fra il piede della perpendicolare e quello della retta a 45° sarà eguale alla lunghezza della perpendicolare medesima. Così, per rilevare il terreno rappresentato nella figura 123, si può tracciare l'allineamento di base lungo il lato accessibile AB, abbassare per ciascuno dei punti da rilevarsi due allineamenti, l'uno perpendicolare e l'altro a 45° con questo, e prendere le distanze di tutti i punti in cui si è piantato lo squadro dal piede O della prima perpendicolare.

Il piano si costruisce disegnando la linea di base, portando su essa tutte le distanze misurate, e conducendo pei punti fissati le perpendicolari e le relative rette a 45°. Queste nella loro intersezione daranno i vertici del perimetro voluto. Così il punto c, rappresentativo di C, sarà determinato nell'intersezione della perpendicolare $c'x$ colla retta a 45° $c''y$. Questo punto si può anche trovare conducendo la sola perpendicolare $c'x$ e prendendo su essa $\overline{c'c}=\frac{1}{n}\overline{C'C}=\frac{1}{n}\overline{C'C''}$.

Se in vicinanza del terreno a rilevarsi è possibile tracciare due allineamenti fra loro perpendicolari, si può eseguire l'operazione camminando su questi, abbassandovi dai varii punti delle perpendicolari e misurando le distanze dei loro piedi dall'intersezione dei medesimi allineamenti. Un rilevamento di tal genere si ha nella figura 125. Fatto l'angolo retto xoy, si costruisce un punto qualunque, per esempio il punto c rappresentativo di C, prendendo $\overline{oc'}=\frac{1}{n}\overline{OC'}$, e portando perpendicolarmente ad $\overline{ox}$ la retta $\overline{c'c}=\frac{1}{n}\overline{OC''}$, oppure prendendo $\overline{oc'}$ e $\overline{oc''}$ eguali alle lunghezze grafiche corrispondenti ad $\overline{OC'}$ ed $\overline{OC''}$, e descrivendo due archi, l'uno di centro c' e l'altro di centro c'', con aperture rispettivamente eguali alle ultime accennate lunghezze.

82. **Norme generali per rilevare una grande porzione di terreno collo squadro agrimensorio.** — Eseguito un abbozzo delle indicazioni locali, e determinate con segnali convenientemente disposti le linee da rilevarsi, si possono tenere le seguenti norme nel procedere al rilevamento di un terreno molto esteso e composto di molti appezzamenti.

1° Si tracci un allineamento di base in modo che tutto si possa percorrere e misurare, e che passi, per quanto si può, verso il mezzo del terreno da rilevarsi. Dai varî punti di questo si innalzino degli allineamenti perpendicolari e si determinino le loro intersezioni con altri allineamenti, condotti in vicinanza del perimetro esterno. Se nell'interno rimangono ancora delle linee un po' lontane dai già tracciati allineamenti, se ne guidino degli altri trasversali, che taglino questi e che passino in vicinanza di tali linee. Incontrandosi dei caseggiati o degli appezzamenti inaccessibili nel loro interno, si combineranno gli allineamenti d'operazione in modo che loro risulti circoscritto un poligono ben determinato e del minor numero possibile di lati, come sarebbe un triangolo, un rettangolo, un trapezio. Se il terreno è ingombro di molti ostacoli si può difficilmente condurre un solo allineamento di base che lo attraversi per tutta la sua lunghezza: in tali circostanze si può usare una linea spezzata ad angoli retti, avente il minor numero possibile di lati.

2° Si proceda alla misura, assumendo le distanze che tutti i piedi delle perpendicolari hanno da un estremo della base, le lunghezze delle perpendicolari medesime, quelle dei lati della poligonazione che passano in vicinanza dei dettagli, e finalmente quelle che servono al collegamento di questi ultimi cogli allineamenti d'operazione. Se il terreno è assai esteso, un abbozzo generale della poligonazione, fatto in iscala piccola, riesce vantaggioso, perchè si può procedere più ordinatamente a rilevare le frazioni di terreno contenute in ciascuna delle figure componenti la poligonazione, e procurarsi poscia tanti abbozzi, quante sono queste figure, in iscala maggiore, ben chiari e colle necessarie notazioni per riconoscere quali sono le loro posizioni rispettive. — Per non essere costretti a misurare prima la base e le perpendicolari onde avere l'abbozzo della poligonazione, e poi a misurare una seconda volta nel rilevare le varie frazioni, si può tenere la norma di dar principio ad operare su queste, partendo da quel lato che trovasi disposto sulla base e da quell'estremo dell'accennato lato che è più vicino al punto da cui si contano le distanze: piantando un picchetto nel punto della base, in cui termina la frazione su cui si opera, si ha un mezzo di passare al rilievo della successiva, continuando sempre a contare la misura dall'origine della base.

L'operatore avrà cura di osservare se, misurando due volte uno stesso allineamento, si ottiene un risultato in accordo col buon andamento dell'operazione; nè si dimenticherà di fare le verificazioni accennate al numero 81, di mano in mano che si presenterà la circostanza.

3° Si compia il piano, incominciando dal costrurre l'intiera poligonazione alla scala prestabilita e venendo poscia al collegamento di tutti i minuti particolari nelle rispettive loro posizioni.

ARTICOLO VI.

Goniometri.

Squadro graduato.

83. **Descrizione dello squadro graduato.** — Consiste lo squadro graduato, della più semplice forma, in due cilindri vuoti metallici, aventi lo stesso asse e le loro superficie convesse l'una sul prolungamento dell'altra (*fig.* 126). Il cilindro inferiore, cui è annesso un manico cavo, onde poterlo mettere su un trepiede o su un bastone, porta sulla sommità della sua superficie convessa un lembo d'argento diviso in 360°. Sul cilindro superiore trovasi un nonio scorrevole sulla circonferenza del cilindro inferiore, abbracciante generalmente ventinove divisioni della circonferenza graduata e diviso in trenta parti uguali, in guisa di dare l'approssimazione dei 2′. Un traguardo corrispondente allo zero della graduazione ed un sottilissimo filo corrispondente all'incisione 180°, sito nel mezzo di un'apertura collocata sulla superficie convessa del cilindro inferiore, determinano un piano di traguardo, passante per l'asse dello squadro e pel diametro 0° e 180°. Due altri piani di traguardo fra loro perpendicolari, foggiati nella stessa guisa, l'uno dei quali passa per lo zero del nonio, si trovano sulla superficie convessa del cilindro superiore, al quale si può dare un movimento di rotazione attorno al proprio asse mediante una vite *v*, posta generalmente al di sotto

del cilindro inferiore. Il traguardo del cilindro superiore, collocato sopra lo zero del nonio, dicesi *traguardo di mira*.

Il cilindro superiore, chiuso alcune volte da una semplice lastra metallica, ha ordinariamente per coperchio un declinatore magnetico, il cui diametro 0° e 180° è collocato nel piano di traguardo passante per lo zero del nonio e che può quindi servire di bussola topografica, come facilmente si potrà dedurre da quanto si dirà nell'articolo che segue. Altre volte nella base superiore dello squadro graduato sono praticate delle fessure, che servono a dirigere visuali dal basso in alto e viceversa.

84. **Uso dello squadro graduato.** — La graduazione di questo strumento procede generalmente da sinistra a dritta, da 0° fino a 360°, per un osservatore che si collochi in guisa da guardare lo 0°; e per misurare l'angolo formato da due piani verticali o da due allineamenti CA e CB (*fig.* 127) vale il seguente processo: si collochi lo strumento in guisa che il suo asse cada verticalmente nel vertice C dell'angolo a trovarsi (il che si ottiene approssimativamente mediante un piombino); si faccia coincidere lo zero del nonio con quello della circonferenza graduata, e si giri tutto lo strumento sul proprio asse, finchè dal traguardo di mira si scopra un oggetto dell'allineamento di dritta; senza muovere il cilindro inferiore, s'imprima il moto di rotazione al cilindro superiore, finchè dal suo traguardo di mira si scorga un oggetto dell'allineamento di sinistra BC. L'arco circolare *ab* descritto dallo zero del nonio è eguale a quello percorso da ciascun punto del traguardo per cui si è osservato, e quindi è la misura dell'angolo ACB: cosicchè, leggendo quanto segna il suddetto zero, si ha l'angolo richiesto.

Operando così, il traguardo del cilindro inferiore ed il filo opposto servono ad assicurare che lo strumento non si è spostato nel corso dell'operazione, osservando prima un oggetto nella loro direzione e verificando se dopo si scorge di bel nuovo in essa.

Generalmente negli squadri graduati vedesi dal traguardo e filo opposto del cilindro inferiore, quando lo zero del nonio coincide con quello della graduazione, lo stesso oggetto che si vede dal traguardo e filo opposto del cilindro superiore. Per questo motivo usasi ben di frequente in pratica di misurare un angolo collimando col traguardo e filo opposto del cilindro inferiore ad un oggetto dell'allineamento di destra, facendo girare senz'altro il cilindro superiore, finchè dal traguardo passante per lo zero del nonio scorgasi un oggetto dell'allineamento di sinistra e leggendo l'angolo che segna lo zero dei nonio. Questo processo, esatto se lo strumento è costrutto a perfezione, è quasi sempre causa d'errore, perchè è cosa ben difficile di poter avere uno strumento in cui i traguardi dei due cilindri si trovino in uno stesso piano verticale quando i due zeri coincidono. Quest'errore è reso nullo col primo metodo, perchè l'arco descritto dallo zero del nonio è sempre eguale all'arco che misura l'angolo proposto.

Se la graduazione dello strumento procede da dritta a sinistra, conviene osservare l'oggetto di sinistra prima di quello di dritta.

85. **Verificazioni dello squadro graduato.** — Uno squadro graduato sarà ben costrutto quando, disposto verticalmente il suo asse, siano in esso soddisfatte le seguenti condizioni:

1° *Il piano determinato da ciascun traguardo e filo opposto deve essere verticale;*

2° *Coincidendo lo zero del nonio con quello della graduazione, i due traguardi, posti uno nel cilindro superiore e l'altro nel cilindro inferiore, non che i fili opposti, devono trovarsi in uno stesso piano verticale;*

3° *La graduazione deve essere esatta e l'asse di rotazione del cilindro superiore deve passare pel centro della circonferenza graduata;*

4° *Il piano verticale determinato dal traguardo di mira e filo opposto deve costantemente passare per l'accennato asse, e quindi anche pel centro della circonferenza graduata;*

5° *I piani verticali determinati dai traguardi e fili opposti del cilindro superiore devono essere perpendicolari fra loro.*

1ª e 2ª *Verificazione.* Scelta una linea verticale, per esempio lo spigolo di un muro o un filo a piombo sospeso, si porti alla distanza di quindici o venti metri lo squadro e, facendo passare i varii traguardi l'uno dopo l'altro, si osservi se coll'accennata verticale sembrano coincidere per tutta la loro lunghezza i fili opposti, operando così in un modo analago a quanto si disse intorno allo squadro agrimensorio. Dopo di ciò, si faccia coincidere lo zero del nonio con quello della circonferenza graduata; col traguardo e filo opposto del cilindro inferiore si collimi alla verticale e, quando si scopra questa pel traguardo e filo opposto del cilindro superiore, si può dire che la seconda condizione è soddisfatta: in caso contrario, si conchiude che lo strumento ha l'errore di *parallelismo* o di *collimazione*, e che può sempre servire a fare operazioni esatte, purchè si misurino gli angoli colla prima delle due regole date nel precedente numero 84.

Se nel misurare gli angoli si vuol seguire la seconda regola, è necessario tener conto dell'errore di collimazione, il quale, determinato guardando un medesimo oggetto pei due traguardi che dovrebbero essere nello stesso piano verticale, e osservando di quanto lo zero del nonio si scosta dallo zero della graduazione, si dirà *addiettivo* o *sottrattivo*, e quindi si aggiungerà o toglierà ad ogni angolo letto, secondo che lo zero del nonio cade sulla sinistra o sulla destra dello zero della graduazione, supposta questa procedere da sinistra a destra.

3ª *Verificazione.* Un angolo ottenuto con uno squadro mal graduato non può essere il vero, perchè il risultato letto non corrisponde alla vera ampiezza dell'arco che gli serve di misura: similmente, un angolo misurato con uno squadro, in cui l'asse di rotazione del cilindro superiore non passa pel centro della circonferenza graduata, non può essere giusto, perchè il centro della circonferenza su cui si leggono gli angoli non trovasi in coincidenza col vertice dell'angolo a misurarsi. Consegue da ciò, doversi ritenere come in tutto soddisfacente alla terza condizione uno squadro graduato, quando l'operazione della misura diretta di più angoli dà un risultato in perfetta armonia con quello somministrato da qualche verità geometrica ad essa applicabile. Così, da uno stesso punto A si possono condurre diversi allineamenti AB, AC, AD, ecc. (*fig.* 16); misurare gli angoli che questi fanno fra loro, e verificare se la loro somma fa 360°. Oppure si possono misurare gli angoli CAB, DAB e DAC (*fig.* 128) che tre allineamenti fanno fra di loro, e verificare se la somma del primo col terzo vale il secondo: questa prova va fatta su molti casi i quali presentino angoli di diversa grandezza. O ancora misurando la somma degli angoli interni di un poligono, e verificando se la loro somma fa tante volte due angoli retti quanti sono i lati del poligono meno quattro angoli retti. Anche nel caso di uno strumento benissimo costrutto, il risultato dell'esperienza non s'accorda con quello previsto dalla scienza: in tale verificazione si deve dunque ammettere una tolleranza che, per il fatto della compensazione di gran parte degli errori, deve sempre essere minore di tante volte l'approssimazione data dallo strumento, quanti sono gli angoli misurati.

4ª *Verificazione.* Per riconoscere se lo strumento soddisfa alla quarta condizione, si venga in un punto qualunque C (*fig.* 129) di un allineamento, e, individuati sul medesimo due punti A e B inegualmente distanti da C, si misurino i due angoli adiacenti ACD e BCD; se la loro somma fa 180°, la quarta condizione è soddisfatta; in caso contrario, lo strumento è affetto dall'errore di *eccentricità*, che è ordinariamente tenue e quasi sempre trascurabile.

A primo aspetto sembra che questa verificazione debba immediatamente precedere, anzichè seguire quella dell'esattezza della graduazione. L'ordine da me tenuto ed il processo qui seguito verranno giustificati parlando dell'errore di eccentricità nel teodolite; e si farà vedere essere in perfetto accordo, con quanto insegna la geometria relativamente alla somma degli angoli intorno ad un punto, alla somma degli angoli interni di un poligono ed al paragone della somma delle due parti d'un angolo col loro totale, i risultati che si hanno usando di uno strumento eccentrico di graduazione esatta; ed apparire la discrepanza soltanto nella misura di due angoli adiacenti ad un allineamento, prendendo su esso i punti di mira inegualmente distanti dal punto di stazione.

5ª *Verificazione*. Per acquistare la certezza che non manca nello strumento la quinta condizione, si possono far fissare al suolo due paline guardando pei traguardi e fili opposti del cilindro superiore e misurare l'angolo che gli allineamenti, diretti alle medesime dal punto di stazione, fanno fra loro: se quest'angolo si trova di 90°, si può dire che i piani determinati dagli indicati traguardi e fili opposti sono perpendicolari.

Quest'ultima verificazione si può anche eseguire con un altro metodo, nel quale non si fa uso della graduazione, e che quindi può anche servire per verificare uno squadro agrimensorio, in cui le coppie di traguardo siano surrogate da un traguardo e da un filo ad esso diametralmente opposto. Portato lo strumento in un punto S (*fig.* 130) di un terreno sensibilmente piano ed orizzontale e disposto verticalmente il suo asse, si facciano piantare, mediante i due traguardi del cilindro superiore, tre paline, due in A e A′ nella direzione del traguardo *a* e filo opposto *a*′, e una in B nella direzione del traguardo *b* e filo opposto *b*′; fatto poscia rotare il cilindro superiore finchè collimando per *a* e filo opposto si veda la palina B, si determinino mediante il traguardo *b* e corrispondente filo le posizioni di due paline C e C′, le quali ci porteranno a conchiudere che gli angoli dei piani passanti pei traguardi del cilindro superiore saranno fra loro perpendicolari quando AA′C′C sia un sol allineamento, come facilmente si potrà verificare. Infatti, essendo allora i due angoli ASB e CSB adiacenti ed eguali all'angolo *a*′S*b*′, la loro somma sarà di due angoli retti e quindi ciascuno di un retto.

Squadro graduato con cannocchiale.

86. **Descrizione dello squadro graduato con cannocchiale.** — Questo squadro graduato ha due cilindri come quelli dello strumento ultimamente descritto, ma di diametro un po' maggiore onde ottenere effettivamente quei vantaggi che devono avere sugli squadri graduati ordinarii. Lo strumento adattasi al trepiede introducendo una vite nel sostegno S (*fig.* 131) che si dirama in tre parti aventi ai loro estremi le tre viti v', v'' e v''', chiamate le *viti del triangolo,* le quali servono a disporre orizzontale il piano della circonferenza graduata. Il sostegno S prolungasi in guisa da formare un perno intorno a cui può girare il collo vuoto C unitamente a tutta la parte superiore dello strumento. Questo movimento generale, che s'impedisce colla vite d'arresto *a*, si dà in grande colla mano ed in piccolo colla vite di richiamo *r*. Il cilindro superiore, in tutto eguale a quello degli squadri graduati ordinarii, porta nel senso perpendicolare alla sua base due sostegni *m* ed *n*, l'uno al di sopra del traguardo che non coincide collo zero del nonio, l'altro al disopra del filo opposto, sui quali si appoggiano i due estremi di un perno che, in senso ad esso perpendicolare, porta un cannocchiale *c* col suo asse ottico nel piano passante pel traguardo coincidente collo zero del nonio e filo opposto. Al disotto del suddetto perno trovasi poi un livello a bolla d'aria *l*, destinato ad ottenere l'orizzontalità del piano della circonferenza graduata. Per imprimere un leggier movimento rotatorio al cannocchiale sul suo perno, serve la vite di richiamo *r'*. Annesso ad uno dei sostegni del cannocchiale trovasi un arco graduato o *eclimetro*, collo 0° nel suo punto più basso e colla graduazione che procede in due sensi. Il centro di quest'arco è sull'asse del perno del cannocchiale, che, rotando, fa strisciare sull'arco medesimo un nonio, onde avere l'angolo che la visuale diretta ad un oggetto fa coll'orizzonte, ossia l'angolo di *elevazione* o di *depressione*, secondo che la visuale passa al disopra o al disotto dell'orizzontale.

L'uso dello squadro con cannocchiale vien indicato nei numeri che seguono: parlando della bussola topografica e del modo di orientare i piani, si accennerà a che cosa serve il declinatore magnetico; nella livellazione finalmente si vedrà quanto hassi a dire sull'eclimetro.

87. **Uso del livello a bolla d'aria.** — Per disporre verticale l'asse dello strumento, e quindi orizzontale il piano della circonferenza

graduata, serve il livello a bolla d'aria l (*fig.* 131) che trovasi fra i sostegni del cannocchiale, e che dirassi rettificato quando, essendo centrata la bolla, sieno orizzontali tutte le rette del piano della circonferenza graduata, parallele al piano verticale passante per l'arco direttore del livello. Per accertarsi di questo conviene far coincidere lo zero del nonio collo zero della graduazione, imprimere allo strumento il movimento generale finchè il livello sia nella direzione di due viti del triangolo, muovere queste finchè la bolla sia centrata, e dare al cilindro superiore, e quindi anche al livello un mezzo giro, portando lo zero del nonio alla divisione 180°. Se il livello è rettificato, la bolla si mantiene di bel nuovo centrata; ed in caso contrario, si rettifica facendo la correzione metà colla vite n, che serve ad innalzare o ad abbassare l'estremo del tubo del livello, e metà colle viti del triangolo, perchè col primo movimento si rende parallela al piano della circonferenza graduata la tangente nel punto di mezzo dell'arco compreso fra gli indici fiduciali; mentre col secondo si riducono orizzontali l'accennata tangente e tutte le rette del piano della circonferenza graduata ad essa parallele (num. 55).

Quando il livello è rettificato, si può stabilire la verticalità dell'asse dello strumento, e quindi l'orizzontalità del piano della circonferenza graduata, portando prima il livello nella direzione di due viti del triangolo, usando di queste per centrare la bolla, disponendo il livello in una direzione perpendicolare alla prima, e stabiliendo nuovamente la sua orizzontalità colla terza vite del triangolo. Ciò fatto, il piano della circonferenza graduata sarà orizzontale, siccome passante per una retta orizzontale ottenuta col primo movimento, e per un'altra, pure orizzontale e perpendicolare alla prima, ottenuta col secondo.

Talvolta i livelli sono due, disposti in senso perpendicolare, e se ne fa la verifica e la rettifica facendo coincidere lo zero del nonio con quello della graduazione, riducendo col movimento generale un livello nella direzione di due delle tre viti del triangolo, e muovendo poscia queste tre viti finchè le bolle siano centrate. Girando dopo il cilindro superiore finchè lo zero del nonio coincida colla incisione 180°, si osservi se le bolle si mantengono ancora centrate: se ciò ha luogo, i livelli sono rettificati; in caso diverso, si correggerà per ciascuno, metà errore colla vite ad esso unita e metà colle due viti o colla vite del triangolo collocate nella loro direzione.

In tal caso l'operazione dell'orizzontamento si fa con molta speditezza, portando un livello nella direzione di due viti del triangolo, e riducendo le bolle ad indicare l'orizzontalità, per questo livello colle due accennate viti del triangolo, e per l'altro colla terza.

88. **Misura degli angoli collo squadro graduato con cannocchiale.** — Orizzontato il piano della circonferenza graduata, si misura con questo strumento l'angolo di due allineamenti, ossia la proiezione orizzontale dell'angolo delle visuali che da un punto vanno a due altri, o operando precisamente come si è detto per lo squadro graduato ordinario, o introducendo l'uso del cannocchiale, secondochè i punti collocati nella direzione dei lati dell'angolo a misurarsi non sono o sono molto discosti dal vertice. Così, essendo ACB (*fig.* 127) l'angolo da misurarsi, si dispone lo strumento in modo che il suo asse cada verticalmente al disopra del punto C; si orizzonta il piano della sua circonferenza graduata; si fa coincidere lo zero del nonio con quello della graduazione; supposto che la graduazione proceda da sinistra a dritta, s'imprime allo strumento il movimento generale, fino a vedere l'oggetto di destra nel campo del cannocchiale; si impedisce questo movimento colla corrispondente vite di arresto; colle viti di richiamo del movimento generale e del cannocchiale si fa in modo che il filo verticale del micrometro copra esattamente il mezzo dell'indicato oggetto; e si fa dopo girare il cilindro superiore finchè dal cannocchiale si scorga l'oggetto di sinistra: si legge l'angolo segnato dallo zero del nonio, che sarà evidentemente l'angolo voluto.

89. **Verificazioni dello squadro graduato con cannocchiale.** — Acciocchè la misura di un angolo sia in ogni caso esatta, è necessario che lo strumento soddisfi, quando il piano della sua circonferenza graduata è orizzontale, a condizioni affatto analoghe a quelle già espresse per lo squadro graduato ordinario, e che non credo inutile di qui esporre ordinatamente:

1° *Il piano determinato da ciascun traguardo e filo opposto deve essere verticale, ed il piano descritto dall'asse ottico, nella rotazione del cannocchiale sull'asse del suo perno, deve pur essere verticale;*

2° *Coincidendo lo zero del nonio con quello della graduazione, è bene che i due traguardi e fili opposti, uno del cilindro inferiore e l'altro del cilindro superiore, non che l'asse ottico del cannocchiale sieno in un medesimo piano verticale;*

3° *La graduazione deve essere esatta e l'asse di rotazione del cilindro superiore deve passare pel centro della circonferenza graduata;*

4° *Il piano verticale determinato dal traguardo di mira e filo opposto deve costantemente passare per l'accennato asse, e per esso* *deve pure passare il piano verticale determinato dall'asse ottico del cannocchiale;*

5° *I piani dati dai traguardi e fili opposti del cilindro superiore devono essere perpendicolari fra loro.*

1ª *Verificazione.* Senza punto accennare al modo di eseguire la prima verificazione per rapporto ai traguardi, dirò come, osservando se l'intersezione dei fili del micrometro copre sempre nella rotazione del cannocchiale una linea verticale, quale sarebbe un filo a piombo o lo spigolo verticale di un muro, si acquista la certezza, non solo se l'asse ottico descrive un piano verticale, ma se di più è perpendicolare al perno su cui gira.

Uno strumento con tale imperfezione è assolutamente inservibile, imperocchè l'asse ottico del cannocchiale può trovarsi in varii piani di collimazione col solo variare la sua inclinazione, e quindi si avrebbero angoli differenti aventi per misura lo stesso numero di gradi, il che è assurdo.

2ª *Verificazione.* La seconda verificazione consiste nel far coincidere lo zero del nonio con quello della graduazione e nell'accertarsi se le tre visuali dirette pel traguardo del cilindro inferiore, per quello del cilindro superiore e pel cannocchiale vanno a colpire uno stesso oggetto.

Uno strumento affetto da errore di *parallelismo* o di *collimazione* può servire a fare operazioni esatte, impiegando nella misura degli angoli o il solo traguardo di mira o il solo cannocchiale.

3ª 4ª e 5ª *Verificazione.* La terza e la quarta verificazione si effettuano, come già venne detto parlando dello squadro graduato ordinario, misurando gli angoli anche col traguardare pel solo cannocchiale. La quinta verificazione finalmente in nulla differisce da quella già data al numero 85.

Grafometro con alidade a traguardi.

90. Descrizione del grafometro con alidade a traguardi. — Consistevano i grafometri, nella loro prima origine, in un semicircolo di metallo *abc* (*fig.* 132) diviso in gradi e mezzi gradi, al quale si poteva imprimere un movimento di rotazione attorno ad un asse passante pel suo centro mediante un ginocchio *g* seguìto da un tubo per mettere lo strumento su un trepiede. Agli estremi del diametro 0° e 180° vi erano due lastre *d* ed *e*, perpendicolari al piano del semicircolo, e due altre *f* ed *h* si trovavano agli estremi di una riga, in guisa da formare due *alidade a traguardi*, l'una *fissa* e l'altra *mobile* attorno ad un asse passante pel centro del semicircolo. L'uso di queste alidade era di servire a mirare gli oggetti nelle operazioni fatte col grafometro, e per tale scopo le due lastre di ciascuna di esse si munivano di un traguardo, l'una dalla metà in su, l'altra dalla metà in giù, e corrispondenti ciascuno ad un'opposta apertura con dentro un filo di seta o un crine finissimo. Le alidade erano talmente costrutte che i piani passanti pei loro traguardi e fili opposti contenevano il centro dello strumento; e la traccia del piano passante pei traguardi e fili corrispondenti dell'alidada mobile, chiamata *linea fiduciale*, serviva come d'indice nella lettura degli angoli. Talvolta, onde conseguire maggior approssimazione, si annettevano agli estremi dell'alidada mobile due nonii coi loro zeri nella linea di fede.

91. **Uso del grafometro.** — S'impiega questo strumento per misurare l'angolo di due visuali CA e CB (*fig.* 133), andando al vertice C, disponendo lo strumento in guisa che il suo centro sia verticalmente al disopra di questo e che il piano del semicircolo sia in quello degli oggetti, volgendo l'alidada fissa su uno di essi e leggendo l'angolo che segna la linea di fede o lo zero del nonio quando l'alidada mobile è volta sull'altro oggetto B. — Se invece dell'angolo ACB minore di 180° si volesse l'altro maggiore, si misurerebbe il primo che, sottratto da 360°, darebbe il secondo.

Con un grafometro si può anche ottenere l'angolo di una visuale BA (*fig.* 134), diretta ad un oggetto A, colla verticale BV del luogo d'osservazione. Perciò si disponga il semicircolo, mediante un filo a piombo, in modo che il diametro 0° e 180° sia nella verticale BV; si miri coll'alidada mobile il punto A; leggasi l'angolo segnato dallo zero del nonio, ed esso sarà evidentemente l'angolo voluto, il quale si conosce sotto il nome di *distanza zenitale* del punto A.

Se invece del diametro 0° e 180°, si dispone verticale il raggio numerato 90°, l'angolo che si legge collimando al punto A è quello della visuale BA coll'orizzontale BO, ed è facile il vedere che l'angolo letto è di *elevazione* o di *depressione,* secondo che è indicato dal nonio più vicino o dal nonio più lontano all'oggetto osservato. L'angolo di una visuale coll'orizzonte si ottiene anche misurando quello che essa fa colla verticale, e facendone il complemento, che corrisponde ad un'elevazione o ad una depressione, secondo che risulta positivo o negativo.

92. **Riduzione dell'angolo all'orizzonte trattata graficamente.** — Nelle pratiche operazioni, occorrendo generalmente la proiezione orizzontale dell'angolo di due visuali, conviene, se si può, disporre

orizzontale il semicircolo, il che nel descritto strumento si fa a vista, oppure procurando con un filo a piombo di ottenere la verticalità dei traguardi e fili collocati nelle alidade. Quando però i due oggetti che si osservano sono molto depressi o molto elevati sull'orizzonte del luogo d'osservazione, non è possibile disporre orizzontale il piano del semicircolo, e può allora tornar utile una operazione grafica, detta *riduzione dell'angolo all'orizzonte*, atta a dedurre dall'angolo misurato nel piano di due visuali la sua proiezione orizzontale.

Supponendo che un osservatore, postosi in A (*fig.* 155), e dirette due visuali ai punti B e C, abbia misurato, oltre gli angoli della verticale AV colle visuali AB ed AC, anche l'angolo BAC di queste ultime, si potrà facilmente dedurre la sua proiezione orizzontale prendendo una retta XY rappresentante un'orizzontale, innalzando per un punto E una perpendicolare EF e costruendo gli angoli GFE, HFE ed IFG rispettivamente eguali agli angoli BAV, CAV e BAC. Ciò fatto, col centro in F si descriva l'arco HKL determinante la $\overline{FL}=\overline{FH}$, coi centri in E ed in G si descrivano due archi di raggio $\overline{EH}$ e $\overline{GL}$, ed unendo con E la loro intersezione M, si avrà in MEG l'angolo domandato. — Infatti, se sulla verticale AV immaginiamo preso il punto D in modo che $\overline{AD}=\overline{EF}$, e condotto per esso il piano orizzontale BDC tagliante le facce BAV, CAV e BAC secondo le rette $\overline{BD}$, $\overline{DC}$ e $\overline{CB}$; si vede chiaramente che l'angolo BDC è proiezione orizzontale dell'altro BAC, e che non è altro che l'angolo di un triangolo di cui due lati sono $\overline{DB}=\overline{EG}$ e $\overline{DC}=\overline{EH}$, cateti dei triangoli rettangoli BAD e CAD, cui sono eguali gli altri GFE e HFE, e che il terzo lato è $\overline{BC}=\overline{GL}=\overline{GM}$, spettante al triangolo BAC cui è eguale l'altro LFG.

Questo metodo di ridurre gli angoli all'orizzonte è sufficiente nelle operazioni eseguite col grafometro a traguardi. Nelle grandi operazioni geodetiche in cui si adoperano strumenti di precisione, qual è il *circolo ripetitore*, si fa la riduzione degli angoli all'orizzonte traendo partito di formole, la cui esposizione credo fuor di proposito, siccome quelle che in un corso di topografia rimarrebbero senza applicazione alcuna.

Grafometri con cannocchiali e circoli.

93. **Descrizione dei grafometri con cannocchiali e dei circoli.** — Le molte imperfezioni del grafometro con alidade a traguardi, l'impossibilità di poter con essi osservare oggetti assai lontani, non che l'incomodo di dover generalmente ridurre gli angoli letti

all'orizzonte, fecero introdurre l'uso del grafometro a cannocchiali. Questo strumento, formato in gran parte come quello già descritto, presentava però la varietà di avere, a luogo dell'alidada fissa, un cannocchiale chiamato pure *fisso*, posto al disotto del diametro 0° e 180°; ed, a luogo dell'alidada mobile, un secondo cannocchiale detto *mobile*, portato da un sostegno che, girando attorno ad un asse passante pel centro della circonferenza graduata, faceva su questa strisciare due nonii. In alcuni di questi strumenti gli assi ottici dei cannocchiali erano paralleli al piano del semicircolo, ed in alcuni altri si potevano far subire a quelli delle inclinazioni qualunque per rapporto a questo. Con ciò si aveva il vantaggio di poter avere l'angolo di due visuali ridotto all'orizzonte, procurando prima l'orizzontalità del circolo graduato o a vista o con un livello a bolla d'aria, girando lo strumento sulla sua ginocchiera.

Il bisogno di disporre orizzontale il piano del semicircolo fece ancora modificare la costruzione dei grafometri a cannocchiali, sopprimendo il ginocchio e surrogandolo con tre piedi e con tre viti, disposte nei tre vertici di un triangolo equilatero, ed aventi per oggetto di conseguire la voluta orizzontalità, dietro l'ispezione di uno o due livelli a bolla d'aria, operando precisamente come già si disse per lo squadro graduato con cannocchiale. I grafometri portano ben di frequente un declinatore magnetico, e talvolta anche un eclimetro.

I suddescritti grafometri però sono al giorno d'oggi in disuso, ed in loro vece si sono introdotti i grafometri a circolo intero, detti *circoli*, i quali, quantunque in varie guise costrutti, hanno però sempre le tre viti v', v'' e v''' (*fig.* 136), e quindi uno o due livelli a bolla d'aria per l'orizzontamento; un cannocchiale M girevole intorno ad un asse passante pel centro del circolo graduato; una vite di pressione p per impedire il movimento generale, quando vuolsi solo far girare il cannocchiale coi nonii; un'altra vite p', per rendere solidarii i nonii ed il disco graduato; e finalmente due viti di richiamo r ed r', l'una pel movimento generale, e l'altra pel movimento parziale.

94. **Misura dell'angolo di due allineamenti con un grafometro a cannocchiali o con un circolo.** — Ben sicuri che l'unico o che i due livelli a bolla d'aria annessi a siffatti strumenti siano capaci di dare l'orizzontalità del piano in cui trovasi la graduazione (operazione questa che si fa colle norme date al numero 87), si misura l'angolo di due allineamenti CA e CB (*fig.* 127) venendo nel loro vertice C; disponendo con un filo a piombo lo strumento in

modo che il centro della graduazione cada verticalmente al disopra di esso; orizzontandolo come si disse parlando dello squadro graduato con cannocchiale; dirigendo il cannocchiale fisso ad un punto di uno degli allineamenti, girando tutto lo strumento; e girando finalmente il cannocchiale superiore finchè vedasi un punto dell'altro allineamento. L'angolo indicato dallo zero del nonio sarà il voluto.

In tale operazione è miglior partito il far uso del solo cannocchiale mobile: perciò si ottenga prima la esatta coincidenza dello zero del nonio con quello della graduazione, e si giri poscia tutto lo strumento finchè l'asse ottico del cannocchiale mobile copra un oggetto dell'allineamento di destra o di sinistra, secondo che la graduazione procede da sinistra a dritta o viceversa. Fermato il disco graduato coll'opportuna vite di pressione, girando il cannocchiale si collimerà ad un oggetto dell'altro allineamento; si leggerà l'angolo segnato dallo zero del nonio che evidentemente sarà quello che si cerca.

Da questo secondo metodo di misurare un angolo, nel quale non si fece uso del cannocchiale fisso, si deduce il perchè quasi tutti i circoli (*fig.* 136) hanno il solo cannocchiale mobile, oppure questo non che un altro annesso al sostegno intorno a cui può girare, ed inserviente come mezzo fiduciale, col rivolgerlo, prima di far rotare il cannocchiale superiore, ad un oggetto qualunque, e coll'accertarsi che esso vi collima ancora quando si sta per leggere l'angolo.

95. **Verificazione dei grafometri e dei circoli**. — Acciocchè i risultati ottenuti con un grafometro qualunque siano buoni, alcune condizioni sono necessarie, che tutte devono essere soddisfatte quando è orizzontale il piano in cui si trova la graduazione, e che si riducono generalmente a riconoscere:

1° *Se i traguardi e fili opposti delle alidade sono verticali, oppure se gli assi ottici dei cannocchiali si muovono in piani verticali;*

2° *Se, coincidendo lo zero del nonio con quello della graduazione, il piano verticale dei traguardi e fili opposti dell'alidada mobile, oppure il piano verticale descritto dall'asse ottico del cannocchiale mobile, si confonde col piano verticale dei traguardi e fili opposti dell'alidada fissa, o col piano verticale descritto dall'asse ottico del cannocchiale fisso;*

3° *Se la graduazione è esatta, e se l'asse, intorno cui si fa la rotazione parziale dell'alidada o del cannocchiale mobile, passa pel centro della circonferenza graduata;*

4° *Se il piano verticale determinato dai traguardi e fili dell'ali-*

dada mobile, o dall'asse ottico del cannocchiale mobile, passa costantemente per l'accennato asse di rotazione.

Dietro quanto già si disse parlando degli squadri graduati, credo affatto inutile l'aggiungere parola sul modo di eseguire le enunciate verificazioni. Negli strumenti che hanno un sol cannocchiale non è possibile la seconda verificazione, la quale non è necessaria anche negli strumenti a due cannocchiali, purchè nel misurare gli angoli si faccia uso del solo cannocchiale mobile. Talvolta si adattano ai circoli delle viti che permettono di spostare l'asse ottico del cannocchiale mobile, non che il suo asse di rotazione; e queste viti, avendo per oggetto di rendere soddisfatte le condizioni qui sopra enunciate, servono a rettificare lo strumento, operando con metodi che s'indicheranno parlando dalla diottra e del teodolite.

Operazioni planimetriche eseguite coi goniometri.

96. **Problemi risoluti coi goniometri.** — I. *Per un punto preso su un allineamento condurne un secondo che faccia con esso un angolo dato.*

Prima di risolvere questo problema convien osservare in che senso procede la graduazione dello strumento che vuolsi impiegare, e se l'allineamento dato deve rimanere allineamento di dritta o allineamento di sinistra per rapporto ad un operatore posto nel vertice e rivolto verso quella parte dell'allineamento dato su cui vuolsi costruire l'angolo stabilito. Ritenuto che la graduazione dello strumento proceda da sinistra a dritta, e che l'allineamento dato CB (*fig.* 157) debba, dopo la soluzione, rimanere allineamento di dritta, s'incominci dal far coincidere lo zero del nonio con quello della graduazione; s'imprima allo strumento il movimento generale fino a coprire coll'incrocicchio dei fili micrometrici del cannocchiale mobile un oggetto collocato su CB; mediante il movimento parziale si porti lo zero del nonio a coincidere coll'incisione indicante l'ampiezza α dell'angolo a costruirsi, e tutte le paline collocate nella direzione della linea di mira si troveranno in un allineamento CD che sarà il voluto.

Se poi l'allineamento dato CB deve rimanere allineamento di sinistra, convien fare la sottrazione $360° - \alpha$, e su CB, preso come allineamento di dritta, costruire quest'angolo differenza.

Una regola affatto inversa convien tenere se la graduazione procede da dritta a sinistra.

Usandosi di uno squadro graduato, di un grafometro o di un circolo a due cannocchiali senza errore di collimazione, si può dirigere il traguardo o l'asse ottico, collocato nel piano verticale del diametro 0° e 180°, sull'allineamento CB; rendere immobile il disco graduato; portare lo zero del nonio all'incisione che esprime l'angolo a farsi; e servirsi del traguardo o cannocchiale di mira per tracciare un allineamento sul terreno, che sarà il richiesto.

1ª *Osservazione.* Costruendo l'angolo $\alpha=90°$, si risolve il problema d'innalzare da C un allineamento perpendicolare ad AB.

2ª *Osservazione.* Misurando un angolo ACB (*fig.* 138), e costruendone la sua metà sull'allineamento CB, si trova l'allineamento CX che divide l'angolo ACB in due parti eguali.

II. *Per un punto preso fuori di un allineamento condurne un secondo che faccia con esso un angolo dato.*

L'allineamento dato sia AB (*fig.* 139), il punto dato C, e l'angolo a costruirsi α. — Si misura l'angolo $CDB=\beta$: l'allineamento CF, determinato in modo da essere l'angolo $DCF=180°-(\alpha+\beta)$, è evidentemente l'allineamento domandato.

1ª *Osservazione.* Se $\alpha=90°$, si risolve il problema di condurre pel punto C un allineamento perpendicolare ad AB.

2ª *Osservazione.* Facendo $\alpha=0$, l'allineamento CF risulta parallelo ad AB; cosicchè si condurrà per un punto accessibile C (*fig.* 140) un allineamento parallelo ad AB, misurando l'angolo $CDB=\beta$, e costruendo l'angolo $DCF=180°-\beta$.

III. *Essendo dati due punti dalla medesima parte di un ostacolo, oppure uno da una parte e l'altro dall'altra, prolungare l'allineamento da essi determinato.*

Le soluzioni di questo problema, già esposte parlando dell'uso delle canne o della catena e dello squadro agrimensorio, si possono modificare e rendere più generali mediante un goniometro, servendosi di un tale strumento per tracciare quegli allineamenti paralleli che in esse si richiedono; le medesime quistioni però si possono anche risolvere coi metodi che seguono.

1° Quando i due punti A e B (*fig.* 141) sono dalla medesima parte dell'ostacolo, si misura l'angolo BAC e la retta $\overline{AC}$; si fa l'angolo ACX supplemento del doppio di BAC, e si prende $\overline{CD}=\overline{CA}$; si costruisce l'angolo EDC, supplemento dello stesso BAC, e si ha in DE il cercato prolungamento; giacchè, per la fatta costruzione, le due parti $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ sono nella direzione della base del triangolo isoscele ACD.

2° Quando i due punti A e B (*fig.* 142) si trovano uno da una parte e l'altro dall'altra dell'ostacolo, si conduce l'allineamento BY; scelto su questo un punto D, si misura l'angolo ADB; per A si guida l'allineamento AX parallelo a BY costruendo l'angolo CAD $=$ADB; si determina $\overline{AC}=\overline{BD}$, e si misura l'angolo ACD; costruendo gli angoli CAF e DBE, il primo eguale ed il secondo supplemento di ACD, si avranno evidentemente nelle direzioni di AF e BE i prolungamenti domandati.

IV. *Trovare una distanza* $\overline{AB}$ (*fig.* 143) *accessibile ai suoi due estremi.*

Scelto sul terreno un punto C da cui risultino visibili gli estremi A e B, si misurino la distanza $\overline{BC}$ e l'angolo BCA; sulla $\overline{CA}$ si costruisca l'angolo ACY$=$ACB: portando sul suo lato CY la lunghezza $\overline{CD}=\overline{CB}$, si avrà in $\overline{AD}$ la distanza domandata, a motivo dell'eguaglianza dei due triangoli DCA ed ACB siccome aventi due lati rispettivamente eguali e l'angolo compreso eguale.

Se alla misura dell'angolo ACB$=$C e a quella del lato $\overline{BC}=a$ si aggiunge ancora la misura del lato $\overline{AC}=b$, si può dedurre $\overline{AB}=x$ della nota formola trigonometrica

$$x^2=a^2+b^2-2ab\cos C,$$

che facilmente si rende applicabile al calcolo logaritmico. — Infatti, essendo $\cos C=\cos^2\frac{1}{2}C-\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}C=2\cos^2\frac{1}{2}C-1$, si ha, sostituendo nell'equazione qui sopra stabilita, ed effettuando le riduzioni,

$$x^2=(a+b)^2-4ab\cos^2\frac{1}{2}C,$$

la quale diventa, ponendo $(a+b)^2$ fattor comune,

$$x^2=(a+b)^2\left\{1-\frac{4ab\cos^2\frac{1}{2}C}{(a+b)^2}\right\}.$$

Estraendo da quest'equazione la radice quadrata e facendo

$$\operatorname{sen}\varphi=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\cos\frac{1}{2}C \qquad (1),$$

si ricava

$$x = (a + b)\cos\varphi \qquad (2).$$

L'equazione (1) somministra φ quando si conoscano a, b e C, e l'equazione (2) conduce a ritrovare x.

Osservazione. Deducendo dal triangolo ABC, in cui si conoscono i tre lati e un angolo, gli altri due angoli CAB ed ABC, trovando in seguito i loro supplementi e costruendoli rispettivamente in CAy e CBz, si ha un'altra soluzione del problema di prolungare un allineamento AB al di là di un ostacolo, essendo dati due punti, uno da una parte e l'altro dall'altra dell'ostacolo medesimo. — In tal caso però è miglior partito di calcolare immediatamente i due angoli CAB = A e CBA = B senza prima procedere al calcolo di $\overline{AB}$. Dalla notissima proprietà che in un triangolo qualunque la somma di due angoli è supplemento del terzo, e che i seni degli angoli sono proporzionali ai lati opposti, si ricavano le seguenti due equazioni determinatrici di A e B:

$$\frac{1}{2}(A + B) = 90^\circ - \frac{1}{2}C \qquad (3),$$

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = \frac{a}{b} \qquad (4).$$

Trasformando l'equazione (4) in

$$\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B} = \frac{a + b}{a - b},$$

si ricava

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A + B)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A - B)} = \frac{a + b}{a - b},$$

o ancora

$$\frac{\cot\frac{1}{2}C}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A - B)} = \frac{a + b}{a - b},$$

d'onde

$$\tang\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}C \qquad (5).$$

Eseguendo i calcoli, si ha dall'equazione (3) l'angolo $\frac{1}{2}(A+B)$ e dall'equazione (5) l'angolo $\frac{1}{2}(A-B)$, e poste le equazioni

$$\frac{1}{2}(A+B)=m^o, \quad \frac{1}{2}(A-B)=n^o,$$

basta combinarle ordinatamente per addizione e sottrazione onde avere

$$A=m^o+n^o, \quad B=m^o-n^o.$$

V. *Trovare una distanza* AB (*fig.* 144) *accessibile in un sol estremo.*

Scelgasi il punto C da cui risultino visibili i due estremi A e B; misurisi l'angolo CAB e si costruisca questo in CAX; portato dopo lo strumento in C, misurisi l'angolo ACB, e costrutto anche questo in ACY, si determini l'intersezione B′ della AX colla CY: a motivo dell'eguaglianza dei due triangoli ABC ed AB′C, si avrà in $\overline{AB'}$ una lunghezza eguale ad $\overline{AB}$.

Se, oltre di misurare gli angoli ACB$=$C, CAB$=$A, si misura anche l'allineamento $\overline{AC}=b$, si può trigonometricamente dedurre la distanza cercata $\overline{AB}=x$ ponendo

$$x=\frac{b\,\mathrm{sen}\,C}{\mathrm{sen}\,B}=\frac{b\,\mathrm{sen}\,C}{\mathrm{sen}\left\{180^o-(A+C)\right\}}=\frac{b\,\mathrm{sen}\,C}{\mathrm{sen}\,(A+C)}.$$

VI. *Trovare una distanza* AB (*fig.* 145) *tutta inaccessibile.*

Condotto un allineamento di base CD, e trovati i due angoli BCD e ACD, si costruiscono questi dalla parte opposta della base in VCD e XCD. Si venga dopo in D, ed eseguita la medesima operazione per rapporto agli angoli ADC e BDC, si determini l'intersezione E di CX con DY e l'altro F di CV con DZ; si misuri la distanza $\overline{EF}$, ed essa sarà eguale ad $\overline{AB}$. — Infatti, essendo i due triangoli ACD, ECD eguali, siccome aventi un lato comune adiacente a due angoli rispettivamente eguali, sarà $\overline{CE}=\overline{CA}$; così nei due triangoli BDC ed FDC sarà $\overline{CF} = \overline{CB}$; consegue da ciò l'eguaglianza dei due triangoli ECF ed ACB, e quindi quella del lato $\overline{EF}$ col lato $\overline{AB}$.

Si può avere per $\overline{AB} = x$ un risultato di maggior precisione, applicando il calcolo trigonometrico, quando, oltre ai quattro angoli $BCD = \alpha$, $ACD = \beta$, $ADC = \gamma$ e $BDC = \delta$, si conosca anche la base $\overline{CD} = b$. Le lunghezze $\overline{CA} = y$ e $\overline{CB} = z$ si deducono rispettivamente dai due triangoli ACD e BCD col porre

$$y = \frac{b \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen}(\beta + \gamma)}, \quad z = \frac{b \operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen}(\alpha + \delta)};$$

e dal triangolo ACB, in cui si conoscono due lati e l'angolo compreso $ACB = \beta - \alpha$, si deduce x, ponendo

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{2\sqrt{yz}}{y + z} \cos \frac{1}{2}(\beta - \alpha), \quad x = (y + z) \cos \varphi.$$

97. **Rilevamento coi goniometri.** — In generale si effettua coi goniometri il rilevamento di una piccola porzione di terreno, fissando primitivamente i vertici di una ragionata poligonazione da rilevarsi con uno dei metodi d'irradiamento, di camminamento e d'intersezione. Per i dettagli che cadono in vicinanza dei lati di detta poligonazione, si adotta il metodo degli allineamenti: il metodo d'irradiamento, o meglio il metodo d'intersezione può convenire per quei punti che ne sono discosti.

Metodo d'irradiamento. La fig. 146, che rappresenta un terreno tutto accessibile, fa vedere come la poligonazione ABCDE siasi rilevata col metodo d'irradiamento, prendendo in O il punto di stazione; e come i punti di dettaglio siansi collegati ai lati della poligonazione medesima con semplici perpendicolari, usando delle canne e dello squadro agrimensorio.

Misurati tutti gli angoli intorno al punto O, convien verificare se la loro somma fa 360° e, nel caso che la differenza non ecceda i limiti delle prestabilite tolleranze, si ripartirà egualmente l'errore su tutti gli angoli misurati, salvo che circostanze speciali inducano a credere erroneo un angolo piuttosto che l'altro. Se talvolta, per accelerare l'operazione, si adotta il partito di misurare gli angoli con un sol allineamento d'origine, convien almeno verificare se, facendo l'intero giro, collimando la seconda volta al punto di partenza, lo zero del nonio segna 0^0.

Il disegno del piano si eseguisce incominciando dalla poligonazione, i cui angoli si costruiranno col semicircolo da tavolino, o meglio colle tavole delle corde o delle tangenti. Senza aggiungere parola alcuna sul modo di fissare i dettagli, mi limito a dire come, una volta disegnata la poligonazione, si avranno dei mezzi di controllo, osservando se le lunghezze di quei lati, direttamente misurati per fissare i dettagli, s'accordano con quelli che risultano dal disegno.

Metodo di camminamento. La fig. 147 rappresenta un terreno inaccessibile nel suo interno, rilevato circoscrivendovi un poligono ABCDEF di cui si sono misurati tutti i lati e tutti gli angoli. La parte di perimetro FGB venne collegata ai due lati $\overline{FA}$ ed $\overline{AB}$ della poligonazione col metodo delle perpendicolari; per intersezione si è determinato il punto I, e per irradiamento il punto H.

Prima di abbandonare il terreno, bisogna sempre verificare se la somma degli angoli interni della poligonazione fa tante volte 180° quanti sono i lati meno 360^0: se l'errore non eccede le tolleranze ammissibili, si riterrà l'operazione come esatta; in caso contrario, si rifarà l'operazione.

Giudiziosamente corretti gli angoli, si costruisce il piano incominciando dalla poligonazione, pel disegno della quale si possono seguire due diversi metodi. — Il primo metodo consiste nel fissarsi un punto a, come rappresentativo di A; nel guidare per esso la retta af' che deve rappresentare in direzione la AF, e nel fare l'angolo $f'ab'$=FAB: prendendo $\overline{af}=\frac{1}{n}\overline{AF}$ ed $\overline{ab}=\frac{1}{n}\overline{AB}$, si determinano i due vertici f e b rappresentativi di F e B. Costruendo col vertice in b l'angolo abc'=ABC e prendendo $\overline{bc}=\frac{1}{n}\overline{BC}$, si determina il punto c rappresentativo di C, e così continuando si trovano ordinatamente i vertici d, e. — Il secondo metodo consiste nel costrurre intorno al punto primitivamente fissato a, mediante gli angoli misurati sul terreno, tutte le rette af_1, ab_1, ac_1, ad_1 e ae_1 in modo che il punto a sia, per rapporto a queste rette, ciò che il punto A è per AF e AB, il punto B per la BC, il punto C per la CD ed il punto D per la DE. Evidentemente, col prendere $\overline{af}$ ed $\overline{ab}$ rispettivamente eguali $\frac{1}{n}\overline{AF}$ e $\frac{1}{n}\overline{AB}$, si determinano i due punti f e b rappresentativi di F e B; conducendo da b la bc' parallela ad ac_1

e portando su essa $\overline{bc} = \frac{1}{n} \overline{BC}$, si trova il vertice c; e così procedendo, si collocano a sito anche gli altri vertici d ed e.

Qualora siansi misurati sul terreno tutti i lati e tutti gli angoli della poligonazione, si hanno in tre di queste misure altrettanti mezzi di controllo indispensabili per riconoscere se la figura chiude: se ciò non avviene, si osserva se l'errore è nei limiti delle tolleranze ammissibili, nel qual caso basta un po' di buon senso per combinare le cose nel miglior modo possibile; nel caso contrario, bisogna ritornare sul terreno, riconoscere dove trovansi gli errori, e farne l'opportuna correzione.

Metodo d'intersezione. Facendo stazione col goniometro nei due estremi A e B della base, misurando $\overline{AB}$ e trovando tutti gli angoli che con essa fanno le visuali dirette ai vertici C, D, E ed F, si rileva il terreno rappresentato nella figura 148. Quando esistono dei punti di dettaglio si collegano ai lati della poligonazione col metodo degli allineamenti.

La costruzione grafica del piano riesce semplicissima: si segnerà innanzi tutto nella scala stabilita la base $\overline{ab}$, e poscia si passerà alla costruzione degli angoli misurati; così, costruendo gli angoli *bad* ed *abd* rispettivamente eguali agli angoli BAD e ABD, si determina, nell'intersezione dei due lati *ad* e *bd*, il punto *d* rappresentativo di D.

Come già si notò altra volta, bisogna assolutamente rifiutare le intersezioni che si fanno troppo obliquamente, ritenendo che le intersezioni sotto un angolo compreso fra 30° e 120° siano le sole accettabili.

1ª *Osservazione.* Talvolta nel rilevare per camminamento si presenta il caso di dover arrestare il metodo d'operazione per l'incontro di qualche ostacolo o di un terreno difficile che non permette di misurare la lunghezza di qualche lato della poligonazione che si percorre, come lo indica la figura 149, rappresentante un terreno attraversato, per esempio, da un corso d'acqua che non si può varcare nella direzione dei lati $\overline{BC}$ ed $\overline{EF}$. In tal caso si applica, dove si può, il metodo di camminamento, e quei punti come C ed F, esistenti sui lati $\overline{BC}$ ed $\overline{EF}$ cogniti di direzione, che non si possono determinare colla misura diretta degli accennati lati, si fissano misurando rispettivamente in essi gli angoli BCA ed EFB delle visuali dirette ai punti determinati A e B. Questo metodo di determinare un punto mediante l'angolo della visuale diretta ad esso da un punto determinato, e mediante la visuale diretta da esso ad un altro punto fisso, si dice *metodo d'intersezione inversa.*

La costruzione del piano si effettua come segue: condotta la $\overline{ab}=\frac{1}{n}\overline{AB}$, si faccia al suo estremo l'angolo $abc'=ABC$; in un punto qualunque c'' di bc' si costruisca l'angolo $xc''b=ACB$; per a si guidi una parallela alla $c''x$, e nell'incontro di questa con bc' si avrà il vertice c rappresentativo di C. I punti d ed e rappresentativi di D ed E si collocano a sito costruendo prima l'angolo $d'cb=DCB$, prendendo $\overline{cd}=\frac{1}{n}\overline{CD}$, passando poscia a far l'angolo $cde'=CDE$ e portando $\overline{de}=\frac{1}{n}\overline{DE}$. La determinazione del punto f, rappresentativo di F, si fa come si insegnò pel punto c, e, qualora abbiansi gli angoli di FC ed FB con FE, si può appoggiare la costruzione di detto punto tanto ai due punti e e c, quanto ai due punti e e b, ed avere quindi un mezzo di verificazione.

2ª *Osservazione.* Coll'applicazione dei calcoli trigonometrici agli elementi che si ottengono con un goniometro, si potrebbero facilmente convertire questi elementi in altri più comodi per la costruzione del piano, e si potrebbero calcolare le coordinate di ciascun punto della poligonazione per rapporto a due assi ortogonali condotti secondo qualsivoglia direzione per un punto dato del terreno. È consiglio dei provetti nella pratica però, che il disegno d'una poligonazione rilevata cogli esposti metodi si debba eseguire unicamente con operazioni grafiche, sia perchè, impiegando il calcolo, le operazioni al medesimo spettanti riuscirebbero lunghissime per la loro moltiplicità, sia perchè, la misura di angoli con detti strumenti non essendo esattissima, sarebbe contro ragione l'impiegare metodi esatti per ricavare da elementi inesatti la posizione dei punti rilevati, la quale perciò non riuscirebbe mai scevra dagli errori di rilevamento.

98. **Norme generali per il rilevamento di una grande porzione di terreno coi goniometri.** — Riconosciuti, dietro un'ispezione del luogo, i punti da rilevarsi, e fatto l'abbozzo delle indicazioni locali, converrà seguire le seguenti norme.

1° Si traccino sul terreno diversi allineamenti passanti in vicinanza delle linee naturali da rilevarsi, accessibili, per quanto è possibile, su tutta la loro lunghezza e formanti una serie di poligoni coi lati sensibilmente eguali e che non ne numerino più di cinque o sei: questi lati non devono essere tanto brevi, nè troppo lunghi onde schivare la troppa complicazione del lavoro, e per rendere insensibili le influenze degli errori che inevitabilmente si commettono nella misura degli angoli: le loro lunghezze devono avere un certo rapporto colla perfezione dello strumento che si adopera e colla scala in cui vuol essere ultimato il lavoro. Se alcune linee da rilevarsi giacciono discoste dai perimetri degli accennati poligoni, si conducano delle trasversali e delle diagonali, e, qualora ciò non basti, si dividano i poligoni principali in due o più altri secondarii, in cui, se le circostanze lo esigono, si possono anche condurre delle trasversali e delle diagonali.

2° Fatto questo, s'intraprendano ordinatamente le misure degli angoli della rete poligonale, ed i risultati dell'operazione si marchino su un abbozzo della medesima, avente i vertici numerati con appositi numeri d'ordine, oppure in un registro del genere di quello qui sotto riportato e dove le intestazioni delle diverse finche a sufficienza fanno conoscere le indicazioni ed i numeri che in esse si devono marcare.

STAZIONI	PUNTI DI MIRA	ANGOLI	LUNGHEZZE DEI LATI	OSSERVAZIONI

In ogni vertice dei poligoni primarii si misurino non solo gli angoli fatti da due lati contigui; ma, immaginando ogni poligono scomposto in triangoli con tante diagonali, si trovino tutti gli angoli fatti intorno a quel punto. — Ogniqualvolta si termina la misura degli angoli intorno ad un punto, si verifichi se la loro somma fa 360°; ogniqualvolta si abbiano tutti gli angoli di un triangolo, si provi se la loro somma vale 180°; e finalmente, ogniqualvolta sia compiuta la misura di tutti gli angoli di un poligono, si acquisti la certezza se la somma de' suoi angoli interni fa tante volte 180°

quanti sono i lati del poligono, meno 360°. Trovandosi qualche piccola discrepanza nei limiti delle tolleranze, si ritiene l'operazione come esatta. — Nel mentre si procede alla misura degli angoli, non si dimenticheranno quelli che possono servire a fissare per irradiamento e per intersezione quei punti del terreno che cadono discosti dal perimetro della rete poligonale.

3° Dopo la misura degli angoli si percorrano ordinatamente i lati dei diversi poligoni e le trasversali, collegandovi i punti di dettaglio col metodo degli allineamenti. Le lunghezze totali dei lati della rete poligonale si marchino sull'abbozzo o sul registro in cui già vennero notati gli angoli; le misure tutte lineari, che servono alla determinazione dei punti di dettaglio, si registrino su altri abbozzi in iscala maggiore e rappresentanti le diverse porzioni in cui venne scomposto il terreno da rilevarsi col tracciamento della poligonazione.

4° Coi dati presi sul terreno si passi, dietro le norme già date, a disegnare il piano incominciando dalla rete poligonale, la quale somministrerà molti mezzi di controllo, dovendo aver luogo la chiusura di tutti i poligoni e la perfetta sovrapposizione di ciascuna trasversale colla retta determinata dai suoi estremi.

ARTICOLO VII.

Della bussola topografica.

99. **Descrizione della bussola topografica.** — È proprietà dell'ago calamitato di disporsi, per estensione di paese non troppo grande, in direzioni sensibilmente parallele allorquando può orizzontalmente girare su una punta verticale. Questa direzione, variabile col tempo e coi luoghi, è chiamata *meridiano magnetico*, ed essa è determinata dal piano verticale che passa per le estremità dell'ago e per la punta che lo sopporta. L'angolo che il meridiano magnetico fa col meridiano terrestre si conosce sotto il nome di *declinazione* dell'ago, che può essere *orientale* od *occidentale*, secondo che l'ago devia dal nord verso oriente, o dal nord verso occidente. In Torino essa era al principio dell'anno 1869 di circa 13° 30′ verso l'occidente. L'estremità dell'ago che si dirige verso il nord dicesi *polo boreale*, e *polo australe* quella rivolta verso il sud.

Sull'accennata proprietà dell'ago calamitato è fondata la costruzione e l'uso della *bussola topografica*. Consiste generalmente questo strumento in una cassetta di legno (*fig.* 150) a base quadrata con entro un circolo graduato, la cui periferia viene percorsa dalle due estremità di un ago calamitato che può girare su una punta sorgente dal centro del circolo stesso. Su un lato di questa cassetta, e parallelamente al diametro 0° e 180°, havvi generalmente un cannocchiale girevole attorno ad un asse orizzontale, tuttavolta che, messo lo strumento sopra un trepiede, si renda il piano della circonferenza graduata orizzontale o a vista, facendo in modo che le due punte dell'ago rasentino il lembo, o dietro l'ispezione di uno o di due livelli a bolla d'aria annessi allo strumento medesimo, da rettificarsi e da usarsi come già si è detto nel numero 87. L'intero strumento è talvolta sostenuto da un ginocchio cui fa seguito un manico cavo per adattare lo strumento al collo di un trepiede, e talvolta da tre piedi che portano ai loro estremi le tre viti v', v'' e v''' collocate nei tre vertici di un triangolo equilatero e che si prestano ad orizzontare il circolo graduato.

A fianco della cassetta e dalla parte del cannocchiale suolsi nelle bussole moderne adattare un eclimetro E, inserviente alla misura degli angoli di elevazione e di depressione.

La divisione della graduazione segnata 0° ha l'indicazione N (nord), quella S (sud) la divisione 180°, mentre le lettere E (est) ed O (ovest) sono applicate alle divisioni 90° e 270°. Supponendo l'indicazione S o 180° posta fra il centro del circolo graduato e l'osservatore, la graduazione procede generalmente da 0° verso destra, ed il cannocchiale trovasi a destra coll'oculare dalla parte dell'indicazione S. La punta dell'ago che si rivolge al nord è colorita in azzurro oscuro, onde distinguerla dall'altra opposta che si dirige al sud.

100. **Uso della bussola topografica.** — Prima di esaminare se una bussola topografica può condurre a buoni risultati, sarà bene conoscere l'uso cui deve servire, imperocchè è da questo soltanto che si possono inferire le condizioni necessarie ad uno strumento per essere ben costrutto.

1° La bussola topografica serve a trovare l'angolo che un allineamento qualunque, come AB (*fig.* 151), fa col meridiano magnetico, col seguente processo. Portato lo strumento col suo centro nella verticale di un punto qualunque C dell'allineamento dato, si orizzonti, e l'operatore, collocatosi in modo da avere il cannocchiale alla sua diritta, lo rivolga ad un punto A dell'allineamento; leggasi l'angolo segnato dalla punta azzurra dell'ago calamitato, e questo sarà l'angolo richiesto. — Infatti, per essere l'asse ottico del cannocchiale in un piano verticale parallelo al diametro 0° e

180°, stante la sua piccola distanza dal centro della graduazione in paragone della distanza $\overline{AC}$, si può benissimo supporre, con una sufficiente approssimazione, che l'asse ottico del cannocchiale sia in un piano verticale parallelo all'allineamento AC, e disposto nella direzione di quest'ultimo il diametro 0° e 180°; cosicchè l'arco oN, siccome quello che misura l'angolo ACN, darà nei suoi gradi, indicati dalla punta azzurra dell'ago calamitato, l'angolo che la parte AC di AB fa col meridiano magnetico.

A schivare la difficoltà di registrare un angolo letto, e che generalmente suol essere di grave incaglio ai principianti, è bene l'osservare come, per un operatore volto verso la punta azzurra, l'arco oN, che misura l'angolo, trovasi a sinistra dell'ago con un suo estremo sull'allineamento, e coll'altro sotto la punta azzurra; cosicchèbasterà fissare sulla carta un punto c qual rappresentante di C, condurre per esso la cn rappresentativa della direzione dell'ago, supporsi volto verso la freccia n, e marcare il numero dei gradi dell'angolo letto su un arco di centro c, e segnato da destra a sinistra a partire dalla direzione dell'ago calamitato. Se l'arco letto è maggiore di 180°, e quindi non costruibile immediatamente col semicircolo, si sottrarrà prima da 360° e l'angolo differenza si costrurrà da sinistra a dritta.

2° Dalla misura degli angoli di due allineamenti CA e CB col meridiano magnetico (*fig.* 152) dipende la ricerca del loro angolo. Portato lo strumento nel vertice C dell'angolo a trovarsi, si misurino, come già si disse, gli angoli α e β che i due allineamenti CA e CB fanno col meridiano magnetico e dal maggiore di questi due angoli si tolga il minore; si avrà nella differenza l'angolo voluto.

L'osservazione che due allineamenti terminati alla loro intersezione fanno fra loro due angoli, uno maggiore e l'altro minore di 180°, facilmente ci fa comprendere come la suesposta regola conduce sempre alla soluzione del problema, imperocchè essa dà sempre uno dei due accennati angoli; così nell'esempio della fig. 153, dove la direzione dell'ago calamitato è nell'angolo minore di 180° formato dai due allineamenti CA e CB, la differenza $\beta - \alpha$ dà uno degli angoli dei due allineamenti, ossia quello maggiore di 180°, dal quale si deduce l'altro colla sottrazione da 360°.

Osservazione. Qualunque sia il punto di un allineamento poco esteso in cui si va per misurare la sua inclinazione col meridiano magnetico, si ha, in virtù della nota proprietà dell'ago calamitato, il medesimo angolo; cosicchè, anche nel caso in cui i due allineamenti come CA e CB (*fig.* 165) siano inaccessibili al vertice, si otterrà il loro angolo, misurando quelli che essi fanno col meridiano magnetico, venendo nei punti E ed F e volgendo il cannocchiale tutte e due le volte o verso il vertice C od anche verso i prolungamenti, e facendone la differenza.

101. **Verificazioni della bussola topografica**. — Affinchè dall'impiego della bussola topografica si possano attendere plausibili risultati, le seguenti condizioni devono essere soddisfatte allorquando il suo asse di rotazione è verticale:

1° *Il piano in cui si muove l'asse ottico del cannocchiale deve essere verticale:*

2° *La punta che sostiene l'ago calamitato deve trovarsi nel centro della circonferenza graduata e questa deve essere ben divisa:*

3° *L'asse ottico del cannocchiale deve muoversi in un piano parallelo al diametro* 0° e 180°.

1ª *Verificazione*. A verificare la prima condizione, la cui importanza si è cercato di far conoscere parlando dello squadro graduato con cannocchiale, vale il processo su tal proposito esposto al numero 89. Con questa verificazione si acquista la certezza se l'asse intorno cui rota il cannocchiale è orizzontale, e se l'asse ottico è a quello perpendicolare. Una bussola avente un tal difetto, ed in cui non è possibile la correzione, si deve ritenere come assolutamente inservibile.

2ª *Verificazione*. Gli angoli letti con una bussola topografica non possono essere i veri, sia quando la graduazione è male eseguita, sia quando non passa pel centro la punta che sopporta l'ago calamitato, e quindi processi analoghi a quelli già adottati per gli altri goniometri valgono a fare questa seconda verificazione. Così, collocate sul terreno diverse paline determinanti un poligono, si trovino col metodo esposto nel precedente numero tutti gli angoli interni, e la loro somma deve fare tante volte due angoli retti quanti sono i lati del poligono, meno quattro retti.

Si può ancora eseguire questa seconda verificazione venendo colla bussola all'estremo A (*fig.* 154) di un allineamento AB; collimando all'altro estremo B e leggendo l'angolo segnato dalla punta azzurra; trasportandosi dopo in B e prendendo l'angolo della visuale diretta su una palina collocata in A col meridiano magnetico: se lo strumento soddisfa alla seconda condizione, la differenza fra l'angolo maggiore ed il minore deve dare 180°. Per conchiudere che lo strumento è esatto, converrà ripetere questa prova su parecchi allineamenti diversamente collocati.

Il difetto, per cui la punta dell'ago non trovasi nel centro della circonferenza graduata, dicesi *errore di eccentricità*: la sua esistenza si può anche riconoscere con un compasso, o girando leggiermente la bussola ed osservando se le due punte si mantengono sempre equidistanti dalla periferia graduata.

Una bussola colla graduazione mal fatta è inservibile, ma se è solo affetta dall'errore di eccentricità può ancora condurre a buoni risultati, operando come segue. Collocato lo strumento in un punto C (*fig.* 155) del terreno, orizzontato il piano della sua circonferenza graduata, si diriga un visuale ad un punto A molto discosto dallo strumento: se supponiamo che sia in C il centro della circonferenza graduata, che trovisi in P la punta che porta l'ago calamitato, invece di leggere il numero dei gradi dell'arco giusto OM, si leggerà quello dell'arco falso ON. Se ora si fa rotare lo strumento di mezzo giro, mirando di nuovo il punto A col cannocchiale portatosi nella posizione B′D′, la cui linea di mira si può ritenere come sensibilmente confondentesi colla DA, atteso la gran distanza del punto A dallo strumento, il punto P sarà venuto in P′ e l'ago avrà presa la posizione P′N′ parallela a PN segnando il numero dei gradi dell'arco $O'ON'=180°+ON'$, in guisa che, chiamando m l'ampiezza dell'arco ON, m' quella dell'arco $ON'=O'ON'-180°$, x quella dell'arco OM che misura l'angolo vero, si avrà, osservando che $MN=MN'$,

$$x=m-\frac{m-m'}{2}=\frac{m+m'}{2},$$

il qual risultato indica che, mediante una bussola avente l'errore di eccentricità, si possono fare delle operazioni esatte, collimando due volte ad un oggetto posto sull'allineamento di cui si vuol l'angolo col meridiano magnetico, la prima volta nel senso diretto e la seconda dopo aver fatto descrivere un angolo di 180° allo strumento, leggendo i due angoli, sottraendo 180° dal secondo, e prendendo la metà della somma del primo angolo letto coll'accennata differenza. Il secondo angolo da cui si sottrae 180° non deve mai essere minore del primo, e nel caso che le letture fatte sullo strumento diano un tale risultato, bisogna tenere per secondo angolo quello letto più 360°.

Il *metodo d'inversione* qui sopra indicato per la esatta misura di un angolo, oltre di eliminare l'errore di eccentricità, distrugge anche qualsiasi altro errore causato dal dissesto del cannocchiale: imperocchè, se col cannocchiale non rettificato risulta nella prima lettura un errore $\pm\varepsilon$, nella seconda ne risulta uno eguale e di segno contrario $\mp\varepsilon$, per cui, eliminandosi gli errori nella semisomma delle due letture, si ottiene l'esatto valore dell'angolo, come se il cannocchiale fosse rettificato.

Osservazione. Vi è un caso particolare in cui l'errore di eccentricità non influisce sull'angolo letto, e questo avviene quando la retta passante pel centro C del circolo graduato e pel piede P del perno sopportante l'ago si trova nella direzione dell'ago medesimo. Quando l'accennata retta è in una direzione perpendicolare all'ago, l'influenza dell'errore di eccentricità è massima.

3° *Verificazione.* Il difetto per cui l'asse ottico del cannocchiale non risulta parallelo al diametro 0° e 180°, si può riconoscere nel seguente modo. Portata la bussola in un punto A (*fig.* 156) di un allineamento A T, posto nella direzione del meridiano terrestre e tracciato colle norme che si esporranno parlando dell'orientamento delle reti trigonometriche, si misuri l'angolo di quest'allineamento col meridiano magnetico, e la terza condizione sarà soddisfatta quando l'angolo letto valga 360° meno la declinazione. Infatti, facendo descrivere allo strumento un angolo eguale alla declinazione TAM, lo zero della graduazione viene necessariamente a cadere sotto la punta azzurra, il diametro 0° e 180° nella direzione dell'ago, il cannocchiale, che prima era nella direzione del meridiano terrestre, verrà in quella del meridiano magnetico, e sarà parallelo al diametro 0° e 180°.

La quantità, di cui la differenza fra 360° e la declinazione differisce dell'angolo letto, sarà l'errore di *parallelismo* fra l'asse del cannocchiale ed il diametro 0° e 180°; errore detto anche di *collimazione*, e che per nulla influisce sulla reale misura dell'angolo di due allineamenti. Infatti, se il diametro 0° e 180° è parallelo all'asse ottico del cannocchiale, l'angolo ADB$=\alpha$ (*fig.* 157) delle due visuali dirette ai punti A e B viene misurato dalla differenza dei due archi NO′ ed NO. Supponendo ora che il diametro non sia parallelo all'asse ottico del cannocchiale e che faccia l'angolo oCO$=x$ col diametro parallelo, si avrebbe per misura dell'angolo α, osservando che l'errore di parallelismo è costante,

$$\mathrm{N}o'-\mathrm{N}o=\mathrm{NO}'-\mathrm{O}'o'-(\mathrm{NO}-\mathrm{O}o)=\mathrm{NO}'-\mathrm{NO}=\alpha,$$

cioè lo stesso risultato come se il diametro fosse parallelo al piano descritto dall'asse ottico del cannocchiale.

Si può anche verificare se l'asse ottico del cannocchiale descrive un piano parallelo al diametro 0° e 180° mediante una riga che verso i suoi estremi porti due punte poste in uno stesso piano col suo filo, e talmente costrutta che, tolto il vetro, si possa disporre sul circolo graduato orizzontalmente disposto in guisa da passare il suo filo per le divisioni 0° e 180°. Col cannocchiale si collima ad un oggetto molto lontano, ed osservasi se la visuale passante per le estremità delle due punte passa per lo stesso oggetto. In tal caso, avendosi che i due piani verticali molto vicini determinati dall'asse ottico del cannocchiale e dalle due punte vengono a passare per uno stesso oggetto assai lontano, si possono essi ritenere come paralleli, e, siccome il piano verticale passante per le due punte passa pure pel diametro 0° e 180°, si può conchiudere che trovasi verificata la terza condizione.

102. **Limiti delle distanze a cui si può collimare colla bussola.** — È importante di conoscere come, a motivo dell'eccentricità del cannocchiale, per cui non risulta il suo asse ottico nella direzione di un diametro, l'angolo dato dallo strumento è sempre erroneo e come quest'errore diminuisce col crescere della distanza per modo da riescire affatto trascurabile. Supponiamo che debbasi trovare l'angolo dell'allineamento CA (*fig.* 158) col meridiano magnetico; che la circonferenza di raggio $\overline{Co}$ rappresenti la periferia graduata della bussola, disposta orizzontalmente nel punto C; che BA sia la direzione della visuale diretta col connocchiale al punto A; che la circonferenza di raggio $\overline{CB}$ sia quella del circolo di gola corrispondente all'asse ottico rotante intorno all'asse verticale della bussola; che CN sia la direzione che prende l'ago calamitato, essendo N la punta azzurra. Se il diametro 0° e 180° è parallelo al piano che descrive l'asse ottico del cannocchiale nella sua rotazione, si leggerà l'arco No mentre il vero arco che misura l'angolo di CA col meridiano magnetico è $No' = No + oo'$; cioè maggiore dell'angolo, che realmenle si ottiene, della quantità $oo' = \varepsilon$. Per apprezzare l'accennato errore ε basta osservare che i due angoli oCo' e CAB sono eguali perchè alterni interni, e che quindi dal triangolo rettangolo CAB si può avere

$$\operatorname{sen} \varepsilon = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}},$$

dalla qual formola si deduce che l'angolo ε risulta generalmente piccolissimo, imperocchè il suo seno è espresso da una frazione, il cui numeratore è il raggio del già indicato circolo di gola, ed il denominatore la distanza dello strumento dall'oggetto mirato. Supponendo che la distanza $\overline{CB}$ dell'asse ottico del cannocchiale al centro dello strumento sia di $0^m,05$ e che la distanza $\overline{CA}$ sia di 25^m, si trova $\varepsilon = 0° \, 7'$ circa: d'onde consegue non essere conveniente nell'operare colla bussola, di osservare oggetti a distanza minore di 20 o 25 metri dallo strumento.

Cade in acconcio di osservare come la lunghezza dell'ago calamitato, a cui deve essere eguale il diametro del circolo graduato, non vuol essere tanto piccola, e come non si tollera minore di $0^m,1$, acciocchè il cerchio si possa almeno dividere in gradi e mezzi gradi e stimare a vista i quarti di grado, ossia i $15'$. Segue da ciò che, misurando un angolo ACB (*fig.* 159), si può commettere un errore BCB′ di $15'$, e se al lato $\overline{CB}$ fa seguito un altro lato $\overline{BD}$ che ad esso va collegato, l'errore angolare anzidetto produrrà un errore $\overline{BB'}$ su $\overline{BD}$, che si potrà trascurare quando, portando in iscala la figura, si riduca ad una lunghezza inapprezzabile. Osservando ora che un arco bb' dell'ampiezza di $15'$ e di raggio $\overline{cb} = 0^m,05$ ha approssimativamente la lunghezza di $0^m,0002$, assolutamente trascurabile, siccome quella che non si può valutare nè a vista nè cogli ordinarii strumenti da disegno, ed osservando che l'errore $\overline{BB'}$ si riduce sensibilmente a detto arco quando il lato $\overline{CB}$ ridotto in iscala diventi lungo come $\overline{cb}$, si deduce che gli angoli misurati colla bussola non influiscono sull'esattezza del lavoro, quando i lati ridotti in iscala non riescono considerevolmente più lunghi di $0^m,05$, ossia più della metà dell'ago calamitato. Così, volendosi eseguire un rilevamento con una bussola avente l'ago di $0^m,1$, e volendosi costrurre il piano alla scala dell'$\frac{1}{5000}$, la distanza limite a cui convien collimare sarà $0^m,05 \times 5000 = 250^m$, e l'errore che si commette sarà $0^m,0002 \times 5000 = 1^m$. Similmente si trova che la distanza limite per un rilevamento da disegnarsi alla scala dell'$\frac{1}{20000}$ è 1000^m e che nell'esattezza dei lati si può solo rispondere dei 4 metri.

Osservazione. Conoscendosi l'errore angolare in cui si può incorrere nella misura di un angolo con un goniometro, si può, tenendo un ragionamento in tutto analogo a quello qui esposto parlando della bussola topografica, stabilire la distanza massima a cui convien collimare dipendentemente dalla scala in cui vuol essere eseguito il piano.

Operazioni planimetriche eseguite colla bussola topografica.

105. Problemi risoluti colla bussola topografica. — I. *Per un punto dato* A (*fig.* 160) *condurre un allineamento che faccia col meridiano magnetico un angolo dato* α.

Si risolve questo problema collocando la bussola sul punto A, orizzontandola e girandola, finchè la punta azzurra dell'ago segni l'angolo dato α: tutte le paline collocate nella direzione A B secondo cui guarda il cannocchiale si troveranno evidentemente nell'allineamento richiesto.

Talvolta si vuole che l'angolo a costruirsi debba rimanere a diritta, ossia all'est della parte di direzione meridiana magnetica, che partendo dal punto di stazione si dirige al nord; allora, invece di fare in modo che la punta azzurra segni l'angolo α, convien fargli indicare l'angolo $360^\circ - \alpha$, e tutte le paline collocate nella direzione AB′, secondo cui guarda il cannocchiale, determineranno il richiesto allineamento.

II. *Per un punto dato del terreno guidare la direzione del meridiano terrestre.*

La risoluzione di questo problema, che si riduce immediatamente a quella del quesito qui sopra esposto, esige la conoscenza della declinazione dell'ago. Perciò, supposto il diametro 0° e 180° parallelo al piano descritto dall'asse ottico del cannocchiale, ed occidentale la declinazione, si farà in modo che la punta azzurra segni 360° meno la declinazione: tutti i segnali collocati nella direzione, secondo cui è rivolto il cannocchiale, si troveranno nella direzione meridiana terrestre passante pel punto nel quale venne collocata la bussola.

Osservazione. Vi sono delle bussole le quali si prestano anche a leggere gli angoli delle visuali col meridiano terrestre. Per tal fine è necessario poter imprimere, intorno al centro, un determinato moto rotatorio al circolo graduato per mezzo di un congegno a tal uopo applicato alla bussola e di un indice che sta fisso nella direzione del diametro parallelo al piano descritto dall'asse ottico del cannocchiale, con cui si deve far coincidere quell'incisione del circolo graduato che indica la declinazione. Quando una bussola è così disposta *dicesi declinata*, e può allora servire a tracciare direttamente sul terreno una linea meridiana che sarà l'allineamento determinato dall'asse ottico del cannocchiale quando l'ago segna 0°.

III. *Per un punto dato* A (*fig.* 161) *di un allineamento* AB *condurre un secondo allineamento che faccia col primo un angolo dato* α.

La risoluzione generale dell'enunciato problema, con una bussola modellata come si indicò al numero 99, esige che l'angolo dell'allineamento a tracciarsi coll'allineamento dato venga valutato da destra a sinistra per un osservatore collocato in A e volto verso il punto B. Essendo appunto α un tal angolo, si dispone la bussola per operare nel punto A, ed osservato il punto B, si prende nota dell'angolo β che l'allineamento BA fa col meridiano magnetico; mediante la rotazione dello strumento si fa in modo che la punta azzurra dell'ago segni l'angolo $\alpha+\beta$, e si traccia l'allineamento AC determinato dalla direzione secondo cui guarda l'asse ottico del cannocchiale.

Quando la somma $\alpha+\beta$ è maggiore di 360°, l'angolo a costruirsi è quello di cui questa somma supera 360°.

IV. *Dividere per metà l'angolo di due allineamenti.*

1° Quando il vertice C dell'angolo ACB a dividersi (*fig.* 162) è accessibile, si fa stazione in esso colla bussola, si misurano gli angoli α e β dei due allineamenti CA e CB col meridiano magnetico. L'angolo C è evidentemnte eguale a $\beta-\alpha$, e la sua metà è $\frac{\beta-\alpha}{2}$: cosicchè l'allineamento CD che divide per metà il dato angolo deve fare col meridiano magnetico l'angolo x espresso da

$$x=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2},$$

che si costruirà colla bussola, come si insegnò nel problema 1° del presente numero.

2° Se il vertice C dell'angolo a dividersi è inaccessibile, si stabiliscono sul prolungamento dei lati AC e BC i due punti E ed F (*fig.* 163). Disposta la bussola sul punto E per operare, si tien conto dell'angolo α che la EC fa col meridiano magnetico; similmente, al punto F si tien conto dell'angolo β. L'angolo C, dietro quanto si osservò nel numero 100, vale $\beta-\alpha$, e quello formato dalla bissettrice con ciascuna delle facce sarà $\frac{\beta-\alpha}{2}$, quantità che, aggiunta ad α, dà, per inclinazione dell'accennata bissettrice col meridiano magnetico, l'angolo x espresso da

$$x = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Si cercherà adunque a tentone un punto D in cui l'ago segni quest'angolo x quando il cannocchiale collima al punto C, ed un tal punto si troverà nel prolungamento CD della retta che divide per metà l'angolo ACB.

V. *Per un punto* C *preso fuori di un allineamento* AB (*fig.* 164) *condurne un secondo che faccia con questo un dato angolo* β.

L'operatore si porterà colla bussola in un punto qualunque D dell'allineamento AB, e dispostosi in modo che il punto C resti alla sua dritta, collimerà colla bussola messa in istato d'azione nella direzione DA per avere l'angolo $ADM = \alpha$. Dopo di ciò si farà stazione in C, all'angolo α si aggiungerà l'altro β che l'allineamento a tracciarsi deve fare con quella parte EB dell'allineamento dato, che trovasi opposta alla direzione DA, secondo cui si è primitivamente collimato col cannocchiale; si girerà orizzontalmente lo strumento finchè l'ago indichi l'accennata somma $\beta + \alpha$, e l'allineamento CE così determinato sarà il richiesto. — Infatti, immaginando per C l'allineameoto CF parallelo ad AB, gli angoli MDA ed M'CF, aventi i lati rispettivamente paralleli e l'apertura rivolta per lo stesso verso, saranno eguali, ed i due FCE e CEB saranno pure eguali come alterni interni; cosicchè l'angolo $M'CE = x$ dell'allineamento CE col meridiano magnetico sarà espresso da

$$x = M'CF + FCE = \alpha + \beta.$$

Se l'angolo $\alpha + \beta$ supera 360°, l'angolo che deve segnar l'ago in C è quello di cui questa somma supera 360°.

1ª *Osservazione.* Facendo in modo che l'ago calamitato segni nel punto C l'angolo α, si trova l'allineamento CF parallelo ad AB.

2ª *Osservazione.* Costruendo in C l'angolo M'CG di $90° + \alpha$ si ha l'allineamento CG abbassato da C perpendicolarmente ad AB.

VI. *Essendo dati due punti* A *e* B (*fig.* 165), *prolungare speditamente l'allineamento da essi determinato su un terreno coperto di ostacoli che non permettono di dirigere le visuali in lontananza.*

Collocata la bussola in B, si trovi innanzi tutto l'angolo ABM' $= \alpha$ di AB col meridiano magnetico; rivolgendo dopo il cannocchiale di mezzo giro intorno al suo asse di rotazione, si faccia porre un segnale al principio del terreno ingombro d'ostacoli, per esempio, in C. Addentrandosi in questo terreno, ma solo di tanto da poter scoprire il punto C, per tentativi si trasporti la bussola finchè, segnando la punta azzurra l'angolo α, si veda il punto C; il punto D, in cui trovasi lo strumento sarà un punto dell'allineamento domandato; rivolgendo dopo il cannocchiale di mezzo giro intorno al proprio asse, si potrà far collocare un altro segnale in E. Operando collo stesso procedimento, si potrà trovare un altro punto F, da cui risulti visibile pel cannocchiale il punto E quando l'ago segna l'angolo α, e così continuando si potrà, colla massima celerità, prolungare l'allineamento proposto di quanto lo esige il bisogno, atterrando solo quei pochi impedimenti che, trovandosi direttamente nell'allineamento, impediscono affatto la visuale anche da un luogo vicinissimo all'ultimo punto determinato.

Se nell'allineamento che si percorre incontrasi un grande ostacolo, come un muro, un caseggiato, un grosso albero e simili, convien condurre un primo allineamento FM, poi un secondo MN parallelo ad AF, un terzo NX parallelo ad FM e portare su esso $\overline{NG} = \overline{MF}$: il punto G sarà un punto del prolungamento di AB, e con esso si potrà continuare l'allineamento al di là dell'ostacolo in H, I, ecc.

Tutti i quesiti che furono risoluti coi goniometri si possono facilmente risolvere coll'uso della bussola topografica. I metodi esposti per prolungare allineamenti al di là di ostacoli, per misurare distanze accessibili in due o in uno o in nessun punto della loro direzione, facilmente si rendono adatti all'uso dell'accennato strumento. Gli angoli che gli allineamenti d'operazione fanno fra di loro si deducono dagli angoli che gli stessi allineamenti fanno col meridiano magnetico (num. 100); il tracciamento di allineamenti d'operazione, che facciano fra di loro angoli dati, facilmente si effettua deducendo prima con semplici addizioni e sottrazioni, e costruendo in seguito gli angoli che questi devono fare colla direzione dell'ago calamitato. Giova però rammentare che i risultati ottenuti colla bussola sono sempre meno esatti di quelli che si possono conseguire coll'uso di un buon goniometro.

104. **Rilevamento colla bussola topografica.** — I rilevamenti colla bussola topografica si fanno coi metodi stessi che si sono esposti parlando dei goniometri, ad eccezione che con questi si trovano gli angoli che dati allineamenti fanno fra loro o con un sol allineamento d'origine, mentre con quella si ottengono gli angoli che dati allineamenti fanno col meridiano magnetico.

Metodo d'irradiamento. La figura 166 rappresenta una porzione di terreno la cui poligonazione venne rilevata per irradiamento ed i cui dettagli vennero fissati col metodo degli allineamenti.

Quanto già si disse, parlando dei goniometri, sul modo di costrurre il piano, è anche applicabile in questo caso, osservando soltanto che l'allineamento d'origine è il meridiano magnetico. Così, s'incomincierà dal fissarsi in sito conveniente del foglio il punto o qual rappresentativo del punto centrale O, e si condurrà per esso, in conveniente direzione, la retta om qual rappresentante la direzione dell'ago calamitato: costruendo su essa e nel modo indicato al numero 100 l'angolo $mox = \mathrm{MOA}$, e portando su ox la lunghezza $\overline{oa} = \frac{1}{n}\overline{\mathrm{OA}}$, si determina il vertice a. Similmente, passando alla costruzione dell'angolo $moy = \mathrm{MOB}$, e portando su oy la lunghezza $\overline{ob} = \frac{1}{n}\overline{\mathrm{OB}}$, si fissa il punto b; e continuando collo stesso procedimento, si perviene in modo facile e spedito alla costruzione dell'intera poligonazione.

In tutti quei lati della poligonazione che vennero direttamente misurati per il collegamento dei dettagli si hanno altrettanti mezzi di verificazione, il che ha luogo nel citato esempio per rapporto al lato $\overline{\mathrm{DE}}$.

Il metodo d'irradiamento ben difficilmente si usa da solo nelle operazioni fatte colla bussola.

Metodo di camminamento. Il metodo di camminamento, che consiste nel misurare le lunghezze di tutti i lati della poligonazione non che gli angoli che tutti questi fanno col meridiano magnetico, è quello generalmente adottato; e siccome nei limiti di una levata topografica si possono considerare i meridiani magnetici sempre paralleli fra di loro, ne consegue il notevole vantaggio di poter far stazione soltanto ogni due vertici. La fig. 167 rappresenta un terreno rilevato coll'accennato metodo, e si scorge come le stazioni di bussola siansi fatte nei punti del terreno rappresentati in A, C, E, e come siansi rilevati i dettagli con sole perpendicolari. — Un registro, come quello che immediatamente segue e su cui si indicano i punti di stazione, i punti di mira, le lunghezze di tutti i lati della poligonazione, non che le ampiezze degli angoli misurati, suolsi ben di frequente aggiungere all'abbozzo, nel quale si segnano soltanto i numeri necessarii a fissare i minuti particolari.

STAZIONI	PUNTI OSSERVATI	ANGOLI COL MERIDIANO MAGNETICO	LUNGHEZZE DEI LATI	OSSERVAZIONI

La costruzione del piano si può ottenere in un modo chiaro e spedito come segue. Si prenda sulla carta il punto a rappresentativo di A; per esso si guidi una retta am che deve rappresentare la direzione del meridiano magnetico; colla am, e da destra a sinistra, si facciano gli angoli max ed may rispettivamente eguali agli angoli di AF e di AB col meridiano magnetico, ed alla scala stabilita prendansi $\overline{af}$ ed $\overline{ab}$ eguali alle lunghezze grafiche di $\overline{AF}$ ed $\overline{AB}$. Determinato così il punto b rappresentativo di B, si conduca per esso la bm_1 parallela ad am, e con questa si faccia l'angolo m_1bz eguale all'angolo M′CB che il lato BC fa col meridiano magnetico; si prolunghi il lato bz di quest'angolo e su questo prolungamento deve trovarsi il punto c rappresentativo di C, che si fissa prendendo $\overline{bc} = \frac{1}{n}\overline{BC}$. In c conducasi ancora la cm' parallela ad am, si costruisca l'angolo $m'cv = M'CD$, e si continui così finchè siansi portati a posto tutti i dati presi sul terreno (rammentando, nel costrurre col semicircolo da tavolino gli angoli maggiori di 180°, di fare la sottrazione da 360° e di costrurne la differenza da sinistra a dritta). Se il poligono chiuderà esattamente, il lavoro sarà stato ben eseguito, altrimenti sarà occorso un errore, da trascurarsi se è nei limiti delle tolleranze, e da rettificarsi in caso contrario col provare a costrurre di nuovo il piano, e ripetendo l'intera operazione se si trova ancora.

All'accennato procedimento per la costruzione del piano è forse preferibile quello di fissare innanzi tutto il punto a rappresentativo di A e di condurre per esso la am rappresentante in direzione il meridiano magnetico; di costrurre ordinatamente col vertice in a e colla am (tenendo la norma data al numero 100) gli angoli letti sul terreno per avere le rette *at*, *au*, *av*, *ax*, *ay*, *az*; di prendere rispettivamente su *at* ed *au* $\overline{af}=\frac{1}{n}\overline{AF}$ e $\overline{ab}=\frac{1}{n}\overline{AB}$; di condurre per *b* la *bv'* parallela ad *av* e di portare su essa $\overline{bc}=\frac{1}{n}\overline{BC}$, e di continuare così a guidare delle parallele alle *ax*, *ay*, *az*, fissando su esse i punti *d*, *e*, *f*, il qual ultimo deve confondersi con quello primitivamente segnato, oppure scostarsi sì poco, che l'errore non ecceda la tolleranza ammissibile in tale operazione.

Dagli angoli letti sul terreno, facendo stazione nei vertici A, C ed E, facilmente si possono dedurre quelli che si leggerebbero stazionando nei vertici B, D ed F; perciò basta osservare come l'angolo col meridiano magnetico, che si misurerebbe ad un estremo di un allineamento, dev'essere eguale a quello misurato all'altro estremo aumentato o diminuito di 180°, secondo che l'angolo misurato è $\lessgtr$ di 180°. — Fatto questo primo calcolo, sarà bene farne un secondo onde dedurre tutti gli angoli interni del poligono con semplici differenze, e verificare se la loro somma è eguale a tante volte 180° quanti sono i lati del poligono meno 360°. Se si trova una differenza piccola in più o in meno, si ripartirà egualmente negli angoli. Quando si abbiano gli angoli interni della poligonazione, si può anche costrurre il piano colle norme indicate parlando dei goniometri.

Metodo d'intersezione. Se il terreno è tutto o per la massima parte inaccessibile, è utile il metodo d'intersezione (*fig.* 168); gli angoli da misurarsi sono quelli che le visuali dirette ai diversi vertici da rilevarsi fanno col meridiano magnetico non che quelli che si leggono collimando da un estremo della base all'altro estremo e la cui differenza, per l'esattezza dell'operazione, deve fare 180°.

La costruzione del piano non può presentare difficoltà alcuna quando s'incominci dal costrurre la base $\overline{pq}$, mediante il suo angolo col meridiano magnetico e la sua lunghezza, non che le due direzioni meridiane *pm* e *qm'* passanti per i suoi estremi, imperocchè per fissare, ad esempio, il punto *c* rappresentativo di C, basta costrurre col vertice in *p* l'angolo di PC col meridiano magnetico ed in *q* l'angolo di QC pure col meridiano magnetico: l'intersezione delle due rette *px* e *qy* così ottenute dà il punto voluto.

Osservazione. Allorquando nel rilevare per camminamento s'incontra un ostacolo che non permette di misurare il lato della linea poligonale che lo attraversa, il che si vede aver luogo nella figura 169 per rapporto al lato $\overline{DE}$, si determina la posizione del punto E per *intersezione inversa;* cioè in D si misurano gli angoli di DC e di DE col meridiano magnetico, e poscia, facendo stazione in E, si trova l'angolo della visuale diretta al punto già determinato C pure col meridiano magnetico.

105. **Conclusione sull'uso della bussola**. — Nel rilevare colla bussola topografica si possono benissimo impiegare accumulatamente i metodi d'irradiamento, di camminamento e d'intersezione, seguendo le norme esposte nel numero 98. Giova però rammentare che, molte essendo le cause di perturbazione che possono influire sul costante parallelismo dell'ago calamitato (fra le quali la prossimità di materie ferruginose), sono anche molte le cause d'errore, per cui converrà soltanto far uso della bussola in quelle operazioni nelle quali non si richiede una grande precisione, e dove riescirebbe incomodo l'uso di altro strumento. — Il fatto, per cui nell'operare colla bussola non è necessario scoprire i segnali se non l'uno dopo l'altro, rende prezioso questo strumento nelle operazioni su luoghi coperti, nel determinare per successive stazioni e per intersezioni il corso di un fiume, d'un torrente, d'un ruscello, d'una strada tortuosa od imboschita, d'un sotterraneo, nel tracciare sul terreno l'eguale e similmente posto andamento di un cammino coperto per l'apertura dei pozzi di ventilazione, ed in tutte quelle località di orizzonte assai ristretto.

Nella costruzione di una grande poligonazione rilevata colla bussola usasi con buon successo la carta quadrettata, e si perviene così ad eliminare in gran parte quegli errori di graficismo originati dall'operazione di condurre delle parallele fra loro assai discoste. A comprendere il processo di tale operazione suppongasi che MNOP sia il quadro (*fig.* 170) su cui vuolsi eseguire il piano di un rilevamento colla bussola, per esempio di quello rappresentato nella figura 169, e che il quadro, mediante rette parallele ai lati, siasi di già scomposto in tanti rettangoli eguali coi lati di circa un decimetro o mezzo decimetro. Ritenendo le direzioni parallele ai lati MP ed NO, siccome direzioni del meridiano magnetico, s'incominci dal fissare, dove credesi conveniente, per esempio nell'intersezione di mp con qr, il punto b qual rappresentativo di B: facendo l'angolo pbv=MBA, e portando sul suo lato bv la lunghezza $\overline{ba}=\frac{1}{n}\overline{BA}$, si trova il punto a rappresentativo di A; costruendo poi l'angolo pbx=MBC e portando $\overline{bc}=\frac{1}{n}\overline{BC}$, si determina il punto c rappresentativo di C. Costruendo ora col vertice in c' e colla $c'p'$ l'angolo $p'c'y$=M'DC e conducendo per c la cy' parallela a $c'y$, si trova la direzione su cui esiste il punto d, che si determina prendendo $\overline{cd}=\frac{1}{n}\overline{CD}$. Facendo col vertice in d' e colla $d'p''$ gli angoli $p''d'z$=M'DE e $p''d'z'$=M''EC; conducendo da c una parallela a $d'z'$ e da d una parallela a $d'z$, si avrà per intersezione il punto e rappresentativo di E.

106. **Orientamento di un piano.** — Un piano dicesi orientato quando si trova in esso segnata la direzione del meridiano vero. Questa direzione colla massima facilità si può segnare su un piano rilevato colla bussola topografica, ed essa si ha in una retta inclinata al meridiano magnetico di un angolo eguale alla declinazione. Se vuolsi costrurre un piano in guisa che i due lati di destra e di sinistra sieno nella direzione nord-sud, s'incomincia l'operazione in modo che il meridiano magnetico faccia cogli accennati lati del quadro un angolo eguale alla declinazione.

Se la bussola è declinata (num. 103), tutti gli angoli restano direttamente valutati col meridiano vero, e nella costruzione del piano basta disporre la direzione meridiana parallelamente agli stessi lati della squadratura del foglio.

I declinatori magnetici, che trovansi ben di spesso negli squadri graduati, nei grafometri, nei circoli, avendo sempre il loro diametro 0° e 180° parallelo al cannocchiale o al traguardo di mira, servono come la bussola a trovare l'angolo di un allineamento col meridiano magnetico. Se nell'eseguire una levata con questi strumenti si trova un tal angolo per un allineamento d'operazione, colla conoscenza della declinazione del luogo, sarà agevole di trovare l'angolo che quell'allineamento fa col meridiano vero, e di segnare quindi quest'ultimo.

ARTICOLO VIII.

Della tavoletta pretoriana.

107. **Descrizione della tavoletta pretoriana** — Una tavola rettangolare ben piana per potervi distendere un foglio di carta, portata da un trepiede sul quale può disporsi orizzontale e muo-

versi orizzontalmente in qualunque senso, costituisce la *tavoletta pretoriana* (da Pretorio di Norimberga che ne fu l'inventore). Tra tutti i moderni meccanismi il più semplice è quello in cui le tre gambe g', g'' e g''' (*fig.* 171) del trepiede sono unite ad un pezzo t attraversato da tre viti v', v'' e v''', collocate nei tre vertici di un triangolo equilatero, dette perciò *viti del triangolo*, ed inservienti a disporre orizzontale la tavola da disegno o *specchio* S, il quale ne sente l'azione, siccome facente sistema mediante incastro con una *piattaforma* P, che appoggia sulle teste delle accennate viti. Una vite A, che chiamasi *vite d'arresto*, serve a lasciar libero od a fermare a piacimento il moto di rotazione dello specchio intorno ad un asse verticale, che in grande si imprime colla mano ed in piccolo colla *vite di richiamo r*. Oltre questo movimento, un altro di *translazione* se ne può ottenere, slacciando la vite q e facendo scorrere lo specchio sulla parte rettangolare a della piattaforma.

Parlando del modo di mettere in stazione la tavoletta, si farà sentire la necessità di poter muovere lo specchio in tre maniere distinte, cioè intorno ad un asse verticale e secondo due direzioni perpendicolari l'una all'altra, senza alterare la sua orizzontalità. Degli accennati movimenti due soltanto ne ha lo strumento già descritto; il terzo si cercò mediante un nuovo telarino unito alla parte rettangolare della piattaforma. Tale aggiunta però, introducendo una soverchia mobilità nello strumento, è piuttosto dannosa, e preferibile sembra il sistema di tavoletta in cui la parte rettangolare della piattaforma è surrogata da una seconda parte circolare, di diametro maggiore di quella che direttamente appoggia sulle tre viti del triangolo, ed in cui sono imperniate tre braccia eguali B, B' e B'', di ottone (*fig.* 172), rettilinee oppure foggiate ad arco di circolo ed aventi ciascuna nel suo mezzo una fessura o *guida*. Collocando lo specchio sulle accennate braccia, e facendo in guisa che tre punte, attraversando le guide, penetrino in parte nella grossezza dello specchio, oltre il moto proveniente dalla rotazione delle braccia intorno ai loro perni, può concepire l'altro originato dallo scorrimento delle punte lungo le guide, i quali movimenti producendosi in qualunque senso si spinga, indurrebbero a credere questo strumento portato alla perfezione, se pure anche qui il difetto della troppa mobilità non lasciasse ancora molto a desiderare. Le tre punte, di cui sopra si è fatto parola, hanno le loro estremità lavorate a vite e servono a fissare lo specchio sulle braccia e ad impedire lo scorrimento nelle guide. Il moto di rotazione attorno al perno centrale si ottiene anche in questa come nelle altre tavoletle, nè presenta variazione alcuna la parte del suo trepiede sottostante alla piattaforma.

Per operare colla tavoletta, oltre le paline, i picchetti, le canne o la catena o la stadia se vuolsi operare speditamente, è necessario avere a sua disposizione un livello a bolla d'aria, una diottra, un piombino, un declinatore magnetico, una scatola di compassi, una scala ticonica, una matita, alcune squadrette, un pezzo di gomma elastica, degli aghi finissimi.

108. **Metodi per tenere la carta distesa sulla tavoletta.** — Il risultato di operazioni eseguite colla tavoletta si ottiene sempre su un foglio di carta da disegno, disteso sullo specchio ed incollato ai margini di quest'ultimo in modo da rimanere senza pieghe. In correlazione alla natura del lavoro a farsi, questo foglio va preparato con metodi più o meno semplici. Quando vuolsi rilevare una piccola porzione di terreno per qualche fine speciale, è sufficiente la carta semplice da disegno, attaccata agli orli dello specchio, umettando da prima interamente ed uniformemente la superficie del foglio con una spugna imbevuta d'acqua limpidissima, rivolgendo dopo il medesimo foglio sulla tavoletta, applicando della colla a bocca riscaldata agli orli della carta e piegandoli per farli attaccare. Bisogna avere l'avvertenza di mettere asciugare all'ombra un foglio così preparato.

Per le levate di notevoli estensioni è utile d'incollare la carta su tela; con ciò il foglio si conserva lungamente, e le variazioni che esso soffre, dipendentemente dalle variazioni atmosferiche, sono insensibili. A meglio impedirne il restrigimento e le grinze o pieghe cui vanno soggette, per cagione dell'umidità, la tela e la carta stessa dopo che si è staccata dallo specchio, si applica una mano di bianco d'uovo sopra quest'ultimo prima di attaccarvi gli orli della tela.

Un altro metodo per tenere distesa la carta sullo specchio, utile principalmente nelle lunghe strisce di terreno con poca larghezza, consiste nell'attaccare, per i suoi due capi, una lunga lista di carta senza fine a due cilindri lunghi quanto due lati opposti dello specchio, e girevoli ciascuno parallelamente a questi istessi lati. L'uno dei cilindri serve a mantenere la carta bene avviluppata, mentre l'altro ne ravvolge quella parte su cui si è già lavorato.

109. **Uso del livello a bolla d'aria.** — S'impiega il livello a bolla d'aria per disporre orizzontale la superficie superiore dello specchio, e per ottenere lo scopo è necessario procedere innanzi tutto alla rettificazione del medesimo. La faccia superiore dello spec-

chio essendo un piano che si può innalzare ed abbassare mediante le tre viti del triangolo, si fa l'accennata rettificazione disponendo il livello nella direzione di due viti e muovendo queste fino a centrare la bolla. Ciò fatto, si capovolge il livello mettendo i due estremi di uno spigolo di maggior lunghezza della riga l'uno al posto dell'altro. Se in questa nuova posizione la bolla appare centrata, si conchiude che il livello può servire ad orizzontare lo specchio; d'altronde conviene far la correzione metà colla vite annessa al livello e metà colle viti del triangolo. — Anche il metodo delle linee di egual pendìo, applicato come si disse al numero 55, può essere vantaggioso in tale operazione.

Per orizzontare lo specchio mediante un livello rettificato, si dispone questo su quello nel senso di due viti del triangolo, e si producono colle medesime i movimenti necessarii a centrare la bolla; si colloca nuovamente il livello sullo specchio in direzione perpendicolare alla prima, e per la seconda volta si centra la bolla, muovendo solo la vite del triangolo non ancora mossa. Lo specchio sarà così orizzontale, perchè la sua superficie superiore passa per due rette orizzontali ottenute con due successive operazioni e senza distruggere, colla ricerca della seconda retta, l'orizzontalità della prima.

110. Uso del piombino, dei picchetti e degli spilli. — Due punti, uno sullo specchio orizzontato e l'altro sul terreno, esistenti nella medesima verticale, si chiamano punti *corrispondenti*. La considerazione di siffatti punti continuamente occorre nelle pratiche operazioni eseguite colla tavoletta; e l'uso del piombino, degli spilli e dei picchetti si apprenderà dalla risoluzione di alcune quistioni, dove si converrà di denominare colle lettere maiuscole i punti del terreno e colle minuscole i loro corrispondenti dello specchio.

I. *Dato mediante un picchetto un punto* A *del terreno* (*fig.* 173), *determinare il corrispondente punto* a.

Orizzontato lo specchio, venga l'operatore a quattro o cinque passi di distanza dallo strumento, procurando di portarsi nel piano verticale passante per A e parallelo allo spigolo *mn* dello specchio; lungo un filo a piombo BC, che tien pendente fra le mani, diriga la visuale al punto A, e nel piano verticale di questa faccia piantare sullo specchio in *a'* uno di quegli spilli finissimi, colla testa di cera lacca, che soglionsi impiegare in tali operazioni. Ciò fatto, l'operatore si porti in altro sito presso a poco alla medesima distanza dallo strumento, e, traguardando pel piombino al punto A, faccia trasportare lo spillo nel piano verticale *a'*BCA, finchè esso appaia nel piano verticale determinato dal punto A e dalla direzione DE del piombino. In questa posizione, essendo lo spillo all'intersezione di due piani verticali passanti per A, sarà evidentemente sulla verticale di quest'ultimo, e quindi a sarà il punto corrispondente di A.

II. *Dato mediante uno spillo un punto* a *dello specchio, determinare il corrispondente* A *sul terreno* (*fig.* 173).

La soluzione di questo quesito è analoga a quella del precedente. S'incomincierà con una prima operazione a far porre un picchetto in A′, in un piano verticale passante per a; ed in una seconda operazione si trasporterà questo picchetto in A nel piano verticale aDEA, senza però farlo sortire dal piano aBCA′ in cui venne collocato la prima volta.

III. *Dato sullo specchio un punto* a *ed un punto* A *sul terreno, fare in guisa che essi diventino l'uno corrispondente dell'altro* (*fig.* 178).

Se la tavoletta ha un solo movimento di translazione, si procuri un orizzontamento approssimato della medesima; si venga con un piombino a quattro o cinque passi di distanza nel piano verticale passante per A e diretto nel senso secondo cui può aver luogo il movimento di translazione; con un trasporto generale dello strumento si faccia venire a in a' nel piano verticale determinato da A e dal piombino BC. Questo ottenuto, si orizzonti lo specchio e col piombino si verifichi se il punto a' si trova ancora nell'anzidetto piano verticale. Tuttora che ciò avvenga, s'imprima allo specchio il movimento di translazione, finchè a' sia venuto in a_1 nel piano verticale determinato da A e dal filo a piombo DE, che tien pendente dalla mano l'operatore portatosi in un piano verticale perpendicolare alla direzione del movimento di translazione.

Se la tavoletta permette due movimenti di translazione uno in senso perpendicolare all'altro, o se è foggiata come quella di recente invenzione, in cui lo specchio si può muovere in ogni senso, il problema si risolve con minor difficoltà, orizzontando prima lo specchio e facendo venire, senza nessun trasporto del trepiede, ma solo con due movimenti di translazione guidati dall'uso di un piombino, a in a' e a' in a_1.

Nella soluzione degli accennati problemi suolsi anche impiegare uno strumento detto *triangolo*, che consiste in due regoli PQ e QR (*fig.* 174) uniti ad angolo acuto fra di loro, muniti, il più breve di una punta P, ed il più lungo di un piombino il cui filo avvolto ad un uncino può scorrere entro un foro R e subire quella lunghezza $\overline{RV}$ che più aggrada. La costruzione di questo strumento deve essere tale che i punti P ed R si trovino nella stessa verticale del filo a piombo, allorchè si collochi il regolo PQ su un piano orizzontale, o, in altre parole, $\overline{QR}$ e $\overline{QP}$ devono essere l'ipotenusa ed un cateto di un triangolo rettangolo di cui venne levato il cateto $\overline{PR}$.

Ad apprendere l'uso di questo strumento, basta osservare come, collocandolo col lato PQ aderente alla superficie dello specchio orizzontato, l'estremo P ed il punto ove la punta del piombino sta per toccare il terreno sono due punti corrispondenti.

111. **Descrizione della diottra.** — La diottra consiste in un cannocchiale *ab* (*fig.* 179) girevole attorno ad un asse orizzontale, quando il sostegno *c* che lo porta è verticale. Annessa al sostegno trovasi una riga di ottone o di acciaio lunga da sei a otto decimetri, detta *alidada*, il cui filo *de*, chiamato *linea fiduciale*, deve trovarsi nel piano verticale passante per l'asse ottico del cannocchiale, quando si collochi la diottra sullo specchio orizzontato. Nel cannocchiale della diottra si trovano quasi sempre i due fili che servono a valutare le distanze colla stadia, e annesso al sostegno trovasi generalmente un arco graduato o eclimetro, destinato ad indicare l'angolo di elevazione o di depressione dell'asse ottico.

Invece delle diottre si usavano anche delle alidade a traguardi, costrutte come l'alidada mobile del grafometro, e mi dispenso dal parlarne, essendo siffatte alidade totalmente in disuso.

112. **Problemi in cui si richiede l'uso della diottra.** — Il precipuo scopo della diottra è di segnare sullo specchio orizzontato, mediante una matita che si fa scorrere lungo la linea di fede, le tracce degli allineamenti del terreno ; e da alcune importanti questioni, che qui sotto esporrò, facilmente si apprenderà come, per operare colla tavoletta, siano anche necessarii i compassi, le scale e gli strumenti che servono a misurare distanze.

I. *Segnare sullo specchio la traccia di un allineamento* AB *del terreno, stazionando in un suo punto* C, *e fissare sullo specchio, oltre il suo corrispondente, anche il punto* d *rappresentativo di* D (*fig.* 175).

Scelto sul dato allineamento il punto C, e determinato il suo corrispondente *c* sullo specchio orizzontato, si pianti in quest'ultimo uno spillo, ed appoggiandovi la linea di fede si diriga una visuale al punto A; si segni sullo specchio la retta *ab* determinata dall'accennata linea di fede, e sarà questa la traccia voluta. Per trovare il punto rappresentativo di D, si misuri $\overline{CD}$ o colle canne o colla catena o colla stadia; prendasi questa lunghezza in quella scala che le circostanze persuaderanno conveniente, e si porti col compasso da c in d.

È sommamente importante di tracciare le linee per tutta la lunghezza della linea fiduciale, imperocchè queste linee dovendo poi servire per altre operazioni, non condurrebbero che ad una grossolana approssimazione qualora fossero assai brevi. Di più converrà avvertire di temperare la matita, non sotto forma conica, ma sibbene a guisa di lama di scarpello, perchè è solo in questo modo che si arriva a segnare la vera traccia cercata.

II. *Far cadere una linea retta* ab *segnata nello specchio in un allineamento* AB *palinato sul terreno, e determinare sullo specchio il punto* c *corrispondente del punto di stazione* C (*fig.* 180).

Portata la tavoletta nel punto C, di cui vuolsi il corrispondente, ed ottenuto un orizzontamento approssimato della medesima, si piantino ai due estremi della ab due spilli; traguardando per questi, s'imprima allo specchio il movimento di rotazione, finchè nella visuale si vedano alcune paline dell'allineamento AB; si orizzonti dopo lo specchio e, appoggiando il filo della riga ai già accennati spilli, guardisi se la croce dei due fili, che vi sono nel cannocchiale, colpisce alcune paline dell'allineamento AB; si determini sullo specchio il punto c corrispondente di C, ed il problema troverassi così compiutamente risoluto. Se il solo moto di rotazione fosse insufficiente per iscoprire all'incrocicchio dei fili più di una palina, converrebbe aiutarsi coi moti di translazione; e, se si avesse una sola palina in B a cui dirigere la visuale, si acquisterebbe la certezza del trovarsi la retta ab nell'allineamento AB, tuttora che cadesse in questa il punto c corrispondente di C.

III. *Far cadere una retta* ax *dello specchio in un allineamento* AX *del terreno e fare in modo che i due punti* A *ed* a *siano corrispondenti* (*fig.* 181).

S'incominci dal collocare la tavoletta in A, disponendola a vista con un orizzontamento approssimato, col punto a al disopra di A e colla retta ax nella direzione dell'allineamento AX, procurando questo col traguardare per due spilli collocati l'uno in a e l'altro in x: col piombino si verifichi in seguito se i due punti a ed A sono corrispondenti, e tali si rendano qualora nol siano, procurando di mantenere la ax nell'allineamento AX. In seguito si orizzonti lo specchio, e, appoggiata la linea di fede agli spilli, si imprima allo specchio quel poco di moto rotatorio e di translazione necessario per vedere le paline site nell'allineamento AX. Il problema è risoluto quando si trovi col piombino che i due punti a ed A sono corrispondenti, o che non si scostano molto; imperocchè, anche nel caso in cui le verticali dei due punti A ed *a* si scostino di qualche centimetro, convien operare ad una grande scala, acciocchè tali errori siano apprezzabili.

IV. *Costrurre sullo specchio della tavoletta l'angolo di due allineamenti* CA *e* CB (*fig.* 182).

Collocata la tavoletta nel vertice C e orizzontata, si trovi il punto *c* corrispondente di C; appoggiata la linea di fede allo spillo piantato in *c*, si diriga prima una visuale al punto A e poscia un'altra al punto B: tracciando, col far scorrere una matita lungo la linea di fede, le due rette *ca* e *cb*, si avrà in *acb* l'angolo voluto.

Osservazione. I risultati che si ottengono colla tavoletta pretoriana diversificano da quelli che si hanno cogli squadri graduati, coi grafometri, coi circoli, colla bussola topografica in ciò che quella dà sullo specchio e graficamente gli angoli degli allineamenti, e questi ne danno le loro ampiezze. La tavoletta, in quanto serve a descrivere graficamente gli angoli, appartiene ai *goniografi*.

115. Verificazioni e correzioni della diottra. — Allorchè collimando colla diottra in un sito qualunque di un segnale verticalmente disposto su un punto del terreno, si traccia sullo specchio orizzontato la retta data dalla linea di fede, è intenzione dell'operatore di avere in questa la traccia del piano verticale passante pel punto di stazione e per quello a cui si è collimato. Unico essendo il piano verticale passante per due punti, unica deve essere l'accennata traccia, qualunque sia l'inclinazione del cannocchiale nel puntare l'oggetto d'osservazione, ed a conseguire questo bisogna che nella diottra collocata sullo specchio orizzontato siano verificate le seguenti condizioni:

1° *L'asse ottico del cannocchiale deve essere perpendicolare al suo asse di rotazione;*

2° *Il piano descritto dall'asse ottico nella sua rotazione deve essere verticale;*

3° *La traccia dell'accennato piano verticale sullo specchio deve coincidere colla linea di fede, o almeno essere a questa parallela.*

1ª *Verificazione e relativa correzione.* Per verificare se la prima condizione è soddisfatta, si collochi la diottra sullo specchio orizzontato; col cannocchiale disposto orizzontalmente si miri un oggetto assai lontano; si fissi con due spilli la posizione della linea di fede, tracciando di più la retta da essa determinata; si volti la diottra in senso opposto, procurando sempre la coincidenza della linea fiduciale colla retta tracciata; e finalmente si faccia rotare il cannocchiale sul suo perno, per rivolgerlo di nuovo sull'oggetto osservato. Se questo sarà colpito dall'incrocicchio dei due fili del micrometro, l'asse ottico sarà perpendicolare all'asse di rotazione, e non lo sarà invece quando ciò non avvenga. Suppongasi infatti che, collimando ad un oggetto F (*fig.* 183), sia ED la proiezione dell'asse ottico del cannocchiale sullo specchio, CG quella dell'asse di rotazione obliqua ad ED, ed AB la linea fiduciale. Cangiando la posizione della diottra, facendola rotare di mezzo giro attorno la verticale dell'intersezione C dell'asse ottico con quello di rotazione, si porterà questo in CH sul prolungamento di CG; l'angolo DCG prenderà la posizione simmetrica LCH, l'asse ottico l'altra KL, ed invece dell'oggetto F se ne scoprirà un altro O.

Per rettificare lo strumento si osserva che la bissettrice dell'angolo DCL è perpendicolare a CH, e che quindi a tentone basta muovere le viti del cannocchiale che servono a spostare il micrometro, finchè l'intersezione dei fili venga a colpire un oggetto V collocato sull'accennata bissettrice. Se il punto V non si è ben scelto a vista d'occhio, bisogna di bel nuovo a tentone, con un secondo rivolgimento, correggere la rimanente differenza e continuare così finchè sia totalmente scomparsa.

Oltre questa correzione che si ottiene per tentativi, un'altra se ne può dare anche comoda in pratica. Dopo il rivolgimento, trovandosi l'asse ottico in KL, si pianti in C uno spillo, e mediante una rotazione della diottra intorno a questo, si miri l'oggetto F; e si segni la nuova posizione PQ della linea di fede, che farà, colla sua posizione primitiva AB, l'angolo ACP eguale, tanto all'angolo LCD, quanto all'altro HCR della nuova posizione CR dell'asse colla sua primitiva CH. Si divida per metà l'angolo ACP, e sia ST la bissettrice; contro questa si appoggi il filo della riga, ed allora l'asse ottico ed il perno prenderanno rispettivamente le posizioni CM e CU, bissettrici dei due angoli LCD e HCR. Si porti l'asse ottico, mediante lo spostamento laterale della croce del micrometro, sul punto F, ed esso avrà allora una direzione perpendicolare al suo asse di rotazione CU, perchè l'angolo UCD non è altro che l'angolo retto MCH diminuito di HCU, ma aumentato dal suo eguale MCD.

2° *Verificazione e relativa correzione.* Acquistata la certezza dell'essere l'asse ottico del cannocchiale perpendicolare al suo asse di rotazione, e quindi dell'essere un piano la superficie dal medesimo descritta, bisogna vedere se questo piano è verticale. Per ciò, si sospenda un lungo piombino e a qualche distanza si porti la tavoletta; si orizzonti lo specchio e vi si collochi sopra la diottra in guisa da poter vedere la sommità del piombino; si inclini in seguito il cannocchiale, tenendo sempre l'occhio all'oculare; e, se vedesi che l'intersezione dei fili micrometrici percorre l'accennato filo a piombo, si conchiuderà che il piano descritto dall'asse ottico del cannocchiale è verticale, siccome passante per la direzione del piombino. In mancanza di un piombino, si può collimare allo spigolo verticale di un muro.

Nel caso che il piano descritto dell'asse ottico non sia verticale, ne sarà causa la non orizzontalità dell'asse di rotazione, e una o due viti convenientemente disposte si muoveranno a tentone, finchè questo prenda una posizione tale, per cui l'incrocicchio dei fili del micrometro descriva una verticale.

La verità geometrica, che di due rette fra loro perpendicolari una è orizzontale quando è retto l'angolo delle loro proiezioni orizzontali, un altro modo ci somministra, facile ed elegante, per fare la seconda verifica e la corrispondente correzione. Orizzontata la tavoletta, si collochi su essa la diottra in guisa da vedere all'incrocicchio dei fili un oggetto F (*fig.* 184) elevato da 20° a 40° sull'orizzonte dello specchio, e si segni la proiezione AB della linea di fede. Essendo l'asse ottico proiettato in ED, e l'asse di rotazione in CG, col girare la diottra attorno ad uno spillo, collocato all'intersezione C del piano verticale passante per l'asse di rotazione colla linea di fede, finchè A sia venuto dalla parte di B e viceversa, la proiezione dell'asse di rotazione si porterà sul prolungamento di CG in CH, ed elevando nuovamente dello stesso angolo l'asse ottico per vedere l'oggetto già osservato, la sua proiezione dovrà prendere una posizione simmetrica rispetto ad HC. Ora, se dal cannocchiale si scopre il punto F, la proiezione del suo asse ottico, oltre di essere simmetrica su CH, coincide con CD, ed essendo eguali gli angoli adiacenti HCD e GCD, ciascuno di essi è retto; il che importa di essere orizzontale l'asse di rotazione, perchè tale non è l'asse ottico del cannocchiale.

Se dopo il rivolgimento non si scopre più il punto F all'incrocicchio dei fili, l'asse ottico del cannocchiale non descrive un piano verticale, e per rettificarlo si può tenere un processo in tutto simile a quello gia esposto per ottenere nello strumento la prima condizione. Rotando dopo il rivolgimento la diottra, finchè all'incrocicchio dei fili micrometrici si veda il punto F (*fig.* 183), si segni la nuova direzione PQ della linea fiduciale, per avere sullo specchio l'angolo ACP eguale agli altri LCD ed HCR, che si otterrebbero proiettando l'asse ottico e l'asse di rotazione, prima e dopo il rivolgimento della diottra. Si tracci sullo specchio la bissettrice TS dell'angolo ACP, e contro essa si metta la linea di fede; l'asse ottico si proietterà allora sulla bissettrice NM dell'angolo DCL, e l'asse di rotazione sull'altra UC dell'angolo HCR, e queste due proiezioni diventeranno fra loro perpendicolari, qualora, innalzando o abbassando il perno su cui rota il cannocchiale, si porti l'incrocicchio del micrometro sull'oggetto F; perchè l'angolo UCD, eguale all'angolo retto HCM, diminuito di HCU ed accresciuto del suo eguale DCM, sarà pure retto.

Anche questa correzione si può eseguire per tentativi, producendo nelle già accennate viti un movimento tale, da portare la croce del micrometro su un oggetto V, che credesi a vista collocato sulla bissettrice dell'angolo OCF, e ripetendo l'operazione tante volte finchè prima e dopo il rivolgimento della diottra si colpisca lo stesso oggetto.

Giova qui avvertire che il piede del cannocchiale e l'asse di rotazione, che fa sistema con esso, potrebbero sensibilmente mutare d'inclinazione a seconda delle lievi asprità che s'incontrano sullo specchio; d'onde consegue che il piano descritto dall'asse ottico non riuscirebbe sempre verticale. A fissare in modo preciso la verticalità di questo piano, si è immaginato di porre al piede della diottra un livello a bolla d'aria *l* (*fig.* 179), che, rettificato appena eseguita la seconda correzione or accennata, servirà come indice di fiducia per dire che l'accennato piano è verticale, quando la bolla siasi centrata colla vite *v*, la quale ha azione sul piede dello strumento e quindi anche sul livello.

3° *Verificazione e relativa correzione.* Per verificare infine se l'ultima condizione è soddisfatta, si piantino sullo specchio orizzontato due spilli in modo che la visuale per essi condotta vada a passare per un oggetto assai lontano e ben determinato sul terreno: si collochi la diottra contro gli spilli e guardando dal cannocchiale si osservi se scorgesi il medesimo oggetto: se ciò ha luogo, bisogna conchiudere che il piano visuale condotto per gli spilli (che non è altro che il piano verticale determinato dalla linea di fede) e quello determinato dall'asse ottico del cannocchiale, andando a collimare ad uno stesso oggetto assai lontano, o sono nel medesimo piano verticale o almeno in due piani verticali vicinissimi sensibilmente paralleli fra di loro.

Nel caso in cui sia necessaria la correzione, essa si compie col girare il cannocchiale unitamente al suo perno, muovendo apposite viti, finchè dal cannocchiale si scopra l'oggetto su cui era volta la visuale guidata mediante gli spilli.

Per compiere questa terza verificazione, vale anche il seguente processo. Si orizzonti lo specchio e vi si ponga sopra la diottra diagonalmente, in modo che intersechi due lati contigui e che vada a colpire un oggetto assai lontano, e si segni la retta data dalla linea di fede. Si rovesci dopo la diottra in guisa che, trovandosi a combaciare colla superficie dello specchio la superficie superiore della riga, la sua linea fiduciale coincida ancora colla retta già tracciata; si osservi se all'intersezione dei fili della reticola si vede l'oggetto a cui si è collimato: se ciò ha luogo, il piano verticale passante per l'asse ottico conterrà la linea di fede; in caso contrario, non la conterrà. Supponendo infatti che la traccia del piano verticale passante per l'asse ottico colla superficie dello specchio sia ED (*fig.* 185), inclinata alla linea di fede AB; nel muovere, come si disse, la diottra, la traccia del piano verticale passante per l'asse ottico diverrà HG, l'angolo DCA prenderà una posizione simmetrica ACG, e la linea di mira, invece di passare per l'oggetto F, passerà per l'altro differente I.

Per correggere lo strumento, si girerà la diottra intorno ad uno spillo piantato in C, finchè si vegga l'oggetto F. La linea di fede prenderà allora una posizione MN, formando colla sua posizione primitiva l'angolo NCA, di cui si segnerà la bissettrice CD, per potervi far subito coincidere la linea di fede. L'asse ottico del cannocchiale, venuto allora nel piano verticale di traccia AB, si porterà, girando convenientemente il fusto della colonna e muovendo apposite viti senza distruggere le due precedenti rettifiche, sull'oggetto F, ed avrassi così evidentemente asse ottico e linea di fede nello stesso piano verticale.

Osservando ancora che si avrà asse ottico e linea di fede nello stesso piano verticale, quando quello si collochi nella direzione AB, bissettrice dell'angolo FCI, si deduce che a fare la rettifica basterà anche girare convenientemente il fusto della colonna, finchè all'incrocicchio della reticola si scopra l'oggetto L stimato a vista sulla bissettrice dell'angolo FCI. Questa correzione, eseguita a tentone, richiederà parecchie prove.

Una diottra che non soddisfi all'ultima accennata condizione si dice affetta dall'*errore di parallelismo o di collimazione,* e può tuttavia servire a fare operazioni esatte, purchè il centro del movimento si faccia sempre cadere al piede del sostegno del cannocchiale. Infatti, suppongasi di dover trovare l'angolo di due allineamenti CA e CB (*fig.* 186): collimando ai punti A e B, invece di tracciare sullo specchio la ca, si traccierà la ca', ed invece della cb la cb'. E siccome gli angoli aca' e bcb' sono fra loro eguali, perchè ambidue rappresentanti le deviazioni dei piani verticali passanti per l'asse ottico e per la linea di fede, si conchiuderà facilmente che $a'cb'$ è eguale ad acb.

Osservazione. Oltre le tre accennate condizioni, è anche importante che la linea di fede sia rettilinea, del che un accorto operatore si assicura nel fare le tre verifiche già esposte, osservando se dopo il rivolgimento l'accennata linea di fede coincide colla retta lungo essa tracciata.

114. **Orientamento e declinatore magnetico.** — Disporre la tavoletta in guisa che, quando il suo specchio è orizzontato, una retta disegnata su esso si trovi nell'allineamento che lo rappresenta sul terreno, come si è visto nella seconda e terza quistione del numero 112, o, in termini più chiari, disporre la tavoletta in modo che le linee dello specchio risultino similmente poste e parallele alle rispettive posizioni che avevano quando si sono disegnate, dicesi *orientare la tavoletta*. Questa operazione, sinora ottenuta colla diottra, è indispensabile tuttavolta che si trasporta la tavoletta da una stazione all'altra, e si può anche eseguire in un modo più spedito, ma meno esatto, col declinatore magnetico.

Il declinatore magnetico generalmente usato per tale operazione ha la forma di una cassettina parallelepipeda (*fig.* 176) col suo lato più lungo parallelo al diametro segnato 0°, oppure ha la forma di una scatola cilindrica colla sua base collocata ed inscritta su una lastra rettangolare, privata di due dei suoi triangoli mistilinei, come vedesi nella figura 177, e col lato ab parallelo al diametro segnato 0°.

Per orientare la tavoletta, si colloca uno di tali declinatori sullo specchio fin dalla prima stazione, girandolo in modo che la punta azzurra coincida collo 0° della graduazione. Si segna dopo una linea sullo specchio lungo il lato del declinatore parallelo al diametro che passa per lo zero, e si avrà in questa la direzione del meridiano magnetico, su cui si distinguerà il Nord disegnando una freccia all'estremo posto verso la punta azzurra. Nelle stazioni successive si ottiene poi l'orientamento, collocando il declinatore nella stessa posizione che aveva nella prima stazione, procurando che la punta azzurra sia dalla parte della freccia e girando lo specchio finchè l'ago magnetico cada allo 0°.

All'orientamento col meridiano magnetico si sostituisce talvolta quello col meridiano vero, detto *a pien Nord,* facendo in guisa che la punta azzurra dell'ago segni un angolo eguale alla declinazione del luogo d'operazione: allora la retta segnata lungo il lato del declinatore rappresenta sullo specchio il meridiano vero.

Per facilitare il collocamento della tavoletta in stazione, suolsi generalmente procurare un primo orientamento approssimato colla bussola, riservando la diottra per togliere qualsiasi piccola differenza: questo metodo d'orientamento dicesi *misto.*

Operazioni planimetriche eseguite colla tavoletta.

115. **Problemi risoluti colla tavoletta.** — I. *Per un punto* C (*fig.* 187) *di un allineamento* AB, *condurne un secondo che faccia colla parte* CA *di questo un dato angolo* α.

Collocata in stazione la tavoletta nel punto C, si trovi innanzi tutto il punto *c* corrispondente di C; appoggiata la linea di fede allo spillo posto in *c*, dirigasi una visuale in A, segnando sullo specchio la traccia ab' del corrispondente piano visuale; col vertice in *c* e colla *ca* si costruisca l'angolo $acd = \alpha$; si appoggi la linea di fede contro *cd* e le paline fatte collocare nella direzione CD, secondo cui collima il cannocchiale, saranno evidentemente su un allineamento facente con CA l'angolo α.

Innalzando per *c* la *ce* perpendicolare ad *ab*, si può far tracciare sul terreno l'allineamento CE perpendicolare ad AB.

II. *Per un punto* C, *preso fuori di un allineamento* AB, *condurne un secondo che faccia coll'allineamento dato un angolo dato* α (*fig.* 188).

Scelgasi un punto qualunque D sull'allineamento dato AB e, collocata la tavoletta in stazione su esso, se ne faccia la sovrapposizione *d*; appoggiata la linea di fede contro uno spillo piantato in *d*, dirigasi una prima visuale al punto A ed una seconda al punto C, segnando sullo specchio le tracce *ab* e dc' dei piani verticali per esse passanti. Dopo ciò si trasporti la tavoletta in C orientandola su CD, e, determinato il punto *c* corrispondente di C, si guidi per esso e sullo specchio la *ef* parallela alla *ab*; si costruisca col vertice in *c* e colla *ce* l'angolo $xce = \alpha$; si appoggi il filo della riga della diottra contro la retta *xc*, e traguardando dal cannocchiale si facciano collocare sul terreno diverse paline che tutte saranno in un allineamento CG passante per C e inclinato con AB dell'angolo α, perchè pel fatto dell'orientamento i piani verticali determinati da ab e dalla sua parallela ef sono ambidue paralleli all'allineamento AB; cosicchè un allineamento CG, facente col piano verticale di traccia ef l'angolo α, lo stesso angolo deve pur fare coll'allineamento AB.

Appoggiando la linea di fede contro la ef e facendo piantare delle paline nel piano di collimazione determinato dal cannocchiale, si ha l'allineamento EF parallelo ad AB.

Abbassando da c una retta ch perpendicolare ad ab, si potrebbe analogamente far palinare sul terreno un allineamento CH perpendicolare ad AB.

III. *Essendo dati sullo specchio della tavoletta due punti* a *e* b *rappresentativi di due punti* A *e* B *del terreno, fissare sullo specchio un punto* c *che sia il rappresentativo di un punto* C *del terreno.*

Questo problema del coordinamento di un punto a due punti già dati di posizione, e che ha per oggetto di segnare sulla carta un punto c avente per rapporto ad a e b la stessa posizione che ha C per rapporto ad A e B, o meglio di costrurre il triangolo abc simile con ABC, è di un uso continuo nelle operazioni di rilevamento, e inutile non credo di distinguere i diversi casi che si possono presentare in pratica.

1° Facendo stazione in A e misurando $\overline{AC}$ (*fig.* 189).

Fatta stazione in A, sovrapposto il punto a su A e orientato lo strumento su B, si diriga una visuale al punto C tenendo la linea di fede contro uno spillo piantato in a; si segni sullo specchio la direzione ac' di questa visuale; si misuri $\overline{AC}$, e prendasi $\overline{ac} = \frac{1}{n}\overline{AC}$.

I due triangoli ABC ed abc sono simili, siccome aventi due lati rispettivamente proporzionali e l'angolo compreso eguale, e quindi il punto c è il rappresentativo di C.

2° Facendo stazione in A e misurando $\overline{BC}$ (*fig.* 190).

Collocata in stazione la tavoletta in A facendo la sovrapposizione di a su A ed orientandola sul punto B, si rilevi l'angolo $bac' = BAC$, si misuri $\overline{BC}$, e si descriva un arco di centro b e di raggio $\overline{bc} = \frac{1}{n}\overline{BC}$, tagliante la ac' nel punto c.

In questo caso convien notare come l'arco descritto col centro in b e col raggio $\overline{bc} = \frac{1}{n}\overline{BC}$, interseca ordinariamente la ac' nei punti

c e c_1 facendo risultare due triangoli acb ed ac_1b, il primo dei quali ha l'angolo in c acuto, e l'altro l'angolo in c_1 ottuso; e, acciocchè il problema resti determinato, è necessario di riconoscere sul terreno se l'angolo ACB è acuto o ottuso. Se l'arco tagliasse ac' ed il suo prolungamento al di sotto di a, si avrebbe evidentemente una sola soluzione; come pure una sola se ne avrebbe nel caso in cui l'arco descritto divenisse tangente alla ac', nel qual caso l'angolo in c sarebbe retto.

3° Facendo stazione in V, e misurando la distanza $\overline{AD}$ che unisce il punto A con un punto dell'allineamento B C (*fig.* 191).

Messa in stazione la tavoletta nel punto A in modo che il punto a sia nella verticale di A, e che la ab sia nella direzione di AB, si collimi ordinatamente ai due punti C e D segnando sullo specchio le tracce ac' e ad' dei due piani di collimazione: prendendo $\overline{ad} = \frac{1}{n}\overline{AD}$, e conducendo la retta determinata dai due punti b e d, si avrà nella sua intersezione c con ac' il punto domandato. — Infatti, per essere i due triangoli dab e DAB simili, siccome aventi due lati rispettivamente eguali e l'angolo compreso eguale, sarà l'angolo b eguale all'angolo B; i due triangoli bac e BAC saranno adunque simili, siccome aventi due angoli rispettivamente eguali, e quindi il punto c sarà il rappresentativo di C.

4° Facendo stazione in C e misurando la distanza $\overline{AC}$ (*fig.* 192).

Collocata in stazione la tavoletta nel punto C in modo che b sia nella verticale di C e ba nella direzione di CA, si collimi al punto B per segnare l'angolo abb' eguale all'angolo ACB; su ab si descriva un segmento di circolo adb capace dell'accennato angolo; fatto centro in a con apertura di compasso eguale ad $\frac{1}{n}\overline{AC}$, si tagli l'arco del segmento nel punto c che sarà il punto richiesto, siccome quello che dista da a della quantità voluta coll'angolo acb = ACB.

Non volendosi far uso del segmento capace dell'angolo ACB, si può costrurre su un pezzo di carta trasparente un angolo eguale all'angolo ACB; prendere su un lato a partire dal vertice una distanza eguale ad $\frac{1}{n}\overline{CA}$; porre il detto pezzo di carta trasparente sul disegno in modo che l'estremo dell'accennata distanza cada in a, e che il lato illimitato dell'angolo passi per b: punteggiando allora il punto ove cade il vertice dell'angolo, si avrà il punto rappresentativo di C.

Se l'angolo ACB è acuto, e se $\overline{ac}$ è maggiore di $\overline{ab}$, ma minore del diametro del circolo cui appartiene il descritto segmento, l'arco di centro a e di raggio uguale ad $\frac{1}{n}\overline{AC}$ taglierà in due punti quello del segmento, e per decidere quale delle due soluzioni è la conveniente, bisogna osservare se l'angolo ABC è acuto o ottuso.

5° Facendo stazione in A ed in B, ma non in C (*fig.* 193).

Si viene in A; si orienta lo strumento su B, facendo cadere il punto a sulla verticale del punto A, e si segna sullo specchio la direzione ac' della visuale diretta al punto C; trasportata la tavoletta in B, si fa la stessa operazione per tracciare la bc'' nella direzione di BC; il punto d'intersezione della ac' colla bc'' è il punto domandato, perchè i due triangoli abc ed ABC sono simili, siccome equiangoli. — Il punto c, rappresentativo di C, viene così determinato per intersezione.

6° Facendo stazione in A ed in C (*fig.* 194).

S'incomincierà dal venire in A; e, fatta la sovrapposizione di a su A non che l'orientamento sul punto B, si segnerà sullo specchio la traccia ac' della visuale diretta su C. Dopo di ciò si trasporterà lo strumento in C, e, ottenuto l'orientamento sul punto A, si troverà sullo specchio il punto c_1, posto nella verticale di C; si segnerà in $c_1 b'$ la direzione dell'allineamento CB, per b si guiderà la bc parallela a $c_1 b'$, ed il problema sarà risoluto; perchè, essendo i due triangoli abc e ABC equiangoli e quindi simili, sarà il punto c il rappresentativo di C. — Questo metodo di determinare il punto rappresentativo di C, facendo in esso stazione, non è altro che il metodo d'*intersezione inversa*.

7° Facendo stazione soltanto nel punto D posto sull'allineamento AB e nel punto C (*fig.* 195).

Si faccia stazione in D, e, dopo aver ottenuto l'orientamento sui punti A e B ed avere determinato il punto d' nella verticale di D, si collimi al punto C del terreno segnando sullo specchio la direzione $d'c'$ di quella visuale; si trasporti dopo la tavoletta nel punto C e, orientatala sul punto D, si pianti uno spillo nel punto c_1, intersezione della verticale passante per C colla superficie dello specchio: tenendo la linea di fede contro l'accennato spillo, si diriga una prima visuale al punto A ed una seconda al punto B, conducendo sullo specchio le loro traccie $c_1 a'$, $c_1 b'$; per a guidisi una retta parallela a $c_1 a'$, per b una seconda parallela a $c_1 b'$, ed il punto c, intersezione di queste due rette, sarà il domandato, perchè i due triangoli acb, ACB sono simili, siccome equiangoli per costruzione.

Una volta trovato il punto c rappresentativo di C, si può anche determinare il punto d rappresentativo di D col condurre da c la cd parallela alla $c_1 d'$.

3° Quando i due punti A e B sono inaccessibili e che è accessibile il punto C (*fig.* 196).

Portata la tavoletta in D, e determinato il punto d' nella verticale di D, si segnino sullo specchio le tracce $d'b'$, $d'a'$, $d'c'$ delle tre visuali dirette ai punti B, A, C; portata dopo la tavoletta in C, e orientatala secondo CD, si segni sulla $d'c'$ il punto c_1 che trovasi nella verticale di C; e, condotte due visuali, una su A e l'altra su B, se ne segnino le tracce le quali, incontrando rispettivamente in a_1 e b_1 le rette $d'a'$ e $d'b'$, determineranno il quadrilatero $c_1 d' b_1 a_1$ simile con CDBA, e costruendone sulla $\overline{ab}$, considerata come lato omologo di $\overline{a_1 b_1}$, un secondo ad esso simile, si otterranno in c e d i due punti rappresentativi di C e D.

Per non istancare con soverchie linee il foglio da disegno, si può distendere sullo specchio un foglio ausiliario e costrurre su esso il quadrilatero $c_1 d' b_1 a_1$.

Osservazione. Egli è chiaro che anche coi goniometri si può risolvere il problema ora trattato in diversi casi, e l'unica differenza consiste in ciò, che le misure di rette e di angoli devonsi registrare su apposito abbozzo, per porsi in istato di eseguire al tavolino, e sul foglio ove trovansi già i due punti a e b, quelle costruzioni grafiche, che assai speditamente si compiono sul terreno stesso mediante il goniografo.

Usando dei goniometri, si può anche avere la soluzione trigonometrica del problema, che consiste nel dedurre con calcoli i tre elementi del triangolo ABC che non si conoscono o, meglio, nel dedurre le coordinate ortogonali del punto C, prendendo l'origine in uno dei due punti dati, per esempio in A, e prendendo un asse coordinato nella direzione AB.

IV. *Essendo dati sullo specchio due punti* a *e* b, *rappresentativi di due punti* A *e* B *del terreno, fissare sullo specchio il punto di stazione che si vuole in una località stabilita.*

1° Facendo stazione, prima in A e quindi nella stabilita località (*fig.* 197).

Collocata orizzontalmente la tavoletta nel punto A, in modo che il punto a sia nella verticale pel punto A, e che ab sia nella direzione di AB, si diriga una visuale secondo l'allineamento AX, passante per la località in cui vuolsi fare stazione, e si segni sullo specchio la traccia $a x$ di questa visuale. In seguito di questa prima operazione, si porti la tavoletta nel sito in cui vuolsi fare stazione, e, orientatala secondo l'allineamento AX, si appoggi il filo della riga contro uno spillo piantato in b, e si diriga una visuale al punto B: la retta $b y$ determinata dalla linea di fede, intersecherà la $a x$ in un punto c che sarà la proiezione del punto di stazione sullo specchio, che si potrà determinare sul terreno in C mediante un picchetto.

2° Facendo stazione in un punto C, collocato fra A e B, e nella località stabilita (*fig.* 198).

Disposta orizzontalmente la tavoletta in C e orientatala secondo AB, si operi la sovrapposizione di C sullo specchio in c' e, dirigendo la visuale secondo un allineamento passante per la stabilita località in cui vuolsi far stazione, si guidi sullo specchio la linea $c'x$ determinata dalla linea di fede. Dopo di ciò, si trasporti la tavoletta nell'accennata località e, ottenuto l'orientamento della medesima secondo CX, si appoggi ordinatamente lo spigolo della diottra ai punti a e b, per collimare ai punti A e B del terreno e per segnare sullo specchio le tracce di questi piani di collimazione, che verranno ad intersecarsi in un punto d che sarà la proiezione sullo specchio del punto di stazione cercato, da determinarsi sul terreno mediante un picchetto posto in D.

3° Facendo stazione soltanto nella località stabilita (*fig.* 199).

Orizzontata la tavoletta nel sito fissato, si orienti la medesima col solo declinatore: dopo, appoggiando il filo della riga della diottra ai punti a e b, si dirigano due visuali l'una in A e l'altra in B; le tracce dei due piani visuali sullo specchio determineranno colla loro intersezione il richiesto punto c. Quest'ultimo modo di determinare il punto di stazione, facile e spedito, non può dare che una mediocre approssimazione.

Gli accennati metodi per determinare il punto di stazione appartengono al metodo di *ritaglio* o d'*intersezione inversa*.

V. *Essendo dati sullo specchio tre punti* a, b, c, *rappresentativi di tre altri punti* A, B, C *del terreno, determinare un quarto punto* d *che sia il rappresentativo di un quarto punto* D, *facendo stazione in quest'ultimo* (*fig.* 200).

1ª *Soluzione.* Ben disteso e fissato sullo specchio un foglio di carta trasparente, si rilevino, dopo l'orizzontamento, i due angoli $a'd'b'$, $b'd'c'$; in seguito, staccata la carta trasparente, si disponga questa in modo che le tre rette $d'a'$, $d'b'$, $d'c'$ passino rispettivamente pei punti a, b, c; quando ciò abbia luogo, si segni, mediante uno spillo, la posizione del punto d'; si otterrà così il punto d rappresentativo di D, e si potrà orientare lo strumento facendo cadere d nella verticale di D, e la da nell'allineamento D A.

2ª *Soluzione.* Rilevati dalla stazione D gli angoli $a'd'b'$, $a'd'c'$ rispettivamente eguali ad ADB, ADC, si descriva su ab un segmento di circolo capace dell'angolo $a'd'b'$, e su ca un segmento capace dell'angolo $a'd'c'$: gli archi di questi due segmenti passano per a e s'intersecano nel punto d, che è il rappresentativo di D. L'orientamento della tavoletta si ottiene facendo la sovrapposizione di d su D, e facendo cadere la da nel piano verticale passante per D e per A: se l'operazione venne ben eseguita, la db e la dc devono trovarsi rispettivamente negli allineamenti DB e DC.

Se i due archi s'intersecano sotto un angolo troppo acuto, resta incerto il preciso punto d'intersezione; ma l'osservazione, che, in due circonferenze che si tagliano, la retta oo' che unisce i due centri è perpendicolare sul mezzo della corda comune $\overline{ad}$, pone in caso di poter risolvere il problema con sufficiente esattezza, abbassando da a la perpendicolare ap su oo', e prolungandola della quantità $\overline{pd} = \overline{pa}$.

Conviene avvertire come vi è un caso speciale in cui i tre punti dati non bastano a fissare il punto di stazione. Questo caso si presenta quando i tre punti dati e quello di stazione sono sulla medesima circonferenza di circolo, perchè allora qualunque punto di questa, unito ai tre punti dati, soddisfa alla condizione di dare angoli eguali a quelli delle tre visuali.

Anche coi goniometri si può risolvere questo problema, registrando gli angoli misurati sul terreno e facendo poscia al tavolino le accennate costruzioni grafiche. Che anzi, si può convenientemente applicare il calcolo trigonometrico, come si vedrà parlando della triangolazione.

VI. *Essendo dati sullo specchio tre punti* a, b, c *rappresentativi di tre punti* A, B, C *del terreno, fissare sullo specchio il punto di stazione in una località stabilita* (*fig.* 201).

Essendo a, b e c i tre punti dello specchio rappresentativi di tre altri del terreno A, B e C, si venga collo strumento nel sito in cui si vuol fare stazione, e, ottenuto un orientamento approssimato col declinatore o a vista, si segnino sullo specchio le tracce di tre visuali dirette ai punti A, B, C tenendo ordinatamente la linea di fede appoggiata contro spilli piantati in a, b, c. Queste visuali si intersecheranno formando un piccolo triangolo pqr, il quale non esisterebbe e si ridurrebbe ad un sol punto, se la tavoletta fosse ben orientata. Mediante la vite di richiamo s'imprima ora un piccolo movimento rotatorio allo specchio e si ripeta la precedente operazione per trovare un altro triangolo più piccolo o più grande del primo: nel primo caso si conchiuderà essersi mosso lo specchio nel vero senso per giungere all'orientamento del piano; e nel secondo devesi fare il movimento in senso contrario. Continuando a muovere lo specchio in modo conveniente, si troveranno altri triangoli sempre più piccoli e si finirà per trovare una posizione tale dello specchio che le intersezioni delle tracce dei tre piani visuali diretti su A, B e C si faranno in un sol punto d, che rappresenterà sullo specchio il punto di stazione, e che si determinerà sul terreno con un picchetto collocato in D nella verticale del punto *d*.

116. **Rilevamento colla tavoletta.** — La tavoletta è uno dei mezzi molto usati nelle levate dei piani; con essa si ottiene immediatamente, nel foglio disteso sullo specchio, la figura della pianta naturale del terreno con semplici operazioni grafiche; e, applicata principalmente al rilevamento delle poligonazioni e a quello di alcuni dettagli per irradiamento o per intersezione, conduce a risultati di sufficiente esattezza per la pratica. Gli stessi metodi impiegati nel rilevare coi goniometri valgono pure per l'uso della tavoletta, e credo opportuno di parlarne dettagliatamente, rammentando che i punti del terreno verranno indicati colle lettere maiuscole, ed i loro rappresentanti sul foglio colle stesse lettere, ma minuscole.

Metodo d'irradiamento. Determinata la poligonazione ABCDEF (*fig.* 202), e scelto un punto O da cui risultino visibili tutti i punti da rilevarsi, s'immagini circoscritto al terreno nel miglior modo possibile un rettangolo simile allo specchio della tavoletta, e a vista si collochi lo strumento in modo che il punto *o* corrispondente di O abbia sullo specchio una posizione simile a quella che il punto del terreno ha nell'immaginato rettangolo; orizzontato dopo e fissato lo specchio, si pianti verticalmente un ago finissimo nel punto *o*, ed applicandovi la diottra colla sua linea di fede, si collimi ordinatamente ai vertici A, B, C, ecc., segnando, col far scorrere la matita lungo il filo della riga, le direzioni oa', ob', oc', ecc.; si misurino quindi le distanze $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, ecc. colle canne o colla catena o colla stadia; si prendano $\overline{oa} = \frac{1}{n}\overline{OA}$, $\overline{ob} =$

$\frac{1}{n}\overline{OB}$, $\overline{oc}=\frac{1}{n}\overline{OC}$, ecc., e unendo fra loro i punti a, b, c, ecc., così determinati, si avrà in $abcdef$ una figura simile alla poligonazione. Le parti di perimetro che sono curve o troppo frastagliate si rilevano col metodo degli allineamenti, procurandosi degli abbozzi in disparte, e riportando sullo specchio i risultamenti trovati, come si fa per disegnare al tavolino un piano di cui si ha l'abbozzo dei rilievi locali.

Metodo di camminamento. Disposta orizzontalmente la tavoletta in uno dei vertici della poligonazione, per esempio nel vertice A (*fig.* 203), ed in modo che il suo corrispondente a cada in un sito tale dello specchio che tutta la figura del terreno vi possa essere contenuta, si appoggi il filo della riga contro uno spillo piantato verticalmente in a e si diriga colla diottra una visuale in B, segnando sullo specchio la traccia ab' del suo piano verticale; misurisi la distanza $\overline{AB}$ e, presa $\overline{ab}=\frac{1}{n}\overline{AB}$, si avrà nel punto b il rappresentativo di B. Ciò fatto, si trasporti la tavoletta nel punto B, disponendola in modo da avere l'orientamento sul punto A, non che la sovrapposizione di b su B; contro uno spillo piantato in b si appoggi la linea di fede; col cannocchiale si miri al punto C e si segni la traccia bc' dell'allineamento BC; misurisi $\overline{BC}$ e, prendendo $\overline{bc}=\frac{1}{n}\overline{BC}$, si trovi il punto c rappresentativo di C. Trasportata quindi la tavoletta in C, si ottenga il punto d rappresentativo di D collo stesso metodo, e così si continui fino a giungere nel vertice F, cui tien dietro il primo vertice A, che, rilevato di nuovo, deve confondersi col punto a già fissato sullo specchio fin dalla prima stazione. Se ciò non avviene, l'operazione è sbagliata; e, se l'errore eccede i limiti delle tolleranze, sarà necessario, quando non si sappia ove sia successo, ricominciare l'operazione.

Da qualche autore si consiglia di far precedere alla ripetizione dell'operazione alcuni esperimenti grafici, onde riconoscere il luogo e la qualità dello sbaglio. I metodi però che su tal proposito si danno, essendo utili soltanto nel caso in cui siasi commesso un sol notevole errore, e che nel resto l'operazione sia esatta o almeno senza errore sensibile, sono piuttosto ingegnose speculazioni che vantaggiosi consigli pratici, per cui credo inutile di dettagliatamente parlarne; e piuttosto dirò come, per evitare di essere qualche volta costretti a rifare una lunga operazione onde correggere qualche sbaglio, basta avere la cura di non attendere a verificare l'operazione al termine della medesima, principalmente quando si opera su un terreno molto esteso. Ogni qualvolta si fa un cangiamento di stazione non bisogna accontentarsi di *orientare a punto indietro*, cioè guardando nella direzione dell'ultimo lato rilevato, ma è bene dirigere altresì qualche visuale a punti già rilevati che riescono visibili, osservando se la linea di fede contiene i punti già segnati sullo specchio e rappresentativi di quelli a cui si collima. Ciò deve verificarsi quando il piano che si va costruendo sia simile alla pianta naturale del terreno, perchè l'orientamento, collocando un lato di questa nel piano verticale passante pel lato che gli corrisponde in quello, un'altra retta qualunque del piano, passante pel punto sovrapposto a quello di stazione, deve trovarsi nell'allineamento che gli corrisponde sul terreno, senza di che gli angoli del piano non risulterebbero eguali a quelli della pianta naturale, e quindi dissimili fra di loro queste due figure, il che non dev'essere. Nel caso che si trovi qualche errore, sarà facile riconoscere dove fu fatto, nè lungo riescirà il rifare la parte d'operazione sbagliata.

Metodo d'intersezione. Scelti sul terreno due punti A e B (*fig.* 204) da cui risultino visibili tutti i vertici da rilevarsi, si collochi la tavoletta sul punto A, in guisa che il piano da eseguirsi possa essere contenuto nello specchio. Fissato questo in posizione orizzontale e fatta la sovrapposizione del punto A in a, si applichi la linea di fede contro lo spillo in esso piantato; collimando pel cannocchiale al punto B, si segni lungo lo spigolo smussato della diottra la traccia ab' di quella visuale e, misurata $\overline{AB}$, prendasi $\overline{ab} = \frac{1}{n}\overline{AB}$. Dopo di ciò si miri successivamente ai vertici C, D, ecc. del terreno, tenendo lo spigolo della diottra applicato all'ago; si segnino tutte le rette ac', ad', ecc., lungo lo spigolo stesso, e si noti sulle loro direzioni, verso i limiti del foglio ed in qualsiasi modo, a quali punti rispettivamente corrispondono. Ciò fatto, si trasporti la tavoletta in B e, orizzontato lo specchio, si faccia cadere il punto b sulla verticale del punto B e la retta ba nella direzione dell'allineamento AB del terreno, o più semplicemente si orienti la tavoletta secondo BA. Dopo, col filo della riga della diottra applicato ad uno spillo piantato in b, si dirigano nuovamente delle visuali ai punti C, D, ecc., segnando le loro tracce bc'', bd'', ecc., e nelle intersezioni di queste colle prime si avranno i punti c, d, ecc., che, convenientemente uniti, daranno il perimetro voluto *bacdef*. Per l'esattezza di tale operazione si richiede anche qui quanto altra volta si fece avvertire sul metodo d'intersezione, cioè le visuali devono tagliarsi sotto un angolo compreso fra 30° e 120°.

Osservazione. Se nel rilevare per camminamento incontrasi il caso già altra volta notato, di non poter misurare qualche lato della linea poligonale che si percorre, si fissa la posizione di un suo estremo mediante un'intersezione fatta sul punto stesso, usando i metodi d'intersezione inversa o di ritaglio esposti nel precedente numero. Così il quadrilatero ABCD (*fig.* 205), i cui due lati $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ non sono misurabili, si può rilevare col processo che segue: dalla stazione A si segni la direzione ad' di AD e si determini il punto b rappresentativo di B; dalla stazione B si segni sullo specchio la sola direzione bc' di BC; dalla stazione C si rilevi il punto c per intersezione inversa orientando la tavoletta su BC, facendo la sovrapposizione di C in c'', conducendo la $c''a'$ nella direzione di CA e la sua parallela ac. Segnando la traccia $c''d''$ del piano di collimazione diretto a D, e conducendo sullo specchio da c la cd parallela a $c''d''$, si determina per intersezione con ad' il punto d rappresentativo di D.

117. **Misura di distanze in parte o totalmente inaccessibili.** — L'applicazione delle operazioni di rilevamento conduce colla massima facilità a trovare colla tavoletta una distanza in parte o totalmente inaccessibile.

1° Quando la distanza a trovarsi è accessibile ai suoi due estremi A e B (*fig.* 206).

Collocata la tavoletta in un punto C del terreno da cui risultino visibili i due estremi A e B della distanza a misurarsi, si rilevino questi per irradiamento per avere in $\overline{ab}$ la rappresentativa in iscala di $\overline{AB}$, la qual ultima sarà per conseguenza eguale ad $n.\overline{ab}$, essendo $\frac{1}{n}$ la scala.

Osservazione. Volendosi prolungare l'allineamento determinato dai due punti A e B dalle due parti dell'ostacolo, basta condurre sullo specchio le rette cx e cy, fissare i loro punti d'intersezione d ed e con ab, e prendere $\overline{CD}=n.\overline{cd}$ e $\overline{CE}=n.\overline{ce}$ sulle direzioni CX e CY delle rette cx e cy.

2° Quando la distanza a trovarsi è accessibile in un estremo, per esempio in A, e inaccessibile all'altro estremo C (*fig.* 193).

Scelto il punto B, da cui risultino visibili i due estremi A e C, si prenda AB come allineamento di base, e fatta stazione alle due estremità A e B, si rilevi per intersezione il punto C, per avere in $\overline{ac}$ la retta rappresentativa di $\overline{AC}$.

3° Quando la distanza da trovarsi è tutta inaccessibile.

1ª *Soluzione*. Essendo $\overline{AB}$ (*fig.* 207) la distanza domandata, si può operare come segue: individuati sul terreno due punti D e C determinanti un allineamento di base $\overline{DC}$, si faccia successivamente stazione agli estremi di questo e si rilevino i due punti *a* e *b* per intersezione: si avrà $\overline{AB}=n.\overline{ab}$.

2ª *Soluzione*. La distanza inaccessibile $\overline{AB}$ (*fig.* 208) si può anche avere con una sola stazione di tavoletta. Scelti i due punti D ed E in allineamento con B, gli altri due G ed F in allineamento con A, e finalmente il punto di stazione C da cui risultino visibili gli altri sei punti, si rilevino E, D, G ed F per irradiamento; i punti *a* e *b* si determinino nelle intersezioni di *fg* ed *ed* colle tracce delle visuali dirette ad A e B; si avrà evidentemente $\overline{AB}=n.\overline{ab}$.

118. Norme generali per rilevare colla tavoletta un tratto di terreno piuttosto esteso. — Quanto già si disse, parlando del rilevamento coi goniometri, per riguardo ai tre accennati metodi di irradiamento, di camminamento e d'intersezione, non cade parlando dei rilievi fatti colla tavoletta. Il metodo d'intersezione, che a primo aspetto sembra il più vantaggioso, ma che non sempre si può applicare, sia perchè dai due estremi di una base è ben di frequente impossibile scoprire tutti i punti da rilevarsi, sia perchè non si devono ritenere come buone le intersezioni che non si fanno sotto un angolo compreso fra 30° e 120°, perde ogni preminenza sugli altri due, quando si impieghi la stadia per misurare le distanze.

Per poco esteso che sia il terreno da rilevarsi, converrà impiegare promiscuamente i tre metodi. Una poligonazione giudiziosamente tracciata si rileverà col metodo di camminamento, avvertendo in ciascuna stazione di collimare non solo nel senso del lato ultimamente percorso, ma anche nel senso delle diagonali della poligonazione. Da ogni stazione si prenderanno i punti circostanti per irradiamento, e si riserberà il metodo d'intersezione per quei punti in cui le visuali si tagliano ad angolo sensibilmente retto e per quelli le cui distanze si possono difficilmente misurare. Un soverchio numero di rette segnate sullo specchio stanca di troppo il disegno, per cui non conviene di rilevare con questo strumento molti minuti particolari. È bene di procurarsi un abbozzo generale che, oltre di servire a procedere con ordine nella operazione, si presti anche come mezzo per registrare i rilievi dei minuti particolari, che generalmente si fanno collo squadro e colle canne.

Se nel rilevare colla tavoletta usasi il declinatore per orientare, la retta segnata lungo il lato della cassetta parallelamente al diametro Nord-Sud rappresenta il meridiano magnetico, e quindi sarà facile disegnare sul piano la direzione del meridiano terrestre, conoscendosi la declinazione. Quando la tavoletta si orienta a pien Nord, la direzione del meridiano terrestre è data dal lato stesso della cassetta parallelo al diametro Nord-Sud.

Dalle cose esposte deve apparire che il rilevamento colla tavoletta è assai semplice e comodo per la facilità di poter verificare sul sito stesso l'esattezza dell'operazione, e di segnare tutti quei minuti particolari che solo si possono indicare con precisione quando si hanno sott'occhio. Non bisogna però credere che tali rilevamenti siano esenti da ogni errore. In primo luogo le operazioni sono interamente grafiche e però suscettibili di quell'esattezza soltanto, che compete alla scala in cui si fa il disegno del rilevamento: così operando nella scala del $\frac{1}{5000}$, in cui un decimillimetro rappresenta la lunghezza naturale di $0^{m},50$, per quanta diligenza si ponga nel lavorare, non si potrà mai avere dal disegno una lunghezza, senza pericolo di sbagliare di oltre mezzo metro. In secondo luogo, il rilevamento colla tavoletta, dovendosi tutto compiere sul terreno, obbliga ad un lavoro di campagna piuttosto lungo e da non potersi fare in ogni tempo; imperocchè ogni benchè menoma causa d'umidità obbliga ben di spesso a sospendere l'operazione. In terzo luogo finalmente, i limiti dell'esattezza del disegno dipendenti dalla scala del rilevamento si allargano ancora facendo la copia, la quale generalmente va eseguita per conservare, il più che si può, intatto l'originale.

119. **Rilevamento speditivo.** — Se un rilevamento colla tavoletta si eseguisce in iscala molto piccola, e se nessuna causa impedisce l'impiego della bussola, si può operare colla massima speditezza, usando della stadia per misurare le distanze e del solo declinatore per l'orientamento, perchè allora, analogamente a quanto già si disse parlando della bussola topografica, si può alternativamente far stazione in un vertice sì e in un vertice no, operando come segue. Essendo A B C D E (*fig.* 209) una linea poligonale

da rilevarsi, s'incominci dal portare lo specchio nel punto B e, orizzontatolo, si orienti col declinatore; fermato quindi lo specchio, si determini il punto b corrispondente di B, e tenendo lo spigolo smussato della diottra contro uno spillo piantato in b, dirigasi una prima visuale al punto A ed una seconda al punto C, segnando sullo specchio le rispettive tracce ba', bc'; misurinsi le lunghezze $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ e, prese le $\overline{ba} = \frac{1}{n}\overline{BA}$, $\overline{bc} = \frac{1}{v}\overline{BC}$, si otterranno i punti a, c rappresentativi di A, C. Fatto questo, si trasporti la tavoletta nel punto D, e dopo l'orientamento se ne faccia la sovrapposizione in d'; dirigansi due visuali l'una su C e l'altra su E, tenendo la diottra contro uno spillo piantato in d', e si segnino le loro tracce $d'c''$, $d'e'$; per c conducasi la $\overline{cd}$ parallelamente a $c''d'$ e lunga $\frac{1}{n}\overline{CD}$, e poscia per d la $\overline{de}$ parallela a $d'e'$ e lunga $\frac{1}{n}\overline{DE}$, e si avranno così i due punti d ed e rappresentativi di D ed E. Procedendo in tal guisa si può rilevare una linea poligonale di qualsivoglia numero di lati.

Generalmente la linea poligonale, che si percorre e che rilevasi per camminamento colla tavoletta, è una linea d'operazione con cui si collegano i minuti particolari, attraversante terreni accessibili; e quantunque siano determinate le località in cui vanno posti i suoi vertici, pure l'operatore può per uno spazio assai ristretto trasportarli in modo che risultino in siti tali da rendere più facile l'operazione. Così, per rilevare la linea poligonale ABCDE (*fig.* 210), si fissino i punti A, C, E in cui non si vuol fare stazione, si porti la tavoletta nella località in cui deve trovarsi il punto B, e dopo l'orientamento si pianti uno spillo sullo specchio in b, e si prenda B in modo che ne sia il suo corrispondente; dirigansi le due visuali su A e C, si segnino le loro tracce e si prendano $\overline{ba} = \frac{1}{n}\overline{BA}$, $\overline{bc} = \frac{1}{n}\overline{BC}$. Ciò fatto, si venga nella località del punto D, si orienti lo strumento, si determini sul terreno il punto D che trovasi sulla verticale di c, guidinsi le rette cd', ce' lungo la linea di fede appoggiata contro uno spillo piantato in c dopo d'aver collimato ai punti C ed E; misurinsi $\overline{DC}$ e $\overline{DE}$, prendasi $\overline{cd} = \frac{1}{n}\overline{CD}$, e conducasi de parallela a ce'; si avrà il punto e rappresentativo di E prendendo $\overline{de} = \frac{1}{n}\overline{DE}$.

In pratica si tralascia anche di tracciare $c\,e'$ e la $d\,e$ ad essa parallela: appoggiato semplicemente il filo della riga allo spillo portato in d, si dirige una visuale al punto E, segnando la traccia de'', e prendendo su essa $\overline{de_1}=\frac{1}{n}\overline{\mathrm{DE}}$. Questo modo di operare, quantunque difettoso, è però sufficiente in tali operazioni, impecocchè, atteso la picciolezza della scala in cui viene eseguito il rilevamento, la $\overline{cd}$ è sempre così corta in confronto della distanza $\overline{\mathrm{DE}}$, da potersi considerare questa come parallela alla de_1.

Rilevando dalle diverse stazioni la maggior parte dei punti un po' rimarchevoli per irradiamento e qualcheduno anche per intersezione, e riferendo a questi i minuti particolari a vista o con semplici operazioni di misura, si può arrivare ad avere in breve spazio di tempo il piano approssimato di un'estesa porzione di terreno. Un saggio operatore però, nell'applicare il metodo speditivo, deve avere presenti le avvertenze date parlando del rilevamento colla bussola topografica, e non deve dimenticare che, se in qualunque operazione colla tavoletta è necessario servirsi del mezzo di verificazione accennato al numero 116, il bisogno si fa vieppiù sentire nei rilievi di tal genere, facendo di tanto in tanto l'orientamento misto, senza di che si potrebbe inavvedutamente incorrere in gravi errori, principalmente se il lavoro è un po' esteso.

120. **Cangiamento di foglio**. — Allorquando l'estensione di una levata è tale da non poter essere tutta contenuta in un sol foglio, conviene preparare i diversi fogli occorrenti in modo che le loro riquadrature, sempre alquanto inferiori a quelle dello specchio, siano eguali. Ultimato il rilevamento di tutti i punti che possono stare nel primo foglio, e di alcuni altri che cadono fuori della riquadratura, si stacchi questo dallo specchio, e collocando un lato della sua riquadratura esattamente sul lato del secondo foglio, con cui si deve congiungere, si punteggino parecchi punti che si trovano sul primo e che possono stare, sia entro, sia fuori della riquadratura del secondo foglio. Tutti questi punti così segnati daranno mezzo di proseguire il rilevamento. — Invece dell'operazione del punteggiamento sembra preferibile l'operazione di abbassare, da alcuni punti importanti, segnati sul foglio già compito, delle perpendicolari sui lati vicini della riquadratura, riferendo così la posizione di tali punti a due assi coordinati, aventi la loro origine in un vertice e diretti secondo gli accennati lati, e di riportare poscia tali punti sul

secondo foglio, tenendo ben fisso in mente che i punti, i quali nel primo foglio cadono nella riquadratura, devono cader fuori sul secondo, e viceversa.

121. **Verificare l'esattezza di un operazione colla tavoletta, traendo partito d'un punto la cui proiezione cade fuori dello specchio.** — Sia a (*fig.* 211) il punto rappresentativo di un punto A del terreno, di già fissato su un foglio NO, e questo punto A del terreno risulti visibile dalla località in cui devesi far stazione per compiere il rilevamento che deve essere contenuto nel foglio MN. Prima di andare sul terreno, si prendano i due fogli attigui NO ed NM, e dopo d'averli disposti in modo che un lato dell'uno coincida col lato dell'altro, e pel senso del vero loro orientamento, si conduca da a la retta ab, e si prolunghi in modo che $\overline{cb} = \overline{ab}$. Se, operando sul terreno facendo stazione in un punto S, si vuole, dopo l'orizzontamento e l'orientamento, verificare l'operazione mediante il punto A, si unisce s con c, si divide $\overline{sc}$ in due parti eguali, e si conduce sd parallela ad cb. Egli è evidente che, se la tavoletta è ben orientata, la parallela dovrà passare per a, proiezione del punto A del terreno. Se il punto A si trova molto distante da S, non sarà necessario di segnare la sd parallela ad cb: basterà allora collocare la diottra su cb, e si dovrà scorgere il punto A, perchè la distanza fra le due parallele cb ed sd può essere considerata come nulla in confronto della distanza della stazione al punto A.

122. **Triangolazione grafica e suo uso.** — Allorquando vuolsi rilevare colla tavoletta una porzione di terreno molto estesa, nell'intento di ottenere un lavoro, in cui i diversi punti si trovino ben coordinati nelle rispettive loro posizioni, conviene di procedere innanzi tutto alla determinazione di alcuni punti rimarchevoli, visibili da diversi siti del terreno da rilevarsi, i quali punti potranno in seguito servire, sia per orientare la tavoletta nelle diverse stazioni in cui converrà andare per eseguire il rilevamento dei minuti particolari, sia ancora per accertarsi se il lavoro procede regolarmente e senza errori eccedenti le prestabilite tolleranze. La determinazione di questi punti rimarchevoli si fa mediante quell'operazione che chiamasi *triangolazione grafica;* ed ecco quali sono le norme che in ogni caso possono servire pel conveniente suo stabilimento.

S'incominci dalla scelta dei punti che devono costituire i vertici della triangolazione: questa scelta, per quanto si può, si faccia in modo che la forma dei principali triangoli si approssimi alla equilatera, senza dimenticare che i detti vertici devono risultare visibili dal maggior numero possibile dei siti del terreno a rilevarsi, e che con una certa uniformità devono trovarsi sparsi sul terreno medesimo per soddisfare allo scopo della loro determinazione. Quando i punti scelti come vertici sono facili a prendersi di mira da qualunque distanza, non occorre di stabilire su essi dei segnali; nel caso contrario è indispensabile che essi vengano individuati con pali ben diritti, muniti di banderuola per renderli visibili a grandi distanze. Per rapporto alle lunghezze dei lati di una triangolazione grafica non si possono dare dati precisi, dipendendo questo dalle accidentalità del terreno che si vuol rilevare, dalla sua estensione e dalla scala in cui vuol essere costrutto il piano. Ad ogni modo si può dire che queste lunghezze non devono essere molto grandi e raramente eccedere un chilometro.

Una volta determinati i punti, i quali devono servire come vertici della triangolazione, convien procedere alla ricerca di un lato che si possa far entrare nel complesso dei lati della triangolazione e che facilmente si possa misurare con esattezza. Questo lato prende il nome di *base* e, per quanto si può, deve trovarsi sopra un terreno orizzontale e totalmente scoperto, ed essere talmente disposto che dalle sue due estremità si vegga il maggior numero possibile dei vertici della triangolazione. La sua lunghezza poi deve avere una certa relazione coi lati della triangolazione stessa, non essere maggiore di questi senza però risultare troppo corta, ed avere almeno 300 metri allorquando sono di circa un chilometro i più gran lati della triangolazione.

Scelta la base, si può procedere alla sua misura, e per le triangolazioni grafiche basta eseguire quest'operazione mediante le canne metriche, purchè si proceda colla massima diligenza, e purchè si ripeta due o tre volte l'operazione in un senso e nel senso opposto. Queste misure devono talmente accordarsi fra loro da non essere maggiori del 0,50 per 1000 le discrepanze fra un risultato e l'altro, ed allora si prende la media aritmetica fra i numeri trovati nelle misure parziali siccome rappresentante la lunghezza della base.

Nella figura 212 trovasi rappresentata una triangolazione grafica, e, dovendosi ragionare su di essa, s'intenderà che i vertici sul terreno vengano indicati da lettere maiuscole e dalle stesse lettere, ma minuscole, i loro rappresentativi sullo specchio della tavoletta. La base di questa triangolazione è $\overline{AB}$. Supponendo che dall'estremo A della base veggansi i punti C, D, I, E e G, una volta segnata sullo specchio della tavoletta una retta $\overline{ab}$ rappresentante in una certa scala la lunghezza della base $\overline{AB}$, si può far stazione colla tavoletta in A, orientarla secondo la direzione AB, collimare ai detti punti e segnare sullo specchio le tracce orizzontali dei piani verticali per essi passanti e pel punto A. Andando dopo colla tavoletta nell'estremo B della base, riesce agevole orientarla secondo la direzione BA, collimare ai punti C, D, F ed N che da esso riescono visibili, determinare così per intersezione i punti *c* e *d* rappresentativi di C e D e tracciare le direzioni degli allineamenti BF e BN. Fatto questo, venendo colla tavoletta in C, si può essa disporre in modo che il punto *c* cada nella verticale del punto C e che la retta *ca* si trovi nella direzione CA. Allora, se bene si operò nelle due stazioni A e B, posta la linea di fede della diottra in coincidenza colle rette *cb* e *cd* e convenientemente inclinato il cannocchiale, si deve trovare che l'incrocicchio dei fili micrometrici colpisce i due punti B e D, e si possono determinare per intersezione i quattro punti F, N, E e G. Venendo a far stazione colla tavoletta in D, col disporla in modo che il punto *d* si trovi sulla verticale del punto D e col far cadere la retta *dc* nella direzione DC, si riconosce se le rette *da* e *db* trovansi nelle direzioni DA e DB; meglio si possono precisare le posizioni dei punti E ed F già determinati con intersezioni non troppo ben condizionate dai punti A e C; e finalmente, nell'ipotesi che da D riescano visibili i punti L, K ed I, si dirigano a questi punti delle visuali per segnare sullo specchio le loro direzioni. Portando la tavoletta nel punto I, si può determinare il suo rappresentativo *i* per intersezione inversa, ottenere il punto *k* rappresentativo di K per intersezione, e segnare la direzione del piano verticale passante per I e per H. Venendo a far stazione in E, devono risultare le rette *ec*, *ea*, *ei* ed *eg* nelle direzioni dei corrispondenti allineamenti EC, EA, EI ed EG, quando siasi orientata la tavoletta secondo ED, e si può determinare per intersezione il punto H. Portando la tavoletta in F ed orientatala secondo FD, per l'esattezza del lavoro devono trovarsi le rette *fb*, *fc*, *fn* ed *fk* nelle direzioni degli allineamenti FB, FC, FN ed FK, il punto L si può determinare per intersezione e si può segnare sullo specchio la direzione dell'allineamento FM. Finalmente venendo in M si può questo determinare per intersezione inversa, ed accertarsi se l'operazione venne ben eseguita, giacchè *mn* ed *ml* devono rispettivamente trovarsi negli allineamenti MN ed ML.

Passando ora all'uso dei vertici della triangolazione per le operazioni di rilevamento dei minuti particolari, ecco quanto in proposito si può dire. Nell'ipotesi che siavi in 1 una località in cui riesce comodo di far stazione, appoggiandosi ai due punti D ed L si può risolvere il problema IV del numero 115, fissare il punto di stazione sullo specchio e quindi sul terreno, verificare l'esattezza dell'operazione coll'accertarsi se, ponendo la linea di fede contro la retta determinata dal punto 1 e dal punto *k*, si scorge il punto K, e quindi rilevare dalla stazione 1 quanti punti ci vogliono per irradiamento, ed in pari tempo segnare sullo specchio le direzioni degli allineamenti diretti a punti che si vogliono determinare per intersezione. Terminata l'operazione nella stazione 1, si può venire in un'altra località 2, fissare il punto di stazione in questa località partendo dai punti D ed F, verificare l'esattezza dell'operazione mediante il punto L, e rilevare dalla stazione 2 quanti punti torna comodo di determinare. Dopo questo, si può venire nella località 3, fissare in questa il punto di stazione orientandosi sui tre punti F, M ed N e risolvendo il problema VI del citato numero 115, verificare l'esattezza dell'operazione collimando ad L, e quindi compiere dalla stazione 3 il rilevamento di tutti quei particolari la cui determinazione riesce possibile, facile e spedita. Come si operò per determinare i punti di stazione e per rilevare nelle località 1 e 2, si possono determinare i punti di stazione e quindi rilevare nelle località 4, 5 e 6; operazioni analoghe a quelle eseguite in 3 si possono ripetere in 7; e così completare l'intiero rilevamento dei minuti particolari, coordinandolo ai vertici della triangolazione grafica.

Avvenendo di dover operare su un terreno coperto, per cui in qualche località non riesce possibile operare il coordinamento delle stazioni ai vertici della triangolazione, si può stabilire una linea spezzata fra due punti di stazione ben coordinati, far stazione nei suoi vertici, rilevare da questi i minuti particolari che conviene di considerare ed accertarsi dell'esattezza dell'operazione appena si viene a far stazione in un sito da cui risultano visibili alcuni vertici della triangolazione. Così, supponendo che dai punti 3 e 4 si scoprano almeno tre degli indicati vertici, ma che una zona di terreno fra essi intercetta sia talmente coperta da essere necessario far stazione nei punti 8, 9 e 10 senza poter vedere punti di coordinamento, s'incomincia a far stazione in 8 orientandosi secondo la retta che da 8 va in 3, dopo si viene in 9 orientandosi secondo la retta che unisce 9 con 8, quindi si passa al punto 10 traendo partito dal punto 9 per orientare lo strumento, e finalmente si viene nel punto 4. In questo punto, se ben si operò fra 3 e 4, deve avvenire che, orientata la tavoletta a punto indietro col collimare ad un segnale posto in 10, essa deve anche trovarsi perfettamente orientata per rapporto ai punti C, G ed E.

Quando nel rilevamento dei minuti particolari torna comodo di andare a far stazione in alcuno dei vertici della triangolazione, questo si può fare a vantaggio dell'esattezza del lavoro, con semplicità e chiarezza nei risultamenti finali.

Egli è evidente che, occorrendo parecchi fogli per l'intiero rilevamento d'un'estensione di terreno un po' grande, i vertici della triangolazione grafica devono essere tali e tanti da poter facilmente eseguire il cangiamento di foglio nell'esecuzione della triangolazione stessa, ossia per ciascun foglio si devono avere alcuni vertici della triangolazione posti entro la squadratura ed alcuni altri posti fuori, perchè così, in seguito a quanto si è detto nel numero 120, riesce agevole passare dalla determinazione dei vertici della triangolazione, i quali devono trovarsi su un foglio qualunque, alla determinazione di quelli che devono trovarsi sui fogli successivi. Una volta rappresentati, in ciascuno dei fogli sui quali vuolsi eseguire il rilevamento dei minuti particolari, tanti vertici della triangolazione che riesca facile il coordinarsi ad essi nelle diverse stazioni, il lavoro di rilevare i minuti particolari può essere intrapreso su diversi punti del terreno da rilevarsi; e ciascuno dei rilevatori di questi minuti particolari, coordinandosi ai vertici della triangolazione rappresentati sul foglio in cui deve disegnare i risultati delle sue operazioni, si occuperà di rilevare quelle accidentalità della superficie del suolo che possono cadere sul foglio che deve riempire, non dimenticando di rilevare anche qualcheduno dei punti che cadono fuori della squadratura, e questo nell'intento di poter acquistare certezza se in modo completo vennero rilevati i minuti particolari, la cui rappresentazione viene a cadere nei fogli attigui.

ARTICOLO IX.

Strumenti a riflessione.

123. **Principii generali sui quali è fondata la costruzione degli strumenti a riflessione.** — Oltre gli strumenti già descritti convien far cenno di altri i quali, quantunque insufficienti in operazioni topografiche che tendono a conseguire un piano rego-

lare, pure si devono tenere siccome preziosi in quelle circostanze, in cui nel minor tempo possibile si richiede un lavoro atto a far conoscere con sufficiente esattezza la forma del terreno.

Tali strumenti, essendo fondati sulla proprietà della luce che incontra e che si riflette da una superficie piana, si dicono *a riflessione;* e nella loro costruzione entrano sempre uno o due specchi.

Rammentando la nota proprietà sulla riflessione della luce, la quale in termini concisi si enuncia dicendo che *l'angolo d'incidenza è eguale a quello di riflessione*, considerando due specchi piani OM ed OP (*fig.* 213) disposti in piani verticali inclinati fra loro, ed un raggio luminoso AB, che viene a ferire il primo specchio in B, avverrà: 1° che il raggio incidente AB si rifletterà secondo BC in modo che gli angoli ABM e CBO, complementi degli angoli d'incidenza e di riflessione ABN e CBN, saranno eguali fra loro; 2° che il raggio BC, divenuto incidente sullo specchio OP, si rifletterà secondo CD, in modo che gli angoli BCO e DCP saranno pure eguali fra di loro; 3° che l'angolo CDA, formato dal raggio primitivo AB e dall'altro CD doppiamente riflesso, sarà doppio dell'angolo MOP dei due specchi, perchè facendo $COB=x$, $ABM=CBO=\alpha$, $BCO=DCP=\beta$, osservando che $DBC=180°-2\alpha$, $BCD=180°-2\beta$, $COB=180°-(\alpha+\beta)$, e considerando l'angolo $CDA=y$ come esterno del triangolo BCD, si ha

$$y=180^\circ-2\alpha+180^\circ-2\beta=360^\circ-2(\alpha+\beta)$$
$$=360^\circ-2(180^\circ-x)=2x.$$

Nel caso che lo specchio OP (*fig.* 214) sia perpendicolare al primo raggio riflesso BC, la seconda riflessione si farà ancora nel senso di CB; l'angolo ABC sarà dunque quello stesso che fu chiamato y, e l'angolo dei due specchi ne sarà evidentemente la metà, siccome eguale a quello NBC formato dalle normali alle superficie dei due specchi medesimi.

Ciò premesso, siccome un osservatore vòlto verso lo specchio OP può soltanto vedere in questo l'immagine del punto A, quando è col suo occhio sul raggio doppiamente riflesso CE, per esempio, in E; ne segue che, se lo specchio OP è stagnato solo nella sua parte inferiore, e che, se l'osservatore vede diversi punti di un allineamento EF nel piano verticale dell'immagine del punto A, sarà il raggio doppiamente riflesso nella direzione dell'allineamento del terreno e che quindi la retta A B, ossia il raggio primitivo, farà coll'allineamento EF un angolo doppio di quello dei due specchi, e che conoscendo questo si avrà quello.

124. **Diastimetro a riflessione**. — Un regolo graduato AB (*fig.* 215), un cannocchiale C disposto in senso ad esso perpendicolare, un primo specchio FF′ collocato in faccia al cannocchiale, fissato invariabilmente al regolo col quale fa un angolo di 45°, e stagnato solo in parte, per modo che l'occhio dell'osservatore collocato in O possa scoprire un oggetto D che gli sta d'avanti, e finalmente un secondo specchio M M′ scorrevole lungo il regolo medesimo, in modo da conservarsi però sempre in posizioni parallele, costituiscono uno strumento a riflessione che può essere impiegato nella valutazione approssimata delle distanze.

Supponendo che il regolo AB sia verticale, che nella direzione dell'asse ottico del cannocchiale trovisi un punto D e che lo specchio M M′ sia in posizione tale da riflettere secondo G A il fascio luminoso emanato da D; lo specchio FF′, in virtù della posizione statagli assegnata, rinvierà questo fascio da H in O, in modo che l'osservatore proverà nel medesimo istante la doppia sensazione prodotta dallo stesso oggetto D e dalla sua immagine.

Considerando ora un altro punto d collocato sull'orizzontale O D, l'osservatore che trovasi col suo occhio in O, riceverà la doppia sensazione di vedere simultaneamente d e la sua immagine, quando il fascio luminoso dg, rinviato da d al mezzo dello specchio mobile, faccia un angolo dgm' eguale a quello che lo specchio fa col regolo, e che sia $mgH = MGH = DGM'$, ossia quando la retta dg sia parallela a DG. Segue da ciò che, essendo simili i due triangoli HDG e Hdg, si può porre

$$\frac{\overline{HG}}{\overline{HD}} = \frac{\overline{Hg}}{\overline{Hd}},$$

la quale fa vedere essere costante il rapporto fra la distanza dello specchio mobile dal punto H e la distanza orizzontale dell'oggetto osservato dal medesimo punto H; cosicchè se $\overline{Hg}$ fosse $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{3}$ o $\frac{1}{4}$ ecc. di $\overline{HG}$, anche $\overline{Hd}$ sarebbe $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{3}$ o $\frac{1}{4}$ ecc. di $\overline{HD}$.

Dopo di ciò è facile il comprendere come, misurando esattamente una distanza orizzontale $\overline{HD}$, per esempio, di 200^m, collocando verticalmente il regolo AB su un estremo di questa distanza, portando lo specchio MM' all'estremità del regolo, girandolo a poco a poco finchè rinvii, per seconda riflessione, l'immagine di D all'occhio, rendendo invariabile quest'inclinazione dello specchio mobile, e dividendo l'intervallo $\overline{HG}$ in 200 parti eguali, si avrà lo strumento graduato in modo da poter valutare le distanze in metri. Un indice che unitamente allo specchio mobile scorre sul regolo graduato, serve alla lettura delle distanze: così si dirà che una distanza orizzontale è di 154^m quando, collocando verticalmente in un estremo il regolo graduato e muovendo lo specchio mobile finchè l'osservatore vegga direttamente l'altro estremo non che la sua immagine, si trovi che l'indice coincide coll'incisione 154.

Se il terreno che si interpone fra i due punti A e B (*fig.* 216), di cui vuolsi trovare la distanza, non è sensibilmente orizzontale, s'inclina lo strumento e si fa scorrere lo specchio mobile finchè l'osservatore riceva una doppia sensazione della sommità D del segnale collocato in B, sia direttamente, sia per effetto della doppia riflessione. Ciò che si legge sullo strumento rappresenta allora $\overline{HD}$, ossia la distanza inclinata $\overline{AB}$, che si può anche ridurre all'orizzonte quando si conosca l'angolo di elevazione della visuale $\overline{HD}$.

È rimarchevole come lo specchio mobile MM' (*fig.* 215) non possa essere parallelo allo specchio fisso FF', perchè allora tutte le incidenze dovrebbero arrivare su MM' parallelamente ad HD, qualunque sia la lunghezza di HG; ed esse non farebbero vedere per riflessione l'oggetto D, già visto direttamente, a meno che questo sia situato ad una distanza infinita. Non si può adunque disporre lo specchio MM' parallelamente ad FF', nè perpendicolarmente ad AB: fra questi limiti però vi ha un'infinità d'inclinazioni ammissibili e dipendenti dalla lunghezza che si vuol dare al regolo, e dal massimo della distanza che vuolsi apprezzare.

125. **Squadro a riflessione.** — Consiste lo squadro a riflessione (*fig.* 217) in un prisma vuoto di ottone, a basi trapezie, oppure a basi aventi la forma di porzione di corona circolare. Questo prisma è aperto anteriormente, e contro le due faccie laterali porta due specchi, al disopra dei quali esistono nelle stesse faccie due grandi aperture, larghe quanto gli specchi sottostanti. L'angolo che i due specchi fanno fra di loro deve essere semiretto, e devono esistere nello strumento delle viti, onde ottenere una tale inclinazione. Alla base inferiore trovasi annessa una viera entro cui suolsi inserire un

piccolo manubrio che serve a tenere lo strumento durante l'operazione.

Questo strumento serve a tracciare sul terreno degli angoli retti e, come lo squadro agrimensorio, si presta al rilevamento dei piani, quando si sappia condurre un allineamento perpendicolare ad un altro, ed il suo uso è principalmente vantaggioso nelle città ed in tutti quei siti in cui è impossibile piantare lo squadro agrimensorio.

Se per un punto C (*fig.* 218) di un allineamento AB si vuol innalzare un secondo allineamento perpendicolare, si segue questo procedimento: un operatore viene collo squadro in C tenendolo verticalmente al disopra di questo punto (la qual cosa si può ottenere con una certa esattezza attaccando un piombino all'uncino *u* (*fig.* 217), mentre un secondo operatore, con una palina pendente fra le mani, si porta in una direzione passante per C, presso a poco perpendicolare ad AB. Il primo operatore, traguardando per l'apertura dello squadro che è più lontana dal suo occhio, fino a veder nel piano verticale passante per mezzo dello specchio le paline collocate nell'allineamento CA, fa spostare a dritta o a sinistra il secondo operatore, finchè l'immagine della palina, che questo tiene pendente fra le mani, compaia nel mezzo dello specchietto sottostante all'accennata apertura.

Se invece da D si vuol abbassare un allineamento perpendicolare ad AB, l'operatore corre collo squadro lungo la direzione AB in guisa da scoprire, per l'apertura più lontana dall'occhio, le sue paline nel piano verticale dividente per metà il sottostante specchio, e si ferma quando appare in questo l'immagine della palina D: segnando allora il punto in cui la direzione del filo a piombo ferisce il terreno, si avrà in esso il piede C dell'allineamento domandato.

Costruendo un angolo retto con uno strumento già riconosciuto esatto e venendo collo squadro a riflessione nel vertice di questo angolo, collimando per un'apertura nella direzione di un lato e osservando se nel sottostante specchio si vede, in direzione del primo lato, l'immagine di una palina collocata sul secondo, si verifica se lo strumento è giusto. Nel caso che lo strumento non sia rettificato, bisogna spostare uno dei due specchi, mediante apposite viti, finchè l'immagine di una palina collocata sul secondo lato dell'angolo compaia sullo specchio nella direzione del primo lato.

Si hanno anche degli squadri a riflessione di altra forma, e contenenti diverse coppie di specchi facenti tra loro angoli di 90°, di 45°, di 22° 30′, di 30″, e che servono per conseguenza a tracciare allineamenti inclinati fra loro ad angoli di 180°, di 90°, di 45°, di 60°.

126. Goniometri a riflessione con due specchi. — Per misurare gli angoli, si può far uso di uno strumento a riflessione, molto adoperato nella marina e che, potendosi anche ridurre a piccolissime dimensioni, in modo da essere tutto contenuto in una scatola cilindrica avente da 8 a 10 centimetri di diametro, può riuscire grandemente utile nelle levate che, con regolarità, si devono condurre a termine in breve tempo.

Lo strumento contiene due specchi F, M (*fig.* 219 e 220) di vetro stagnato, le cui facce sono rigorosamente parallele. Lo specchio fisso F è disposto perpendicolarmente al piano che contiene l'arco graduato C; esso non è stagnato che nella metà inferiore della sua altezza, e la metà superiore è trasparente. Lo specchio mobile M, posto nel centro dell'arco, è intieramente stagnato, ed è adattato al suo sostegno in maniera da poter girare intorno ad un asse perpendicolare al piano dell'arco graduato. Quest'asse porta un braccio di leva, o alidada mobile A, munito di un nonio alla sua estremità, che si muove descrivendo l'arco graduato in modo da indicare le diverse inclinazioni dello specchio mobile collo specchio fisso; il che avviene quando, essendo i due specchi paralleli, lo zero del nonio coincide collo zero della graduazione. In faccia allo specchio fisso F vi è un cannocchiale C′. Un manubrio B serve a tenere lo strumento in mano durante l'operazione; un microscopio *m*, che si può portare in qualunque sito dell'arco graduato, è destinato a facilitare la lettura degli angoli; due sistemi di lenti colorate *l* ed *l′* servono a temprare la luce, quando si vogliono eseguire osservazioni sul sole, e tre piccoli piedi *p* si prestano a posare con comodo lo strumento su una tavola quando si voglia.

Per misurare con questo strumento l'angolo delle visuali dirette dal punto O (*fig.* 220) a due oggetti A e B, basta girare lo specchio mobile M, finchè la seconda riflessione OF dell'oggetto A cada nella direzione OB, e leggere ciò che segna lo zero del nonio. L'angolo AOB dei due allineamenti OA ed OB, essendo quello che il raggio incidente AM fa col raggio doppiamente riflesso FO, sarà il doppio dell'angolo dei due specchi, cosicchè, duplicando l'angolo letto si avrebbe l'angolo domandato. Onde evitare questa duplicazione si usa di scrivere doppie le divisioni dell'arco, in modo che la lettura del nonio dia il valore dell'angolo fra gli oggetti osservati.

L'arco graduato è sovente la sesta parte della circonferenza: lo strumento prende allora il nome di *sestante* e si possono con esso misurare tutti gli angoli la cui ampiezza non eccede 120°. Talvolta l'arco graduato è l'ottava parte della circonferenza: lo strumento si dice allora *ottante*, e si possono con esso misurare gli angoli non eccedenti i 90°. Se infine lo strumento porta la graduazione sulla metà della circonferenza, prende il nome di *circolo a riflessione.*

Per avere la esatta misura di un angolo col sestante, coll'ottante o col circolo graduato a due specchi, devono questi risultare fra loro paralleli quando lo zero del nonio coincide collo zero della graduazione. Per accertarsi di questo basta far coincidere gli accennati zeri, e collimare col cannocchiale ad un oggetto molto lontano che si vede attraverso alla parte trasparente dello specchio fisso. Lo specchio mobile, attesa la piccola distanza dei due specchi in paragone della distanza dell'oggetto osservato, deve riflettere l'immagine nel piano verticale in cui essa si vedeva direttamente; in caso contrario, il parallelismo dei due specchi non sarà soddisfatto, e a conseguirlo basterà muovere un'apposita vite annessa ad uno di essi.

Nei descritti strumenti l'asse ottico del cannocchiale deve essere parallelo al piano dell'arco graduato, ed i piani degli specchi devono essere al medesimo perpendicolari. Ordinariamente si tralasciano queste due verificazioni, perchè non sempre attuabili con facilità e non rigorosamente necessarie per uno strumento, che qui si suppone destinato a dare misure approssimative di angoli.

127. **Goniometro a riflessione con un solo specchio.** — A diminuire il grave inconveniente della perdita considerevole di luce dovuta alla doppia riflessione, e che ha luogo in tutti gli strumenti a due specchi, venne immaginato ed eseguito il goniometro ad un solo specchio, di cui si dà qui la descrizione e l'uso.

Uno specchio AB (*fig.* 221) girevole su un perno collocato perpendicolarmente e nella linea di mezzo di un'assicella DEFG, e superiormente al quale in corrispondenza del suo mezzo trovasi teso un filo finissimo *f*; un indice o nonio, collocato nella direzione del raggio perpendicolare allo specchio, che, rotando questo, si muove su una semi-circonferenza graduata FHG col suo zero nel diametro GF; un traguardo collocato all'estremità DE dello strumento, il quale, col filo già accennato, determina un piano di collimazione, costituiscono quanto vi è di essenziale nel circolo a riflessione ad un solo specchio, che si chiamerà piuttosto sestante quando l'arco graduato sia la sesta parte della circonferenza. L'assicella è munita nella parte inferiore di un manubrio; il diametro GF, che porta in F lo zero della graduazione, è parallelo alla lastra in cui trovasi il traguardo, ed una vite posta al disotto serve a produrre nello specchio il moto rotatorio.

Per comprendere l'uso di questo strumento, rappresentato in proiezione orizzontale nella figura 222, si supponga di dover trovare l'angolo che l'allineamento CP fa con CQ. L'operatore dispostosi collo strumento in modo che il perno intorno cui rota lo specchio sia prossimamente nella verticale del punto C, e che la linea di mira determinata dal traguardo e filo opposto che trovasi nello specchio, colpisca l'oggetto Q, giri lo specchio finchè l'immagine dell'altro oggetto P venga riflessa dal medesimo nella direzione OQ: l'angolo indicato dallo zero del nonio raddoppiato, o, qualora la numerazione del semicircolo sia già raddoppiata, l'angolo semplicemente indicato dallo zero del nonio sarà l'angolo richiesto. — Infatti, se il raggio luminoso PC si riflette nella direzione CO, l'angolo PCB sarà eguale all'angolo OCA; l'angolo BCQ opposto al vertice di OCA sarà dunque eguale all'altro PCB, e quindi BCQ sarà la metà dell'angolo dei due allineamenti CP e CQ. Ora l'angolo BCQ essendo uguale all'altro NCF indicato dallo zero del nonio, si avrà che quest'ultimo sarà anche la metà di PCQ come si voleva dimostrare.

È facile il comprendere come, osservando nel mezzo dello specchio l'immagine di un oggetto collocato nella linea di mira e posto al di dietro dell'operatore, lo zero del nonio deve coincidere coll'incisione 180°, che, supposta raddoppiata la numerazione, si trova all'estremo del raggio perpendicolare a quello marcato 0°. Se ciò non ha luogo, si rettifica lo strumento, spostando lo specchio mediante un'apposita vite finchè quella coincidenza sia verificata.

128. Bussola a riflessione e bussola di Burnier. — Il principio sul quale è fondato l'uso della bussola topografica, combinato con quello della riflessione prodotta da uno specchio, ha permesso di costrurre una bussola detta *a riflessione*, che, come i sestanti, gode del prezioso vantaggio di potersi usare senza trepiede, e di potersi quindi adoperare con buon successo nelle levate speditive.

Questo strumento si compone di una scatola cilindrica *ab* (*fig.* 223), avente secondo il suo asse un perno *p*, che sostiene un ago calamitato *ns*, portante un lembo circolare leggerissimo *cd*, e diviso in 360° col suo zero all'estremo *s* della punta Sud dell'ago, e colla graduazione procedente da Sud verso Est. Diametralmente opposte vi sono due lastre q ed r: la prima porta una fessura longitudinale strettissima; l'altra un piccolissimo foro che serve come oculare, e l'immagine del numero apposto alla divisione del lembo che trovasi nel piano verticale della fessura e foro or accennati vien fatta in uno specchietto t inclinato a 45° e che la invia per riflessione ed orizzontalmente all'occhio. Puntando un oggetto qualunque A (*fig.* 224) del terreno col traguardare pel foro r e pel traguardo q, e leggendo il numero la cui immagine vien portata all'occhio posto in r, trovandosi lo zero all'estremità Sud dell'ago, la cifra che si vede nello specchio è l'espressione dell'angolo spr oppure del suo opposto al vertice Apn che l'allineamento secondo cui si è collimato fa col meridiano magnetico. — La figura 225 rappresenta un bussola a riflessione.

Invece dello specchio, suolsi ben di frequente adattare alla bussola a riflessione un prisma lenticolare. Una delle sue facce laterali piana ed inclinata a 45° riflette orizzontalmente l'immagine della divisione che gli sta verticalmente al disotto, le altre due convesse servono ad ingrandirla.

Una modificazione della bussola a riflessione è la bussola di Burnier. Questo strumento è costituito da una scatola cilindrica internamente, elittica al di fuori, e da un ago calamitato con cui fa corpo un cilindro cavo, estremamente sottile e di un'altezza tale da potersi su esso, nel senso delle generatrici, indicare le 360 divisioni della circonferenza, non che i numeri che servono alla lettura dei gradi. L'ago calamitato coll'annesso cilindro può girare su un perno, ed un'apertura praticata nel senso della spessezza della scatola secondo il grand'asse dell'ellisse, munita d'una lente serve a facilitare la lettura di quella divisione che trovasi dirimpetto. La linea di mira è determinata da due fili o traguardi collocati in un piano passante per l'asse del perno che sostiene l'ago e nella direzione dell'asse di detta apertura. Questa bussola serve a trovare l'angolo che un determinato allineamento fa col meridiano magnetico: stazionando in un punto di esso, si gira tutto lo strumento finchè l'occhio scopra nella direzione dei traguardi un punto dell'allineamento dato; si aspetta che l'ago sia in riposo, e l'angolo, che si legge accostando l'occhio all'apertura munita di lente, è il richiesto.

La bussola a riflessione e quella di Burnier, quantunque molto ingegnose, hanno tuttavia degli inconvenienti che meritano d'essere rimarcati, siccome nocivi all'esattezza, quando si opera tenendo lo strumento colla sola mano: a motivo del naturale tremolìo della mano stessa, portata all'altezza dell'occhio e senza appoggio, il lembo manca di stabilità; ed, a motivo dell'involontaria inclinazione dello strumento, prova talvolta contro le pareti della scatola un fregamento tale, da risultare notevolmente erronea la lettura degli angoli.

129. **Goniografo a riflessione.** — Il goniografo a riflessione serve a tracciare immediatamente sul piano gli angoli che si osservano senza farne conoscere la loro ampiezza. Esso componesi di tre regoli AB, BC, AC (*fig.* 226) uniti fra loro da tre perni: i due ultimi regoli BC ed AC sono egualmente lunghi, e nel primo è praticata una scanalatura ove scorre un cursore B. Dietro questa disposizione di cose, variando l'angolo BAC, il triangolo ABC muta di forma senza cessare d'essere isoscele. Un primo specchio è collocato in A col suo piano perpendicolare al regolo AB, ed un secondo specchio, la cui metà superiore è trasparente, trovasi in D sul prolungamento di AC e disposto perpendicolarmente al regolo AD cui è annesso. Essendo l'angolo BAC eguale a quello dei due specchi, ne segue che, collocando il regolo AD nella direzione di un punto M del terreno, e facendo variare l'angolo in A finchè l'immagine di un punto N si veda, per effetto della doppia riflessione sullo specchio D nel piano verticale del punto M, l'angolo NAM sarà doppio dell'angolo dei due specchi e quindi doppio del suo eguale BAC. Considerando ora l'angolo BCD come esterno al triangolo BAC, si avrà che esso è eguale alla somma dei due interni non adiacenti, ossia che è eguale al doppio di BAC, ossia ancora che è eguale all'angolo NAM dei due allineamenti. Per costrurre quest'angolo sul piano si colloca il filo di una delle righe CD o CB nella direzione già data sul piano e che deve servire come un lato dell'angolo; il filo dell'altra riga serve a tracciare il secondo lato.

CAPITOLO II.

Altimetria o Livellazione.

ARTICOLO I.

Nozioni Generali.

130. **Oggetto dell'altimetria**. — Come si notò fin dal principio di questo corso, il piano di una determinata porzione di superficie terrestre non è sufficiente alla compiuta sua rappresentazione, e a farne risultare le accidentalità tutte nel senso verticale convien ricorrere all'altimetria o livellazione, il cui oggetto si riduce a determinare le altezze o profondità di alcuni punti rimarchevoli per rapporto ad una prestabilita superficie di livello.

La scelta dei punti a livellarsi, la determinazione di superficie di livello, la ricerca delle lunghezze delle verticali intercette fra i punti scelti e le accennate superficie costituiscono il còmpito delle operazioni altimetriche.

Per rapporto alla scelta dei punti, si può ritenere doversi generalmente considerare i *punti d'ineguaglianza*, cioè quelli in cui la superficie terrestre presenta i cangiamenti di forma più sensibili e le irregolarità più marcate: in ogni caso però il loro numero, la loro qualità e la loro posizione dipendono essenzialmente dallo scopo per cui si fa la livellazione.

Le superficie di livello che naturalmente s'incontrano nelle superficie dei mari e delle acque stagnanti in genere, convenientissime per determinare le profondità dei punti ad esse sottoposti, riescono inservibili nelle frequenti livellazioni da eseguirsi su terreni asciutti. In tali circostanze si osserva che il piano tangente in un dato punto di una superficie di livello si confonde, per estensione non troppo grande, colla superficie che tocca, e che quindi a superficie di livello poco estese si possono, senza tema di sensibili errori, sostituire dei piani orizzontali.

Le lunghezze delle verticali intercette fra i punti a livellarsi e gli indicati piani si trovano facilmente, talvolta colla misura diretta e talvolta con calcoli instituiti su appositi dati di distanze orizzontali e di angoli.

151. Differenza di livello; linee di livello vero ed apparente. — Essendo A e B (*fig.* 227) due punti del globo terracqueo, il cui centro si suppone in O, avrebbesi la *differenza di livello* $\overline{BC}$ fra B ed A, determinando il punto C ove la superficie di livello passante per A incontra la verticale passante per B o, più semplicemente ancora, determinando il punto C ove la circonferenza massima contenuta nel piano passante per le verticali AO e BO viene ad incontrare quest'ultima.

L'arco AC, mercè cui si giugnerebbe a determinare la differenza di livello $\overline{BC}$ fra il punto B ed il punto A, dicesi *linea di livello vero*, mentre *linea di livello apparente* si chiama la tangente AE; ed essendo praticamente impossibile di segnare quello, e possibile di condurre questa, ne viene che nella stima della differenza di livello fra due punti A e B si commette un errore $\overline{CE}$. Di quest'errore dovuto alla sfericità della terra, non che dell'altro dovuto alla rifrazione della luce, che fa vedere gli oggetti più elevati di quello che siano realmente, è inutile di qui valutarne l'entità, sia perchè nelle operazioni topografiche ordinarie non si presenta mai il caso di doverne tener conto, sia perchè si avranno dettagliati ragguagli a suo luogo, parlando della livellazione trigonometrica, dove, attesa la distanza dei punti a livellarsi, tali errori possono diventare sensibili e assolutamente non trascurabili.

152. Modo di rendere nulli gli effetti degli errori di sfericità e di rifrazione. — Essendo P un punto equidistante da due punti A e B (*fig.* 228), e posto che un osservatore collocatosi in quello diriga alle verticali di questi e nella superficie sferica passante pel suo occhio O, le due linee di livello OA′ e OB′, sarebbe $\overline{AA'} - \overline{BB'}$ la differenza di livello fra i due punti A e B. Se poi l'operatore, collocatosi in P, dirige due visuali orizzontali, i raggi rifratti O*a* e O*b*, a motivo dell'uguaglianza delle distanze dei punti A e B da P, avranno i loro innalzamenti $\overline{A'a}$ e $\overline{B'b}$ eguali fra loro, e la differenza $\overline{Aa} - \overline{Bb}$, potendosi considerare come risultata dall'aumento dei due termini di $\overline{AA'} - \overline{BB'}$ delle quantità eguali $\overline{A'a}$ e $\overline{B'b}$, esprimerebbe pure la vera differenza d'altezza fra il punto A ed il punto B.

Quest'osservazione giova a confermare come il processo dell'operazione possa rendere nullo ogni errore, dacchè appare non doversi fare alcuna correzione quando le visuali orizzontali si dirigano da un punto egualmente distante dai punti a livellarsi.

Se poi la distanza dei due punti A e B dal punto P non è considerevole e non eccedente i 300^{m}, le linee di livello OA′ ed OB, confondendosi sensibilmente colle loro tangenti condotte da O, ogni correzione diventa inutile, qualunque sia la posizione del punto P, il quale però almeno a vista si sceglierà equidistante dai due punti A e B.

133. **Indole degli strumenti per livellare.** — Da quanto si è detto risulta chiaro che, per eseguire le operazioni di livellazione si richiedono due sorta di strumenti, cioè strumenti per determinare dei piani e delle linee orizzontali, e strumenti per trovare a quale altezza i piani o linee orizzontali determinati coi primi vengono a tagliare le verticali passanti pei punti su cui si opera. I primi strumenti diconsi *livelli* ed i secondi *mire*. Talvolta s'impiegano anche strumenti che permettono di condurre visuali di determinata inclinazione all'orizzonte, e tali sono gli *eclimetri* ed i *clisimetri*, ed il loro uso si fonda su ciò che, a determinare la differenza di livello fra due punti, basta conoscere la loro distanza orizzontale e l'inclinazione che ha con questa la retta che li unisce.

134. **Operazioni di livellazione.** — Le operazioni tutte di livellazione si riducono o a trovare semplicemente la differenza di livello fra due punti, o a somministrare un'idea sufficientemente nitida delle principali ondulazioni e varietà di una data porzione di superficie terrestre, e per tale oggetto servono la *livellazione longitudinale*, la *livellazione longitudinale* e *trasversale*, la *livellazione raggiante* ed il metodo delle *curve orizzontali*.

La livellazione longitudinale si eseguisce quando importa di conoscere le varietà della superficie del suolo soltanto in un determinato andamento rettilineo o curvilineo. La figura eseguita in disegno, dietro le misure prese sul terreno, dicesi *profilo*. Un profilo non è altro fuorchè lo sviluppo in piano dell'intersezione della superficie cilindrica a generatrici verticali, ed avente per direttrice la linea livellata, colla superficie del suolo.

Molti sono i lavori che esigono la conoscenza della forma del terreno non solamente nel senso della sua lunghezza ma anche nel senso della sua larghezza. A raggiungere lo scopo si presta efficacemente la livellazione *longitudinale* e *trasversale*, con cui si ottengono diversi profili traversali, collegati con un profilo longitudinale ed estendentisi sulla larghezza intera della zona che deve essere coperta dai lavori a progettarsi. I profili trasversali rappresentano generalmente l'intersezione del terreno con piani verticali perpendicolari ai lati della pianta del profilo longitudinale, o dividenti per metà l'angolo di due lati successivi, secondo che non passano o passano per un vertice dell'accennata pianta.

Precipuo oggetto della livellazione raggiante è di livellare tutti i punti di una porzione di terreno atti a dare una precisa idea della forma del suolo e delle opere che lo ricoprono. Presentandosi dei terreni molto accidentati, delle rocce, dei burroni, dei corsi d'acqua, si livelleranno principalmente gli spigoli vivi, gli argini, i punti più elevati e più depressi, e soprattutto quelli in cui la pendenza cangia sensibilmente. Per le costruzioni regolari, come canali, ponti, cateratte e simili, è generalmente sufficiente una livellazione giudiziosa di pochi punti.

Allorquando un terreno non presenta degli oggetti rimarchevoli e facili a descriversi mediante la proiezione orizzontale dei loro contorni, riesce vantaggioso il metodo delle *curve orizzontali*. Questo metodo, consistendo nel trovare l'intersezione della superficie del terreno con tanti piani orizzontali, dà il notevole vantaggio di potersi definire le altezze di tutti i punti di una medesima curva con un sol numero. Di più, scegliendo gli accennati piani equidistanti, si ottiene, nel disegno delle proiezioni orizzontali delle curve cui danno origine, una rappresentazione singolarmente espressiva del terreno, e atta a dare la più chiara idea delle sue accidentalità ed ondulazioni.

Una livellazione si dice *semplice* quando è possibile condurla a compimento collocando in un sol punto lo strumento che serve a dirigere le visuali; *composta*, quando occorrono due o più stazioni.

155. **Capi-saldi.** — Quando un lavoro di livellazione si estende a vaste porzioni di superficie terrestre, è necessario aver mezzo di riconoscere se gli errori inseparabili dalle pratiche operazioni non s'accumulano in modo disdicevole al buon successo dell'operazione; e quindi, analogamente a quanto si disse in planimetria, la necessità di operazioni preparatorie per la determinazione esatta di parecchi punti ben stabili o *capi-saldi*, a cui sia possibile riportarsi per conoscere se il lavoro procede con ordine e nei limiti delle tolleranze ammissibili.

ARTICOLO II.

Della mira.

156. **Mire ordinarie.** — Consiste la mira in un'asta graduata (*fig.* 229), divisa in metri, decimetri e centimetri, della lunghezza di

2 o 3 metri, e talvolta anche di 4 metri, su cui si può far scorrere una tavoletta rettangolare di legno sottile o di latta, detta *scopo*. Lo scopo, unito all'asta mediante un tubo metallico, ha generalmente $0^m,20$ circa di lunghezza e $0^m,15$ d'altezza, ed è diviso in alcuni scompartimenti di colore bianco e nero, oppure bianco e rosso. Lo scopo si fa scorrere sull'asta graduata, mediante una seconda asticciuola che tiene in mano il porta-mira se quella è lunga 3 o 4 metri, colla mano stessa se è solo lunga 2 metri: una molla o una vite di pressione serve a fermare lo scopo a quel punto che si vuole. La linea *ab* segnata sulla parte anteriore dello scopo, e che lo divide generalmente per metà, detta *linea di fede*, è quella che deve essere colpita dalla visuale orizzontale guidata dall'operatore mediante un livello; ed un tratto diviso in dieci millimetri, col suo zero nel piano perpendicolare all'asta passante per l'accennata linea, serve a dare l'approssimazione dei millimetri nella valutazione delle altezze, che risultano dalle divisioni comprese fra l'accennato zero ed il piede dell'asta.

La mira di cui ho parlato usasi molto per la sua semplicità e pel comodo suo maneggio; essa però non è la sola impiegata nella pratica, e ben di frequente si vedono delle mire in cui il regolo graduato è formato di due parti MN e PQ (*fig.* 230), scorrevoli l'una nell'altra mediante una linguetta aderente alla parte anteriore MN ed incastrata in una scanalatura corrispondente della parte PQ, ove è ritenuta mediante due risalti laterali. Lo scopo, oltre di potersi far scorrere sul regolo intero e fermarsi in qualsiasi sito del medesimo mediante la vite V, si può anche fissare sul regolo a linguetta MN portandolo al suo estremo. La parte posteriore dell'asta è graduata e divisa in metri, decimetri e centimetri fino a 2^m, e questa graduazione, completata da una piccola scala di millimetri scorrevole collo scopo, serve a dare le altezze minori di 2^m.

Per le altezze maggiori di 2^m e sino a 4^m, si fa da prima venire lo scopo alla sommità del regolo a linguetta, che si fa quindi scorrere finchè la visuale orizzontale colpisca la linea di fede. L'altezza sarà in tal caso 2^m, più la parte del regolo sporgente, la qual parte è evidentemente eguale a quella percorsa dal suo piede, e che si legge osservando dove cade lo zero d'un'altra piccola scala di millimetri collocata in D e scorrevole su una graduazione che sta a fianco della prima e numerata da 2 a 4 metri.

137. **Mira parlante.** — Si sono anche costrutte delle mire graduate in modo che l'operatore possa con un cannocchiale leggere direttamente le altezze, dette perciò appunto *mire parlanti*. Esse

sono formate d'un'asta di legno della larghezza di circa $0^m,15$ e dell'altezza di 3 a 4 metri. A facilitare la lettura soglionsi marcare, i metri con numeri rossi, i decimetri con numeri neri, ed i centimetri con tratti alternativamente bianchi e neri.

ARTICOLO III.

Dei livelli.

Livello ad acqua.

138. **Descrizione del livello ad acqua.** — Consiste il livello ad acqua in un tubo, generalmente di ottone, del diametro di $0^m,02$ a $0^m,03$, della lunghezza di 1^m a $1^m,30$, e che si può ridurre ad approssimata orizzontalità mediante una ginocchiera G posta nel suo mezzo, cui sta annesso un manico cavo per poter collocare lo strumento su un trepiede (*fig.* 231). Le due estremità sono ripiegate nel senso verticale, e terminano con due bicchieri di vetro, aventi un diametro che varia generalmente da $0^m,05$ a $0^m,03$, con un'altezza compresa da $0^m,08$ a $0^m,12$ e perfettamente eguali in tutte le loro parti, onde rendere lo strumento simmetrico rispetto all'asse intorno a cui può orizzontalmente girare. Un rubinetto R, collocato nel mezzo del tubo, è destinato a mettere fra loro in libera comunicazione le due parti di strumento poste a dritta ed a sinistra dell'accennato asse, o a separare l'una dall'altra.

139. **Uso del livello ad acqua.** — Si usa questo strumento disponendolo col suo tubo quasi orizzontale sul trepiede, versandovi dell'acqua finchè salga nei due bicchieri ad una metà o ai due terzi circa della loro altezza, otturando un vetro con una mano, inclinando e battendo leggiermente il tubo onde estricarvi le bolle d'aria che vi possono essere inchiuse. Pervenuto il liquido al suo stato di riposo, in virtù di un noto principio d'Idrostatica, i due piani superiori saranno in una medesima superficie di livello, e quindi le quattro tangenti alle intersezioni delle superficie dell'acqua colle pareti dei bicchieri saranno quattro linee orizzontali, e aggiungendo all'uso di un livello quello di una mira, si può conoscere di quanto i punti del terreno, in cui portasi quest'ultima, sono al disotto del piano determinato dalle accennate tangenti orizzontali. In generale quel numero che si legge sulla mira e che indica di quanto un punto del terreno è al disotto dell'orizzontale determinata col livello, dicesi *quota*.

Per determinare con un livello le quote di alcuni punti, occorrono due operatori, cioè quello che dirige le visuali orizzontali e quello che porta la mira. A quest'ultimo spetta l'osservare se il terreno, su cui colloca la mira, sia d'una resistenza sufficiente per non cedere sotto il peso della mira medesima, e di renderlo tale mediante una pietra o un picchetto qualora nol sia, di tenere la mira ben verticale, di rivolgersi verso l'operatore che sta al livello, di attendere i convenienti segnali per portare la linea di fede all'altezza della visuale orizzontale diretta col livello, e di leggere la quota: questa, pronunciata ad alta voce, verrà marcata su apposito registro dal primo operatore, il quale per maggior sicurezza dovrà prendersi la cura di accertarsi dell'esattezza di quanto ha registrato, principalmente se il porta-mira è novizio in tal genere di lavoro. L'operazione che si fa per determinare la quota d'un punto dicesi *dare un colpo di livello.*

140. **Abbassamento dell'acqua proveniente dall'inclinazione del tubo.** — Riportandoci a quanto già si disse nel numero 131 sul modo di determinare le ordinate di varii punti del terreno per rapporto ad una superficie di livello, facile è l'apprendere di quanta importanza sia che le visuali condotte mediante il livello si trovino in un medesimo piano orizzontale, comunque s'inclini e si giri lo strumento sul suo trepiede. Questa cosa in nessun modo è rigorosamente verificata nel livello ad acqua, e nel mentre qui sotto si cercherà di dimostrare la verità di una tale asserzione, si procurerà anche di far vedere fra quali limiti si possa inclinare il tubo senza sensibili errori.

Supponendo il tubo AB (*fig.* 232) in una posizione orizzontale, chiamando A la sezione retta dei due bicchieri, ed H l'altezza dell'acqua nei medesimi, la quantità d'acqua in essi contenuta sarà data da

$$2AH.$$

Se al tubo si dà ora un'inclinazione qualunque, facendolo venire in A′B′, l'accennata quantità d'acqua non varia, e potendosi considerare come composta di due tronchi di cilindro retto di base A e di assi $\overline{H'D'}$ ed $\overline{I'E'}$ rispettivamente eguali ad h ed h', si potrà stabilire l'equazione

$$2AH = A(h+h'),$$

d'onde

$$H = \frac{h+h'}{2}.$$

Facendo ora eguale ad a la distanza $\overline{CL}=\overline{CL'}$ dell'asse di rotazione C al piano dei fondi dei bicchieri, e chiamando x ed x' le due perpendicolari $\overline{CF}$ e $\overline{CF'}$ abbassate dall'accennato asse sulle due direzioni AB e A'B' del tubo, e comprese fra il medesimo asse ed il piano dell'acqua nelle due posizioni del livello, si avrà

$$x=a+H, \qquad x'=a+\frac{h+h'}{2}=a+H,$$

e quindi $x=x'$; d'onde si deduce che la proiezione $\overline{Cf}$ di $\overline{CF'}$ sulla retta CF (la qual proiezione misura l'altezza dell'acqua nella seconda posizione dello strumento) è minore di $\overline{CF}$ e che l'acqua ha subito un abbassamento $\overline{Ff}=\varepsilon$.

Per valutare l'accennato abbassamento, conviene osservare che, chiamando δ l'angolo FCF' che misura l'inclinazione data al tubo del livello, si ha dal triangolo rettangolo F'Cf:

$$\overline{Cf}=x\cos\delta$$

e quindi

$$\varepsilon=\overline{CF}-\overline{Cf}=x(1-\cos\delta),$$

dalla quale si ricava

$$\cos\delta=1-\frac{\varepsilon}{x}.$$

Quest'ultima formola serve a valutare l'inclinazione massima da darsi al tubo del livello acciocchè l'abbassamento dell'acqua non ecceda un limite prestabilito; così supponendo $x=0^{m},2$ e che vogliasi $\varepsilon=0^{m},001$, si ricaverà che l'angolo δ non deve eccedere $5° \, 44'$.

141. Livello ad acqua in cui i diametri dei due bicchieri non sono eguali. — Il non mantenersi la superficie del liquido in un medesimo piano orizzontale, comunque s'inclini lo strumento, è, dietro quanto si disse, un difetto piccolo invero e trascurabile del livello ad acqua: se però aggiugnesi ancora una diseguaglianza nei diametri dei due bicchieri, sempre più questa causa d'errore influisce sull'esattezza dell'operazione, ben evidente essendo che se si inclina, per esempio, lo strumento dalla parte del maggior bicchiere, l'acqua passata dal minore in questo, ripartendosi su una base più ampia, dovrà abbassarsi e concorrere quindi all'abbassamento del piano orizzontale determinato dalla superficie primitiva dell'acqua.

In quello che immediatamente qui segue si studierà la relazione che deve esistere fra i diametri dei vetri e le due parti di tubo separate dall'asse intorno cui può orizzontalmente rotare il livello, acciocchè l'abbassamento originato da quest'ineguaglianza di diametri sia nullo. Essendo DABE (*fig.* 232) la posizione dello strumento per cui l'asse del tubo è orizzontale e verticali quelli dei bicchieri, e D'A'B'E' una seconda posizione secondo cui si è collocato il livello girandolo attorno all'asse orizzontale C, egli è chiaro che si dovrà conchiudere nullo l'abbassamento prodotto dall'ineguaglianza dei due bicchieri, tuttavolta che la verticale $\overline{CF}$, compresa fra l'asse di rotazione C ed il piano orizzontale DE, sia eguale alla retta $\overline{CF'}$ abbassata da C perpendicolarmente alla direzione A'B' dell'asse del tubo e compresa fra il punto C ed il piano orizzontale D'E' determinato dall'acqua nella seconda posizione dello strumento.

Chiamando A ed A' le aree delle sezioni rette dei due bicchieri, L ed L' le lunghezze delle due parti $\overline{GA}$ e $\overline{GB}$ di tubo separate dall'asse verticale di rotazione, e ritenendo per $\overline{HD}$, $\overline{IE}$, $\overline{H'D'}$, $\overline{I'E'}$, $\overline{CL}$, $\overline{CL'}$, $\overline{CF}$ e $\overline{CF'}$ le denominazioni già stabilite nell'ultimo numero: siccome il volume della quantità d'acqua contenuta nei due bicchieri deve essere lo stesso nelle due posizioni del livello, si può stabilire l'equazione

$$H(A+A')=Ah+A'h' \qquad (1).$$

Immaginando ora condotte F'M ed F'N perpendicolari a CF', si deduce facilmente

$$h=\overline{CF'}-\overline{CL'}+\overline{MD'}=x'-a+L\tang\delta,$$

$$h'=\overline{CF'}-\overline{CL'}-\overline{E'N}=x'-a-L'\tang\delta,$$

i quali valori di h ed h', sostituiti nella (1), danno per x' il seguente valore

$$x'=H+a-\tang\delta\frac{AL-A'L'}{A+A'} \qquad (2).$$

Questo risultato dimostra essere x' ossia $\overline{CF'}$ eguale ad $H+a$ ossia a $\overline{CF}$, e quindi essere nullo l'abbassamento dell'acqua cagionato dall'ineguaglianza dei diametri dei bicchieri, quando esista una relazione tale fra A, A', L ed L' da rendere nullo il terzo termine del secondo membro dell'equazione (2), il che succederà quando sia $AL = A'L'$, ossia quando le aree delle sezioni rette dei bicchieri siano in ragione inversa delle lunghezze delle parti di tubo loro corrispondenti.

142. **Effetti della capillarità nel livello ad acqua.** — Le superficie dell'acqua nei due bicchieri non sono piane, imperocchè, in virtù del fenomeno della capillarità, il liquido s'innalza lungo le pareti che lo contengono. Segue da ciò che i due orli, a cui devonsi condurre le tangenti, invece di presentarsi come linee ben determinate, si manifestano come due anelli di un certo spessore, per cui riesce dubbia la visuale. Per avere dell'esattezza nell'operare, conviene portarsi a qualche distanza dallo strumento, perchè allora gli orli appariscono siccome linee nere ben decise, il che ancora meglio succede quando si colorisca l'acqua o quando si coprano i bicchieri con tubi di latta, detti *oscuratori*, foggiati in guisa da lasciar vedere l'acqua per quanto è necessario a poter condurre le visuali.

Se i vetri non sono del medesimo diametro, l'orlo originato dalla capillarità è più alto in quello di minor diametro, e quindi è sempre maggiore la causa d'errore nel dirigere le visuali.

143. **Portata del livello ad acqua.** — Il notato fenomeno della capillarità, che è una delle principali cause d'errore nel livello ad acqua, fa sì che anche il più abile operatore non possa ottenere risultati sufficientemente esatti, se non collimando ad una distanza non maggiore di 30^{m} o 40^{m}, la qual distanza costituisce la *portata del livello ad acqua.*

Il limite della portata del livello ad acqua si deduce osservando che un raggio visuale, il quale scarti dall'orizzontale d'una quantità $\overline{dc} = a$ nell'intervallo $\overline{Ec} = d$ dei due vetri (*fig.* 233), ad una distanza $\overline{EC} = X$ deve allontanarsi della quantità maggiore $\overline{DC} = e$, per modo che dai due triangoli simili ECD, Ecd si ha la relazione

$$X = \frac{de}{a}.$$

Supponendo che siano $d = 1^{m}$, $a = 0^{m},0001$, e che vogliasi $e = 0^{m},004$, si ricava $X = 40^{m}$.

Livelli a bolla d'aria con cannocchiale.

144. **Brevi cenni sul livello a pendolo e sul livello a bolla d'aria.** — Oltre il livello ad acqua, molti altri se ne sono costrutti più o meno perfetti. Fissando un livello a pendolo, come quello descritto al numero 48, ad un regolo ben diritto e tale da potersi collocare su un trepiede, si ha uno strumento per livellare. Il regolo deve essere disposto in guisa che, coincidendo il filo a piombo colla linea di fede, la sua faccia superiore sia orizzontale, e deve essere suscettivo di due moti di rotazione intorno a due assi diversi, uno verticale e l'altro orizzontale. — Un altro strumento per livellare si ottiene colla massima facilità quando al regolo si annetta un livello a bolla d'aria e che si munisca il regolo medesimo di due traguardi determinanti una linea di mira orizzontale quando la bolla d'aria è centrata. Tali strumenti però sono imperfettissimi ed assolutamente inservibili nelle operazioni di qualche importanza. I livelli a bolla d'aria con cannocchiale devonsi preferire ai già descritti; e, nel facile loro uso e nell'esattezza a cui conducono, devesi riscontrare la causa che li rende preziosi nelle operazioni tutte, in cui vuolsi l'esattezza non disgiunta dalla celerità.

Le parti essenziali di un livello a bolla d'aria con cannocchiale sono: il livello a bolla d'aria ed un cannocchiale girevoli intorno ad un asse verticale, e disposti in modo da riuscire l'asse ottico del cannocchiale orizzontale, quando la bolla d'aria è centrata. Un livello che soddisfa all'enunciata condizione dicesi *rettificato;* in caso contrario, è fuori di rettifica, e lo strumento è bene costrutto quando ha gli opportuni mezzi che servono alla sua rettificazione. Quantunque tutti i livelli a cannocchiale non siano costrutti in egual modo, pure si possono ridurre a due classi principali: cioè a quelli per cui l'asse ottico del cannocchiale, reso orizzontale in una posizione, non si conserva tale nell'intero giro d'orizzonte: ed a quelli per cui l'orizzontalità dell'asse si verifica in tutte le posizioni. I primi sono conosciuti dalla maggior parte dei pratici sotto il nome di *livelli su una linea,* ed i secondi sotto il nome di *livelli su un piano.*

145. **Descrizione del livello a bolla d'aria con cannocchiale su una linea.** — È formato un tal livello da un cannocchiale C (*fig.* 234) col micrometro costituito da due fili, orizzontale l'uno e verticale l'altro, sostenuto da due montanti m', m'' annessi agli

estremi di un regolo R, a cui si può imprimere un movimento di rotazione intorno ad un asse *a* perpendicolare alla sua lunghezza, e attraversante un sostegno che termina inferiormente in un manico cavo M, onde poter adattare lo strumento al collo di un trepiede. Una vite V, premendo contro una molla *m* la quale agisce sul perno, serve a produrre l'accennato movimento rotatorio del regolo e a rendere centrata la bolla d'aria d'un livello *l* collocato sul regolo medesimo.

Tale è la costruzione dei migliori livelli su una linea, che si dicono *a cannocchiale amovibile*, perchè è possibile di levare questo, di capovolgerlo e di rimetterlo ne' suoi collari. La prima idea di un siffatto livello è dovuta a Chézy, il quale però, a vece di porre il livello a bolla d'aria sul regolo trasversale, immaginò di collocarlo al di sotto del cannocchiale, procurando il movimento rotatorio intorno all'asse orizzontale, mediante un arco esteriormente dentato e che ingrana con una vite perpetua. Altri costruttori invece resero fisso il cannocchiale sui suoi sostegni, disponendo il livello a bolla d'aria al disopra del cannocchiale medesimo: tale modificazione rende complicata la rettificazione dello strumento, come si vedrà in seguito.

146. **Uso dei livelli su una linea** — Supposto lo strumento rettificato, s'impiega esso per determinare la quota di un punto col seguente metodo. Si collochi lo strumento sul suo trepiede in guisa che il collo di questo risulti verticale; rivolto il cannocchiale verso il punto su cui vuolsi fare un colpo di livello, si muova la vite V (*fig.* 234), finchè la bolla d'aria sia centrata; dal cannocchiale si diriga una visuale alla mira portata verticalmente nel punto a livellarsi; si faccia innalzare o abbassare lo scopo finchè la sua linea di mezzo sia coperta dal filo orizzontale del cannocchiale; e la parte d'asta intercetta fra il suo piede e l'indice darà la voluta quota.

147. **Abbassamento che può subire la visuale orizzontale determinata dall'asse ottico del cannocchiale, quando l'asse dello strumento non è verticale.** — Se il collo del trepiede non è rigorosamente verticale, rotando lo strumento sul proprio asse, l'asse ottico non si conserva orizzontale ed il movimento da darsi alla vite V per ridurlo fa cangiare la sua altezza, il qual cangiamento si può apprezzare come segue. Sia AB (*fig.* 235) l'asse dello strumento supposto verticale, *a* l'asse orizzontale intorno a cui può girare, $\overline{a\mathrm{B}}$ la distanza fra questo e l'asse ottico del cannocchiale:

supposto che l'asse dello strumento s'inclini venendo in Aa', l'asse ottico orizzontato passerà in $C'D'$, conservandosi $\overline{a'B'}$ eguale e parallela ad $\overline{aB}$, e l'abbassamento subito sarà $\overline{BE}=\overline{aF}$. Facendo $\overline{Aa}=r$, chiamando ε l'abbassamento $\overline{aF}$, e δ l'angolo $a'AB$ che misura l'inclinazione dell'asse dello strumento colla verticale, si avrà evidentemente

$$\varepsilon = r(1-\cos\delta),$$

d'onde

$$\cos\delta = 1 - \frac{\varepsilon}{r}.$$

Quest'ultima formola serve a calcolare l'angolo massimo δ, di cui si può inclinare l'asse del collo del trepiede, acciocchè l'abbassamento ε non ecceda un limite prestabilito. Supponendo $r=0^{m},12$ e che ε debba appena essere di $0^{m}0002$, si trova che δ è di circa $3°\ 18'\ 30''$; inclinazione questa sempre maggiore di quella che in ogni caso può ottenere un esperto operatore.

148. **Descrizione dei livelli a bolla d'aria su un piano.** — I livelli su un piano sono anch'essi formati con un livello a bolla d'aria L (*fig.* 236) e con un cannocchiale C collocato su appositi sostegni. In siffatti strumenti è cangiato il meccanismo che serve a centrare la bolla d'aria, ed esistono perciò tre viti v', v'', v''' collocate nei tre vertici di un triangolo equilatero, dette, come già si notò parlando di altri strumenti, *le viti del triangolo*. Il regolo R e le parti da esso sopportate possono fare un giro d'orizzonte intorno all'asse del sostegno S, il quale diramasi nei tre bracci ai cui estremi esistono le già accennate viti del triangolo. Ben di frequente incontransi dei livelli i quali, invece di tre viti, ne hanno quattro collocate nei quattro vertici di un quadrato, od anche due viti e due molle.

La forma del livello già descritto non è la sola adottata. I livelli a cannocchiale fisso, provenienti dall'Inghilterra (*fig.* 239), sono al giorno d'oggi molto in uso; e sebbene incomodi a rettificarsi, pure sono tenuti in pregio da molti operatori, sia per la bontà del livello a bolla d'aria, sia per la gran portata del cannocchiale, sia ancora per la solida loro struttura, per cui difficilmente si spostano dallo stato di rettificazione. Tali livelli sono generalmente muniti di un circolo graduato annesso ad un ago calamitato, come si disse per la bussola a riflessione, e allora possono anche servire al rilevamento dei piani.

149. Livello a circolo. — A Lenoir dobbiamo l'idea, tanto semplice, quanto ingegnosa, di servirsi di un piano orizzontale per dirigere orizzontalmente la visuale data da un cannocchiale, e quindi la costruzione di un livello molto stimato. Un cannocchiale AB (*fig.* 240) munito di due prismi p, p' appoggia per due facce di questi su un lembo circolare CD, fissato ad un sostegno S portato da tre bracci ai cui estremi si trovano le tre viti v', v'', v''' del triangolo. Il cannocchiale ha nel suo mezzo due orecchioni, uno dei quali, entrando in un foro collocato al centro del lembo, serve a farlo girare intorno ad un asse verticale. Il livello a bolla d'aria L appoggia sui due prismi, come si vede dalla figura, ed è tenuto fisso dall'altro orecchione.

Il livello a circolo ha però alcuni difetti: una piccola ineguaglianza fra le altezze dei due prismi, e le lievi scabrosità che si possono incontrare sul piano del circolo, possono notevolmente compromettere l'esattezza dell'operazione.

150. Uso dei livelli a bolla d'aria con cannocchiale su un piano. — Un livello a bolla d'aria su un piano, di già rettificato, si presta a determinare la quota di un punto del terreno, facendo venire il livello a bolla d'aria nella direzione di due viti del triangolo, e muovendo queste finchè la bolla si mostri centrata; si dispone dopo il livello in una direzione perpendicolare alla prima e di bel nuovo si centra la bolla; se lo strumento è ben costrutto la bolla deve mantenersi centrata nell'intero giro d'orizzonte e, dirigendo col cannocchiale una visuale alla mira collocata nel punto da livellarsi, facile sarà il far portare la linea di fede dello scopo all'altezza del filo micrometrico orizzontale per avere la quota cercata.

Se invece delle tre viti, che servono ad orizzontare lo strumento, ve ne sono quattro, allora si colloca il livello successivamente secondo due lati del quadrato, o successivamente secondo due diagonali, perchè gli si fanno così prendere due direzioni fra loro perpendicolari.

151. Verificazioni e rettificazioni dei livelli a cannocchiale amovibile da' suoi collari. — Qualunque livello, che abbia il cannocchiale amovibile dai suoi collari, può servire a condurre visuali orizzontali quando, essendo centrata la bolla d'aria, trovinsi soddisfatte le seguenti condizioni:

1° *Che l'asse dello strumento sia in un piano verticale perpendicolare a quello contenente l'arco direttore del livello a bolla d'aria;*

2° *Che uno dei fili micrometrici sia orizzontale e verticale l'altro;*

3° *Che questo filo orizzontale passi per l'asse di rotazione del cannocchiale;*

4° *Che l'asse ottico del cannocchiale sia orizzontale.*

1ª *Verificazione.* Il processo che conduce alla prima verificazione è quello stesso già indicato per altri strumenti ed è fondato su principii già lungamente spiegati, per cui non occorre il ripeterlo, e solo convien ricordare che si opera la correzione muovendo in parte la vite *v* annessa al livello a bolla d'aria, ed in parte, o le viti del triangolo nella cui direzione trovasi il livello medesimo, se trattasi di uno strumento come quello della figura 236, o la vite V, se trattasi di uno strumento come quello della figura 234.

2ª *Verificazione.* Un filo del micrometro è orizzontale se, girando lo strumento intorno al proprio asse reso verticale, il piano di collimazione determinato da quel filo passa costantemente per un medesimo oggetto, per esempio, per il punto centrale dello scopo. Se ciò non ha luogo il filo sperimentato non è orizzontale, e si riduce per tentativi, muovendo una vite annessa al sostegno del cannocchiale, che, agendo contro un ritegno *r* (*fig.* 236) infisso nel cannocchiale medesimo, serve a portare il filo all'orizzontalità perfetta. Il cannocchiale oltre il ritegno *r* ne ha ha sempre un altro *r'*, per modo che, appoggiando quest'ultimo contro una vite *u* unita all'altro sostegno, si ha una seconda posizione orizzontale del medesimo filo. Verificata la orizzontalità di un filo, si acquista la certezza della verticalità dell'altro, collimando ad un filo a piombo.

3ª *Verificazione.* Per riconoscere se è verificata la terza condizione, portisi lo strumento in un dato punto A (*fig.* 237) del terreno, e la mira in un altro B distante dal primo di 150 o 200 metri, secondo la portata del cannocchiale. Rivolgasi il cannocchiale su questa e si faccia portare lo scopo in C all'altezza del filo orizzontale. Se, dopo aver girato il cannocchiale di 180° intorno a sè stesso, il medesimo filo copre ancora la riga dello scopo, l'accennata condizione sarà verificata; in caso contrario, nol sarà. — Infatti, considerando la figura 238, si vede chiaramente che se il filo *ab* non passa per l'asse di rotazione *cd* del cannocchiale, dopo il mezzo giro si porterà in *a' b'*, e la visuale, che prima colpiva in C al disotto dell'asse *c*D, ora passa al disopra di una quantità $\overline{C'D} = \overline{CD}$; cosicchè si può anche conchiudere che a fare la correzione basta muovere il filo micrometrico orizzontale in modo da correggere la metà della differenza osservata, la qual cosa si può fare, o per tentativi, ripetendo la prova finchè la terza condizione sia verificata, oppure tenendo conto delle due quote $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$ che si possono valutare sulla mira, deducendo $\overline{BD} = \overline{BC} + \frac{\overline{BC'} - \overline{BC}}{2} = \frac{\overline{BC} + \overline{BC'}}{2}$, collocando lo scopo a quest'altezza media e spostando il già accennato filo, finchè esso copra la linea di fede.

4ª *Verificazione.* Si effettua l'ultima verificazione collimando pure alla mira portata a 150 o 200 metri di distanza dallo strumento. Allorquando la linea di fede nella posizione C (*fig.* 237) è coperta dal filo orizzontale del reticolo, levasi il cannocchiale da' suoi sostegni e, dopo d'avervelo riposto con inversione dei suoi estremi, si rota di mezzo giro l'intero strumento. Se in questa nuova posizione il filo orizzontale copre la linea fiduciale dello scopo, la quarta condizione è verificata, diversamente non lo è. La correzione poi si eseguisce: per tentativi, innalzando o abbassando colla vite *m* (*fig.* 234 e 236) il sostegno mobile finchè la metà dell'errore sia corretto, e seguitandola prova finchè ogni differenza sia scomparsa; oppure prendendo la media aritmetica fra le due quote $\overline{BC}$ e $\overline{BC'}$, e portando lo scopo a quest'altezza media, facendo apparentemente coincidere il filo micrometrico orizzontale colla linea di fede, sempre muovendo l'ultima accennata vite.

Per dare una ragione di questo procedimento, supponghasi che OD (*fig.* 241) rappresenti la orizzontale condotta per l'intersezione dell'asse verticale dello strumento coll'asse ottico del cannocchiale; che EF rappresenti la posizione inclinata primitiva di questo e che il suo prolungamento vada a colpire lo scopo in C dando per quota $\overline{BC}$. Se, dopo aver levato il cannocchiale da'suoi collari, dopo di averlo capovolto in modo che l'estremo E venga al posto dell'estremo F, ed F al posto di E, si fa rotare tutto lo strumento, l'asse ottico descrive una superficie conica, e si dispone secondo E'F' in modo da colpire lo scopo in C'. Ciò premesso, essendo l'angolo COD eguale all'angolo C'OD, la retta OD perpendicolare a CC' e quindi il triangolo COC' isoscele sulla base $\overline{CC'}$, si avrà $\overline{DC} = \overline{DC'}$ ed anche $\overline{BD} = \overline{BC} + \frac{\overline{BC'} - \overline{BC}}{2} = \frac{\overline{BC} + \overline{BC'}}{2}$, il qual risultato conferma l'esattezza del processo seguìto per rettificare lo strumento.

Un livello a bolla d'aria con cannocchiale amovibile dai suoi collari, che non soddisfi alla terza ed alla quarta condizione, può ancora servire a determinare esattamente la quota di un punto qualunque del terreno, purchè, collimato una prima volta alla mira verticalmente posta in questo punto e letta la quota, si levi il cannocchiale da' suoi sostegni, si capovolga in modo che la sua superficie superiore diventi inferiore e si roti di mezzo giro l'intiero strumento, si legga nuovamente la quota corrispondente alla novella posizione del filo orizzontale del micrometro, e si prenda la media aritmetica delle due letture. L'esattezza di questo modo di procedere è una conseguenza di quanto si è detto parlando della 3ª e 4ª verificazione.

152. **Verificazioni e rettificazioni del livello a circolo.** — Per verificare il livello a circolo, convien prima verificare il livello a bolla d'aria ed orizzontare quindi il circolo, seguendo in una tale operazione quanto si disse in planimetria parlando dei goniometri.

Fatto questo, può l'operatore accertarsi se uno dei fili micrometrici è orizzontale colla regola già data al numero antecedente; ed in caso che sia necessaria la rettificazione, si gira a dritta o a sinistra un anello, entro cui stanno i fili, in modo da correggere l'osservata deviazione.

Dopo di ciò, si colloca successivamente il cannocchiale sul circolo, appoggiandolo colle due facce inferiori e superiori dei prismi p, p' (*fig.* 240), i quali saranno di egual altezza, tuttora che il livello su essi disposto accusi l'orizzontalità. Se ciò non avviene, lo strumento è difettoso, e per correggerlo bisogna toccare colla lima il prisma più lungo.

Supposti i due prismi di egual altezza, altro non avrassi a fare che dirigere la visuale ad una mira nelle due posizioni che può prendere il cannocchiale, ed osservare se il filo orizzontale batte alla medesima altezza: nel caso che ciò avvenga, l'asse ottico del cannocchiale sarà evidentemente orizzontale, siccome parallelo al piano del circolo già reso orizzontale; ed in caso contrario, si farà l'opportuna correzione girando le viti del reticolo in modo da correggere la metà dell'errore osservato.

Un livello a circolo orizzontato ed avente i due prismi del cannocchiale di egual altezza, può servire alla determinazione di quote esatte senza che sia verificata l'ultima condizione. Basta perciò leggere due volte la quota di ciascun punto ponendo il cannocchiale sul circolo mediante due facce opposte dei prismi.

153. **Verificazione e rettificazione dei livelli a cannocchiale fisso.** — Scelti sul terreno due punti A e B (*fig.* 242) non di li-

vello, la cui distanza sia di circa 200^m, si porti lo strumento in uno di essi; riducasi la bolla d'aria ad essere centrata; e, determinata l'insersezione A della verticale passante pel centro dell'oculare colla superficie del terreno, misurisi l'altezza $\overline{AC}=a$ e si legga la quota $\overline{BD}=b$. Si porti dopo lo strumento in B in modo che questo ed il centro dell'oculare siano in una stessa verticale BE; si riduca nuovamente la bolla d'aria ad essere centrata; si misuri l'altezza $\overline{BE}=a'$ e si legga la quota $\overline{AF}=b'$. Se $b-a=b'-a'$, lo strumento è rettificato, perchè questo non può generalmente avvenire, a meno che le due visuali CD ed EF siano orizzontali. Nel caso che ciò non succeda, si rettificherà lo strumento, facendo in modo che, essendo centrata la bolla, l'asse ottico segni la direzione della orizzontale EK, il che si potrà fare quando si conosca $\overline{AK}=x$.

Osservisi perciò che le due visuali CD ed EF, dirette nel mentre la bolla d'aria trovasi in un medesimo sito del proprio tubo, sono due rette d'egual pendenza. Consegue da ciò che i due triangoli FGC, EGD sono isosceli sulle rispettive basi $\overline{CF}$ ed $\overline{ED}$, e che si può quindi avere

$$\overline{AI}=\frac{a+b'}{2}, \qquad \overline{BH}=\frac{a'+b}{2};$$

cosicchè la differenza di livello fra i punti A e B è

$$\overline{AL}=\overline{AI}-\overline{BH}=\frac{a+b'}{2}-\frac{a'+b}{2}=\frac{a+b'-a'-b}{2}$$

d'onde si ricava

$$\overline{AK}=\overline{AL}+\overline{LK}=\frac{a+b'-a'-b}{2}+a'=\frac{a+b'+a'-b}{2}.$$

154. **Portata dei livelli a cannocchiale.** — La portata di un livello a cannochiale deve generalmente essere minore della portata del cannocchiale medesimo, considerato come unico mezzo per far chiaramente discernere gli oggetti in lontananza. La sensibilità della bolla d'aria, dipendente dal raggio della curva direttrice della superficie del tubo che la racchiude, e la difficoltà di ben centrarla, sono cause di lievi errori e trascurabili, finchè si tratta solo di piccole distanze. Chiamando X la distanza orizzontale $\overline{AB}$ (*fig.* 243) del livello alla mira, a l'errore mn che inevitabilmente si commette

nello stimare la posizione della bolla, e per cui l'asse ottico invece della direzione orizzontale A B segue l'altra inclinata A D, r il raggio di curvatura della superficie interna del tubo, ed e l'errore $\overline{BD}$ prodotto nella quota, si ha dai due triangoli ABD, mOn, che si possono supporre simili,

$$X = \frac{re}{a}.$$

Ponendo in questa formoletta $a = 0^m,0001$, $r = 10^m$, $e = 0^m,001$, si ricava $X = 100^m$.

In ogni caso però la portata più vantaggiosa di un livello a bolla d'aria con cannocchiale, si determina dietro considerazioni che dipendono dalla bontà dello strumento e dalla natura del lavoro da eseguirsi. Le portate comprese fra 75 e 100 metri dànno generalmente buoni risultati.

Livellazione longitudinale.

155. **Livellazione longitudinale semplice per trovare la differenza di livello di due punti.** — Essendo A e B (*fig.* 244) due punti la cui distanza non ecceda la doppia portata del livello che vuolsi impiegare, si determinerà l'altezza dell'uno sull'altro, facendo stazione in un punto C posto circa ad egual distanza dai medesimi. Dato un colpo di livello sulla mira collocata verticalmente in A, si marcherà la quota letta, e dato un secondo colpo di livello sulla mira portata in B, si marcherà pure la quota di quest'ultimo : la differenza di queste due quote darà quanto si cerca. — Nel fare una tale operazione non è necessario collocarsi collo strumento nella direzione AB, e si soddisferà alla condizione di andare ad egual distanza dai punti a livellarsi, procurando di stare per quanto si può sulla perpendicolare condotta pel mezzo dell'accennata retta.

Se fra i punti A e B (*fig.* 245) vi è un ostacolo che, senza impedire di dirigere le visuali, non permette di far stazione a metà della loro distanza, si può portare il livello in A, misurare l'altezza $\overline{AA'}$ dello strumento fino alla linea di livello A'B', determinare la quota $\overline{BB'}$ e fare la differenza $\overline{BB'} - \overline{AA'}$.

In quest'ultimo caso, se la distanza orizzontale dei due punti A e B è maggiore di 300^m, gli errori dovuti alla sfericità ed alla rifrazione terrestre possono divenire di qualche entità, epperciò è sempre miglior partito operare come segue: disposto il livello in guisa che la visuale con esso condotta intersechi la verticale di A (*fig.* 246), misurisi l'altezza $\overline{AC}$ dello strumento, si collimi alla mira posta in B, e se ne legga la quota $\overline{BD}$. Similmente, collocato il livello in B colle avvertenze avute in A, si misuri l'altezza $\overline{BE}$ e si legga la quota $\overline{AF}$. Dietro quanto si disse nel numero 153, la differenza $\frac{\overline{AF}+\overline{AC}}{2} - \frac{\overline{BD}+\overline{BE}}{2}$ esprimerà di quanto il punto A è più basso del punto B. — Quest'ultima maniera di livellare rende nulli anche gli errori che possono provenire dalle imperfezioni del livello, e costituisce il metodo della *livellazione reciproca*.

156. Livellazione longitudinale semplice per rilevare il profilo del terreno. — Fra tutte le livellazioni longitudinali, la più importante è quella che ha per oggetto di far conoscere la forma del terreno. In tali operazioni i punti a livellarsi si determinano con picchetti piantati a fior di terra, e solo la giudiziosa scelta dei medesimi, col prenderli dove sensibilmente cangiano le pendenze del terreno, può condurre a soddisfacenti risultati. — Se sopra una linea AF (*fig.* 247) del terreno esistono più punti A, B, C, D, E, F, aventi da un punto S distanze che non eccedono la portata dello strumento, andando in questo e dirigendo delle visuali sulla mira portata successivamente in quelli, si determineranno le quote $\overline{AA'}=i$, $\overline{BB'}=i'$, $\overline{CC'}=i''$ ecc., che, marcate su un abbozzo (*fig.* 248) o su un registro, unitamente alle distanze orizzontali d', d'' ecc., che esistono fra A e B, B e C ecc., serviranno a costrurre il profilo del terreno.

157. Livellazione ridotta ad un comune piano di paragone, e cangiamento di piano di paragone in una livellazione semplice. — Più punti, su cui venne fatta una livellazione longitudinale, diconsi riferiti ad uno stesso piano di paragone allorquando si hanno le loro distanze da un piano orizzontale, preso generalmente in guisa che tutti i punti risultino al disotto o al disopra di esso. Tali distanze si chiamano generalmente *ordinate* e talvolta anche *quote*. La retta A'F' (*fig.* 248), che rappresenta il piano orizzontale determinato dal livello, si può ritenere, nell'accennato caso, come rappresentante un piano di paragone, ed è anche facile l'avere le ordinate dei punti livellati per rapporto ad un nuovo piano posto al di sopra di A, della quantità $\overline{AA''}=h$. S'immagini perciò prolungata la verticale del punto A fino in A'', incontro colla superficie di livello, distante da A della quantità h. Se si fa la differenza $\overline{AA''}$

$-\overline{AA'}=h-i$, si ha $\overline{A'A''}$ che esprime la distanza del nuovo piano di paragone da A'F'; e se finalmente ad $\overline{A'A''}=h-i$ si aggiungono rispettivamente i', i'' ecc., si avranno in $\overline{BB''}=h-i+i'=h'$, $\overline{CC''}=h-i+i''=h''$ ecc., le ordinate richieste.

Se il piano di paragone dovesse essere al disotto, come in A''' F''', si avrebbe la distanza dei due piani A'F' ed A'''F''' aggiungendo all'ordinata prestabilita $\overline{AA'''}$ del primo punto la quota letta $\overline{AA}$, e togliendo successivamente da questa somma le $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ ecc.

Se l'ordinata tutta cognita $\overline{AA''}$ o $\overline{AA'''}$, che determina il piano generale di paragone, invece di essere quella del primo punto, è quella di qualunque altro, non vi sarà differenza alcuna nell'applicazione delle esposte regole, e si avrà solo l'avvertenza di procedere ordinatamente, prima al calcolo delle ordinate dei punti che sono da una parte, e poi al calcolo delle ordinate dei punti che sono dall'altra.

In moltissimi casi della pratica si presenta la circostanza di non poter scegliere a piacimento il piano di paragone, per cui facilmente avviene il caso di avere un piano di paragone passante un po' al disopra e un po' al disotto dei punti che ad esso voglionsi riferire. In simile evenienza, fissato il piano di paragone mediante la sua distanza da un punto livellato, positiva o negativa secondo che esso punto è al disotto o al disopra, si toglierà da questa la quota dello stesso punto per rapporto all'orizzontale d'operazione; e, avuta così la distanza delle accennate due linee di livello (che sarà sempre negativa nel caso di una livellazione semplice), vi si aggiungeranno le quote lette sul terreno, e le somme, secondo che risultano positive o negative, indicheranno essere i punti al disotto o al disopra del piano di paragone.

158. **Disegno dei profili.** — Conosciute le ordinate dei varii punti livellati per rapporto ad un piano di paragone, non che le loro distanze orizzontali, con tutta facilità si può costrurre il profilo: così, per costrurre quello del terreno rappresentato nella figura 248, si condurrà una retta $a''x$ (*fig.* 249), su questa si porteranno in una certa scala le distanze $\overline{a''b''}=\frac{l}{n}d'$, $\overline{b''c''}=\frac{l}{n}d''$ ecc.; pei punti a'', b'', c'' ecc. s'innalzeranno tante perpendicolari, e determinando queste di lunghezza $\overline{a''a}=\frac{l}{n}h$, $\overline{b''b}=\frac{l}{n}h'$, $\overline{c''c}=\frac{l}{n}h''$ ecc., si avranno i punti a, b, c ecc., che uniti fra di loro, daranno il profilo del terreno.

Nel disegnare i profili, si prendono generalmente le ordinate in iscala maggiore di quella adottata per le distanze orizzontali, e ciò per rendere più evidenti le piccole ineguaglianze del terreno nel senso verticale. Questo cangiamento di scala, indispensabile nei profili di grande lunghezza, e riferentisi a terreni di pianura, ove le ondulazioni sono bene spesso insensibili, ha l'inconveniente di presentare all'occhio una figura alterata nel senso verticale, e quindi si deve assolutamente lasciare, sia nel disegno dei profili di piccola lunghezza, sia nel disegno dei profili che si riferiscono a terreni montuosi.

159. **Livellazione longitudinale composta per trovare la differenza di livello fra due punti**. — Volendosi determinare la differenza di livello fra due punti talmente disposti, che la loro distanza ecceda la doppia portata del livello, si deve adottare una *livellazione composta*, così detta appunto, perchè risulta da più livellazioni semplici, eseguite da diversi luoghi su diversi punti del terreno, e legate tra loro col collimare a ciascun punto due volte, determinando, come si dice, *le battute avanti* e *le battute indietro* o *controbattute;* giacchè col primo nome si chiamano le quote lette guardando nel senso verso cui si procede; col secondo, le altre lette guardando in contrario senso. — Così per determinare la differenza di livello fra i due punti A e B (*fig.* 250), basta successivamente far stazione nei punti S, S', S'' e S''', collocati a circa egual distanza dai punti A e C, C e D, D e E, E e B, e determinare ordinatamente le controbattute c, c', c'' e c''', non che le battute b, b', b'' e b'''. Ciò fatto, si effettuino le somme $c+c'+c''+c'''$ e $b+b'+b''+b'''$; se questa eccede quella, il punto B è più basso del punto A; se il contrario ha luogo, il punto B è più alto di A, e la differenza d'altezza fra questi due punti sarà la differenza fra le due somme accennate. Infatti, siccome la differenza d'altezza fra i punti A e C è $c-b$, quella fra i punti C e D è $c'-b'$, quella fra D ed E $c''-b''$, e quella fra E e B $c'''-b'''$, si conchiuderà che la differenza d'altezza fra gli estremi A e B è costituita dalla somma delle accennate differenze, e che quindi viene espressa da

$$c-b+c'-b'+c''-b''+c'''-b''=(c+c'+c''+c''')$$
$$-(b+b'+b''+b''').$$

Si tien conto delle quote lette, marcandole su un abbozzo o registrandole in due colonne intestate, l'una *battute*, e l'altra *controbattute*.

È rimarchevole che la via da seguirsi per andare dall'uno all'altro dei due punti, di cui vuolsi avere la differenza di livello, può essere qualunque, e che quindi è sempre possibile di scegliere la più facile in modo da evitare gli ostacoli che potrebbe presentare un terreno boschivo, un terreno umido ed attraversato da corsi d'acqua, prendendo anche in considerazione l'esattezza del lavoro che si conseguirà facendo i colpi di livello su punti egualmente distanti dallo strumento, o impiegando il metodo della livellazione reciproca, quando presentasi il caso.

160. **Livellazione longitudinale composta per rilevare il profilo del terreno.** — Determinati con picchetti i punti A, B, C, D ecc. (*fig.* 251), in cui il terreno presenta i cangiamenti più sensibili di forma, e fatto stazione in un punto S, s'incominci dall'eseguire una prima livellazione semplice fra A e D; una seconda da S′ fra D ed F; una terza da S″ fra F ed I, e così si continui a scomporre il lavoro totale in tante livellazioni semplici, legate fra loro col collimare da ciascuna stazione all'ultimo punto già livellato dalla precedente.

Col suesposto procedimento si determina una sola quota per il primo e per l'ultimo punto, e due quote per tutti gli altri punti che limitano le diverse livellazioni semplici. Le quote estreme delle livellazioni semplici, lette guardando nel senso secondo cui si procede e indicate colle lettere b''', b^{v}, b^{viii}, b^{ix}, sono *battute* (*fig.* 252), e *controbattute* quelle c', c'', c''', c^{iv}, lette guardando indietro; le quote b', b'', b^{iv}, b^{vi}, b^{vii} degli altri punti posti fra i limiti delle livellazioni semplici, diconsi *intermedie*.

161. **Calcolo delle ordinate per rapporto ad un sol piano di paragone.** —Volendosi prendere il piano di paragone A″K″ (*fig.*252) al disopra di tutti i punti, si fissi l'ordinata $\overline{\text{AA}''}=h'$ del primo punto, in modo che questa sia maggiore della differenza di livello esistente fra esso ed il punto più alto del terreno. Fatta la differenza $\overline{\text{AA}''}-\overline{\text{AA}'}=h'-c'$, si avrà la distanza della linea di paragone dal piano orizzontale determinato col livello della stazione S (*fig.* 251), e, aggiungendovi le quote $\overline{\text{BB}'}=b'$, $\overline{\text{CC}'}=b''$, $\overline{\text{DD}'}=b'''$ dei punti B, C e D, si avranno rispettivamente, in $\overline{\text{BB}''}=h'-c'+b'=h''$, $\overline{\text{CC}''}=h'-c'+b''=h'''$, $\overline{\text{DD}''}=h'-c'+b'''=h^{\text{iv}}$, le ordinate dei medesimi punti. Nello stesso modo con cui dall'ordinata $\overline{\text{AA}''}$ del punto A si dedusse la distanza $\overline{\text{A}'\text{A}''}=h'-c'$, si può dall'ordinata

$\overline{DD''}$ del punto D, dedurre la distanza $\overline{D_1D''}=h^{\text{iv}}-c''$ fra la linea di paragone ed il piano orizzontale in cui trovansi le visuali guidate col livello dalla stazione S', ed avere quindi le ordinate $\overline{EE''}=h^{\text{iv}}-c''+b^{\text{iv}}=h^{\text{v}}$, $\overline{FF''}=h^{\text{v}}-c''+b^{\text{v}}=h^{\text{vi}}$, per poi passare da quest'ultima ai punti livellali da S'' e continuare così finchè tutta la riduzione sia terminata.

Se le ordinate dei punti si vogliono riferite ad un piano di paragone A'''K''' posto al di sotto dei punti dati, converrà fissarsi l'ordinata $\overline{AA'''}=k'$ del primo punto, in guisa che risulti essa maggiore della differenza di livello fra il primo punto ed il più basso. La somma $\overline{AA'''}+\overline{AA'}=k'+c'$ darà la distanza $\overline{A'''A'}$ del piano di paragone dal piano orizzontale dato dal livello collocato in S, e togliendovi le quote $\overline{BB'}=b'$, $\overline{CC'}=b''$ e $\overline{DD'}=b'''$ dei punti B, C e D, si avranno rispettivamente $\overline{BB'''}=k'+c'-b'=k''$, $\overline{CC'''}=k'+c'-b''=k'''$ e $\overline{DD'''}=k'+c'-b'''=k^{\text{iv}}$, ossia le ordinate dei medesimi punti per rapporto al piano orizzontale di paragone. Ottenuta l'ordinata $\overline{DD'''}$ del punto D, agevole sarà il dedurre la distanza $\overline{D'''D_1}$, come si dedusse $\overline{A'''A'}$, e continuare poscia l'operazione, che non differisce da quella eseguita per il piano di paragone al di sopra se non nel cangiarsi le addizioni in sottrazioni, e viceversa.

In generale, indicando con h l'ordinata del primo punto di una livellazione semplice e con c la sua controbattuta, l'ordinata x di un punto qualunque di questa livellazione semplice di quota b è data da

$$x=h\mp c\pm b,$$

dove i segni superiori valgono pel caso in cui il piano di paragone è al di sopra, ed i segni inferiori pel caso in cui questo piano è al disotto.

Se la livellazione è a sole battute e controbattute, si ottiene ciascuna ordinata togliendo o aggiungendo alla precedente la controbattuta che gli corrisponde, o aggiungendo o togliendo dal risultato ottenuto la battuta del punto che si considera.

Se l'ordinata tutta cognita, che indica l'altezza o la profondità del piano generale di paragone, invece di essere quella del primo punto, è quella di un altro punto, come F, si dividerà l'operazione in due: colla prima si determineranno le ordinate dei punti compresi da F in K, impiegando le norme già esposte; e colla seconda, quelle dei punti compresi da F in A, considerando le battute come controbattute, e viceversa.

Accadendo ben di frequente che una livellazione debba far seguito ad un'altra già eseguita, non rimane libera la scelta del piano di paragone, e può darsi che questo venga a passare un po' al disopra e un po' al disotto dei punti livellati. In questo caso, qualora si convenga di contare come positive le ordinate dei punti posti al disotto del piano di paragone, bisognerà considerare come negative quelle dei punti collocati al disopra, ed il modo più facile per calcolarle è quello di aumentare l'ordinata del punto di partenza di un numero arbitrario, sufficientemente grande per fare in modo che il piano orizzontale passante pel suo estremo sia al disopra dei punti livellati; di calcolare le ordinate per rapporto a questo piano, e di diminuirle tutte dell'aumento fatto, ritenendo che le differenze positive saranno ordinate spettanti a punti posti al disotto del piano di paragone, e le negative ordinate di punti posti al disopra.

Ben di frequente i dati presi sul terreno, ed i calcoli onde ridurre una livellazione longitudinale ad un comune piano di paragone, si pongono in apposito registro come quello che qui si riporta.

PUNTI LIVELLATI	DISTANZE ORIZZONTALI	QUOTE LETTE			ORDINATE dei piani di mira	ORDINATE dei punti livellati	OSSERVAZIONI
		Battute	Intermedie	Controbattute			

Questo registro è fatto in modo che la prima colonna contiene i punti livellati; la seconda, le loro distanze orizzontali; la terza, quarta e quinta, tutte le quote lette; la sesta, le distanze dei piani orizzontali determinati col livello dal piano di paragone; la settima, le ordinate per rapporto al piano di paragone; e l'ultima finalmente, tutte quelle annotazioni che sono richieste dalla natura del lavoro per cui s'intraprende la livellazione.

162. **Livellazione longitudinale su terreni ingombri d'ostacoli.**

Nell'andamento di una livellazione longitudinale ben di frequente s'incontrano ostacoli, attraverso ai quali riesce impossibile di dirigere le visuali, ed allora conviene trovar mezzo di collegare la livellazione già eseguita da una parte dell'ostacolo medesimo con quella che rimane da eseguirsi dall'altra. Se supponesi che, nel percorrere un determinato andamento, siasi di già determinata dalla stazione S (*fig.* 253) la battuta del punto B collocato al piede di un muro, si può proseguire l'operazione, ponendo alla sommità del muro medesimo un rigone $b'c$, e rendendolo orizzontale mediante un livello a pendolo o mediante un livello a bolla d'aria. Misurando le verticali $\overline{b'B}$ e $\overline{cC}$, comprese fra la superficie superiore del rigone ed i piedi B e C del muro, si ottengono due quote da riguardarsi, la prima come controbattuta di B e l'altra come battuta di C. Andando dopo col livello in S′ e trovata la controbattuta $\overline{Cc'}$, si prosegue l'operazione coi metodi ordinarii.

Similmente incontrandosi qualche muro di rivestimento, come appare dalla figura 254, s'incomincierà col determinare dalla stazione S la quota del punto B posto al piede del muro medesimo e poscia con un rigone $b'C$, disposto orizzontalmente alla sommità del muro, si troverà la sua altezza $\overline{b'B}$ sul punto B. Stazionando dopo in S′ si darà un colpo di livello sul punto C, e si continuerà l'operazione coi soliti metodi. In tal caso $\overline{Bb'}$ sarà la controbattuta del punto B, e si dovrà stimare come nulla la battuta sul punto C.

163. **Livellazione sui terreni coperti dalle acque**. — Nell'eseguire una livellazione longitudinale si trovano talvolta dei terreni coperti dalle acque, e sovente importa di conoscere la loro profondità ed il profilo del loro letto.

Quando le acque sono poco profonde e poco estese, si tende da da una sponda all'altra, nel senso dell'andamento a livellarsi, una fune graduata AB (*fig.* 255), e un uomo, passando a guado, misura, con un'asta pure graduata, le altezze in diversi siti e legge sulla fune la distanza da un estremo della medesima. La flessione che naturalmente subisce la fune, fa sì che le distanze lette non risultino esattissime, e tanto più questo ha luogo nelle acque correnti dove, oltre l'incurvamento che la fune subisce per proprio peso, ad un altro va soggetta dovuto alla forza dell'acqua, per cui non può mantenersi nel vero piano verticale dell'andamento a livellarsi. Le altezze corrispondenti alla parte immersa dell'asta, sempre riferite ad una medesima orizzontale in un'acqua stagnante e in un canale in cui l'andamento che si livella è normale al suo asse, come tali si possono ritenere, quantunque rigorosamente nol siano, anche nel caso di una livellazione eseguita obliquamente all'accennato asse, a meno che questa obliquità sia grande, e notevole la differenza di livello nel pelo dell'acqua ai due estremi dell'allineamento che si percorre.

Se le acque si estendono molto, e se grande è la loro profondità, convien usare della *sonda* o *scandaglio*, che si compone generalmente di una fune graduata avente ad una sua estremità un corpo pesante. La sonda usata in marina è una piramide tronca (*fig.* 256) di piombo o di ghisa, avente alla sua base una cavità profonda circa $0^m,05$ che si riempie di sego; alla base superiore è munita di un uncino al quale si ferma la fune graduata, che ha ordinariamente la lunghezza di 200^m. Il peso del piombo o della ghisa varia da uno scandaglio all'altro ed arriva talvolta fino a 40 chilogrammi. Il sego che si colloca nella cavità della piramide è destinato a ritenere, nell'atto dell'operazione, alcune particelle di sabbia o di melma, e far così conoscere la natura del fondo scandagliato. L'operatore si accorge che lo scandaglio tocca il fondo appena non deve far sforzo alcuno per sostenere il peso.

Per scandagliare un terreno, coperto da acque profonde, in una data direzione UV (*fig.* 257), è necessario portarsi con una barca in diversi siti, tenersi per quanto si può nel prestabilito allineamento, abbassare la sonda, osservare la lunghezza della fune immersa appena il peso tocca il fondo e determinare la posizione del punto di scandaglio. Per quest'ultima operazione si usano diversi mezzi. Un operatore con un goniometro o con un goniografo può collocarsi in un sito la cui posizione è già determinata per rapporto all'allineamento che si livella, e prendere l'angolo che la visuale diretta da esso ad un segnale, che trovasi nella barca all'atto dell'abbassamento della sonda, fa con un allineamento già stabilito. A motivo della difficoltà di poter venire colla barca nella direzione UV, si ottiene maggior precisione colle operazioni simultanee fatte da due persone a terra, le quali, ad un segnale dato dall'operatore che adopera la sonda, dirigono ciascheduno un raggio visuale ad un punto di mira della barca, che così rilevano per intersezione.

Un punto di scandaglio si può anche determinare senza altri strumenti diversi dalle canne e dalle paline. Supposto che sia M il punto di cui vuolsi determinare la posizione, s'incomincierà dal tracciare su una riva un allineamento AX e dal prendere sull'altra un punto B, già fissati o facili a fissarsi sul piano dell'andamento che si livella; dirigendosi quindi da X verso il punto fisso A, l'operatore si fermerà in C, tostochè si troverà sull'allineamento del punto M e del punto cognito B situato sull'altra sponda. Misurando la distanza $\overline{AC}$ e riportandola in iscala sul piano, si potrà tirare la retta rappresentativa di CB che, intersecando quella rappresentativa di UV, darà il punto richiesto, qualora la barca siasi mantenuta nella direzione UV. A meglio fissare il punto di scandaglio, un secondo operatore si porterà sull'altra sponda e, percorrendo un determinato allineamento BY, camminando da Y verso B, determinando il punto D tosto che giunge nella direzione MA e misurando la distanza $\overline{BD}$, somministrerà i dati per riportare sul piano del terreno che si livella la retta rappresentativa di AD, che, intersecando la CD, darà il punto domandato.

Un altro metodo per la determinazione del punto di scandaglio si ha usando di tre sestanti graduati. Appena la sonda giugne al fondo dell'acqua, l'operatore che trovasi sulla barca misura con un primo sestante l'angolo fra due punti conosciuti del terreno, e senza occuparsi, per il momento, della lettura, osserva rapidamente con un secondo sestante l'angolo fra uno di questi punti ed un terzo egualmente cognito; e finalmente impiega il terzo sestante, come mezzo di verificazione, a misurare l'angolo intero che comprende i due precedenti. Fatte le osservazioni, si leggeranno sui sestanti gli angoli che, per mezzo dei segmenti capaci (num. 115), serviranno a fissare sul piano il punto scandagliato.

Livellazione longitudinale e trasversale.

164. **Tracciamento e rilevamento della proiezione orizzontale dei profili trasversali e del profilo longitudinale e livellazione dei medesimi.** — Vogliasi, per esempio, livellare la striscia di terreno rappresentata nella figura 258; e la pianta del suo profilo longitudinale, detto *linea d'operazione*, sia quella passante pei punti I, II, III ecc., determinati con picchetti. Incominciando dal punto I, si innalzi una perpendicolare alla linea d'operazione; tanto a destra, quanto a sinistra di questa, per un tratto eguale o disuguale, secondo lo scopo del lavoro, si determinino su quella i punti di *ineguaglianza*, e si misurino le distanze che essi hanno fra loro o dal punto I. Quanto venne fatto nel punto I si ripeta ordinatamente in tutti gli altri, misurando, di mano in mano che si procede, le distanze che tutti i punti I, II, III ecc. hanno fra loro, ed avvertendo di dividere per metà gli angoli che fanno i lati del profilo longi-

tudinale concorrenti nei punti II e IV. Quest'operazione d'innalzare perpendicolari, di segnare bissettrici e di determinare con picchetti tanto sulle une, quanto sulle altre i punti d'ineguaglianza, dicesi *tracciamento delle sezioni trasversali;* e l'altra che generalmente si fa procedere di pari passo colla prima, consistente nel fissare le posizioni dei diversi picchetti mediante misure di distanze orizzontali e di angoli, dicesi *rilevamento dei profili trasversali.* — Dalla citata figura si vede qual sia il tracciamento dei profili trasversali, e quali i punti d'ineguaglianza indicati con segni rotondi neri. Dalla figura 259 appare quali sieno le misure prese per il rilevamento della pianta del profilo longitudinale e dei profili trasversali, ed essa può servire come modello d'abbozzo per tal genere d'operazioni: così D_1 indica la distanza orizzontale fra i punti I e II del profilo longitudinale; α l'angolo che il lato I e II fa col lato II e III; d_1, d_1', d_1'', d_1''' rappresentano le distanze orizzontali che i punti d'ineguaglianza del primo profilo trasversale hanno dal punto I. — I diversi profili trasversali si denominano generalmente col numero apposto al punto che ciascuno di essi ha comune col profilo longitudinale; così, dicendo il profilo I, il profilo II ecc. s'intenderà il profilo passante pel punto I, pel punto II ecc.

La livellazione del profilo longitudinale e quella dei profili trasversali sogliońsi generalmente eseguire nel medesimo tempo, ed in seguito all'esatta determinazione di alcuni capi-saldi posti lungo la striscia da livellarsi. Per schivare ogni confusione, conviene operare con attenzione, e tenere un ordine invariabile nel dare i colpi di livello. Il processo a seguirsi deve congiungere l'esattezza alla celerità, e, quantunque esso dipenda per la massima parte dalle circostanze locali e dagli strumenti che si adoperano, pure inutili non sono alcuni brevi norme. Collocato il livello in un sito del terreno presso a poco equidistante dai due punti I e II (*fig.* 258), si determini la quota di quello per registrarla in c' (*fig.* 260), prima sull'abbozzo del profilo longitudinale, e poscia su quello dei profili trasversali. Alle rette, numerate questa quota, si conducano le due perpendicolari aa', mm', rappresentanti rispettivamente, quella l'intersezione del piano verticale passante pei due punti I e II col piano orizzontale determinato dal livello, questa l'intersezione del piano verticale del profilo traversale I col medesimo piano orizzontale. Dopo di ciò si trovino ordinatamente le quote b_1, b_1', b_1'', b_1''' dei punti del profilo I, incominciando, per esempio, da quelli posti a dritta dell'operatore quando guarda il punto I, e venendo poscia agli altri collocati a sinistra. Registrate le quote di tutti i punti del primo profilo trasversale, si dia un colpo di livello sul punto II, e la battuta b' si marchi sull'abbozzo del profilo longitudinale. Fatto questo, si porti il livello fra i punti II e III: dopo di aver determinata la controbattuta c'' del punto II, per collegare la livellazione che vuolsi fare dalla seconda stazione con quella eseguita dalla prima, si trovino, come si disse pel profilo I, le quote di tutti i punti del profilo II; e, continuando a venire fra due dei punti determinati sulla linea d'operazione, si livellino da ciascuna stazione il profilo trasversale che si lascia indietro ed un punto del successivo, avvertendo che i due ultimi profili vanno livellati da un medesimo sito.

Allorquando i profili trasversali sono molto vicini fra di loro se ne possono anche livellare due o più da una sola stazione; così nel caso ora trattato i profili II e III vennero livellati dalla seconda stazione, e i profili IV e V dalla terza.

Può anche darsi che i profili trasversali siano molto lunghi, per modo che sia impossibile l'avere da una stazione le quote di tutti i loro punti. Allora si opererà come per livellare i profili longitudinali, determinando cioè, una serie di battute avanti, intermedie e indietro. Questo caso avviene ben di frequente nell'esecuzione di un progetto di strada la cui giacitura non è ancora ben determinata: per la livellazione longitudinale suolsi generalmente impiegare un buon livello a cannocchiale; per le livellazioni trasversali un livello ad acqua, ed in ogni sezione trasversale si livella un punto che appartiene al profilo longitudinale.

165. **Riduzione di una livellazione longitudinale e trasversale ad un sol piano di paragone.** — Quanto si disse nel numero 161 sul modo di trovare le ordinate dei varii punti di una livellazione longitudinale, per rapporto ad uno stesso piano di paragone, è applicabile pure ad una livellazione longitudinale e trasversale. Anche qui, non altrimenti che nei profili longitudinali, si hanno tante livellazioni semplici collegate fra loro, col determinare da ciascuna stazione la quota di un punto livellato dall'antecedente; e, indicando con h l'ordinata cognita di un punto qualunque di una livellazione semplice per rapporto al piano di paragone, con c la sua quota determinata sul terreno, con b la quota di un altro punto qualunque spettante alla medesima livellazione semplice, si trova la sua ordinata incognita x colla formola

$$x = h \mp c \pm b,$$

valendo i segni superiori pel caso del piano di paragone al disopra, ed i segni inferiori per quello del piano di paragone al disotto.

In tale operazione si fissa generalmente ad arbitrio l'ordinata del primo punto del profilo longitudinale. Supposto che AE rappresenti il piano di paragone, e che h' sia l'ordinata del punto I (*fig.* 260), si fa la differenza $h'-c'$ per avere in essa la distanza $\overline{Aa}$ fra il piano di paragone e quello delle visuali orizzontali, condotte col livello dalla prima stazione. Aggiungendo all'accennata differenza le quote b_1, b_1', b_1'', b_1''' del profilo trasversale I, si hanno le ordinate di tutti i suoi punti; e aggiungendo alla medesima differenza la quota b' del punto II, si ha nella somma l'ordinata di questo punto. Col processo tenuto per passare dall'ordinata h' del punto I a quelle di tutti i punti del suo profilo trasversale, si può pervenire al calcolo delle ordinate dei punti del profilo II, per poi compiere quelli relativi ai profili III, IV ecc., e per giugnere finalmente ad avere l'intera livellazione ridotta ad un sol piano di papagone.

Il comun piano di paragone si sceglie alcune volte al disopra, alcune volte al disotto dei pnnti livellati; e ben di frequente usasi di riferire le ordinate del profilo longitudinale ad un certo piano di paragone, e quelle dei profili trasversali a piani differenti passanti pei punti che essi hanno comuni col profilo longitudinale.

I risultati ottenuti sul terreno e quelli della riduzione ad un comune piano di paragone si possono anche registrare in un casellario, e per tale oggetto può servire quello che immediatamente si riporta, dove le intestazioni stesse apposte alle diverse finche sono ben sufficienti a far comprendere quali numeri si devono marcare in ciascuna di esse.

PUNTI DELL'ASSE	DISTANZE dei punti dell'asse	ANGOLI dei lati dell'asse	QUOTE LETTE SUI PUNTI DELL'ASSE			Distanze dei punti dei profili trasversali da quelli dell'asse		QUOTE LETTE sui profili trasversali	ORDINATE dei piani di mira	ORDINATE dei punti livellati	OSSERVAZIONI
			Battute	Intermedie	Controbattute	A diritta	A sinistra				

Se i profili trasversali sono talmente lunghi da necessitare anche per essi una livellazione composta, si fa da solo il casellario pel profilo longitudinale, e separatamente tanti altri quanti sono i profili trasversali, avvertendo di notare qual è il punto che ciascun profilo trasversale ha comune col profilo longitudinale, onde avere l'indispensabile loro collegamento.

166. **Costruzione dei profili.** — Per riguardo alla costruzione del profilo longitudinale valgano le norme già date al numero 158, e per quella dei profili trasversali si tengano presenti queste avvertenze: se sono corti, si prendano tanto le distanze orizzontali quanto le ordinate nella stessa scala, scelta di tal rapporto che si possano scoprire le accidentalità del terreno; se sono assai lunghi, s'impieghi una certa scala per le ordinate, ed un'altra minore per le distanze orizzontali; se il numero dei profili trasversali è grande e se necessita restringere lo spazio da essi occupato, si riferiscano le ordinate dei loro punti al piano orizzontale determinato dal loro incontro col profilo longitudinale, distinguendo col conveniente segno quelle che sono positive da quelle che sono negative; finalmente la delineazione dei profili trasversali sia in tutto eguale a quella del profilo longitudinale.

Livellazione raggiante.

167. **Norme per eseguire una livellazione raggiante.** — Ogni livellazione raggiante deve essere preceduta da un esatto rilevamento del terreno e di tutti i punti che si vogliono livellare; e l'operatore deve munirsi del piano del luogo, o almeno di un abbozzo prima di dar mano alla determinazione delle quote. Volendosi livellare il terreno rappresentato nella figura 261 (dove i punti d'ineguaglianza sono indicati da segni rotondi e neri), s'incomincia dallo scegliere un punto S′, da cui risulti visibile il maggior numero possibile dei punti da livellarsi, e dirette le visuali orizzontali sulla mira, collocata in tutti quelli la cui distanza non eccede la portata del livello, si determinano le quote che tutte s'inscrivono, o sull'abbozzo del piano medesimo accanto al punto cui esse corrispondono, oppure su un registro come quello di cui si dà il modulo.

STAZIONI	PUNTI LIVELLATI	QUOTE LETTE	ORDINATE dei piani di mira	ORDINATE dei punti livellati	OSSERVAZIONI

Ciò fatto, si sceglie un'altra stazione S'', da cui risulti visibile il maggior numero possibile degli altri punti da livellarsi, non che uno di quelli già livellati dalla stazione S', qual è, ad esempio, il punto 4; dato un colpo di livello su questo e su tutti gli altri punti situati nel limite della portata dello strumento, si registrano ordinatamente le loro quote. Se la grandezza del terreno lo richiede, si fanno altre stazioni in S''', S^{IV} ecc., coll'indispensabile avvertenza di determinare da ciascuna di esse la quota di almeno uno dei punti già livellati da una delle antecedenti. Quando le quote lette si vogliono registrare sul piano del luogo, è necessario controsegnarle con appositi indici, onde non confondere quelle determinate da una stazione con quelle determinate da un'altra.

168. **Riduzione di una livellazione raggiante ad un sol piano di paragone**. — Colla scorta del registro o dell'abbozzo fatto in campagna, riesce agevole il determinare di quanto i varii punti livellati sono al disotto o al disopra di un piano di paragone mediante la nota formola

$$x = h \mp c \pm b.$$

Così, volendo che questo piano di paragone sia al disopra del punto 1 della quantità h', vi si toglierà la quota b' determinata dalla prima stazione, e si avrà la differenza $h' - b'$ che indicherà di quanto il piano orizzontale, contenente le visuali condotte col livello, dista dal piano orizzontale di paragone. Aggiungendo successivamente all'accennata differenza le quote b', b''' ecc. dei punti 2, 3 ecc., si avranno in $h' - b' + b''$, $h' - b' + b'''$ ecc. le depressioni di tutti i punti livellati dalla prima stazione, e quindi anche quella del punto 4, dal quale si dovranno prendere le mosse per calcolare quelle di tutti i punti livellati dalla seconda stazione, per poi passare a quelli livellati della terza, quarta, ecc.

Il registro, che serve in campagna all'iscrizione delle diverse quote, si completa generalmente al tavolino, aggiungendovi le distanze dei piani orizzontali condotti col livello dal piano di paragone, non che le ordinate di tutti i punti sottoposti alla livellazione per rapporto a quest'ultimo.

169. **Piano quotato.** — Inscrivendo sul piano del luogo, e accanto a ciascun punto, la sua ordinata, si ha un *piano quotato*. Mediante un tal piano, si possono riconoscere le differenze di livello dei punti in esso rappresentati. Se il piano di paragone è al disopra, i punti di minor quota sono i più alti; il contrario ha luogo quando il piano di paragone è al disotto. Nel caso in cui alcuni punti siano al disopra, ed alcuni altri al disotto, converrà collocare innanzi alle loro quote il segno conveniente.

Questo metodo dei piani quotati è il solo da impiegarsi in alcune opere speciali: esso si usa principalmente per i dettagli che si descrivono meglio e più utilmente colle proiezioni dei loro contorni, che con un'elevazione; ed in generale torna utile per rappresentare tutti quegli oggetti che occupano sul piano uno spazio considerevole, e che sono poco elevati o depressi sul livello del suolo.

Metodo delle curve orizzontali.

170. **Problemi preliminari al metodo delle curve orizzontali.** — A ben apprendere il metodo da seguirsi per il tracciamento delle curve orizzontali, valgono i seguenti problemi.

I. *Tracciare sul terreno una linea di livello passante per un punto dato* A.

Collocato in stazione il livello a distanza dal punto dato A non maggiore della sua portata, si determini la quota di questo, e senza muovere lo scopo, si faccia portare la mira su diversi punti del terreno, finchè la visuale passi per la linea di fede; il piede della mira darà allora un punto della linea domandata. Operando così, si possono fissare diversi punti collocati nel limite che conviene alla portata del livello. Raggiunto questo, si va in una nuova stazione e, fatta una battuta indietro su uno dei punti già livellati, generalmente sull'ultimo, si usa della mira così disposta per determinare altri punti. Questo processo, ripetuto più volte, può condurre a fissare quanti punti si vogliono tutti di livello, e quindi a determinare una curva orizzontale.

II. *Dato un punto* A, *trovare un altro punto* B, *la cui differenza di livello col primo sia una quantità cognita* d.

Collocato il livello a conveniente distanza da A, se ne determini la quota q; si porti lo scopo all'altezza $d+q$ o $d-q$, secondo che il punto a determinarsi deve essere più basso o più alto del punto dato ; si faccia finalmente trasportare la mira finchè la visuale condotta pel livello ferisca la linea di fede, ed il piede della mira darà il punto voluto.

Qualora $d+q$ risulti maggiore dell'altezza della mira, o $d-q$ risulti negativa, converrà scegliere uno o più altri punti, e determinare la loro differenza di livello per rapporto al primo, finchè se ne trovi uno che disti talmente dal punto cercato da potersi questo fissare per rapporto a quello, come si spiegò di sopra. Per ben comprendere quest'operazione, supponiamo che abbiasi il punto A (*fig.* 262), e che al disotto vogliasi trovare un punto B tale che l'altezza del primo sul secondo sia di 5^m. Portato il livello fra il punto A ed un altro punto C, si trovino le loro quote $\overline{Aa}=0^m,50$ e $\overline{Cc}=2^m,50$; la differenza d'altezza sarà $2^m,50-0^m,50=2^m$, ed il punto B dovrà trovarsi al disotto di C di $5^m-2^m=3^m$. Collocato similmente il livello fra C e D, si determini su C la battuta indietro $\overline{Cc'}=0^m,30$, e su D la battuta avanti $\overline{Dd}=2^m,70$, la loro differenza $2^m,70-0^m,30=2^m,40$ esprimerà che il punto D è al disotto di C di $2^m,40$, ed il punto B dovrà essere al disotto di D di $3^m-2^m,40=0^m,60$. Si farà finalmente stazione a poca distanza da D e, letta la battuta indietro $\overline{Dd'}=0^m,70$, si farà la somma $0^m,70+0^m,60=1^m,30$; si disporrà lo scopo all'altezza $1^m,30$; e si cercherà per tentativi quel punto del terreno per cui la linea di fede è colpita dalla visuale orizzontale, e questo sarà evidentemente il punto domandato B.

III. *Trovare il punto più alto o il punto più basso di una linea data.*

Collocato il livello in una località che sia alla portata del sito in cui deve essere il punto più alto o più basso a determinarsi, per esempio in S (*fig.* 263), si fa porre la mira in diversi punti della linea AB : finchè bisogna abbassare o innalzare lo scopo per dare dei colpi di livello in un medesimo senso, è certo che la linea monta o discende ; e quando il contrario ha luogo, è una prova che essa passa dalla salita alla discesa, e viceversa ; quindi il punto C, in cui il porta-mira cessa di abbassare lo scopo, è il più alto di quelli che lo precedono e che lo seguono ; mentre l'altro D, in cui il porta-mira cessa d'innalzare lo scopo, è il più basso.

Può arrivare che su una medesima linea vi siano diversi punti che godono di questa proprietà; per riconoscere quale fra tutti è il più alto e quale il più basso, è necessario di eseguire su essi una livellazione longitudinale, e mettere in confronto le loro ordinate riferite ad un medesimo piano di paragone.

IV. *Trovare il punto più alto o il punto più basso di una superficie.*

In una serie di allineamenti sensibilmente paralleli e sufficientemente vicini, si cerchino i punti più alti e più bassi, e si tracci la curva da essi determinata. Il punto più alto o il punto più basso di questa curva sarà il domandato.

171. Tracciamento delle curve orizzontali. — Un metodo che offre il vantaggio di celerità, facilità ed esattezza nel tracciamento e rilevamento delle curve orizzontali su una piccola porzione di terreno, consiste nel tracciare, secondo la direzione che le circostanze locali indicheranno più conveniente, una serie d'allineamenti paralleli AB, A′B, A″B″ ecc. (*fig.* 264), nel fare una prima stazione col livello nella parte più alta del terreno, e nell'individuare successivamente sugli allineamenti accennati i punti a, a', a'' ecc., pei quali la visuale incontra lo scopo ad una medesima altezza. Trovata una prima serie di punti, si determini sull'allineamento AB un punto b posto al disotto di a della distanza che devono avere le curve orizzontali, e sugli allineamenti A′B′, A″B″ ecc. s'individuino i punti b', b'' ecc. di livello con b. Operando nello stesso modo si avranno i punti c, c', c'' ecc., e, per riportare sul piano le diverse curve orizzontali così tracciate, basta misurare le distanze $\overline{Aa}$, $\overline{A'a'}$, $\overline{A''a''}$ ecc. e $\overline{Ab}$, $\overline{A'b'}$, $\overline{A''b''}$ ecc.

Per tracciare le curve orizzontali su una zona di terreno poco larga ma molto lunga, si divida la medesima in tante porzioni della lunghezza di 600 a 800 metri, secondo le accidentalità del suolo, mediante allineamenti come AB, CD, EF ecc. (*fig.* 265), diretti per quanto è possibile nel senso della più grande pendenza; si piantino su questi allineamenti diversi picchetti, che dovranno in seguito servire di capi-saldi, e si proceda ad una rigorosa livellazione longitudinale dei medesimi, calcolando le loro ordinate per rapporto ad un comune piano di paragone. — Siano A, I e B tre punti di uno di questi profili, aventi per quote riferite ad un comune piano di paragone preso al disotto, il primo $62^m,28$, il secondo $50,^m24$ ed il terzo $39^m,30$; i piani orizzotali, seganti la superficie del suolo, debbano essere condotti a distanza di 5^m l'uno dall'altro, e siano a trovarsi le curve quotate 60^m, 55^m, 50^m, 45^m e 40^m. Fatta la differenza $62^m,28 - 60^m = 2^m,28$, si determini, come si disse nel problema secondo del numero antecedente, un punto *a* posto sull'allineamento AB e al disotto di A di $2^m,28$, e questo punto darà l'incontro dell'anzidetto allineamento colla curva di quota 60^m. Similmente le intersezioni delle curve definite per le quote 55^m, 50^m, 45^m e 40^m coll'allineamento AB, si troveranno determinando il punto *b* al disotto di *a* di 5^m, il punto *c* al disotto di I di $50^m,24 - 50^m = 0^m,24$, il punto *d* al disotto di *c* di 5^m, il punto *e* al disopra di B di $40^m - 39^m,30 = 0^m,70$. — Un'operazione analoga si farà sugli altri allineamenti CD, EF ecc., e si avranno tutti i punti in cui essi sono incontrati dalle curve orizzontali. — Dopo di ciò si determinerà per ciascuna curva un certo numero di punti, come a', a'', a''',...b', b'', b''', ... c', c'', c'''... ecc. distanti fra loro da 60 a 80 metri, e si avranno così i vertici delle linee poligonali inscritte nelle curve cercate che, coll'applicazione del procedimento esposto nel problema primo del numero antecedente, condurranno facilmente al dettagliato tracciamento delle curve orizzontali.

Se il terreno, invece di essere una zona molto ristretta in confronto della sua lunghezza, si estende in un modo qualunque, il processo a seguirsi, analogo al precedente, va modificato come segue. S'incominci dall'eseguire una serie di livellazioni longitudinali in diverse direzioni, in modo che i loro andamenti dividano il terreno in tanti poligoni presso a poco eguali in estensione, e facili a verificarsi rivenendo sul punto di partenza, perchè la somma delle battute avanti deve eguagliare quella delle battute indietro. — Da questi poligoni di primo ordine, altri minori se ne separino mediante andamenti poligonali aventi i loro termini sui perimetri dei grandi poligoni; le livellazioni su questi eseguite, collegandosi colle prime, risultano verificate, e dànno una serie di punti le cui quote sono determinate esattamente e che possono poi servire alla connessione di allineamenti convenientemente collocati nel senso della maggior pendenza del suolo. — Finalmente, i punti d'incontro degli ultimi allineamenti colle curve orizzontali, ed i loro tracciamenti effettivi si ottengono come venne indicato nel caso di una zona di terreno poco larga.

172. **Rilevamento delle curve orizzontali su un terreno molto esteso.** — Rilevata l'intera poligonazione stabilita per la determinazione dei capi-saldi, rilevati gli allineamenti diretti nel senso della maggior pendenza del terreno unitamente ai lati dei poligoni stessi inscritti nelle curve, si procede con tutta facilità a rilevare

i dettagli di queste ultime, perchè questo lavoro si riduce ad operare su archi curvilinei di 60 a 80 metri di lunghezza.

Fra i diversi metodi applicabili al rilevamento di queste curve, alcuni sembrano preferibili a motivo della rapidità che permettono; perchè con essi si possono rilevare le sezioni orizzontali nel medesimo tempo che vengono tracciate sul terreno. Supponendo che siasi impiegata una tavoletta pretoriana pel rilevamento della poligonazione, si faccia stazione in un punto S (*fig.* 266) del terreno, orientando lo strumento colle regole già spiegate ai numeri 114 e 115 e, tracciato l'allineamento AB presso a poco orizzontale, passante per due punti del terreno A e B, già rappresentati sullo specchio in *a* e *b*, s'innalzino su questo, e da punti equidistanti, degli allineamenti perpendicolari. Quest'operazione preliminare determina sul terreno una serie di allineamenti paralleli, che devono essere più o meno vicini secondo il grado di precisione che si desidera avere, e che si possono con tutta facilità figurare sullo specchio dividendo la $\overline{ab}$ nello stesso numero di parti eguali in cui venne diviso l'allineamento $\overline{AB}$, ed innalzando da tutti i punti di divisione delle perpendicolari. — Preparata così l'operazione, il porta-mira corre sulla perpendicolare AX e, dietro cenni di colui che livella, si ferma nel punto M, intersezione di una curva orizzontale coll'accennata perpendicolare. L'operatore che trovasi alla tavoletta, tenendo appoggiata la linea di fede ad uno spillo collocato nella verticale del punto S, dirige immediatamente un raggio visuale alla mira, e nell'intersezione della linea di fede colla perpendicolare *ax* trova il punto *m* rappresentativo di M. Nello stesso modo con cui venne rilevato questo primo punto se ne può rilevare un altro *n* rappresentativo di N, e segnare sullo specchio tutte le curve orizzontali. — Se l'intersezione di una perpendicolare ad *ab* colla retta determinata dalla linea di fede, si fa troppo obbliquamente, o se la linea di fede cade nella direzione di una perpendicolare alla *ab* medesima, come succede collimando a P, si deve segnare sullo specchio il punto rappresentativo di P, misurando $\overline{CP}$ e prendendo $\overline{cp} = \frac{1}{n}\overline{CP}$.

Un altro metodo consiste nel misurare colla bussola, portata in un punto S (*fig.* 267) del terreno, gli angoli che i raggi visuali SA, SA′, SA″ ecc., diretti sui punti indicati dal porta-mira, fanno col meridiano magnetico SM, e nel trovare le distanze AA′, A′A″ ecc., che ciascun punto ha dal precedente. Supponendo che sia già costrutto il piano della poligonazione e che si abbia in esso il punto a rappresentativo di A, si fissa il punto s rappresentativo di S coi dati necessarii per coordinare un punto a due o tre altri già dati di posizione; e, segnata la direzione sm dell'ago calamitato, si tirano le rette sx, sx', sx'', ecc., facenti rispettivamente con esso gli angoli letti. Centro fatto in a, con apertura eguale ad $\frac{1}{n}\overline{AA'}$ si descrive un arco di circolo che generalmente taglia la sx' in due punti a', a_1', e la sola ispezione del terreno indica quale dei due punti è il buono (num. 115). Collo stesso metodo si trovano successivamente l'uno dopo l'altro i punti a'', a''' ecc. — Una semplificazione, che si può apportare a questo metodo, consiste nel legare al piede della mira l'estremo di una catena o di una fune di lunghezza cognita; e nel mentre un operatore la tiene ferma nel punto ultimamente determinato, il porta-mira, guidato da colui che livella, la colloca nel sito conveniente. Ponendosi successivamente la mira ad una distanza costante dal punto ultimamente determinato, si hanno immediatamente le distanze orizzontali di tutti i punti delle curve di livello.

175. **Curve orizzontali dedotte dai profili.** — In molti casi pochi punti possono bastare alla determinazione approssimata delle curve di livello, ed essi facilmente si ottengono eseguendo in diversi sensi delle livellazioni longitudinali ben collegate fra di loro, onde poter ridurre tutti i punti livellati ad un comun piano di paragone. Costrutti i profili alla scala del piano su cui devono essere segnate le curve di livello, si conducano in ciascuno di essi delle linee orizzontali aventi l'equidistanza che vuolsi assegnare ai piani delle curve medesime; i punti d'incontro di tali linee coi lati dei profili si riportino sul piano; e, unendo con linee continue, liberamente tracciate, tutti quelli che corrispondono ad orizzontali della stessa quota, si avranno le diverse curve richieste. — La figura 268 dà un'idea di tale operazione. Su un allineamento del terreno rappresentato in L M, e su tanti altri ad esso perpendicolari, rappresentati in AB, CD, EF, GH, IK, si eseguirono delle livellazioni longitudinali e, determinate le ordinate di tutti i loro vertici per rapporto ad un sol piano di paragone preso al disotto di B di 20^m, si costruirono tutti i profili L'M', A'B', C'D', E'F', G'H', I'K' alla scala del tipo. Si prese di 2^m l'equidistanza dei piani orizzontali seganti, e partendo dall'ordinata cognita d'un punto di ciascuno dei profili, per esempio, da quella del punto più elevato, riuscì agevole segnare le loro tracce coi piani dei profili medesimi: così, essendo $34^m,91$ l'ordinata del

punto più alto N del profilo E′F′, si prese Nn eguale alla lunghezza grafica corrispondente a $0^m,91$; al disotto di n si portarono tante parti di 2^m caduna e si condussero tutte le orizzontali seganti il profilo. La medesima operazione venne eseguita per gli altri profili. I punti di una curva qualunque, per esempio di quella quotata 28^m, si trovarono portando le distanze $\overline{o_1 a_1} = \overline{oa}$, $\overline{o_1 b_1} = \overline{ob}$, $\overline{o_1 c_1} = \overline{oc}$, $\overline{o_1 d_1} = \overline{od}$, $\overline{p_1 e_1} = \overline{pe}$, $\overline{p_1 f_1} = \overline{pf}$, $\overline{q_1 g_1} = \overline{qg}$, $\overline{q_1 h_1} = \overline{qh}$.

Finchè si può, è bene di prendere gli allineamenti, secondo cui si vogliono i profili, in direzioni fra loro parallele e perpendicolari; talvolta però può convenire di condurli in direzioni differenti, per esempio in modo che passino per un medesimo punto. In questo caso è necessario trovare gli angoli che essi fanno fra di loro. I metodi per segnare sui profili le tracce dei piani delle sezioni orizzontali, e per disegnare queste ultime sul piano, non differiscono dai già esposti.

174. **Profili dedotti dalle curve orizzontali.** — Avendosi il disegno delle proiezioni orizzontali delle curve di livello di una data porzione di superficie terrestre, riesce agevole di passare alla costruzione di quanti profili si vogliono. — Supponendo che vogliasi il profilo del terreno rappresentato nella figura 269 col piano verticale rappresentato mediante la sua traccia orizzontale AB, e che i piani delle curve orizzontali sieno distanti fra di loro di 1^m, s'incomincierà dal condurre le rette ab, $a'b'$ ecc. parallele alla AB coll'equidistanza di 1^m ridotta in iscala, e rappresentanti le tracce dei piani delle curve col piano in cui trovasi il profilo a determinarsi; si osserverà che i punti A e B, C e D ecc. appartengono tanto al piano segante, quanto ai piani orizzontali delle curve quotate 0, 1 ecc., e che quindi in proiezione verticale, ossia sul profilo, dovranno cadere in a e b, c e d ecc., intersezioni delle perpendicolari ad AB condotte per essi punti fino ad incontrare le accennate parallele.

175. **Piano a curve orizzontali.** — Un piano si dice a *curve orizzontali*, quando, oltre i confini e le linee divisorie che limitano le diverse parti del terreno rappresentato, vi sieno anche le proiezioni delle curve orizzontali colle loro quote al disopra di un piano di paragone preso o nel piano stesso della curva più bassa od anche più al disotto. Si scorge chiaro come dall'assieme di queste curve proiettate si possa avere l'aspetto della forma della superficie del suolo, e come quanto più ravvicinati saranno fra loro i piani orizzontali determinanti il contorno delle curve, tanto più esatta riu-

scirà la configurazione del terreno. Considerando, per esempio, la figura 269, si riconosce che, per essere la proiezione di ciascuna curva compresa nello spazio della proiezione della curva inferiore, il terreno in essa rappresentato è un'altura; che, partendo dal vertice o punto culminante V per discendere alla curva quotata zero che segna il piede dell'altura, il pendìo più forte è nella direzione VL; poichè, per abbassarsi d'una determinata quantità, la distanza da percorrersi orizzontalmente è la più breve: al contrario, la pendenza nella direzione VM è la più dolce, perchè in quella direzione la distanza del punto culminante alla curva inferiore è la maggiore possibile; in qualsivoglia altra direzione, il terreno è meno ripido che in VL e lo è di più che in VM.

Le curve orizzontali, essendo le intersezioni della superficie del suolo con piani egualmente distanti nel senso verticale, conducono facilmente ad ottenere l'altezza di un punto qualunque del terreno al disopra del piano di paragone. Se il punto è posto su una curva, come in O, e se la distanza dei piani orizzontali in cui si trovano le curve è di 1^m, la sua altezza sarà di 5^m al disopra del piano dell'ultima curva. Se il punto è in una posizione intermedia, come in N, sarà pur facile dedurre l'altezza, perchè, supponendo che la superficie della zona di terreno compresa fra due curve consecutive sia quella generata da una linea retta che si muove appoggiandosi costantemente alle due curve e mantenendosi sempre in un piano verticale normale alla curva inferiore, la distanza orizzontale $\overline{mn}$, fra le due curve le quali comprendono il punto N, è il cateto di un triangolo rettangolo in cui l'equidistanza 1^m è l'altro cateto, mentre la distanza $\overline{m\mathrm{N}}$ e l'altezza incognita x del punto N sul piano della curva immediatamente inferiore sono pure i due cateti di un triangolo rettangolo simile al primo, per modo che si avrà

$$x = \frac{\overline{m\mathrm{N}}}{\overline{mn}} 1^{\mathrm{m}}.$$

Cosicchè, se la distanza $\overline{mn}$ è divisa in dieci parti eguali, e se la proiezione del punto N cade sulla quarta divisione, si dirà che il punto N è a $1^m,40$ al disopra del piano della curva inferiore.

Le curve chiuse denotano sempre un'altura o una concavità: si ha un'altura quando la più piccola quota è quella apposta alla curva maggiore; una concavità quando la quota più piccola è apposta alla curva minore.

Il punto culminante di un'altura, rappresentata in un piano a curve orizzontali, esige una quota particolare, a meno che la sua distanza dal piano dell'ultima curva sia eguale all'intervallo dei piani delle curve orizzontali. Lo stesso si dica per il punto più depresso di una concavità.

Pei terreni le cui curve orizzontali non si chiudono sul piano, si decide in qual senso ha luogo la pendenza, tracciando i corsi d'acqua che in generale costituiscono il mezzo più sicuro e più semplice per riconoscere a prima vista su di un piano le parti basse di un paese; così, essendo AB (*fig.* 270) un ruscello, si conchiuderà che il terreno circoscritto appartiene ad una valle.

Dal sin qui detto si può adunque conchiudere che un piano a curve orizzontali offre esattamente le altezze ed i declivii, tanto assoluti che relativi, che meglio d'ogni altro presenta la vera caratteristica configurazione del terreno. Parlando dell'uso degli eclimetri, s'indicheranno metodi approssimati, ma più spediti dei già esposti, sia per tracciare le indicate curve su un terreno comunque esteso, sia per esprimere in disegno le sue accidentalità.

ARTICOLO IV.

Dei Clisimetri.

Nozioni sulle pendenze.

176. **Pendenza di una linea.** — Quando un mobile percorre una linea in guisa che l'angolo della direzione del movimento colla parte della sua verticale volta verso lo *zenith* sia acuto, si dice che esso *monta*, e dicesi che *discende* quando l'accennato angolo è ottuso.

L'azione di *discendere* è prodotta da una *pendenza*, quella di *montare* da una *contropendenza* o *rampa*, e una serie di pendenze e contropendenze, intercalate talvolta da tratti orizzontali, costituiscono generalmente il cammino di un mobile che percorre una linea qualunque.

Il motto *pendenza* si usa frequentemente, tanto per indicare una discesa, quanto una salita, e allora è sinonimo d'inclinazione.

Essendo MN (*fig.* 271) una retta inclinata all'orizzontale MO, $\overline{ON}$ la differenza d'altezza dell'estremo N sull'estremo M, si chiama *pendenza totale* dal punto M al punto N la loro differenza di livello $\overline{ON}$, ed il rapporto $\frac{\overline{ON}}{\overline{MO}}$ prende il nome di *tassa di pendenza*, e di *pendenza per metro* quando il quoziente si sviluppa in metri, decimetri, centimetri, ecc.

Le espressioni molto usate, che la pendenza d'una retta è, per esempio, del 4 per 100, del 30 per 1000, significano come la differenza di livello fra due punti della medesima, distanti fra loro 100^m, 1000^m, è di 4^m, di 30^m. La tassa di pendenza si trova evidentemente dividendo 4 per 100, 30 per 1000 ecc.

Le altre espressioni anche molto adoperate, che la pendenza di una retta è, per esempio, di un 1/12, dei 3/20 significano come la differenza di livello fra due punti qualunque di essa retta è 1/12, 3/20 della loro distanza orizzontale. La pendenza per metro si ha sviluppando i quozienti 1/12, 3/20 in metri, decimetri ecc.

Per pendenza in un punto qualunque M (*fig.* 272) d'una curva AB, s'intende quella della tangente MT in quel punto della curva.

177. **Pendenza di una superficie.** — La pendenza di un piano RS è quella d'una retta CD (*fig.* 33) in esso condotta da un punto qualunque C, perpendicolarmente ad un'orizzontale RI. Questa retta CD è chiamata *retta di massima pendenza* in quanto, fra tutte quelle che da C si possono condurre nel piano RS, fa il massimo angolo coll'orizzonte. Infatti, sia M la proiezione di C sul piano orizzontale PQ, sia RI l'intersezione di quest'ultimo col piano RS, e sia B un punto qualunque di essa: conducendo le rette MD, MB, CB, nasceranno i due triangoli DMC, BMC rettangoli in M, e si avranno le relazioni

$$\operatorname{tang} CDM = \frac{\overline{CM}}{\overline{DM}}, \qquad \operatorname{tang} CBM = \frac{\overline{CM}}{\overline{BM}};$$

ed essendo $\overline{DM} < \overline{BM}$, perchè la $\overline{DM}$ è una perpendicolare e la $\overline{BM}$ un'obliqua ad RI, sarà $\operatorname{tang} CDM > \operatorname{tang} CBM$ e quindi $\operatorname{ang} CDM > \operatorname{ang} CBM$; il che prova essere CD quella che, fra tutte le rette che si possono condurre dal punto C nel piano RS, fa il massimo angolo col piano orizzontale PQ.

La pendenza di una superficie in un determinato suo punto vien data dalla pendenza del piano tangente alla superficie nello stesso punto, e quindi è quella della retta condotta in questo piano normalmente ad una orizzontale in esso contenuta.

178. **Significato geometrico della parola scarpa**. — All'inclinazione piuttosto considerevole di certe superficie, qual è quella delle pareti laterali dei fossi, quella delle superficie che limitano

i rialzi ed i ribassi delle strade, quella delle facce laterali di certi muri, si dà il nome di *scarpa*.

Le scarpe si determinano non già col rapporto dell'altezza alla base come per le pendenze, ma sibbene con quello della base all'altezza: così una scarpa AB (*fig.* 273), proiettata orizzontalmente in $\overline{AC}$ e verticalmente in $\overline{BC}$, è misurata col quoziente $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$.

Le espressioni molto usate, che le scarpe di un muro o di un fosso sono di 1/12 o dei 3/4, indicano che essendo 12 o 4 l'altezza del muro o del fosso, la larghezza della proiezione orizzontale delle facce inclinate è di 1 o di 3; oppure che questa larghezza è 1/12 o 3/4 dell'accennata altezza.

Non di raro si dice anche che una scarpa è di 1 e 1/2 di base per 2 di altezza o di 1/2 di base per 1 di altezza, quando, essendo di un'unità e mezzo o di mezza unità la larghezza della proiezione orizzontale, la sua altezza è di due unità o di un'unità. Una faccia inclinata dicesi *a tutta scarpa*, quando la larghezza della sua proiezione orizzontale eguaglia la sua altezza, e la sua inclinazione col l'orizzonte è allora di 45°.

Avendosi la scarpa di una retta, si deduce facilmente la sua pendenza, imperocchè, essendo quella eguale al quoziente della base per l'altezza, e questa al quoziente dell'altezza per la base, ne segue che uno di questi quozienti è il reciproco dell'altro, e quindi *la pendenza vale l'unità divisa per la scarpa, e la scarpa vale l'unità divisa per la pendenza*.

Clisimetro a pendolo.

179. **Descrizione del clisimetro a pendolo.** — Un livello a pendolo col suo regolo trasversale DE (*fig.* 24) diviso in parti eguali, equivalenti ciascuna ad una frazione esatta dell'altezza $\overline{CF}$ compresa fra il punto di sospensione del piombino e l'indice fiduciale, è il più semplice dei clisimetri che si possono immaginare. Generalmente si fa in modo che i triangoli simili ACB e DCE risultino rettangoli in C ed isosceli sulle rispettive ipotenuse $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$: allora l'altezza $\overline{CF}$ è la metà della base corrispondente $\overline{DE}$, e dividendo le mezze basi $\overline{FE}$ ed $\overline{FD}$ ciascuna in cento parti eguali, l'altezza conterrà pure cento di queste parti.

180. **Uso del clisimetro a pendolo.** — Un clisimetro qualunque a pendolo può servire a tre usi: 1° a trovare la pendenza di una retta; 2° a trovare la differenza di livello fra due punti; 3° a

segnare una retta di data pendenza. Qui si supporrà di avere fra le mani un clisimetro in cui ciascuna divisione del regolo trasversale DE sia 1/100 dell'altezza $\overline{CF}$.

Volendosi trovare la pendenza della retta che unisce due punti M ed N (*fig.* 271) la cui distanza orizzontale è $\overline{MO}$ e la cui differenza di livello è $\overline{NO}$, basta collocare lo strumento co' suoi piedi sulla retta data, in modo che il filo a piombo tocchi leggermente quella faccia dello strumento su cui trovansi le divisioni, e leggere il numero che indica le parti eguali comprese fra l'indice fiduciale ed il punto G in cui cade il filo a piombo: se FG abbraccia 15 divisioni o 15/100 dell'altezza $\overline{CF}$, si dirà che la pendenza di MN è $15/100 = 3/20$, perchè dai due triangoli simili MON, CFG si ricava $\frac{\overline{NO}}{\overline{MO}} = \frac{GF}{CF} = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$.

Conosciuta la pendenza di una retta qualunque MN, risulta della massima facilità l'invenire la differenza di livello fra i due estremi, allorquando si conosca la loro distanza orizzontale: così, se per fissare le idee si suppone che la pendenza di MN sia dei 3/20 e che la distanza orizzontale $\overline{MO}$ sia di 40^{m}, si ha che la differenza di livello $\overline{ON}$ è $\frac{3}{20}\,40 = 6^{m}$.

Per disporre lo strumento in modo che la linea de' suoi piedi abbia una data pendenza, per esempio del 7 per cento, basta fare in guisa che il filo a piombo cada sulla divisione 7 del regolo trasversale. Se la pendenza è data sotto forma di frazione ordinaria non avente per denominatore 100, allora convien prima ridurla ad una frazione equivalente avente un tal denominatore.

181. Verificazione del clisimetro a pendolo. — Si verifica un clisimetro a pendolo trovando due volte la pendenza di una medesima retta, coll'invertire la seconda volta i suoi piedi in modo, che vengano l'uno al posto dell'altro: in queste due operazioni il filo a piombo deve segnare un egual numero di divisioni dall'una e dall'altra parte dell'indice fiduciale: perchè, pel solo fatto dell'inversione dello strumento, non cangia la pendenza della retta su cui vien esso collocato. Quando ciò non ha luogo, lo strumento può pure servire ad ottenere buoni risultati, purchè nel misurare la pendenza di un retta si facciano sempre due osservazioni in senso contrario l'una dall'altra, e si prenda la media aritmetica delle due letture (num. 51).

Clisimetro a traguardi

182. **Descrizione del clisimetro a traguardi.** — Il clisimetro a traguardi si compone di un livello a bolla d'aria l, fisso ad un regolo AB (*fig.* 274) che porta due traguardi AC e BD disposti perpendicolarmente alla sua lunghezza. A questo primo regolo un secondo se ne trova annesso mediante una cerniera, e una vite F serve a tenerli più o meno vicini fra di loro. Tutto l'apparecchio viene sopportato da un sostegno S, da un ginocchio G cui è unito un manico cavo, e da un trepiede. I due traguardi hanno differente altezza, e ciascuno consiste in un'intelaiatura, entro cui può scorrere nel senso verticale una lastra rettangolare munita di un foro e di una fenestrella contenente due fili fra loro perpendicolari, in guisa che il foro f del traguardo di mira di minor lunghezza sia opposto all'intersezione i dei fili del traguardo di maggior lunghezza, e che il foro f' di questo sia opposto all'intersezione i' di quello. Nel traguardo di maggior lunghezza si può liberamente far scorrere, mediante il bottone b, la lastra rettangolare o *cursore cc'*: per i piccoli scorrimenti serve la vite V che, ritenuta alle due estremità, gira sul proprio asse senza avanzarsi, agendo invece sul cursore che si muove innalzandosi od abbassandosi. La lastra collocata nel traguardo di minor lunghezza può avere nel senso verticale un movimento assai limitato da imprimersi colla vite U.

Sopra un lato dell'intelaiatura del traguardo più lungo trovasi una divisione di parti eguali, col suo zero disposto in modo da riuscire orizzontale la visuale condotta pei fori ed intersezioni dei fili opposti, quando, essendo centrata la bolla del livello l, un indice fiduciale collocato sul cursore coincide col suddetto zero. L'accennata divisione è tale da dare la pendenza per metro della linea secondo cui vien diretta la visuale; così, supponendo che la lunghezza del regolo A B sia di $0^m,3$ e che si voglia valutare la pendenza per metro di centimetro in centimetro, si troverà che l'innalzamento da darsi al cursore acciocchè la linea di mira abbia la pendenza di $0^m,01$ per metro è di $0^m,003$; che l'innalzamento da darsi per avere una retta colla pendenza di $0^m,02$ per metro è $0^m,006$; che l'innalzamento da darsi per avere una retta colla pendenza di $0^m,03$ per metro è 0^m009 ecc.; cosicchè, facendo risultare sul lato dell'intelaiatura quante divisioni si possono avere di $0^m,003$ caduna, si avrà mezzo di valutare le pendenze per metro esatte sino ai centimetri; che anzi, incidendo sul cursore un nonio lungo nove divisioni e diviso in dieci parti eguali, si potranno avere le pendenze per metro esatte sino ai millimetri.

183. **Uso del clisimetro a traguardi per misurare le pendenze, e per tracciare rette di pendenza data.** — Il clisimetro or ora descritto serve a risolvere sul terreno, e colla massima facilità, i problemi già trattati col clisimetro a pendolo, tuttavolta che siasi messo in stazione lo strumento, collocandolo sul suo trepiede e centrando la bolla d'aria del livello colla vite F (*fig.* 274). Nel dirigere le visuali si prenderà per oculare il foro del traguardo corto o quello del traguardo lungo, secondo che la visuale sale o discende.

Volendosi trovare la pendenza per metro della retta che unisce due punti A e B del terreno (*fig.* 275), convien prima misurare l'altezza $\overline{AO}$ dell'oculare sul terreno e collimare ad una mira posta verticalmente in B collo scopo portato a quest'altezza; se lo zero del nonio segna, per esempio 8, e se è la divisione 7 del nonio che coincide esattamente con un'incisione della graduazione su cui esso scorre, si dirà che la pendenza della retta AB è di $0^m,087$ per metro.

Per segnare sul terreno un punto B che, unito al punto A, dia una retta di data pendenza per metro, convien disporre lo strumento in modo da indicare la pendenza voluta; misurare poscia l'altezza dell'oculare, a cui si deve accostar l'occhio, sul terreno; portare lo scopo della mira a quest'altezza; e trovare sul terreno, nella direzione della retta a determinarsi, un punto tale che la linea fiduciale della mira in esso collocata sia colpita dalla visuale.

Osservazione. Anche il clisimetro a pendolo può essere usato come quello a traguardi; bisogna perciò fissarlo su un regolo ben diritto, adattare il tutto su un trepiede, e fare in modo che si possano al medesimo imprimere due movimenti rotatorii, uno intorno ad un asse orizzontale e l'altro intorno ad un asse verticale.

Per operare a grandi distanze si può anche immaginare un clisimetro a cannocchiale, in cui sia possibile disporre questo col suo asse ottico inclinato all'orizzonte, ed in cui da apposita divisione sia indicata la corrispondente pendenza per metro.

184. **Verificazione e correzione del clisimetro a traguardi.** — La verificazione di questo strumento consiste nel vedere se la linea di mira è orizzontale allorquando lo zero del nonio coincide collo zero delle divisioni che dànno le pendenze. Perciò, essendo centrata la bolla del livello, si collimi ad una mira piuttosto lontana, guardando pel foro f (*fig.* 274) e facendo innalzare o abbassare

lo scopo finchè la sua linea di mezzo sia coperta dal filo orizzontale i; si faccia descrivere mezzo giro allo strumento; si centri nuovamente la bolla e, accostato l'occhio al foro f' si osservi se il filo orizzontale i' copre la linea orizzontale dello scopo. Manifestandosi qualche differenza, si rettifica lo strumento con un procedimento in tutto analogo a quello esposto parlando dei livelli a bolla d'aria, onde rendere orizzontale l'asse ottico del cannocchiale quando la bolla è centrata: cioè si prende la media aritmetica delle quote indicate dalle due posizioni dello scopo; si porta questo a tale altezza media, e si muove la vite U, finchè la linea di mira fi venga a ferire la linea di mezzo dello scopo medesimo; oppure si opera per tentativi, finchè nelle due posizioni dello strumento la linea di mira colpisca lo scopo alla stessa altezza.

185. **Uso dei clisimetri nelle operazioni di livellazione.** — I clisimetri, al pari dei livelli, si possono efficacemente impiegare nelle operazioni tutte di livellazione, e principalmente riescono vantaggiosi sui terreni di rapido pendìo, in cui, coi livelli ordinarii, convien far stazione a brevissimi intervalli con gran perditempo e talvolta anche con notevole danno nell'esattezza dell'operazione.

Supponendo che siano A e B due punti del terreno (*fig.* 275) dei quali si vuole la differenza di livello $\overline{BC} = dL$, basta misurare la loro distanza orizzontale $\overline{AC} = K$, l'altezza $\overline{AO} = h$ dell'oculare di mira sul terreno, collimare all'estremo D di un'asta $\overline{BD}$ di altezza cognita a posta verticalmente in B, e leggere finalmente la pendenza per metro p della visuale condotta col clisimetro, da considerarsi come positiva o negativa, secondo che l'accennata visuale è di elevazione o di depressione. Immaginando per O l'orizzontale OE, si ha $\overline{ED} = pK$, per cui la differenza di livello fra A e B sarà evidentemente

$$dL = pK + h - a.$$

Quando il valore di dL somministrato da questa formola è positivo, è segno che il punto B, a cui si è collimato, è più alto del punto di stazione A; quando è negativo, è segno che B è più basso di A.

La differenza di livello $\overline{BC} = dL$, fra due punti A e B (*fig.* 276) del terreno si può anche avere collocando in stazione il clisimetro nel loro allineamento, e circa a metà della loro distanza orizzontale $\overline{AC} = K$, disponendo lo strumento in modo da somministrare una visuale passante al disopra dei punti dati non più dell'altezza di un'ordinaria mira, collimando a questa, portata successivamente nei punti A e B, stimando le due quote $\overline{AO}=c$ e $\overline{BD}=b$, e finalmente leggendo sul clisimetro la pendenza p della visuale condotta. Immaginando per O la orizzontale OE, si ha evidentemente che la differenza di livello fra A e B è data da

$$dL=pK+c-b.$$

Trovata la differenza di livello che diversi punti hanno gli uni per rapporto agli altri, riesce agevole il determinare le loro ordinate per rapporto ad un comune piano di paragone preso al disotto o al disopra di tutti i punti livellati di una determinata quantità, imperocchè all'ordinata già cognita di un punto basterà aggiungere o togliere, quale risulta dalla formola qui sopra stabilita, la differenza di livello fra il punto di ordinata nota e quello che si considera.

186. Distanze orizzontali e differenze di livello valutate coi clisimetri. — Siano A e B (*fig.* 277) due punti del terreno, di cui è necessario conoscere la differenza di livello $\overline{BF}$, non che la distanza orizzontale $\overline{AF}$. Collocato il clisimetro in stazione nel punto A, si collimi due volte allo scopo di una mira portato ad altezze cognite $\overline{BD}=a$, $\overline{BE}=a'$, e si misuri l'altezza $\overline{AO}=h$ dell'oculare, cui si è accostato l'occhio, sul terreno; mediante le tre misure prese, e mediante le due pendenze per metro p e p' delle visuali OD e OE lette sullo strumento, riesce agevole di trovare prima la distanza orizzontale $\overline{AF}=\overline{OG}=x$ e poi la differenza di livello $\overline{BF}=dL$. Infatti, dietro la data definizione della pendenza per metro, si avranno le seguenti relazioni

$$p'x=\overline{GE}, \qquad px=\overline{GD}.$$

Togliendo dalla prima equazione la seconda, ed osservando che $\overline{GE}-\overline{GD}=\overline{DE}=a'-a$, si avrà

$$x(p'-p)=a'-a,$$

dalla quale si deduce

$$x=\frac{a'-a}{p'-p},$$

dove le pendenze p e p' vanno considerate come positive o come negative, secondo che corrispondono ad una visuale in elevazione o ad una visuale in depressione.

Trovata la distanza orizzontale fra il punto A ed il punto B, si ha la loro differenza di livello colla formola

$$dL = px + h - a.$$

Questo metodo d'operazione, quantunque della massima speditezza, non è guari usato dai pratici, e per conseguire un certo grado d'esattezza importerebbe avere uno strumento costrutto a perfezione, e con molta maggior diligenza di quella con cui si sogliono costrurre gli ordinari clisimetri.

ARTICOLO V.

Degli eclimetri.

Eclimetro a pendolo.

187. **Descrizione dell'eclimetro a pendolo.** — Il più semplice fra gli eclimetri, e che può tornar utile in alcune operazioni topografiche, è l'eclimetro a pendolo. Questo strumento si compone, come il livello a pendolo descritto al numero 48, di due regoli AC e BC (*fig.* 278), uniti fra loro da un arco circolare DEE, il cui centro è al vertice C ed il cui zero si trova in un sito F tale da riuscire la retta CF perpendicolare al piano dei due piedi A e B, e quindi orizzontale questo piano quando lo zero di un nonio, fisso ad una alidada che si muove intorno al suo punto di sospensione C, coincide collo zero o *indice fiduciale* dell'arco graduato.

188. **Uso dell'eclimetro a pendolo.** — L'uso del descritto strumento è fondato su quanto già si disse parlando del livello a perpendicolo: cioè che, rappresentando con MN (*fig.* 279) una retta inclinata, con MO la sua proiezione orizzontale, con CF la retta che unisce il vertice C coll'indice fiduciale F, con CG la direzione verticale che prende la linea uniente il punto di sospensione collo zero del nonio, l'angolo FCG, misurato dall'arco FG compreso fra lo zero della graduazione e lo zero del nonio, è eguale all'angolo NMO formato dalla MN colla sua proiezione orizzontale.

189. **Verificazione dell'eclimetro a pendolo.** — La verificazione dell'eclimetro a pendolo si fa in un modo analogo a quello seguito parlando del livello a perpendicolo, collocando cioè lo strumento coi suoi due piedi su una retta qualunque , invertendolo ed

osservando se lo zero del nonio segna dopo l'inversione il numero dei gradi che prima segnava dall'altra parte dello zero della graduazione.

Dal principio accennato al numero 51 sull'inversione si deduce che con un falso eclimetro a pendolo si possono misurare gli angoli esattamente, facendo due osservazioni in senso opposto e prendendo la media delle due letture.

Eclimetri a cannocchiale.

190. Descrizione degli eclimetri a cannocchiale. — Gli eclimetri da usarsi in campagna trovansi generalmente adattati agli strumenti planimetrici, come allo squadro graduato con cannocchiale, al circolo, alla bussola topografica, alla diottra; e sempre consistono o in un settore circolare (*fig.* 131 *e* 136) o in due archi circolari o in un semicircolo (*fig.* 150) o in un intero circolo graduato (*fig.* 179), su cui è possibile far scorrere uno o due nonii, allorquando un cannocchiale gira intorno ad un perno il cui asse deve passare pel centro dell'eclimetro. Si fanno anche degli eclimetri isolati e costrutti come lo indica la figura 280. Gli eclimetri a semplice settore, che trovansi ben di frequente annessi agli squadri graduati, al circolo e alla diottra, non presentano generalmente un'accurata costruzione, ed il loro ufficio si limita soltanto a trovare gli angoli di elevazione o di depressione delle visuali dirette alla stadia sui terreni inclinati, onde ridurre le distanze lette all'orizzonte (num. 70). I migliori eclimetri sono quelli a mezzo circolo o a circolo intero, che trovansi isolati e ben di frequente anche annessi alla bussola topografica e alla diottra, in cui l'arco graduato è generalmente diviso in gradi e mezzi gradi. In tali strumenti un livello a bolla d'aria fa sistema coll'eclimetro medesimo, e le cose devono essere disposte in modo che, trovandosi centrata la bolla d'aria e gli zeri dei nonii in coincidenza con quelli dell'eclimetro o colla divisione 90°, l'asse ottico del cannocchiale sia orizzontale.

Un eclimetro, per cui l'asse ottico del cannocchiale risulta orizzontale quando gli zeri dei nonii coincidono cogli zeri della graduazione, dà gli angoli di elevazione e di depressione; un altro invece, per cui l'asse ottico del cannocchiale è orizzontale quando lo zero del nonio segna 90°, misura le distanze zenitali, e tali sono generalmente gli eclimetri a circolo intero.

191. Uso degli eclimetri a cannocchiale. — Supponendo che CAB (*fig.* 281) rappresenti un eclimetro a settore; che CD sia l'indice la cui estremità, percorrendo l'arco graduato, segna i gradi, e che questo coincida collo zero della graduazione quando l'asse ottico del cannocchiale è disposto secondo l'orizzontale CE, facilmente si comprende come, per l'invariabilità dell'angolo DCE, mirando un oggetto F, l'angolo FCE della linea di mira coll'orizzontale CE sarà eguale all'angolo DCG descritto dall'indice, e che si avrà la sua ampiezza leggendo ciò che segna lo zero del nonio. Finchè l'indice cade sulla parte DB dell'eclimetro, si hanno angoli di elevazione; di depressione invece se cade sull'arco AD. È uso di registrare i primi col segno +, i secondi col segno —.

Per misurare un angolo di elevazione o di depressione o una distanza zenitale mediante un eclimetro a mezzo circolo o a circolo intero con livello a bolla d'aria, si riduce la bolla ad essere centrata con la sua vite di richiamo, si collima col cannocchiale all'oggetto cui corrisponde l'angolo a trovarsi, e l'angolo segnato da uno dei due nonii sarà il richiesto. Supponendo che lo strumento dia gli angoli delle visuali all'orizzonte, e che i nonii siano uno dalla parte dell'obbiettivo e l'altro dalla parte dell'oculare, l'angolo letto sarà di elevazione e si riterrà come positivo quando viene indicato dal nonio vicino all'obbiettivo; sarà di depressione e si riterrà come negativo quando viene indicato dal nonio vicino all'oculare.

192. **Verificazioni e correzioni degli eclimetri**. — Acciocchè gli angoli misurati con un eclimetro siano esatti, oltre di essere ben divisa la graduazione, è necessario che il piano dell'arco graduato sia verticale; che ad esso sia parallelo l'asse ottico del cannocchiale, e che questo risulti orizzontale quando gli zeri dei nonii coincidono con quelli dell'eclimetro. La verticalità della faccia graduata ed il parallelismo dell'asse ottico alla medesima sono sufficientemente soddisfatti quando lo strumento è disposto col suo asse di rotazione verticale, e quando l'asse ottico del cannocchiale descrive un piano verticale; e solo si crede a proposito di dover qui accennare al modo di riconoscere e di rendere orizzontale l'asse ottico quando i due zeri coincidono cogli zeri dell'eclimetro.

Per operare questa verificazione, si metta lo strumento in istato d'azione, e si osservi pel cannocchiale un oggetto distante di circa 500^m, si faccia in seguito descrivere allo strumento un mezzo giro e, riconducendo l'oculare all'occhio, si collimi al medesimo oggetto. Se l'angolo indicato dallo strumento dopo l'inversione è eguale a quello indicato prima, l'asse ottico del cannocchiale è orizzontale quando ha luogo la coincidenza degli zeri dei nonii con quelli dell'eclimetro. — Infatti, supponendo che sia ABC (*fig.* 282) l'eclimetro nella sua posizione primitiva; che siano A e C i suoi due zeri, e che sia M il punto osservato, si avrà nella lettura dell'arco AD l'angolo della visuale OM, che suppongo di 38°, col raggio OA. Dopo il rivolgimento, l'eclimetro prenderà la posizione A'BC', e collimando, coll'invertire il cannocchiale, nuovamente al punto M, si avrà, nella lettura dell'arco C'D, l'angolo dell'accennata visuale OM, che suppongo di 42°, col raggio OC'. Se ora s'immagina segnata la bissettrice FE dell'angolo AOC', i due angoli adiacenti BOE e BOF saranno eguali, e quindi la retta FE, siccome perpendicolare alla verticale OB, sarà orizzontale. Se trovasi la differenza $C'D - AD = C'A$, che nel caso particolare considerato è $42° - 38° = 4°$, la metà $EA = 2°$ di questa differenza misura l'errore di collimazione, ossia l'angolo che l'asse ottico del cannocchiale fa coll'orizzontale FE, quando i due zeri coincidono.

Per operare la correzione, si faccia segnare al nonio il numero dei gradi dell'arco C'D corretto dell'errore di collimazione, portandolo in G, in guisa che sia $C'G = C'D - EA = 42° - 2° = 40°$; s'imprima, mediante un'opportuna vite di richiamo, un leggier movimento rotatorio al circolo, finchè si scopra nuovamente l'oggetto M; si centri la bolla d'aria del livello, mediante la vite al medesimo annessa, e lo strumento troverassi rettificato.

Usando eclimetri che non possono girare intorno ad un asse passante pel centro, si può operare con esattezza, facendo per ciascun angolo due osservazioni, una col cannocchiale diretto, e l'altra col cannocchiale inverso, e prendendo la media aritmetica dei due angoli trovati: così il vero angolo della visuale OM coll'orizzontale OE è misurato dall'arco $DE = DA + \frac{DC' - DA}{2} = \frac{DA + DC'}{2}$ $= \frac{38° + 42°}{2} = 40°$.

L'errore di collimazione si dirà positivo o negativo, secondo che, togliendo dall'angolo ottenuto col cannocchiale inverso quello ottenuto col cannocchiale diretto, si ha un risultato affetto dal segno + o dal segno —. Tuttora che debbasi usare di un eclimetro non rettificabile, e che vogliasi risparmiare il perditempo delle due osservazioni, anche operando col solo cannocchiale diretto si possono avere risultamenti esatti, aggiungendo all'angolo letto, da ritenersi come positivo o negativo, secondo che è di elevazione o di depressione, il numero de' gradi esprimenti l'errore di collimazione. Nel caso particolare da noi esaminato, l'errore di collimazione è positivo, e se collimando al punto N si leggono 52° collo zero del nonio posto dalla parte dell'obbiettivo, l'angolo vero sarà $52°+2°=54°$; se invece, collimando ad un punto N', si leggono 42° col nonio posto dalla parte dell'oculare, si dirà che l'angolo vero è $-42°+2°=-40°$.

Per gli eclimetri a semplice settore e a cannocchiale non capovolgibile, si può operare la verificazione come si insegnò al numero 153, parlando del livello a cannocchiale fisso, avvertendo bene nel collimare, che lo zero del nonio coincida collo zero della graduazione. All'occorrenza si fa la correzione, se pure lo strumento lo permette, procacciandosi la retta orizzontale EK (*fig.* **242**) come si disse al già citato numero **153**, e muovendo le viti che servono a far girare il nonio indipendentemente dal perno del cannocchiale, finchè, coincidendo i due zeri, l'asse ottico del cannocchiale, sia diretto secondo questa orizzontale. Tuttora che sia impossibile la correzione dello strumento, si può tener conto dell'errore di collimazione, che è espresso dall'angolo indicato dallo zero del nonio quando il cannocchiale è diretto sull'orizzontale EK.

195. Differenza di livello di due punti. — La differenza di livello $\overline{BC}=dL$ di due punti A e B del terreno (*fig.* 283) si trova portando l'eclimetro in uno dei punti dati, per esempio in A; collocandolo in istato d'azione, e trovando o l'angolo α che la visuale diretta alla sommità di un'asta d'altezza cognita a, disposta verticalmente in B, fa coll'orizzonte, o l'angolo z che la medesima visuale fa colla verticale del luogo d'osservazione; misurando l'altezza $\overline{AO}=h$ del centro dello strumento sul terreno, non che la distanza orizzontale $\overline{AC}=K$. Immaginando condotta pel centro O dello strumento la orizzontale OE, risulterà il triangolo rettangolo DOE di cui si conosce il cateto $\overline{OE}$ e o l'angolo $DOE=\alpha$, oppure il suo complemento $VOD=z$, per cui avendosi $\overline{ED}=K \tang\alpha$, oppure $\overline{ED}=K\cot z$, risulta che la differenza di livello dL è data o dalla formola

$$dL=K \tang\alpha+h-a,$$

oppure da

$$dL=K\cot z+h-a.$$

Se il valore di dL ottenuto con una delle stabilite formole risulta positivo, è segno che il punto B, a cui si è collimato, è più alto di quello in cui si è fatto stazione; il contrario ha luogo, quando dL risulta quantità negativa.

A trovare approssimativamente la differenza di livello fra due punti, può anche tornar utile la scala di riduzione. Così, essendo A e B i due punti dati, basta prendere la lunghezza Ms (*fig.* 57) eguale alla riduzione in iscala della distanza orizzontale $\overline{\text{AC}}$ (*fig.* 283); innalzare per s una perpendicolare ad MN e prendere la parte $\overline{rs}$ che resta intercetta fra il punto s ed il raggio avente con MN l'inclinazione della visuale OD condotta sul terreno, per quanto si può, in direzione parallela alla retta AB.

Nelle operazioni trigonometriche occorre frequentemente di trovare l'altezza di un punto inaccessibile, come della sommità di un campanile, di un segnale e simili, al disopra del centro dello strumento: una tale determinazione si fa colla risoluzione di un triangolo rettangolo di cui un cateto è la distanza orizzontale fra il centro dello strumento e l'altezza a misurarsi, e un angolo acuto l'angolo di elevazione o di depressione, o la distanza zenitale della sommità del segnale. L'accennata distanza orizzontale si ottiene coi metodi esposti nel capo primo di questa seconda parte.

194. **Ordinate per rapporto ad un sol piano di paragone.** — Conosciuta la differenza di livello dL, fra due punti A e B, e l'ordinata di uno di essi per rapporto ad un determinato piano di paragone, si può facilmente trovare quella dell'altro per rapporto al medesimo piano. Se è cognita l'ordinata del punto A, in cui si è fatto stazione, si determina quella dell'altro punto B, a cui si è collimato, aggiungendo o togliendo, quale risulta da una delle formole stabilite nel precedente numero, la differenza di livello dL fra i punti dati, secondo che il piano di paragone rimane al disotto o al disopra. Se invece è cognita l'ordinata del punto B a cui si è collimato, conviene togliere l'accennata differenza nel caso del piano di paragone al disotto, e aggiungerla invece nel caso del piano di paragone al disopra.

195. **Livellazione longitudinale.** — Su terreni di rapido pendio, in cui coi livelli occorre di moltiplicare eccessivamente il numero delle stazioni, riescono della massima utilità gli eclimetri. Essendo A, A′, A″, ecc. (*fig.* 284) diversi punti a livellarsi, si può incominciare dal far stazione in A′, e prendere prima le misure necessarie ad invenire la differenza di livello dL′ fra il punto A ed il punto A′, e poi quelle occorrenti per determinare la differenza di livello dL″, fra A′ ed A″. Andando dopo in A‴ si determineranno analogamente i dati sufficienti a calcolare, sia la differenza di livello dL‴, fra A″ ed A‴, sia l'altra dL$^{\text{iv}}$ fra A‴ ed A$^{\text{iv}}$; e così si procederà fino al compimento dell'operazione.

Stazionando in due punti successivi, e collimando tanto dal primo al secondo, quanto dal secondo al primo, si giugne a determinare in due modi la loro differenza d'altezza: se i due risultati s'accordano nei limiti delle tolleranze ammissibili, si può ritenere per vera differenza di livello la media aritmetica delle due; in caso contrario, convien riconoscere dove esiste l'errore, rifacendo l'operazione.

Fissata l'ordinata del primo punto A, per rapporto ad un determinato piano di paragone, posto, per esempio, al disotto del punto A della quantità H, si trova che quella del punto A′ è espressa da $H' = H - dL'$, quella del punto A″ da $H'' = H' + dL''$, quella del punto A‴ da $H''' = H'' - dL'''$, quella del punto A^{IV} da $H^{IV} = H''' + dL^{IV}$, e così successivamente.

196. Livellazione raggiante e tracciamento delle curve orizzontali. — Gli eclimetri tornano principalmente utili nelle livellazioni raggianti, da eseguirsi per determinare le ordinate dei punti importanti di una data porzione di terreno, da rilevarsi a curve orizzontali, se non con metodi rigorosi, almeno con metodi approssimati e contemporaneamente spediti. All'atto del rilevamento, si prendono i dati necessarii a calcolare le differenze di livello dei varii punti rimarchevoli, usando dell'eclimetro stesso che trovasi annesso al goniometro o alla diottra della tavoletta che si adopera per rilevare. Un registro, come quello di cui si dà il modulo, può tornar utile, sia per ordinatamente inscrivervi i dati presi sul terreno, sia per calcolare le differenze di livello, sia per trovare le ordinate di tutti i punti livellati per rapporto ad un comune piano di paragone.

PUNTI LIVELLATI	ELEMENTI del calcolo	CALCOLO DI dL $dL = K \operatorname{tang} \alpha + h - a$	ORDINATE dei punti livellati	OSSERVAZIONI
		$\log K =$ ———		
———	$K =$ ———	$\log \operatorname{tang} \alpha =$ ———		
	$\alpha =$ ———			
		$\log K \operatorname{tang} \alpha =$ ———		
	$h =$ ———	$K \operatorname{tang} \alpha =$ ———		
		$h - a =$ ———		
———	$a =$ ———		———	
		$dL =$ ———		

All'intelligenza dell'operatore è confidata la scelta di quei punti del terreno, che meglio possono servire a dare risultati, per quanto si può, prossimi al vero; e si può ritenere come regola generale, doversi principalmente prendere in considerazione l'origine, la fine, i cangiamenti di pendenza, i punti culminanti, gli altipiani, le linee di displuvio e quelle d'impluvio, i crocicchi di strade, i varchi, i colli, i passaggi, l'origine dei fiumi, dei torrenti, i loro confluenti, le sorgenti e tutti quei punti che si giudicheranno atti a dare una giusta idea della forma del terreno.

Una linea di displuvio, essendo quella secondo cui si separano le acque pluviali, per prendere scolo a dritta e a sinistra, guardata da un suo punto e dall'alto in basso, ha la minima pendenza fra tutte le linee tracciate sulla superficie del suolo pel medesimo punto, e, osservata dal basso in alto, presenta la pendenza massima. Una tal linea è la più lunga fra tutte le linee del terreno che, partendo da un medesimo punto, vanno alla sezione orizzontale che sta al di-sotto, ed è per conseguenza il luogo geometrico dei punti di regresso delle curve orizzontali. Una linea di displuvio si trova facilmente col-l'eclimetro, misurando l'inclinazione del terreno all'orizzonte secondo diverse direzioni, e prendendo quella cui corrisponde l'angolo più piccolo, se si guarda dall'alto in basso, o l'angolo più grande, se si guarda dal basso in alto. Una linea di displuvio non è generalmente una linea retta, e per compiutamente determinarla, convien far sta-zione in tutti i siti in cui essa cangia pendenza, e prendere gli angoli che fanno fra loro le diverse direzioni, su cui trovansi le varie sue parti.

Non esiste linea di displuvio, o piuttosto si riduce ad un punto su un terreno d'inclinazione uniforme, intorno al punto di stazione, e questo avviene pei terreni che hanno la forma sferica o quella d'un cono retto. Nel cono obliquo il lato più lungo è la linea di dis-pluvio.

Le linee d'impluvio, ossia quelle di riunione delle acque, facili a trovarsi perchè generalmente indicate dai corsi d'acqua formati dagli scoli lungo la superficie del suolo, godono della proprietà ca-ratteristica che, guardate dall'alto in basso, sono linee di massima pendenza, e, guardate dal basso in alto, sono linee di pendenza mi-nima e quindi anche facilmente si possono trovare coll'eclimetro.

Presi i dati per calcolare le differenze di livello fra i punti carat-terizzanti la forma del terreno e fissata l'ordinata di uno di tali punti, si passa al calcolo delle ordinate di tutti gli altri, avvertendo che, potendosi calcolare in diversi modi l'ordinata di un medesimo punto, converrà prendere la media aritmetica di tutti i risultati trovati, escludendo, ben inteso, quelli che si manifestano evidentemente erronei. Le quote definitive si marcano dopo sul piano accanto al punto cui corrispondono, e si passa in seguito al tracciamento delle curve orizzontali, operando come si può apprendere dall'esempio che segue.

Pongasi di avere il piano di una data porzione di superficie terrestre, e che di questa si conoscano le altitudini dei punti A, B, C, D, E, F, G, H, come lo indica la figura 285, e che vogliansi trovare le curve orizzontali coll'equidistanza di 10^m.

La differenza d'altezza fra B ed A essendo $160^m - 110^m,40 = 49^m,60$, la direzione BA sarà intersecata da quattro curve orizzontali: dividendo la distanza orizzontale fra A e B, che suppongo di $501^m,01$ per l'accennata differenza di livello, si avrà nel quoziente $\frac{501,01}{49,60} = 10,101$ il denominatore della pendenza di BA ridotta ad avere per numeratore l'unità, ossia si avrà la *base di pendenza*, ossia ancora quel tanto che bisogna percorrere orizzontalmente sull'accennata retta per innalzarsi nel senso verticale di 1^m. La prima curva posta al disopra di A, dovendo avere per quota 120^m, sarà alta su A di $120^m,00 - 110,40 = 9^m,60$; e facendo il prodotto $10,101 \times 9^m,60 = 96^m,97$, si avrà a qual distanza orizzontale da A cade l'intersezione a della curva quotata 120^m colla direzione AB; dividendo l'intervallo $\overline{a\mathrm{B}}$ in quattro parti eguali, si avranno in b, c, d, i punti delle altre tre curve. Ragionando come si indicò per trovare le intersezioni delle quattro curve orizzontali con BA, si potranno facilmente trovare le intersezioni delle diverse curve orizzontali con BC, BF, BE, BD, FH e DG. Per riprodurre sul disegno le minime accidentalità, si trarrà partito di un abbozzo rilevato a vista, e da cui risulti la configurazione circostanziata del terreno.

Quando l'operazione di rilevamento si eseguisce colla tavoletta, si segnano le curve orizzontali sul luogo stesso dell'operazione: seguendo un tal procedimento, nulla di quanto può servire alla nitida rappresentazione del terreno, sfugge all'occhio esperto: si ritrae quindi una configurazione circostanziata del terreno, e più che si può simile al vero. Operando colla tavoletta, si usa dell'eclimetro annesso alla diottra per misurare gli angoli di elevazione e di depressione, e si ottengono le differenze di livello fra i punti che caratterizzano il sistema generale del terreno, usando della scala di riduzione, come si insegnò nel numero 193.

ARTICOLO VI.

Strumenti a riflessione per le livellazioni

197. **Livello a riflessione di Burel.** — Nelle operazioni planimetriche non solo, ma anche nelle operazioni altimetriche, in cui non si richiede molta esattezza, si possono impiegare alcuni strumenti a riflessione, vantaggiosi sia per la loro semplicità, sia pel piccolo loro volume, sia perchè si possono adoperare a mano.

Il livello a riflessione di Burel merita specialmente di essere considerato, e consiste esso in un piccolo pendolo P (*fig.* 286) portante uno specchietto S, posto nell'interno di un tubo, il quale porta un coperchio C cui è attaccato, nel punto centrale, un nastro N che serve a sostenere l'accennato pendolo, acciocchè possa naturalmente collocarsi nella posizione verticale. Il tubo ha un'apertura AA′, corrispondente all'altezza dello specchio, che si chiude girando il tubo G.

La costruzione e l'uso del descritto strumento sono fondati sul seguente principio: *L'occhio* O *vede la sua immagine* O′ *riflessa nello specchio verticale* S, *alla stessa distanza* $\overline{SO'}=\overline{SO}$ *dietro questo specchio; ed, essendo verticale lo specchio, la linea* OO′ *la quale congiunge la pupilla dell'occhio con quella della sua immagine, è una linea orizzontale.* Cosicchè, per usare di questo strumento per dirigere visuali orizzontali, convien tenerlo ben diritto colla mano, in modo che il suo pendolo non tocchi le pareti interne del tubo, ed innalzarlo finchè l'osservatore vegga l'immagine del suo occhio al di là dello specchio: la linea che, partendo dall'occhio dell'osservatore, va al punto centrale dell'immagine dell'occhio medesimo, è quella che serve a determinare a qual altezza convien portare lo scopo della mira per avere le quote dei punti a livellarsi.

Per verificare l'esattezza di questo strumento, è necessario procurarsi prima una retta orizzontale all'altezza dell'occhio, e verificare se con questa coincide la visuale data dal livello.

198. **Squadro a riflessione adoperato come livello.** — Lo squadro a riflessione (num. 125) si presta a guidare con facilità delle rette orizzontali e quindi a livellare, quando al suo uso aggiungasi quello di una mira. Essendo A e B (*fig.* 287) due punti di cui si vuol trovare la differenza di livello, si pianta a terra, in una direzione inclinata, un bastone CD, alla cui sommità è sospeso un filo a piombo cadente su A, e si fa portare nel punto B una mira.

Collocato lo squadro in D, si guarda direttamente coll'occhio il punto A, nel mentre il porta-mira fa scorrere lo scopo finchè l'osservatore vegga l'immagine della linea di fede nello specchio che gli sta contro ed in direzione del punto A. L'angolo dei due specchi essendo di 45°, ADE sarà di 90°; e poichè AD è verticale, ne segue che DE è orizzontale. Se ora si fa la differenza fra l'altezza $\overline{BE}$ letta sulla mira e l'altezza $\overline{DA}$, si ha la differenza di livello fra B ed A.

199. **Clisimetro a riflessione**. — Praticando un foro nella parte superiore del pendolo di un livello di Burel, e fermando in questo foro un piccolo tubo, entro cui possa scorrere un cilindretto portante alla sua estremità una massa pesante, si ha uno strumento (*fig.* 288) che può comodamente servire a valutare le pendenze. Infatti, facendo più o meno sortire il cilindretto dall'accennato tubo, la massa pesante più o meno si allontana dallo specchio, il quale per conseguenza prende un'inclinazione più o meno grande colla verticale; e dirigendo delle visuali, che seguano linee rette unienti la pupilla dell'occhio col centro dell'immagine della pupilla medesima, si potranno facilmente stimare le loro pendenze, qualora, mediante divisioni, siano segnate le parti di cilindretto che devono trovarsi fuori del tubo per avere date pendenze nelle indicate visuali.

200. **Eclimetro a riflessione** — Uno specchio unito a cerniera ad un regolo facile a disporsi verticale ed un arco graduato, su cui scorre un indice indicante l'angolo della faccia dello specchio coll'asse del regolo medesimo, dànno l'idea di un eclimetro a riflessione. Se un osservatore si colloca innanzi allo specchio di uno strumento così fatto, e se lo gira intorno alla cerniera finchè in una data direzione OC (*fig.* 289) vegga l'immagine della pupilla del suo occhio, l'angolo BDE, che misura l'inclinazione della faccia dello specchio con l'asse DE del regolo disposto verticale, sarà eguale all'angolo COG che la visuale OC fa coll'orizzontale OG.

La verificazione di un tale strumento consisterebbe nel vedere se, quando l'indice segna zero, la visuale determinata dalla pupilla dell'occhio e dall'immagine della pupilla medesima è orizzontale.

201. **Sestante a due specchi adoperato come eclimetro**. — Per avere le distanze zenitali con un sestante a due specchi, è necessario di collimare ad una superficie orizzontale; e nelle operazioni topografiche si può ottenere un orizzonte artificiale mediante una larga goccia di mercurio, rinchiusa in una piccola bottiglia di legno od in altro recipiente qualsiasi. L'uso che si fa di questa goccia è fondato sul seguente principio: *fissando lo sguardo in un liquido in*

riposo, il raggio visuale condotto dall'occhio A (*fig.* 290) *alla sua immagine* B *è esattamente verticale.* Collocato adunque a terra, e nel punto di stazione B, il vaso contenente il mercurio, se si mira in questo, mediante il cannocchiale del sestante, l'immagine del punto del cannocchiale attraversato dal raggio visuale, è allora certo che quel punto è verticalmente al disopra della sua immagine nel mercurio, e che quindi è nella verticale del punto di stazione B. Conducendo dopo l'immagine di un oggetto esteriore, in modo che si veda pure nel mercurio o nello specchio fisso, e facendo coincidere la direzione su cui si trova con quella che contiene l'immagine del punto dello strumento ove passa il raggio visuale, si avrà evidentemente dall'indice del sestante (num. 126) la misura dell'angolo compreso fra la linea condotta all'oggetto osservato e la parte di verticale compresa fra l'occhio ed il mercurio.

Per distinguere chiaramente il punto della verticale nel mercurio, si può collocare sul lembo del sestante, dietro lo specchio fisso, un piccolo pezzo di carta bianca, con una stretta apertura che corrisponda all'asse del cannocchiale dello strumento, e sulla cui parte esteriore sia segnata una linea nera, diretta perpendicolarmente al piano dell'arco graduato ed interrotta soltanto dalla menzionata apertura. Collocato allora il sestante sopra il mercurio, col cannocchiale verticalmente disposto, si scoprirà nel mercurio l'immagine riflessa della linea nera tracciata sulla carta, ed in tal guisa si acquista la certezza che il raggio visuale, condotto dall'immagine della linea predetta nel mercurio all'occhio, non può scostarsi dalla verticale che in ragione di ciò che quella piccola linea non è senza larghezza, e inoltre che l'apertura praticata nella carta ha una certa estensione. Queste sorgenti d'errore però possono essere facilmente attenuate in guisa, che l'errore possibile sia minore di un minuto. Rinvenuta la linea verticale determinata dal raggio visuale, che parte dall'immagine della linea nera riflessa dal mercurio, non si ha che a far coincidere l'immagine d'un oggetto qualunque riflesso sullo specchio mobile con quella della linea nera, per avere nell'angolo segnato dallo strumento quello compreso fra la verticale e la linea condotta dal centro dello strumento all'oggetto osservato: quest'angolo è il supplemento della distanza zenitale.

Osservazione. Nell'usare lo squadro a riflessione come livello (num. 198), invece di servirsi di un bastone e di un piombino per collocarsi nella verticale del punto di stazione, si può anche far suo del vaso contenente il mercurio.

CAPITOLO III.

Copia e riduzione dei disegni.

ARTICOLO I.

Copia dei disegni.

202. **Distinzione fra copia e riduzione, fra riduzione lineare e riduzione superficiale.** — Esposti i metodi da seguirsi, sia per prendere i dati necessarii alla rappresentazione di una determinata porzione di superficie terrestre, sia per costrurre quei disegni da cui devono emergere le superficie, le divisioni, le particolarità ed ondulazioni tutte dei terreni in essi rappresentati, resta da esaminare come, dal disegno primitivo o piano originale, si possano dedurre altri disegni o altri piani, rappresentanti il medesimo terreno nella stessa scala o in iscala diversa.

Ridurre un disegno significa generalmente costrurre una figura simile a quella rappresentata dal disegno stesso; e quest'operazione dà luogo ad una *copia*, ad una *riduzione*, ad un *ingrandimento* o *ampliazione*, secondo che il disegno a farsi dev'essere in iscala eguale, più piccola o più grande di quella del disegno dato; oppure secondo che il rapporto, esistente fra le linee omologhe o fra le aree della figura a farsi e di quella data, è eguale, minore o maggiore dell'unità. Quando questo rapporto è quello esistente fra le linee omologhe, si ha una *riduzione lineare;* e si ha invece una *riduzione superficiale* quando esso è quello delle aree.

203. **Compasso a tre punte e compasso a verga.** — Varii sono i mezzi conosciuti per copiare i disegni, ed importando sempre di dover rapportare sul foglio della copia alcuni punti essenziali, credo conveniente di far cenno del *compasso a tre punte* e del *compasso a verga* o *fedele,* essendo questi strumenti molto in uso per tale operazione.

Il compasso a tre punte consiste in un compasso ordinario a due punte, a cui se ne trova annessa una terza che può muoversi intorno ad un asse perpendicolare al piano degli assi delle prime, e intorno ad un asse a questo piano parallelo. Il descritto strumento serve a collocare un punto sulla carta, conoscendosi le sue distanze da due altri già fissati, ed il modo di servirsene è così ovvio, che si crede superflua ogni ulteriore spiegazione.

Il compasso a verga è formato da un regolo di legno forte o di acciaio, lungo cui possono scorrere due punte, pure in acciaio, annesse a due cerniere A e B (*fig.* 291). La prima di queste porta all'estremità una vite di richiamo C che, mediante piccoli movimenti, serve ad allontanare o ad avvicinare le due accennate punte, mentre la seconda può liberamente scorrere lungo il regolo. Per prendere una lunghezza con questo strumento, si porta la punta A ad una delle estremità della lunghezza data, e si fa scorrere la cerniera B finchè la punta corrispondente si trovi sull'altra estremità; siccome però ben difficilmente succede che, nel fermare quest'ultima cerniera colla vite superiore, la punta corrispondente si mantenga esattamente a questa estremità, suolsi a dirittura fissare su quest'ultima la punta B, e colla vite di richiamo C si porta l'altra punta all'estremità opposta.

204. **Delineamento e metodi usati per copiare i disegni.** — La prima operazione a farsi per copiare un disegno è il *delineamento*, che consiste nel segnare sul foglio di carta che deve ricevere la copia, con un tratto leggiero della matita, le linee principali del modello, come strade, corsi d'acqua, cinte di città, divisioni di colture, ecc. (se trattasi di un piano). Con ciò si ottiene l'andamento generale delle linee del modello, alle quali riuscirà poi facile annettere il disegno dei particolari, collegandoli esattamente alle linee principali già tracciate. I metodi che si possono seguire per avere un delineamento esatto sono quelli che seguono.

Copia per intersezioni. Costrutto sul foglio che deve ricevere la copia il quadro $a'b'c'd'$ eguale al quadro $abcd$ del disegno a copiarsi (*fig.* 292), si fissano tutti i punti in cui le linee a copiarsi vengono ad incontrarlo; così si determina il punto e' rappresentativo di e, prendendo $\overline{a'e'}=\overline{ae}$. Determinati tutti i punti e', f', g', h', i', k', si trovano le posizioni di quelli collocati nell'interno del quadro servendosi delle distanze che essi hanno o da due vertici del quadro medesimo o da due punti già fissati, procurando, per quanto è possibile, che le intersezioni succedano ad angolo sensibilmente retto. Così, per avere il punto l', si può far centro in b', con apertura di compasso eguale a $\overline{bl}$ descrivere un arco, e segare questo con un secondo arco di centro c' e di raggio $\overline{cl}$: analogamente, per avere il punto m', basta descrivere due archi, l'uno di raggio $\overline{cm}$ e l'altro di raggio $\overline{fm}$, il primo col centro in c' ed il secondo col centro in f'.

Quest'operazione, fatta col compasso a tre punte, diventa assai più spedita, imperocchè, per fissare l', basta aprire il compasso finchè una punta sia su b e l'altra su c, portare l'altra punta su l e disporre le prime due punte su b' e c': il punto domandato sarà nel sito ove cade la terza punta.

Copia colle coordinate. Si conducano sul piano di cui vuolsi la copia due assi di coordinate ortogonali xx_1 ed yy_1 (*fig.* 293), generalmente in guisa che dividano per metà i lati opposti del quadro; si disegni un egual quadro non che gli accennati assi nel nuovo foglio; e si faccia la copia fissando parecchi punti che occupino, rispetto agli assi $x'x'_1$ ed $y'y'_1$ la stessa posizione che hanno i punti singolari del disegno a copiarsi rispetto agli assi in esso tracciati: così si colloca a sito il punto a' rappresentativo di a prendendo $\overline{o'b'}=\overline{ob}$ e portando perpendicolarmente alla $x'x'_1$ la $\overline{b'a'}=\overline{ba}$.

Copia colla reticola. Si copia un piano colla reticola incominciando dal costrurre, nel foglio che deve ricevere la copia, il quadro eguale a quello del foglio dato, e determinando, sì sull'uno che sull'altro degli accennati fogli, tanti scompartimenti rettangolari eguali (*fig.* 294) mediante due sistemi di rette parallele, tra loro perpendicolari. I due quadri $abcd$, $a'b'c'd'$ risulteranno coperti da un egual numero di piccoli rettangoli corrispondenti, tali da poter trasportare i punti a vista, o meglio ancora coll'aiuto del compasso ordinario: così il punto e, collocato su un lato della reticola, si porta a sito in e' osservando fra quali rettangoli cade, prendendo $\overline{f'e'}=\overline{fe}$; similmente si porta a sito il punto g' rappresentativo di g, prendendo $\overline{i'h'}=\overline{ih}$ e perpendicolarmente $\overline{h'g'}=\overline{hg}$.

Copia con parallele ai lati del quadro. Costrutto il quadro $a'b'c'd'$ (*fig.* 295) in tutto eguale al quadro $abcd$ dell'originale, si fissa, per esempio, il punto rappresentativo di e, guidando per esso le fg ed hi rispettivamente parallele ad ab e a bc, prendendo $\overline{a'f'}=\overline{b'g'}=\overline{af}=\overline{bg}$ e $\overline{a'i'}=\overline{d'h'}=\overline{ai}=\overline{dh}$, e conducendo le rette $f'g'$, $h'i'$ che nella loro intersezione e' danno il punto domandato. Lo stesso dicasi per fissare un altro punto qualunque.

Copia col vetro. Per copiare col vetro si dispone questo in modo da trovarsi opposto alla luce, e vi si sovrappone, prima il disegno che si vuol copiare e poi il foglio su cui si vuol fare la copia. Attraverso al vetro riuscirà agevole di scoprire le linee del disegno, messe in chiaro dalla luce che viene al di sotto del vetro medesimo, e facile sarà di tracciare esattamente gli andamenti ed i contorni del modello. Questo processo è facile e spedito; esso però non si può generalmente applicare ai piani costrutti in piccola scala, imperocchè le molte linee sottili e vicine, su essi segnate, riescono poco distinte a cagione della debole trasparenza cagionata dalla spessezza della carta.

Copia colla carta trasparente. Si fissa un foglio di carta trasparente sopra il disegno, e si riproduce esattamente su quello la traccia dei contorni sottostanti. Si mette questo calco sopra il foglio della copia: collocandone frammezzo un altro finissimo spalmato di nero, e, decalcando con un punteruolo tutte le linee segnate sulla carta trasparente, rimarranno sul foglio sottostante le tracce di tutte le linee percorse col punteruolo, e che immediatamente si segneranno colla matita. Questo metodo è molto usato, perchè dà una sufficiente esattezza, e perchè si può conservare intatto l'orginale.

Copia col punteggiamento. Quest'operazione, applicabile alla copia di quei disegni in cui non si hanno che a segnare linee poligonali, consiste nel sovrapporre il modello alla carta su cui vuolsi fare la copia, e nel forarlo con un ago finissimo in tutti i vertici, per ottenere sul sottoposto foglio tanti punti che, uniti fra loro con linee rette, costituiscono la copia domandata.

ARTICOLO II

Riduzione dei disegni.

Riduzione lineare.

205. **Teorema.** — *Le linee omologhe di due disegni, di cui l'uno sia la riduzione dell'altro, stanno fra loro come le rispettive scale.*

Essendo d e d' le lunghezze di due linee omologhe, esistenti la prima in un disegno costrutto alla scala dell'$\frac{1}{m}$, e la seconda in un disegno eseguito alla scala dell'$\frac{1}{m'}$; siccome le lunghezze effettive rappresentate da d e d' devono essere eguali, si avrà (num. 8)

$$dm = d'm',$$

che si può trasformare in

$$\frac{d}{d'} = \frac{m'}{m},$$

d'onde si ricava la proporzione

$$d : d' :: m' : m \qquad (1),$$

i cui ultimi due termini, divisi pel prodotto mm', dànno

$$d : d' :: \frac{1}{m} : \frac{1}{m'} \qquad (2).$$

La proporzione (2) contiene la dimostrazione dell'enunciato teorema, e la proporzione (1) indica che il medesimo teorema si può enunciare dicendo che *le linee omologhe di due disegni, di cui l'uno sia la riduzione dell'altro, stanno nell'inversa dei denominatori delle rispettive scale, essendo i numeratori eguali all'unità.*

206. **Angolo di riduzione e scala di riduzione.** — Il problema della riduzione lineare può essere proposto in due diversi modi : o si domanda di ridurre un disegno da una scala in un'altra, o si domanda di ridurre un disegno in guisa che le dimensioni lineari del disegno a farsi stiano a quelle del disegno dato come due numeri m ed n, ciò che significa anche ridurre un disegno in modo che le dimensioni lineari del disegno a costruirsi siano $\frac{m}{n}$ di quelle del disegno dato. Allorquando si ha la scala del disegno che vuolsi ridurre, il secondo caso si conduce al primo trovando la scala del nuovo disegno coll'applicazione del premesso teorema; perchè nei numeri dati si ha il rapporto delle dimensioni lineari, che dev'essere eguale a quello delle scale. Costrutte le due scale, e scomposta la figura a ridursi, colle norme generali già date parlando del rilevamento, si potrebbero prendere su questa colla corrispondente scala e col semicircolo da tavolino gli elementi tanto lineari quanto angolari necessarii a costrurre un'altra figura ad essa simile, e questi, marcati sul disegno dato o su un abbozzo del medesimo, si presteranno a costurre nella conveniente scala la riduzione domandata. Da tale operazione lunga e penosa si può aspettare una sufficiente esattezza, quando si segua il metodo delle perpendicolari o delle coordinate, scegliendo come linea di base i lati del quadro o due perpendicolari condotte pei loro mezzi; oppure quando si adoperi il metodo di determinare ciascun punto, riferendosi a due altri punti già fissati e da cui si hanno le distanze, procurando che le intersezioni degli archi si facciano, per quanto si può, ad angolo retto. Più spedito però, più facile e più ordinato riuscirà sempre il procedimento usando dell'*angolo di riduzione*,

che chiunque può costruirsi colla massima facilità, come si può scorgere dall'esempio particolare qui sotto esposto.

Sia X (*fig.* 296) un poligono o piano costrutto nella scala del 1/800 e di cui vuolsi la riduzione alla scala del 1/1500. Le dimensioni lineari di due disegni, di cui l'uno sia la riduzione dell'altro, stando nell'inversa dei denominatori delle rispettive scale, si avrà che, nel caso particolare proposto, le dimensioni lineari del disegno a costruirsi devono stare a quelle del disegno dato $:: 8 : 15$. Condotta ora una retta indefinita AY, si porti su essa una lunghezza $\overline{AB}$ di 15 parti e, fatto centro in A, con apertura $\overline{AB}$ si descriva un arco indefinito By; centro in B e con apertura $\overline{BC}$ eguale ad 8 parti, si descriva un secondo arco segante il primo in D; si tiri la retta AZ, e l'angolo YAZ sarà il dimandato angolo di riduzione. Per compiere l'operazione, si scomponga il poligono dato in triangoli o, meglio, condotta la linea di base ab, si abbassino dai diversi vertici le perpendicolari cc', dd' ecc.; si porti la distanza $\overline{ab}$ da A in p e da A in q sui lati dell'angolo A, e $\overline{pq}$ sarà la lunghezza omologa di $\overline{ab}$, che si porterà in $\overline{a_1 b_1}$ sul foglio in cui dev'essere disegnata la riduzione.

Infatti, per essere $\overline{pq}$ parallela a $\overline{BD}$, risulta

$$\overline{pq} : \overline{Ap} :: \overline{BD} : \overline{AB} :: 8 : 15.$$

Operando sopra tutte la parti $\overline{ac'}$, $\overline{ad'}$ ecc. della base, non che sulle perpendicolari $\overline{cc'}$, $\overline{dd'}$ ecc., come si è operato sulla base intera, si ridurrà facilmente il poligono X nel suo simile x.

Dal citato esempio si può conchiudere che l'angolo di riduzione non è altro se non che l'angolo al vertice d'un triangolo isoscele, in cui la base ed il lato sono due lunghezze rispettivamente proporzionali ai numeri esprimenti il rapporto fra le dimensioni lineari del disegno a costruirsi e quelle del disegno dato. Segue da ciò che, avendosi, invece delle due scale, il detto rapporto, per esempio, $:: 3 : 7$ (che equivale a 3/7), si costrurrà il corrispondente angolo di riduzione, trovando l'angolo al vertice di un triangolo isoscele in cui il lato sia 7 e la base 3, e si userà di questo angolo come già si è indicato.

All'angolo di riduzione suolsi talvolta sostituire la scala di riduzione. Supponendo che il rapporto fra le dimensioni lineari del disegno a farsi e quelle del disegno dato sia, per esempio, $:: 8 : 15$, si operi come segue; tirate le rette AY e AZ (*fig.* 297) sotto un angolo qualunque, si prendano su esse, a partire da A, le lunghezze $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ in guisa che abbia luogo la proporzione $\overline{AB} : \overline{AC} :: 8 : 15$; si tiri la BC: si avrà la riduzione di una retta qualunque $\overline{ab}$ dell'originale (*fig.* 296), portandola su AY da A in p, conducendo la pq parallela a BC, e prendendo la $\overline{Aq}$. Per rendere l'operazione più spedita, è uso di tracciare nell'interno dell'angolo tante rette parallele alla BC assai sottili, molto vicine ed equidistanti fra loro, numerate a partire da A: si ottiene la retta $\overline{Aq}$ omologa di $\overline{Ap}$, osservando come, cadendo il punto p fra i numeri 10 e 11 della AY, il punto q deve cadere fra gli stessi numeri della AZ.

Si ottiene un'altra scala di riduzione tracciando due rette AB e BC (*fig.* 298) fra loro perpendicolari, e tali che esista la proporzione $\overline{BC} : \overline{AB} :: 8 : 15$; conducendo pei punti B e C le rette AY e AZ, e guidando poscia nell'interno dell'angolo YAZ tante parallele alla BC fra loro equidistanti. Per eseguire la riduzione si portano le linee dell'originale sulla AY a partire da A, e le omologhe si hanno nelle perpendicolari corrispondenti.

207. **Riduzione colla reticola**. — Il metodo della reticola, che molto si usa per la riduzione dei piani, si applica come segue: essendo $abcd$ (*fig.* 299) il quadro contenente il piano da ridursi, in modo che le dimensioni lineari del disegno a farsi sieno in un dato rapporto con quelle dell'originale, si costruisca il corrispondente angolo o la corrispondente scala di riduzione; trovate le lunghezze omologhe di $\overline{ab}$ e $\overline{bc}$, si faccia con esse il quadro $a'b'c'd'$ sul foglio che deve ricevere la riduzione, e si dividano nell'egual numero di parti eguali i lati corrispondenti dei rettangoli $abcd$, $a'b'c'd'$. Unendo con linee rette i punti di divisione opposti, gli accennati rettangoli risulteranno coperti da un egual numero di rettangoli simili corrispondenti, sufficientemente piccoli da potersi trasportare i punti a vista, o meglio coll'aiuto dell'angolo e della scala di riduzione, impiegando un metodo in tutto analogo a quello già insegnato per copiare colla reticola.

Le ampliazioni dei piani si eseguiscono cogli stessi metodi indicati per le riduzioni; esse però si devono evitare, per quanto è possibile, perchè difettose e soggette ad errori provenienti sia dall'ingrandimento di quelli che porta con sè il piano che si amplia, sia dalla natura stessa dell'operazione.

208. **Problemi sulla riduzione lineare**. — A compiere l'argomento della riduzione lineare, si crede utile di esaminare i seguenti problemi pratici.

I. *Trovare le dimensioni del quadro che alla scala dell'1/2500 deve rappresentare un piano già disegnato alla scala dell'1/1200 contenuto in un quadro di $0^m,60$ di lunghezza per $0^m,40$ di larghezza od altezza.*

Chiamando x ed y i lati del nuovo quadro, rispettivamente omologhi a quelli del quadro dato lunghi $0^m,60$ e $0^m,40$, si avrà, dietro il teorema esposto al numero 205.

$$x = \frac{1200 \times 0,60}{2500} = 0^m,288, \quad y = \frac{1200 \times 0,40}{2500} = 0^m,192,$$

d'onde si deduce che le dimensioni del nuovo quadro devono essere, $0^m,288$ la lunghezza e $0^m,192$ la larghezza od altezza.

Col medesimo procedimento si può trovare da qual lunghezza vien rappresentata nel piano ridotto una qualsiasi lunghezza grafica del piano dato.

II. *Un piano disegnato nella scala dell'1/2500 è contenuto in un quadro di lati $0^m,60$ per $0^m,45$; volendosi ridurre questo piano in modo che il lato del quadro della riduzione, omologo a $0^m,60$, sia $0^m,48$, si domanda l'altro lato del nuovo quadro e la scala in cui devesi eseguire la riduzione.*

Chiamando x il lato del nuovo quadro omologo a $0^m,45$, e osservando che i due quadri sono rettangoli simili, si avrà

$$x = \frac{0,48 \times 0,45}{0,60} = 0^m,36.$$

indicando poi con z, il denominatore della scala del piano ridotto, esso sarà dato da (num. 205)

$$z = \frac{0,60 \times 2500}{0,48} = 3125.$$

Il lato del nuovo quadro omologo a quello lungo $0^m,45$ sarà adunque 0^m36, e la scala in cui dev'essere eseguita la riduzione sarà dell'1/3125.

III. *Otto piani, disegnati alla scala dall'1/1500, disposti come si vede nella figura 300, e contenuti ciascuno in un quadro di $0^m,70$ per $0^m,50$, si vogliono ridurre in un sol foglio alla scala dell'1/5000;*

si domandano le dimensioni del quadro che deve contenere la riduzione.

Collocando gli otto quadri l'uno di seguito all'altro, si forma un quadro solo di $2^m,00$ per $1^m,40$, per cui chiamando x ed y le dimensioni del nuovo quadro, si potranno dedurre i seguenti valori (num. 205)

$$x = \frac{1500 \times 2,00}{5000} = 0^m,60, \qquad y = \frac{1500 \times 1,40}{5000} = 0^m,42.$$

I lati adunque del nuovo quadro saranno $0^m,60$ e $0^m,42$.

Riduzione superficiale.

209. **Teorema.** — *Le superficie di due disegni, di cui l'uno sia la riduzione dell'altro, stanno fra loro come i quadrati delle rispettive scale.*

Essendo $\frac{1}{m}$ e $\frac{1}{m'}$ le scale di due disegni, l ed l' due lunghezze omologhe, S e S′ le loro superficie, si avrà, in virtù del teorema dimostrato nel numero 205,

$$l : l' :: \frac{1}{m} : \frac{1}{m'}.$$

Elevando al quadrato i quattro termini di questa proporzione, si deduce

$$l^2 : l'^2 :: \left(\frac{1}{m}\right)^2 : \left(\frac{1}{m'}\right)^2.$$

Osservando ora che i due disegni sono figure simili, e che perciò le loro aree stanno come i quadrati dei lati omologhi, si può porre quest'altra proporzione

$$S : S' :: l^2 : l'^2,$$

che, paragonata alla seconda, conduce a quest'altra contenente la dimostrazione del citato teorema

$$S : S' :: \left(\frac{1}{m}\right)^2 : \left(\frac{1}{m'}\right)^2.$$

Moltiplicando i due termini del secondo rapporto di quest'ultima proporzione per $m^2\,m'^2$, si deduce

$$S : S' :: m'^2 : m^2;$$

ossia che *le superficie di due disegni, di cui l'uno sia la riduzione dell'altro, stanno nella ragione inversa dei quadrati dei denominatori delle scale, essendo i numeratori eguali all'unità.*

210. **Modo di far dipendere un problema di riduzione superficiale da un altro di riduzione lineare**. — Sia un piano disegnato alla scala dell'$\frac{1}{m}$ e sia proposto di farne la riduzione in modo, che l'area del piano a farsi stia a quella del piano dato $:: p : q$; o, identicamente, che l'area del piano a costruirsi sia $\frac{p}{q}$ di quella del piano dato. Le aree dei due piani essendo qui rappresentate coi numeri proporzionali p e q, e stando esse nell'inversa dei quadrati dei denominatori delle rispettive scale, si avrà, chiamando x il denominatore della scala del nuovo piano,

$$x = m\sqrt{\frac{q}{p}}.$$

La scala del nuovo piano sarà dunque dell' $\dfrac{1}{m\sqrt{\frac{q}{p}}}$, e quindi la riduzione si potrà condurre a compimento colle norme date parlando della riduzione lineare. Se la scala del disegno dato fosse dell'1/2000, e se la superficie di quello a costruirsi dovesse stare a quella del dato $:: 4 : 9$, si avrebbe

$$x = 2000\sqrt{\frac{9}{4}} = 3000,$$

e quindi la nuova scala dell'1/3000.

La scala, che qui sopra venne determinata numericamente, si può anche avere graficamente colla seguente costruzione: si prenda in $\overline{AB}$ (*fig.* 301) tutta o una parte qualsivoglia della scala del piano dato; supponendo che sia $q > p$, si divida $\overline{AB}$ in un numero q di parti eguali, ciascuna delle quali sarà eguale ad $\frac{\overline{AB}}{q}$; sulla retta $\overline{AB}$ si descriva una semicirconferenza e, presa una porzione $\overline{AC}$ che conti p delle parti eguali ad $\frac{\overline{AB}}{q}$, si innalzi la perpendicolare $\overline{CD}$ alla $\overline{AB}$ fino all'incontro colla semicirconferenza in D: $\overline{AD}$ sarà la scala o parte di scala del disegno ridotto, corrispondente alla scala o parte di scala $\overline{AB}$ del disegno dato; cosicchè se $\overline{AB}$ rappresenta, per esempio, 200 metri nella scala del piano dato, la $\overline{AD}$ rappresenterà 200^m nella scala del piano a costruirsi. — Per provare l'esattezza di questo procedimento, convien far vedere che i quadrati di $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$ stanno fra di loro come i numeri p e q esprimenti le aree dei due piani, il che consegue immediatamente dal triangolo ADB rettangolo in D in cui il quadrato del cateto $\overline{AD}$ deve stare al quadrato dell'ipotenusa $\overline{AB}$ come il segmento $\overline{AC}$, adiacente al cateto considerato, sta all'ipotenusa $\overline{AB}$; cosicchè si avrà

$$\overline{AD}^2 : \overline{AB}^2 :: AC : AB :: p : q.$$

211. **Scala di riduzione superficiale.** — Sia un piano contenuto nel quadro *abcd* (*fig.* 299), e si debba fare la riduzione in modo che l'area del piano a costruirsi stia a quella del piano dato $:: p : q$. Presa una retta $\overline{AC}$ (*fig.* 302) lunga $p+q$ parti eguali, descrivasi su essa, come diametro, una semicirconferenza; determinata la $\overline{AB}$ di q parti, s'innalzi pel suo estremo la perpendicolare $\overline{BD}$, fino all'incontro colla semicirconferenza, e si conducano le rette indefinite DY e DZ passanti, la prima per A e la seconda per C. Essendo il triangolo ADC rettangolo in D, e stando i quadrati dei cateti come i segmenti adiacenti dell'ipotenusa, si ha la proporzione

$$\overline{DC}^2 : \overline{DA}^2 :: BC : BA :: p : q,$$

e di qui si vede che, se $\overline{DA}$ è una linea dell'originale, $\overline{DC}$ ne è la sua riduzione; cosicchè queste due lunghezze, disposte come sono, servono a determinare una scala di riduzione. Volendosi, per esempio, trovare la dimensione del nuovo quadro omologa ad $\overline{ab}$, si porterà questa su DY in $\overline{DE}$, si condurrà la EF parallela ad AC, e $\overline{DF}$ sarà la lunghezza ridotta. Collo stesso metodo si troverà il lato $\overline{DH}$ omologo di $\overline{bc}$. Costrutto il quadro della riduzione, si procederà come al numero 207 per tracciare i piccoli rettangoli e per riportare gli oggetti tutti dell'originale, adoperando la figura 302 come scala di riduzione. Per rendere l'operazione più spedita, si traccieranno sull'accennata figura tante rette sottili, equidistanti e parallele alla AC.

212. **Problemi sulla riduzione superficiale**. — I. *Trovare le dimensioni da darsi ad un quadro, che deve contenere la riduzione di un piano, già disegnato alla scala dell'*1/2000 *e contornato da un quadro di* $0^m,80$ *per* $0^m,60$, *colla condizione che la superficie del piano ridotto sia* 1/16 *della superficie del piano originale.*

Chiamando x il lato del nuovo quadro omologo a quello lungo $0^m,80$, y l'altro lato, e osservando che, assumendo eguale ad 1 la superficie del quadro ridotto, quella dell'originale dev'essere 16, si avranno

$$x=\sqrt{\frac{1\times(0,80)^2}{16}}=0^m,20,\quad y=\sqrt{\frac{1\times(0,60)^2}{16}}=0^m,15.$$

II. *Dato un piano alla scala dell'*1/1000, *contenuto in nove quadri eguali disposti su tre file di tre fogli ciascuna, ridurlo in un sol quadro delle stesse dimensioni del primo.*

Questo problema sarà perfettamente risoluto quando si conosca in quale scala dev'essere eseguito il nuovo disegno. Ora, per l'enunciato stesso della quistione, dovendo l'area del piano ridotto stare a quella del piano risultante dall'unione dei nove fogli :: 1 : 9, e stando le superficie nell'inversa dei quadrati dei denominatori delle scale (num. 209), si avrà, chiamando x il denominatore della scala cercata,

$$x=\sqrt{\frac{9\times1000^2}{1}}=3000;$$

e quindi la scala del nuovo piano sarà dell'1/3000.

Strumenti per la riduzione dei disegni.

213. **Compasso di riduzione**. — Il compasso di riduzione è costituito da due sovrapposte verghe uguali AB e CD (*fig.* 303), che portano una punta ad ognuno dei loro estremi e che sono mobili attorno ad un perno P, il quale, oltre di servire loro di asse di

movimento ed a tenerle unite, può traslocarsi in modo che una lineetta segnata su un pezzo al medesimo annesso venga a coincidere con una delle divisioni che trovansi generalmente sopra una delle due facce delle accennate verghe, e che hanno incise accanto le frazioni 1/2, 1/3, 1/4 ecc. Fissato il perno in un determinato sito, e aperto il compasso in un modo qualunque, i due triangoli APC, BPD isosceli, cogli angoli al vertice eguali, sono simili; cosicchè, se $\overline{PA}$ vale 1/2 o 1/3 o 1/4 ecc. di $\overline{PB}$, sarà $\overline{AC}$ pure 1/2 o 1/3 o 1/4 ecc. di $\overline{BD}$.

L'uso del descritto strumento è semplicissimo: volendosi, per esempio, ridurre un disegno in modo che le dimensioni lineari del disegno a farsi siano 1/5 di quelle del disegno dato, si porterà la lineetta del perno nella divisione della verga segnata 1/5: tutte le lunghezze prese sul disegno dato colle due punte B e D si troveranno ridotte al loro quinto nelle distanze fra le due punte A e C.

Volendosi ridurre un disegno in un rapporto non segnato sullo strumento, si colloca a sito il perno per tentativi: così, se le dimensioni lineari del disegno ridotto devono essere 2/7 di quelle dell'originale, si trasporterà il perno per tentativi finchè, aprendo il compasso in modo che la distanza fra le due punte B e D sia di sette unità, quella fra le punte A e C sia solo di due unità.

214. **Uso del compasso di proporzione per le riduzioni lineari**. — Il compasso di proporzione può utilmente servire per la riduzione lineare dei disegni, in quanto le linee delle parti eguali si possono disporre facilmente come angolo di riduzione. Per questo fine, fissato il rapporto $\frac{m}{n}$ fra le dimensioni del disegno a farsi e quelle del disegno dato, si apra il compasso in modo che, fra i punti delle linee delle parti eguali segnati n o un multiplo qualsiasi di n, corra una distanza pari ad m o a un multiplo eguale di m. Ciò fatto, data una dimensione qualsiasi dell'originale, si troverà la omologa del disegno a farsi, portando la dimensione del disegno dato sopra una delle linee delle parti eguali, notando il punto ove essa termina, e prendendo la distanza fra questo punto ed il punto egualmente notato sull'altra linea delle parti eguali.

215. **Uso del compasso di proporzione per le riduzioni superficiali**. — Le linee dei piani (num. 18), egualmente lunghe delle linee delle parti eguali, sono destinate a dare i lati omologhi di figure piane simili fra di loro, in cui il rapporto delle superficie è quello dei numeri compresi da 1 a 64. Le distanze di ciascuna

divisione delle linee dei piani dal centro del movimento si deducono rappresentando col numero **64** l'area della più gran figura, cioè di quella che ha per uno de' suoi lati le 200 divisioni della linea di parti eguali, e trovando, mediante la proporzionalità delle aree delle figure simili ai quadrati dei lati omologhi, le lunghezze corrispondenti alle aree rappresentate dai numeri 1, 2, 3, ecc. fino a 64. Segue da ciò, che i quadrati delle distanze, che le singole divisioni delle linee dei piani hanno dal centro del moto, devono stare fra di loro come i numeri apposti ai loro estremi.

Avendosi una figura qualunque, si dispone lo strumento per farne la riduzione, colla condizione che l'area del poligono dato sia $\frac{n}{m}$ di quella del poligono a farsi, aprendo il compasso in modo che fra le divisioni delle linee dei piani segnate n corra una distanza eguale a quella che la divisione m di una delle linee dei piani ha dal centro del movimento. Ciò fatto, si trova la lunghezza omologa di una linea qualunque del disegno dato, portando questa a partire dal centro del moto su una linea dei piani, notando il punto ove essa termina, e prendendo la distanza che questo ha dal punto egualmente notato sull'altra linea dei piani. Infatti, supponendo che siano A e B (*fig.* 7) le due divisioni segnate n, che l'intervallo $\overline{AB}$ sia eguale alla distanza che passa fra il centro del moto e la divisione marcata m, che la retta di cui si cerca la omologa cada in $\overline{CA'}=\overline{CB'}$, dietro quanto venne detto, si ha

$$\overline{CA}^2 : \overline{AB}^2 :: n : m;$$

ma, per essere i due triangoli CAB e CA′B′ simili, si ha pure

$$\overline{CA}^2 : \overline{AB}^2 :: \overline{CA'}^2 : \overline{A'B'}^2,$$

le quali proporzioni dànno origine a questa terza

$$\overline{CA'}^2 : \overline{A'B'}^2 :: n : m,$$

il che fa vedere essere $\overline{CA'}$ e $\overline{A'B'}$ lunghezze omologhe di due figure simili, le cui aree stanno $:: n : m$.

216. **Descrizione del pantografo a quattro righe.** — Il pantografo si compone generalmente di quattro regoli AF, AG, BE e DE uniti da un egual numero di articolazioni A, B, E, D (*fig.* 504),

in modo che dal loro assieme risulti sempre un parallelogramma di cui possono variare i soli angoli. In un punto fisso C trovasi un calcatoio; in P è collocato un asse o perno, che può divenire asse di rotazione dell'intero strumento, quando venga esso fissato in una massa di piombo munita al di sotto di alcune punte di acciaio assai brevi, ma molto acute per assicurare la posizione dell'accennata massa sul piano d'appoggio; in S finalmente trovasi una matita o segnatoio, che, nella rotazione dello strumento, deve descrivere il perimetro o parte di perimetro di una figura simile a quella il cui perimetro o parte di perimetro viene percorsa dal calcatoio. Per rendere più dolci i movimenti del pantografo si fa generalmente in guisa che esso appoggi su tre rotelle disposte, una nel vertice A, la seconda all'estremo F e la terza all'estremo G. Il tubetto che porta la matita è sormontato da un piattello nel quale si può collocare un peso più o meno grande, in ragione della durezza della matita e della grossezza delle linee che si vogliono tracciare. Un filo, che, partendo dal calcatoio, va ad avvolgersi ad una rotella avente il suo asse parallelo a quello dell'articolazione A e ad unirsi alla parte inferiore del porta-matita, serve all'innalzamento di questo ultimo nel senso verticale, onde impedire il tracciamento di linee inutili allorquando si vuol trasportare lo strumento da una posizione all'altra.

217. **Teoria del pantografo a quattro righe.** — Supponendo il pantografo ridotto alle quattro linee AF, AG, BE, DE (*fig.* 305), passanti per le sue quattro articolazioni, la teoria del medesimo si riduce a far vedere che, girando lo strumento intorno al perno P, il segnatoio collocato in S sulla retta CP deve descrivere il perimetro di una figura simile a quella il cui perimetro si fa percorrere al calcatoio. Perciò si consideri lo strumento in una primitiva posizione col calcatoio in C al principio di una linea poligonale $CC'C''C'''$, e s'immagini condotta dal punto P la retta PX parallela ad AG: per essere i tre punti S, P e C in linea retta, i due triangoli CPX, PSD saranno simili, e si potrà quindi instituire la proporzione

$$\overline{CX} : \overline{PD} :: \overline{PX} : \overline{SD}.$$

Se ora si considera lo strumento nella posizione che prende quando il calcatoio, dopo d'aver percorso il lato $\overline{CC'}$, è passato in C'; siccome i lati del parallelogramma A'B'E'D' non sono diversi dei lati del parallelogramma ABED, e siccome non hanno cangiato di posizione sulle rispettive righe il calcatoio, il perno ed il segnatoio, risulteranno $\overline{PX'}=\overline{PX}$, $\overline{C'X'}=\overline{CX}$, $\overline{PD'}=\overline{PD}$, $\overline{S'D'}=\overline{SD}$; per modo che, sussistendo la proporzione qui sopra stabilita, deve sussistere anche quest'altra

$$\overline{C'X'}:\overline{PD'}::\overline{PX'}:\overline{S'D'},$$

la qual proporzione ci porta a conchiudere la similitudine dei due triangoli $C'PX'$, $PS'D'$, e quindi il conservarsi in linea retta il calcatoio, il perno ed il segnatoio, per qualunque posizione dello strumento.

Premesso questo, se si considera lo strumento nella sua primitiva posizione, si avrà dai due triangoli simili CPX e PSD, osservando che $\overline{PX}=\overline{DA}$,

$$\overline{PC}:\overline{PS}::\overline{DA}:\overline{DS};$$

e se si considera lo strumento nella seconda posizione, si avrà dai due triangoli simili $C'PX'$ e $PS'D'$, osservando pure che $\overline{PX'}=\overline{D'A'}=\overline{DA}$ e che $\overline{D'S'}=\overline{DS}$,

$$\overline{PC'}:\overline{PS'}::\overline{DA}:\overline{DS};$$

e da queste ultime due proporzioni si deduce

$$\overline{PC}:\overline{PS}::\overline{PC'}:\overline{PS'},$$

ossia che i due triangoli CPC' e SPS' sono simili, siccome aventi un angolo eguale compreso fra due lati rispettivamente proporzionali. Se ora si porta successivamente il calcatoio da C' in C'', da C'' in C''', il segnatoio passerà pure da S' in S'', da S'' in S''', i triangoli $C'PC''$ e $C''PC'''$ saranno rispettivamente simili a $S'PS''$ e $S''PS'''$, e quindi la linea poligonale $SS'S''S'''$, descritta dal segnatoio, sarà simile all'altra $CC'C''C'''$ descritta dal calcatoio, e starà a questa nel rapporto delle distanze di S e di C dal perno P.

Disponendo in una medesima linea retta il calcatoio, il perno ed il segnatoio, il perimetro descritto da quest'ultimo è adunque simile a quello descritto dal primo; resta a vedersi come si possa rendere utile il pantografo per la pratica operazione di ridurre i disegni, combinando le cose in modo da poter almeno variare, secondo le circostanze usuali della pratica, il rapporto fra le dimensioni della figura data e quelle della figura a costruirsi. Questo cangiamento si può conseguire in tre diversi modi, variando cioè due delle posizioni del calcatoio, del perno e del segnatoio, e trasportandoli lungo i regoli su cui possono scorrere, mediante opportuni cursori, fino a trovarsi in coincidenza con indici convenientemente determinati e numerati coi numeri 1/2, 1/3, 1/4, ecc.; perchè tali indici determinano appunto una disposizione tale nel calcatoio, perno e segnatoio da essere le lunghezze delle linee descritte da quest'ultimo 1/2, 1/3, 1/4 ecc. delle linee omologhe percorse dal primo.

Volendosi costrurre un pantografo in cui si possa avere la variazione del rapporto $\frac{m}{n}$ fra le dimensioni lineari della figura ad ottenersi e quelle della figura data collo scorrimento del perno P e del segnatoio S, conviene graduare i due regoli DE e DG; chiamando perciò a e b le lunghezze costanti di $\overline{\mathrm{AD}}$ e di $\overline{\mathrm{AC}}$, si determinano le variabili $\overline{\mathrm{DS}}$ e $\overline{\mathrm{DP}}$, che indico rispettivamente con x ed y, dietro la considerazione dei due triangoli simili CAS e PDS, i quali dànno

$$x = \mathrm{AD}\,\frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{PC}} = a\,\frac{m}{n}, \qquad y = \mathrm{AC}\,\frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{CS}} = b\,\frac{m}{m+n}.$$

Facendo subire ad m ed n dei valori diversi, per esempio, facendo costantemente $m=1$ ed n successivamente eguale ad 1, 2, 3, ecc. si determinano i valori corrispondenti di x ed y, che portati a partire da D, rispettivamente su DG e DE, determinano delle divisioni a cui convien apporre i numeri 1, 1/2, 1/3 ecc. per indicare che in esse si devono collocare il segnatoio ed il perno, acciocchè le linee descritte dal segnatoio medesimo siano eguali, una metà, un terzo ecc. di quelle descritte dal calcatoio.

Dopo quanto venne già detto, non s'incontrerà difficoltà alcuna nel discutere i due casi in cui, lasciando fisso il segnatoio o il perno, si muova segnatoio e perno, o segnatoio e calcatoio.

218. **Uso del pantografo.** — Per usare del descritto pantografo, conviene innanzi tutto collocare il perno ed il calcatoio in modo da avere il voluto rapporto fra le dimensioni lineari della figura data e quelle della figura da ottenersi; fissare l'originale sopra una tavola ben piana, e fermare il perno nella sua massa di piombo,

collocata in tale sito della tavola che sia possibile far descrivere al calcatoio tutto il disegno, o una parte determinata di esso, se il disegno è molto grande. Dopo di ciò si colloca il foglio su cui si vuol eseguire la riduzione sopra la medesima tavola in modo che, essendo il calcatoio su un punto del disegno, il segnatoio sia in quel punto del foglio dove si vuole che cada il punto corrispondente della riduzione. Finalmente, fissato questo punto del foglio sopra la tavola, si fa esso girare finchè, collocato il calcatoio in altro punto del disegno, il segnatoio si trovi sopra quel punto della carta ove pure si desidera che cada il corrispondente punto della riduzione. Ciò fatto, si fissa in questa posizione il foglio e si dà principio all'operazione.

L'ingrandimento di un disegno è sempre un lavoro di poca esattezza: se però in alcune circostanze è necessaria una tale operazione, si può essa effettuare colla massima facilità, portando il calcatoio al posto del segnatoio, e viceversa; così si ridurranno triple le dimensioni lineari di un disegno col descritto pantografo, portando il perno ed il segnatoio alle divisioni marcate 1/3 e facendo poscia il cangiamento del segnatoio e del calcatoio.

S'incontrano talvolta dei pantografi senza divisioni, e allora convien collocarli a sito per tentativi. Perciò si disporranno perno, calcatoio e segnatoio in una sol linea retta; si farà percorrere al calcatoio una linea qualunque; e si osserverà se il tratto descritto dalla matita è nel rapporto voluto coll'accennata retta. Se ciò non ha luogo, si sposteranno nel senso conveniente perno e segnatoio, per soddisfare alla condizione di avere C, P ed S (*fig.* 305) in linea retta; si farà una nuova prova, e così si continuerà finchè esista il prestabilito rapporto fra la lunghezza della linea descritta dal segnatoio e quella della linea percorsa dal calcatoio.

219. **Pantografo a cinque righe**. — Il più semplice di tutti i pantografi, ed in pari tempo il più comodo, è quello a cinque righe. Consiste questo strumento in cinque righe ordinariamente eguali: quattro di esse, unite assieme a cerniera, formano sempre un rombo mobile ABCD (*fig.* 306), e la quinta EF, fissata su due righe parallele delle quattro già indicate, può scorrere parallelamente alle altre due. Nell'articolazione A trovasi il perno del pantografo; nell'altra opposta C si colloca il calcatoio; e sulla riga EF, entro un cursore di ottone, viene adattato il segnatoio, la cui posizione è ad ogni volta determinata dal rapporto che deve esistere fra le dimensioni lineari del disegno dato e della sua riduzione. Anche in questo strumento si trovano le rotelle per facilitare il suo scorrimento

sul piano d'appoggio, e l'ordigno per innalzare od abbassare la matita nel senso verticale, secondo il bisogno.

Nel descritto strumento i due regoli AD e BC (*fig.* 307) sono generalmente divisi in un egual numero di parti eguali, e nello stesso numero di parti eguali è pure diviso il regolo EF. Queste divisioni sono quelle che servono di guida per descrivere una figura le cui dimensioni lineari abbiano un dato rapporto con quelle di un'altra figura data; così, supponendo che questo rapporto debba essere $\frac{1}{n}$, bisogna portare i due estremi E ed F del regolo EF a tali distanze da A e B, che siano $\overline{AE}=\frac{1}{n}\overline{AD}$, $\overline{BF}=\frac{1}{n}\overline{BC}$; e bisogna porre il segnatoio in un sito tale che sia pure $\overline{ES}=\frac{1}{n}\overline{EF}=\frac{1}{n}\overline{DC}$; allora per la similitudine dei due triangoli AES e ADC si avrà: 1° che i tre punti A, S e C sono in linea retta; 2° che $\overline{AS}=\frac{1}{n}\overline{AC}$. Ciò fatto, se si sposta lo strumento, girandolo sul suo perno e col far descrivere al calcatoio la retta $\overline{CC'}$, il punto S passa in S′, e conservandosi ancora simili i due triangoli AE′S′ e AD′C′, e quindi in linea retta i punti A, S′ e C′, si conchiude pure che $\overline{AS'}=\frac{1}{n}\overline{AC'}$. Considerando ora i due triangoli SAS′ e CAC′ simili siccome aventi due lati rispettivamente proporzionali e l'angolo compreso eguale, si conchiude che $\overline{SS'}$ è parallela a $\overline{CC'}$ e che vale $\frac{1}{n}$ della $\overline{CC'}$ medesima; dovendo questo aver luogo per tutti i lati di una linea poligonale SS′S″S‴ descritta dal segnatoio, quando il calcatoio ne percorre l'altra CC′C″C‴, si deduce in generale che, fissando il perno A nella sua massa di piombo e che facendo descrivere al calcatoio il perimetro di una figura, il segnatoio descrive quello di una figura simile; e che il rapporto fra le dimensioni lineari delle accennate figure è espresso da quello che esiste fra il numero di divisioni di AD e il numero di divisioni di AE.

Per avere un ingrandimento basta mettere il segnatoio al posto del calcatoio, e viceversa.

220. **Micrografo.** — Il *micrografo*, che da taluni dicesi anche pantografo, differisce da quest'ultimo in ciò che le variazioni di rapporto fra le dimensioni lineari delle figure descritte dal calcatoio

e dal segnatoio si ottengono, non già collo spostamento di due degli elementi segnatoio, perno e calcatoio, ma sibbene col variare le lunghezze dei lati del parallelogramma. In tale strumento il perno P (*fig.* 308) si colloca generalmente a quel vertice del parallelogramma che è comune ai due lati su cui non si trovano calcatoio e segnatoio.

I siti, nei quali bisogna trasportare le articolazioni B e D per avere un determinato rapporto fra le dimensioni lineari della figura percorsa dal calcatoio e quella descritta dal segnatoio, sono indicati da piccoli fori praticati sulle quattro righe, e le loro posizioni si determinano cercando prima a che distanza devono cadere da S e P sui regoli SA e PF. Supposto che le dimensioni lineari della figura descritta dal segnatoio debbano stare a quelle della figura percorsa dal calcatoio $::m:n$; che $\overline{AS}$ ed $\overline{AC}$ siano rispettivamente eguali alle costanti a e b; e chiamando x ed y le due distanze $\overline{SD}$ e $\overline{PD}$, per la similitudine dei due triangoli ACS e DPS, si deducono

$$x = \overline{AS}\,\frac{\overline{SP}}{\overline{SC}} = a\,\frac{m}{m+n}, \qquad y = \overline{AC}\,\frac{\overline{SP}}{\overline{SC}} = b\,\frac{m}{m+n}.$$

Dando successivamente ad m ed n diversi valori, per esempio, facendo sempre $m=1$ ed n successivamente eguale ad 1, 2, 3 ecc., si determinano i valori di x e di y, ossia le distanze che i diversi fori, da segnarsi coi numeri 1, 1/2, 1/3 ecc., devono avere da S e da P. Le graduazioni delle altre due righe AC e PE si effettuano portando sulla prima a partire da A le distanze che i diversi fori di PF hanno da P, e sulla seconda a partire da P le distanze che i diversi fori di AS hanno da A.

Volendosi effettuare con tale strumento una data riduzione, per esempio, in modo che le dimensioni lineari del disegno ridotto siano 1/5 di quelle del disegno dato, è necessario portare l'articolazione D a passare simultaneamente pei fori delle due righe AS e PF segnati 1/5, e l'articolazione B a passare pei fori delle righe AC e PE indicati pure 1/5.

221. **Cenno sulla riduzione dei disegni colla fotografia.** — La fotografia, ossia quel procedimento mediante cui si giunge ad ottenere una permanente immagine degli oggetti fugacemente dipinti nella camera oscura, si può vantaggiosamente applicare alla riduzione approssimata dei disegni. L'aberrazione cromatica, per cui i raggi luminosi attraversanti l'obbiettivo vengono decomposti

producendo delle zone coloranti; l'aberrazione sferica per cui i raggi che passano in lontananza dal centro ottico della lente, non convergono esattamente al foco; il fatto, per cui le immagini dei diversi punti di una superficie piana collocata a poca distanza dall'obbiettivo non si riproducono tutte in una medesima superficie ancora piana, sono altrettante cause che, oltre di rendere confusa l'immagine nelle sue parti estreme, si oppongono a dare un rapporto costante fra le diverse linee della medesima e le omologhe dell'originale. In quelle circostanze però in cui, da piani già eseguiti, se ne vogliono ricavare altri puramente dimostrativi, possono riuscire della massima utilità i procedimenti fotografici. La riduzione d'un piano anche molto complicato e che, trattata coi metodi ordinarii, richiederebbe il lavoro di parecchi giorni od anche di alcuni mesi, si può ultimare in poche ore. Per avere soddisfacenti risultati bisogna applicare quelle chimiche preparazioni che meglio s'addicono alla natura del lavoro, e convien avere le seguenti avvertenze nell'operare: 1° descrivere sulla *lastra smerigliata* un rettangolo, i cui lati siano la riduzione nel voluto rapporto dei lati del quadro del disegno a ridursi; 2° trovar mezzo di ben distendere la superficie del foglio, e di mantenerla in un piano verticale con due lati del quadro orizzontali; 3° *fochizzare* la lastra smerigliata in modo che il perimetro del rettangolo su essa segnato venga a coprire l'immagine del perimetro del quadro del disegno a ridursi; 4° levare l'indicata lastra smerigliata ed *esporre* in sua vece la *lastra sensibilizzata* su cui deve aver luogo la *prova negativa*, dalla quale con appositi procedimenti si dovrà poi dedurre la *prova positiva* o la richiesta riduzione.

PARTE TERZA

TRIANGOLAZIONE TOPOGRAFICA

CAPITOLO I.

Operazioni planimetriche.

ARTICOLO I.

Nozioni preliminari.

222. Rete trigonometrica, punti trigonometrici, base. — La determinazione rigorosa dei punti principali di una grande estensione di terreno, non eccedente però il limite stabilito al numero 5, costituisce l'oggetto della *triangolazione topografica.*

Le operazioni planimetriche alla medesima attinenti consistono nel fissare sul terreno diversi punti rimarchevoli; nell'immaginare le loro proiezioni sul piano tangente nel punto medio della superficie terrestre considerata; nel supporre unite tali proiezioni con tante rette, in modo da avere una serie continua di triangoli, talmente disposti che dalla misura esatta di angoli e di un sol lato si possano calcolare tutti gli altri; e nel determinare in modo sicuro le posizioni degli accennati punti, costruendo anche un piano in cui vengano distribuiti colla maggior possibile somiglianza alla real loro disposizione.

L'accennata serie di triangoli vien detta *rete trigonometrica*, i suoi vertici si chiamano *punti trigonometrici*, ed il lato misurato prende il nome di *base.*

Le reti trigonometriche sono indispensabili nelle levate un po' estese e di qualche importanza; esse servono a tenere ben collegati fra loro i confini dei terreni e le suddivisioni entrostanti; servono di base al rilevamento parcellare, e impediscono mirabilmente che gli errori inseparabili dalle operazioni delle levate possano propagarsi ed accumularsi. I punti trigonometrici, opportunamente conservati sul terreno, sono preziosi capi-saldi a cui si può ricorrere con sicurezza in molte delicate operazioni spettanti all'esercizio della carriera dell'ingegnere e del misuratore, e giovano efficacemente a definire le non poche e difficili quistioni del possesso.

223. **Reti trigonometriche di 1°, di 2° e di 3° ordine.** — Il limite di una grande estensione di terreno, considerato in ordine alle operazioni topografiche, ci si presenta generalmente siccome una gran cerchia, entro la quale si trovano altre porzioni minori, ma ancora considerevoli, e che a loro turno si dividono e suddividono in infinite guise, fino a distinguere un appezzamento dall'altro. Chi, mediante una serie di successivi triangoli di lati brevi, disposti su tutta o su parti separate dell'estensione a rilevarsi, credesse di avere un sufficiente collegamento dei confini e degli appezzamenti entrostanti, s'ingannerebbe a gran partito: i piccoli errori commessi in ciascun triangolo si riprodurrebbero, e, atteso il loro gran numero si accumulerebbero in modo disdicevole al buon andamento dell'operazione.

In generale devesi incominciare con una *rete di triangoli di 1° ordine*, estendentesi su tutta la superficie del terreno da rilevarsi e coi lati di conveniente lunghezza (num. 226 e 227). Questa rete principale è quella che va appoggiata ad una base, ed essa si presta alla determinazione dei *punti trigonometrici di 1° ordine* nelle località più convenienti per lo stabilimento delle successive reti d'ordine inferiore.

Stabiliti i triangoli di 1° ordine, si passa col mezzo di spezzamenti alla determinazione di *triangoli e punti di 2° ordine*: da questi ultimi poi procedono *i triangoli e punti di 3° ordine*, combinati a seconda delle località, e stabiliti in modo da fare un tutto insieme coi vertici dei triangoli di 1° e di 2° ordine, che si convenga al collegamento esatto di molti punti importanti del terreno ed alle ulteriori operazioni di rilevamento dei dettagli.

224. **Influenza degli errori angolari sui lati.** — Sia ABC (*fig.* 309) un triangolo, e nella misura di uno de' suoi angoli, di C ad esempio, siasi commesso un errore in meno BCb, o un errore in

più BCb_1 per modo che la misura ottenuta per l'angolo ACB risulti nel primo caso ACb, e nel secondo ACb_1. Un tal errore angolare produrrà sul lato opposto $\overline{AB}$, o un errore in meno $\overline{Bb}$ o un errore in più $\overline{Bb_1}$, che sarà tanto più piccolo quanto più l'angolo B si avvicinerà ad un angolo retto, siccome facilmente si scorge paragonando i diversi errori che nascono dalla stessa causa, supponendo che il vertice B si porti in diverse posizioni B', B'', B''', tali che gli angoli $AB'C$, $AB''C$, $AB'''C$ vadano successivamente crescendo. Questo ragionamento applicato ai tre angoli del triangolo ci porta a conchiudere come l'influenza degli errori angolari su ciascun lato sia tanto più piccola, quanto più ognuno degli angoli del triangolo si accosta ad ad un angolo retto, e quindi essere il triangolo equilatero quello che meglio soddisfa a questa condizione, perchè in esso ogni angolo si accosta più a questo limite, senza danno degli altri.

La stessa verità si può anche dimostrare coll'analisi, considerando un triangolo ABC, supponendo il lato b esatto, e cercando a quali condizioni devono soddisfare i tre angoli A, B e C, acciocchè gli errori prodotti sui lati a e c siano nulli.

Fra gli angoli A e B ed i lati a e b ha luogo la seguente relazione

$$a \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A \qquad (1).$$

Considerando ora che gli errori ΔA, ΔB, ΔC, fatti sugli angoli A, B e C, possono alterare i lati a e c, apportando al primo l'errore Δa, al secondo l'errore Δc, nascerà un altro triangolo di lati $a + \Delta a$, b e $c + \Delta c$, di angoli $A + \Delta A$, $B + \Delta B$ e $C + \Delta C$; ed anche per questo si potrà stabilire la relazione

$$(a + \Delta a) \operatorname{sen}(B + \Delta B) = b \operatorname{sen}(A + \Delta A) \qquad (2),$$

dalla quale si deduce

$$(a + \Delta a)(\operatorname{sen} B \cos \Delta B + \cos B \operatorname{sen} \Delta B)$$
$$= b(\operatorname{sen} A \cos \Delta A + \cos A \operatorname{sen} \Delta A).$$

I due errori angolari ΔA, ΔB essendo piccolissimi, si può, senza errore sensibile, fare

$$\cos \Delta B = \cos \Delta A = 1, \quad \operatorname{sen} \Delta A = \Delta A, \quad \operatorname{sen} \Delta B = \Delta B,$$

e quindi dedurre

$$(a+\Delta a)(\operatorname{sen}B+\Delta B\cos B)=b(\operatorname{sen}A+\Delta A\cos A).$$

Effettuando le operazioni e trascurando il piccolissimo prodotto $\Delta a \Delta B \cos B$, si avrà

$$a\operatorname{sen}B+a\Delta B\cos B+\Delta a\operatorname{sen}B=b\operatorname{sen}A+b\Delta A\cos A,$$

dalla quale, avuto riguardo alla relazione (1), si ricava

$$\Delta a=\frac{b\cos A}{\operatorname{sen}B}\Delta A-\frac{a\cos B}{\operatorname{sen}B}\Delta B.$$

Ora i piccolissimi errori ΔA e ΔB, dipendendo dalla medesima causa, cioè dall'imperfezione dello strumento che si adopera e dal modo di puntare gli oggetti, si possono supporre eguali e facendo nell'ultima equazione $\Delta B=\Delta A$ e $\frac{b}{\operatorname{sen}B}=\frac{a}{\operatorname{sen}A}$, si trova

$$\Delta a=a\Delta A(\cot A-\cot B),$$

ossia che l'errore Δa è tanto più piccolo quanto più i due angoli A e B tendono ad essere eguali, e che esso è nullo quando gli accennati due angoli sono eguali fra di loro.

Nello stabilire l'equazione (2) si è tacitamente supposto che gli errori angolari in essa contenuti siano dello stesso segno; nel caso che gli accennati errori siano di segno contrario, per cui essendo l'uno $+\Delta A$, l'altro sia $-\Delta B$, si avrà

$$(a+\Delta a)\operatorname{sen}(B-\Delta B)=b\operatorname{sen}(A+\Delta A),$$

dalla quale, ragionando come nel caso antecedente, si dedurrà quest'altra

$$\Delta a=a\Delta A\frac{\operatorname{sen}A\cos B+\cos A\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B};$$

ed essendo

$$\operatorname{sen}A\cos B+\cos A\operatorname{sen}B=\operatorname{sen}(A+B)=\operatorname{sen}[180^\circ-(A+B)]=\operatorname{sen}C,$$

$$\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B=\frac{1}{2}\cos(A-B)-\frac{1}{2}\cos(A+B)$$

$$=\frac{1}{2}\cos(A-B)+\frac{1}{2}\cos[180^\circ-(A+B)]=\frac{1}{2}\cos(A-B)+\frac{1}{2}\cos C,$$

si avrà finalmente

$$\Delta a=a\Delta A\frac{2\operatorname{sen}C}{\cos(A-B)+\cos C}:$$

risultato che porta a conchiudere essere l'errore Δa il più piccolo possibile quando $A=B$, perchè allora il denominatore $\cos(A-B)+\cos C$ diventa il più grande possibile.

Ragionando nello stesso modo, ma col mettere in confronto i lati b, c e gli errori ΔB e ΔC, si dimostra come C deve essere eguale a B, acciocchè l'errore Δc sia il più piccolo possibile, e si vien quindi a conchiudere come la forma più avvantaggiosa da darsi ai triangoli di una rete trigonometrica sia la equilatera.

225. **Influenza dell'errore di un lato di un triangolo.** — L'inesattezza d'un lato d'un triangolo spettante ad una rete trigonometrica può anche notevolmente influire sul buon successo dell'operazione: infatti, supponendo che nel triangolo ABC (*fig.* 310) siansi misurati esattamente i tre angoli, e che sul lato $\overline{AC}$, che deve servire come base per calcolare gli altri due $\overline{AB}$ e $\overline{CB}$, siasi commesso un errore, per esempio, un errore $\overline{CC'}$ in più, si verrebbe a sostituire al triangolo dato un altro simile $AB'C'$; e, immaginando condotta la CD parallelamente alla AB, si avrebbe in $\overline{CD}$ l'errore risultante su $\overline{AB}$, ed in $\overline{C'D}$ quello risultante su $\overline{BC}$. Osservando ora che i due triangoli ABC e CDC' sono simili, e che in un triangolo di angoli disuguali ad angoli maggiori stanno opposti lati maggiori, si deduce che gli errori su ciascuno dei due lati $\overline{AB}$ e $\overline{CB}$ si conservano eguali, maggiori o minori a quello fatto sul lato $\overline{AC}$, secondochè i due angoli BAC e BCA sono eguali, maggiori o minori al terzo angolo ABC opposto al lato erroneo $\overline{AC}$.

Anche coll'analisi si può giugnere alle stesse conseguenze: chiamando Δb l'errore fatto sul lato b; Δa, Δc quelli che ne provengono sui lati a e c, per cui il triangolo si trasforma in un altro di lati

$a+\Delta a$, $b+\Delta b$, $c+\Delta c$, e di angoli A, B, C, si può stabilire l'equazione

$$(a+\Delta a)\,\text{sen}\,B=(b+\Delta b)\,\text{sen}\,A,$$

dalla quale si ricava, osservando che $a\,\text{sen}\,B=b\,\text{sen}\,A$,

$$\Delta a=\Delta b\,\frac{\text{sen}\,A}{\text{sen}\,B}:$$

risultato che dimostra appunto essere $\Delta a=\Delta b$ quando $A=B$; essere $\Delta a \lessgtr \Delta b$, secondochè $A \lessgtr B$; ed essere Δa il più piccolo possibile quando $\text{sen}\,B=1$, ossia quando $B=90°$.

Mettendo in confronto la base b coll'altro lato c, si viene nello stesso modo a conchiudere che $\Delta c=\Delta b$ quando $C=B$; che $\Delta c \lessgtr \Delta b$, secondochè $C \lessgtr B$, e che Δc è il più piccolo possibile quando $B=90°$.

Conchiudendo si può dire che, per rendere poco influenti sugli altri lati le inesattezze occorse nella misura della base, converrebbe far decrescere successivamente i lati di ciascun triangolo, col fare in modo che l'angolo opposto a quel lato, che vuolsi scegliere come base per calcolare gli altri due, fosse quasi retto. Questa condizione in nessun modo si può verificare in una rete di 1° ordine, senza incorrere nell'inconveniente di dover scegliere una base lunghissima e di avere dei triangoli che vanno successivamente impicciolendosi; per cui si procura di fare in modo che tutti i triangoli abbiano forma quasi equilatera, siccome quella che, senza aumento, trasmette sui lati le inesattezze occorse sulla base.

226. **Forma preferibile dei triangoli e basi di verificazione.** — Studiando le influenze degli errori angolari sui lati di una rete trigonometrica, si è visto convenire ai diversi triangoli che la compongono la forma equilatera; esaminando le conseguenze provenienti da inesattezze della base, si è conchiuso essere ancora la forma equilatera la sola ammissibile in pratica. Sul terreno però ben difficilmente si può raggiungere questa condizione; angoli compresi fra 30° e 120° si ritengono ancora come buoni, ed anzi in alcuni casi particolari bisogna anche accettare angoli che oltrepassano tali limiti. La misura della base va eseguita con tutta la diligenza possibile; e per evitare, per quanto si può, i gravi inconvenienti che

ne possono derivare da un piccolo errore incorso nella sua misura, convien sceglierla non troppo piccola in confronto dei lati della rete.

Per quanta cura si metta nella misura della base e degli angoli, s'incorre indubitatamente in errori, da principio insensibili, ma che, accumulandosi a poco a poco, ne possono produrre verso le estremità della rete dei considerevoli: e a riconoscere il grado di precisione ottenuto convien procurarsi qualche mezzo di verificazione. Tutti i lati della rete comuni a due o più triangoli, e quindi calcolabili due o più volte per vie differenti, sono altrettanti mezzi di controllo, e se i risultati trovati per uno stesso lato s'accordano, o differiscono solo di quantità trascurabili, si può ritenere come non affetta da sensibile errore tutta la parte di rete che ha servito a stabilire i calcoli. Un altro mezzo di verificazione si ha nel misurare alcuni lati della rete che prendono il nome di *basi di verificazione* o *di controllo*, e nel dedurli col calcolo: se i due risultati sono eguali, o se la loro discrepanza non eccede i limiti delle tolleranze, la triangolazione è esatta; in caso diverso, si deve rifare l'operazione, almeno in quella parte in cui si giudica essere occorsi gli errori; e nel caso che non si venga a capo di rettificarli, si devono incominciare di bel nuovo tutte le misure della rete.

227. **Lunghezza limite da darsi ai lati di una rete topografica.** — Egli è indubitato che la determinazione di una rete di 1° ordine risulterà tanto più esatta, quanto più piccolo sarà il numero dei triangoli che la compongono: convien però notare che in reti a grandi dimensioni, le proiezioni dei loro vertici sulla superficie terrestre non si possono più considerare come unite da linee rette: esse lo sono realmente per archi di circolo massimo, considerando i triangoli che le formano come triangoli sferici, e allora la determinazione dei punti trigonometrici spetta all'alta geodesia anzichè alla topografia.

Per determinare la lunghezza limite da darsi ai lati di una rete topografica di 1° ordine, si consideri sulla superficie terrestre, supposta sferica, col circolo massimo di 40000000 di metri, un arco AB (*fig.* 311) della lunghezza di 10000 metri, e se ne cerchi la corda, per vedere se, messa in confronto colla lunghezza dell'arco, la loro discrepanza è trascurabile. Chiamando φ il numero dei gradi dell'arco lungo 10000 metri, si avrà, dietro la proporzionalità delle lunghezze degli archi alle loro ampiezze

$$\varphi = \frac{10000}{10000000} 90^{\circ} = 0^{\circ} 5' 24''.$$

Chiamando x la corda dell'accennato arco, osservando che l'ampiezza dell'arco metà è $0^\circ 2' 42''$ e che il raggio della terra vale $\frac{40000000}{2\pi}$, si ricava dal triangolo rettangolo ADC

$$x = \frac{40000000}{\pi} \operatorname{sen} 0^\circ 2' 42'',$$

e, applicando il calcolo logaritmico,

$$x = 9999^{m},998.$$

La corda che sottende l'arco lungo 10000^{m} è adunque di $9999^{m},998$, e l'errore che si commette prendendo la corda per l'arco, essendo minore di 2 millimetri su 10000 metri, è sicuramente al di sotto della più ristretta tolleranza ammissibile in tali operazioni.

L'errore proveniente dalla sfericità della terra non è la sola causa che possa influire sulla buona determinazione di una rete trigonometrica di primo ordine: gli errori provenienti dall'imperfezione degli strumenti topografici e dalla difficoltà di ben puntare gli oggetti, quanto più sono distanti, crescono notevolmente colla distanza degli oggetti di mira, e, accumulandosi nei triangoli successivi, possono compromettere l'esattezza dell'operazione. Queste considerazioni rendono manifesto, perchè non si debba mai oltrepassare un tale limite, e perchè si debba piuttosto restringere da 5000 a 8000 metri, col notevole vantaggio di uno spezzamento regolare per le reti di 2° ordine, senza pericolo di venire da una rete ad un'altra di lati più brevi con un numero troppo grande di triangoli.

ARTICOLO II.

Segnali e scelta dei punti trigonometrici di 1° e 2° ordine.

228. **Segnali.** — I segnali che distinguono i punti trigonometrici possono essere di tre sorta. Le croci di campanili, di cupole, di frontoni di chiese, i parafulmini ed altri simili oggetti, stabili e facili a prendersi di mira da qualunque distanza, sono i migliori segnali; e, atteso la loro stabilità, nulla di particolare hassi da eseguire per la loro conservazione. I fumaiuoli, i frontoni di edifizi, gli spigoli di case, le torri, i belvederi ed altri simili oggetti stabili si,

ma non visibili a qualsiasi distanza, per modo da essere necessario collocare verticalmente in essi un'asta onde poter dirigere le visuali nell'atto di misurare gli angoli, sono anche buoni segnali; e si provvede alla loro conservazione fissando saldamente nel muro, contro cui si deve appoggiar l'asta, due anelli di ferro, entro i quali si farà entrare l'asta medesima. Finalmente, pei punti scelti sul terreno (*fig.* 312) si usano termini in pietra di forma parallelepipeda a base quadrata, su cui s'innalza d'ordinario un'asta verticale con banderuola alla sommità: per la conservazione di tali punti si murano i termini alla base, sulla faccia superiore si scolpisce un triangolo equilatero, e si pratica nel senso verticale, secondo l'asse, una scanalatura destinata a segnare il vero centro della stazione ed il sito preciso in cui va collocato il piede dell'asta. Nei luoghi coperti da rocce, in cui è impossibile il collocamento dei termini in pietra, si usano i pilastrini in muratura, di forma piramidale tronca, attraversati secondo il loro asse (*fig.* 313) e per tutta la loro altezza da un foro verticale che corrisponde al centro di un triangolo equilatero, scolpito sul sasso che trovasi alla base del pilastrino e che serve a ricevere l'asta determinante il punto di mira. Talvolta si adoperano come segnali gli alberi sfrondati con pochi rami di punta ripiegati in modo da formare (*fig.* 314) una testa, che si ricopre di carta bianca forte; o anche grossi pali conficcati verticalmente nel terreno, praticandovi dei fossi della profondità di circa un metro (*fig.* 315) ed in cui vengono adattati con pietre a secco fino all'altezza di circa un metro al disopra del suolo.

229. **Scelta dei punti trigonometrici di 1° e 2° ordine.** — La scelta dei punti trigonometrici di 1° ordine è l'operazione preliminare per lo stabilimento di una rete, e tuttochè sia la più importante, pure non si può assoggettare a regole fisse, ed è in essa che deve principalmente mostrarsi l'abilità, la perspicacia e la facilità dell'operatore.

I triangoli, oltre di avere una forma conveniente, devono essere ben distribuiti e disposti in modo da facilitare il tracciamento delle reti d'ordine inferiore; i loro vertici devono essere preferibilmente oggetti fissi e rimarchevoli, come torri, campanili, belvederi, frontoni di edifizi, fumaiuoli, spigoli di case e simili, e tali da potersi stazionare, se non su essi, almeno in luoghi loro vicini.

L'operatore munito di un goniometro, per esempio, d'una bussola, d'un sestante, d'un circolo a riflessione e, se pur ve n'hanno, di alcuni piani rappresentanti il terreno su cui si deve stabilire la rete trigonometrica, lo percorrerà in molte direzioni, ed esaminate tutte le giaciture topografiche, i corsi dei fiumi, dei torrenti, dei rivi, gli aggregati di fabbriche, le sommità delle montagne e delle colline, ed in generale i punti più rimarchevoli che s'incontrano, troverà col detto goniometro gli angoli che fanno fra loro le visuali dirette da ciascuno dei siti, in cui si crede conveniente il collocamento di un punto trigonometrico, ad oggetti che appaiono sull'orizzonte e che sembrano convenire allo stesso scopo, per mettersi poi in istato di costruire un piano dimostrativo della rete stabilita.

Occorrendo di individuare sul terreno dei punti trigonometrici, verranno immediatamente collegati ad oggetti fissi, onde rintracciare facilmente il loro sito e ristabilirli in caso di dispersione (num. 72).

Se talvolta occorre di dover accettare, come vertice di 1° ordine, un punto su cui o presso il quale non si possa far stazione (il che può accadere nei boschi e nelle selve folte molto estese), si deve procurare che sia possibile stazionare su tutti i punti direttamente legati con esso, onde dedurre tutti gli angoli intorno al punto nel quale non si può far stazione, e procurarsi così il maggior numero possibile dei mezzi di controllo.

Si eviterà di ammettere triangoli pei quali è possibile la misura di un sol angolo, e quando necessità lo vuole, è indispensabile che i lati, i quali comprendono il solo angolo che si può misurare, siano calcolabili mediante i dati dei triangoli adiacenti.

La scelta dei punti trigonometrici di 2° ordine si può fare in parte nel mentre si scelgono quelli di 1° ordine, ed in parte all'atto della misura degli angoli. Acciocchè risultino ben distribuiti, si avrà presente che si vogliono in essi dei punti rimarchevoli del terreno meno distanti che quelli di 1° ordine, e la loro determinazione si può ottenere con uno dei seguenti metodi da applicarsi a seconda delle circostanze locali:

1° Mediante un triangolo avente per base un lato di 1° ordine e di cui si possono misurare i tre angoli;

2° Con due triangoli aventi un lato comune e le cui basi siano lati di triangoli di 1° ordine (per ciascuno di questi due triangoli può bastare la misura di due soli angoli);

3° Col metodo di determinare la posizione di un punto per rapporto a tre punti già dati, appoggiandosi da due parti a due triangoli di 1° ordine, onde aver mezzo di determinare in due modi diversi il punto scelto e controllarne così la sua posizione;

4° Mediante piccole catene composte di non più di sei triangoli, i cui vertici siano altrettanti punti di 2° ordine ed i cui lati estremi appartengano a triangoli di 1° ordine (pei triangoli di tali catene può anche bastare la misura di solo due angoli per ciascuno).

Un abbozzo dimostrativo della rete stabilita (*fig.* 316), su cui sia marcato il numero progressivo di ciascun punto, incominciando la numerazione dal punto più importante del terreno, proseguendola fino a che siano numerati tutti i punti di 1° ordine, e continuandola poscia per tutti quelli di 2° ordine; la grandezza approssimata di tutti gli angoli, e l'orientamento approssimativo della rete topografica servono mirabilmente ad evitare gli sbagli in cui si può facilmente incorrere nell'osservare i segnali da luoghi alquanto lontani, e a rinvenire le località dei punti trigonometrici. La prospettiva e la forma del luogo su cui trovasi ciascuno di tali punti, come monti, fabbricati, campanili, ecc., giovano ad evitare il pericolo di confondere due punti che per avventura cadono nella stessa visuale. Un piano figurativo, su cui viene indicata la posizione dei punti scelti rispetto agli oggetti che li circondano a breve distanza, con le misure relative, è utile per ritrovare ed anche per rimettere a sito con facilità i piuoli ed i termini.

ARTICOLO III.

Regoli su trepiedi, scelta e misura delle basi.

230. **Descrizione dei regoli su trepiedi.** — Le canne e la catena, che danno risultati di sufficiente approssimazione nelle ordinarie operazioni planimetriche in cui non richiedesi una triangolazione, non possono servire per misurare le basi delle reti trigonometriche. Queste misure, siccome quelle su cui riposa l'esattezza di tutte le successive operazioni, devonsi eseguire colla massima accuratezza, e fra i diversi apparecchi per tale oggetto immaginati, quello che può convenire nelle operazioni topografiche consiste in un regolo d'abete della lunghezza di tre o quattro metri, di forma parallelepipeda a sezione quadrata, con teste di metallo, acciocchè il fregamento non le consumi, e collocato mediante appositi sostegni su due trepiedi perfettamente eguali (*fig.* 317). Il sostegno annesso a ciascun trepiede è per gran parte della sua lunghezza lavorato a vite, mercè cui si può variare l'inclinazione del regolo fino a procurargli l'orizzontalità perfetta, come lo può indicare un livello a pendolo od un livello a bolla d'aria disposto sul regolo medesimo.

Nelle grandi operazioni geodetiche sinora eseguite si fece molto uso dei regoli di platino e di ferro, tenendo persin conto delle variazioni di lunghezza prodotte in essi dalla temperatura: in Inghilterra s'impiegarono anche tubi di vetro, siccome meno soggetti ai cangiamenti termometrici ed igrometrici: nelle operazioni topografiche però si reputano incomodi i primi pel troppo loro peso, svantaggiosi i secondi per l'eccessiva loro fragilità. I regoli di legno d'abete fatti bollire in un liquido grasso, per esempio nell'olio di lino, e coperti interamente di vernice, sentono pochissimo gli effetti del calore e dell'umidità, e quindi sono da reputarsi molto utili in tutti quei casi in cui si attende un risultato di discreta esattezza.

231. **Scelta delle basi.** — Nel ricercare i punti trigonometrici di 1° e 2° ordine si saranno riconosciute parecchie località in cui può convenire il collocamento sì della base principale che delle basi di verificazione. Fra tutte queste località si preferiranno quelle per cui la base viene a cadere lungo un terreno poco accidentato e di dolce declivio; quelle per cui da un estremo della base si può facilmente vedere l'altro ed il maggior numero possibile di punti trigonometrici; quelle in cui la base presenta una lunghezza proporzionata alla grandezza dei triangoli che debbono collegarvisi.

La base principale si sceglierà, per quanto si può, verso il centro della triangolazione stabilita: una tale disposizione prestandosi acciocchè si possano su essa appoggiare diversi triangoli di partenza, calcolabili indipendentemente l'uno dall'altro, fa sì che gli errori per avventura commessi in un triangolo di partenza non si propaghino che ai soli lati dei triangoli da questo dipendenti, i quali d'altronde si possono sempre verificare con lati di altri triangoli indipendenti dal primo; così il lato $\overline{BD}$ (*fig.* 318) determinato col triangolo BDC, dipendente dal triangolo di partenza ABC, si può verificare col triangolo BED il cui lato $\overline{BE}$ appartiene pure ad un triangolo di partenza ABE. Scegliendo la base ad un estremo, per esempio in *ab* (*fig.* 319), gli errori da cui può essere affetto il solo triangolo di partenza *abc* si propagano sui triangoli successivi senza alcun mezzo immediato di verificazione.

Per rapporto alle basi di controllo si avrà cura di ripartirle in modo che su esse venga pure ad appoggiarsi il maggior numero possibile di triangoli, di sceglierle preferibilmente in quelle località dove vieppiù si fa sentire il bisogno delle verificazioni, e di far sì che fra l'una e l'altra non siavi nè un numero troppo piccolo nè un numero troppo grande di triangoli. A meglio accertarsi se i piccoli errori, commessi nella pratica operazione della misura, non si sono accumulati in modo disdicevole al buon andamento dell'operazione, valgono le basi di controllo collocate verso gli estremi della rete stabilita.

Scelta una base, convien individuarne le estremità con piuoli o con termini in pietra da taglio, a seconda dell'importanza dell'operazione. Questi termini hanno generalmente la forma di parallelepipedi rettangoli a sezione quadrata, e per indicare il vero principio e la vera fine della base, portano generalmente sulla loro faccia superiore due linee che si tagliano perpendicolarmente al centro di un triangolo equilatero. Tali termini si dispongono nel terreno col loro asse verticale, si murano alla loro base, e si collocano generalmente colla loro faccia superiore a qualche profondità sotto il suolo. Per riconoscere a qualunque epoca la loro posizione, si avrà cura di collegarli ad oggetti fissi circostanti, facendone risultare da apposito abbozzo il sistema di collegamento.

252. **Misura di una base.** — Per la misura di una base si adoperano generalmente sei trepiedi e tre regoli, la cui lunghezza totale costituisce una portata, e per effettuare una tale operazione sembra conveniente questo procedimento:

1° Tracciare l'allineamento in cui devesi eseguire la misura con paline o con pertiche ben diritte, ferrate inferiormente, per poterle facilmente conficcare nel suolo, e portanti all'altro estremo una banderuola ben visibile in lontananza. Le paline e le pertiche si collocheranno distanti fra loro di circa 100 metri, e per disporle ben allineate potrà servire un cannocchiale, che si muova col suo asse ottico nel piano verticale passante per l'allineamento a tracciarsi;

2° Misurare la distanza a trovarsi colle canne o colla catena, piantando dei picchetti distanti fra loro di 300 metri, e che valgano a conservare l'allineamento pendente il tempo della misura;

3° Confrontare i regoli col campione legale, registrare i risultati di tale paragone ed effettuare la loro somma onde avere la lunghezza totale di una portata al principio dell'operazione;

4° Allineare i trepiedi nella direzione secondo cui devesi misurare, e disporli in modo che i regoli collocati su essi risultino approssimativamente orizzontali;

5° Aggiustare i regoli sui trepiedi ed orizzontarli dopo aver rettificati i livelli;

6° Segnare, mediante un piombino, la verticale passante per l'origine della distanza a misurarsi, e far cadere in questa verticale l'estremità del primo regolo;

7° Effettuare successivamente il contatto dei regoli, badando bene a non produrre in essi degli urti e registrando il numero delle portate;

8° Confrontare nuovamente i tre regoli col campione legale, registrare i risultati di tale paragone, ed effettuare la loro somma onde avere la lunghezza totale di una portata alla fine dell'operazione;

9° Trovare la media aritmetica fra le portate avute al principio ed alla fine dell'operazione, moltiplicare questa media per il numero delle portate e aggiungere quella parte di portata che vi rimane per venire all'estremo della base a misurarsi, considerando ciascun regolo siccome avente una lunghezza media fra quelle risultanti dal primo e dal secondo confronto col campione legale.

Allorquando sono necessarii più giorni per la misura di una base, conviene trovare, come si disse, la lunghezza corrispondente al lavoro di una giornata, e fissar bene il punto in cui venne sospesa l'operazione per poterla ripigliare di nuovo.

Se, misurando almeno due volte ed in senso contrario una distanza con regoli su trepiedi, si trovano due risultati eguali o poco differenti, l'operazione si deve tenere come esatta.

Se il terreno è talmente irregolare da non potersi disporre capo a capo i regoli, allora si colloca il successivo colla sua estremità nella verticale dell'estremità del precedente mediante un filo a piombo (*fig.* 320). In questo caso però è necessario tener conto della grossezza del filo, la quale, col ripetersi diverse volte, può benissimo dar luogo ad una lunghezza non trascurabile.

L'operazione di mettere i regoli a contatto è una delle più delicate, e per scansare gli inconvenienti che nascono da involontarii urti, s'immaginò di arrotondare una delle teste metalliche e di far sortire dall'altra, mediante apposito meccanismo, una linguetta graduata fino a toccare la testa del regolo successivo. Stimando la distanza dei due estremi esattamente con un nonio su cui scorrono le divisioni dell'accennata linguetta, si ha, per ogni collocamento di regolo, la piccola quantità da aggiungersi alla sua lunghezza effettiva.

233. **Riduzione di una base all'orizzonte.** — La riduzione di una base all'orizzonte consiste nel trovare, dietro la conoscenza della lunghezza di una retta inclinata e del suo angolo di elevazione o di depressione, la proiezione della retta medesima su un piano orizzontale. Siano

l la lunghezza di una retta $\overline{AB}$ (*fig.* 321),

α il suo angolo d'elevazione,

x la sua riduzione all'orizzonte o proiezione orizzontale $\overline{AC}$; si avrà

$$x = l\cos\alpha \qquad (1).$$

Togliendo i due membri di quest'equazione da l, risulterà

$$l - x = l(1 - \cos\alpha),$$

la qual ultima, dietro la nota relazione trigonometrica $1 - \cos\alpha = 2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}\alpha$, diventa

$$l - x = 2l\,\text{sen}^2\frac{1}{2}\alpha \qquad (2);$$

formola la quale somministra ciò che bisogna togliere dalla distanza misurata per avere la sua riduzione all'orizzonte. Ricavando x dall'equazione (2), trovasi

$$x = l\left(1 - 2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}\alpha\right) \qquad (3).$$

Le formole (1) e (3) dànno ambedue la proiezione orizzontale x di l; la (3) però è più adatta della (1) ai frequenti casi della pratica in cui l'angolo α è piccolo, imperocchè, per piccole differenze in simili angoli, le variazioni dei coseni sono insensibili, e sensibili invece quelle dei seni.

Quando il terreno è tale da non potersi disporre orizzontalmente i regoli, si può far subire ai medesimi una conveniente ed eguale inclinazione, apprezzandone la sua grandezza con un eclimetro a pendolo; calcolare poscia la distanza domandata colla formola (1) o colla formola (3), o meglio ancora trovare colla formola (2) ciò che bisogna togliere dalla distanza inclinata, ottenuta direttamente sul terreno, per avere la sua riduzione all'orizzonte.

La formola (2) può anche essere semplificata dietro la considerazione che i seni d'angoli piccolissimi si confondono sensibilmente coi loro archi; per cui supponendo l'angolo α espresso in minuti primi, e ponendo $\text{sen}\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\alpha\,\text{sen}\,1'$ (dove il fattore sen $1'$ trovasi al luogo di arc $1' = 0{,}00029$ onde ridurre l'angolo α espresso in minuti primi ad esprimere una lunghezza), la formola (2), che è quella più conveniente alla pratiche applicazioni, diventa

$$l - x = \frac{1}{2} l \alpha^2 \operatorname{sen}^2 1'.$$

Se fra i due punti A e B (*fig.* 322) si sono misurate diverse rette inclinate, di lunghezza l', l'', l''' ecc., e colle rispettive inclinazioni α', α'', α''' ecc. all'orizzonte; la somma delle proiezioni orizzontali costituisce la distanza orizzontale fra il punto A ed il punto B, che, chiamata ancora x, si può simbolicamente esprimere con

$$x = \Sigma l \cos \alpha,$$

estendendo la somma indicata col segno Σ a tutti i prodotti delle rette misurate pei coseni delle rispettive inclinazioni all'orizzonte.

La differenza fra la somma delle rette misurate e quella da ottenersi sarà data da

$$\Sigma l - x = 2 \Sigma l \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \alpha \qquad (4).$$

e la formola che somministra x in funzione dei seni diventerà

$$x = \Sigma l (1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \alpha).$$

Le ultime tre formole si prestano per quei casi in cui le irregolarità del terreno non permettono di disporre i regoli, nè orizzontali, nè con un'inclinazione costante. Osservando che si possono supporre i tre regoli impiegati perfettamente della stessa lunghezza l, eguale al sesto della somma dei sei numeri risultati dal loro confronto col campione legale prima e dopo l'operazione, e sostituendo ai seni degli angoli piccolissimi $\frac{1}{2}\alpha'$, $\frac{1}{2}\alpha''$, $\frac{1}{2}\alpha'''$ ecc. le lunghezze dei loro archi, si può trasformare la formola (4) in quest'altra conveniente ai casi della pratica

$$\Sigma l - x = \frac{1}{2} l \operatorname{sen}^2 1' \Sigma \alpha^2,$$

estendendo la somma indicata col simbolo Σ alla somma dei quadrati dei numeri esprimenti i minuti primi degli angoli α', α'', α''' ecc.

Allorquando nell'uso dei regoli su trepiedi si dispongono i regoli con inclinazioni differenti, conviene, per l'esattezza dell'operazione, che le loro estremità non abbiano molta grossezza, perchè, come si scorge dalla figura 323, le proiezioni degli assi $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$ dei quattro regoli sono $\overline{A'B'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{E'F'}$, $\overline{G'H'}$, mentre la vera proiezione della retta che unisce i due punti estremi A ed H è

$$\overline{A'H'}=\overline{A'B'}+\overline{C'D'}+\overline{E'F'}+\overline{G'H'}+\overline{B'C'}+\overline{D'E'}+\overline{F'G'}.$$

Cosicchè, nel caso che l'altezza della sezione trasversale dei regoli non sia trascurabile, converrà aumentare la lunghezza già ridotta all'orizzonte della somma dei prodotti della metà della detta altezza pel seno di ciascun angolo d'inclinazione, a partire da quello del secondo regolo. Questo risulta dal potersi considerare $\overline{B'C'}$, $\overline{D'E'}$ e $\overline{F'G'}$ come cateti dei triangoli rettangoli BbC, EeD e FfG, in cui gli angoli acuti dei vertici B, E ed F sono rispettivamente eguali agli angoli α'', α''' ed α^{iv}, esprimenti le inclinazioni dei tre regoli CD, EF e GH all'orizzonte.

234. **Riduzione di una base al piano orizzontale su cui voglionsi proiettare i diversi vertici della triangolazione.** — Il piano orizzontale su cui si proiettano i vertici tutti di una rete topografica è generalmente quello tangente nel punto medio della superficie terrestre a cui la triangolazione si estende, supposta la detta superficie terrestre costituita dalle acque del mare tranquille ed estese, al disotto del continente. Le basi adunque, comunemente misurate fuori di tale superficie, devono subire una conveniente correzione. Siano perciò

R il raggio dell'indicata superficie terrestre,

H l'altezza che un estremo della base ha al di sopra di questa superficie,

B la lunghezza della base misurata,

b la lunghezza domandata, ossia la proiezione di B sull'indicato piano tangente,

ε la correzione da farsi su B per avere b.

Siccome R ed R+H, b e B si possono rispettivamente considerare come lati omologhi di due triangoli isosceli simili aventi il loro vertice nel centro della terra, si ha

$$b = \frac{R}{R+H} B,$$

la quale, sottratta dall'identità $B = B$, ed osservando che $B - b = \varepsilon$, dà

$$\varepsilon = \frac{BH}{R+H}.$$

La prima formola serve a calcolare b e la seconda si presta invece a trovare ciò che si deve togliere da B per avere b.

ARTICOLO IV.

Teodoliti e misura degli angoli.

235. **Ripetizione e reiterazione degli angoli.** — I teodoliti sono goniometri di precisione, destinati a dare gli angoli già ridotti all'orizzonte, ed a diminuire quasi totalmente gli errori di lettura mediante il metodo della *ripetizione*, o mediante quello della *reiterazione degli angoli*.

Il metodo della ripetizione è fondato sul seguente principio: *portando successivamente su una circonferenza graduata, a partire dallo zero, un dato arco concentrico, finchè l'altro estremo di questo venga a cadere in una delle divisioni della circonferenza o presso una di esse, si trova l'ampiezza dell'arco dividendo il numero dei gradi indicati dall'ultima lettura pel numero di volte che l'arco è stato portato sulla circonferenza stessa; e l'errore, in cui si incorre, è eguale all'errore totale diviso per lo stesso numero che indica quante volte l'arco a misurarsi venne ripetuto.* Supponendo, per esempio, la circonferenza divisa in 720 parti eguali, ossia in gradi e mezzi gradi, e che dopo aver portato sei volte un arco sulla circonferenza, siansi letti, oltre all'intera circonferenza, 12° o, ciò che torna lo stesso, 24 mezzi gradi; l'ampiezza domandata sarà $\frac{720+24}{6} = \frac{744}{6}$ $= 124$ mezzi gradi, ossia di 62°. Supponendo poi che per giungere ai 12° vi manchi ancora, per esempio, la metà di un mezzo grado, l'errore sulla misura dell'ampiezza dell'arco sarà un sesto della metà di mezzo grado, ossia $\frac{1}{24}$ di grado.

Il metodo della reiterazione consiste semplicemente nel replicare più volte la misura dello stesso angolo e nel prendere la media aritmetica dei risultati ottenuti nelle diverse misure.

Teodolite concentrico.

236. **Descrizione del teodolite concentrico**. — Il teodolite concentrico si compone di due dischi (*fig.* 324), uno esteriore con una graduazione e l'altro interiore con quattro nonii che hanno i loro zeri agli estremi di due diametri fra loro perpendicolari; il cerchio formato dai due dischi accennati chiamasi *cerchio azimutale*. Questi due dischi possono girare assieme o separatamente attorno un medesimo asse perpendicolare al loro piano, portando il disco interiore un perno contenuto entro il vuoto di quello del disco esteriore. La *vite di pressione* P serve a fissare il cerchio azimutale, l'altra P si usa per fissare all'esterno il disco interno, e le viti *di richiamo* r e r' si prestano a comunicare piccole rotazioni, la prima al circolo azimutale e l'altra al disco interno.

Due sostegni, facenti corpo col disco interiore, portano il perno intorno cui può girare un cannocchiale C ed il disco interno di un cerchio graduato Z disposto in un piano verticale, detto *cerchio zenitale*. La vite di pressione P″ serve a fissare il cannocchiale; la vite di richiamo r'' si usa per produrre in esso i piccoli movimenti. Il cerchio zenitale serve per le operazioni altimetriche.

I due perni concentrici, che sopportano i dischi del cerchio azimutale, formano una colonna S sostenuta da tre bracci, aventi alle loro estremità le tre viti v', v'' e v''', che sono le viti del triangolo. Tali viti servono ad ottenere l'orizzontalità del cerchio azimutale, dietro l'ispezione di un livello L disposto sull'asse di rotazione del cannocchiale. Una vite permette lo spostamento del livello per rapporto all'asse di rotazione del cannocchiale, e un'altra vite rende possibile lo spostamento dell'accennato asse per rapporto al cerchio azimutale.

Lateralmente alla colonna S trovasi talvolta un secondo cannocchiale che, oltre di poter girare attorno alla colonna medesima, è anche suscettivo di muoversi parallelamente all'asse di rotazione dello strumento.

Il diametro della circonferenza graduata degli ordinarii teodoliti varia da 25 a 30 centimetri. L'approssimazione da essi somministrata dipende dalla lunghezza del diametro, dal numero delle divisioni della circonferenza e dal rapporto esistente fra questo e quello del nonio. Si hanno teodoliti in cui ciascun grado è suddiviso in sei parti eguali, col nonio abbracciante 59 di queste parti e diviso in 60 parti eguali; l'approssimazione è dunque di 10″. Se ne hanno altri in cui ciascun grado è diviso persino in 12 parti eguali col nonio abbracciante 99 di queste piccole parti e diviso in 100, cosicchè l'approssimazione è di 3″. Le divisioni del disco esterno e dei nonii sono generalmente incise su una corona di argento o di platino, e si facilita la lettura degli angoli mediante apposite lenti.

Non tutti i teodoliti concentrici hanno la forma di quello qui sopra descritto; i particolari variano da uno strumento all'altro; quanto si disse però è sufficiente a dare un lume generale sulla costruzione di tali strumenti e a far conoscere lo scopo cui sono destinate le singole loro parti.

237. **Collocamento del teodolite concentrico in istato d'azione.** — Il collocamento del teodolite in istato d'azione deve precedere ogni misura, e per ottenere un angolo orizzontale si seguirà ordinatamente il seguente processo:

1° *Collocare il teodolite in modo che, essendo il cerchio azimutale sensibilmente orizzontato, si trovi col suo centro nella verticale del vertice dell'angolo a misurarsi.*

Quest'operazione si fa con un piombino.

2° *Adattare il cannocchiale alla vista.*

Perciò si sposta innanzi tutto l'oculare finchè gli accennati fili appaiano ben distinti, e si fa dopo entrare o sortire il tubo del micrometro fino a vedere con chiarezza l'immagine dell'oggetto di mira.

3° *Rendere orizzontale l'asse di rotazione del cannocchiale, quando la bolla d'aria è centrata.*

Disposto lo strumento in modo che l'asse del livello passi al di sopra di una vite del triangolo, seguendo la direzione di un'altezza del triangolo medesimo, si muoverà questa vite finchè la bolla d'aria sia centrata; e si invertirà dopo il livello, senza però spostare lo accennato perno. Se il livello indica l'orizzontalità è segno che l'asse del perno del cannocchiale è orizzontale quando la bolla d'aria è centrata; in caso contrario, si ottiene questa disposizione di cose, correggendo l'errore, metà colla vite del livello (num. 55) e metà colla vite del triangolo. Per accertarsi della compiuta correzione, è necessario invertire nuovamente il livello e distruggere ogni piccolo errore che vi può rimanere col procedimento or ora indicato.

4° *Rendere orizzontali tutte le rette condotte nel cerchio azimutale parallelamente al piano verticale passante per l'arco direttore del livello quando la bolla è centrata, ossia far venire il cerchio azimutale parallelo all'asse di rotazione del cannocchiale.*

Ottenuta la coincidenza dello zero del nonio che trovasi sotto l'oculare collo zero della graduazione, e reso solidario il disco interno all'esterno, si giri l'intero strumento finchè il livello sia nella direzione di un'altezza del triangolo, e si centri la bolla colla vite che trovasi al di sotto. Fissato, dopo di ciò, il disco esterno e reso libero l'interno, si porti a 180° lo zero dell'accennato nonio: se in questa nuova posizione la bolla si sposta, è segno che i sostegni del livello non appoggiano su una linea orizzontale, o piuttosto che essi non sono della medesima altezza. Si toglie questo errore mediante una vite, che serve ad innalzare simultaneamente l'asse del perno del cannocchiale ed il livello; la correzione si fa metà con questa vite e metà con quella del triangolo, procedendo per tentativi finchè nelle due accennate posizioni il livello indichi l'orizzontalità. La ragione di questo modo d'operare dipende pure da quanto si disse al numero 55.

5° *Orizzontare il cerchio azimutale.*

Dopo di ciò si disporrà orizzontalmente il cerchio azimutale, portando a 90° lo zero del nonio posto sotto l'oculare e centrando la bolla colle due viti del triangolo collocate in direzione parallela alla lunghezza del livello. Se lo strumento è ben costrutto, la bolla d'aria dovrà accusare l'orizzontalità in qualsiasi posizione del nonio; e se questo non avviene, ne è causa qualche imperfezione del teodolite medesimo.

6° *Disporre l'asse ottico del cannocchiale in modo da descrivere nella sua rotazione un piano verticale, ossia rendere l'asse ottico del cannocchiale perpendicolare al suo asse di rotazione, già ridotto orizzontale colla terza operazione.*

L'asse ottico del cannocchiale sarà perpendicolare al suo asse di rotazione quando un oggetto, collocato a grande distanza e osservato all'incrocicchio dei fili del micrometro, si scopra ancora nello stesso modo, rovesciando il perno in senso contrario, in guisa che la superficie superiore diventi inferiore, e la inferiore superiore. Se l'intersezione dei fili micrometrici non colpisce più il medesimo oggetto, è una prova che l'asse ottico non fa un angolo retto con quello di rotazione. Si distrugge questo errore o spostando per tentativi l'intersezione della reticola finchè colpisca un oggetto collocato sulla bissettrice dell'angolo delle due direzioni date dal cannocchiale prima e dopo l'inversione; oppure riconducendo l'incrocicchio dei fili sull'oggetto di mira, spostandolo metà colla vite del cannocchiale e metà colla vite di richiamo del circolo interno; oppure ancora facendo la lettura dei due angoli, prendendo la media aritmetica, portando lo zero del nonio a questa media e spostando l'intersezione dei fili finchè si vegga l'oggetto primitivamente osservato. Per rendersi ragione di questa correzione, basta considerare quanto si disse su tal proposito parlando della diottra (num. 115).

7° *Rendere verticale uno dei fili della reticola.*

Indifferente sarebbe la direzione dei fili quando si volessero puntare gli oggetti colla loro intersezione; siccome però si fa generalmente uso di tutto un filo, è necessario che esso sia esattamente nel piano verticale passante per l'asse ottico. Questo si verifica collimando ad un oggetto ben visibile e facendo descrivere all'asse ottico del cannocchiale un piano verticale. Se il filo copre esattamente l'oggetto in ogni punto della sua lunghezza, è segno che esso è verticale; se l'oggetto rimane scoperto, si gira l'anello micrometrico in modo da raddrizzare il filo, e si verifica se l'oggetto resta allora esattamente coperto.

238. **Misura degli angoli orizzontali.** — Per fissare le idee, si supponga che la graduazione proceda da dritta a sinistra; che lo strumento siasi ridotto in istato d'azione; che sia fisso il disco esterno e libero il disco interno. Fatto coincidere lo zero del nonio collo zero della graduazione e resi solidarii i due dischi, si schiuda la vite di pressione del disco esterno; si faccia girare tutto lo strumento in modo da scoprire nel campo del cannocchiale l'oggetto di sinistra; si chiuda nuovamente l'ultima accennata vite e, traendo partito della corrispondente vite di richiamo, si punti con esattezza. Dopo ciò si renda libero il disco interno; si faccia girare questo non che il cannocchiale superiore in modo da vedere l'oggetto di destra; si fissi nuovamente l'ultimo accennato disco, e girandolo leggiermente col mezzo della sua vite di richiamo, si punti con precisione. Lo zero del nonio che prima coincideva collo zero della graduazione, avrà descritto, per venire in questa posizione, un arco, che sarà la misura dell'angolo cercato, e che si leggerà usando una delle lenti che per tale scopo trovansi annesse al teodolite.

Volendosi maggior precisione, si opererà come segue: letto l'angolo semplice, si schiuda la vite di pressione del disco esterno; si giri tutto lo strumento, finchè dal cannocchiale si scopra l'oggetto di sinistra e, fissato il cerchio azimutale, si usi della conveniente vite di richiamo per puntare con precisione: rendendo libero il disco interno e collimando col cannocchiale all'oggetto di dritta, si avrà un angolo doppio del primo. Proseguendo in tal modo si potrà avere un angolo triplo, quadruplo ecc. di quello a misurarsi; e infine si avrà l'angolo domandato, dividendo l'ultima lettura per il numero delle osservazioni fatte.

Supponghasi, per esempio, che siansi ottenuti i seguenti risultati:

	Angoli multipli	*Angoli semplici*
A.	74° 24′ 30″	74° 24′ 30″
2A.	148° 49′ 10″	74° 24′ 35″
3A.	223° 14′ 00″	74° 24′ 40″
4A.	297° 38′ 50″	74° 24′ 42″,5
5A.	12° 3′ 50″	74° 24′ 46″
6A.	86° 28′ 42″	74° 24′ 47″

si dirà essere l'angolo misurato di 74° 24′ 47″.

Qualora siavi nel teodolite il cannocchiale inferiore, se ne trae partito rivolgendolo, dopo aver collimato col cannocchiale superiore all'oggetto di sinistra, su un punto qualunque che ben distinto appare sull'orizzonte, e osservando all'istante di ogni lettura se trovasi volto sul punto medesimo. La ripetizione degli angoli è però un miglior mezzo di verificazione, per cui inutile si rende un tal cannocchiale nelle operazioni topografiche, che, oltre di accrescere il valore del teodolite, incaglia anche notevolmente la celerità dell'operazione.

Il metodo delle ripetizioni, che si applica con ottimo successo alla misura degli angoli col teodolite, non può riuscire utile nell'uso degli ordinarii goniometri. I vantaggi di questo metodo dipendono in gran parte dal grado di perfezionamento cui è portata la costruzione dello strumento impiegato, ed è facile lo scoprire per ogni strumento fino a qual limite conviene la ripetizione, leggendo i multipli successivi di un angolo, dividendoli per il numero atto a far conoscere quest'ultimo, e cessando ogni operazione quando le differenze fra i quozienti consecutivi cessano di diminuire.

Il metodo delle reiterazioni si applica: rendendo fisso il disco esterno e libero il disco interno; collimando successivamente col cannocchiale all'oggetto di destra ed a quello di sinistra coll'usare della vite di pressione e della vite di richiamo che servono rispettivamente a fermare ed a dare piccoli movimenti al disco interno; leggendo i due angoli indicati dello zero del nonio e facendone la loro differenza. Evidentemente, così operando, si ottengono i due angoli che gli allineamenti determinanti l'angolo da misurarsi fanno coll'allineamento definito dal diametro 0° e 180° del cerchio azimutale, e quindi la differenza di questi due angoli dà l'angolo domandato. Questa operazione può essere replicata diverse volte, col far prendere diverse posizioni al disco esterno facendo agire la corrispondente vite di pressione, e la media aritmetica dei risultati pochissimo differenti, che così si ottengono, rappresenta il valore dell'angolo misurato.

Se la graduazione dello strumento procede in senso contrario a quello da noi supposto, s'incomincia dall'osservare l'oggetto di dritta e poi quello di sinistra, oppure quello di sinistra e poi quello di destra, secondochè il teodolite si adopera come ripetitore o come reiteratore.

239. **Uso dei quattro nonii del teodolite ripetitore.** — I quattro nonii del teodolite, dietro quanto si disse al numero 236, devono essere disposti coi loro zeri agli estremi di due diametri fra loro perpendicolari. Per quanto grande sia la cura del macchinista, pure riesce impossibile di conseguire l'esatta coincidenza dei quattro zeri coi quattro punti che dividono la circonferenza ne' suoi quadranti, e nelle operazioni di qualche importanza è necessario tener conto delle differenze che essi indicano per correggere l'angolo definitivo non solo degli errori detti di *ripartizione*, ma anche degli altri che possono avere origine da piccole imperfezioni della graduazione.

Per comprendere il procedimento dell'operazione, si considera l'angolo A del numero precedente. Collocato lo zero del nonio che trovasi sotto l'oculare in coincidenza dello zero della graduazione, si leggano le indicazioni dei quattro nonii che saranno, a cagion d'esempio,

$$0°00'00'', \quad +0°00'30'', \quad -0°00'40'', \quad +0°00'50'',$$

dove il segno + o il segno — si riferisce alla posizione dello zero di ciascun nonio davanti o dietro di 90°, 180°, 270°. Prendasi la media aritmetica dei quattro risultati che è

$$\frac{30''-40''+50''}{4}=+10'',$$

e si potrà ritenere che il nonio, mediante cui si fanno le letture, non sia partito dall'origine della graduazione, ma sibbene dall'estremo dell'arco di ampiezza 10″.

Nello stimare l'ultimo angolo, cioè nel leggere l'angolo 6 A, si tenga conto delle indicazioni dei nonii; e supposto che, marcando quello posto sotto l'oculare 86° 28′ 42″, gli altri tre segnino (oltre la parte intera) 28′ 56″, 28′ 44″, 28′ 50″, si avrà che l'angolo medio ottenuto alla sesta lettura sarà

$$86^\circ 28' + \frac{42''+56''+44''+50''}{4} = 86^\circ 28' 48'';$$

e non dimenticando che il nonio medio si suppone partito da +10″, si avrà per vero valore dell'angolo A ripetuto sei volte

$$6\,A = 360^\circ + 86^\circ 28' 48'' - 10'' = 446^\circ 28' 38'',$$

e per l'angolo semplice

$$A = 74^\circ 24' 46'',33.$$

Il procedimento è in tutto analogo al già esposto quando i nonii, invece di quattro, sono soltanto due.

240. **Errore causato dalla non orizzontalità del cerchio azimutale.** — La definizione stessa dell'angolo di due allineamenti (num. 38) vuole che il piano, su cui si fa la lettura, sia orizzontale; una lieve mancanza d'orizzontalità è causa d'errore, che è quanto qui sotto mi propongo di esaminare.

Rappresenti AI il piano inclinato d'un circolo graduato (*fig.* 325), C il suo centro, AC la direzione d'uno dei due raggi orizzontali in esso contenuti, e AO il piano orizzontale passante per l'accennato raggio. Sia AB un piano verticale disposto perpendicolarmente all'orizzontale AC, CN la direzione d'una visuale diretta al punto N e intersecante l'ultimo accennato piano in G, H e K le due proiezioni di G sul piano orizzontale AO e sul piano inclinato AI, e finalmente siano CH e CK le due proiezioni della visuale accennata sui detti piani.

Si chiamino

I l'angolo DAE che misura l'inclinazione del piano del circolo graduato all'orizzonte,

i l'angolo GCH della visuale CN pure coll'orizzonte,

x ed y i due angoli HCA e KCA che le due proiezioni di CG fanno con CA. Immaginando condotte nel piano AB le GL ed HL, rispettivamente parallele ad AD e KG, si ha

$$\overline{AK}=\overline{AM}+\overline{LG}.$$

Ricavando ordinatamente dai triangoli rettangoli KAC, AMH, HAC, GLH, GHC, HAC

$$\overline{AK}=\overline{AC}\operatorname{tang} y,$$

$$\overline{AM}=\overline{AH}\cos I=\overline{AC}\cos I \operatorname{tang} x,$$

$$\overline{LG}=\overline{GH}\operatorname{sen} I=\overline{HC}\operatorname{tang} i \operatorname{sen} I=\overline{AC}\frac{\operatorname{tang} i}{\cos x}\operatorname{sen} I,$$

e sostituendo questi valori di $\overline{AK}$, $\overline{AM}$ ed $\overline{LG}$ nella relazione primitivamente scritta, si avrà

$$\operatorname{tang} y=\cos I \operatorname{tang} x+\frac{\operatorname{tang} i}{\cos x}\operatorname{sen} I \qquad (1).$$

Nei casi ordinarii della pratica I è generalmente piccolissimo, e facendo $\cos I=1$, $\operatorname{sen} I=I$, si ha

$$\operatorname{tang} y=\operatorname{tang} x+\frac{\operatorname{tang} i}{\cos x} I,$$

la quale si trasforma, ponendo $\operatorname{tang} y=\frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}$, $\operatorname{tang} x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e facendo sparire i denominatori, in

$$\operatorname{sen}(y-x)=I \operatorname{tang} i \cos y \qquad (2)$$

Se la visuale è orizzontale $i=0$, e la relazione (1) diventa

$$\operatorname{tang} y=\cos I \operatorname{tang} x \qquad (3).$$

Combinando una delle relazioni qui sopra esposte coll'analoga relativa ad un'altra visuale differente, si può avere una relazione fra l'angolo letto su un circolo inclinato all'orizzonte ed il vero angolo di due allineamenti: questo calcolo verrà qui sotto instituito nel caso che le due visuali sieno orizzontalmente disposte.

Ritenendo le notazioni già stabilite per rapporto ad una visuale, indicando con x' ed y' le analoghe dell'altra, chiamando φ il vero angolo dei due allineamenti e μ quello determinato sul circolo inclinato, si hanno le equazioni

$$\varphi = x' - x \tag{4}$$

$$\mu = y' - y \tag{5}$$

$$\operatorname{tang} y = \cos I \operatorname{tang} x \tag{6}$$

$$\operatorname{tang} y' = \cos I \operatorname{tang} x' \tag{7}$$

Trasformando l'equazione (5) in

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{\operatorname{tang} y' - \operatorname{tang} y}{1 + \operatorname{tang} y' \operatorname{tang} y},$$

e sostituendovi i valori di tang y' e di tang y ricavati dalle (6) e (7), si ha

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{\cos I (\operatorname{tang} x' - \operatorname{tang} x)}{1 + \cos^2 I \operatorname{tang} x' \operatorname{tang} x} \tag{8}$$

Eliminando x' da questa equazione col sostituirvi il valore dato dalla (4), si trova

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{\cos I \operatorname{tang} \varphi (1 + \operatorname{tang}^2 x)}{1 - \operatorname{sen}^2 I \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} x + \cos^2 I \operatorname{tang}^2 x} \tag{9}$$

Quest'ultima equazione serve a dedurre dall'angolo μ di due allineamenti, ottenuto con un circolo il cui piano ha una data inclinazione I all'orizzonte, l'angolo vero φ, quando si conosca l'angolo x che uno dei due allineamenti fa col piano verticale passante pel diametro orizzontale.

Eguagliando il valore di tang φ dato dall'equazione (4) a quello di tang μ espresso dalla (8), si ha una relazione acciocchè sia $\mu = \varphi$, e si avrà immediatamente

$$\operatorname{tang} x' \operatorname{tang} x = \sec I.$$

Quest'equazione, essendo soddisfatta col cangiare x in $180° - x'$ e x' in $180° - x$, o x in $180° + x$ e x' in $180° + x'$, oppure ancora x

in $360^\circ - x'$ ed x' in $360^\circ - x$, fa vedere come vi siano quattro posizioni per cui l'angolo μ eguaglia l'angolo φ, come queste corrispondano a visuali collocate in allineamenti simmetricamente posti per rispetto al piano verticale determinato dal diametro orizzontale del circolo graduato.

Differenziando per rapporto a tang x l'equazione (9), si possono riconoscere le posizioni per cui l'angolo μ letto su un circolo non orizzontale sia massimo o minimo. Differenziazione e riduzione fatta, si trova

$$\frac{d \operatorname{tang} \mu}{d \operatorname{tang} x} = \frac{\operatorname{tang}\varphi + 2 \operatorname{tang} x - \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}^2 x}{(1 - \operatorname{sen}^2 \mathrm{I} \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang} x + \cos^2 \mathrm{I} \operatorname{tang}^2 x)^2} \operatorname{sen}^2 \mathrm{I} \cos \mathrm{I} \operatorname{tang}\varphi.$$

Il valore di x, che corrisponde al massimo e al minimo di μ, è dato dall'equazione

$$\operatorname{tang}\varphi + 2 \operatorname{tang} x - \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}^2 x = 0,$$

che, risoluta, somministra

$$\operatorname{tang} x = \cot\varphi\,(1 \pm \sec\varphi).$$

Ricavando il valore di tang x' dall'equazione (4), e sostituendo per tang x il valore qui sopra trovato, si ha

$$\operatorname{tang} x' = \cot\varphi\,(-1 \mp \sec\varphi).$$

I valori di tang x e di tang x' sono tali che tang $x = -$ tang x', ovvero $-$ tang $x =$ tang x'. Questa proprietà delle tangenti di due angoli x ed x' fa vedere che l'angolo μ è massimo o minimo quando l'angolo dei due allineamenti, determinati dalle visuali orizzontalmente dirette, vien diviso per metà dal piano verticale passante pel diametro orizzontale del circolo graduato o dal suo perpendicolare.

Per trovare ora quali sieno i due valori massimo e minimo di μ, s'indichi con μ' ciò che si legge sullo strumento per quell'angolo che vien diviso per metà dal piano verticale passante pel diametro orizzontale A A' (*fig.* 326), e con μ'' quello che vien diviso pure per metà del piano verticale perpendicolare ad AA' e di traccia PP'. Siccome $1/2\ \varphi$ è l'angolo ACB, e $1/2\ \mu'$ la proiezione di quest'angolo sul piano del circolo graduato; e siccome $\frac{1}{2}\mu''$, proiezione di

SCP sul piano del circolo graduato, è complemento di quello che la proiezione della visuale fa coll'accennato diametro orizzontale, si avrà, dietro quanto si disse al principio di questo numero,

$$\operatorname{tang}\frac{\mu'}{2}=\cos I \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} \qquad (10).$$

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\mu''}{2}\right)=\cos I \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right);$$

dalla qual ultima si ricava

$$\cot\frac{\mu''}{2}=\cos I \cot\frac{\varphi}{2},$$

ossia ancora

$$\operatorname{tang}\frac{\mu''}{2}=\frac{\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}}{\cos I} \qquad (11).$$

Essendo $\cos I<1$, si ha dalle equazioni (10) e (11)

$$\operatorname{tang}\frac{\mu'}{2}<\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\mu''}{2}>\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2},$$

e conseguentemente

$$\mu'<\varphi<\mu'';$$

cosicchè μ' è il minimo e μ'' il massimo.

Per trovare di quanto differisce l'angolo vero delle due visuali sì dal minimo che dal massimo che si possono leggere sul circolo graduato, si ponga

$$\frac{\varphi}{2}-\frac{\mu'}{2}=\varepsilon',$$

$$\frac{\mu''}{2}-\frac{\varphi}{2}=\varepsilon'',$$

e si avrà

$$\operatorname{tang}\varepsilon' = \frac{\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} - \operatorname{tang}\frac{\mu'}{2}}{1 + \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tang}\frac{\mu'}{2}},$$

$$\operatorname{tang}\varepsilon'' = \frac{\operatorname{tang}\frac{\mu''}{2} - \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tang}\frac{\mu''}{2}\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}},$$

le quali equazioni diventano, sostituendovi i valori di $\operatorname{tang}\frac{\mu'}{2}$ e di $\operatorname{tang}\frac{\mu''}{2}$, dati dalle equazioni (10) e (11),

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\varepsilon' &= \frac{\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}(1-\cos \mathrm{I})}{1+\cos \mathrm{I}\operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}}, \\ \operatorname{tang}\varepsilon'' &= \frac{\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}(1-\cos \mathrm{I})}{\cos \mathrm{I}+\operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}} \end{aligned}\right\} \quad (12).$$

Si conchiuderà adunque come l'angolo che si legge su un circolo graduato può essere tutto al più minore del vero del doppio di ε', o maggiore del doppio di ε''; e come la quistione di trovare il più grand'errore che si può commettere si riduce a saper riconoscere quale è il più grande dei due angoli ε' ed ε''.

Eguagliando fra loro i due ultimi valori di tang ε' e tang ε'', si scoprirà la proprietà che dev'essere soddisfatta, acciocchè i due massimi errori sieno eguali fra loro, e si avrà

$$\cos \mathrm{I} + \operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2} = 1 + \cos \mathrm{I}\operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}.$$

d'onde si ricava

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = 1,$$

ossia

$$\varphi = 90^o.$$

I due massimi errori saranno dunque eguali, quando l'angolo dei due allineamenti è retto; e facendo $\varphi = 90°$ nelle equazioni (12) si avrà

$$\operatorname{tang} \varepsilon' = \operatorname{tang} \varepsilon'' = \frac{1-\cos I}{1+\cos I} = \operatorname{tang}^2 \frac{I}{2},$$

cioè il massimo errore è doppio di quell'angolo che ha la tangente eguale al quadrato di quella di una metà dell'inclinazione del circolo graduato all'orizzonte.

Prendendo in considerazione le equazioni (12) si vede che sarà

$$\varepsilon' > \varepsilon''$$

se

$$1 + \cos I \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2} < \cos I + \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$\varepsilon' < \varepsilon''$$

se

$$1 + \cos I \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2} > \cos I + \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Queste relazioni equivalgono alle

$$1 - \cos I < (1 - \cos I) \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$1 - \cos I > (1 - \cos I) \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2},$$

o ancora alle

$$1 < \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$1 > \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2};$$

la prima delle quali richiede $\varphi > 90°$ e la seconda $\varphi < 90°$.

Si conchiuderà adunque che quando l'angolo delle due visuali è ottuso, il massimo errore che si può commettere è doppio dell'angolo la cui tangente è

$$\frac{\tang\frac{\varphi}{2}(1-\cos I)}{1+\cos I \tang^2\frac{\varphi}{2}},$$

e che quando l'angolo delle due visuali è acuto, il massimo errore è invece doppio di quell'angolo che ha per tangente

$$\frac{\tang\frac{\varphi}{2}(1-\cos I)}{\cos I+\tang^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Le conseguenze qui sopra esposte, nell'ipotesi che si faccia la lettura degli angoli su un circolo graduato, valgono anche pel caso in cui l'angolo di due allineamenti venga descritto sullo specchio della tavoletta pretoriana non disposto orizzontalmente.

241. **Errore causato dall'obliquità dell'asse ottico dal cannocchiale al suo asse di rotazione.** — Supponendo che siano CA e CB (*fig.* 327) due visuali, CO la direzione orizzontale dell'asse di rotazione del cannocchiale, CA′ e CB′ le tracce dei due allineamenti determinati dalle accennate visuali col piano orizzontale passante pel detto asse di rotazione, sarà A′CB′ l'angolo richiesto. Se l'asse ottico del cannocchiale ed il suo asse di rotazione non sono perpendicolari fra di loro, la superficie descritta dal primo intorno al secondo è quella di un cono retto. Inclinando la linea di mira, primitivamente diretta secondo CA, finchè faccia coll'orizzonte l'angolo bCb' eguale all'altro BCB′ della visuale CB, il piano verticale per essa passante diventa bCb' diverso di ACA′; e, rotando tutto lo strumento fino a scoprire all'incrocicchio dei fili micrometrici il punto B, l'angolo determinato dai piani verticali passanti per le ultime due accennate posizioni della linea di mira, ossia quello che il circolo graduato dà per angolo delle due visuali CA e CB, è $B'Cb'$, il quale differisce dall'angolo vero delle quantità $A'Cb'$, che costituisce appunto l'errore che qui mi propongo di apprezzare.

Si chiamino

α ed α' le inclinazioni ACA′ e BCB′ delle visuali CA e CB all'orizzonte,

β l'angolo DCO che l'asse ottico del cannocchiale fa col suo asse di rotazione,

x ed y gli angoli A′CO e b'CO che le proiezioni orizzontali di CA e Cb fanno colla direzione CO dell'asse di rotazione. Immaginando per un punto della CO un piano ad essa perpendicolare, questo piano taglierà la superficie conica, descritta dall'asse ottico del cannocchiale, secondo una circonferenza di circolo di centro O, e di cui suppongo rappresentato in EbAD un quadrante.

Dai triangoli A′OC e b'OC, rettangoli in O, si ricava

$$\tang x = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OC}},$$

$$\tang y = \frac{\overline{Ob'}}{\overline{OC}}.$$

Conducendo ora i due raggi $\overline{OA}$ e $\overline{Ob}$, e osservando che i due triangoli AOC e bOC, rettangoli in O, sono eguali, si ha

$$\overline{OA} = \overline{Ob} = \overline{OC} \tang \beta,$$

$$\overline{CA} = \overline{Cb} = \frac{\overline{OC}}{\cos \beta}.$$

Prendendo in considerazione i due triangoli ACA′ e bBb', rettangoli in A′ e b', si deduce

$$\overline{AA'} = \overline{CA} \operatorname{sen} \alpha = \overline{OC} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \beta},$$

$$\overline{bb'} = \overline{Cb} \operatorname{sen} \alpha' = \overline{OC} \frac{\operatorname{sen} \alpha'}{\cos \beta}.$$

Questi valori, sostituiti nelle relazioni

$$\overline{\mathrm{OA}'}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{AA}'}^2}$$

$$\overline{\mathrm{O}b'}=\sqrt{\overline{\mathrm{O}b}^2-\overline{bb'}^2},$$

ricavate dai due triangoli rettangoli $\mathrm{AA'O}$ e $bb'\mathrm{O}$, le trasformano in

$$\overline{\mathrm{OA}'}=\overline{\mathrm{OC}}\sqrt{\operatorname{tang}^2\beta-\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\beta}}$$

$$\overline{\mathrm{O}b'}=\overline{\mathrm{OC}}\sqrt{\operatorname{tang}^2\beta-\frac{\operatorname{sen}^2\alpha'}{\cos^2\beta}}.$$

Sostituendo i valori di $\overline{\mathrm{OA}'}$ e $\overline{\mathrm{O}b'}$, qui trovati, nelle espressioni primitive di $\operatorname{tang}x$ e $\operatorname{tang}y$, dopo d'aver cangiato $\operatorname{tang}\beta$ in $\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}$, si avrà

$$\operatorname{tang}x=\frac{1}{\cos\beta}\sqrt{\operatorname{sen}^2\beta-\operatorname{sen}^2\alpha}$$

$$\operatorname{tang}y=\frac{1}{\cos\beta}\sqrt{\operatorname{sen}^2\beta-\operatorname{sen}^2\alpha'}.$$

Chiamando ora e l'angolo $\mathrm{A'C}b'$, che costituisce l'errore che vuolsi apprezzare, si avrà

$$\operatorname{sen}e=\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}x\cos y-\operatorname{sen}y\cos x,$$

la quale, dopo d'avervi sostituiti per $\operatorname{sen}x$, $\cos x$, $\operatorname{sen}y$ e $\cos y$ i valori ricavati da quelli di $\operatorname{tang}x$ e di $\operatorname{tang}y$, e osservando che $\operatorname{sen}^2\beta-\operatorname{sen}^2\alpha=\operatorname{sen}(\beta+\alpha)\operatorname{sen}(\beta-\alpha)$, e che $\operatorname{sen}^2\beta-\operatorname{sen}^2\alpha'=\operatorname{sen}(\beta+\alpha')\operatorname{sen}(\beta-\alpha')$, diventa

$$\operatorname{sen}e=\frac{\cos\beta\left\{\sqrt{\operatorname{sen}(\beta+\alpha)\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}-\sqrt{\operatorname{sen}(\beta+\alpha')\operatorname{sen}(\beta-\alpha')}\right\}}{\cos\alpha\cos\alpha'}.$$

L'errore somministrato da questa formola si dirà in più quando il valore di e trovasi affetto dal segno $+$; in meno quando resta affetto dal segno —. Tenendo conto del segno di e, e togliendolo dall'angolo letto sullo strumento, si ha l'angolo domandato. Nel valutare l'angolo β, bisogna prendere l'angolo fatto dall'asse ottico del cannocchiale col suo asse di rotazione, e contarlo, quando la graduazione del circolo azimutale procede da sinistra a diritta, con quella parte dell'accennato asse di rotazione che nell'atto di osservare trovasi a diritta dell'operatore.

242. **Errore causato dalla non orizzontalità dell'asse di rotazione del cannocchiale.** — Se l'asse ottico del cannocchiale è perpendicolare al suo asse di rotazione, disposto obliquamente all'orizzonte, la superficie piana descritta da quello intorno a questo non è verticale. Pongasi che sia CO (*fig.* 328) il piano orizzontale passante pel punto C, in cui l'asse ottico del cannocchiale è incontrato dalla verticale passante pel centro del circolo graduato; che si voglia trovare l'angolo A′CB′, che fanno fra loro gli allineamenti determinati dalle due visuali CA e CB; e che sia OV un piano verticale disposto perpendicolarmente alla posizione orizzontale CD dell'asse ottico o, ciò che torna lo stesso, parallelamente al piano verticale determinato dall'asse di rotazione del cannocchiale. Rotando il cannocchiale, primitivamente diretto secondo CA, la direzione dell'asse ottico, invece di passare per la verticale AA′, percorrerà l'obliqua Db, il cui angolo bDb', coll'orizzontale DF, è complemento dell'angolo che l'asse di rotazione fa coll'orizzonte. Dando perciò alla direzione dell'asse ottico la stessa inclinazione all'orizzonte della visuale CB, verrà esso a passare per un punto b della Db, e, se dopo si collima al punto B, si stimerà per angolo dei due allineamenti l'angolo b'CB′, commettendo un errore A′Cb'.

Per stimare l'accennato errore, si chiamino

i l'inclinazione dell'asse di rotazione del cannocchiale all'orizzonte, di cui è complemento l'angolo bDb',

α ed α' i due angoli ACA′ e BCB′ esprimenti le inclinazioni delle due visuali CA e CB all'orizzonte,

x e x' i due angoli A′CD e b'CD,

ε l'errore angolare A′Cb'.

L'errore ε è la differenza fra l'angolo x' e l'angolo x, e quindi si ha

$$\operatorname{sen}\varepsilon = \operatorname{sen}(x'-x) = \operatorname{sen}x'\cos x - \operatorname{sen}x\cos x' \qquad (1).$$

Considerando ordinatamente i due triangoli $AA'D$ e $bb'D$ rettangoli, il primo in A' e il secondo in b', si ha

$$\overline{A'D} = \overline{A'A}\,\text{tang}\,i,$$

$$\overline{b'D} = \overline{b'b}\,\text{tang}\,i.$$

Sostituendo in queste equazioni i valori

$$\overline{A'A} = \overline{CA'}\,\text{tang}\,\alpha$$

e

$$\overline{b'b} = \overline{Cb'}\,\text{tang}\,\alpha',$$

ricavati dai due triangoli rettangoli $AA'C$ e $bb'C$, non che gli altri

$$\overline{A'D} = \overline{CA'}\,\text{sen}\,x$$

e

$$\overline{b'D} = \overline{Cb'}\,\text{sen}\,x',$$

dedotti dai due triangoli $A'DC$, e $b'DC$ rettangoli in D, si trovano le seguenti relazioni fra x, i ed α, fra x', i ed α'

$$\text{sen}\,x = \text{tang}\,i\,\text{tang}\,\alpha, \qquad \text{sen}\,x' = \text{tang}\,i\,\text{tang}\,\alpha' \qquad (2).$$

Sostituendo nell'equazione (1) i valori di $\text{sen}\,x$ e $\text{sen}\,x'$ dati dalle equazioni (2), non che quelli di $\cos x$ e $\cos x'$, che dalle medesime si deducono, si trova

$$\text{sen}\,\varepsilon = \text{tang}\,i\,\text{tang}\,\alpha'\sqrt{1-\text{tang}^2 i\,\text{tang}^2\alpha}$$

$$-\,\text{tang}\,i\,\text{tang}\,\alpha\sqrt{1-\text{tang}^2 i\,\text{tang}^2\alpha'},$$

la quale, ponendo $\dfrac{\text{tang}\,i}{\cos i\cos\alpha\cos\alpha'}$ fattor comune, facilmente si può trasformare in

$$\operatorname{sen}\varepsilon=\frac{\operatorname{tang} i}{\cos i\cos\alpha\cos\alpha'}\left\{\begin{array}{l}\operatorname{sen}\alpha'\sqrt{\cos^2 i\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2 i\operatorname{sen}^2\alpha}\\-\operatorname{sen}\alpha\sqrt{\cos^2 i\cos^2\alpha'-\operatorname{sen}^2 i\operatorname{sen}^2\alpha'}\end{array}\right\}.$$

Osservando ora che

$$\begin{aligned}&\cos^2 i\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2 i\operatorname{sen}^2\alpha\\&=(\cos i\cos\alpha+\operatorname{sen} i\operatorname{sen}\alpha)(\cos i\cos\alpha-\operatorname{sen} i\operatorname{sen}\alpha)\\&=\cos(i-\alpha)\cos(i+\alpha),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\cos^2 i\cos^2\alpha'-\operatorname{sen}^2 i\operatorname{sen}^2\alpha'\\&=(\cos i\cos\alpha'+\operatorname{sen} i\operatorname{sen}\alpha')(\cos i\cos\alpha'-\operatorname{sen} i\operatorname{sen}\alpha')\\&=\cos(i-\alpha')\cos(i+\alpha'),\end{aligned}$$

si può avere quest'altra espressione di $\operatorname{sen}\varepsilon$

$$\operatorname{sen}\varepsilon=\frac{\operatorname{tang} i}{\cos i\cos\alpha\cos\alpha'}\left\{\begin{array}{l}\operatorname{sen}\alpha'\sqrt{\cos(i-\alpha)\cos(i+\alpha)}\\-\operatorname{sen}\alpha\sqrt{\cos(i-\alpha')\cos(i+\alpha')}\end{array}\right\}\quad(3).$$

Nel calcolare l'errore ε, gli angoli α ed α' si devono considerare positivi se sono di elevazione, negativi se sono di depressione: l'angolo i si valuta come affetto dal segno $+$ o dal segno $-$, secondochè collimando, nell'atto di operare, ad un punto elevato sull'orizzonte ed aumentando il suo angolo di elevazione, la linea di mira si trova rivolta ad un oggetto posto sulla diritta o sulla sinistra del punto osservato quando la graduazione procede da sinistra a dritta. Sottraendo dall'angolo letto l'angolo d'errore ε, quale risulta dalla formola (3), si ha l'angolo vero.

243. **Errore causato dall'eccentricità del cannocchiale.** — Se il piano verticale determinato dall'asse ottico del cannocchiale non passa pel centro del circolo azimutale, gli angoli con esso misurati

trovansi affetti dall'errore di *eccentricità*, che qui mi propongo di valutare.

Suppongasi di avere uno strumento in cui la graduazione procede da sinistra a dritta; siano $SOD = x$ l'angolo da misurarsi (*fig.* 329), O il centro dello strumento, $\overline{OA} = e$ la distanza del centro O dal piano verticale determinato dall'asse ottico del cannocchiale; e si chiamino D ed S le due distanze $\overline{OD}$ ed $\overline{OS}$.

Ponendo lo zero del nonio in coincidenza dello zero della graduazione, collimando col cannocchiale all'oggetto di destra D, slacciando la vite del disco interno e puntando l'oggetto di sinistra S, lo zero del nonio percorrerà l'arco B A, e si avrà la misura dell'angolo $BOA = SCD = \alpha$.

Considerando successivamente l'angolo SED come esterno ai due triangoli EDC, ESO, si avranno le equazioni

$$SED = \alpha + EDC, \qquad SED = x + ESO.$$

Eguagliando i due valori di SED, si trova

$$\alpha - x = ESO - EDC:$$

$\alpha - x$, essendo la differenza fra l'angolo letto e quello che si vuol trovare, esprime il domandato errore di eccentricità.

Osservando che nei triangoli OSA ed ODB gli angoli in S ed in D sono abbastanza piccoli da poter sostituire alle lunghezze degli archi che li chiudono i loro seni, si ha

$$\alpha - x = \frac{e}{S} - \frac{e}{D} \qquad (1).$$

Riducendo allo stesso denominatore, ed esprimendo la correzione in minuti secondi, si avrà

$$\alpha - x = \frac{e(D-S)}{DS \operatorname{sen} 1''}.$$

Da questa formola si scorge che la correzione dovuta alla eccentricità diminuisce col crescere delle distanze dei punti osservati dallo strumento, che è quasi sempre una frazione piccolissima da potersi trascurare, e che diventa nulla quando le due distanze D ed S sono eguali fra di loro.

È rimarchevole come la somma delle correzioni d'eccentricità, applicate ai tre angoli di un triangolo o a tutti gli angoli interni di un poligono qualunque, è nulla; infatti chiamando a', a'', a''', a^{iv}, a^{v} i cinque lati di un pentagono (*fig.* 330), e applicando la formola (1), si ha

$$
\begin{array}{lll}
\text{per correzione dell'angolo} & A' & \ldots \ \dfrac{e}{a^{\text{v}}}-\dfrac{e}{a'}, \\[2ex]
\quad \text{»} & A'' & \ldots \ \dfrac{e}{a'}-\dfrac{e}{a''}, \\[2ex]
\quad \text{»} & A''' & \ldots \ \dfrac{e}{a''}-\dfrac{e}{a'''}, \\[2ex]
\quad \text{»} & A^{\text{iv}} & \ldots \ \dfrac{e}{a'''}-\dfrac{e}{a^{\text{iv}}}, \\[2ex]
\quad \text{»} & A^{\text{v}} & \ldots \ \dfrac{e}{a^{\text{iv}}}-\dfrac{e}{a^{\text{v}}},
\end{array}
$$

la somma delle quali è evidentemente zero.

È anche agevole di far vedere come la somma delle correzioni d'eccentricità, applicate a tutti gli angoli fatti intorno ad un punto, è nulla; e come, misurando un angolo AOC (*fig.* 331) e le due parti AOB e BOC, la correzione d'eccentricità conveniente all'angolo totale è eguale alla somma delle correzioni d'eccentricità convenienti alle due parti; e finalmente come misurando i due angoli adiacenti ACD e BCD (*fig.* 332), essendo a e b le due distanze $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$, l'errore d'eccentricità è $\dfrac{e}{b}-\dfrac{e}{a}$.

Segue da ciò: 1° non potersi conchiudere esser libero da ogni errore d'eccentricità un goniometro che, per somma degli angoli interni di un poligono, dà tante volte due retti quanti sono i lati del poligono, meno quattro retti; o che dà 360° per somma degli angoli fatti intorno ad un punto; o che dà un perfetto accordo tra la somma delle due parti d'un angolo ed il totale; 2° potersi riconoscere l'errore d'eccentricità misurando due angoli adiacenti, e col fare in modo che i due punti collocati in allineamento col centro dello strumento siano inegualmente distanti dal centro medesimo.

Teodolite eccentrico.

244. **Descrizione del teodolite ripetitore eccentrico.** — Il *teodolite eccentrico* si compone di un cerchio azimutale, formato da due dischi concentrici, l'uno esterno, portante una graduazione, e l'altro interno, avente due nonii coi loro zeri su un medesimo diametro. L'accennato cerchio, sostenuto da una colonna C, può disporsi orizzontale mediante le tre viti v', v'', v''' del triangolo (*fig.* 333), e può rotare intorno ad un asse perpendicolare al suo piano e passante pel suo centro, liberamente quando sia slacciata la vite di pressione p, e lentamente quando, chiudendo questa, si faccia agire quella di richiamo r.

Una seconda colonna C', che sorge dal centro del disco interno, a cui è solidariamente unita, porta alla sua estremità, in senso perpendicolare al suo asse, una lastra L piegata ad angolo retto. Contro questa lastra è adattato un sistema di due dischi concentrici, la cui faccia esterna dev'essere verticale quando lo è pure l'asse dello strumento, ed aventi, il maggiore una graduazione, il minore due nonii coi loro zeri diametralmente opposti. Un cannocchiale coll'asse ottico parallelo al piano di questi dischi è invariabilmente unito a quello interno, per modo che, rotando l'accennato cannocchiale attorno un perno P, si fanno scorrere i due nonii sulla circonferenza graduata.

Il disco interno appartenente al cerchio azimutale, la colonna C' e quanto su essa è collocato possono girare, indipendentemente dal disco esterno, attorno all'asse di rotazione dello strumento. L'accennato moto rotatorio si può liberamente produrre quando sia slacciata la vite di pressione p': per ottenerlo a brevi intervalli, bisogna rendere solidarii i due dischi, mediante l'azione comprimente dell'anzidetta vite, e far poscia agire la corrispondente vite di richiamo. Similmente il cannocchiale e il disco interno del cerchio zenitale si possono rendere solidarii al disco esterno colla vite di pressione p'', e produrre in essi piccoli movimenti colla vite di richiamo r'',

Un livello a bolla d'aria, annesso al cerchio zenitale, serve nella misura degli angoli a disporre orizzontalmente il cerchio azimutale.

245. **Collocamento del teodolite eccentrico in istato d'azione per misurare gli angoli orizzontali.** — Collocato lo strumento in modo che il suo asse, sensibilmente verticale, cada sul vertice

dell'angolo a misurarsi, adattato il cannocchiale alla vista, si faranno ancora le seguenti operazioni:

1° *Disporre il cerchio azimutale in modo che tutte le rette in esso condotte, parallelamente al piano verticale passante per l'arco direttore del livello, sieno orizzontali.*

Quanto già si disse su tale operazione, parlando del teodolite concentrico, è anche applicabile al teodolite eccentrico, e tralasciando il metodo comune di rettificazione, accennerò soltanto al caso ben frequente, in cui sul tubo del livello è indicata una graduazione. Fatto coincidere lo zero del nonio del cerchio azimutale collo zero della graduazione, e collocato il livello parallelamente a due viti del triangolo, si renda con queste interamente visibile la bolla d'aria, e si osservi sotto qual divisione del tubo siasi arrestata una delle estremità della bolla suddetta; si porti a 180° lo zero del nonio e si guardi a qual divisione trovasi la stessa estremità della bolla; prendasi la media aritmetica delle due divisioni osservate, e si conduca il già detto estremo della bolla a toccare questa divisione media. Dietro quest'operazione, tutte le rette condotte nel cerchio azimutale, parallelamente al piano verticale passante per l'asse del livello, saranno orizzontali.

Se avviene il caso per cui la bolla non si mantenga interamente visibile in due posizioni diametralmente opposte, sarà necessario alzare od abbassare convenientemente una delle due estremità del livello, mediante la vite che per tale oggetto trovasi annessa al medesimo.

2° *Orizzontare il cerchio azimutale.*

Eseguita la qui sopra indicata operazione, si porti lo zero del nonio a 90°; si riconduca l'estremità della bolla a toccare l'accennata divisione colla terza vite del triangolo, ed il cerchio azimutale troverassi disposto orizzontalmente.

3° *Rendere l'asse ottico del cannocchiale perpendicolare al suo asse di rotazione.*

Orizzontato il cerchio azimutale, e diretto orizzontalmente il cannocchiale sopra un oggetto lontanissimo per poter trascurare la distanza del centro dello strumento del cannocchiale, si osservi se, dopo aver girato lo strumento di 180° esatti, lo stesso oggetto trovasi sotto la crociera dei fili. Se ciò non ha luogo, si fa la correzione, come si accennò parlando del teodolite concentrico.

4° *Rendere verticale il piano descritto dall'asse ottico del cannocchiale, ossia rendere orizzontale l'asse di rotazione del cannocchiale.*

Si collimi ad un oggetto lontano e piuttosto elevato sull'orizzonte del luogo d'osservazione col cannocchiale a sinistra; si porti poscia il cannocchiale a destra, girandolo orizzontalmente di 180°, e gli si dia la medesima inclinazione all'orizzonte: se l'incrocicchio dei fili micrometrici colpisce l'oggetto già osservato, l'asse di rotazione è orizzontale; in caso contrario, si corregge la metà dell'errore mediante una vite che serve allo spostamento dell'asse di rotazione del cannocchiale. L'esattezza di questo procedimento è messa in chiaro da quanto si disse al numero 113, parlando del modo di verificare se il piano descritto dall'asse ottico del cannocchiale della diottra è verticale.

5° *Rendere verticale uno dei fili della reticola.*

Basta per ciò operare come si disse al numero 237; oppure si può far girare sul suo asse il piccolo tubo che contiene i fili micrometrici, finchè il filo da rendersi verticale cada tutto nella direzione di un filo a piombo o dello spigolo verticale di un muro.

246. **Misura degli angoli orizzontali col teodolite eccentrico.** — Collocato il teodolite, la cui graduazione suppongo procedere da diritta a sinistra, in istato d'azione, si trova l'angolo degli allineamenti passanti pel suo centro e per due punti del terreno, operando come segue. Stabilita la coincidenza degli zeri del cerchio azimutale, e serrata la vite di pressione del disco interno, si schiude quella del disco esterno, e si porta il cannocchiale a sinistra dell'operatore; si conduce l'oggetto di sinistra nel campo del cannocchiale, e serrata l'accennata vite del disco esterno, si trae partito dalla sua vite di richiamo onde portare l'incrocicchio del micrometro sull'indicato oggetto. Schiusa dopo la vite del disco interno, si rota il cannocchiale per dirigere la visuale sull'oggetto di destra e, reso nuovamente solidario il disco interno all'esterno, si punta con precisione mediante l'opportuna vite di richiamo. Dopo ciò si apre la vite di pressione del disco esterno; si rota lo strumento per portare il cannocchiale alla destra dell'operatore; si riconduce l'oculare all'occhio, e di bel nuovo, col processo esposto, si collima, prima all'oggetto di sinistra e poi a quello di destra. Si fa in ultimo la lettura col nonio che trovavasi a zero nel principio dell'operazione, ed il numero che si legge sul cerchio azimutale sarà il doppio dell'angolo a misurarsi.

Supponendo che sia SCD (*fig.* 334) l'angolo a misurarsi, che sia in C il centro del circolo orizzontale; che la circonferenza graduata sia quella di raggio $\overline{Ca}$; che la circonferenza descritta dall'intersezione dell'asse ottico del cannocchiale coll'asse del suo perno sia quella di raggio $\overline{CF}$, e che gli zeri dei due nonii sieno in un medesimo diametro parallelo a piano descritto dall'asse ottico del cannocchiale; quando si collimerà per la prima volta al punto S, lo zero del nonio sarà in a sul raggio $\overline{Ca}$ parallelo ad SF, e collimando al punto D, si porterà in b sul raggio $\overline{Cb}$ parallelo ad OD, ed il numero dei gradi dell'arco ab sarà la misura dei due angoli aCb e SOD, eguali siccome aventi i lati rispettivamente paralleli e l'apertura rivolta in senso contrario. Rotando poi tutto lo strumento per portare il cannocchiale a destra, allorquando si vedrà S la seconda volta, lo zero del nonio sarà venuto in b' sul raggio $\overline{Cb'}$ parallelo ad O′S quello della graduazione in a', essendo l'arco $a'b'$ eguale all'arco ab; cosicchè, girando la seconda volta il disco interno per vedere ancora il punto D, il punto a' starà fermo, lo zero del nonio da b' passerà in b'' sul raggio $\overline{Cb''}$ parallelo ad HD, e all'angolo letto sull'arco $a'b'$ si aggiungerà l'altro $b'b''$ che misura l'angolo $b'Cb''$ e quindi anche il suo eguale SO′D. Cosicchè si può conchiudere che l'angolo segnato dallo zero del nonio, che prima coincideva collo zero della graduazione, è la somma dei due SOD, SO′D.

Se ora si fa $SOD = O$, $SO'D = O'$, $\frac{1}{2} OSO' = OSC = CSO' = x$, $\frac{1}{2} ODO' = ODC = CDO' = y$, e se si chiama C l'angolo dimandato SCD, si avrà, considerando l'angolo SED come esterno ai triangoli SOE e DEC,

$$SED = O + x, \qquad SED = C + y,$$

dalle quali equazioni si ricava

$$O + x = C + y \tag{1}$$

Similmente, considerando l'angolo SGD esterno ai triangoli DGO′ e GSC, si avrà:

$$SGD = O' + y, \qquad SGD = C + x,$$

dalle quali si trae

$$O' + y = C + x \tag{2}$$

Sommando le equazioni (1) e (2), si ha

$$C = \frac{O + O'}{2},$$

come si voleva dimostrare.

Ripetendo nel modo ora descritto le osservazioni, si otterrà il quadruplo, il sestuplo ecc. dell'angolo a misurarsi.

Per misurare col teodolite eccentrico un angolo, usando il metodo di reiterazione, si rende fisso il disco esterno, si orizzonta il cerchio azimutale, col cannocchiale a sinistra, si collima prima coll'oggetto di destra e poi a quello di sinistra, e si fa la differenza O fra le indicazioni date da uno stesso nonio appena si è collimato a ciascuno dei detti oggetti. Dopo di ciò, si porta il cannocchiale a destra, si riconduce l'oculare all'occhio, nuovamente si collima prima all'oggetto di destra e poi a quello di sinistra, e si fa ancora la differenza O′ fra le letture corrispondenti ad uno stesso nonio. La differenza O rappresenta evidentemente l'angolo SOD e la differenza O′ l'angolo SO′D, cosicchè la semi-somma di questi due angoli dà l'angolo domandato SCD$=$C. — Se, collimando all'oggetto di destra si ottiene un angolo minore di quello che leggesi appena si è collimato all'oggetto di sinistra, prima di fare la differenza delle due letture bisogna aumentare la prima di 360°.

Rendendo fisso il disco esterno in diverse posizioni, si potrebbero trovare coll'ultimo esposto metodo più valori dall'angolo C, pochissimo differenti l'uno dall'altro, ed allora la loro media aritmetica conduce a quel valore che definitivamente convien assumere per misura dell'angolo SCD.

Se la graduazione dello strumento procede da sinistra a dritta, si porta prima il cannocchiale a destra, e nelle due posizioni da darsi allo strumento, per ottenere un dato angolo, si collima prima all'oggetto di destra e poi a quello di sinistra, o viceversa, prima all'oggetto di sinistra e poi a quello di destra, secondochè si impiega il metodo della ripetizione o quello della reiterazione.

Osservazione. Misurando gli angoli col teodolite eccentrico, e collimando agli oggetti coll' intersezione dei fili micrometrici, si possono lasciare le tre ultime operazioni esposte al numero 245. Collimando al punto S e al punto D col cannocchiale a sinistra, invece dell'angolo SOD$=$O, se ne prenderà un altro $O \pm \varepsilon$, valendo il segno $+$ o il segno $-$ secondochè il dissesto del cannocchiale produce un aumento o una diminuzione nell'angolo O. Collimando poscia ai medesimi punti e col cannocchiale a destra, il medesimo errore ha luogo in senso contrario, e invece dell'angolo $SO'D = O'$, se ne prenderà un altro $O' \mp \varepsilon$. Prendendo la semisomma dei due angoli $O \pm \varepsilon$ ed $O' \mp \varepsilon$, l'errore ε scompare, e quindi l'obliquità dell'asse ottico del cannocchiale al suo asse di rotazione e la non orizzontalità di quest'ultimo non hanno influenza alcuna sulla misura degli angoli eseguita coi teodoliti eccentrici.

Misura degli angoli nelle reti trigonometriche di 1° e 2° ordine.

247. **Misure degli angoli e rilievi per la riduzione al centro di stazione.** — Nella misura degli angoli, proiezioni orizzontali di quelli che i lati della rete trigonometrica fanno fra loro, conviene distinguere due casi: se è possibile far stazione nel punto trigonometrico che è vertice degli angoli a misurarsi, o se si può soltanto far stazione in un punto ad esso vicino.

Nel primo caso conviene collocare il teodolite col suo centro nella verticale del punto trigonometrico e prendere separatamente ciascuno degli angoli cui esso serve di vertice, avvertendo di ripetere la misura non meno di cinque volte, o di replicarla non meno di quattro volte, secondochè si impiega il metodo della ripetizione o quello della reiterazione. I risultati parziali delle successive operazioni s'inscriveranno in apposito registro dei rilievi locali.

Nel secondo caso, non potendosi prendere i veri angoli, sarà necessario procurarsi quei dati che si prestano alla loro ricerca, mediante un'operazione detta *riduzione al centro di stazione*. Supponendo perciò che sia C (*fig.* 335) il punto trigonometrico in cui non si può far stazione; che sia O il punto ad esso vicino in cui è possibile collocare il teodolite, s'incomincierà dal prendere *l'angolo di posizione* $AOB = O$ e si inscriverà sul registro nella colonna degli angoli. Si prenderà dopo l'angolo $BOC = y$, detto *angolo di direzione* o anche la somma $O + y$: ed i risultati, unitamente alla misura di $\overline{OC} = r$, s'inscriveranno nel registro dei rilievi locali, nell'apposita colonna intitolata *dati per la riduzione al centro di stazione.*

I registri dei rilievi locali variano collo strumento che si adopera nella misura degli angoli; ed ecco quelli che possono convenire per gli ordinarii teodoliti colla graduazione del cerchio azimutale procedente da dritta a sinistra.

Quando il teodolite è concentrico e ripetitore, indicando con
O il punto in cui si fa stazione,
S il punto di mira a sinistra dell'osservatore,

D il punto di mira a destra,

A l'angolo semplice,

2A, 3A, 4A ecc., l'angolo doppio, triplo ecc.,

$0+y$ l'angolo di posizione aumentato dell'angolo di direzione, ossia l'angolo che la visuale diretta all'oggetto di sinistra fa col centro di stazione o punto trigonometrico sul quale non si può far stazione,

r la distanza del centro del teodolite al centro di stazione,

può convenire il registro che immediatamente segue.

PUNTI di STAZIONE	PUNTI di MIRA	ANGOLI multipli	ANGOLI semplici	DATI per la riduzione al centro	DATI ALTIMETRICI
	S_____	A_____	_____		
		2 A_____	_____	$r=$_____	$z_s=$_____
O_____		3 A_____	_____		
		4 A_____	_____		$z_d=$_____
	D_____	5 A_____	_____	$0+y=$_____	$dH=$_____
		6 A_____	_____		

Quando il teodolite è concentrico, e che vuolsi usare come reiteratore, attribuendo ad O, S, D, $0+y$ ed r i significati che già loro vennero dati, chiamando

Δ_1 e Σ_1, Δ_2 e Σ_2, Δ_3 e Σ_3, Δ_4 e Σ_4 gli angoli che si leggono per quattro diverse posizioni del cerchio azimutale collimando in ciascuna prima all'oggetto di destra e poi all'oggetto di sinistra,

A_1, A_2, A_3 ed A_4, le differenze $\Delta_1-\Sigma_1$, $\Delta_2-\Sigma_2$, $\Delta_3-\Sigma_3$, $\Delta_4-\Sigma_4$,

C l'angolo che si legge nella prima posizione del cerchio azimutale, collimando dal punto in cui trovasi il teodolite al centro di stazione, il qual angolo, diminuito dall' angolo Σ_1, dà l'angolo $0+y$,

ΣA la somma degli angoli A_1, A_2, A_3, A_4,

A l'angolo richiesto ossia la media aritmetica delle quattro differenze A_1, A_2, A_3, A_4,

si può adoperare il seguente modulo di registro dei rilievi locali.

PUNTI DI STAZIONE	PUNTI DI MIRA	ANGOLI LETTI	ANGOLI DEDOTTI	DATI per la riduzione al centro	DATI ALTIMETRICI
	S	$\Delta_1 =$		$r =$	$\delta_d' =$
		$\Sigma_1 =$			
					$\delta_d'' =$
		$A_1 =$			
		$C =$		$O + y =$	$\delta_d' + \delta_d'' =$
					$z_d =$
		$\Delta_2 =$			
O		$\Sigma_2 =$			
		$A_2 =$			$dH =$
		$\Delta_3 =$			
		$\Sigma_3 =$			$\delta_s' =$
	D	$A_3 =$			$\delta_s'' =$
		$\Delta_4 =$			$\delta_s' + \delta_s'' =$
		$\Sigma_4 =$	$\Sigma A =$		$z_s =$
		$A_4 =$	$A =$		

Per un teodolite eccentrico e ripetitore, conservando ad O, S, D, A, r ed $O + y$ i significati che già loro vennero attribuiti, si può far uso di questo terzo registro:

PUNTI di STAZIONE	PUNTI di MIRA	ANGOLI multipli	ANGOLI semplici	DATI per la riduzione al centro	DATI ALTIMETRICI
	S	2 A		$r =$	$z_s =$
O		4 A		$2(O + y) =$	$z_d =$
	D	6 A		$O + y =$	$dH =$

Finalmente per un teodolite eccentrico, ma che vuolsi adoperare come reiteratore, conservando alle lette O, S, D, ed r i significati che già loro vennero dati e chiamando

D_1' ed S_1', D_2' ed S_2' le letture che si fanno collimando in due diverse posizioni del cerchio azimutale e col cannocchiale a sinistra, prima all'oggetto di destra e poi all'oggetto di sinistra

D_1'' ed S_1'', D_2'' ed S_2'' le letture analoghe col cannocchiale a destra,

C' e C'' gli angoli che si leggono collimando dal punto in cui trovasi il teodolite al centro di stazione, nella prima posizione del cerchio azimutale,

A_1' ed A_1'', A_2' ed A_2'' le differenze $D_1' - S_1'$ e $D_1'' - S_1''$, $D_2' - S_2'$ e $D_2'' - S_2''$,

$(0+y)'$ ed $(0+y)''$ le differenze $C' - S_1'$ e $C'' - S_1''$,

A_1 ed A_2 le semi-somme $\dfrac{A_1' + A_1''}{2}$ e $\dfrac{A_2' + A_2''}{2}$,

$0+y$ la semi-somma $\dfrac{(0+y)' + (0+y)''}{2}$,

ΣA la somma dei due angoli A_1 ed A_2,

A l'angolo chiesto, eguale alla metà di ΣA,

conviene il modulo di registro che segue:

PUNTI DI STAZIONE	PUNTI DI MIRA	ANGOLI LETTI COL CANNOCCHIALE a sinistra	a destra	ANGOLI DEDOTTI	DATI per la riduzione al centro	DATI ALTIMETRICI
	S —	$D_1' =$	$D_1'' =$			
					$r =$ —	$180° + \frac{1}{2}\delta_d' =$ —
		$S_1' =$	$S_1'' =$			
		$C' =$	$C'' =$			$-\frac{1}{2}\delta_d'' =$ —
0 —		$A_1' =$ —	$A_1'' =$ —	$A_1 =$ —		
						$z_d =$ —
		$(0+y)' =$ —	$(0+y)'' =$ —		$0+y =$ —	
						$dH =$ —
	D —	$D_2' =$ —	$D_2'' =$ —			
						$180° + \frac{1}{2}\delta_s' =$ —
		$S_2' =$ —	$S_2'' =$ —			
		$A_2' =$ —	$A_2'' =$ —	$A_2 =$ —		
						$-\frac{1}{2}\delta_s'' =$ —
				$\Sigma A =$ —		
				$A =$ —		$z_s =$ —

Appena compiuto un giro d'orizzonte, si dovrà effettuare la somma di tutti gli angoli misurati, per riconoscere di quanto si allontana da 360°. Similmente quando sarannosi misurati i tre angoli di un triangolo, dovrassi eseguire la loro somma, per riconoscere di quanto diversifica dal 180°. Se in tali somme trovasi una discrepanza eccedente i limiti delle tolleranze ordinarie, che sono di 1′ pei triangoli di 1° ordine, e di $1' 30''$ per quelli di 2° ordine, necessità vuole che si rifacciano le osservazioni riconosciute difettose.

248. **Necessità di rettificare con precisione il teodolite concentrico nella misura degli angoli.** — Dalla formola stabilita al numero 241 risulta che l'errore e, causato dall'obliquità dell'asse ottico del cannocchiale al suo asse di rotazione, è nullo quando le due visuali hanno il medesimo angolo di elevazione o il medesimo angolo di depressione; oppure quando, essendo una elevata sull'orizzonte, l'altra è depressa sotto il medesimo d'un egual angolo. Supponendo una visuale orizzontale, e l'angolo di elevazione o di depressione dell'altra eguale all'inclinazione dell'asse ottico del cannocchiale, si ha un errore eguale a questa inclinazione medesima. Per l'asse ottico del cannocchiale inclinato di 89° al suo asse di rotazione orizzontalmente disposto, si ha l'errore $e = 0° 59' 38''$ per una visuale orizzontale e per l'altra inclinata a 60° all'orizzonte; e l'errore $e = 0' 9' 17'$ per una visuale orizzontale e per l'altra inclinata a 30°.

Dalla formola dedotta al numero 242 risulta essere l'errore ε, causato dall'obliquità dell'asse di rotazione del cannocchiale, nullo quando le due visuali hanno il medesimo angolo di elevazione o di depressione; crescere il medesimo errore col crescere della differenza fra i due accennati angoli. Così, instituendo il calcolo per $i = 1°$, $\alpha = 0°$, $\alpha' = 30°$, si trova $\varepsilon = 0° 34' 38''$; e per $i = 0°$, $\alpha = -30°$, $\alpha' = 30°$ risulta un doppio errore $\varepsilon = 1° 9' 16''$.

Segue da ciò che il teodolite eccentrico è preferibile al teodolite concentrico, e che, quando si adopera quest'ultimo, devesi porre ogni diligenza nel rettificarlo con precisione, principalmente quando devesi collimare a punti diversamente elevati e depressi all'orizzonte.

ARTICOLO V.

Orientamento delle reti topografiche.

249. **Orientamento e azimuto.** — Una direzione tracciata sul terreno nel senso del Nord-Sud dicesi *meridiana*; l'angolo, che l'allineamento determinato dal lato di una rete fa colla parte di meridiana che va al Sud e che passa per un suo punto, chiamasi *azimuto*. *L'orientamento* di una rete ha per oggetto di fissare le posizioni dei triangoli che la compongono, rispetto ai quattro punti cardinali, determinando innanzi tutto una *mira meridiana*. Lo stabilimento esatto di una tal mira richiede l'impiego di un buon cannocchiale

meridiano e la costruzione di un osservatorio; lo stabilimento approssimato e sufficiente per le operazioni topografiche si ottiene con uno dei metodi che qui sotto si verranno esponendo.

250. **Determinazione della meridiana colle altezze corrispondenti del sole.** — Il tracciamento di una meridiana mediante le altezze corrispondenti del sole si fonda sul fatto a tutti ben noto, che le lunghezze delle ombre, proiettate da un bastone verticale su un suolo orizzontale, sono eguali in ore egualmente lontane dal momento in cui il sole perviene al meriggio; e che la direzione della meridiana viene determinata sul suolo orizzontale dalla retta che divide per metà l'angolo formato dalle direzioni delle due ombre accennate.

Se adunque su un terreno ben piano ed orizzontale si traccia un arco di circolo AMB (*fig.* 336); se al suo centro C s'innalza verticalmente un palo D; se si osserva il momento in cui il sole proietta l'ombra dell'estremità D del bastone sull'accennato arco, per esempio, in A; se si segue il movimento dell'ombra finchè la sua estremità cada ancora sull'accennato arco in B; se dividesi per metà l'arco AMB in M, si avrà in CM la direzione della meridiana.

All'atto pratico si usa di tracciare, oltre l'arco AB, diversi altri archi concentrici A′B′, A″B″ ecc.; di fare su ciascuno di essi una operazione analoga a quella fatta sull'arco AB, per avere i loro mezzi M′, M″ ecc., che tutti devono trovarsi, quando l'operazione è ben fatta, su una medesima retta passante per C, e che è la meridiana.

Si può anche tracciare la curva iperbolica AA′A″A‴B‴B″B′B, descritta dall'estremità dell'ombra dalla mattina alla sera, segnando di tanto in tanto qualcheduno dei suoi punti. Tagliando dopo questa curva con tanti archi di raggio diverso ed aventi il loro centro nel punto ove è piantato il palo, si avranno, nei siti ove ciascun arco interseca la curva, due punti egualmente distanti dalla medesima.

Il piano orizzontale comunemente adoperato per fare questa operazione è quello dello specchio della tavoletta pretoriana, su cui trovasi disteso ed incollato un foglio di carta da disegno, disposto con un suo lato AB volto verso Sud (*fig.* 337), e portante a circa metà di questo lato una colonnetta o una verga metallica verticale, che termina alla sommità in una lamina ovale D pure di metallo, inclinata a 45° all'orizzonte, ed avente nel suo mezzo un piccolo foro. Il centro *c* delle varie circonferenze da descriversi si determina sullo specchio calando dal centro del foro un piombino che termini in punta, e determinando il sito c, in cui essa viene a ferire la superficie dello specchio. Trovato questo centro, si descrivono diversi archi concentrici, facendo in modo che l'arco di maggior raggio sia prossimo, colla sua convessità, all'immagine del piccolo foro segnata dal sole sullo specchio verso l'ora in cui si dà principio all'operazione. Tale immagine non tarderà a portarsi su detto maggior arco e quindi successivamente su tutti gli altri. Segnando di mano in mano i punti a, a', a'', ecc., in cui il centro dell'accennata immagine taglia i diversi archi, sia prima, sia dopo mezzogiorno, e dividendo per metà tutti gli archi così determinati, si avrà nella linea che unisce i punti di mezzo la meridiana cercata, il cui prolungamento si potrà determinare sul terreno, mettendo la linea di fede della diottra contro di essa e facendo collocare delle paline nella direzione secondo cui trovasi l'asse ottico del cannocchiale.

Questo procedimento suppone che il sole descriva in ogni giorno un parallelo all'equatore, ossia che ad egual intervallo di tempo dal mezzodì le altezze del sole siano eguali. Quest'astro però, dovendo in ogni giorno percorrere un piccolo arco d'eclittica di circa 1°, giunge da un parallelo all'altro insensibilmente descrivendo un cammino obliquo ai piani dei medesimi; cosicchè il sole, non rimanendo nelle 24 ore del giorno alla medesima altezza, eccettuato verso i solstizii, la linea CM (*fig.* 136) andrebbe sottoposta ad una leggiera correzione, la quale, per essere assai tenue, si trascura d'ordinario nella determinazione di una meridiana che deve servire all'orientamento di una rete topografica.

251. **Determinazione della meridiana col levare e col tramontare del sole.** — Per fare questa operazione è necessario un teodolite col cannocchiale munito di un vetro annerito, onde poter fissare il sole. — Supponendo che vogliasi trovare la direzione meridiana passante pel punto A (*fig.* 338) e l'azimuto del lato AB della rete topografica, si può tenere il seguente processo: allo spuntare del sole si osservi l'angolo $BAL=\alpha$, e al suo tramontare l'angolo $TAB=\beta$: l'angolo $\frac{\alpha-\beta}{2}$ esprime l'azimuto del lato AB, e, costruendo un tal angolo in BAM, si ha in AM la richiesta direzione meridiana, perchè

$$BAM=BAL-MAL=\alpha-\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Ripetendo in più giorni successivi l'indicata operazione, si avrà nella media dei risultati ottenuti la direzione meridiana, e l'azimuto di AB. Conviene però notare come questo procedimento non sia applicabile se non in paesi in cui l'orizzonte apparente si presenti affatto sgombro d'ostacoli; in caso contrario, i punti osservati al levare e al tramontare del sole non avrebbero la medesima altezza, e la direzione meridiana trovata potrebbe notevolmente scostarsi dalla vera.

252. **Determinazione della meridiana colle altezze corrispondenti delle stelle.** — Un metodo assai facile per la determinazione della meridiana consiste nell'osservare mediante il cannocchiale di un teodolite, disposto collo zero del suo nonio in coincidenza con quello della graduazione, una stella delle più brillanti a levante del meridiano; nel rendere fisso il cannocchiale al cerchio zenitale; nel muovere in giro il disco interno finchè la medesima stella ricompaia a ponente nel campo del cannocchiale, e nell'imprimere al già accennato disco, mediante la vite di richiamo, un leggier movimento fino a tanto che l'intersezione dei fili ricopra di nuovo la stessa stella. Dividendo per metà l'angolo determinato dalle visuali state dirette alle due posizioni dell'astro, si avrà nella bissettrice la meridiana domandata. Ripetendo più volte una simile operazione su varie stelle successive, si prenderà la media dei diversi risultati.

253. **Determinazione della meridiana per mezzo della stella polare.** — Osservando il cielo in notti serene, e guidando l'allineamento determinato dal punto della terra in cui trovasi l'osservatore e dalla stella polare, si ha una direzione approssimata della meridiana passante per quel punto. — La stella polare è un astro lucentissimo, che si trova in vicinanza del polo Nord della sfera stellata, e per conseguenza assai prossimo al prolungamento dell'asse della terra. Per riconoscere quest'astro basta osservare la costellazione dell'*orsa maggiore*, formata da sette stelle assai rimarchevoli, disposte in modo che quattro di esse costituiscono un quadrilatero, e le altre tre un triangolo ottusangolo, come appare dalla fig. 339; prolungare nel cielo, dalla parte boreale, il lato del quadrilatero determinato dalle due stelle α e β, e fermare lo sguardo su quella stella fulgidissima che passa in prossimità a detto prolungamento. La stella polare è l'ultima della coda di una costellazione detta *orsa minore*, formata, come l'orsa maggiore, di sette stelle meno lucenti, e rivolta in senso contrario.

Collocato un teodolite nel punto per cui vuolsi tracciare la meridiana e, riconosciuta la stella polare, si rivolgerà su essa l'intersezione dei fili micrometrici: facendo tracciare un allineamento mediante segnali a fuoco, si avrà approssimativamente la cercata direzione. Non volendosi usare di un teodolite, può servire un piombino sospeso sopra il punto per cui vuolsi tracciare la meridiana; basta perciò collocarsi a qualche distanza da questo piombino, in modo da vedere la stella accennata intersecata dal filo; i segnali disposti nella direzione dell'allineamento così determinato dànno la direzione meridiana.

La stella polare non è precisamente al polo, ma nel suo corso apparente intorno ad esso, può scostarsi fino a 1° 28′. Segue da ciò che la meridiana determinata col suesposto procedimento può deviare dalla meridiana vera. Scegliendo però l'istante in cui la stella polare è contenuta nel piano verticale del punto di stazione e della stella γ di Cassiopea, o della ε prima delle tre della coda della grand'orsa, si ha la meridiana con molta approssimazione; imperocchè in quest'istante la stella polare si trova sensibilmente nel meridiano del sito d'osservazione.

ARTICOLO VI.

Calcoli per la determinazione di una rete topografica.

Riduzione degli angoli al centro di stazione.

254. Piano trigonometrico. — Dopo la misura degli angoli e delle basi delle reti trigonometriche di 1° e di 2° ordine, si costrurrà in quella scala che credesi conveniente, per esempio nella scala dell'1 a 25000, un piano geometrico della rete, mediante le lunghezze delle basi e le ampiezze degli angoli ottenute sul terreno. Questo piano dovendo dare una giusta idea del modo con cui sono ripartiti i vertici della rete, e dovendo servire di guida nelle successive operazioni trigonometriche d'ordine inferiore, di più dovendosi all'occorrenza prestare per dedurre con una certa approssimazione le lunghezze orizzontali dei diversi lati della rete, deve essere costrutto colla massima diligenza, usando delle tavole delle tangenti nel riportare gli angoli. In questo piano si numerizzeranno i punti trigonometrici tanto di 1° quanto di 2° ordine, come si fece sui piani figurativi costrutti sul terreno. I vertici della rete si collocheranno al centro di un triangolo equilatero: i lati della rete di 1° ordine si segneranno in linee grosse, ed in linee sottili quelli delle reti di 2° ordine (*fig.* 516).

255. **Riduzione degli angoli al centro di stazione.** — Sia O il centro dello strumento (*fig.* 335), AOB l'angolo di posizione O, BOC quello di direzione y, ed ACB l'angolo cercato C. Essendo l'angolo OIC esterno ai due triangoli IAO ed IBC, si hanno le relazioni

$$OIC = OAC + O, \qquad OIC = CBO + C;$$

d'onde si deduce

$$OAC + O = CBO + C,$$

o ancora

$$C - O = OAC - CBO.$$

Dai due triangoli CBO ed OAC si ricavano, chiamando $\overline{OD}$ ed $\overline{OS}$ le due distanze $\overline{CB}$ e $\overline{CA}$ sensibilmente eguali ad $\overline{OB}$ ed $\overline{OA}$,

$$\operatorname{sen} OAC = \frac{r \operatorname{sen}(O+y)}{\overline{OS}}, \qquad \operatorname{sen} CBO = \frac{r \operatorname{sen} y}{\overline{OD}}.$$

Siccome gli angoli OAC e CBO sono piccolissimi, dacchè la quantità r è moltiplicata per un numero sempre minore dell'unità, diviso per una lunghezza assai considerevole, si potranno prendere i seni dei loro archi per gli archi medesimi, ed avere quindi con molta approssimazione

$$C - O = \frac{r \operatorname{sen}(O+y)}{\overline{OS}} - \frac{r \operatorname{sen} y}{\overline{OD}} \qquad (1).$$

In quest'equazione le quantità C ed O del primo membro esprimono grandezze angolari che si possono ridurre in secondi; i due termini del secondo membro rappresentano lunghezze assolute di due archi, ed il numero dei secondi loro corrispondenti si ha dividendo per la lunghezza dell'arco di $1''$ o con sufficiente approssimazione per $\operatorname{sen} 1''$; cosicchè la formola (1) diventerà

$$C - O = \frac{r \operatorname{sen}(O+y)}{\overline{OS} \operatorname{sen} 1''} - \frac{r \operatorname{sen} y}{\overline{OD} \operatorname{sen} 1''} \qquad (2).$$

Varie sono le posizioni che può avere il vertice O: l'angolo y, che sempre si deve contare di seguito all'angolo O, a partire dalla visuale che va al vertice di destra e venendo al vero centro C della stazione, può variare da 0° a 360°.

Se il punto O cade sul lato di destra BC o sul suo prolungamento, si ha: pel caso della figura 340, $y=180°$, $\operatorname{sen} y=0$, $\operatorname{sen}(O+y)=-\operatorname{sen} O$, e quindi

$$C-O=-\frac{r \operatorname{sen} O}{\overline{OS} \operatorname{sen} 1''};$$

pel caso poi della figura 341, $y=0°$, $\operatorname{sen} y=0$, $\operatorname{sen}(O+y)=\operatorname{sen} O$,

$$C-O=\frac{r \operatorname{sen} O}{\overline{OS} \operatorname{sen} 1''}.$$

Se il punto O cade sul lato di sinistra AC o sul suo prolungamento, si ha pel caso della figura 342 $O+y=180°$, e pel caso della figura 343 $O+y=360°$, per cui $\operatorname{sen}(O+y)=0$, e quindi

$$C-O=-\frac{r \operatorname{sen} y}{\overline{OD} \operatorname{sen} 1''}.$$

Nella formola (2) sparisce il primo o il secondo termine del secondo membro quando l'oggetto di sinistra A o quello di destra B sono posti ad una distanza infinitamente grande per rapporto ad r. Segue da ciò che ogni correzione è inutile: 1° quando, essendo il punto O sulla BC o sul suo prolungamento, l'oggetto A è infinitamente distante; 2° quando, essendo il punto O su AC o sul suo prolungamento, l'oggetto infinitamente lontano è B; 3° quando ambidue gli oggetti sono ad una immensa distanza, per esempio, quando sono due astri.

Un altro caso in cui non occorre correzione si presenta quando i due termini del secondo membro dell'equazione (2) si riducono a zero, ossia quando è verificata l'equazione

$$\frac{r \operatorname{sen}(O+y)}{\overline{OS} \operatorname{sen} 1''}-\frac{r \operatorname{sen} y}{\overline{OD} \operatorname{sen} 1''}=0,$$

da cui si ricava

$$\frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen}(O+y)}=\frac{\overline{OD}}{\overline{OS}}.$$

Dal triangolo ABC (*fig.* 335), si può dedurre

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen}(A+C)}=\frac{\overline{OD}}{\overline{OS}},$$

e quindi si può porre l'equazione

$$\frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen}(O+y)}=\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen}(A+C)},$$

la quale dà luogo, dopo lo sviluppo dei denominatori, a

$$\frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} O\cos y+\operatorname{sen} y\cos O}=\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} A\cos C+\operatorname{sen} C\cos A},$$

che diventa, dividendo i due termini del primo membro per $\operatorname{sen} y$ ed i due termini del secondo per $\operatorname{sen} A$,

$$\frac{1}{\operatorname{sen} O\cot y+\cos O}=\frac{1}{\cos C+\operatorname{sen} C\cot A},$$

ed essendo per ipotesi $O=C$, si otterrà finalmente

$$\operatorname{tang} y=\operatorname{tang} A=\operatorname{tang}(180^{\circ}+A).$$

Il che dimostra esser l'angolo ridotto al centro eguale all'angolo misurato, quando il vertice di quest'ultimo è in O o in O′ (*fig.* 344) sulla circonferenza di circolo determinata dai tre punti A, B e C.

Se da una sola stazione fuori del centro si fa un giro d'orizzonte, la somma di tutte le correzioni è nulla. Infatti, chiamando O, O', O'' ecc. gli angoli di posizione; C, C', C'' ecc. gli angoli ridotti al centro; d, d', d'' ecc. le correzioni, si ha

$$C-O=d,\qquad C'-O'=d',\qquad C''-O''=d''\ \text{ecc.},$$

le quali equazioni, sommate fra di loro, dànno

$$C+C'+C''+\ldots-(O+O'+O''+\ldots)=d+d'+d''\ \ldots;$$

e, siccome per ipotesi si ha

$$C+C'+C''+\ldots=360^\circ,\qquad O+O'+O''+\ldots=360^\circ,$$

risulta

$$d+d'+d''+\ldots=0.$$

Quando in un giro d'orizzonte si fanno tutte le osservazioni da una sola stazione, è rimarchevole come la visuale di sinistra di ciascun angolo è visuale di destra dell'angolo che lo segue a sinistra, e come l'angolo $O+y$ è eguale ad y oppure a $360^\circ+y$, il che importa sempre $\operatorname{sen} y=\operatorname{sen}(O+y)$. Segue da ciò che nell'applicazione della formola (2), il risultato di ogni primo termine nel calcolo di una correzione, vale quello del secondo termine nel calcolo della correzione seguente, e che il risultato del secondo termine, corrispondente alla correzione dovuta al primo angolo, è eguale al risultato del primo termine, corrispondente alla correzione dell'ultimo angolo.

L'applicazione della formola (2) ai casi della pratica riesce generalmente speditissima, imperocchè, a motivo della picciolezza dei rapporti $\dfrac{r}{\overline{OD}}$ ed $\dfrac{r}{\overline{OS}}$ basta nel maggior numero dei casi prendere i logaritmi con cinque cifre decimali, e talvolta anche solo con tre.

256. **Procedimento pratico per la riduzione degli angoli al centro di stazione.** — Per non incorrere in errori, ed onde procedere con facilità ed ordine nel condurre a compimento questa operazione, si possono inscrivere i dati occorrenti ed eseguire tutti i calcoli su un registro, come quello di cui si dà il modulo:

VERTICI	$C-O=\dfrac{r\operatorname{sen}(O+y)}{\overline{OS}\operatorname{sen}1''}-\dfrac{r\operatorname{sen}y}{\overline{OD}\operatorname{sen}1''}$		
O Stazione	$O=$	$r=$	1° termine =
	$O+y=$	$\overline{OS}=$	2° » =
	$y=$	$\overline{OD}=$	
	Calcolo del 1° termine	Calcolo del 2° termine	$C-O=$
	$\log r=$	$\log r=$	
D	$\log\operatorname{sen}(O+y)=$	$\log\operatorname{sen}y=$	
	$c\log\overline{OS}=$	$c\log\overline{OD}=$	$O=$
S	$c\log\operatorname{sen}1''=5{,}31443$	$c\log\operatorname{sen}1''=5{,}31443$	$C-O=$
	log 1° termine =	log 2° termine =	$C=$

Nella prima colonna, accanto alla lettera O, si colloca l'indicazione del punto di stazione, non che di quel vertice della rete di cui devonsi ridurre gli angoli; accanto alle lettere D ed S s'inscrivono i numeri d'ordine già apposti ai vertici del triangolo cui spetta l'angolo a ridursi, sia nel piano figurativo, sia nel registro di campagna, sia nel piano trigonometrico. I dati O, $(O+y)$ e y (num. 247) si registrano in testa alla seconda colonna; in testa alla terza si pongono la distanza r e le lunghezze $\overline{OD}$ ed $\overline{OS}$ calcolate provvisoriamente, considerando gli angoli osservati come di già ridotti al centro, o dedotte approssimativamente dal piano trigonometrico costrutto ad una scala cognita; nelle medesime colonne si eseguisce il calcolo per dedurre i logaritmi dei due termini che entrano nella formola della riduzione al centro. Nella quarta colonna si deduce la differenza fra l'angolo C e l'angolo misurato O, che può riuscire positiva o negativa, e per ultimo si ottiene l'angolo domandato, aggiungendo all'angolo O l'accennata differenza e tenendo conto del suo segno.

Calcolo dei lati e degli angoli dei triangoli.

257. Correzione degli angoli. — Ridotti tutti gli angoli al centro di stazione, converrà farne la correzione in modo che i giri di orizzonte riescano esattamente di 360° e che la somma dei tre angoli di un triangolo eguagli 180°. Perciò si prenderanno le discrepanze a 360° e a 180°, secondochè si tratta degli angoli contenuti in un giro d'orizzonte o degli angoli interni di un triangolo, e solo l'operatore, che eseguì le misure degli angoli sul terreno può trar partito delle osservazioni fatte per avere una ripartizione regolare, e per quanto si può prossima al vero. Il primo registro torna utile per la correzione dei giri d'orizzonte, ed il secondo serve per le correzioni degli angoli dei triangoli:

VERTICI degli ANGOLI	INDICAZIONE DEI LATI	ANGOLI misurati	ANGOLI ridotti al centro	ANGOLI corretti	DIFFERENZE

NUMERO d' ordine dei triangoli	DENOMINAZIONE DEI PUNTI TRIGONOMETRICI	ANGOLI misurati	ridotti al centro	corretti	DIFFERENZE
	O				
	D				
	S				

258. **Formole per il calcolo dei lati e degli angoli dei triangoli.** — Quando in un triangolo si conoscono i tre angoli ed un sol lato, riesce agevolissimo il calcolo degli altri due lati: chiamando perciò O (*fig.* 345) l'angolo opposto al lato cognito; indicando con D ed S gli angoli aventi i loro vertici agli estremi dell'accennato lato e rispettivamente posti a dritta e a sinistra del lato medesimo, guardato dal vertice O; chiamando $\overline{OD}$ ed $\overline{OS}$ i due lati a calcolarsi, si avranno

$$\overline{OD}=\overline{DS}\,\frac{\operatorname{sen} S}{\operatorname{sen} O},\qquad \overline{OS}=\overline{DS}\,\frac{\operatorname{sen} D}{\operatorname{sen} O}.$$

Se di un triangolo qualunque SOD si è misurato il solo angolo O, e se dai triangoli contigui a quello che si considera si sono già dedotti i due lati $\overline{OD}$ ed $\overline{OS}$, si può procedere alla ricerca dei due angoli D ed S, mediante le due note formole trigonometriche (num. 96)

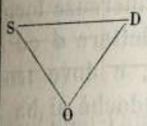
$$\frac{1}{2}(D+S)=90^\circ-\frac{1}{2}O,\qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}(D-S)=\frac{\overline{OS}-\overline{OD}}{\overline{OS}+\overline{OD}}\cot\frac{1}{2}O,$$

che nel caso di $\overline{OS}<\overline{OD}$ si trasformano in

$$\frac{1}{2}(S+D)=90^\circ-\frac{1}{2}O,\qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}(S-D)=\frac{\overline{OD}-\overline{OS}}{\overline{OD}+\overline{OS}}\cot\frac{1}{2}O.$$

259. **Procedimento pratico per il calcolo dei lati e degli angoli dei triangoli.** — Per tenere un metodo ordinato nel calcolo dei triangoli, e anche per verificare all'occorrenza l'esattezza dei

calcoli già eseguiti, si possono usare due registri. Il primo dei quali serve al calcolo dei lati, il secondo al calcolo degli angoli:

TRIANGOLI	ANGOLI		CALCOLO DEI LATI	
	dati	corretti	$\overline{OD}=\overline{DS}\dfrac{\text{sen S}}{\text{sen O}}$	$\overline{OS}=\overline{DS}\dfrac{\text{sen D}}{\text{sen O}}$
	O		$\log\overline{DS}=$	$\log\overline{DS}$ } =
	S		$c\log\text{sen O}=$	$c\log\text{sen O}$ }
	D		$\log\text{sen S}=$	$\log\text{sen D}=$
			$\log\overline{OD}=$	$\log\overline{OS}=$
			$\overline{OD}=$	$\overline{OS}=$

VERTICI	LATI DATI	ANGOLI DATI	CALCOLO DEGLI ANGOLI	
			$\overline{OS}>\overline{OD}$ $\text{tang}\frac{1}{2}(D-S)=\dfrac{\overline{OS}-\overline{OD}}{\overline{OS}+\overline{OD}}\cot\frac{1}{2}O$ $\overline{OD}>\overline{OS}$ $\text{tang}\frac{1}{2}(S-D)=\dfrac{\overline{OD}-\overline{OS}}{\overline{OD}+\overline{OS}}\cot\frac{1}{2}O$	
O	$\overline{OS}=$ $\overline{OD}=$	$O=$	$\log\cot\frac{1}{2}O=$	$\frac{1}{2}(D+S)=$
			$\log d=$	$\frac{1}{2}(\ -\ )=$
D		$\frac{1}{2}O=$	$c\log s=$	
	Somma =			$D=$
S	Diffª =	$D+S=$	$l\,\text{tang}\frac{1}{2}(\ -\ )=$	$S=$

Il registro del calcolo dei lati è diviso in tre colonne. La prima colonna è intitolata *triangoli;* in essa trovansi disegnati dei triangoli, che, convenientemente numerizzati ai loro vertici, rappresentano questo o quell' altro triangolo della rete di cui voglionsi calcolare $\overline{OD}$ e $\overline{OS}$ dietro la conoscenza dei tre angoli e del lato $\overline{SD}$. La seconda colonna, intitolata *angoli*, è divisa in due parti, nella prima delle quali s'inscrivono gli angoli dati, che non sono altro se non che gli angoli misurati sul terreno; nella seconda parte si mettono gli angoli corretti (num. 257). Nella terza colonna, divisa in due parti, si ha il procedimento per calcolare i lati richiesti.

Il registro del calcolo degli angoli annovera quattro colonne.

La prima colonna serve all'inscrizione dei vertici del triangolo che si considera. Nella seconda colonna si hanno i due lati che comprendono l'angolo misurato, la loro somma e la loro differenza. La terza colonna serve all'inscrizione dell'angolo cognito, della sua metà e della somma degli altri due angoli. La quarta colonna, divisa in due, presenta nella prima il processo a seguirsi per trovare il logaritmo della tangente della metà della differenza degli angoli domandati, e nella seconda le semi-somme e le semi-differenze loro, e quindi anche il valore degli angoli medesimi. Le lettere *d* ed *s* sono le abbreviazioni di *differenze* e *somme* dei lati, e dove trovasi (—) bisogna porre (D—S) o (S—D) secondochè si ha

$$\overline{OS} > \overline{OD} \text{ o } \overline{OD} > \overline{OS}.$$

Nell'effettuare il calcolo dei triangoli si disporranno i dati nel registro in modo da potersi sempre successivamente calcolare i lati che concorrono in uno stesso vertice, e risulterà da questa disposizione di cose che ad ogni cinque o sei triangoli si verrà ad incontrare un lato già calcolato. Se la differenza fra le due lunghezze trovate di un medesimo lato è nei limiti della tolleranza ammissibile (che anche nelle operazioni ordinarie non si deve assumere maggiore di 1^{m} su 1000^{m}), si prende per lunghezza vera di detto lato la media aritmetica dei due risultati; ma se tale differenza supera detto limite, si devono rivedere i calcoli antecedenti e le correzioni fatte sugli angoli; e se con ciò non si può ancora riuscire a trovare la causa dell'errore, si misurano nuovamente sul terreno quegli angoli che impiegati nel calcolo diedero risultati erronei. Le stesse osservazioni valgono anche allorquando si trova col calcolo un lato già misurato sul terreno qual base di verificazione.

Determinazione di un punto per mezzo di altri tre noti di posizione.

260. **Formole per determinare la posizione di un punto rispetto ad altri tre già determinati.** — Come si disse al numero 229, si possono fissare le posizioni di alcuni punti trigonometrici di 2° ordine col metodo della trisezione, appoggiandosi a tre vertici di 1° ordine già determinati, e misurando gli angoli che fanno fra loro le visuali dirette dal punto a determinarsi ai tre punti di rattaccamento. Sia perciò ABC (*fig.* 346) un triangolo di cui si conoscono i tre angoli A, B e C, i tre lati *a*, *b* e *c* ed i cui vertici

sono tre punti trigonometrici di 1° ordine: sia D un punto di 2° ordine e vogliansi le tre distanze d, d' e d'' che lo uniscono ai tre punti A, B e C, non che i due angoli $\mathrm{ACD}=x$ e $\mathrm{ABD}=y$ nell'ipotesi che siansi misurati i due angoli ADC ed ADB che denomino rispettivamente colle lettere β e γ.

Dai triangoli ABD ed ACD si ricavano

$$\operatorname{sen} y=\frac{d \operatorname{sen}\gamma}{c}, \qquad \operatorname{sen} x=\frac{d \operatorname{sen}\beta}{b}.$$

Dividendo l'una per l'altra queste equazioni, si trova

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y}=\frac{c \operatorname{sen}\beta}{b \operatorname{sen}\gamma} \qquad (1),$$

la qual ultima si può trasformare in

$$\frac{\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} y}=\frac{c \operatorname{sen}\beta+b \operatorname{sen}\gamma}{c \operatorname{sen}\beta-b \operatorname{sen}\gamma}.$$

Dividendo numeratore e denominatore del secondo membro per $c \operatorname{sen}\beta$, ed osservando che si ha

$$\frac{\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} y}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x+y)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x-y)},$$

si può porre

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x+y)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x-y)}=\frac{1+\dfrac{b \operatorname{sen}\gamma}{c \operatorname{sen}\gamma}}{1-\dfrac{b \operatorname{sen}\gamma}{c \operatorname{sen}\beta}}.$$

Se ora si fa

$$\frac{b \operatorname{sen}\gamma}{c \operatorname{sen}\beta}=\operatorname{tang}\varphi \qquad (2),$$

l'ultima equazione si trasforma in

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x+y)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x-y)}=\frac{1+\operatorname{tang}\varphi}{1-\operatorname{tang}\varphi},$$

Osservando ora che tang $45^\circ=1$ e traendo partito della formola trigonometrica che dà una relazione fra la tangente della somma di due archi e le tangenti degli archi semplici, si può dire che

$$\frac{1+\operatorname{tang}\varphi}{1-\operatorname{tang}\varphi}=\frac{\operatorname{tang}45^\circ+\operatorname{tang}\varphi}{1-\operatorname{tang}45^\circ\operatorname{tang}\varphi}=\operatorname{tang}(45^\circ+\varphi),$$

e che quindi

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x+y)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x-y)}=\operatorname{tang}(45^\circ+\varphi),$$

d'onde si ricava

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x-y)=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x+y)\cot(45^\circ+\varphi) \qquad (3).$$

Dal quadrilatero ABDC si ha

$$x+y+\mathrm{A}+\beta+\gamma=360^\circ,$$

e quindi

$$\frac{1}{2}(x+y)=180^\circ-\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\beta+\gamma) \qquad (4).$$

Ricavato φ dall'equazione (2), e dedotto $\frac{1}{2}(x+y)$ dalla (4) si trova $\frac{1}{2}(x-y)$ colla (3), e supponendo

$$\frac{1}{2}(x+y)=m, \qquad \frac{1}{2}(x-y)=n,$$

si deduce, combinando queste due equazioni per addizione e sottrazione,

$$x=m+n, \qquad y=m-n.$$

Ottenuti i due angoli x ed y, si calcoleranno facilmente d, d' e d'' colle formole:

$$d=\frac{b \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \beta}, \qquad d=\frac{c \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} \gamma},$$

secondo che si considera il triangolo ACD o l'altro ABD;

$$d'=\frac{c \operatorname{sen}(y+\gamma)}{\operatorname{sen} \gamma}, \qquad d'=\frac{a \operatorname{sen}(x-\mathrm{C})}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)},$$

secondo che si considera il triangolo ABD o l'altro BCD;

$$d''=\frac{b \operatorname{sen}(x+\beta)}{\operatorname{sen} \beta}, \qquad d''=\frac{a \operatorname{sen}(y-\mathrm{B})}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)},$$

secondo che si considera il triangolo ACD o l'altro BCD.

I due punti A e D, invece di essere l'uno da una parte e l'altro dall'altra della $\overline{\mathrm{BC}}$, come nella figura 346, possono essere tutti e due da una medesima parte (*fig.* 347); in questo caso l'angolo A che entra nella relazione (4) non è quello del triangolo ABC, ma il suo supplemento a 360°, e nelle espressioni di d' e d'' si deve mettere $x+\mathrm{C}$ ed $y+\mathrm{B}$ in luogo di $x-\mathrm{C}$ ed $y-\mathrm{B}$.

Se il punto D cade nell'interno del triangolo $\overline{\mathrm{ABC}}$ (*fig.* 348), $\gamma+\beta>180°$; e se il punto D trovasi sul lato $\overline{\mathrm{BC}}$ (*fig.* 349), $\gamma+\beta=180°$, $\operatorname{sen}\gamma=\operatorname{sen}\beta$, $\operatorname{tang}\varphi=\frac{b}{c}$, $x=\mathrm{C}$ e $y=\mathrm{B}$.

Se il punto D fosse sulla circonferenza di circolo determinata dai tre punti A, B e C (*fig.* 350), il problema sarebbe indeterminato, perchè allora

$$x+y=180°,$$

d'onde

$$\operatorname{sen} x=\operatorname{sen} y,$$

$$\mathrm{A}+\gamma+\beta=180°,$$

$$\frac{1}{2}(x+y)=90^\circ.$$

Paragonando ora l'equazione (1) colla (2) si trova

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x}=1,$$

d'onde

$$\varphi=45^\circ,$$

e quindi

$$\cot(45^\circ+\varphi)=\cot 90^\circ=0.$$

Siccome poi, per essere

$$\frac{1}{2}(x+y)=90^\circ,$$

si ha

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x+y)=\operatorname{tang} 90^\circ=\infty,$$

si deduce finalmente

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x-y)=\infty\times 0=\frac{0}{0},$$

il che indica appunto un'indeterminazione nel problema.

261. **Procedimento pratico per determinare la posizione di un punto rispetto ad altri tre già determinati**. — La determinazione della posizione d'un punto, coordinato a tre altri già noti, si compie cercando i due angoli x ed y, non che le distanze $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ e $\overline{DC}$ (*fig.* 346) che il punto a fissarsi ha dai punti di collegamento. Per condurre a compimento un tale calcolo può giovare questo registro :

PUNTI DI STAZIONE PUNTI DI MIRA dati pel calcolo	CALCOLO DEGLI ANGOLI x, y		
	$x+y$ $=360° - (A+\beta+\gamma)$	$\operatorname{tang} \varphi = \frac{b \operatorname{sen} \gamma}{c \operatorname{sen} \beta}$	$\operatorname{tang} \frac{x-y}{2}$ $= \operatorname{tang} \frac{x+y}{2} \cot (45° + \varphi)$
D	$A=$	$\log b =$	$\log \operatorname{tang} \frac{x+y}{2} =$
	$\beta=$	$\log \operatorname{sen} \gamma =$	$\log \cot (45° + \varphi) =$
A	$\gamma=$	$c \log c =$	
B		$c \log \operatorname{sen} \beta =$	$\log \operatorname{tang} \frac{x-y}{2} =$
C			
DATI $A=$		$\log \operatorname{tang} \varphi =$	$\frac{x+y}{2} =$
DATI $\beta=$	$x+y=$		$\frac{x-y}{2} =$
DATI $\gamma=$		$\varphi=$	
DATI $\log b=$	$\frac{x+y}{2} =$		$x=$
DATI $\log c=$		$45° + \varphi =$	$y=$

Nella prima colonna si collocano i tre punti dati, il punto a determinarsi e i dati che servono al calcolo. Nella seconda colonna, divisa in tre scompartimenti, si fa il calcolo di $\frac{x+y}{2}$, di tang φ e di $\frac{x-y}{2}$, onde dedurre gli angoli x ed y. Pel calcolo delle distanze $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ e $\overline{DC}$ si adopererà il registro che serve al calcolo dei lati dei triangoli (num. 259).

Nel determinare la posizione di un punto trigonometrico di 2° ordine col mezzo della trisezione, conviene sempre appoggiarsi da due parti a due triangoli aventi un lato comune; con ciò si ha il mezzo d'instituire i calcoli in due modi diversi, e quindi di verificare l'esattezza dell'operazione.

Calcolo delle coordinate dei vertici di una rete topografica.

262. Formole pel calcolo delle coordinate dei vertici di una rete topografica per rapporto ad una meridiana ed alla sua perpendicolare. — Mediante il calcolo dei lati dei triangoli, si viene a conoscere le distanze orizzontali che i vertici di una rete hanno fra di loro: si perviene all'orientamento della medesima, trovando le *coordinate* o distanze che i suoi vertici hanno dalla meridiana e dalla sua perpendicolare, passanti pel punto principale del territorio su cui si opera.

Analogamente a quanto si usa in geometria analitica, la meridiana e la sua perpendicolare chiamansi *assi coordinati*, *asse delle ascisse* la prima, ed *asse delle ordinate* la seconda; cosicchè le due distanze orizzontali di un punto della meridiana e dalla sua perpendicolare si dicono rispettivamente *ordinata* ed *ascissa* di quel punto. Quel vertice della rete, per cui passano le due accennate direzioni, si chiama *origine delle coordinate*.

La meridiana del punto principale e la sua perpendicolare dividono il terreno, di cui hassi la triangolazione, in quattro grandi scompartimenti o regioni, che si possono chiamare, dipendentemente dalle loro posizioni rispetto agli accennati assi, *regione del Sud-Ovest*, quella XOY (*fig.* 351); *regione del Nord-Ovest*, quella YOX′; *regione del Nord-Est*, quella X′OY′; e finalmente *regione del Sud-Est*, l'altra Y′OX. Segue da ciò che, per avere un'idea esatta della località in cui trovasi ciascun vertice della rete, non basta conoscere le sue coordinate o distanze dalla meridiana e dalla perpendicolare; ma sibbene conviene ancora aggiugnere in quale delle quattro regioni suindicate esso si trova. Si giugne a questo colla massima facilità, anteponendo a ciascun numero indicante le predette distanze uno dei due segni + o —, secondo l'angolo in cui trovasi il punto considerato. Così, prendendo come positive le distanze contate su OX e su OY, saranno negative quelle contate nel senso di OX′ ed OY′, e per conseguenza le coordinate x ed y di un punto qualunque saranno ambedue positive, se il punto è nell'angolo XOY; la x sarà negativa e la y positiva, se il punto è nell'angolo YOX′; tanto la x quanto la y saranno negative se il punto è nell'angolo X′OY′; e finalmente la y sarà negativa e la x positiva quando il punto è nell'angolo Y′OX.

Considerando ora successivamente i quattro punti A, A′, A″ e A‴, posti ciascuno in una delle quattro regioni accennate; chiamando rispettivamente x e y, x' e y', x'' e y'', x''' e y''' le loro coordinate; K, K′, K″ e K‴ le distanze di questi punti dall'origine O; e indicando con θ, θ', θ'' e θ''' i loro angoli azimutali contati partendo dalla parte Sud della meridiana e venendo verso Ovest, si ha: pel punto A

$$x = K\cos\theta,$$

$$y = K\,\mathrm{sen}\,\theta;$$

pel punto A′

$$x'=-K'\cos A'OX'=-K'\cos(180^\circ-\theta')=K'\cos\theta',$$

$$y'=K'\operatorname{sen} A'OX'=K'\operatorname{sen}(180^\circ-\theta')=K'\operatorname{sen}\theta';$$

pel punto A″

$$x''=-K''\operatorname{sen} A''OY'=-K''\operatorname{sen}(270^\circ-\theta'')=K''\cos\theta'',$$

$$y''=-K''\cos A''OY'=-K''\cos(270^\circ-\theta'')=K''\operatorname{sen}\theta'';$$

pel punto A‴

$$x'''=K'''\cos A'''OX=K'''\cos(360^\circ-\theta''')=K'''\cos\theta''',$$

$$y'''=-K'''\operatorname{sen} A'''OX=-K'''\operatorname{sen}(360^\circ-\theta''')=K'''\operatorname{sen}\theta'''.$$

Si vede da ciò come, contando gli azimuti che hanno il loro vertice in uno stesso punto O partendo dalla parte Sud della meridiana e procedendo dal Sud all'Ovest, i segni delle distanze dalla meridiana e dalla sua perpendicolare dipendono dal calcolo medesimo.

Conoscendosi l'azimuto di un sol lato della rete concorrente nel punto principale, riesce agevole la deduzione degli azimuti di tutti gli altri lati concorrenti nel medesimo punto. Così, supponendo che sia θ l'azimuto del punto B (*fig.* 352), che sia O l'angolo AOB si avrà che l'azimuto del punto A è dato da $\theta\pm O$, valendo il segno $+$ quando il lato $\overline{OA}$ cade fuori dell'angolo di θX con OB, ed il segno — quando cade dentro quest'angolo, ossia dovendosi prendere il segno $+$ o il segno —, secondo che il nuovo azimuto dev'essere maggiore o minore del dato, il che appare sempre dalla figura. In generale adunque, indicando con θ l'azimuto cognito di un lato della rete, con O l'angolo che questo lato fa con un altro concorrente nella stessa origine e di cui vuolsi l'azimuto Θ, si avrà

$$\Theta=\theta\pm O \qquad (1).$$

Se, prendendo come origine delle coordinate un vertice qualunque della rete, si conducono due rette rispettivamente parallele alla meridiana passante pel punto principale ed alla sua perpendicolare, si hanno due altri assi di coordinate, che chiameremo *assi* *ausiliarii*. Immaginando pei due estremi di un medesimo lato della rete due sistemi di assi coordinati paralleli, riesce agevole di trovare l'azimuto per rapporto alla meridiana passante per un estremo A, conoscendosi già l'azimuto per rapporto alla meridiana passante per l'altro estremo O (*fig.* 353). Così, considerando quattro punti A, A′, A″ e A‴, ciascuno in una delle quattro regioni in cui la meridiana principale e la sua perpendicolare dividono il territorio, chiamando θ, θ', θ'' e θ''' gli azimuti dei lati $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$, $\overline{OA''}$ e $\overline{OA'''}$ per rapporto alla meridiana OX, gli azimuti degli stessi lati per rapporto alle meridiane Ax, $A'x'$, $A''x''$ e $A'''x'''$ saranno dati, per $\overline{AO}$ e per $\overline{A'O}$ da $\theta+180°$ e $\theta'+180°$; per $\overline{A''O}$ e $\overline{A'''O}$ da $\theta''-180°$ e $\theta'''-180°$. Si può dunque in generale conchiudere che, contando gli azimuti nel senso del Sud-Ovest, e chiamando θ l'azimuto di un lato preso in un estremo, l'azimuto Θ_1 del medesimo lato preso all'altro estremo è dato da

$$\Theta_1 = \theta \pm 180° \qquad (2),$$

valendo il segno + od il segno —, secondo che il vertice del nuovo azimuto trovasi a ponente o ad oriente del vertice dell'azimuto cognito, o, in altri termini, secondo che quel vertice è nelle regioni Sud-Ovest e Nord-Ovest, oppure nelle regioni Nord-Est e Sud-Est per rapporto al sistema dei due assi coordinati condotti nel vertice d'azimuto cognito.

Considerando un punto qualunque di una rete trigonometrica, chiamando K la lunghezza del lato concorrente in quel punto, Θ il suo azimuto, x' ed y' le coordinate del punto considerato per rapporto agli assi ausiliarii condotti per l'estremo del lato che è vertice dell'azimuto cognito, si avrà

$$x' = \mathrm{K}\cos\Theta, \qquad y' = \mathrm{K}\,\mathrm{sen}\,\Theta \qquad (3);$$

e siccome gli assi ausiliarii sono paralleli agli assi principali, chiamando x ed y le coordinate dell'origine di quelli per rapporto a questi, le distanze X ed Y del punto considerato dalla perpendicolare e dalla meridiana saranno date da

$$\mathrm{X} = x + x', \qquad \mathrm{Y} = y + y' \qquad (4).$$

nei quali valori di x, x', y e y' bisogna tener conto del segno.

L'esposto metodo di calcolare le coordinate dei vertici di una rete trigonometrica suppone che le direzioni meridiane condotte per ciascuno di essi sieno parallele. Questo parallelismo, giammai si verifica a rigore; gli errori però che da tal causa possono provenire sono insensibili in una rete puramente topografica, cioè di un'estensione non eccedente il limite prestabilito al numero 5. Nel caso di una gran rete trigonometrica, bisogna tener conto della sfericità della terra, ricorrere ad operazioni geodetiche che non possono aver luogo in questo corso di topografia, e determinare la posizione di ciascun vertice mediante la sua latitudine e la sua longitudine.

263. **Procedimento pratico per il calcolo delle coordinate dei vertici di una rete topografica.** — Onde instituire ordinatamente un tal calcolo può tornar utile il seguente registro:

PUNTI TRIGONOMETRICI	DATI	AZIMUTI $\Theta=\theta\pm0$	COORDINATE RIFERITE ad assi ausiliarii		COORDINATE RIFERITE agli assi principali	
			$x'=K\cos\Theta$	$y'=K\operatorname{sen}\Theta$	$X=x+x'$	$Y=y+y'$
	(___) K = ___		log K = ___	log K = ___		
	Az. del lato (___)	θ = ___	log cos Θ = ___	log sen Θ = ___	x = ___	y = ___
	θ = ___	0 = ___	___	___	x' = ___	y' = ___
	Distanze del punto (___)	___	log x' = ___	log y' = ___	___	___
	dalla P^{re} x = ___	Θ = ___	___	___	X = ___	Y = ___
	dalla M^{na} y = ___		x' = ___	y' = ___		

Nella prima colonna s'inscriveranno i punti trigonometrici di cui voglionsi le coordinate, indicandoli coi numeri della rete che loro corrispondono. Nella seconda colonna si registreranno i dati occorrenti al calcolo delle coordinate medesime, cioè la direzione e la lunghezza del lato al cui estremo trovasi il punto di cui voglionsi le coordinate (la direzione di un lato si indica dall'ordine con cui si scrivono i suoi estremi, così (1, 2) e (2, 1) denotano due direzioni di uno stesso lato, una in senso contrario all'altra; la lunghezza è indicata dal numero che trovasi dopo il segno $=$, che tien dietro alla indicazione K); il lato di cui si conosce l'azimuto col valore di quest'ultimo, cui si farà precedere l'indicazione θ; le coordinate x ed y dell'origine per rapporto agli assi principali col rispettivo segno. Nella terza colonna si eseguirà il calcolo dell'azimuto Θ, corrispondente al vertice di cui voglionsi le coordinate, usando della formola (1). Nella quarta colonna, divisa in due, si eseguiranno, usando delle formole (3), i calcoli delle coordinate x' ed y'. Nella quinta finalmente, pure divisa in due parti, si calcoleranno, mediante le formole (4), le coordinate X ed Y per rapporto agli assi principali.

264. **Piano delle coordinate ortogonali.** — Colla scorta dei calcoli instituiti nel precedente numero, si può costrurre un piano sul quale, oltre il tracciamento della meridiana e della sua perpendicolare, siano marcati i diversi punti trigonometrici non che le loro coordinate. Per costrurre un tal piano usasi dividere il foglio che lo deve ricevere in tanti quadrati eguali, i cui lati siano un sotto-multiplo esatto del metro, per esempio due decimetri o un decimetro o un mezzo decimetro, come appare dalla figura 354, dove suppongo che le dimensioni del quadro AB siano di $0^m,80$ e $0^m,60$. Dividendo i lati maggiori in otto parti eguali, ed i lati minori in sei, rimarrà scomposto il detto rettangolo in quarant'otto quadrati eguali di lato $0^m,1$. Supponendo che sia OX la direzione della meridiana ed OY quella della sua perpendicolare, e che il disegno vogliasi eseguire nella scala dell'1/10000, si avrà che ogni lato di un piccolo quadrato vale 1000^m (num. 8); e volendosi costrurre un punto M di coordinate $x = -2770^m$, $y = 3460^m$, si prenderà nell'angolo YOX' il punto o intersezione della perpendicolare alla meridiana segnata (2) colla parallela segnata (3) e si porterà $\overline{ox} = 770^m$ ed $\overline{oy} = 460^m$; costruendo il piccolo rettangolo yoxM si avrà evidentemente il punto richiesto. Con un procedimento analogo si collocherà a sito un altro punto qualunque.

ARTICOLO VII.

Punti trigonometrici di terzo ordine.

265. **Scelta dei punti trigonometrici di 3° ordine.** — I punti trigonometrici di 3° ordine sono quelli che vengono determinati prendendo per base del calcolo un lato di 2° ordine. La scelta di tali punti si fa generalmente dopo la determinazione di quelli di 1° e 2° ordine; e, per procedere con criterio in quest'operazione, è necessario di avere ben fisso in mente, che i punti trigonometrici di 3° ordine devono poscia servire come punti d'appoggio pei rilevamenti dei minuti particolari del terreno. In vista di questo, dovrà l'operatore stabilire tali punti sul terreno stesso e preferi-

bilmente negli incrociamenti di strade, sui ponti, sulle prominenze e nei luoghi scoperti ed incolti, servendosi per fissare le loro posizioni dei metodi già esposti parlando delle reti di 2° ordine; dovrà distribuirli a distanze tali gli uni dagli altri, da poter servire al collegamento dei minuti particolari che si dovranno dopo rilevare, senza però moltiplicare eccessivamente il loro numero; dovrà evitare, per quanto è possibile, la riduzione al centro di stazione, giammai scegliendoli in siti nella cui verticale sia impossibile di stazionare col teodolite; e dovrà finalmente stabilirne il più gran numero sulle linee stesse che contorniano l'intero terreno su cui si opera, onde porsi in istato di avere con precisione il rilevamento dei confini.

L'operatore, di mano in mano che procede alla scelta dei punti trigonometrici di 3° ordine, indicherà le loro posizioni su un piano della rete di 1° e 2° ordine, non che il metodo di collegamento ai vertici di tali reti; e li numererà facendo seguito a quelli di 2° ordine. La figura 355 dà un'idea del modo di collegare i punti trigonometrici di 3° ordine a quelli di 1° e di 2° ordine.

La determinazione di tali punti sul terreno si fa sempre con segnali, come si indicò al numero 228: non si faranno però mai costruzioni murali, bastando i termini in pietra per il loro stabilimento e per la loro conservazione.

266. **Misura degli angoli.** — La misura degli angoli necessarii alla determinazione dei punti trigonometrici di 3° ordine si eseguirà colle norme già date parlando dei triangoli d'ordine superiore: in molti casi però è sufficiente di prendere soltanto l'angolo doppio o di misurarlo due volte col metodo della reiterazione; e nella somma degli angoli compresi in un giro d'orizzonte ed in quella dei tre angoli di un triangolo si può anche ammettere una tolleranza massima di 2′.

267. **Calcoli per la determinazione dei punti trigonometrici di 3° ordine.** — La determinazione dei punti trigonometrici di 3° ordine consiste nel calcolo delle coordinate per rapporto alla meridiana ed alla perpendicolare. Un tale lavoro, facile ad effettuarsi coi metodi esposti parlando delle reti di 1° e 2° ordine, riesce più spedito coll'applicazione delle formole convenienti alla soluzione dei due problemi che seguono:

I. *Conoscendosi le coordinate* (*fig.* 356) $\overline{O'A} = X_d$ *e* $\overline{AD} = Y_d$, $\overline{O'B} = X_s$ *e* $\overline{BS} = Y_s$, *dei punti* D *e* S, *e gli angoli* D, S, O *del triangolo* DSO, *calcolare le coordinate* $\overline{O'C} = x$ *e* $\overline{CO} = y$ *del punto* O.

Immaginando la retta DF parallela ad O'X; facendo, per brevità di scrittura, $\overline{DE}=X_s-X_d=X'$, $\overline{ES}=Y_s-Y_d=Y'$, $\overline{DF}=X$, $\overline{FO}=Y$; chiamando u l'angolo SDF, e considerando successivamente i triangoli ODF, ODS e SDE, si deducono i seguenti valori per X ed Y:

$$X=\overline{DO}\cos(u-D)=\overline{DS}\frac{\operatorname{sen}S}{\operatorname{sen}O}\cos(u-D)=X'\frac{\operatorname{sen}S\cos(u-D)}{\operatorname{sen}O\cos u};$$

$$Y=\overline{DO}\operatorname{sen}(u-D)=\overline{DS}\frac{\operatorname{sen}S}{\operatorname{sen}O}\operatorname{sen}(u-D)=X'\frac{\operatorname{sen}S\operatorname{sen}(u-D)}{\operatorname{sen}O\cos u}.$$

Sviluppando i valori di $\cos(u-D)$ e $\operatorname{sen}(u-D)$ ed osservando che

$$\operatorname{tang}u=\frac{Y_s-Y_d}{X_s-X_d}=\frac{Y'}{X'},$$

si ottengono i seguenti risultati

$$X=X'\frac{\operatorname{sen}S\cos D}{\operatorname{sen}O}+Y'\frac{\operatorname{sen}S\operatorname{sen}D}{\operatorname{sen}O}$$

$$Y=Y'\frac{\operatorname{sen}S\cos D}{\operatorname{sen}O}-X'\frac{\operatorname{sen}S\operatorname{sen}D}{\operatorname{sen}O}.$$

Ponendo

$$\frac{\operatorname{sen}S\cos D}{\operatorname{sen}O}=m,$$

$$\frac{\operatorname{sen}S\operatorname{sen}D}{\operatorname{sen}O}=n,$$

e, osservando che, aggiungendo rispettivamente X_d ed Y_d ai valori di X ed Y, si hanno le coordinate x ed y del punto O, risultano le seguenti formole:

$$x=X_d+mX'+nY',$$

$$y=Y_d+mY'-nX'.$$

II. *Essendo date le coordinate* (*fig.* 357), $\overline{OE}=X_a$ *ed* $\overline{EA}=Y_a$, $\overline{OF}=X_b$ *e* $\overline{FB}=Y_b$, $\overline{OG}=X_c$ *e* $\overline{GC}=Y_c$, *dei tre punti* A, B *e* C *e gli angoli β e γ che le direzioni* DC *e* DB *fanno con* DA, *calcolare le coordinate* $\overline{OH}=x$ *e* $\overline{HD}=y$ *del punto* D.

Immaginando condotte le rette AI, CN e BM parallelamente ad OX, chiamando X la distanza $\overline{AI}$, Y la distanza $\overline{ID}$, u l'angolo ADI; e ponendo $\overline{AK}=X_b-X_a=X'$, $\overline{KB}=Y_b-Y_a=Y'$, $\overline{AL}=X_c-X_a=X''$, $\overline{LC}=Y_c-Y_a=Y''$: dai triangoli rettangoli DAI, DCN e DBM si deducono ordinatamente le seguenti equazioni:

$$\operatorname{tang} u=\frac{X}{Y} \qquad (1),$$

$$\operatorname{tang}(u+\gamma)=\frac{X-X'}{Y-Y'}, \qquad \operatorname{tang}(u-\beta)=\frac{X-X''}{Y-Y''}.$$

Sostituendo nelle ultime due equazioni il valore di Y ricavato dalla (1), si trovano i seguenti risultati:

$$\frac{\operatorname{tang} u+\operatorname{tang}\gamma}{1-\operatorname{tang} u\operatorname{tang}\gamma}=\frac{X\operatorname{tang} u-X'\operatorname{tang} u}{X-Y'\operatorname{tang} u},$$

$$\frac{\operatorname{tang} u-\operatorname{tang}\beta}{1+\operatorname{tang} u\operatorname{tang}\beta}=\frac{X\operatorname{tang} u-X''\operatorname{tang} u}{X-Y''\operatorname{tang} u},$$

che facilmente si riducono a

$$\left.\begin{array}{l} X(1+\operatorname{tang}^2 u)=\operatorname{tang}^2 u(X'+Y'\cot\gamma)+\operatorname{tang} u(Y'-X'\cot\gamma) \\ X(1+\operatorname{tang}^2 u)=\operatorname{tang}^2 u(X''-Y''\cot\beta)+\operatorname{tang} u(Y''+X''\cot\beta) \end{array}\right\} (2).$$

Ponendo, per brevità di scrittura

$$X'+Y'\cot\gamma=m', \qquad Y'-X'\cot\gamma=n',$$
$$X''-Y''\cot\beta=m'', \qquad Y''+X''\cot\beta=n'',$$

le equazioni (2) diventano

$$\left.\begin{array}{l} X(1+\operatorname{tang}^2 u)=m'\operatorname{tang}^2 u+n'\operatorname{tang} u \\ X(1+\operatorname{tang}^2 u)=m''\operatorname{tang}^2 u+n''\operatorname{tang} u \end{array}\right\} (3),$$

i cui secondi membri, eguagliati fra di loro, dànno l'equazione

$$m' \operatorname{tang} u + n' = m'' \operatorname{tang} u + n'',$$

dalla quale si ottiene

$$\operatorname{tang} u = -\frac{n' - n''}{m' - m''}.$$

Il valore di X si può ricavare da una delle equazioni (3): considerando la prima, si trova, a riduzioni fatte,

$$X = m' \operatorname{sen}^2 u + n' \operatorname{sen} u \cos u.$$

Sostituendo questo valore di X nell'equazione (1), si deduce

$$Y = m' \operatorname{sen} u \cos u + n' \cos^2 u.$$

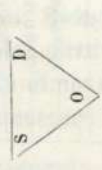
Le richieste coordinate x ed y del punto D si ottengono coll'aggiungere X_a ed Y_a ai valori di X ed Y già trovati, e per essere $\operatorname{sen} u \cos u = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2u$, si hanno le seguenti espressioni

$$x = m' \operatorname{sen}^2 u + \frac{n'}{2} \operatorname{sen} 2u + X_a,$$

$$y = n' \cos^2 u + \frac{m'}{2} \operatorname{sen} 2u + Y_a,$$

dalle quali facilmente si ricavano x ed y, quando siansi calcolati i coefficienti m', n', m'', n'' e l'angolo u.

268. **Procedimento pratico per calcolare direttamente le coordinate dei punti trigonometrici di 3° ordine.** — Per determinare le coordinate del vertice di un triangolo, conoscendosi i tre angoli e le coordinate degli estremi di un lato (num. 267, prob. I), può tornare utile il registro che qui si presenta:

TRIANGOLI E COORDINATE degli estremi delle basi	ANGOLI MISURATI e differenze di coordinate $X_s - X_d = X', Y_s - Y_d = Y'$	ANGOLI CORRETTI e calcoli preparatorii $\frac{\text{sen}\, S \cos D}{\text{sen}\, O} = m, \frac{\text{sen}\, S\, \text{sen}\, D}{\text{sen}\, O} = n$	CALCOLO DELLE COORDINATE del punto O $x = X_d + mX' + nY'$	$y = Y_d + mY' - nX'$
	$O =$	$O =$	$\log m =$	$\log m =$
	$S =$	$S =$	$\log X' =$	$\log Y' =$
	$D =$	$D =$		
			$\log m X' =$	$\log m Y' =$
			$\log n =$	$\log n =$
Coordinate del punto S	$X_s =$	$c\, l \log \text{sen}\, O =$	$\log Y' =$	$\log X' =$
	$-X_d =$	$\log \text{sen}\, S =$	$\log n Y' =$	$\log n X' =$
$X_s =$		$\log \frac{\text{sen}\, S}{\text{sen}\, O} =$		
$Y_s =$	$X' =$	$\log \cos D =$	$m X' =$	$m Y' =$
			$n Y' =$	$-n X' =$
Coordinate del punto D	$Y_s =$	$\log m =$		
	$-Y_d =$	$\log \frac{\text{sen}\, S}{\text{sen}\, O} =$	$m X' + n Y' =$	$m Y' - n X' =$
$X_d =$		$l\, \text{sen}\, D =$	$X_d =$	$Y_d =$
$Y_d =$	$Y' =$	$\log n =$	$x =$	$y =$

La prima colonna è destinata a ricevere le indicazioni dei tre vertici di ciascun triangolo e le coordinate dei due estremi della base. La seconda serve all'inscrizione degli angoli misurati, e delle differenze X′ ed Y′ fra le accennate coordinate. Nella terza si inscrivono gli angoli corretti, la cui somma deve fare 180°, e si eseguiscono i calcoli preparatorii dei coefficienti *m* ed *n*. Nella quarta finalmente, suddivisa in due parti, si effettuano i calcoli che dànno le cercate coordinate *x* ed *y*.

Quando poi si vogliono determinare le coordinate di un punto riferendo la sua posizione a quella di tre altri già fissati (num. 267, prob. II), conviene un registro ripartito come quello che segue:

INDICAZIONE DEI PUNTI ANGOLI MISURATI	$X' = X_b - X_a$ $Y' = Y_b - Y_a$ $X'' = X_c - X_a$ $Y'' = Y_c - Y_a$	LOGARITMI di $Y' \cot\gamma$, $X' \cot\gamma$ $Y'' \cot\beta$, $X'' \cot\beta$	$m' = X' + Y' \cot\gamma$ $n' = Y' - X' \cot\gamma$ $m'' = X'' - Y'' \cot\beta$ $n'' = Y'' + X'' \cot\beta$	$\operatorname{tang} u = -\frac{n' - n''}{m' - m''}$	LOGARITMI di $m' \operatorname{sen}^2 u$, $n' \cos^2 u$ $\frac{n'}{2} \operatorname{sen} 2u$, $\frac{m'}{2} \operatorname{sen} 2u$	COORDINATE DEL PUNTO D $x = m' \operatorname{sen}^2 u + \frac{n'}{2} \operatorname{sen} 2u + X_a$ $y = n' \cos^2 u + \frac{m'}{2} \operatorname{sen} 2u + Y_a$
A	$X_b =$	$\log Y' =$	$X' =$	$n' =$	$\log m' =$	$m' \operatorname{sen}^2 u =$
	$-X_a =$	$\log \cot\gamma =$	$Y' \cot\gamma =$	$-n'' =$	$l \operatorname{sen} u =$	$\frac{n'}{2} \operatorname{sen} 2u =$
					$l \operatorname{sen} u =$	
B	$X' =$	$\log Y' \cot\gamma =$	$m' =$	$n' - n'' =$	$\log m' \operatorname{sen}^2 u =$	
						Somma =
C	$Y_b =$	$\log X' =$	$Y' =$	$m' =$	$\log n' =$	
	$-Y_a =$	$\log \cot\gamma =$	$-X' \cot\gamma =$	$-m'' =$	$l \cos u =$	$X_a =$
					$l \cos u =$	
	$Y' =$	$\log X' \cot\gamma =$	$n' =$	$m' - m'' =$	$\log n' \cos^2 u =$	$x =$
D	$X_c =$	$\log Y'' =$	$X'' =$	$l\,(n' - n'') =$	$\log n' =$	
	$-X_a =$	$\log \cot\beta =$	$-Y'' \cot\beta =$	$c\,l\,(m' - m'') =$	$l \operatorname{sen} u =$	$n' \cos^2 u =$
					$l \cos u =$	$\frac{m'}{2} \operatorname{sen} 2u =$
	$X'' =$	$\log Y'' \cot\beta =$	$m'' =$	$l \operatorname{tang} u =$	$\log \frac{n'}{2} \operatorname{sen} 2u =$	
						Somma =
β	$Y_c =$	$\log X'' =$	$Y'' =$		$\log m' =$	$Y_a =$
γ	$-Y_a =$	$\log \cot\beta =$	$X'' \cot\beta =$		$l \operatorname{sen} u =$	
				$u =$	$l \cos u =$	$y =$
	$Y'' =$	$\log X'' \cot\beta =$	$n'' =$		$\log \frac{m'}{2} \operatorname{sen} 2u =$	

Nella prima colonna si indicano i punti trigonometrici, e si inscrivono gli angoli β e γ. Nella seconda si trovano le differenze X', Y', X'' ed Y'' fra le coordinate dei punti dati. Nella terza si cercano i logaritmi dei prodotti $Y'\cot\gamma$, $X'\cot\gamma$, $Y''\cot\beta$ e $X''\cot\beta$. Nella quarta si calcolano i coefficienti m', n', m'' ed n''. Nella quinta si deduce l'angolo u. Nella sesta si effettua il calcolo dei termini $m'\operatorname{sen}^2 u$, $n'\cos^2 u$, $\frac{n'}{2}\operatorname{sen} 2u$, $\frac{m'}{2}\operatorname{sen} 2u$. Nell' ultima finalmente, divisa in due parti, si trovano i valori delle richieste coordinate x ed y.

Le formole ed i registri, convenienti pel calcolo delle coordinate dei punti trigonometrici di 3° ordine, servono anche a trovare le coordinate dei punti di ordine inferiore.

ARTICOLO VIII.

Rilevamento dei terreni coordinato ai punti trigonometrici.

269. **Numero dei fogli occorrenti per fare un determinato rilevamento.** — La rappresentazione dei minuti particolari di una data porzione di terreno, su cui venne già eseguita una triangolazione, si compie generalmente su più fogli. Con ciò si perviene a poter adoperare quella scala che credesi conveniente, acciocchè risultino quelle particolarità che sono richieste dalla natura del lavoro; e, fissate le dimensioni dei fogli da adottarsi, risulta facile il decidere del loro numero.

Chiamando $\frac{1}{p}$ la scala del piano delle coordinate ortogonali; $\frac{1}{q}$ quella in cui voglionsi disegnare i minuti particolari; m la dimensione di quel lato del quadro del foglio che deve essere parallelo alla meridiana; n la dimensione dell'altro lato che dev'essere perpendicolare, si deve cercare quali dimensioni x ed y prenderà nella scala dell'$\frac{1}{p}$, un rettangolo che nella scala dell'$\frac{1}{q}$ ammette rispettivamente le dimensioni m ed n. Osservando perciò che tali rettangoli sono figure simili, e che le loro dimensioni sono in ragione inversa dei denominatori delle rispettive scale (num. 205), si avranno $x = \frac{mq}{p}$, $y = \frac{nq}{p}$.

Dopo di ciò si porteranno, a partire dall'origine: sull'asse delle ascisse, cioè sulla meridiana, tanto verso il Nord quanto verso il Sud, delle distanze eguali ad x; sull'asse delle ordinate, cioè sulla perpendicolare tanto verso l'Est che verso l'Ovest, delle distanze eguali ad y. Conducendo in seguito tante parallele agli assi passanti pei diversi punti di divisione, l'intero piano delle coordinate ortogonali rimarrà diviso in tanti rettangoli, ciascuno dei quali rappresenterà un foglio della mappa o della carta a costruirsi.

Per riconoscere il posto che ciascun foglio, preso isolatamente, occupa relativamente agli altri, si possono impiegare due numeri, l'uno che assegni il suo rango nel senso della meridiana principale e l'altro nel senso della perpendicolare. Per riconoscere in quale delle quattro regioni determinate dalla meridiana e dalla sua perpendicolare resta compreso ciascun foglio, si collocheranno questi numeri nel mezzo dei lati che formano l'angolo del foglio, il cui vertice è più vicino all'origine delle coordinate. Così i quattro fogli A, B, C e D (*fig.* 358), collocati ciascuno in una delle quattro regioni in cui la meridiana e la sua perpendicolare dividono il terreno, avranno rispettivamente i numeri che appaiono dalla figura medesima.

270. **Collocamento dei punti trigonometrici sui fogli che devono ricevere il piano del terreno**. — Conosciuto il numero dei fogli occorrenti all'intera rappresentazione del terreno; disegnato sui medesimi il quadro colle richieste dimensioni, e numerati nel modo or ora indicato, converrà dividerli colla maggior esattezza in tanti quadretti di lato non minore di $0^m,1$ nè maggiore di $0^m,2$, rappresentanti un multiplo esatto di decine o di centinaia di metri, per poscia procedere alla determinazione dei punti trigonometrici, che devono servire come punto di partenza per le successive operazioni. Il collocamento di tali punti non presenta difficoltà alcuna, e ad apprenderne il vero procedimento valga un caso particolare.

Suppongasi che il piano delle coordinate ortogonali siasi disegnato alla scala dell'1/20000, e che il rilevamento del terreno vogliasi fare alla scala dell'1/2000, in quadri lunghi $1^m,20$ nel senso parallelo alla meridiana e $1^m,60$ nel senso perdendicolare. Chiamando X ed Y le lunghezze reali corrispondenti alle lunghezze grafiche $1^m,20$ e $1^m,60$, si avrà

$$X = 1^m,20 \times 2000 = 2400^m; \quad Y = 1^m,60 \times 2000 = 3200^m;$$

e, supponendo i diversi fogli divisi in quadretti di $0^m,2$ di lato, ciascuno di tali lati rappresenterà $0^m,2 \times 2000 = 400^m$. Considerando ora un punto M, posto nel foglio A indicato dalla figura 359, di coordinate $x = 5510^m$, $y = 7520^m$, e avente quindi, dai lati oy e ox, le distanze

$$x' = 5510^m - 4800^m = 710^m\,; \quad y' = 7520^m - 6400^m = 1120^m\,,$$

si porterà il medesimo a sito, prendendo $\overline{ab} = 310^m$ sulla parallela al lato ox e $\overline{ac} = 320^m$ sulla parallela al lato oy. Facendo dopo centro in b e c, e descrivendo due archi di raggio rispettivamente eguali ad $\overline{ac}$ ed $\overline{ab}$, si avrà nella loro intersezione il punto trigonometrico M. Con un analogo procedimento si collocheranno a sito quanti altri punti trigonometrici si vorranno.

271. **Rilevamento col metodo degli allineamenti**. — Il metodo degli allineamenti collegati ai punti trigonometrici già prestabiliti può riuscire vantaggioso nelle levate topografiche molto estese. Questo metodo consiste nel tracciare in località convenienti, e in vicinanza delle linee da rilevarsi, diversi allineamenti appoggiati direttamente ai lati o ai vertici delle reti topografiche, o anche ad altri allineamenti già prestabiliti, e la cui posizione dipende da quella dei punti trigonometrici. Questo duplice modo di collegare gli allineamenti d'operazione dà origine ai due casi di *collegamento diretto* e di *collegamento indiretto*. Dalla figura 360 appare chiaramente quali sono i punti trigonometrici, e quali gli allineamenti di operazione ad essi collegati; per gli allineamenti (1) (24), (17) (34), (12) (14), A (23), B (1), D (25), E (26), ha luogo un collegamento diretto; un collegamento indiretto si verifica per gli altri.

L'operatore procurerà di combinare tali allineamenti nel modo il più economico ed il più conveniente per conseguire lo scopo cui tende la sua operazione. Volendosi rilevare le divisioni tutte delle proprietà, sarà bene condurli, per quanto si può, in vicinanza dei confini e, qualora si presenti l'occasione, prolungare le linee stesse in cui vengono essi a terminare.

I punti di collegamento possono anche cadere sui prolungamenti dei lati della rete. Rimanendo qualche piccola parte di terreno, per cui non sia applicabile il rilevamento con allineamenti appoggiati a tali lati o ai loro prolungamenti, si può usare qualche triangolo che, avendo un sol lato nella direzione di due punti trigonometrici, passi cogli altri due e con trasversali in esso condotte in vicinanza delle linee da rilevarsi.

Se ostacoli di natura qualunque impediscono che allineamenti partenti da punti ben determinati vadano a collegarsi coi lati della rete o cogli allineamenti già stabiliti, si può seguire il processo di far concorrere questi allineamenti in un sol punto. In tale operazione però bisogna andare con cautela, e far sempre in modo che gli allineamenti concorrenti siano più di due, onde poter verificare l'operazione.

Se nell'andamento del lavoro si viene ad incontrare un ostacolo, si può trasportare l'allineamento d'operazione parallelamente a sè stesso mediante una perpendicolare. Un tale procedimento è solo applicabile nei casi in cui riesce impossibile di operare diversamente, e per conseguire un certo grado d'esattezza è necessario che la perpendicolare non sia maggiore di 50 metri.

Quando in certe località non si trovano stabiliti sufficienti punti trigonometrici per appoggiarvi le linee d'operazione, si può procedere allo stabilimento di altri punti, coordinandoli anche a punti di 3° ordine. Tali punti che si diranno di 4° *ordine*, verranno determinati colle norme già date pei punti di 3° ordine, od anche mediante un triangolo avente per base un lato di 1° o di 2° o di 3° ordine ed un angolo conchiuso.

Stabiliti gli allineamenti d'operazione, conviene prendere le opportune misure per fissare le loro posizioni non che quelle che sono necessarie al rilevamento dei dettagli ed al controllo dell'operazione. Le misure da prendersi lungo gli allineamenti d'operazione si continueranno senza interruzione dall'una all'altra estremità; tutti i punti che sono in vicinanza di detti allineamenti si rileveranno o con perpendicolari o con misure d'intersezione.

Di mano in mano che si procede nell'operazione dovrà l'operatore procurarsi l'abbozzo dei rilievi locali, indicare su esso i punti trigonometrici coi numeri che loro corrispondono e segnare tutti i punti di collegamento, sì diretto che indiretto, con apposito numero d'ordine.

Preparati i fogli di carta che devono ricevere l'intero rilevamento, segnati su essi i punti trigonometrici, e verificate le loro posizioni, coll'abbozzo dei rilievi locali ottenuto sul luogo, si collocano a sito gli allineamenti d'operazione e poi le linee tutte rilevate. Se gli allineamenti appoggiati direttamente o indirettamente alle reti trigonometriche vennero misurati per tutta la loro lunghezza, si hanno in essi altrettanti mezzi di controllo, ed il lavoro si dirà ben eseguito quando, applicando sul piano le misure dirette rilevate sul terreno, si troverà non ecceduta la tolleranza ammissibile nelle operazioni di rilevamento dei dettagli.

272. **Rilevamento col metodo di camminamento**. — Il me-

todo degli allineamenti esatto, facile e spedito sui terreni non intercetti da grandi ostacoli, diventa lungo e talvolta impraticabile sui terreni montuosi e molto ingombri. In tali circostanze il metodo che giova a facilitare l'operazione e a disimpegnare l'operatore da ogni difficoltà è quello di camminamento.

Questo metodo consiste nello stabilire una serie d'allineamenti, costituenti una poligonazione passante in prossimità delle linee che vogliansi rappresentare sul piano, appoggiati alla rete trigonometrica, e da rilevarsi col metodo di camminamento, usando di un goniometro o della bussola o della tavoletta. I minuti particolari si fissano con perpendicolari, e con misure atte a determinarli per irradiamento o per intersezione.

La tavoletta pretoriana è fra gli strumenti che si possono impiegare in tale operazione uno dei buoni, in quanto permette sul terreno di verificare l'esattezza del lavoro, appoggiandosi sui punti trigonometrici preventivamente determinati sullo specchio.

Se nel rilevare per camminamento vuolsi accelerare l'operazione usando della bussola topografica, conviene prima conoscere la declinazione dell'ago per rapporto alla meridiana principale, misurando sul terreno l'angolo che la detta direzione fa coll'ago calamitato. Conosciuta la declinazione, riesce dopo della massima facilità il determinare sul foglio che deve ricevere il piano e dove si hanno già alcuni punti trigonometrici e la direzione meridiana, la direzione dell'ago calamitato e quindi di portare a sito tutti i minuti particolari.

273. **Osservazioni generali.** — All'atto pratico è difficile che una data località si presti esclusivamente ad uno dei citati metodi. Quando non si può usare del metodo degli allineamenti, si trarrà partito di quello di camminamento, e ben di frequente riescirà conveniente di combinarlo con quelli d'irradiamento e d'intersezione da applicarsi a quei punti della poligonazione, per cui le intersezioni hanno luogo in modo soddisfacente e conforme all'esattezza dell'operazione.

Prima di dar mano alla levata di una porzione di superficie terrestre molto estesa, è necessario dividerla in molte frazioni più o meno ampie, a seconda delle varie circostanze topografiche che in esse si presentano; procurarsi una copia della rete trigonometrica della parte di terreno a rilevarsi, nella quale sieno indicati i punti trigonometrici coi rispettivi numeri d'ordine; e procedere ad una perlustrazione delle principali linee divisorie per prepararsi un abbozzo delle indicazioni locali, capace a dare una giusta idea della forma del terreno e delle principali sue divisioni.

Il rilevamento di una estesa porzione di superficie terrestre con molta celerità si eseguisce mediante la tavoletta pretoriana. Distesi sullo specchio e colle dovute precauzioni i fogli di carta da impiegarsi, squadrati i medesimi colle volute dimensioni, e divisi in quadretti convenienti, si collocano a sito i punti trigonometrici, per servirsene nel porre in stazione e nell'orientare la tavoletta, usando principalmente il metodo d'intersezione inversa e quello del coordinamento su tre punti dati. Dalle diverse stazioni si rilevano i punti principali del terreno o per intersezione o per irradiamento, usando della stadia per misurare le distanze. Le minime sinuosità che passano in vicinanza degli allineamenti rilevati colla tavoletta si collegano ai medesimi o con perpendicolari o con misure d'intersezione.

CAPITOLO II.

Operazioni altimetriche.

ARTICOLO I.

Nozioni generali.

274. **Oggetto della livellazione dei punti trigonometrici.** — Già si conoscono i calcoli da instituirsi per determinare le proiezioni dei punti trigonometrici: ci resta da esaminare come si possano ottenere le distanze dei medesimi da una superficie parallela a quella delle acque del mare, la qual cosa è appunto ciò che costituisce la livellazione dei punti trigonometrici.

L'oggetto dell'altimetria dei punti trigonometrici è in tutto analogo a quello della planimetria dei medesimi punti: serve questa a somministrare dei punti d'appoggio o capi-saldi, per collegarvi le operazioni di rilevamento, serve quella ad avere dei punti di partenza o capi-saldi a cui possa l'operatore riferirsi nelle livellazioni d'ordine inferiore eseguite, sia pel tracciamento delle curve orizzontali, sia per un altro scopo qualunque.

275. **Superficie di paragone e punti di livello**. — Diconsi *superficie di paragone* quelle superficie simili e concentriche a quella dell'acqua del mare, considerato nello stato di perfetto riposo, per rapporto a cui voglionsi valutare le altezze dei punti trigonometrici. Una superficie di paragone, quantunque rigorosamente non

sferica, si può considerare come tale nelle operazioni topografiche, senza tema di commettere sensibili errori.

Una superficie di paragone si sceglie quasi sempre in guisa che sieno al disopra di essa tutti i punti che vi si vogliono riferire; talvolta si prende una superficie di paragone che passa al disopra dei detti punti, e ben di rado si adotta una superficie di paragone per rapporto alla quale alcuni punti rimangono al disopra e alcuni altri al disotto.

Le distanze che i punti trigonometrici hanno dalla superficie di paragone, sono determinate dalle parti di verticali intercette fra questa e quelli, e tali distanze prendono il nome di *altitudini* o *depressioni assolute*, secondochè i punti trovansi al disopra o al disotto della superficie di paragone.

Due punti aventi la medesima altitudine o la medesima depressione si dicono *di livello;* essi trovansi allora su una medesima superficie che prende pure il nome di *superficie di livello*, perchè equidistante da quella di paragone e da quella delle acque dei mari.

276. **Sfericità e rifrazione**. — La definizione stessa dell'altitudine e della depressione fa vedere come, nella livellazione dei punti trigonometrici, non si può tenere una via analoga a quella tenuta in planimetria, cioè di supporre piana la porzione di superficie terrestre che si considera. Valutando le altitudini o depressioni non per rapporto ad una superficie di livello, ma per rapporto ad un piano tangente condotto per un punto collocato verso il suo mezzo, s'incorre in sensibili errori quando la distanza dei punti considerati eccede i 300^{m}.

Supponendo che la circonferenza di centro O (*fig.* 361) sia una circonferenza massima di una superficie di livello; facendo il diametro $\overline{CF}=2R$, la tangente $\overline{AE}=K$; chiamando s l'errore $\overline{CE}$, che si commette prendendo $\overline{BE}$ e non $\overline{BC}$ per altitudine del punto B, dietro un noto teorema di geometria, che deve essere la tangente media proporzionale fra la segante intera e la sua parte esterna, si ha

$$K^2 = s\,(2R+s),$$

d'onde

$$s = \frac{K^2}{2R+s} \qquad (1)$$

Osservando che s è sempre una lunghezza trascurabile in confronto del diametro terrestre 2R, l'ultima suaccennata formola si può ridurre, pei casi ordinarii della pratica,

$$s = \frac{K^2}{2R} \qquad (2).$$

Qualora si voglia maggiore approssimazione, si può ricavare un primo valore s' dall'equazione (2) e sostituirlo invece di s nel denominatore della formola (1), per avere un secondo valore s'' più prossimo al vero; sostituire s'' al posto di s nell'accennato denominatore, per ottenere un terzo valore ancora più vicino al vero, e continuare così fino a raggiungere la desiderata approssimazione.

I raggi luminosi passando in un mezzo di densità variabile, qual è l'atmosfera, subiscono, come dicono i fisici, una *rifrazione*, piegandosi secondo una linea curva colla sua concavità volta verso la superficie terrestre. Questo fenomeno, come già s'indicò al numero 131, ha per effetto di far vedere il punto a cui si mira più alto di quello che sia realmente; così il punto B sembrerà elevato in B'. Gli errori che possono derivare dalla rifrazione sono insensibili a brevi distanze: si vedrà in apposito numero come si possa stabilire la loro entità, e come si giunga a tenerne conto, almeno in modo approssimato, nelle livellazioni trigonometriche.

ARTICOLO II.

Eclimetri annessi ai teodoliti, e loro uso.

277. **Eclimetri annessi ai teodoliti.** — Gli eclimetri annessi ai teodoliti sono generalmente a circolo intero, e prendono il nome di *circoli zenitali*, perchè il più delle volte sono costrutti in modo da dare le *distanze zenitali*, quantunque se ne incontrino anche di quelli che somministrano gli angoli di elevazione e di depressione. Vi sono degli eclimetri invariabilmente uniti al perno del cannocchiale del teodolite e col nonio fisso; ve ne sono altri col circolo fisso e su cui scorrono due nonii invariabilmente uniti al perno del cannocchiale; finalmente se ne trovano di quelli a ripetizione, costituiti da due dischi concentrici, simultaneamente girevoli intorno ad un asse passante pel comun centro, l'esterno dei quali porta l'intera graduazione e l'interno due nonii.

In alcuni teodoliti si può adoperare lo stesso cerchio azimutale per la misura delle distanze zenitali, quando un opportuno meccanismo si presti a renderlo verticale.

278. **Collocamento degli eclimetri annessi ai teodoliti in istato d'azione.** — Il collocamento del teodolite in istato d'azione per la misura degli angoli orizzontali, oltre l'orizzontalità del cerchio azimutale e quindi la verticalità dell'asse dello strumento, richiede generalmente che l'asse ottico del cannocchiale sia perpendicolare al suo asse di rotazione e che il piano da esso descritto sia verticale. Per la esatta misura delle distanze zenitali, è di più necessario che il piano dell'eclimetro sia verticale e che sia parallelo a quello descritto dall'asse ottico del cannocchiale.

Per rendere verticale il piano dell'eclimetro può valere il seguente procedimento: si collocano in due siti opposti del cerchio due punte appositamente costrutte e munite di segni che devono rimanere equidistanti dal piano del cerchio medesimo; col piombino si verifica se gli accennati segni sono in un piano verticale; se questo non ha luogo, si riducono mediante apposita vite che serve a spostare il cerchio zenitale. Non tutti gli eclimetri permettono questa rettificazione, che si può anche conseguire dietro l'ispezione d'un piccolo livello a bolla d'aria, collocato in modo da riuscire centrata la sua bolla quando il cerchio è verticale. Con questo livello si possono valutare gli spostamenti del lembo graduato, e rendere il medesimo verticale senza usare delle punte e del filo a piombo.

La considerazione che due piani verticali assai vicini si possono ritenere come paralleli quando vanno a concorrere in una retta verticale molto lontana, ci porge il mezzo di verificare se il piano verticale del cerchio zenitale è sensibilmente parallelo a quello descritto dall'asse ottico. Basta perciò portare l'incrocicchio dei fili micrometrici su un oggetto molto lontano, e osservare se il medesimo si trova nel prolungamento del piano del cerchio zenitale. Per la rettificazione è necessario di poter girare il lembo graduato intorno al suo diametro verticale, finchè il piano visuale da esso determinato passi per l'oggetto scelto sul terreno. Un piccolo difetto di parallelismo dell'asse ottico del cannocchiale col piano graduato dell'eclimetro influisce poco sulla vera misura degli angoli, per cui difficilmente si trovano eclimetri nei quali riesca possibile l'accennata rettificazione.

279. **Misura delle distanze zenitali.** — I circoli zenitali che non sono a ripetizione hanno generalmente quattro numerazioni, una per ciascun quadrante, che due a due ammettono uno zero comune. Usando del metodo delle due osservazioni a cannocchiale di-

retto e a cannocchiale inverso (num. 192) si elide l'effetto dell'errore di collimazione prodotto dal non essere verticale l'asse ottico del cannocchiale quando lo zero del nonio coincide collo zero della graduazione. Il procedimento a seguirsi per misurare una distanza zenitale è il seguente; girando tutto lo strumento intorno al suo asse verticale, si riduce ad essere nel campo del cannocchiale l'oggetto che vuolsi osservare, e rendendo solidarii i nonii al disco graduato, si usa della vite di richiamo per portare sull'oggetto medesimo l'incrocicchio dei fili micrometrici. Dopo di ciò si fa descrivere mezzo giro allo strumento, e schiudendo la vite di pressione dell'eclimetro, si riduce l'oculare all'occhio per collimare nuovamente all'oggetto di cui vuolsi la distanza zenitale. La media aritmetica delle due letture, fatte prima e dopo l'inversione, dà l'angolo domandato.

S'incontrano talvolta dei cerchii zenitali in cui la numerazione procede sull'intera circonferenza da 0° a 360°. In tali strumenti, se un nonio in una posizione del cannocchiale dà l'angolo che la visuale fa col diametro passante per lo zero della graduazione, nell'altra esso dà il complemento a 360° dell'angolo analogo; per cui si ha la vera distanza zenitale sommando l'angolo letto dopo una osservazione colla differenza fra 360° e l'angolo letto dopo l'altra osservazione, e prendendo la metà della somma così ottenuta. — Quando il cerchio zenitale porta due nonii diametralmente opposti, si può usare dei medesimi onde scemare gli errori dovuti alla lettura ed all'imperfezione dello strumento, prendendo la media aritmetica delle parti frazionarie da essi indicate.

Posto che si abbia fra le mani un cerchio zenitale a ripetizione, la cui graduazione procede da sinistra a dritta quando il detto cerchio si suppone orizzontale e l'osservatore posto dalla parte dello zero, si tiene il seguente procedimento per la misura di una distanza zenitale. Disposto lo strumento in modo che la faccia graduata del cerchio zenitale sia a diritta, e fatto coincidere lo zero del nonio collo zero della graduazione, si schiude la vite del lembo esterno e si punta con precisione, usando della vite di richiamo. Si fa dopo descrivere allo strumento un mezzo giro, si schiude la vite che rende solidario il disco interno all'esterno, e, passando per lo zenith, si riconduce il cannocchiale sull'oggetto già osservato: l'angolo indicato dal nonio è il doppio della distanza zenitale domandata. Facendo ancora descrivere mezzo giro allo strumento senza spostare lo zero del nonio, e collimando nuovamente al medesimo oggetto, prima col circolo graduato a dritta e poi col circolo graduato a sinistra, si legge l'angolo quadruplo; e con un procedimento analogo si può avere l'angolo sestuplo, ottuplo, ecc. Gli angoli quadrupli, o tutto al più gli angoli sestupli, sono sufficienti per le operazioni topografiche.

Se la graduazione dell'eclimetro a ripetizione procede da dritta a sinistra, s'incomincia l'operazione disponendo lo strumento in modo che la faccia graduata sia a sinistra dell'osservatore.

280. **Registro delle osservazioni.** — Le distanze zenitali occorrenti al calcolo delle altezze assolute dei punti trigonometrici, le distanze verticali dH fra il centro del cerchio zenitale ed i detti punti, si misurano generalmente sul terreno in seguito alla misura degli angoli orizzontali. I risultati di queste misure si marcano nell'ultima colonna dei registri del numero 247.

Allorquando si adopera un teodolite concentrico o un teodolite eccentrico i cui circoli zenitali hanno quattro numerazioni, una per ciascun quadrante, e che due a due ammettono un zero comune, se lo strumento è ben rettificato, collimando ai due punti S e D si leggono le due distanze zenitali e si marcano nell'ultima colonna del primo o del terzo registro del citato numero 247 sotto le indicazioni z_s e z_d. Se invece il cerchio zenitale non è ben rettificato, per ciascuno dei punti S e D si fanno le due osservazioni δ_s' e δ_d' col cannocchiale diretto, δ_s'' e δ_d'' col cannocchiale inverso, e si prendono le due medie

$$\frac{\delta_s'+\delta_s''}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\delta_d'+\delta_d''}{2},$$

le quali rappresentano i numeri da marcarsi nell'ultima colonna di seguito alle indicazioni z_d e z_s, come si vede nel secondo registro.

Quando la misura degli angoli si fa con un teodolite eccentrico, nei quali la numerazione del cerchio zenitale procede generalmente sull'intiera circonferenza da 0° a 360° e da dritta a sinistra (quando il detto cerchio si suppone orizzontale e l'osservatore posto dalla parte dello zero), col cannocchiale a destra e collimando ai due punti S e D, si fanno sul circolo zenitale le due letture δ_s' e δ_d', col cannocchiale a sinistra si fanno sugli stessi punti le due letture δ_s'' e δ_d''. Per quanto si è detto nel numero precedente, le distanze zenitali z_s e z_d rispettivamente corrispondenti al punto S e D, sono

$$z_s=\frac{\delta_s'+360^\circ-\delta_s''}{2}=180^\circ+\frac{1}{2}\delta_s'-\frac{1}{2}\delta_s'',$$

e

$$z_d = \frac{\delta_d' + 360^\circ - \delta_d''}{2} = 180^\circ + \frac{1}{2}\delta_d' - \frac{1}{2}\delta_d'',$$

e, unitamente ai dati che servono a trovarle, s'inscrivono nell'ultima colonna del quarto registro.

ARTICOLO III.

Determinazione delle ordinate dei punti trigonometrici.

281. Coefficiente di rifrazione. — Siano A e B (*fig.* 362) due punti della superficie terrestre, AC l'intersezione della superficie di livello passante per A col piano verticale da essi determinato, $\overline{AD} = K$ la tangente all'accennata curva o orizzontale in A, O il centro della terra.

Se si fanno due operazioni reciproche e simultanee misurando le due distanze zenitali z e z', la prima in A e l'altra in B, i due angoli di rifrazione BAE ed ABF sono sensibilmente eguali e, indicandoli colla lettera r, si avrà dal triangolo ABO, sostituendo alla traiettoria AB la sua corda;

$$z + r = O + OBA,$$

ossia

$$z + r = O + 180^\circ - z' - r,$$

dalla quale, ricavando r, si ha

$$r = \frac{1}{2}O - \frac{1}{2}(z + z' - 180^\circ) \qquad (1).$$

L'angolo O che entra in questa formola si deduce dal triangolo rettangolo DAO, ponendo

$$\operatorname{tang} O = \frac{K}{R}.$$

Quest'angolo O, essendo sempre piccolissimo, si può sostituire la lunghezza del piccolo arco che lo chiude alla sua tangente, per modo che, volendone l'ampiezza in minuti secondi, si avrà

$$O = \frac{K}{R \operatorname{sen} 1''}.$$

Una serie d'accurate osservazioni, eseguite in Francia per diversi valori cogniti di O, diedero un rapporto costante dell'angolo r all'angolo O poco differente da 0,08, per cui si potrebbe ritenere $r=0,080$. A rigor di termini però, il coefficiente di rifrazione non è dappertutto 0,08; le variazioni che prova l'atmosfera nei suoi varii strati lo cangiano notevolmente, per cui generalmente converrà porre $r=n\mathrm{O}$, essendo n un coefficiente che conviene alle circostanze atmosferiche della località in cui si opera, e da determinarsi trovando prima r colle norme date qui sopra.

282. **Formole per calcolare le differenze di livello dei punti trigonometrici.** — Siano A e B due punti della superficie terrestre; l'arco AC rappresenti l'intersezione del piano verticale da essi determinato colla superficie di livello passante per A (*fig.* 363); ed O ne sia il centro di curvatura. La differenza di livello fra gli accennati punti sarà $\overline{\mathrm{BC}}=d\mathrm{L}$; e, immaginando per A la corda $\overline{\mathrm{AC}}=\mathrm{K}$ (sensibilmente eguale a quel lato della rete trigonometrica che unisce A con B), la traiettoria AB descritta dal raggio luminoso e la tangente AE, si avrà

$$d\mathrm{L}=\mathrm{K}\,\frac{\operatorname{sen}\mathrm{BAC}}{\operatorname{sen}\mathrm{ABC}} \qquad (1).$$

Chiamando z la distanza zenitale ZAE, r l'angolo di rifrazione EAB, ed O l'angolo delle due verticali OA, OB, si trova

$$\mathrm{BAC}=180^\circ-z-r-\mathrm{CAO}$$

$$=180^\circ-z-r-(90^\circ-\tfrac{1}{2}\mathrm{O})=90^\circ-z-r+\tfrac{1}{2}\mathrm{O}.$$

Conducendo poi la retta AF parallela ad OZ′, si deduce

$$\mathrm{ABC}=\mathrm{FAB}=\mathrm{BAZ}-\mathrm{FAZ}=\mathrm{BAZ}-\mathrm{O}=z+r-\mathrm{O}.$$

Sostituendo questi valori di BAC e di ABC nell'espressione (1), si conchiude

$$d\mathrm{L}=\mathrm{K}\,\frac{\cos(z+r-\frac{1}{2}\mathrm{O})}{\operatorname{sen}(z+r-\mathrm{O})} \qquad (2).$$

Se dai punti A e B (*fig.* 362) vennero fatte delle osservazioni reciproche, colla sostituzione del valore di r ricavato dall'equazione (1) del numero 281, si potrebbe derivare dalla formola (2) quest'altra

$$dL=K\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(z'-z)}{\cos\frac{1}{2}(z'-z+O)} \qquad (3).$$

La picciolezza dell'angolo di rifrazione r e dell'angolo O permette di dedurre dalla formola (2) altre espressioni più semplici della differenza di livello fra due punti trigonometrici. Essendo l'angolo $(z+r-O)$ molto vicino a 90°, il suo seno subisce delle variazioni insensibili per un piccolo cangiamento avvenuto nell'angolo medesimo, per cui, ponendo $\frac{1}{2}O$ invece di O al denominatore dell'indicata equazione (2), si avrà con molta approssimazione

$$dL=K\cot(z+r-\tfrac{1}{2}O) \qquad (4).$$

Quest'ultima equazione, scritta sotto la forma

$$dL=K\cot[(z-\tfrac{1}{2}O)+r],$$

conduce a

$$dL=K\frac{1-\operatorname{tang}(z-\frac{1}{2}O)\operatorname{tang}r}{\operatorname{tang}(z-\frac{1}{2}O)+\operatorname{tang}r},$$

la quale facilmente si trasforma in

$$dL=K\cot(z-\tfrac{1}{2}O)\,\frac{1-\operatorname{tang}(z-\frac{1}{2}O)\operatorname{tang}r}{1+\cot(z-\frac{1}{2}O)\operatorname{tang}r}.$$

Sviluppando in serie $\dfrac{1}{1+\cot(z-\frac{1}{2}O)\operatorname{tang}r}$ e trascurando le potenze di tang r superiori alla prima, si deduce

$$dL = K\cot(z-\tfrac{1}{2}O)\left[1-\tang r\left\{\tang(z-\tfrac{1}{2}O)+\cot(z-\tfrac{1}{2}O)\right\}\right],$$

la quale facilmente si trasforma in

$$dL = K\cot(z-\tfrac{1}{2}O)\left\{1-\frac{\tang r}{\operatorname{sen}(z-\frac{1}{2}O)\cos(z-\frac{1}{2}O)}\right\},$$

o ancora, effettuando la moltiplicazione e semplificando

$$dL = K\cot(z-\tfrac{1}{2}O)-K\frac{\tang r}{\operatorname{sen}^2(z-\frac{1}{2}O)}.$$

Per essere l'angolo $\frac{1}{2}O$ piccolissimo si possono applicare a

$$K\cot(z-\tfrac{1}{2}O)$$

le trasformazioni già applicate a

$$K\cot[(z-\tfrac{1}{2}O)+r],$$

e dedurre quindi

$$dL = K\cot z+K\frac{\tang\frac{1}{2}O}{\operatorname{sen}^2 z}-K\frac{\tang r}{\operatorname{sen}^2(z-\frac{1}{2}O)} \quad (5).$$

Sostituendo a tang r e a tang $\frac{1}{2}O$ le lunghezze dei rispettivi archi piccolissimi $r = nO = \frac{nK}{R}$, e $\frac{1}{2}O = \frac{K}{2R}$ (essendo R il raggio terrestre), e osservando che con molta approssimazione

$$\operatorname{sen}^2 z = \operatorname{sen}^2(z-\tfrac{1}{2}O) = 1,$$

si deduce finalmente

$$dL = K\cot z + \frac{K^2}{2R} - \frac{nK^2}{R} \qquad (6).$$

Le formole (2), (3), (4), (5) e (6) sono altrettante espressioni diverse della differenza di livello fra due punti trigonometrici. La formola (6) è quella comunemente usata nelle operazioni topografiche. Se si considera il triangolo EAD (*fig.* 363) come rettangolo in D, il triangolo DAC come rettangolo in C, il triangolo EAB come rettangolo in B, e se si ritengono come eguali a K le lunghezze delle linee $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$, è facile il riconoscere che il primo termine $K\cot z$ vale la differenza di livello $\overline{ED}$ fra i due punti A e B, quando si supponga piana la superficie terrestre e si trascuri l'errore di rifrazione; che il secondo termine $\frac{K^2}{2R}$ esprime la correzione $\overline{CD}$ dovuta alla sfericità, e che il terzo termine $\frac{nK^2}{R}$ esprime la correzione $\overline{BE}$ dovuta alla rifrazione.

Ponendo nell'equazione (6)

$$\frac{\frac{1}{2} - n}{R} = q,$$

si deduce

$$dL = K\cot z + qK^2 \qquad (7).$$

Nelle grandi livellazioni topografiche i punti di mira sono generalmente i vertici stessi delle reti trigonometriche, determinati da segnali molto elevati, e di tal natura da non potersi misurare le distanze zenitali collocando in essi il centro dello strumento. Da questa disposizione di cose consegue la necessità di una prima correzione da farsi alla formola (7), introducendo la distanza, nel senso verticale, fra il centro dello strumento e la sommità del segnale che vuol essere il vero vertice della distanza zenitale. Supponendo che il centro dello strumento sia in D al di sotto di A (*fig.* 364), che BE sia la verticale del punto B, AC e DE due linee di livello passanti l'una per A e l'altra pel centro D dello strumento, l'applicazione della formola (7) darebbe la quantità $\overline{BE}$ invece di $\overline{BC}$, per cui, chiamando dH la distanza fra il centro dello strumento e la sommità del segnale, convien trasformare la formola (7) in

$$dL = K \cot z + qK^2 - dH \qquad (8).$$

Se il centro dello strumento è più alto del punto che devesi prendere come vertice della distanza zenitale, si assume dH non più come positiva, ma sibbene come negativa. Un tal caso si presenta per tutti i punti trigonometrici determinati sulla superficie del suolo, e nei quali si può far stazione; il dH si riduce allora alla sola altezza del centro del cerchio zenitale sul terreno.

283. **Formole pel calcolo delle altitudini dei punti trigonometrici.** — Se voglionsi le altezze dei punti trigonometrici al di sopra di una superficie di paragone, di cui suppongo che PQ (*fig.* 363) sia la linea di livello contenuta nel piano verticale AOB, chiamando H ed H′ le rispettive altitudini dei punti A e B al di sopra della medesima, si avrà la relazione

$$H' = H + dL.$$

Questa formola può servire a due usi: 1° a calcolare l'altezza assoluta del punto osservato, quando si conosce quella del punto dal quale si osserva; 2° a calcolare l'altezza del punto da cui si osserva, quando si conosce quella del punto osservato. Ricavando successivamente dall'ultima accennata formola H′ ed H col porvi il valore di dL somministrato dall'equazione (8) del numero precedente, si ha

$$H' = H + (K \cot z + qK^2 - dH) \qquad (1),$$

$$H = H' - (K \cot z + qK^2 - dH) \qquad (2).$$

284. **Procedimento pratico pel calcolo delle altitudini dei punti trigonometrici.** — Per il calcolo delle altezze assolute s'incomincia dal fissare quella del punto principale 1 (*fig.* 316) della rete, prendendola tale che la superficie di livello così determinata passi al di sotto di tutti gli altri punti. Partendo dall'altezza così stabilita, si possono avere coll'applicazione della formola (1) quelle dei vertici 3, 4, 5 ecc., cui si è collimato dal punto 1. Colla formola (2) si possono calcolare una seconda volta le altezze dei medesimi punti 3, 4, 5 ecc., qualora da essi siansi misurate le distanze zenitali sul punto 1, e quindi verificare se il lavoro procede esatta-

mente e se le discrepanze non eccedono i limiti delle tolleranze ammissibili. Dopo di ciò si può prendere come punto di partenza un punto d'altezza già nota, per esempio il punto 3; calcolare le altezze di altri punti e continuare collo stesso procedimento finchè abbiansi le altitudini di tutti i vertici della rete. Se nel prendere le distanze zenitali si sono sempre fatte delle osservazioni reciproche, l'altezza di ciascun punto si può calcolare coll'applicazione della formola (1) e coll'applicazione della formola (2); e in generale l'altezza di un medesimo punto si può ottenere applicando tante volte la formola (1) quante sono le distanze zenitali prese da punti diversi su quello che si considera, e tante volte la formola (2) quante sono le distanze zenitali prese dal punto che si considera su altri punti diversi.

Per eseguire ordinatamente il calcolo delle altitudini può valere un registro come quello che immediatamente segue:

INDICAZIONE DEI PUNTI	DATI	DIFFERENZE DI LIVELLO			ALTEZZE ASSOLUTE
		$dL = K \cot z + q K^2 - dH$		$q = \frac{\frac{1}{2} - n}{R}$	
Punto d'altezza nota ( )	$K =$	$\log K =$	$2 \log K =$	$K \cot z =$	$H =$
	$z =$	$l \cot z =$	$\log q =$	$q K^2 =$	$dL =$
	$dH =$				$H' =$
		$l K \cot z =$	$l q K^2 =$		
	$K =$			$-dH =$	$H' =$
Punto d'altezza incognita ( )					$-dL =$
	$z =$				
	$dH =$			$dL =$	$H =$

Nella prima colonna s'inscrivono il punto d'altezza cognita e al di sotto il punto di cui vuolsi l'ordinata. Nella seconda colonna trovasi la distanza zenitale e la distanza verticale fra il centro dello strumento e la sommità del segnale; e siccome l'altitudine di un punto può essere determinata sia colla sua distanza zenitale letta al punto d'altitudine già cognita, sia colla distanza zenitale di quest'ultimo letta dal primo, la seconda colonna venne divisa con un tratto orizzontale; quando i dati sono quelli presi al punto d'altezza cognita, s'inscrivono al di sopra di questo tratto; e quando sono quelli presi al punto a determinarsi, s'inscrivono al di sotto. Nella terza colonna si ha l'andamento del calcolo della differenza di livello da trovarsi colla formola

$$dL = K \cot z + q K^2 - dH.$$

Il valore di dL, preso col segno somministrato dal calcolo e aggiunto o tolto all'altezza cognita, secondochè venne esso calcolato con dati presi dal punto di altitudine già determinata o con dati presi dal punto a fissarsi, dà l'altezza assoluta domandata da inscriversi nell'ultima colonna.

Determinate le lunghezze dei lati di una rete trigonometrica, trovate le coordinate dei vertici per rapporto alla meridiana ed alla perpendicolare, e calcolate le loro altitudini per rapporto ad una determinata superficie di paragone, sarà bene compilare un registro generale, da cui facilmente si possano desumere le rispettive posizioni dei diversi punti trigonometrici. Il modulo che qui vien dato

NUMERI d'ordine d'ogni vertice	DESCRIZIONE DEI VERTICI	DISTANZE DEI VERTICI		DISTANZE DALLA MERIDIANA		DISTANZE DALLA PERPENDICOLARE		ALTITUDINI	
		trovate	medie	trovate	medie	trovate	medie	trovate	medie

rappresenta un tale registro, e le intestazioni di ciascuna colonna indicano a sufficienza quanto vi si debba inscrivere per ogni punto trigonometrico.

285. **Calcolo dell'altezza di un punto dal quale si scopre il livello del mare.** — Sia A un punto della superficie terrestre da cui si scopre il livello del mare (*fig.* 365), e dal quale si può prendere la distanza zenitale $ZAD = z$. Essendo la visuale AD tangente alla superficie del mare e quindi perpendicolare al raggio CD, si avrà dal triangolo rettangolo ADC, quando si faccia $\overline{AB} = H$ e $\overline{DC} = \overline{BC} = R$,

$$H + R = \frac{R}{\operatorname{sen} DAC},$$

donde

$$H = R\frac{1 - \text{sen}\, DAC}{\text{sen}\, DAC};$$

siccome poi $DAC = 90° - C$, si avrà $\text{sen}\, DAC = \cos C$, per cui

$$H = R\frac{1 - \cos C}{\cos C}.$$

Osservando che

$$\frac{1 - \cos C}{\cos C} = \frac{2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}C}{\cos C} = \frac{2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}C\,\text{sen}\,C}{\cos C\,\text{sen}\,C} = \frac{\text{sen}^2\frac{1}{2}C\,\text{sen}\,C}{\cos C\,\text{sen}\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}$$

$$= \text{tang}\frac{1}{2}C\,\text{tang}\,C.$$

si avrà

$$H = R\,\text{tang}\frac{1}{2}C\,\text{tang}\,C.$$

Questa formola si può ancora semplificare, perchè, essendo la distanza zenitale presa in A poco diversa da 90°, e quindi essendo l'angolo C piccolissimo, si può porre con molta approssimazione $\frac{1}{2}\text{tang}\,C$ a luogo di $\text{tang}\frac{1}{2}C$, e quindi ricavare

$$H = \frac{1}{2}R\,\text{tang}^2 C \qquad (1).$$

A motivo della rifrazione, la vera distanza zenitale è $z + r$, essendo $r = nC$; e del triangolo ADC, dove $z + r = z + nC$ è l'angolo esterno, si ha

$$z + nC = 90° + C,$$

donde

$$C = \frac{z - 90°}{1 - n},$$

il qual valore messo nell'espressione (1) dà

$$H = \frac{1}{2} R \tan g^2 \frac{z - 90^\circ}{1 - n} \qquad (2).$$

Prendendo $R = 6366198^m$ e $n = 0,08$, si può colla formola (2) calcolare l'altezza di un punto per rapporto alla superficie del mare, conoscendosi la distanza zenitale z misurata da questo punto col collimare tangenzialmente alla superficie delle acque. Prendendo un tal punto come punto di partenza, si possono avere le altitudini di tutti gli altri vertici della rete, rapportate alla medesima superficie.

286. **Riduzione delle distanze zenitali al centro di stazione.** — Le formole stabilite pel calcolo delle altitudini dei punti trigonometrici suppongono che sia possibile di collocare il circolo zenitale col suo centro nella verticale di quel vertice della rete, che si deve considerare come vero punto di stazione; o almeno che si possa far stazione a poca distanza da questa verticale, perchè allora l'errore che si commette è trascurabile nei casi ordinarii della pratica. Quando però la distanza è grande, è necessario tenerne conto, e la formola conveniente si può dedurre colle seguenti considerazioni.

Sia A la sommità di un segnale determinante un punto trigonometrico; sia soltanto possibile fare stazione in un punto S (*fig.* 366), distante orizzontalmente da A di $\overline{aS} = r$; siasi misurata la distanza zenitale $ZSB = z$, e la proiezione orizzontale $aSC = y$ dell'angolo delle due visuali dirette l'una su A e l'altra su B. Se da a si abbassa una perpendicolare aP sulla SC, si ha

$$\overline{SP} = r \cos y.$$

Conducendo le due rette SB e PB, osservando che $BSP = 90^\circ - z$, che $\operatorname{sen} BSP = \cos z$ e che $\overline{BP}$ è sensibilmente eguale a K, cioè al lato della rete trigonometrica che unisce A con B, si trova

$$\operatorname{sen} SBP = \frac{r \cos y}{K} \cos z.$$

Sostituendo al seno SBP la lunghezza piccolissima del suo arco, ed esprimendone la sua ampiezza α in minuti secondi, si ha

$$\alpha = \frac{r \cos y \cos z}{\mathrm{K} \operatorname{sen} 1''}.$$

Immaginando ora la PQ parallela alla SB, nasce l'angolo BPQ $=$SBP, e avendosi ZSB$=$Z$_1$PB$+$BPQ, si potrà porre, facendo Z$_1$PB$= z'$,

$$z' = z - \alpha.$$

Da questo risultato si vede che α rappresenta ciò che bisogna togliere dalla distanza zenitale z per avere l'altra BPZ$_1 = z'$, che, atteso la piccolezza di $\overline{aP}$ in confronto di $\overline{Ca}$ e $\overline{CP}$, si può assumere come eguale alla distanza zenitale domandata Z$_2a$B, che sarebbesi misurata collocando il centro del circolo zenitale all'intersezione a della verticale passante per A col piano orizzontale passante per S.

287. Uso dei punti trigonometrici nel determinare le ordinate dei punti importanti del terreno. — Conosciute le altitudini dei punti trigonometrici per rapporto ad una medesima superficie di paragone, riesce agevole di prendere sul terreno, e all'atto stesso dell'operazione di rilevamento, le misure necessarie al calcolo delle ordinate di tutti quei punti che servono a dare una giusta idea della forma del terreno, ed a facilitare il tracciamento delle curve orizzontali. Per tale oggetto si userà dell'eclimetro, che generalmente trovasi annesso allo strumento impiegato per rilevare la planimetria, onde ottenere gli angoli di elevazione e di depressione o le distanze zenitali delle visuali, dirette dai diversi punti di stazione ai punti trigonometrici o ad altri punti importanti. Con tal procedimento avviene di dover calcolare o l'ordinata del punto di stazione da cui si è collimato ad un altro punto d'ordinata cognita, oppure di dover calcolare l'ordinata di un punto preso fuori della stazione. conoscendosi quella della stazione medesima. Se tali punti non sono molto discosti fra di loro, possono valere i procedimenti esposti ai numeri 193 e 194; e, qualora si usi la tavoletta per il rilevamento, si possono anche graficamente valutare le ordinate mediante la scala di riduzione. Ottenute le altitudini di tutti quei punti principali che servono a determinare i cangiamenti di pendenza, i luoghi rimarchevoli, le linee di displuvio e d'impluvio, si traccieranno sul piano le curve orizzontali, seguendo le norme esposte al numero 196.

PARTE QUARTA

CELERIMENSURA.

CAPITOLO I.

Nozioni generali.

288. **Spirito col quale si devono eseguire le moderne operazioni topografiche**. — Le operazioni topografiche, che sempre devono precedere lo studio dei progetti di qualche importanza, e soprattutto quelli di costruzioni stradali ed idrauliche, vengono eseguite per due precipui ed essenziali scopi: per arrivare alla perfetta conoscenza della superficie del terreno, sul quale le opere da progettarsi devono essere eseguite colla posizione, colla forma e colle dimensioni più convenienti sotto molteplici rapporti di comodità, di stabilità e di ben intesa economia; per definire le parti delle diverse proprietà fondiarie che, in seguito all'esecuzione delle opere stesse ed in conseguenza di eque indennizzazioni, devono rimanere occupate in modo stabile e senza alterazione. Per raggiungere il primo degli accennati scopi, evidentemente abbisogna un rilevamento planimetrico ed altimetrico delle località; e questa duplice operazione è pure necessaria per raggiungere il secondo, giacchè un semplice rilevamento planimetrico, oltre di essere insufficiente alla determinazione delle intersezioni delle opere progettate colla superficie del suolo sul quale si devono stabilire, non può tener conto di certe accidentalità e di molte circostanze che influiscono sul valore dei terreni occupati. Siccome poi è ormai divenuta una urgente necessità di pubblica economia la formazione di un catasto o censimento fon-

diario, che, oltre di essere un'espressione rappresentativa ed ubicativa, direttamente dedotta da misure prese sul terreno, soddisfi alla condizione di poter facilmente e chiaramente tener dietro a tutte le mutazioni tanto frequenti e tanto complicate della proprietà territoriale e di conservarne in perpetuo le tracce, senza che per nulla venga meno la primitiva esattezza, anche le operazioni topografiche per lo studio di lavori di pubblica e di privata utilità, in quanto si riferiscono ad occupazioni di terreni e quindi a mutamenti di possesso, dovranno essere eseguite in modo da poter comprovare in qualunque epoca il vero stato delle mutazioni avvenute, e riconoscere se tutto si conserva identico a quanto nel momento delle espropriazioni venne convenuto ed accettato.

Stabilito così come le operazioni topografiche per lo studio di progetti devono soddisfare alle condizioni, di dare la planimetria e l'altimetria delle località sulle quali le opere devono essere eseguite e di condurre a risultamenti mediante i quali, facilmente e sempre col medesimo grado di esattezza, sia possibile di riconoscere lo stato delle mutazioni avvenute, naturalmente si presenta la quistione di vedere come si possa raggiungere l'intento senza complicate e lunghe operazioni, ma sibbene con metodi semplici, quali altamente vengono richiesti dallo spirito dei tempi che in tutto esige facilità e speditezza.

Chi eseguisce le operazioni planimetriche indipendentemente dalle altimetriche, può soddisfare alla prima condizione di dare la planimetria e l'altimetria delle località; ma questo modo di procedere non sempre conduce ad ottenere quella perfetta corrispondenza che deve esistere fra l'una e l'altra operazione, e sovente si cade nell'inconveniente che i punti livellati non sono precisamente quelli rappresentati sul piano, se pur, con grave perdita di tempo, non si completa il rilevamento planimetrico nel mentre si eseguiscono le livellazioni. Chi poi si accontenta di ottenere come risultato delle sue operazioni planimetriche un semplice piano della località, ossia un semplice disegno in iscala delle varie linee divisorie e di quelle che marcano le principali accidentalità e particolarità del terreno, per nulla soddisfa alla seconda condizione. La scala ed il compasso, che sono i soli mezzi di cui conviene servirsi per dedurre numericamente quelle lunghezze che possono essere necessarie per accertare in epoche comunque lontane quali furono le vere mutazioni di proprietà avvenute all'atto dell'esecuzione delle opere, giammai conducono a risultamenti forniti di quel grado di esattezza che il rilevatore può ottenere nelle sue operazioni sul terreno; e lo stesso piano primitivo, soggetto a continue variazioni col cangiare delle condizioni igrometriche dell'atmosfera, non costituisce che un testimonio poco veritiero delle indicate mutazioni. Per ottenere che le operazioni planimetriche corrispondano perfettamente alle operazioni altimetriche, è necessario che esse vengano simultaneamente eseguite; per arrivare a risultamenti facili a mantenersi con quel grado d'esattezza che accuratamente si deve cercare nell'operare sul terreno, è indispensabile di conservare le diverse dimensioni che servono alla completa e rigorosa determinazione di tutte le accidentalità e particolarità che vennero considerate nell'eseguire i lavori di rilevamento; e questa conservazione di dimensioni, che a prima vista sembra operazione facile e di lieve momento, costituisce uno dei lavori topografici più delicati e più importanti.

Da alcuni venne proposto di eseguire le operazioni topografiche, seguendo le norme già state svolte nella seconda parte di questo volume, di costrurre i piani corrispondenti, e di marcare su questi tutte le dimensioni atte a determinare i diversi punti rilevati; da altri venne suggerito di scrivere le indicate dimensioni in appositi registri con opportune lettere o numeri di riferimento ai piani. Nè l'uno nè l'altro però di questi metodi fecero buona prova: il primo, riuscì inapplicabile ai territorii composti di numerose e piccole parcelle, per il numero stragrande delle quote di cui bisogna coprire i piani; il secondo non si mostrò suscettivo di pratiche applicazioni nei grandi rilevamenti, per la non uniformità dei metodi che generalmente si seguono nella determinazione dei varii punti. Questo però è di gran lunga migliore di quello, e riesce facile il comprendere come non possa a meno che condurre ad un'espressione facile e chiara di tutte le particolarità che si trovano alla superficie di un dato terreno, qualora nel determinare le posizioni dei diversi punti si segua un metodo uniforme impiegando elementi della medesima natura.

Ora, quali sono questi elementi della stessa natura che, in modo chiaro, facile e veramente praticabile, si prestano alla determinazione del grandissimo numero di punti che avviene di dover considerare in un'operazione topografica di qualche estensione? La risposta a questa domanda si presenta naturale e spontanea a chi conosce i primi elementi di geometria analitica, ed il più semplice dei metodi che vien seguito dai geometri per fissare le posizioni dei punti nello spazio. Si riferiscano diversi punti del terreno a tre assi coordinati ortogonali ben definiti, si cerchi di arrivare alla conoscenza delle distanze che essi hanno dai tre piani ortogonali determinati da questi assi, e si avrà così quanto si può immaginare di più facile e di più semplice per dare una rappresentazione precisa e ben definita dei diversi punti singolari che avviene di dover considerare in un'operazione topografica. Nell'intento poi di ben precisare questi assi coordinati si assumano: due di essi nel piano orizzontale condotto pel punto della superficie delle acque stagnanti, in cui questa è incontrata dalla verticale passante per un punto rimarchevole posto verso il mezzo dell'estensione di terreno che si considera; il terzo diretto secondo l'indicata verticale. Finalmente, per ben fissare le posizioni dei due assi ortogonali orizzontali, si prenda uno di essi nella direzione della meridiana passante pel detto punto rimarchevole. Con tal mezzo ciascuno dei punti del terreno viene planimetricamente determinato mediante le sue due coordinate x ed y per rapporto alla meridiana ed alla perpendicolare; e basta aggiungervi la sua distanza z dal piano orizzontale in cui trovansi i due primi assi, per ottenere la sua posizione altimetrica.

Una volta determinate le tre coordinate dei diversi punti che vennero considerati in un'operazione di rilevamento, si costruisca in una scala qualunque il piano corrispondente, e si marchino in apposito registro le dette coordinate, servendosi di appositi numeri o lettere per mettere questo in correlazione con quello.

Il piano parlerà agli occhi e metterà in evidenza le principali accidentalità del terreno, e sarà l'espressione rappresentativa delle sue particolarità; il registro delle coordinate darà l'espressione semplice, chiara, esatta ed ubicativa delle posizioni dei diversi punti, non che delle varie parcelle componenti la totale superficie rilevata, ed in pari tempo costituirà il mezzo atto a conservare in perpetuo e colla primitiva esattezza i risultamenti delle fatte operazioni.

289. **Definizione della celerimensura.** — Da quanto si è detto nel precedente numero risulta chiaramente come le moderne operazioni topografiche debbano essere eseguite collo scopo di determinare, pei diversi punti da rilevarsi, le tre coordinate x, y e z per rapporto a tre assi ortogonali ben definiti; e come per conseguenza la moderna topografia possa essere chiamata la scienza, il cui oggetto si riduce semplicemente ed unicamente a determinare, pei diversi punti di una porzione di terreno non estendentesi oltre i limiti stabiliti nel numero 5, le loro coordinate orizzontali x ed y per rapporto alla meridiana ed alla sua perpendicolare passante per la proiezione sulla superficie delle acque stagnanti di un punto rimarchevole sito verso il suo mezzo, non che la loro altezza per

rapporto al piano definito dagli accennati assi orizzontali. La moderna topografia poi si chiama *Celerimensura* per antonomasia, giacchè, come in seguito si vedrà, procede in tutte le sue operazioni con una speditezza superiore a ogni aspettazione, e che in nessun modo si può raggiungere cogli ordinarii metodi di rilevare e di livellare.

290. **Come si può arrivare alla risoluzione del problema costituente lo scopo della celerimensura** — Ben definito il problema che si propone la celerimensura, conviene pensare ai mezzi di risolverlo. Suppongasi perciò che O (*fig.* 567) sia un punto dato, che Ox, Oy ed Oz siano le direzioni di tre parallele alla meridiana, alla sua perpendicolare ed alla verticale passanti pel punto assunto come origine delle *coordinate definitive*, e che vogliansi determinare le tre *coordinate ausiliarie* $\overline{OQ}$, $\overline{QP} = \overline{OR}$ e $\overline{PM}$ del punto qualunque M per rapporto alle tre accennate direzioni.

Egli è evidente che generalmente il problema non può essere risolto colla misura diretta delle tre lunghezze $\overline{OQ}$, $\overline{QP}$ e $\overline{PM}$, sia perchè i tre assi coordinati, tuttochè completamente determinati per essere una sola la direzione meridiana, una sola la direzione a questa perpendicolare e una sola la verticale passanti per il punto rimarchevole della porzione di terreno al quale devonsi estendere le operazioni di rilevamento, non si possono materialmente tracciare; sia ancora perchè le accidentalità del suolo sono tali e tante che, anche ammessa la possibilità del materiale tracciamento degli indicati assi, non si vede in qual modo possa tornar possibile la determinazione delle richieste coordinate ausiliarie. È imperiosa necessità di prendere alcuni elementi legati a queste coordinate da facili relazioni geometriche, stabilire le equazioni che da tali relazioni risultano, e dedurre da queste equazioni le incognite, la cui determinazione costituisce lo scopo del problema. Ora, supponendo collocato nel punto O un goniometro munito di circolo graduato orizzontale e di circolo graduato verticale col centro di quest'ultimo circolo nel detto punto, ed immaginando nel punto M una stadia ossia un'asta verticale convenientemente graduata in parti eguali, si hanno gli elementi necessarii alla determinazione delle tre coordinate x, y e z del punto M quando coi detti strumenti, goniometro o stadia, si possano determinare; l'*angolo azimutale* POx, ossia l'angolo che il piano verticale passante pei due punti O ed M fa col piano verticale corrispondente alla direzione meridiana; la distanza zenitale BOz, ossia l'angolo che l'asse ottico del cannocchiale del goniometro fa colla verticale Oz sulla quale trovasi collocato il centro del circolo zenitale; il numero delle divisioni che si trovano nella parte di stadia $\overline{CD}$, la quale trovasi intercetta nell'angolo micrometrico COD, e la lunghezza della parte $\overline{MB}$ di stadia, che trovasi compresa fra il punto B in cui vien essa ferita dall'asse ottico del cannocchiale ed il suo piede M.

Infatti, chiamando

θ l'angolo azimutale POx,

φ la distanza zenitale BOz,

S tante unità lineari quante sono parti eguali nella parte di stadia $\overline{CD}$ la quale trovasi intercetta nell'angolo micrometrico,

A la parte $\overline{MB}$ di stadia che trovasi compresa fra il punto B, in cui vien essa ferita dall'asse ottico del cannocchiale, ed il suo piede M,

D la distanza orizzontale $\overline{OP}$ fra il punto O ed il punto M,

z la differenza di livello $\overline{PM}$ fra il punto O ed il punto M,

x ed y le altre due coordinate $\overline{OQ}$ e $\overline{QP}=\overline{OR}$ del punto M per rapporto agli assi orizzontali Ox ed Oy,

ecco come si arriva a stabilire fra i dati del problema e le incognite le relazioni che servono alla determinazione di queste ultime.

Per quanto si è detto nel numero 70 parlando dell'uso della stadia sui terreni inclinati e per essere l'angolo α, col quale in detto numero venne indicata l'inclinazione dell'asse ottico del cannocchiale all'orizzonte, complemento dell'angolo φ, si ha $\cos^2\alpha = \operatorname{sen}^2\varphi$ e quindi

$$D = S \operatorname{sen}^2\varphi \qquad (1);$$

la differenza di livello z fra il punto M ed il punto O, per essere la differenza fra il cateto $\overline{PB}$ del triangolo rettangolo BPO e l'altezza nota $\overline{MB} = A$, vien data da

$$z = D \cot\varphi - A \qquad (2);$$

e finalmente le due coordinate $\overline{OQ} = x$ e $\overline{QP} = \overline{OR} = y$, che sono i due cateti del triangolo rettangolo OQP, ammettono rispettivamente i valori

$$x = D \cos\theta \qquad (3),$$

$$y = D \operatorname{sen}\theta \qquad (4).$$

Le quantità θ, φ, A ed S, che per ciascun punto da rilevarsi si determinano sul terreno, si chiamano *numeri generatori* e, come chiaramente risulta dalle formole (1), (2), (3) e (4), servono essi a trovare la distanza orizzontale fra il centro del goniometro che si impiega per la loro determinazione ed il punto a cui si collima, non che le tre coordinate ausiliarie x, y e z per rapporto alla direzione meridiana, alla perpendicolare ed alla verticale passanti pel centro del circolo zenitale.

Contando gli angoli azimutali θ a partire dal nord e passando per l'ovest, per il sud e per l'est, possono essi prendere tutti i valori compresi fra zero e quattro retti, e quindi i coseni ed i seni corrispondenti, secondo che si riferiscono ad angoli che si trovano nell'uno o nell'altro dei quattro quadranti del circolo, possono assumere segni diversi. Per angoli compresi fra zero gradi ed un retto, la qual cosa avviene quando i punti a cui si riferiscono sono nella regione nord-ovest, sono positivi tanto il coseno quanto il seno e quindi tali sono pure le due coordinate x ed y. Per angoli compresi fra un retto e due retti, ciò che avviene quando trovansi nella regione sud-ovest i punti corrispondenti, sono negativi i coseni e positivi i seni, per cui risultano negativi i valori delle ascisse x e positivi quelli delle ordinate y. Per angoli compresi fra due retti e tre retti, riferentisi, cioè, a punti posti nella regione sud-est, tanto i coseni quanto i seni sono negativi, e per conseguenza i valori delle due coordinate x ed y risultano pure negativi. Finalmente per angoli che variano fra tre retti e quattro retti sono positivi i coseni, negativi i seni; tutti i punti a cui tali angoli si riferiscono, trovansi nella regione nord-est; allora le ascisse x risultano positive e negative le ordinate y.

In quanto all'angolo φ può esso avere valori minori di un retto, oppure valori compresi fra un retto e due retti. Nel primo caso è positivo il valore della sua cotangente, negativo invece nel secondo caso; e quindi il valore dell'ordinata z risulta positivo quando φ è minore di un retto e quando contemporaneamente il prodotto $D \cot \varphi$ risulta maggiore di A, negativo quando, essendo φ minore di un retto, si ha $D \cot \varphi$ minore di A, e quando φ è compreso fra un angolo retto e due angoli retti.

Se tutti i punti che occorre di determinare per una data operazione di rilevamento si trovassero in tali condizioni da potersi per ciascuno di essi ottenere i numeri generatori con un goniometro posto col suo asse nella verticale di quel punto rimarchevole fisso ed inamovibile, reale o fittizio che si vuol prendere come origine delle coordinate definitive, la calcolazione di queste non presenterebbe difficoltà. Mediante le formole (1), (2), (3) e (4) riesce infatti possibile calcolare le coordinate ausiliarie di ciascuno dei punti per cui vennero determinati i numeri generatori, le coordinate orizzontali x ed y, che così si ottengono, sono evidentemente quelle la cui ricerca costituisce lo scopo della celerimensura; tali si riducono le ordinate verticali z quando ad esse aggiungasi la distanza fra il centro del circolo zenitale e la detta origine.

Generalmente però non è possibile di poter collimare a tutti i punti da rilevarsi col goniometro posto col suo asse nella verticale dell'origine delle coordinate definitive; quasi sempre sono necessarie più stazioni, e ciò che facilmente si può fare consiste nello stabilimento di linee spezzate che colleghino con questo punto quelli da rilevarsi, ed i cui vertici siano punti di stazione oppure alternativamente punti di stazione e punti rilevati. Facendo in modo che le operazioni eseguite nelle diverse stazioni non risultino indipendenti le une dalle altre, ma sibbene che convenientemente si trovino fra loro connesse, riesce facile il determinare le coordinate definitive dei varii punti rilevati quando siansi calcolate le coordinate ausiliarie degli stessi punti.

Supponigasi perciò che sia A (*fig.* 368) il punto preso come origine delle coordinate definitive, che $A A' A'' A''' A^{\text{IV}}$..... sia una linea spezzata la quale passa pel punto A e che siano x', y' e z' le coordinate del punto A' per rapporto all'origine A ed agli assi AX, AY ed AZ; x'', y'' e z'' le coordinate ausiliarie di A'' per rapporto all'origine A' e ad assi rispettivamente paralleli ad AX, AY ed AZ; x''', y''' e z''' le coordinate ausiliarie di A''' per rapporto all'origine A'' e ad assi sempre paralleli a quelli AX, AY ed AZ delle coordinate definitive, e così di seguito fino al puuto $A^{(n)}$ pel quale si indicano con $x^{(n)}$, $y^{(n)}$ e $z^{(n)}$ le coordinate ausiliarie per rapporto all'origine $A^{(n-1)}$ e ad assi ancora paralleli ad AX, AY ed AZ. Chiamando X, Y e Z le tre coordinate definitive del vertice qualunque $A^{(n)}$ della linea spezzata riferita all'origine A ed agli assi AX, AY ed AZ ed indicando rispettivamente con Σx, Σy e Σz le tre somme $x'+x''+x'''+x^{\text{IV}}+ \ldots\ldots + x^{(n-1)}+x^{(n)}$, $y'+y''+y'''+y^{\text{IV}}+\ldots\ldots+y^{(n-1)}+y^{(n)}$, $z'+z''+z'''+z^{\text{IV}}+\ldots\ldots+z^{(n-1)}+z^{(n)}$, si hanno le equazioni

$$\left.\begin{aligned} X &= \Sigma x \\ Y &= \Sigma y \\ Z &= \Sigma z \end{aligned}\right\} \quad (5).$$

Nell'applicare queste formole, evidentemente bisogna aver riguardo ai segni delle coordinate ausiliarie x', x'', x''', x^{iv}......., $x^{(n-1)}$ e $x^{(n)}$......., y', y'', y''', y^{iv}........ $y^{(n-1)}$ ed $y^{(n)}$, z', z'', z''', z^{iv}....., z^{n-1} e $z^{(n)}$, le quali a seconda dei valori degli angoli θ e φ possono risultare positivi o negativi.

CAPITOLO II.

Strumenti ed operazioni di celerimensura.

ARTICOLO I.

Strumenti per la misura degli angoli e delle distanze.

291. Goniometri per le operazioni di celerimensura. — I goniometri da impiegarsi nelle operazioni di celerimensura, come chiaramente risulta da quanto si è detto nel precedente numero, devono essere muniti di un apparecchio magnetico e di un circolo detto *circolo azimutale*, disposti in modo da poter leggere su quest'ultimo gli angoli che i piani verticali passanti pel centro dello strumento e pei punti da rilevarsi fanno colle direzioni meridiane corrispondenti ai punti di stazione; di un circolo chiamato *circolo zenitale* per misurare le distanze zenitali, ossia gli angoli delle diverse visuali colle verticali passanti pel centro dello strumento, e di un cannocchiale con fili micrometrici. All'uso di questi goniometri deve poi essere annesso quello di una stadia, graduata in modo che le sue divisioni si prestino a valutare in metri, decimetri e centimetri l'altezza A del punto in cui essa viene ferita dall'asse ottico del cannocchiale dal punto del terreno nel quale trovasi verticalmente disposta, e tali che un certo numero di esse rappresenti quante volte una data frazione di metro è contenuta nella distanza che esiste fra l'asse di rotazione del cannocchiale e la stadia, quando si supponga orizzontale l'asse ottico di quello e verticale questa.

Segue da ciò che possono servire nelle operazioni di celerimensura: le bussole topografiche declinate (num. 103) con eclimetro e con cannocchiale munito di fili micrometrici per le letture sulla stadia; i circoli aventi cerchi graduati per misurare gli angoli orizzontali e le distanze zenitali e forniti di ago calamitato, non che di cannocchiale con micrometro per la misura delle distanze. Se però si vuole esattezza sufficiente nei risultati che si possono ottenere con questi strumenti, è necessario che le distanze non si trovino affette dall'errore che deriva dalla variabilità dell'angolo micrometrico aOb (*fig.* 54), e si raggiunge lo scopo facendo uso del cannocchiale *anallatico*, che costituisce uno dei più ingegnosi e dei più utili ritrovati del professore Porro.

292. **Cannocchiale anallatico e sua applicazione alla stadia.** — Sia DE (*fig.* 369) l'asse ottico di un cannocchiale, O il suo obbiettivo, ab la posizione del micrometro la quale corrisponde alla distanza CE fra il centro dell'obbiettivo ed un'asta GH disposta perpendicolarmente a DE, ed F il fuoco principale anteriore dell'obbiettivo stesso. Qualunque sia la distanza del micrometro della lente O, i raggi an e bn' paralleli all'asse ottico convergeranno verso il fuoco F, dopo essersi rifatti l'uno in n ed m, l'altro in n' ed m'; l'angolo mFm' si conserverà costantemente lo stesso per tutte le posizioni ab, $a'b'$, $a''b''$,...... del micrometro; e lo stesso avverrà pel suo opposto al vertice AFB: segue da ciò che chiamando

h la distanza $\overline{ab}$ fra i due fili del micrometro,

H l'altezza $\overline{AB}$ dell'asta o stadia, la cui immagine è compresa fra i detti due fili,

d la distanza del centro C dell'obbiettivo dall'asse di rotazione del cannocchiale,

D′ la distanza $\overline{EF}$,

F la distanza focale principale $\overline{CF}$,

si ha dai due triangoli simili AFB e mFm'

$$D' = \frac{\overline{Fc}}{\overline{mm'}} H,$$

Atteso la piccola grossezza della lente O, con grandissima approssimazione si possono assumere le lunghezze $\overline{Fc}$ ed $\overline{mm'}$ siccome eguali rispettivamente ad F e ad h, per cui il valore di D′ si riduce a

$$D' = \frac{F}{h} H.$$

Supponendo ora che sulla stadia dividasi la lunghezza del metro in $\frac{F}{h}$ parti eguali, nell'altezza H saranno comprese $\frac{F}{h}H$ divisioni, il cui numero si può indicare con S, e la distanza D′ viene data dal numero S espresso in metri.

Questo risultato ci porta a conchiudere, come già si è trovato al numero 68: che per graduare una stadia si deve cercare l'esatto rapporto fra la distanza focale e quella dei fili, e dividere la lunghezza del metro, portata sull'asta, in tante parti eguali quante sono unità nell'accennato rapporto; che, suddividendo ciascuna delle parti così ottenute sull'asta in due, quattro, cinque..... parti eguali, ciascuna di queste suddivisioni rappresenta nella valutazione delle distanze metà, quarti, quinti..... di metro; e che, nell'intento di ottenere che ogni divisione della stadia sia un numero esatto di centimetri, conviene assumere h in modo che il rapporto $\frac{F}{h}$ sia un sottomultiplo di 100.

Siccome poi nelle operazioni di celerimensura non è la distanza D′ del fuoco anteriore F dell'obbiettivo dalla stadia che si cerca, ma sibbene la distanza di questa dal centro dello strumento, ne risulta che alla distanza D′, la quale immediatamente si deduce dalla lettura sulla stadia, bisogna aggiungere la distanza focale F aumentata della distanza d dell'obbiettivo dall'asse di rotazione del cannocchiale quando questo è orizzontale: che, quando il cannocchiale è disposto in modo da fare un angolo φ colla verticale, il prodotto $S\,sen^2\varphi$ (num. 290) rappresenta la distanza orizzontale del fuoco anteriore F dell'obbiettivo dal punto in cui trovasi la stadia; e che quindi, per avere la distanza orizzontale di questo punto dal centro dello strumento, bisogna aggiungere alla distanza dedotta dal detto prodotto la lunghezza $(F+d)\,sen\,\varphi$, esprimente la proiezione orizzontale della distanza che esiste fra il fuoco anteriore dell'obbiettivo e l'asse di rotazione del cannocchiale, quando questo è inclinato in modo da fare il suo asse ottico un angolo φ colla verticale. Essendo nota la lunghezza $F+d$ per un dato cannocchiale, si può calcolare una tabella del prodotto $(F+d)\,sen\,\varphi$ per varii valori che può assumere l'angolo φ, onde aver questi valori in pronto ed aggiungerli alla distanza orizzontale a cui conduce il prodotto $S\,sen^2\varphi$. Questo metodo però, in quanto esige le due operazioni di leggere in una tabella e di fare un'addizione, non deve essere adottato in celerimensura, se pur è possibile di schivare le due indicate operazioni, tuttochè spedite e della massima semplicità.

Il professore Porro, il quale indicò il punto F col nome di *punto anallatico*, felicemente trovò il mezzo di ottenere che la lettura S fatta sulla stadia, moltiplicata per il quadrato del seno della distanza zenitale φ letta sul circolo zenitale del goniometro che vuolsi impiegare per misurare gli angoli, rappresenti la distanza orizzontale del centro di questo strumento dal punto in cui la stadia venne collocata; e per raggiungere l'intento immaginò di ottenere un altro punto anallatico nell'intersezione dell'asse ottico del cannocchiale col suo asse di rotazione. Perciò egli pose nell'interno del cannocchiale una lente convergente P (*fig.* 370) fissa per rapporto all'obbiettivo O. Essendo G il fuoco della lente P, I l'intersezione dell'asse ottico del cannocchiale col suo asse di rotazione ed ab la posizione del micrometro, qualunque sia la distanza del micrometro dalla lente P, i raggi ap e bq paralleli all'asse ottico DC convergono al fuoco G, dopo essersi rifratti l'uno in p ed r, l'altro in q ed s; continuando il loro cammino si rifrangono nuovamente all'incontro dell'obbiettivo in t e v il primo, in u ed x il secondo; e finalmente secondo le direzioni rettilinee vA ed xB vanno a limitare la parte $\overline{AB}$ di stadia, la cui immagine trovasi intercetta fra i fili micrometrici. Ora, se la posizione della lente P è tale che nel punto I vengano a passare i prolungamenti delle due rette Av e Bx, egli è evidente che l'angolo AIB si conserva costante qualunque sia la posizione del micrometro.

Ciò premesso, indicando con

δ la distanza $\overline{HC}$ fra il centro dell'obbiettivo O e quello della lente P,

p la distanza $\overline{CI}$ del centro C dell'obbiettivo dall'intersezione I dell'asse ottico del cannocchiale coll'asse di rotazione,

q la distanza focale principale $\overline{HG}$ della lente P,

F la distanza focale principale dell'obbiettivo O,

la formola (2) del numero 68, la quale costituisce il fondamento di quella parte dell'ottica che considera i fenomeni della luce rifratta nel suo passaggio attraverso le lenti, per essere i due punti I e G due fuochi coniugati dell'obbiettivo e per essere nel caso particolare che si considera

$$d=\delta-q \quad \text{e} \quad D=-p,$$

diventa

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{\delta-q}-\frac{1}{p} \qquad (1).$$

Da questa formola si deduce

$$\frac{1}{\delta-q}=\frac{p+\mathrm{F}}{p\mathrm{F}},$$

e quindi

$$q=\delta-\frac{p\mathrm{F}}{p+\mathrm{F}} \qquad (2),$$

cosicchè, essendo date tre delle lunghezze δ, p, q ed F, riesce facile il determinare la quarta.

Chiamando ora α l'angolo AIB del triangolo isoscele $v\mathrm{I}x$, in cui si può ritenere siccome eguale a $\overline{\mathrm{CI}}=p$ l'altezza e siccome eguale a $\overline{tu}$ la base, immediatamente si deduce

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha=\frac{\overline{ct}}{p};$$

e siccome dai due triangoli simili Gtu e Grs, si ha

$$2\overline{ct}=\overline{tu}=\frac{\overline{sr}}{\overline{\mathrm{G}e}}\,\overline{\mathrm{G}c},$$

per essere con moltissima approssimazione

$$\overline{\mathrm{G}e}=\overline{\mathrm{GH}}=q, \qquad \overline{\mathrm{G}c}=\overline{\mathrm{GC}}=\delta-q,$$

e per potersi assumere la distanza $\overline{ab}=h$ fra i fili micrometrici siccome rappresentante la lunghezza $\overline{sr}$, il valore di $\overline{ct}$ vien dato da

$$\overline{ct}=\frac{h(\delta-q)}{2q}.$$

Questo valore di $\overline{ct}$, posto nella stabilita equazione determinatrice dell'angolo α, conduce all'equazione

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha=\frac{h(\delta-q)}{2pq} \qquad (3),$$

la quale è una prova della costanza dell'angolo AIB$=\alpha$, giacchè la tangente della sua metà è indipendente dalla distanza fra il punto I e la stadia, ossia dalla posizione di quest'ultima.

Affinchè sia possibile soddisfare alla condizione espressa dell'equazione (5), è necessario che esistano certe relazioni di grandezza fra i dati del problema. Il valore di F dato dall'equazione (1) deve sempre essere positivo e quindi il rapporto $\frac{1}{\delta - q}$ deve essere maggiore del rapporto $\frac{1}{p}$. Ma il punto I, intersezione fra l'asse ottico del cannocchiale ed il suo asse di rotazione, è posto verso il mezzo della lunghezza dell'asse del cannocchiale medesimo, cosicchè p è sensibilmente la metà di δ. Segue da ciò che si deve avere l'ineguaglianza

$$\frac{1}{\delta - q} > \frac{2}{\delta},$$

d'onde

$$2q > \delta$$

e

$$q > \frac{\delta}{2}.$$

Una volta determinata la tangente dell'angolo $\frac{1}{2}\alpha$ mediante l'equazione (5), riesce facile stabilire la relazione che deve esistere fra la distanza $\overline{\mathrm{IE}} = \mathrm{D}$ della stadia dall'asse di rotazione del cannocchiale e la lunghezza H di quella parte $\overline{\mathrm{AB}}$ della stadia medesima la cui immagine resta intercetta fra i fili micrometrici; giacchè immediatamente si deduce dal triangolo rettangolo A I E

$$\mathrm{D} = \frac{1}{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha} \mathrm{H}.$$

Volendosi ora graduare la stadia, si divida su essa l'unità di lunghezza che vuolsi impiegare per valutare la distanza D in tante parti uguali quante sono unità nel rapporto $\frac{1}{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha}$; nella parte di stadia lunga H si troveranno allora comprese $\frac{1}{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha}$ H divisioni il cui numero si può indicare con S, e la distanza D contiene S unità lineari. Suddividendo ciascuna delle parti così ottenute sulla stadia in due, quattro, cinque, ... parti eguali, ciascuna di queste suddivisioni rappresenta nella valutazione delle distanze una metà, un quarto, un quinto, ... di unità. Siccome poi l'unità da impiegarsi nella valutazione delle distanze è il metro, sarà questa lunghezza che verrà divisa sulla stadia in tante parti eguali quante sono unità nel rapporto $\frac{1}{2\tan\frac{1}{2}\alpha}$; e per ottenere che ciascuna di queste parti sia un numero esatto di centimetri, nel prendere i dati numerici che entrano nel valore di $\tan\frac{1}{2}\alpha$, bisogna procurare che l'accennato rapporto sia un sotto multiplo di 100.

Se invece delle distanze della stadia dall'asse di rotazione del cannocchiale, si volessero le distanze della stadia dal centro ottico dell'obbiettivo, bisognerebbe disporre le cose in modo da coincidere col centro ottico C dell'obbiettivo il fuoco principale della lente P. Allora, qualunque sia la distanza del micrometro ab dalla lente P, i raggi ap e bq (*fig.* 371) paralleli all'asse ottico DC convergono nel punto C dopo essersi rifratti l'uno in p ed r, l'altro in q ed s; senza subire rifrazione attraversano l'obbiettivo: secondo i prolungamenti di rC ed sC limitano sull'asta la parte $\overline{AB}$ la cui immagine trovasi intercetta fra i fili micrometrici; e, qualunque sia la distanza $\overline{CE}$ del centro dell'obbiettivo alla stadia, sempre l'angolo ACB si conserva della stessa ampiezza, siccome opposto al vertice dell'angolo rCs, il quale appartiene ad un triangolo isoscele la cui base è costantemente $\overline{rs}$ e la cui altezza è $\overline{Ce}$.

293. **Clepsciclo del Professore Porro**. — Fra tutti i goniometri che si possono impiegare per le operazioni di celerimensura, quello che meglio soddisfa alle esigenze di solidità, di comodità e di esattezza è indubitatamente il nuovo goniometro del professore Porro, da lui chiamato *Clepsciclo*, giacchè in questo strumento i due circoli azimutale e zenitale trovansi nascosti e rinchiusi entro un cubo di bronzo.

Le parti principali del Clepsciclo, per brevità detto anche *Cleps*, di cui nella figura 372 si ha una proiezione su un piano verticale parallelo a quello determinato dall'asse A B dello strumento e dall'asse ottico A′B′ del cannocchiale, quando tanto l'uno quanto l'altro degli accennati due assi sono verticali e quando il piano da essi determinato è diretto secondo la lunghezza della piastra P, costituente la base mediante la quale lo strumento vien posto sulla testa del suo trepiede, si riducono: 1° al cavalletto a trepiedi destinato a portare tutto lo strumento; 2° alla piastra, la quale serve per collocare lo strumento sul cavalletto; 3° a due livelli sferici che servono ad indicare quando lo strumento trovasi in istato d'azione; 4° a due circoli disposti in due piani fra loro perpendicolari, uno per la misura degli angoli azimutali, l'altro per la misura delle distanze zenitali e rinchiusi in un cubo di bronzo; 5° all'apparecchio magnetico sospeso, in corrispondenza del centro del circolo azimutale, ad un lungo e finissimo filo di seta, il quale attraversa il sostegno S; 6° al cannocchiale il cui asse di rotazione passa pel centro del circolo zenitale in direzione normale al circolo medesimo. Oltre queste parti che si possono dire le essenziali, molte altre ve ne sono indispensabili per l'uso dello strumento, e di cui si parlerà procedendo nella descrizione.

I clepscicli si costruiscono con differenti grandezze, le quali possono benissimo immaginarsi dalle lunghezze rispettive del loro cannocchiale. Quelli di prima grandezza hanno il cannocchiale lungo un metro; quelli di seconda grandezza hanno il cannocchiale colla lunghezza di mezzo metro; un terzo di metro è lungo il cannocchiale nei cleps di terza grandezza; e finalmente vi ha un piccolo modello di cleps, il quale per le piccole sue dimensioni si può dire tascabile, giacchè la lunghezza del cannocchiale è ridotta solamente ad un quinto di metro. Il cleps di cui si dà la descrizione è di seconda grandezza.

Il cavalletto a trepiede è composto di tre gambe, e la gamba g è differente dalle altre due g'. La gamba g è formata di due aste di legno scorrevoli l'una dentro l'altra, le quali si possono fermare a quell'altezza che si vuole; e ciascuna delle due gambe g' è costituita da due aste a e b riunite ad angolo. Le tre gambe sono connesse a snodo colla testa T del cavalletto, e le viti che servono a fermarle sono solamente le due v e v', disposte coi loro assi su una medesima retta. Le due gambe g' sono snodate verso il mezzo della loro lunghezza, cosicchè è possibile il ripiegarle; la gamba g si può raccorciare facendo scorrere l'una entro l'altra le due aste di cui è formata; e quindi colla massima facilità si può porre lo strumento in stazione su quei terreni montagnosi nei quali ben sovente si trovano incomodi gli ordinarii trepiedi con gambe di lunghezza invariabile. La forma speciale del cavalletto permette di riporlo assieme allo strumento, e senza neppur separare l'uno dall'altro, in una cassetta prismatica di piccole e comode dimensioni.

La piastra che serve di base per collocare lo strumento sulla testa del cavalletto, è formata dalle due parti P e p. La parte inferiore porta verso un suo estremo una vite u, ed all'altro estremo è munita di due braccia b' le quali, girando a cerniera, possono lateralmente penetrare una da una parte e l'altra dall'altra, nella testa del cavalletto, e fissare così lo strumento. La parte superiore è di forma semicircolare, ha tre punti d'appoggio sulla parte inferiore ed è possibile variare l'inclinazione di quella per rapporto a questa mediante le due viti x ed x'. La vite u e le due braccia b' possono somministrare tre punti d'appoggio quando lo strumento vien tolto dal suo cavalletto, e permettono così di metterlo in stazione su un parapetto, su un muro ed in tutti quei siti in cui il cavalletto sarebbe d'imbarazzo.

I due livelli sferici sono collocati, uno in l sulla piastra P, e l'altro in L sulla faccia superiore del cubo C. Il livello l serve a dare un orizzontamento approssimato della base dello strumento. Per ottenere quest'orizzontamento si tocca prima una vite y che si trova nell'estremità della gamba g, la quale serve ad allungare o ad accorciare questa gamba e quindi a variare l'inclinazione dell'asse A″B″ della testa del cavalletto. Dopo si fa agire un'altra vite r il cui fusto unisce una delle gambe g' con un braccio b_1'' annesso alla testa del cavalletto per produrre la rotazione di questo intorno al detto asse A″B″.

Il livello L è destinato all'orizzontamento dell'asse di rotazione del cannocchiale mediante le due viti x ed x', di cui già si è parlato. Quest'ultimo livello sferico deve essere di grande precisione, e sopra il suo vetro devono essere tracciati o due circoletti concentrici poco distanti l'uno dall'altro, oppure delle divisioni in parti eguali, per segnare il campo in cui devono essere ristrette le oscillazioni della bolla d'aria quando, essendo essa centrata, si gira l'istrumento intorno all'asse AB.

Sopra il sostegno S vi ha il cubo C entro il quale si trovano il circolo azimutale ed il circolo zenitale per la misura degli angoli. Questi due circoli sono collocati, il primo in α ed il secondo in ζ; sono essi di metallo bianco durissimo; e la loro divisione è centesimale con tutti i 400 gradi numerati, e con ogni grado diviso in decimi, cosicchè vi sono 4000 divisioni per ogni circolo. Nella faccia del cubo, opposta a quella che trovasi dalla parte del cannocchiale, vi sono in m gli oculari di due microscopii composti che, per l'esistenza di prismi rifrangenti di cristallo, servono ciascuno alla lettura contemporanea d'ambidue i circoli graduati ed a stimare i decimi dei decimi ossia i centesimi di grado, il che basta nelle operazioni ordinarie. La luce necessaria per fare le indicate letture arriva nell'interno del cubo C passando per apposite fenditure *f*, scolpite sulle facce laterali del cubo medesimo. Il sostegno S è formato di due parti poste l'una dentro l'altra. La parte interna porta alla sua sommità il circolo azimutale α; e la parte esteriore non è altro che una scorza cilindrica la quale avviluppa la parte interna. A questa parte esteriore è annesso il cubo C nel quale è imperniato il cannocchiale C'. Segue da ciò che il circolo azimutale α gira intorno all'asse AB quando, essendo slacciata una vite *t*, si può imprimere il movimento generale dell'intiero sostegno S e di quanto su esso si trova; e che invece rimane fisso quando gira intorno al detto asse solo la parte esterna del sostegno e quanto alla medesima trovasi annesso. Questo ultimo movimento rotatorio può farsi in grande a mano, si può impedire mediante la vite d'arresto *y'*, e può farsi in piccolo mediante un bottone di richiamo *b''*. Il circolo zenitale ζ poi gira quando s'imprime un movimento rotatorio al cannocchiale intorno al suo asse di rotazione A'''B'''.

L'apparecchio magnetico, avente forma parallelepipeda e disposto in costa di coltello, consiste in un magnete sospeso ad un filo sottilissimo di seta non torto, che discende dal centro del circolo azimutale, ed è contenuto nel cilindro cavo che costituisce l'indicata parte interna del sostegno S. Questo cilindro è girevole intorno all'asse verticale AB, onde poter voltare in direzione normale al magnete l'asse del cannocchiale orientatore *o*, e, come già si è detto, trovasi su di esso disposto il circolo azimutale in cui il diametro passante per lo zero della graduazione, deve fare un angolo eguale ad un retto, più l'angolo di declinazione del magnete coll'asse del cannocchiale orientatore. Una delle facce del magnete è brunita a specchio e, quando è rivolta verso l'oculare del detto cannocchiale orientatore, riflette nel campo di questo la divisione d'un piccolo vetro che si trova nel cannocchiale stesso. Supposto il magnete immobile nella sua naturale direzione e l'asse del cannocchiale orientatore normale a questa direzione, lo zero della divisione riflessa coinciderebbe col filo verticale della crociera del cannocchiale; ma siccome il magnete a sospensione oscilla nel piano del meridiano magnetico come un pendolo, ne deriva che si vede l'indicata divisione oscillare innanzi al filo. Quando si vede che le oscillazioni della divisione sono eguali da una parte e dall'altra del filo, è segno che l'asse del cannocchiale orientatore è normale al piano del meridiano magnetico e che trovasi nella direzione del meridiano del luogo quel diametro del circolo azimutale il quale passa per lo zero della graduazione.

Il cannocchiale C′ è anallatico, e, trattandosi di un cleps di seconda grandezza, ha la lunghezza di mezzo metro con circa sei centimetri e mezzo di diametro e con una forza d'ingrandimento di circa 100 volte. Questo cannocchiale porta un micrometro con diciasette fili orizzontali ed uno verticale, i quali sovente sono sostituiti da altrettante linee finissime incise su cristallo. L'oculare *d* è multiplo, cioè a più aperture; permette di scoprire alla vista i soli fili micrometrici di cui si deve fare uso, a seconda delle distanze della stadia dallo strumento; di più è esso girevole intorno al proprio asse ed è munito di una graduazione che unitamente agli angoli azimutale e verticale permette di determinare le così dette *visuali piane* di cui si parlerà, indicando ai metodi di rilevamento col cleps.

Il bottone *e* serve per mettere alla vista i fili. A fianco dell'oculare *d* trovasi l'oculare cercatore *c*, il quale serve a trovare facilmente i punti di mira, portando i raggi luminosi all'occhio, mediante uno specchietto inclinato a 45°. Il bottone *h* serve per mettere alla vista gli oggetti; e la vite b''' serve pei lenti movimenti del cannocchiale intorno al proprio asse. Secondo una generatrice del tubo in cui si trova il micrometro, vi ha una graduazione la quale, per chi ha contratta una certa attitudine nel ben centrare le immagini degli oggetti poco distanti dallo strumento, può servire a valutare approssimativamente le loro distanze dallo strumento.

Oltre le indicate parti, vi sono nel cleps: un contrappeso Q del cannocchiale; un cannocchialetto o' destinato alla comprovazione della verticalità dell'asse AB dello strumento; un altro cannocchialetto o'' che serve alla comprovazione della normalità degli assi AB ed A′B′ per rispetto all'asse A‴B‴.

294. **Micrometro e stadia**. — Il micrometro del cleps, come già si è detto nel precedente numero, è costituito da diciasette fili orizzontali e da uno verticale; ed il cannocchiale porta più oculari, disposti in modo da riuscire possibile lo scoprire alla vista i soli fili micrometrici di cui si vuol far uso.

Gli intervalli fra i fili orizzontali trovansi determinati in guisa che, indicando con le medesime lettere le letture ed i fili corrispondenti e con S il numero delle divisioni intercette sull'asta dall'angolo micrometrico, si ha: per la prima posizione degli oculari (*fig.* 373)

$$\left.\begin{aligned} a'-a&=S\\ b'-b&=0{,}1\,S \end{aligned}\right\}(1);$$

per la seconda posizione degli oculari (*fig.* 374)

$$\left.\begin{aligned} (d'-d)+(c'-c)&=S\\ (d'-c')+(d-c)&=0{,}1\,S \end{aligned}\right\}(2);$$

e finalmente per la terza posizione degli oculari (*fig.* 375)

$$\left.\begin{aligned} (i'-i)+(g'-g)+(f'-f)+(e'-e)&=S\\ (i'-g')+(g'-f')+(f'-e')+(i-g)+(g-f)+(f-e)&=0{,}1\,S \end{aligned}\right\}(3).$$

La stadia che si può fare con differenti lunghezze, e che generalmente ha quella di 4 metri, consiste in un prisma triangolare di legno e su ciascuna delle sue facce trovasi una divisione in parti eguali di metri 0,04 caduna. Queste divisioni, mediante tratti più corti, possono venir divise per metà su una faccia, in cinque parti eguali su una delle altre due, ed in dieci parti eguali sulla terza. Segue da ciò che, se esiste tal relazione fra il cannocchiale e la stadia da corrispondere ad un metro di distanza orizzontale ogni divisione di metri 0,04, le suddivisioni che trovansi rispettivamente sulla prima, sulla seconda e terza faccia rappresentano metri 0,50, metri 0,20 e metri 0,10. Ammettendo poi che, nella lettura delle frazioni delle suddivisioni della stadia, mediante i fili del micrometro, si possano stimare i decimi, riesce possibile di fare le letture tenendo conto dei 5 centimetri quando si fa uso delle maggiori divisioni, dei 2 centimetri quando si fa uso della seconda divisione e dei centimetri quando si fa uso della divisione più minuta.

La formola (2) del numero 290, la quale serve alla determinazione dell'ordinata verticale del punto del terreno in cui venne collocata la stadia per rapporto al piano orizzontale passante per l'asse di rotazione del cannocchiale del goniometro, esige che si conosca l'altezza A del punto B (*fig.* 367) della stadia in cui essa viene ferita dall'asse ottico del cannocchiale, la qual altezza può essere determinata, osservando dove si presenta sulla mira il filo centrale *o* (*fig.* 373, 374 e 375) del micrometro. Nel maggior numero dei casi però, essendo la distanza zenitale zOB (*fig.* 367) poco diversa dall'angolo retto, essendo piccolo l'angolo micrometrico COD e risultando sensibilmente isoscele sulla base $\overline{CD}$ il triangolo COD, si può assumere per valore di $\overline{MB}$ $=A$ la semi-somma delle due lunghezze $\overline{MD}$ ed $\overline{MC}$, o meglio il quarto della somma delle lunghezze $\overline{MD}$, $\overline{MC}$, $\overline{Md}$ ed $\overline{Mc}$ se le letture sulla stadia si fanno con due angoli micrometrici diversi COD e cOd. Segue da ciò che, se ciascuna delle grandi divisioni della stadia ha la lunghezza di 4 centimetri, la somma delle quattro letture fatte con quattro fili, due a due simmetricamente posti per rapporto a quello di mezzo, rappresenta l'altezza A in centimetri.

Nel fare le letture sulla stadia si possono impiegare solamente due fili del micrometro, ma è prudente di sempre usarne almeno quattro, onde ottenere un controllo dell'esattezza della lettura ed un criterio del limite d'esattezza ottenuta nella valutazione delle frazioni, ed anche per rendere spedita la valutazione dell'altezza A. Il modo con cui sono disposti i fili micrometrici del cleps rende possibili molte combinazioni che tutte soddisfano allo scopo di dare i dati necessarii alla valutazione delle distanze e del loro controllo; ma fra tutte queste combinazioni convengono quelle che vengono considerate dal signor ingegnere Giuseppe Porro nel suo pregievole lavoro, intitolato *Guide pratique de Tachéométrie*, e che risultano dai quattro problemi che immediatamente si risolvono, nell'intento di far vedere come si devono determinare le quantità che già vennero indicate colle lettere S ed A nel numero 290.

I. *Determinare le due quantità* S *ed* A *nel caso in cui si considera un punto, il quale dista dallo strumento meno di* 100 *metri.*

La lettura si fa mediante i quattro fili micrometrici a, b, a', b', i quali corrispondono alla prima posizione dell'oculare (*fig.* 373). Supponendo che i due fili a' ed a, maggiormente distanti da quello di mezzo, diano rispettivamente i numeri 85,48 e 13,28, e che, mediante gli altri due fili b' e b, si leggano rispettivamente i numeri 52,99 e 45,77, la prima delle formole (1) dà

$$S=85{,}48-13{,}28=72{,}20;$$

e, per essere

$$52{,}99-45{,}77=7{,}22,$$

si trova verificata la seconda delle equazioni (1), cosicchè si può ritenere che le letture sieno state ben eseguite.

I quattro numeri risultanti dalle letture ed i risultati cui essi conducono si possono inscrivere in una tabella come segue

MICROMETRI				RISULTATI
Fili inferiori	Differenze	Fili superiori	Differenze	
85,48 52,99	32,49	13,28 45,77	32,49	S = 72,20 0,1 S = 7,22
138,47		59,05		A = 1^{m},97

La somma delle due letture fatte coi fili a ed a', aumentata di quella delle due letture fatte coi fili b e b', conduce a trovare 197 volte la lunghezza di 4 centimetri, il cui quarto è 197 centimetri, cosicchè l'altezza A risulta

$$A = 85,48 + 13,28 + 52,99 + 45,77 = 197^{cm},52 = 1^{m},97$$

II. *Determinare le due quantità* S *ed* A *nel caso in cui si considera un punto, la cui distanza dallo strumento è compreso fra* 100 *e* 200 *metri.*

La lettura si fa mediante i quattro fili micrometrici c, d, c' e d', i quali corrispondono alla seconda posizione dell'oculare (*fig.* 374). Suppongasi che i due fili d' e d, il primo inferiore e maggiormente distante da quello di mezzo, ed il secondo superiore e più vicino a quello di mezzo, somministrino rispettivamente le indicazioni 83,28 e 19,10; che i due fili c' e c, quello inferiore e vicino al mezzo, e questo superiore, ma lontano dal mezzo, conducano alle letture 76,86 e 12,66. La prima delle equazioni (2) ci conduce a trovare

$$S = (83,28 - 19,10) + (76,86 - 12,66) = 64,18 + 64,20 = 128,38;$$

e, per essere

$$(83,28 - 76,86) + (19,10 - 12,66) = 6,42 + 6,44 = 12,86,$$

si viene a conchiudere che trovasi verificata la condizione espressa dalla seconda delle equazioni (2), e che quindi vennero ben fatte le letture. Siccome poi si possono ritenere come eguali fra loro i numeri **64, 18** e **64, 20**, esprimenti le differenze $d'-d$ e $c'-c$, non che gli altri numeri 6, 42 e 6, 44 rappresentanti le differenze $d'-c'$ e $d-c$, si acquista una nuova certezza che non avvennero errori materiali nella lettura.

L'altezza A è rappresentata in centimetri dalla somma delle letture ottenute mediante i quattro fili d', c', d e c, i quali sono due a due simmetricamente posti rispetto al filo di mezzo o, cosicchè

$$A = 83,28 + 19,10 + 76,86 + 12,66 = 191^{cm},90 = 1^{m},92.$$

La tabella che può convenire per registrare i numeri letti sulla stadia ed i risultati, a cui conducono, è quella che immediatamente si riporta

MICROMETRI				RISULTATI
Fili inferiori	Differenze	Fili superiori	Differenze	
83,28	6,42	19,10	6,44	64,18
76,86		12,66		64,20
160,14		31,76		S = 128,38 A = 1^{m},92

III. *Determinare le due quantità* S *ed* A *nel caso in cui è compresa fra* 200 *e* 400 *metri la distanza del punto a cui si collima dallo strumento.*

In questo caso si fa la lettura sulla stadia mediante gli otto fili micrometrici e, f, g, i, e', f', g' ed i' corrispondenti alla terza posizione del micrometro (*fig.* 375). Ammettendo che i due fili i' ed i, g' e g, f' ed f, e' ed e indichino rispettivamente 84,59 e 23,33, 79,67 e 18,43, 77,25 e 16,00, 72,35 ed 11,08, la prima delle equazioni (8) dà evidentemente

$$S = (84,59 - 23,33) + (79,67 - 18,43) + (77,25 - 16,00)$$
$$+ (72,35 - 11,08) = 61,26 + 61,24 + 61,25 + 61,27 = 245,02;$$

e, per essere

$$(84{,}59-79{,}67)+(79{,}67-77{,}25)+(77{,}25-72{,}35)$$
$$+(23{,}33-18{,}43)+(18{,}43-16{,}00)+(16{,}00-11{,}08)$$
$$=4{,}92+2{,}42+4{,}90+4{,}90+2{,}43+4{,}92=24{,}49,$$

si viene a conchiudere che trovasi verificata la condizione espressa dalla seconda delle equazioni (3), e che le letture vennero ben fatte. Una seconda verificazione dell'esattezza della lettura risulta da ciò, che si possono ritenere siccome eguali fra loro i numeri 61,26, 61,24, 61,25 e 61,27 esprimenti rispettivamente le differenze $i'-i$, $g'-g$, $f'-f$ ed $e'-e$; ed una terza verificazione si ha nella quasi perfetta eguaglianza che trovasi fra i numeri 4,92, 4,90, 4,90 e 4,92, esprimenti rispettivamente le differenze $i'-g'$, $f'-e'$, $i-g$ ed $f-e$, non che fra gli altri due 2,42 e 2,43, il primo dei quali dà la differenza $g'-f'$ ed il secondo la differenza $g-f$.

L'altezza A sarebbe rappresentata in centimetri dalla somma delle letture corrispondenti a quattro fili, due a due simmetricamente posti rispetto al filo di mezzo o, per esempio dalla somma delle letture corrispondenti ai quattro fili i', e', i ed e, oppure dalla somma delle letture corrispondenti ai quattro fili g', f', g ed f. Se poi si prende la somma delle otto letture corrispondenti agli otto fili, evidentemente rappresenta essa in centimetri il doppio dell'altezza A, cosicchè si ha

$$A=\frac{84{,}59+23{,}33+79{,}67+18{,}43+77{,}25+16{,}00+72{,}35+11{,}08}{2}$$
$$=\frac{382{,}70}{2}=191\overset{\text{cm}}{,}35=1\overset{\text{m}}{,}91.$$

Le letture fatte ed i risultamenti da esse ottenuti si possono disporre come chiaramente appare dalla tavola che segue

MICROMETRO				RISULTATI
Fili inferiori	Differenze	Fili superiori	Differenze	
84,59		23,33		61,26
	4,92		4,90	
79,67		18,43		61,24
	2,42		2,43	
77,25		16,00		61,25
	4,90		4,92	
72,35		11,08		61,27
313,86		68,84		S=245,02
				2A=3,8270
				A=1^m,91

IV. *Determinare le due quantità* S *ed* A *quando è compresa fra* 400 *e* 1000 *metri la distanza del punto a cui si collima dallo strumento.*

La lettura si fa coi tre fili *b*, *o* e *b'* (*fig.* 373) dell'oculare centrale. Nell'ipotesi che questi tre fili indichino rispettivamente 17,40, 46,15 e 74,90, applicando la seconda delle formole (1), si trova

$$0{,}1\,S = 74{,}90 - 17{,}40 = 57{,}50,$$

e quindi

$$S = 575{,}00.$$

Siccome i due fili *b* e *b'* sono egualmente distanti dal filo *o*, si conchiude che le letture si possono ritenere siccome esatte quando sono eguali le due differenze $b' - o$ ed $o - b$, e quando ciascuna di tali differenze è una metà di 0,1 S ossia $\frac{1}{20}$ di S, le quali condizioni trovansi esattamente verificate nell'esempio proposto.

L'altezza A, che si ottiene facendo la somma di quattro letture corrispondenti a quattro fili micrometrici simmetricamente posti rispetto a quello di mezzo, risulta nel presente caso dalla somma delle quattro letture che corrispondono ai fili *b'*, *o*, *o* e *b*; cosicchè si ha

$$A = 74{,}90 + 46{,}15 + 46{,}15 + 17{,}40 = 184^{cm}{,}60 = 1^{m}{,}85.$$

La registrazione delle letture ed i risultamenti a cui esse conducono si possono inscrivere nella tavola che qui sotto si riporta:

MICROMETRI				RISULTATI
Fili inferiori	Differenze	Fili superiori	Differenze	
74,90 46,15	28,75	46,15 17,40	28,75	28,75 28,75
121,05		63,55		0,1 S = 57,50 S = 575,00 A = 1m,85

Allorquando la distanza del punto in cui trovasi la stadia dal sito in cui si è collocato in stazione il cleps non è molto grande, conviene fare le letture su quella faccia della stadia in cui ogni divisione di 4 centrimetri è suddivisa in dieci parti eguali; s'impiega quella faccia in cui ogni divisione di 4 centimetri è suddivisa per metà per le grandi distanze; e conviene di eseguire le letture su quella faccia della stadia in cui ogni divisione di 4 centimetri trovasi suddivisa in cinque parti eguali per le distanze medie.

295. **Uso del cleps.** — Onde determinare mediante un cleps e la relativa stadia le quantità che al numero 290 vennero indicate colle lettere S, θ e φ ed a cui venne dato il nome di numeri generatori, una volta collocato in stazione lo strumento, col disporre approssimativamente in posizione verticale il suo asse AB (*fig.* 572) facendo agire le due viti y ed r ed osservando il livello l e quindi col rendere esattamente verticale il detto asse mediante le viti x ed x' in seguito alle indicazioni date dal livello di precisione L, si procede al suo orientamento. Quest'operazione si fa slacciando la vite t, imprimendo al sostegno S il movimento generale, finchè la divisione zero riflessa dal magnete fa oscillazioni eguali innanzi al filo verticale del cannocchiale orientatore o, e quindi serrando la detta vite t per rendere solidaria la parte interna del sostegno S alla base dello strumento. Fatto questo, resa libera la parte esterna del detto sostegno collo slacciare la vite y', si collima alla stadia girando il cannocchiale, prima intorno all'asse verticale AB e poscia

intorno all'asse orizzontale $A'''B'''$, e si leggono ordinatamente: quelle indicazioni date dai fili micrometrici che servono a dedurre la quantità S e l'altezza A in conformità di quanto si è detto nel precedente numero; gli angoli θ e φ, i quali contemporaneamente si possono leggere sia che si accosti l'occhio all'uno come al- l'altro dei due microscopii *m*. Per facilitare la ricerca del punto di mira, si fa prima uso dell'oculare cercatore *c* e quindi si collima con precisione mediante i due bottoni di richiamo b'' e b''' i quali imprimono dei piccoli movimenti rotatorii: il primo alla parte esterna del sostegno S e quindi al cannocchiale intorno all'asse AB; il secondo al cannocchiale intorno all'asse A''' B'''. Per essere poi sicuri che nelle letture degli angoli non avvengono errori materiali, conviene far queste coi due microscopii *m*, i quali devono dare le stesse indicazioni.

Il cleps si presta anche per la misura dell'angolo che due allineamenti fanno fra di loro. Perciò, disposto perfettamente verticale l'asse AB col metodo già indicato e resa la parte interna del sostegno S solidaria alla base dello strumento mediante la vite *t*, si slaccia la vite *y* e successivamente si collima nella direzione dei due allineamenti dati. Gli angoli che si leggono sul circolo azimutale dopo la prima e dopo la seconda collimazione, sono quelli che i due allineamenti considerati fanno con una direzione fissa, giacchè il detto circolo si mantenne immobile; e quindi la differenza di questi due angoli deve rappresentare quello dei due allineamenti a cui si è collimato.

296. **Comprovazione dell'esattezza del clepsciclo.** — Affinchè un cleps possa condurre a buoni risultamenti, deve soddisfare alle seguenti condizioni, quando la bolla d'aria del livello superiore è centrata:

1° *L'asse di rotazione dello strumento deve essere verticale;*

2° *L'asse ottico del cannocchiale deve essere perpendicolare al suo asse di rotazione;*

3° *Il piano descritto dal detto asse ottico deve essere verticale.*

1ª *Verificazione.* Per questa verificazione servono i due circoletti concentrici segnati sul livello L (*fig.* 372). Una volta centrata la bolla, si fa rotare lo strumento intorno al suo asse AB e se, accostando l'occhio al cannocchialetto *o'*, si riconosce che la bolla nelle diverse posizioni dello strumento si mantiene fra gli accennati due circoletti, si ha la prova che l'asse AB è assai prossimo alla verticalità entro i limiti di una deviazione piccolissima, e si ritiene che lo strumento soddisfa alla prima condizione. Invece dei due circoletti vi può essere una divisione sul livello, ed evidentemente una tale divisione, oltre di servire a comprovare la verticalità dell'asse AB dello strumento, può anche indicarne la deviazione, purchè la lunghezza di ogni sua parte abbia tale relazione col raggio del livello sferico da corrispondere ciascuna di esse ad un decimo di un centesimo di grado, ossia ad un millesimo di grado.

2ª e 3ª *Verificazione.* Per accertarsi se l'asse ottico del cannocchiale è perpendicolare al suo asse di rotazione, ed in pari tempo per verificare se il detto asse nella rotazione del cannocchiale descrive un piano verticale, serve un apparecchio ottico collocato in corrispondenza del cannocchialetto o''. Nella direzione dell'asse ottico di questo cannocchialetto, e precisamente sulla faccia opposta del tubo C, vi ha un vetro unito ad angolo retto col piano del livello L. Un altro vetro esiste nella stessa direzione, ma unito al tubo del cannocchiale C′. Nel tubo del cannocchialetto o'' è fisso un piccolo cristallo che, ricevendo luce dal di fuori, va a produrre nel fuoco un fenomeno luminoso. La luce, la quale parte da questo punto, incontrando il primo vetro, viene in parte riflessa da questo; ed il secondo vetro riflette una parte di quella restante. Per le due riflessioni si formano nel campo del cannocchialetto o'' due immagini luminose, le quali dovrebbero confondersi in una sola se i due vetri fossero paralleli fra di loro, e di più si sovrapporrebbero nel fuoco istesso se i due vetri fossero normali all'asse ottico del cannocchialetto. Se il vetro unito al cannocchiale C′ venne disposto in modo da essere esattamente parallelo al piano descritto dal suo asse ottico, la sovrapposizione delle due immagini entro il cannocchialetto accuserebbe la normalità dell'asse ottico del cannocchialetto medesimo per rapporto al secondo vetro, e quindi anche per rapporto al piano descritto dall'asse ottico del cannocchiale C′; e siccome l'asse ottico del cannocchialetto o'' è parallelo all'asse di rotazione del cannocchiale C′, perchè ambidue perpendicolari a due facce parallele del cubo C, ne risulta che l'asse ottico del cannocchiale C′ è perpendicolare al suo asse di rotazione A‴ B‴. Ora, per essere l'asse A‴B‴ perpendicolare al secondo vetro, esso lo è anche al primo, ossia a quello unito ad angolo retto alla base del livello L. E siccome questa base è orizzontale quando la bolla è centrata, ne deriva che i vetri sono verticali, che l'asse di rotazione A‴ B‴ del cannocchiale C′ è orizzontale, e che per conseguenza è verticale il piano descritto dal suo asse ottico A′ B′.

Nel caso che l'asse ottico del cannocchiale C′ cessi, per una causa qualunque, di essere perpendicolare al suo asse di rotazione A‴ B‴, non vi sarà più parallelismo fra il primo ed il secondo vetro, ed a questa alterazione corrisponderà uno spostamento dal fuoco dell'immagine riflessa dal secondo vetro. Analogamente, nel caso che l'asse ottico del cannocchiale C′ cessi dal descrivere un piano verticale, ossia nel caso in cui l'asse di rotazione A‴ B‴ cessi dall'essere orizzontale e quindi perpendicolare all'asse verticale A B dello strumento, cesserà pure il parallelismo fra il primo ed il secondo vetro, imprimendo allo strumento un moto rotatorio intorno ad A B, corrisponderà per ogni sua posizione uno spostamento dal fuoco dell'immagine riflessa dal primo vetro. Fra la quantità ed il senso di questi due spostamenti, delle corrispondenti deviazioni degli assi e degli errori che queste deviazioni producono negli angoli azimutali e nelle distanze zenitali, vi sarà una relazione determinata, ed è da questa relazione che il professore Porro, col mezzo d' ingegnosi artifizi ottici, seppe dedurre immediatamente in millesimi di grado la quantità d'errore degli angoli, quantità che si legge nel campo del cannocchialetto o'' in decimi di centesimi di grado. Nelle ordinarie operazioni di celerimensura si ritiene che lo strumento soddisfi abbastanza bene alla seconda ed alla terza condizione, quando il cannocchialetto o'' dà una correzione minore di un centesimo di grado.

ARTICOLO II.

Mezzi per effettuare i calcoli.

297. **Scale logaritmiche**. — Già da molto tempo si costruiscono dei regoli i quali, per addizione e sottrazione di quantità lineari, producono gli stessi risultati delle addizioni e delle sottrazioni dei logaritmi. L'impiego di questi regoli permette di ridurre alla massima semplicità parecchie operazioni di calcolo numerico, le quali altrimente riescirebbero, se non complicate, lunghe almeno ed estremamente fastidiose. Il professore Porro ha costrutto di tali regoli per soddisfare alle esigenze della celerimensura, e si conoscono essi sotto il nome di *scale logaritmiche centesimali;* ed eccone brevemente la descrizione e l'uso.

298. **Scala dei logaritmi dei numeri**. — Su una retta indefinita A B (*fig.* 376) s'immagini presa per unità una lunghezza arbitraria $\overline{AC}$, la quale si può assumere siccome rappresentante il logaritmo del numero 10. Siccome sono frazioni i logaritmi dei numeri 2, 3,......, 8 e 9, si possono essi rappresentare in lunghezza

sulla stessa linea, e si ottiene così una divisione decrescente quale risulta dalla figura nella citata parte $\overline{AC}$.

Se ora si porta sulla AB la lunghezza $\overline{CD}=\overline{AC}$, la retta $\overline{AD}$ rappresenta il logaritmo di 100; e, suddividendo la $\overline{CD}$ come la $\overline{AC}$, risultano nelle distanze fra il primo, il secondo, ..., l'ottavo ed il nono punto di divisione dall'origine A i logaritmi dei numeri 20, 30, ..., 80 e 90.

La numerazione della scala, di cui si sta ragionando, è fatta in modo che le distanze fra le divisioni già indicate e l'origine A rappresentano i logaritmi delle decine intiere, comprese fra 10 e 1000. L'intervallo che esiste fra le divisioni 10 e 20 è diviso in cento parti; in cinquanta parti trovansi divisi gli intervalli che si trovano fra le divisioni 20 e 30, 30 e 40; ed in venti parti quelli compresi fra le divisioni 40 e 50, 50 e 60, 60 e 70, 70 ed 80, 80 e 90, 90 e 100. Segue da ciò che le divisioni segnate sulla parte $\overline{AC}$ della scala sono tali che le loro distanze dall'origine A rappresentano rispettivamente: i logaritmi di numeri che differiscono fra loro dei decimi d'unità fra le divisioni 10 e 20; i logaritmi di numeri che differiscono fra loro dei due decimi di unità fra le divisioni 20 e 30, 30 e 40; ed i logaritmi di numeri che differiscono fra loro dei cinque decimi di unità fra le divisioni 40 e 50, 50 e 60, 60 e 70, 70 e 80, 80 e 90, 90 e 100. Le stesse suddivisioni, ripetute sulla parte $\overline{CD}$ della scala, danno rispettivamente nelle loro distanze dall'origine A: i logaritmi di numeri che differiscono fra loro delle unità fra le divisioni 100 e 200; i logaritmi di numeri che differiscono fra loro di due unità fra le divisioni 200 e 300, 300 e 400, e finalmente i logaritmi di numeri che differiscono fra di loro di cinque unità fra le divisioni 400 e 500, 500 e 600, 600 e 700, 700 ed 800, 800 e 900, 900 e 1000. In corrispondenza dei numeri 10, 100 e 1000 vi sono le cifre **1**, **2**, **3**, ed esse si pongono per indicare le caratteristiche dei logaritmi dei numeri che avviene di dover considerare.

299. **Scala dei logaritmi dei seni e dei coseni.** — Questa scala, rappresentata in EE (*fig.* 376), è graduata in modo che vi sono cento principali divisioni, sulle quali stanno o s'intendono scritti i numeri 1, 2, 3, ..., fino a 100 e che corrispondono agli angoli di 1^g, 2^g, 3^g, ..., fino a 100^g centesimali. La sua origine porta l'indicazione indicante 1^g centesimale, e la distanza fra quest'origine e la divisione corrispondente ad un dato angolo si può ritenere siccome la differenza fra il logaritmo del seno di quest'angolo ed il logaritmo del seno dell'angolo di 1^g, supposti

presi i detti seni in un circolo di raggio 10^{10}, e valutata la loro differenza coll'unità di lunghezza $\overline{AC}$. Gli intervalli che esistono fra le indicate divisioni sono suddivisi, e si tiene per le suddivisioni una progressione analoga a quella tenuta per la scala dei logaritmi dei numeri, di cui si parlò nel precedente numero.

Oltre la detta numerazione superiore procedente da sinistra verso destra, da 1 fino a 100, si deve intendere che la scala dei logaritmi dei seni ne porti superiormente una seconda procedente da destra verso sinistra, da 100 fino a 199, e questo perchè, essendo eguali fra di loro i seni degli angoli supplementari, ne risulta che la distanza, per esempio, della divisione 40 dall'origine rappresenta non solo il logaritmo del seno dell'angolo di 40°, ma anche il logaritmo del seno dell'angolo di 160°.

La descritta scala dei logaritmi dei seni serve pure per i coseni, giacchè, essendo il coseno di un angolo acuto, eguale al seno del suo complemento, basta fare sulla scala dei seni una numerazione inferiore, in modo che le cifre di questa sieno complementari delle cifre corrispondenti poste sulla numerazione superiore che va da 1 a 100, per modo che la scala dei logaritmi dei coseni risulta da quella dei logaritmi dei seni, apponendo alle sue divisioni i numeri 0, 10, 20 ...... fino a 99, a partire da destra e venendo verso sinistra.

Inferiormente alla scala, di cui stiamo ragionando, oltre la numerazione decrescente da 99 a 0, si può intendere che siavi un'altra numerazione crescente da 301 a 400, e questo perchè, essendo eguali fra di loro i coseni degli angoli acuti e di quelli che si complementano a quattro retti, ne risulta che, per esempio, la distanza delle divisioni marcata inferiormente 30 dall'origine, rappresenta non solo il logaritmo del coseno dell'angolo di 30^g, ma anche il logaritmo del coseno dell'angolo di $400^g - 30^g = 370^g$.

Se osservasi che i rapporti fra i seni degli angoli minori di 1^g e le loro ampiezze, espresse in minuti primi, si possono ritenere siccome costanti, indicando con

β un angolo dato in minuti primi e minore di 1^g e con m il rapporto fra il suo seno ed il numero dei minuti primi che esso contiene, si ha

$$m = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\beta}$$

d'onde

$$\log \operatorname{sen} \beta = \log \beta + \log m.$$

Questa equazione fa vedere che, per avere il logaritmo del seno di un angolo β minore di 1^g, basta prendere sulla scala dei logaritmi dei numeri il logaritmo del numero che esprime in minuti l'angolo di cui vuolsi il logaritmo del seno ed aumentarlo del logaritmo del numero m. Ora, questa operazione trovasi notevolmente semplificata sulla stessa scala dei logaritmi dei numeri mediante la sua numerazione superiore, la quale procede da sinistra verso destra da 1 minuto primo fino a cento minuti primi, e mediante le corrispondenti caratteristiche **7** ed **8** che trovansi spostate per rapporto alle caratteristiche inferiori d'una quantità eguale al logaritmo di m.

Per essere il seno di un angolo eguale al seno del suo supplemento, si ottiene il logaritmo del seno di un angolo compreso fra 199^g e 200^g, togliendolo prima di 200^g, e cercando il logaritmo del seno dell'angolo minore di 1^g, che risulta facendo l'indicata differenza.

I logaritmi dei coseni degli angoli compresi fra 99^g e 100^g facilmente si ottengono, osservando che il coseno d'un angolo qualunque è eguale al seno del suo complemento, cosicchè le ricerche dei logaritmi dei coseni di angoli compresi fra gli accennati limiti si riducono a quelle dei logaritmi dei seni d'angoli che variano fra 0^g ed 1^g.

Per angoli poi compresi fra 300^g e 301^g, siccome il coseno d'un angolo maggiore di tre quadranti è eguale in lunghezza al seno della differenza fra l'angolo dato e 300^g, evidentemente si può far dipendere la ricerca del logaritmo del suo coseno dalla ricerca del logaritmo del seno di un angolo minore di 1^g.

Dovendosi considerare il seno od il coseno di angoli che la numerazione non permette di trovare sulla scala, basta rammentare che, indicando con α un angolo espresso in gradi centesimali, si ha

$$\operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen}(200^g + \alpha)$$

$$\cos \alpha = -\cos(200^g + \alpha).$$

Per la prima di queste relazioni il logaritmo del seno di un angolo compreso fra 200^g e 400^g assai facilmente si riduce al logaritmo del seno di un angolo minore di 200^g coll'aggiungervi 200^g

e col considerare soltanto di questa somma la parte che supera 400^g; per la seconda relazione invece il logaritmo del coseno di un angolo compreso fra 100^g e 200^g si riduce al logaritmo del coseno di un angolo compreso fra 300^g e 400^g, ed il logaritmo del coseno di un angolo compreso fra 200^g e 300^g si riduce al logaritmo del coseno di un angolo minore di 100^g, aggiungendovi 200^g e considerando di questa somma la sola parte che supera 400^g. Sia però che trattisi della ricerca di logaritmi di seni, sia della ricerca di logaritmi di coseni, tuttavolta che all'angolo dato è necessario aggiungere 200^g per ottenere quello che permette l'uso della scala dei logaritmi dei seni e dei coseni, non bisogna dimenticare che la linea trigonometrica corrispondente è negativa.

300. Scala dei logaritmi delle tangenti e delle cotangenti. — Questa scala, che trovasi rappresentata in G H (*fig.* 376), è fatta in modo da esservi su essa cinquanta principali divisioni, sulle quali ci stanno o s'intendono scritti i numeri 1, 2, 3, ..., fino a 50, e che corrispondono agli angoli di 1^g, 2^g, 3^g, ..., fino a 50^g centesimali. La sua origine, come la scala dei logaritmi dei seni, porta l'indicazione 1, esprimente un 1^g centesimale, e la distanza fra quest'origine e la divisione che corrisponde ad un dato angolo rappresenta la differenza fra il logaritmo della tangente di questo angolo ed il logaritmo della tangente dell'angolo di 1^g, supposte le dette tangenti appartenere ad un circolo di raggio 10^{10} e valutate le loro differenze coll'unità di lunghezza $\overline{AC}$. Gli intervalli che esistono fra le indicate cinquanta divisioni sono pure suddivisi con una progressione analoga a quella adottata per la scala dei logaritmi dei numeri, onde poter considerare sulla scala anche le tangenti degli angoli che differiscono fra loro meno di 1^g.

La scala di cui si sta ragionando, oltre di portar superiormente una numerazione procedente da sinistra verso destra, di 1 fino a 50, ne porta una seconda al disotto, la quale procede in senso opposto e che corrisponde alle cotangenti degli angoli compresi fra 50^g e 99^g e questo perchè la cotangente di un angolo è eguale alla tangente del suo complemento.

Osservando ora che, fra la tangente e la cotangente di un angolo α valutate nel raggio eguale all'unità, esiste la relazione.

$$\operatorname{tang}\alpha \cot\alpha = 1$$

d'onde

$$\log \operatorname{tang}\alpha = -\log\cot\alpha$$

$$\log \cot \alpha = -\log \operatorname{tang} \alpha,$$

si deduce che le scale delle tangenti e delle cotangenti reciprocamente si completano, e che permettono la valutazione delle tangenti e delle cotangenti degli angoli compresi 1^g e fra 99^g. Questo chiaramente risulterà accennando all'uso delle scale logaritmiche.

Per gli angoli compresi fra 0^g ed 1^g, e fra 99^g e 100^g, dietro le considerazioni svolte nel precedente numero, parlando dei logaritmi dei seni e dei coseni d'angoli varianti rispettivamente fra 0^g ed 1^g, serve la scala dei logaritmi dei numeri mercè la sua numerazione superiore estendentesi da $1'$ a $100'$.

Per valutare i logaritmi delle tangenti e delle cotangenti di angoli compresi fra 100^g e 200^g, fra 200^g e 300^g, e fra 300^g e 400^g, altro non si deve fare che aggiungere rispettivamente 100^g, 200^g o 300^g alla numerazione della scala, ed allora, qualunque sia l'angolo dato, è possibile ritrovarlo sopra di essa. Quando però occorrono di simili addizioni conviene osservare, che la tangente e la cotangente sono negative, se, per ottenere l'angolo dato, si aggiungono alla numerazione 100^g o 300^g, e che invece queste linee trigonometriche sono positive quando si aggiungono 200^g.

301. **Scala dei logaritmi dei seni quadrati.** — È questa una scala la quale porta due numerazioni, una procedente da sinistra a destra da 60^g a 100^g, e l'altra da destra a sinistra 100 e 140^g. Le sue divisioni, determinate in modo analogo a quello che si tiene per quelle delle scale dei logaritmi dei seni e delle tangenti, corrispondono ai logaritmi dei quadrati dei seni di tutti gli angoli compresi fra 60^g e 140^g, e questi due numeri rappresentano i limiti delle distanze zenitali che avviene di dover considerare nelle operazioni di celerimensura.

302. **Norme fondamentali per l'uso delle scale logaritmiche.** — Le quattro scale logaritmiche, di cui si è parlato, tracciate su cartone o meglio su una lastra di legno o di metallo, si impiegano per l'esecuzione dei calcoli numerici che occorrono nelle operazioni di celerimensura, aggiungendovi l'uso di un compasso, e, affinchè presentino esse sufficiente chiarezza in tutte le divisioni e suddivisioni, è bene che l'unità logaritmica sia rappresentata da metri 0,20. Le norme che facilmente conducono all'uso di queste scale si possono riassumere come segue:

1° I logaritmi dei numeri si prendono sulla prima scala valutandoli da sinistra a destra a partire da una delle due origini A e C, si ritiene a memoria la caratteristica del logaritmo del numero considerato e col compasso si prende la sola parte decimale di questo logaritmo, che è rappresentata dall'intervallo compreso fra una delle origini e la divisione, la quale porta effettivamente o dovrebbe portare la numerazione corrispondente al numero di cui vuolsi il logaritmo. Così, volendosi valutare il logaritmo del numero 40, si dirà che la sua caratteristica è 1 e che la sua parte decimale è rappresentata dalla lunghezza $\overline{Aa}$; analogamente la caratteristica del logaritmo del numero 400 è 2, mentre la sua parte decimale è data o dalla lunghezza $\overline{Aa}$ o dalla sua eguale $\overline{Cb}$.

2° Il complemento del logaritmo di un numero è il risultato che si ottiene togliendolo da dieci unità. La caratteristica di un tal complemento adunque è 9, 8, 7...... unità, secondo che il numero a cui si riferisce ha una sola cifra intiera, o due, o tre..... cifre intiere; e la parte decimale è quella che risulta togliendo dall'unità la parte decimale del logaritmo. Così è chiaro che, se $\overline{AC}$ è l'unità logaritmica ed $\overline{Aa}$ la parte decimale corrispondente, per esempio, al numero 40, si ha in $\overline{Ca}$ il complemento della parte decimale dello stesso logaritmo. Segue da ciò che si ottiene la parte decimale del complemento del logaritmo di un numero prendendo l'apertura di compasso da destra verso sinistra sulla stessa scala in cui il logaritmo del numero si valuterebbe da sinistra a destra; aggiungendo a questa parte decimale il numero delle unità che il complemento deve avere, si ha il complemento domandato.

3° I logaritmi delle linee trigonometriche, supposte appartenere ad un circolo di raggio 10^{10}, si valutano sulle scale corrispondenti da sinistra a destra; si tiene a memoria la caratteristica e col compasso si prende la parte decimale definita dalla distanza che esiste fra il punto portante la caratteristica e quella divisione che corrisponde all'angolo pel quale vuolsi valutare la linea trigonometrica. Così il logaritmo del seno di 20^g ha per caratteristica il numero 9 e per parte decimale la lunghezza $\overline{cd}$. Il logaritmo che in tal guisa si ottiene vale 10 più il logaritmo della stessa linea trigonometrica presa nel circolo di raggio eguale all'unità.

4° Togliendo da 10 il logaritmo di una linea trigonometrica valutata nel circolo di raggio 10^{10}, si ha ciò che chiamasi complemento del logaritmo di questa linea. Ora se, per esempio, si considera il logaritmo del seno di 20^g, come già si è detto, ammette esso per caratteristica il numero 9 e per parte decimale la lunghezza $\overline{cd}$; la differenza fra il numero 10 e questo logaritmo è evidentemente la lunghezza $\overline{dE}$ fra il punto d e l'estremo di destra E della scala, e quindi il complemento del logaritmo di una linea trigonometrica presa nel raggio 10^{10} è determinato dall'apertura di compasso che si può prendere sulla conveniente scala fra l'estremo di destra e la divisione numerata l'angolo determinante la linea trigonometrica di cui vuolsi il logaritmo.

5° Aggiungere un logaritmo ad un altro nell'intento di ottenere il prodotto di due quantità, vuol dire portare in avanti (da sinistra a destra) del punto nel quale termina il logaritmo di una delle due quantità, l'apertura di compasso che rappresenta il logaritmo dell'altra quantità. Viceversa, togliere un logaritmo da un altro per avere il quoziente di due numeri, significa portare indietro (da destra a sinistra) del punto nel quale termina il logaritmo della quantità maggiore, l'apertura di compasso che rappresenta il logaritmo della quantità minore.

6° L'operazione di togliere un logaritmo da un altro si può fare aggiungendo al secondo il complemento del primo e togliendo dalla caratteristica finale il numero 10. Viceversa, l'operazione di aggiungere un logaritmo ad un altro può essere eseguita togliendo dal secondo il complemento del primo ed aggiungendo il numero 10 alla caratteristica finale.

7° L'operazione di togliere dal logaritmo di un numero quello di una linea trigonometrica valutata nel raggio 1 si riduce ad aggiungere al logaritmo del numero il complemento del logaritmo della stessa linea trigonometrica nel raggio 10^{10}. Viceversa, si opera l'addizione del logaritmo di una linea trigonometrica nel raggio 1 al logaritmo di un numero, togliendo da questo il complemento del logaritmo della stessa linea trigonometrica, considerata siccome appartenente ad un circolo di raggio 10^{10}.

303. **Uso pratico delle scale logaritmiche nelle operazioni di celerimensura.** — Le quattro scale logaritmiche, dei numeri, dei seni e dei coseni, delle tangenti e delle cotangenti, dei seni quadrati, che per brevità si possono rispettivamente chiamare *prima*, *seconda*, *terza* e *quarta scala*, servono nelle operazioni di celerimensura, sia per passare dai numeri generatori alle tre coordinate ortogonali, ricavando successivamente i tre valori di D, x, y e z dalle equazioni (1), (3), (4) e (2) del numero 290, sia per risolvere altre formole che può avvenire di dover considerare; ed ecco il loro uso in alcuni casi particolari.

1. *Dati i numeri generatori* $S = 156{,}50$, $\theta = 38^g{,}55$, e $\varphi = 85^g{,}36$, *determinare i quattro prodotti* $S \operatorname{sen}^2 \varphi$, $D \cos \theta$, $D \operatorname{sen} \theta$ e $D \cot \varphi$.

Per ottenere il prodotto $S \operatorname{sen}^2 \varphi$ s'incomincia a valutare sulla quarta scala il complemento del logaritmo di $\operatorname{sen}^2 85^g{,}36$ col prendere, dietro la quarta regola del numero precedente, un'apertura di compasso eguale alla distanza che esiste fra l'estremo di destra di questa scala e la divisione corrispondente al numero $85^g{,}36$. Ottenuta quest'apertura di compasso, per la quinta e la settima regola del citato numero, si porta essa da destra verso sinistra sulla prima scala a partire dalla divisione 156,50; sotto la punta di sinistra si farà la lettura 14818, e, cadendo questa punta dove la caratteristica è 2, si dirà che il prodotto $S \operatorname{sen}^2 \varphi$, rappresentante la distanza orizzontale D fra il punto di stazione ed il punto a cui si è collimato per la lettura dei dati numeri generatori, ha tre cifre intiere e che quindi vale metri 148,18.

Determinata la distanza $D = 148^m{,}18$, si ottiene il prodotto $D \cos \theta$ incominciando dal prendere sulla seconda scala da destra verso sinistra un'apertura di compasso eguale all'intervallo che esiste fra l'estremo di destra di questa scala e quella divisione che nella numerazione inferiore corrisponde al numero $38^g{,}55$. Questa apertura rappresenta il complemento del logaritmo del coseno di $38^g{,}55$ per cui, come si è detto nelle regole quinta e settima del numero precedente, portandola in deduzione sulla prima scala a partire dalla divisione cui corrisponde il numero 148,18, sotto la punta sinistra del compasso si legge 12185 e, trovandosi questa punta in quella parte della scala cui corrisponde la caratteristica 2, si viene a conchiudere essere di metri 121,85 il prodotto $D \cos \theta$.

Per avere il prodotto $D \operatorname{sen} \theta$ si prenda sulla seconda scala da destra verso sinistra un'apertura di compasso eguale all'intervallo che esiste fra l'estremo di destra di questa scala e quella divisione che, nella numerazione superiore, corrisponde al numero $38^g{,}55$. Rappresenta quest'apertura il complemento del logaritmo del seno di $38^g{,}55$ e quindi, come risulta dalle regole quinta e settima, basta portarla in deduzione sulla prima scala a partire dalla divisione 148,18 per poter leggere sotto la punta sinistra del compasso il numero 8432 corrispondente al prodotto $D \operatorname{sen} \theta$. Siccome poi la detta lettura vien fatta in quella parte della prima scala cui corrisponde la caratteristica 1, si conchiude che il prodotto domandato deve avere due cifre intiere e che quindi esso vale metri 84,32.

Finalmente per calcolare il prodotto $D \cot \varphi$, si prende sulla terza scala il complemento di logaritmo della cotangente di $85^g,36$ mediante un'apertura di compasso determinata dall'estremo di destra di questa scala e dalla divisione, cui nella numerazione inferiore corrisponde al numero $85^g,36$; quest'apertura di compasso, per le regole quinta e settima del numero precedente, si porta in deduzione sulla prima scala a partire dalla divisione corrispondente al numero 148,18, e, sotto la punta sinistra del compasso si potrà fare la lettura 3469 la quale, per trovarsi la detta punta in quella parte della prima scala cui corrisponde la caratteristica 1, porta a conchiudere essere due le cifre intiere contenute nel prodotto $D\cot\varphi$ e quindi essere dato il suo valore da metri 34,69.

II. *Dati i numeri generatori* $S=156{,}30$, $\theta=238^g{,}55$ *e* $\varphi=114^g{,}64$, *determinare i quattro prodotti* $S\,\mathrm{sen}^2\varphi$, $D\cos\theta$, $D\,\mathrm{sen}\,\theta$ e $D\cot\varphi$.

Si ottiene il prodotto $S\,\mathrm{sen}^2\varphi$, prendendo sulla quarta scala il complemento del logaritmo di $\mathrm{sen}^2\,114^g{,}64$ mediante un'apertura di compasso che dall'estremo di destra di questa scala si estende alla divisione corrispondente al numero $114^g{,}64$; portando questa apertura in deduzione sulla prima scala a partire dalla divisione cui corrisponde il numero 156,30; e facendo la lettura su quel punto in cui trovasi la punta sinistra del compasso. Questa lettura dà le cifre 14818, e, siccome vien essa fatta su quella parte della prima scala cui corrisponde la caratteristica 2, porta a conchiudere essere di metri 148,18 la distanza D corrispondente al prodotto $S\,\mathrm{sen}^2\varphi$.

Trovata la distanza D, si calcola il prodotto $D\cos\theta$ osservando che, per quanto si è detto nel numero 299, il valore assoluto del coseno di $238^g{,}55$ è eguale a quello del coseno di $200^g+238^g{,}55$ $=438^g{,}55=400^g+38^g{,}55$. Ora, essendo

$$\cos(400^g+38^g{,}55)=\cos 38^g{,}55,$$

risulta ad evidenza come il prodotto $148{,}18\times\cos 238^g{,}55$ debba essere in valore assoluto quello stesso che corrisponde al prodotto $148{,}18\times\cos 38^g{,}56$, ossia metri 121,83; ma come, per quanto si è detto nel citato numero 299, debbasi esso considerare come negativo.

Analogamente il prodotto $D\,\mathrm{sen}\,\theta$, dato da $148{,}18\times\mathrm{sen}\,238^g{,}55$, si ottiene aggiungendo 200^g a $238^g{,}55$, trascurando 400^g nella somma, e facendo quindi il prodotto $148{,}18\times\mathrm{sen}\,38^g{,}55$. Questo prodotto si ottiene come già si è indicato nel precedente problema; esso è di metri 84,32, se non che va considerato come preceduto dal segno meno.

Per quanto si riferisce al prodotto $D \cot \varphi$, osservasi che, immaginando aggiunte 100 unità alla numerazione della terza scala, la divisione corrispondente al numero $14^g,64$ della numerazione superiore diventa appunto $114^g,64$, per cui bisogna trovare la tangente dell'angolo di $14^g,64$, invece della cotangente dell'angolo di $114^g,64$; e quindi il calcolo di $148^m,18 \times \cot 114^g,64$ si riduce a quello di $148^m,18 \operatorname{tang} 14^g,64$. Ora, se prendesi sulla terza scala un'apertura di compasso determinata dall'estremo di destra di questa scala e dalla divisione cui, nella numerazione superiore, corrisponde il numero $14^g,64$, quest'apertura, per la regola quarta del numero precedente, rappresenta il complemento del logaritmo della tangente di $14^g,64$; se poi quest'apertura si porta in deduzione sulla prima scala a partire dalla divisione corrispondente al numero 148,18, la lettura 3469 indicata dalla punta sinistra del compasso, per essere questa punta in quella parte della prima scala cui corrisponde la caratteristica 1, porta a conchiudere essere il prodotto $148^m,18 \operatorname{tang} 14^g,64$ eguale a 34,69. Siccome poi vennero aggiunte 100 unità alla numerazione della terza scala per avere il numero esprimente $114^g,64$, per quanto si è detto nel numero 300, l'indicato prodotto va assunto come negativo.

III. *Dati i numeri generatori* $S = 156,30$, $\theta = 0^g,10$ e $\varphi = 70^g$, *determinare i quattro prodotti* $S \operatorname{sen}^2 \varphi$, $D \cos \theta$, $D \operatorname{sen} \theta$ e $D \cot \varphi$.

Il prodotto $S \operatorname{sen}^2 \varphi$ si ottiene prendendo sulla quarta scala l'apertura di compasso determinata dalla distanza che esiste fra l'estremo di destra di questa scala e la divisione cui corrisponde il numero 70, e portando quindi quest'apertura sulla prima scala da destra a sinistra a partire dalla divisione cui corrisponde il numero 156,30. Il punto di questa scala nel quale viene a cadere la punta di sinistra del compasso indica il prodotto $S \operatorname{sen}^2 \varphi$, ossia il valore di D, che in questo caso è di metri 124,09.

Per calcolare il prodotto $D \cos \theta = 124^m,09 \times \cos 0^g,10$ si prende sulla seconda scala l'apertura di compasso determinata dalla distanza che esiste fra il suo estremo di destra e la divisione cui corrisponde nella numerazione inferiore il numero $0^g,10$, e si porta sulla prima scala da destra a sinistra a partire dalla divisione cui corrisponde il numero 124,09. Il punto di questa scala in cui viene a cadere la punta di sinistra del compasso indica il prodotto $124,09 \times \cos 0^g,10$, il quale risulta di metri 124,08. — Se osservasi che la distanza esistente fra l'estremo di destra e la divisione della seconda scala cui nella numerazione inferiore corrisponde l'angolo $0^g,10$ è così piccola da potersi difficilmente valutare con un compasso, riesce facile il persuadersi come, per valori piccoli dell'angolo θ, convenga procedere per logaritmi, anzichè per complementi. Per effettuare il proposto prodotto procedendo per logaritmi, si osserva che la caratteristica del logaritmo del coseno di $0^g,10$ è 9, e che la sua parte decimale è rappresentata dall'intervallo che si può prendere col compasso sulla seconda scala a partire dal punto marcato 9 fino alla divisione cui corrisponde nella numerazione inferiore l'angolo $0^g,10$. Quest'apertura di compasso si porta da sinistra a destra sulla prima scala, a partire da quella divisione della prima parte di questa scala cui corrisponde il numero 124,09. Si trova che la punta di destra del compasso cade sulla seconda parte della scala, ed è in corrispondenza di questa punta che si deve leggere il prodotto domandato. Essendo 9 la caratteristica del logaritmo del coseno di $0^g,10$, 2 quella del logaritmo del numero 124,09, e cadendo la punta di destra del compasso nella seconda parte della scala dei logaritmi dei numeri, mentre il fattore 124,09 venne letto sulla prima parte della stessa scala, si conchiude: che la caratteristica corrispondente alla somma dei logaritmi di 124,09 e di $\cos 0^g,10$, letti sulle scale rispettive, è $9+2+1=12$; che questa caratteristica deve essere diminuita di 10 unità, perchè il logaritmo del coseno di $0^g,10$, dato dalla seconda scala è valutato nell'ipotesi del raggio 10^{10}, mentre nel proposto prodotto deve essere considerato siccome appartenente ad un circolo di raggio eguale all'unità; che per conseguenza la vera caratteristica del chiesto prodotto è 2; e finalmente che, leggendosi le cifre 12408 sotto la punta destra del compasso, è di metri 124,08 il domandato prodotto.

Si ottiene il prodotto $D \operatorname{sen} \theta$, usando della sola scala dei logaritmi dei numeri, giacchè, per quanto si è detto nel numero 299, è su questa scala che si valuta il logaritmo del seno di un angolo minore di 1^g. L'apertura di compasso, determinata dalla caratteristica 7 della numerazione superiore e dalla divisione $10'$, rappresenta la parte decimale del logaritmo del seno di $0^g,10$ nel raggio 10^{10}; portando quest'apertura da sinistra a destra a partire dalla divisione corrispondente al numero 124,09, si legge sotto la punta destra del compasso il numero 1963, le cui cifre costituiscono quelle del prodotto domandato. Siccome poi è 7 la caratteristica del logaritmo del seno di $0^g,10$ e 2 quella del logaritmo di 124,09, e siccome la punta destra del compasso cade nella stessa parte della scala in cui venne posta la punta di sinistra nel portare la parte decimale del logaritmo di $0^g,10$ di seguito alla parte decimale del logaritmo di 124,09, si conchiude: che la caratteristica corrispondente alla somma dei logaritmi di 124,09 e di sen $0^g,10$ è $7+2=9$; che questa somma deve essere diminuita di 10 unità, perchè il logaritmo del seno di $0^g,10$ si è calcolato nel raggio 10^{10}, mentre nel proposto prodotto deve essere considerato siccome appartenente ad un circolo di raggio eguale all'unità: che per conseguenza la stessa somma è un logaritmo aumentato di 10 unità, e che rappresenta il logaritmo di una frazione decimale, la quale ha una cifra significativa immediatamente dopo la virgola; e finalmente che si può assumere per valore del domandato prodotto il numero $0^m,196$.

Il prodotto $D\cot\varphi = 124^m,09 \times \cot 70^g$ si ottiene col metodo che venne seguìto nel problema I per ottenere il prodotto $148^m,18 \times \cot 85^g,36$, e trovasi che esso è di metri 63,23.

IV. *Le distanze orizzontali di due punti* A *e* B *da un punto* M *sono rispettivamente* $D'=75^m,20$ *e* $D''=65^m,50$; *e gli angoli azimutali letti in* M, *collimando ai detti punti* A *e* B, *sono rispettivamente* $\theta'=30^g,00$ *e* $\theta''=59^g,50$. *Ricavare successivamente i valori di* $\Delta\theta$, p, q, ω, D *e* Θ *dalle formole*

$$\Delta\theta = \theta' - \theta'',$$

$$p = D''\operatorname{sen}\Delta\theta,$$

$$q = D' - D''\cos\Delta\theta,$$

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{p}{q},$$

$$D = \frac{p}{\operatorname{sen}\omega},$$

$$\Theta = \theta' - (200^g - \omega).$$

Per la risoluzione di questo problema conviene inscrivere i dati ed i risultamenti del calcolo in una tavola come quella che immediatamente si riporta.

STAZIONI	PUNTI OSSERVATI	DISTANZE ORIZZONTALI	ANGOLI AZIMUTALI	RISULTATI p	q	ω	D	Θ
M	A	$D'=75,20$	$\theta'=30,00$	$-29,3$	16,6	332,83	33,6	162,83
	B	$D''=65,50$	$\theta''=59,50$					
			$\Delta\theta=370,50$					

Per schivare gli angoli negativi si è supposto l'angolo θ' aumentato di 400^g e così si ottenne $370^g,50$ per valore della differenza $\Delta\theta$, la quale per conseguenza rappresenta la differenza $\theta'-\theta''$ aumentata di 400^g; e per essere una linea trigonometrica di un angolo qualunque eguale alla stessa linea trigonometrica del medesimo angolo aumentato di 400^g, si deduce che il seno della vera differenza $\theta'-\theta''$ è identico al seno di $370^g,50$.

Osservando ora che nella seconda scala non si può prendere il logaritmo del seno di $370^g,50$, perchè quest'angolo è compreso fra 200^g e 400^g (num. 299), si aumenta il numero $370^g,50$ di 200^g, di questa somma si considera solamente la parte $170^g,50$ che supera 400^g, e non si dimentica che il seno corrispondente è negativo. Ciò premesso, prendasi sulla seconda scala l'apertura di compasso definita dall'estremità di destra e dalla divisione cui superiormente corrisponde la numerazione $170^g,50$. Quest'apertura rappresenta il complemento del logaritmo del seno dell'ultimo indicato angolo, e portandola in deduzione sulla prima scala da destra a sinistra a partire dalla divisione 65,50, conduce al risultato 29,3, il quale rappresenta il valore di p da prendersi negativamente per essere negativo il valore di sen $\Delta\theta$. Segue da ciò che si ha $p=-29^m,3$.

Per ottenere il valore di q s'incomincia a fare il prodotto $D''\cos\Delta\theta$ $=65,50\times\cos 370,50$. Osservasi perciò che l'angolo $370^g,50$ è di quelli appartenenti alla numerazione inferiore della seconda scala; che il complemento del logaritmo del suo coseno risulta dall'apertura di compasso determinata dall'estremo di destra e dalla divisione cui corrisponde il numero $370^g,50$; che, portando quest'apertura di compasso sulla prima scala a partire dalla divisione cui corrisponde il numero 65,50 e da destra a sinistra, si deve leggere sotto la punta di sinistra il prodotto domandato, il quale risulta di metri 58,6.

Questo numero deve essere dedotto dal valore di $D' = 75^m,20$, e quindi si ha $q = 75,20 - 58,60 = 16^m,6$.

Venendo alla ricerca dell'angolo ω si prende sulla prima scala lo intervallo compreso fra le due divisioni 16,6 e 29,3, facendo astrazione del segno. Quest'apertura di compasso rappresenta il logaritmo del quoziente $\frac{29,3}{16,6}$ e, siccome questo quoziente è maggiore dell'unità, l'angolo di cui esso è la tangente necessariamente risulta maggiore di 50^g. Osservando poi che il logaritmo di un numero, rappresentante la tangente di un angolo, si deve aumentare di 10 unità per avere il logaritmo di questa tangente quale si trova sulla relativa scala, ossia per averlo nel raggio 10^{10}, agevolmente si deduce che la definita apertura di compasso presa sulla prima scala rappresenta il valore assoluto del complemento del logaritmo della tangente dell'angolo che ha per tangente $\frac{29,3}{16,6}$, cosicchè portando la detta apertura di compasso sulla terza scala a partire dal suo estremo di destra, si viene a leggere sotto la punta sinistra e sulla numerazione inferiore l'angolo $67^g,17$. Ora, il quoziente $\frac{p}{q}$ non è positivo, ma sibbene negativo; l'angolo ω adunque deve essere compreso fra 100^g e 200^g, oppure fra 300^g e 400^g; e quindi, a seconda della figura in cui trovasi quest'angolo, devesi avere

$$\omega = 200 - 67,17 = 132^g,83,$$

oppure

$$\omega = 400 - 67,17 = 332^g,83.$$

Per ottenere la distanza D nell'ipotesi che l'angolo ω, da valutarsi in modo analogo all'angolo ω_1 della figura 377, sia di $332^g,83$, si incomincia dall'aggiungervi (num. 299) 200 per avere la somma $532^g,83$, e si considera la sola parte che supera 400^g, ossia $132^g,83$. Dopo si prende sulla seconda scala l'apertura di compasso esistente fra la sua estremità di destra e la divisione $132^g,83$ della numerazione superiore. Quest'apertura di compasso rappresenta il complemento del logaritmo del seno dell'or indicato angolo, e, per la regola settima del precedente numero, portandola sulla prima scala di seguito alla divisione 29,3 sotto la punta destra del compasso si legge il numero 33,6 ossia il quoziente $\frac{29,3}{\text{sen}\,132^g,83}$.

Siccome poi si ha $p = -29,5$ e siccome fu necessità aumentare di 200^g l'angolo ω per avere il complemento del logaritmo del suo seno dalla seconda scala, se ne deduce che i due termini p e $\text{sen}\,\omega$ del quoziente $\frac{p}{\text{sen}\,\omega}$ sono negativi, e che quindi questo quoziente è positivo, cosicchè si ha $D = 33^m,6$.

Resta ancora a trovarsi l'angolo Θ. Nell'ipotesi in cui $\omega = 332^g,83$, si ha $200^g - \omega = -132^g,83$, e quindi il valore di Θ vien dato da

$$\Theta = 30 + 132,83 = 162^g,83.$$

V. *Dati i numeri* $X = 202^m,3$, $X_1 = 152^m$, $Y = 90^m$, $Y_1 = 130^m$, $\theta = 72^g,97$ *e* $\theta_1 = 26^g,96$, *d'onde risulta* $\Delta X = X - X_1 = 50^m,3$, $\Delta Y = Y - Y_1 = -40^m$ *e* $\Delta\theta = 46^g,01$, *ricavare il valore di* y *e di* x *dalle formole*

$$y = -\Delta Y \frac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\Delta\theta} \cos\theta_1 + \Delta X \frac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\Delta\theta} \text{sen}\,\theta_1,$$

$$x = y \cot\theta.$$

S'incomincia dal prendere sulla seconda scala, ossia su quella dei seni, l'intervallo che passa fra la divisione 46,01 e la divisione 72,97, e l'apertura di compasso corrispondente a quest'intervallo rappresenta il logaritmo del quoziente $\frac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\Delta\theta}$. Quest'apertura di compasso si porta sulla prima scala da sinistra a destra, a partire dalla divisione 40; e l'intervallo compreso fra l'estremo di sinistra della scala ed il punto in cui cade la punta di destra del compasso rappresenta il logaritmo del prodotto $\Delta Y \frac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\Delta\theta}$, e per essere negativo il valore di ΔY, la lettura che si fa sotto questa punta porta a conchiudere

$$-\Delta Y \frac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\Delta\theta} = 55,2.$$

L'apertura di compasso la quale corrisponde al logaritmo del quoziente $\frac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\Delta\theta}$ si porta ancora sulla prima scala a partire dalla divisione 50,3; si ottiene il logaritmo del prodotto $\Delta X \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\Delta\theta}$ nell'intervallo che passa fra l'estremo di sinistra della stessa scala ed il punto in cui cade la punta destra del compasso; e la lettura sotto questa punta porta a trovare

$$\Delta X \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\Delta\theta} = 69,3.$$

Fatto questo, si prende sulla seconda scala il complemento del logaritmo del coseno di $26^g,96$ dalla sua estremità di destra fino a questa divisione, e mediante il compasso si porta in deduzione sulla prima scala a partire dalla divisione 55,2. Leggendo sotto la punta di sinistra del compasso si ha il prodotto $55,2 \times \cos 26^g,96$, e si arriva a conchiudere che

$$-\Delta Y \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\Delta\theta} \cos\theta_1 = 50,3.$$

Con un metodo affatto analogo si può ottenere il prodotto $69,3 \times \operatorname{sen} 26^g 96$, e conchiudere che

$$\Delta X \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\Delta\theta} \operatorname{sen}\theta_1 = 28,5.$$

Sommando ora i due valori trovati dei due termini della formola che dà il valore di y, si ha

$$y = 50,3 + 28,5 = 78,8,$$

cosicchè la lunghezza y risulta di metri 78,8.

Una volta trovato il valore di y, assai facilmente si può dedurre quello di x. Perciò si prende sulla terza scala l'intervallo compreso fra l'estremo di destra e la divisione cui corrisponde il numero $72^g,97$; quest'apertura di compasso si porta in deduzione sulla scala dei numeri a partire dalla divisione 78,8; e si trova che il valore di x è di $55^m,7$.

Supponendo che X ed Y, X_1 ed Y_1 sieno le coordinate orizzontali di due punti di stazione M ed M_1 e che θ e θ_1 sieno i due angoli azimutali, sotto i quali da essi venne osservato un punto D, i dati ed i risultamenti del calcolo si possono inscrivere in una tabella come quella che segue:

STAZIONI	PUNTI	COORDINATE ORIZZONTALI		ANGOLI AZIMUTALI	RISULTATI	
		X	Y	θ	y	x
M	D	+ 202,3	+ 90,0	72,97	78,8	35,7
M_1		+ 152,0	+ 130,0	26,96		
		$\Delta X = + 50,3$	$\Delta Y = - 40,0$	$\Delta\theta = 46,01$		

VI. *Le coordinate orizzontali di due punti* M *ed* M' *sono rispettivamente* $X = 185^m,4$ *ed* $Y = 136,2$, $X' = 35,8$ *ed* $Y' = 47,3$. *Ricavare successivamente i valori di* θ *e di* D *dalle formole*

$$\tang \theta = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

$$D = \frac{\Delta X}{\cos\theta} = \frac{\Delta Y}{\operatorname{sen}\theta}.$$

I dati del problema ed i risultamenti del calcolo possono essere inscritti nella seguente tabella:

PUNTI	COORDINATE ORIZZONTALI		RISULTATI	
	X	Y	θ	D
M	+ 185,4	+ 136,2	$234^g,13$	$173^m,6$
M'	+ 35,8	+ 47,3		
	$\Delta X = + 149,6$	$\Delta Y = + 88,9$		

Per calcolare l'angolo θ, si prende sulla prima scala l'intervallo compreso fra le divisioni che corrispondono ai numeri 149,6 e 88,9. Quest'apertura di compasso, analogamente a quanto già si fece nel problema IV pel calcolo dell'angolo ω, si porta sulla scala delle tangenti a partire dalla sua estremità di destra. Sotto la punta sinistra del compasso si trova la divisione 34,13, corrispondentemente alla numerazione superiore, e la divisione 65,87 corrispondentemente alla numerazione inferiore; e, siccome l'angolo che si cerca ammette per valore della sua tangente il quoziente $\frac{88,9}{149,6}$, che è minore dell'unità, si conchiude che esso corrisponde a quella delle indicate letture che è minore di 50^g, ossia a $34^g,13$.

L'angolo θ dato dalla prima formola rappresenta l'angolo azimutale della retta MM' e, a seconda dei segni e dei valori di ΔX e di ΔY, può assumere valori diversi, i quali assai facilmente possono essere determinati dietro l'ispezione della figura od anche servendosi della seguente tabella:

SEGNI DI		L'ANGOLO AZIMUTALE SI TROVA SE			
		$\Delta Y < \Delta X$		$\Delta Y > \Delta X$	
ΔX	ΔY	fra	e	fra	e
—	—	0^g	50^g	50^g	100^g
+	—	150	200	100	150
+	+	200	250	250	300
—	+	350	400	300	350

Nel caso particolare considerato, essendo positivi i valori di ΔX e di ΔY, ed essendo $\Delta Y < \Delta X$, l'angolo azimutale θ deve essere compreso fra 200^g e 250^g, e quindi il suo valore deve risultare di $234^g,13$.

Venendo ora alla determinazione del valore di D, il quale è dato da $\frac{\Delta X}{\cos\theta}$, s'incomincia dal prendere sulla seconda scala l'intervallo compreso fra l'estremo di destra e la divisione corrispondente all'angolo $34^g,13$ letto sulla numerazione inferiore. Quest'apertura di compasso si porta sulla prima scala da sinistra verso destra a partire dalla divisione cui corrisponde il numero 149,6, e il numero 173,6, che si può leggere sotto la punta destra del compasso, conduce a conchiudere che la distanza D fra i due punti M ed M_1 è di metri 173,6.

Il calcolo di D può anche essere eseguito facendo il quoziente $\frac{\Delta Y}{\operatorname{sen}\theta}$. Perciò si prende sulla seconda scala, ed a partire dalla sua estremità di destra l'intervallo fra essa compreso e la divisione cui nella numerazione superiore corrisponde l'angolo $34^g,13$. Quest'apertura si porta sulla prima scala da sinistra a destra a partire dalla divisione alla quale corrisponde il numero 88,9, e sotto la punta destra del compasso si leggerà il valore di D dato da $173^m,6$.

304. **Varie forme che si possono dare alle scale logaritmiche.** — Le scale logaritmiche, di cui venne indicata la costruzione e l'uso, oltre di riescire di facile maneggio, hanno ancora il vantaggio di un costo che non può essere molto elevato, per cui pare che non debbasi trovare difficoltà ad introdurne l'uso nelle operazioni di celerimensura. La disposizione rettilinea però non è la sola che si possa adottare, ed il professore Porro assai vantaggiosamente seppe dare alle scale logaritmiche la disposizione circolare. Questa ultima disposizione permette di prendere per unità logaritmica la circonferenza intiera, e facilmente si comprende come, rientrando essa per così dire in sè stessa, non occorre ripetere almeno due volte la scala dei logaritmi dei numeri.

Il signor ingegnere Moinot, nel suo lavoro intitolato *Levés de plans à la stadia*, suggerisce l'impiego di un regolo calcolatore centesimale, sul quale si trovano le quattro scale logaritmiche di cui si parlò in quest'articolo, e che serve alle calcolazioni di celerimensura mediante uno scorrevole che longitudinalmente può muoversi entro il regolo fisso. Con questo regolo però, tuttochè conduca esso a buoni risultati in un tempo ancora breve, non è possibile operare con quel grado d'incredibile speditezza, che solo si può raggiungere colle scale logaritmiche e col circolo logaritmico del professore Porro.

ARTICOLO III.

Operazioni di celerimensura.

305. **Rilevamento di una porzione di terreno i cui punti sono tutti visibili da una sola stazione.** — Quando si deve rilevare una porzione di terreno poco estesa e tale che tutti i vertici del suo perimetro riescono visibili e determinabili da un sol punto di stazione, giacchè per ciascuno di essi è possibile la determinazione dei numeri generatori (num. 290), si mette in stazione il goniometro, successivamente si manda l'operatore che porta la stadia in ciascuno dei punti da rilevarsi, ed in apposito registro si marcano i numeri generatori corrispondenti.

presentandosi delle linee curve, si determinano le loro estremità ed alcuni punti intermedii; e, dovendosi eseguire un'operazione di rilevamento, avente per iscopo di somministrare i dati necessarii allo studio di progetti per strade, per canali, per spianamenti e per altri analoghi lavori, la cui esecuzione richiede che si conosca con molta esattezza la forma della superficie del suolo, non basta determinare il solo contorno dell'appezzamento su cui si opera e delle linee che lo dividono; ma bisogna ancora prendere nell'interno quanti punti si credono opportuni per definire in tutti i sensi la figura altimetrica del terreno. Questi punti si devono scegliere in modo da potersi essi considerare siccome vertici di una superficie poliedrica inscritta ed assai prossima alla superficie naturale del terreno; e di più, nell'intento di acquistare una perfetta conoscenza delle accidentalità tutte della superficie sulla quale si opera, non bisogna dimenticare di far un abbozzo di tutti quei particolari che in qualche modo possono influire sull'esatta determinazione della sua forma e delle sue dimensioni.

Una volta compiute le operazioni sul terreno, al tavolino si determinano coll'impiego delle formole (1), (3), (4) e (2) del numero 290 e coll'uso delle scale o del circolo logaritmico: la distanza orizzontale D che ciascun punto rilevato ha dal punto di stazione; le sue coordinate orizzontali x ed y per rapporto alla direzione assunta dal diametro del circolo azimutale quando l'apparecchio magnetico indicava l'orientamento del goniometro sul terreno; e finalmente l'altezza z per rapporto al piano orizzontale determinato dal punto in cui si trovava il centro del circolo zenitale nel prendere i numeri generatori. Se quest'altezza risulta positiva, il punto a cui si riferisce è al disopra del detto piano orizzontale, al disotto quando è negativa; e, volendosi determinare le altezze di tutti i punti del terreno per rapporto ad un altro piano orizzontale scelto al di sopra o al disottò di quello accennato, si devono togliere od aggiungere le ordinate z alla distanza che deve passare fra queste ed il nuovo piano di paragone.

306. **Rilevamento di una porzione di terreno i cui punti sono tutti visibili da due stazioni.** — In questo caso s'incomincia dal fare stazione in un primo punto M (*fig.* 377), e si opera precisamente come si è detto nel precedente numero, non dimenticando di rilevare almeno due punti A e B, visibili dal punto M_1 in cui vuolsi fare la seconda stazione, e tali che la distanza che li separa non sia troppo differente da quella che esiste fra le due stazioni M ed M_1.

Ultimato il lavoro nella stazione M, si porta il goniometro in M_1, si mette esso in istato d'azione e si determinano in seguito i numeri generatori corrispondenti ai due punti A e B, già rilevati dalla prima stazione. Egli è chiaro che, ammessa la possibilità di poter avere che il diametro zero del circolo azimutale si trovi nella seconda stazione parallelo e disposto come lo era nella prima, basterebbe collimare ad un sol punto A; ma, a motivo delle deviazioni alle quali è soggetto l'apparecchio magnetico, è quasi impossibile che esattamente abbia luogo l'accennato parallelismo, ed i due punti A e B diventano indispensabili, sia per collegare le operazioni fatte dalla prima stazione con quelle da eseguirsi dalla seconda, sia per contemporaneamente accertarsi dell'esattezza del lavoro.

Per assicurarsi di quest'esattezza, si procede innanzi tutto a calcolare in due modi la distanza orizzontale fra i due punti A e B, considerandola cioè siccome lato del triangolo AMB e siccome lato del triangolo AM_1B; si osserva quindi se sono eguali i due risultamenti od almeno se differiscono fra loro di una quantità trascurabile. Si procede dopo al calcolo dell'angolo azimutale N'AB, traendo partito dei dati misurati in M col collimare ad A ed a B, e quindi al calcolo dell'altro angolo azimutale N'_1AB, mediante i dati presi in M_1 coll'osservare gli stessi punti A e B, e questo per conoscere se sono eguali o diversi i due risultamenti. Presentandosi fra i due valori trovati per $\overline{AB}$ una discrepanza eccedente i limiti delle prestabilite tolleranze, conviene rifare in M_1 le osservazioni sui due punti A e B per vedere se alle volte non si ottengono dei nuovi risultati i quali fanno sparire l'indicata eccessiva discrepanza, e giungendo ancora agli stessi risultati è giuocoforza il conchiudere che venne commesso qualche errore nelle osservazioni fatte in M, e che per conseguenza si devono queste rifare. Nel caso poi che la verificazione manifesti solo una discrepanza nei due angoli azimutali calcolati per la direzione AB, la differenza fra questi due angoli rappresenta la correzione d'orientamento da applicarsi alle letture degli angoli azimutali fatte in M_1 onde ottenere i valori di questi angoli, come se il diametro zero del goniometro avesse avuto nella seconda stazione una direzione perfettamente parallela a quella che aveva nella prima. Per condurre a compimento queste verificazioni, si chiamino:

$\Delta\theta$ la differenza $\theta' - \theta''$ fra l'angolo azimutale letto col collimare ad A e quello letto col collimare a B dalla stazione M;

D′ e D″ le due distanze orizzontali fra M ed A, e fra M e B;

$\Delta\theta_1$ la differenza $\theta'_1 - \theta''_1$ fra l'angolo azimutale letto dalla stazione M_1 col collimare ad A e quello letto col collimare a B;

D'_1 e D''_1 le due distanze orizzontali fra M_1 ed A, e fra M_1 e B;

s'immaginino abbassate, da B una perpendicolare $\overline{BD}$ su AM ed una perpendicolare $\overline{BD_1}$ su AM_1;

si dicano

p e p_1 le lunghezze di queste due perpendicolari;

q e q_1 i due segmenti $\overline{AD}$ ed $\overline{AD_1}$;

ω ed ω_1 i due angoli BAM e BAM_1 valutati come lo indica la figura;

e finalmente sieno

D e D_1 in due valori della distanza $\overline{AB}$, considerata successivamente siccome appartenente al triangolo AMB ed al triangolo AM_1B;

Θ e Θ_1 i due angoli azimutali della direzione AB dedotti rispettivamente dagli stessi triangoli.

Dal triangolo rettangolo MDB immediatamente si deduce

$$p = D'' \operatorname{sen} \Delta\theta \qquad (1),$$

$$\overline{MD} = D'' \cos \Delta\theta;$$

e, per essere $q = \overline{AD} = \overline{MA} - \overline{MD}$, risulta

$$q = D' - D'' \cos \Delta\theta \qquad (2).$$

Considerando poi il triangolo rettangolo ADB, subito si ottiene

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{p}{q} \qquad (3),$$

$$D = \frac{p}{\operatorname{sen} \omega} = \frac{q}{\cos \omega} \qquad (4);$$

e l'angolo azimutale $N'AB = \Theta$, dedotto dai dati presi in M col collimare ai due punti A e B, viene evidentemente dato da

$$\Theta = \theta' - (200^g - \omega) \qquad (5).$$

Analogamente, considerando i due triangoli rettangoli M_1D_1B ed AD_1B, si ottengono le relazioni

$$p_1 = D_1'' \operatorname{sen} \Delta \theta_1 \qquad (6),$$

$$q_1 = D_1' - D_1'' \cos \Delta \theta_1 \qquad (7),$$

$$\operatorname{tang} \omega_1 = \frac{p_1}{q_1} \qquad (8),$$

$$D_1 = \frac{p_1}{\operatorname{sen} \omega_1} = \frac{q_1}{\cos \omega_1} \qquad (9),$$

$$\Theta_1 = \theta_1' - (200^g - \omega_1) \qquad (10).$$

Supponendo che il diametro zero del goniometro abbia la direzione MN quando si opera in M, l'angolo Θ risulta quello che la direzione AB fa colla direzione AN' condotta per A parallelamente ad MN. Analogamente, supponendo che lo stesso diametro abbia la direzione M_1N_1 non precisamente parallela ad MN quando si opera in M_1, l'angolo Θ_1 risulta quello che la direzione AB fa colla direzione AN'_1 condotta per A parallelamente da M_1N_1. La differenza $\Theta - \Theta_1$ fra il primo ed il secondo angolo evidentemente rappresenta la diversità d'orientamento nelle due stazioni M ed M_1, ed aggiungendo questa differenza, col segno che ha, a tutti gli angoli che vennero letti in M_1, si ottengono quelli che effettivamente si sarebbero letti qualora il diametro zero fosse stato disposto nella stazione M_1 con una direzione precisamente parallela a quella che aveva nella stazione M.

I calcoli degli angoli Θ e Θ_1 e quelli delle distanze D e D_1, si devono eseguire sul terreno stesso per subito rettificare l'operazione quando si trovano discrepanze notevoli nei valori di D e di D_1; e quando si trova solamente una diversità fra gli angoli Θ e Θ_1 si continua l'operazione nella stazione M_1 coll'orientazione che ha lo strumento, colla riserva di apportare in seguito la necessaria correzione a tutti gli angoli azimutali, la qual correzione vien generalmente eseguita al tavolino allorquando tutte le operazioni di campagna sono ultimate.

Dopo le operazioni di campagna, il primo lavoro da farsi al tavolino è quello di apportare le opportune correzioni agli angoli azimutali stati letti dalla stazione M_1, qualora gli angoli Θ e Θ_1 non siansi trovati eguali; e questa correzione si fa aggiungendo, come già si disse, la differenza $\Theta - \Theta_1$ a tutti gli angoli azimutali misurati in M_1.

Corretti gli angoli azimutali, si calcolano, mediante le formole

(1), (3), (4) e (2) del numero 290, le tre coordinate dei punti di collegamento A e B tanto per rapporto agli assi coordinati ausiliarii, la cui origine è il punto corrispondente alla posizione del centro del circolo zenitale del goniometro, posto in stazione in M, quanto per rapporto agli assi coordinati ausiliarii passanti pel punto corrispondente alla posizione dello stesso centro nella stazione M_1. Chiamando

x_a, y_a e z_a le tre coordinate del punto A e

x_b, y_b e z_b quelle del punto B per rapporto alla prima origine,

x_{1a}, y_{1a} e z_{1a} le tre coordinate del punto A e

x_{1b}, y_{1b} e z_{1b} quelle del punto B per rapporto alla seconda origine,

si ha che le proiezioni, sul sistema di assi coordinati ausiliarii corrispondente al punto M, della retta determinata dai *centri di stazione*, ossia dalle posizioni del centro del circolo zenitale nelle due stazioni M ed M_1, sono: sull'asse delle ascisse x

$$x_a - x_{1a}$$

oppure

$$x_b - x_{1b};$$

sull'asse delle ordinate orizzontali y

$$y_a - y_{1a}$$

oppure

$$y_b - y_{1b};$$

ed analogamente sull'asse delle ordinate verticali z

$$z_a - z_{1a}$$

oppure

$$z_b - z_{1b}.$$

Ora, essendo una sola la retta determinata dai centri di stazione in M ed M_1, una sola deve pur essere la sua proiezione su ciascun asse, cosicchè si avranno le tre condizioni

$$x_a - x_{1a} = x_b - x_{1b}$$

$$y_a - y_{1a} = y_b - y_{1b}$$

$$z_a - z_{1a} = z_b - z_{1b},$$

le quali, se esattamente non sono soddisfatte, saranno però molto prossime ad esserlo. Prendendo poi per valori delle tre coordinate del centro di stazione in M_1, per rapporto agli assi coordinati ausiliarii passanti pel centro di stazione in M, le tre lunghezze x_1, y_1 e z_1, date da

$$x_1 = \frac{(x_a - x_{1a}) + (x_b - x_{1b})}{2}$$

$$y_1 = \frac{(y_a - y_{1a}) + (y_b - y_{1b})}{2}$$

$$z_1 = \frac{(z_a - z_{1a}) + (z_b - z_{1b})}{2},$$

si hanno tre medie le quali si possono ritenere siccome rappresentanti valori assai prossimi ai veri delle distanze ortogonali dei due centri di stazione in M ed M_1.

Fissate le coordinate x_1, y_1 e z_1 dal centro di stazione in M_1 per rapporto agli assi coordinati ausiliarii passanti pel centro di stazione in M, si assumano le tre coordinate X, Y e Z di questo secondo centro per rapporto agli assi principali; ed allora le coordinate X_1, Y_1 e Z_1 del centro di stazione in M_1 per rapporto agli stessi assi principali vengono date da

$$X_1 = X + x_1$$

$$Y_1 = Y + y_1$$

$$Z_1 = Z + z_1.$$

Conoscendosi le coordinate definitive dei centri di stazione in M ed M_1, riesce facile il calcolo delle coordinate definitive di tutti i punti che vennero rilevati. Si calcolino perciò, mediante le formole (1), (2), (3) e (4) del numero 290, le coordinate ausiliarie di tutti i punti che formarono l'oggetto delle operazioni eseguite in M, e queste, aggiunte col loro segno, alle coordinate X, Y e Z del centro di stazione in M, danno nelle risultanti somme algebriche le coordinate definitive dei punti a cui si riferiscono. Analogamente, si determinino le coordinate ausiliarie di tutti i punti per cui dalla stazione M_1 si determinarono i numeri generatori, e queste, aggiunte alle coordinate X_1, Y_1 e Z_1 del centro di stazione in M_1, conducono alle coordinate definitive per ciascuno dei punti rilevati dalla seconda stazione.

307. **Rilevamento di una porzione di terreno nel caso in cui sono necessarie più di due stazioni.** — In questo caso bisogna scegliere i punti di stazione ed i punti di collegamento in modo che ciascuna stazione si trovi coordinata a quelle vicine almeno mediante due punti, e le operazioni sul terreno si conducono a compimento col metodo che venne indicato nel precedente numero. L'operatore in ogni stazione fa prima le osservazioni sui punti di collegamento, e quindi immediatamente verifica sul terreno stesso se l'operazione procede regolarmente, seguendo in tutto il metodo indicato nel precedente numero. Passa dopo alla determinazione dei numeri generatori per ciascuno dei punti che crede opportuno di dover rilevare; marca in apposito registro i risultamenti delle misure e sopra conveniente abbozzo mette in evidenza le accidentalità del terreno.

La prima delle operazioni da farsi al tavolino è quella di apportare le necessarie correzioni agli angoli azimutali. Supponendo che i punti di stazione siano M, M_1, M_2, ... (*fig.* 378), che siano A e B, A_1 e B_1, ... i punti di collegamento, e che gli angoli azimutali siano rispettivamente stati valutati in M, M_1, M_2 .... colle direzioni MN, M_1N_1, M_2N_2, ... non rigorosamente parallele fra di loro, mediante le osservazioni fatte in M ed M_1 sui punti A e B applicando le formole (1), (2), (3), (5), (6), (7), (8) e (10) del numero precedente, riesce agevole trovare la correzione $N'_1An' = N_1M_1n_1$ da apportarsi agli angoli azimutali letti in M_1 per ridurli a quelli che si sarebbero letti qualora il diametro zero del goniometro fosse stato nella seconda stazione parallelo alla direzione MN che aveva nella prima. Analogamente, applicando le stesse formole col porre nelle (1), (2), (3) e (5) gli angoli azimutali corretti relativi alle direzioni M_1A_1 ed M_1B_1 e col porre nelle (6), (7), (8) e (10) quelli risultanti dalle osservazioni fatte da M_2 sugli stessi punti A_1 e B_1, si deduce la correzione $N'_2A_1n'_1 = N_2M_2n_2$ da farsi agli angoli azimutali letti in M_2 per riferirli alla direzione M_2n_2 parallela ad MN. Nello stesso modo che gli angoli azimutali corretti, aventi il vertice in M_1, hanno servito per trovare la correzione da farsi sugli angoli azimutali stati letti in M_2, questi ultimi, convenientemente corretti, serviranno a dedurre la correzione da apportarsi a quelli letti nella stazione successiva; e così, passando dall'uno all'altro dei diversi quadrilateri aventi per vertici due stazioni successive e gli interposti punti di collegamento, riesce facile il correggere tutti gli angoli azimutali in modo che essi risultino quali si sarebbero letti qualora il diametro zero del circolo azimutale del goniometro avesse conservato nelle diverse stazioni delle direzioni rigorosamente parallele.

Alla correzione degli angoli azimutali deve tener dietro la determinazione delle coordinate x_1, y_1 e z_1 del centro di stazione in M_1 per rapporto agli assi coordinati ausiliarii passanti pel centro di stazione in M, quella delle coordinate x_2, y_2 e z_2 del centro di stazione in M_2 per rapporto agli assi ausiliarii passanti pel centro di stazione in M_1, e così di seguito le determinazioni delle tre coordinate di ciascun centro di stazione per rapporto agli assi ausiliarii passanti pel centro della stazione precedente. Queste determinazioni non presentano difficoltà alcuna, giacchè si effettuano colle norme che vennero date nel numero precedente, considerando separatamente ciascuno dei quadrilateri MAM_1B, $M_1A_1M_2B_1$, ...

Se una linea poligonale avente per vertici i centri di diverse stazioni costituisce un perimetro chiuso, per modo che in questo poligono riesca possibile calcolare le coordinate di ciascun vertice per rapporto agli assi ausiliarii passanti pel vertice precedente, e quindi anche quelle del primo vertice per rapporto agli assi coordinati ausiliarii passanti per l'ultimo, evidentemente le tre somme algebriche delle ascisse x, delle ordinate orizzontali y e delle ordinate verticali z devono separatamente ridursi a zero; cosicchè, indicando simbolicamente queste tre somme con Σx, Σy e Σz, devono essere verificate le tre condizioni

$$\Sigma x = 0$$

$$\Sigma y = 0$$

$$\Sigma z = 0,$$

e, trovandosi delle discrepanze, non devono le medesime essere maggiori delle tolleranze che è necessità l'ammettere dipendentemente dal metodo d'operare, dalla precisione degli strumenti che si adoperano e dall'attitudine degli operatori. Per correggere poi le diverse coordinate parziali, in modo che anche queste discrepanze più non si manifestino, nelle ordinarie operazioni della pratica, in cui difficilmente si vuol ricorrere alle difficili teorie delle compensazioni degli errori, si possono seguire due diversi metodi. Uno di questi metodi consiste nel dividere i valori delle somme Σx, Σy e Σz, che dovrebbero essere nulli, ma che non lo sono, per il numero n dei lati del perimetro chiuso, e nel dedurre, dalle coordinate x, y e z di un vertice qualunque per rapporto agli assi ausiliarii passanti pel vertice precedente, le tre coordinate corrette x', y' e z' per rapporto agli stessi assi col porre

$$x'=x-\frac{\Sigma x}{n}$$

$$y'=y-\frac{\Sigma y}{n}$$

$$z'=z-\frac{\Sigma z}{n}.$$

Il secondo metodo si riduce: a fare le tre somme Σx_p, Σy_p e Σz_p delle coordinate parziali positive, non che le tre somme Σx_n, Σy_n e Σz_n dei valori assoluti delle coordinate parziali negative; a prendere le tre medie aritmetiche

$$\frac{\Sigma x_p+\Sigma x_n}{2}=X_m,$$

$$\frac{\Sigma y_p+\Sigma y_n}{2}=Y_m,$$

$$\frac{\Sigma z_p+\Sigma z_n}{2}=Z_m;$$

a calcolare i sei rapporti $\frac{X_m}{\Sigma x_p}$, $\frac{Y_m}{\Sigma y_p}$, $\frac{Z_m}{\Sigma z_p}$, $\frac{X_m}{\Sigma x_n}$, $\frac{Y_m}{\Sigma y_n}$, $\frac{Z_m}{\Sigma z_n}$; e finalmente a moltiplicare ciascuna delle coordinate ausiliarie pel corrispondente rapporto. Così, si otterranno le coordinate parziali corrette corrispondenti alle tre coordinate parziali positive x_p, y_p e z_p ricavando i valori di x'_p, y'_p e z'_p dalle formole

$$x'_p=\frac{X_m}{\Sigma x_p}x_p,$$

$$y'_p = \frac{Y_m}{\Sigma y_p} y_p,$$

$$z'_p = \frac{Z_m}{\Sigma z_p} z_p;$$

ed analogamente si otterranno le coordinate parziali corrette corrispondenti alle tre coordinate parziali negative x_n, y_n e z_n, calcolando i valori x'_n, y'_n e z'_n mediante le formole

$$x_n' = \frac{X_m}{\Sigma x_n} x_n,$$

$$y_n' = \frac{Y_m}{\Sigma y_n} y_n,$$

$$z_n' = \frac{Z_m}{\Sigma z_n} z_n;$$

Degli indicati due metodi per correggere le piccole discrepanze che si manifestano fra le coordinate parziali dei vertici di una linea poligonale chiusa, il primo è notevolmente più semplice del secondo, ed i pratici lo ritengono siccome abbastanza buono solamente quando non sono molto differenti le une dalle altre le ascisse parziali, e quando lo stesso ha luogo per le ordinate orizzontali e per le ordinate verticali.

Una volta definite le coordinate di ciascun centro di stazione per rapporto agli assi ausiliarii passanti pel centro che precede quello che si considera, il calcolatore si fissa le coordinate definitive di uno qualunque di questi centri. Supponendo, per esempio, che si assumano le tre coordinate X, Y e Z del centro di stazione in M, si ottengono le coordinate X_1, Y_1 e Z_1 del secondo centro di stazione in M_1, le cui coordinate parziali per rapporto agli assi ausiliarii passanti pel centro di stazione in M sono x'_1, y'_1 e z'_1, col porre

$$X_1 = X + x'_1$$

$$Y_1 = Y + y'_1$$

$$Z_1 = Z + z'_1.$$

Analogamente si determinano le coordinate X_2, Y_2 e Z_2 del centro di stazione in M_2, le cui coordinate parziali per rapporto agli assi ausiliarii passanti pel centro di stazione in M_1 sono x'_2, y'_2 e z'_2, mediante le formole

$$X_2 = X_1 + x'_2$$

$$Y_2 = Y_1 + y'_2$$

$$Z_2 = Z_1 + z'_2,$$

e così continuando si possono avere le coordinate di tutti i centri di stazione per rapporto agli assi coordinati principali.

Se una linea poligonale secondaria di un numero qualunque di lati, i cui vertici corrispondono ad altrettanti centri di stazione, va da un vertice ad un altro di una linea poligonale primaria chiusa o non, per la quale già vennero determinate le coordinate definitive dei varii vertici corrispondenti pure ai centri di stazione, per il semplicissimo assioma che la somma delle parti eguaglia il tutto, devono esistere le tre relazioni

$$\Sigma x - \Delta X = 0$$

$$\Sigma y - \Delta Y = 0$$

$$\Sigma z - \Delta Z = 0,$$

le quali esprimono che le differenze ΔX, ΔX e ΔZ fra le coordinate definitive dei due punti in cui la linea poligonale secondaria viene a terminare sulla linea poligonale primaria, devono rispettivamente eguagliare le somme Σx delle ascisse, Σy delle ordinate orizzontali e Σz delle ordinate verticali del secondo punto della linea poligonale secondaria per rapporto agli assi coordinati ausiliarii passanti pel suo primo punto, il quale appartiene anche alla linea poligonale primaria, del terzo punto della linea poligonale per rapporto agli assi ausiliarii passanti pel secondo, e, così continuando, dell'ultimo punto della linea poligonale secondaria, il quale trovasi pure sulla linea poligonale primaria, per rapporto agli assi ausiliarii passanti per il penultimo punto della stessa linea poligonale secondaria. Ben di rado le tre ultime relazioni trovansi rigorosamente soddisfatte, ma le loro discrepanze devono essere al disotto della tolleranza che di necessità bisogna ammettere, e, per far sparire anche queste piccole discrepanze, convien procedere con metodi analoghi ai due indicati per la linea poligonale chiusa. Il primo metodo si riduce a dividere le quantità $\Sigma x - \Delta X$, $\Sigma y - \Delta Y$ e $\Sigma z - \Delta Z$ che dovrebbero essere nulle, ma che non lo sono, per il numero n dei lati della linea poligonale secondaria, e nel dedurre, dalle coordinate x, y e z di un vertice qualunque per rapporto agli assi ausiliarii passanti pel vertice precedente, le sue coordinate corrette x', y' e z' per rapporto agli stessi assi mediante le semplicissime formole

$$x' = x - \frac{1}{n}(\Sigma x - \Delta X)$$

$$y' = y - \frac{1}{n}(\Sigma y - \Delta Y)$$

$$z' = z - \frac{1}{n}(\Sigma z - \Delta Z).$$

Il secondo metodo consiste nel calcolarsi i tre rapporti $\frac{\Delta X}{\Sigma x}$, $\frac{\Delta Y}{\Sigma y}$ e $\frac{\Delta Z}{\Sigma z}$, e nel dire che le coordinate corrette x', y' e z', corrispondenti alle tre coordinate x, y e z e relative ad un vertice qualunque, per rapporto agli assi ausiliarii passanti pel vertice precedente, vengono date da

$$x' = \frac{\Delta X}{\Sigma x} x$$

$$y' = \frac{\Delta Y}{\Sigma y} y$$

$$z' = \frac{\Delta Z}{\Sigma z} z.$$

Questi due metodi pratici, i quali si possono adottare per correggere le piccole discrepanze che sovente si manifestano fra le coordinate parziali dei vertici di una linea poligonale, sono ben facili ad applicarsi, ed il primo di essi si ritiene come abbastanza buono solamente quando non sono molto differenti le une dalle altre le coordinate parziali secondo ciascun asse.

Stabilite le coordinate ausiliarie di ciascuno dei centri di stazione costituenti i vertici di una linea poligonale secondaria, si determinano le loro coordinate definitive per rapporto agli assi principali, partendo da quelle già note di un suo estremo. Fatto questo si hanno le coordinate definitive di tutti i centri di stazione, e riesce facile il calcolo delle coordinate definitive di tutti i punti che vennero rilevati per determinare le accidentalità del terreno. Basta perciò ottenere per ciascuno di questi punti, e mediante le formole (1), (2), (3) e (4) del numero 290, le coordinate ausiliarie per rapporto al centro della stazione dalla quale vennero misurati i numeri generatori corrispondenti, ed aggiungere queste, col loro segno, alle coordinate definitive dell'indicato centro.

308. **Rilevamento dei punti inaccessibili.** — Per rilevare i punti nei quali non si può collocare la stadia ed anche per rilevare alcuni punti posti a considerevole distanza dalle stazioni, si usa il metodo d'intersezione, collimando a ciascuno di essi da due stazioni e misurando gli angoli azimutali e le distanze zenitali.

La posizione planimetrica dei punti rilevati per intersezione si determina cercando le loro coordinate orizzontali, risolvendo il problema, il quale ha per oggetto di ottenere le due coordinate di un punto D (*fig.* 379) quando si conoscono le coordinate orizzontali dei due punti M ed M_1, non che i veri angoli azimutali delle due direzioni MD ed M_1D. Si chiamino perciò

ΔX la differenza fra le due ascisse $\overline{PM}=X$ e $\overline{P_1M_1}=X_1$ dei due punti M ed M_1,

ΔY la differenza fra le due ordinate $\overline{OP}=Y$ ed $\overline{OP_1}=Y_1$ degli stessi punti,

θ l'angolo azimutale DMx,

θ_1 l'angolo azimutale DM_1x_1,

$\Delta\theta$ la differenza fra i due angoli azimutali θ e θ_1,

x l'ascissa $\overline{QD}$ del punto D per rapporto all'origine M ed

y l'ordinata $\overline{MQ}$ dello stesso punto per rapporto alla medesima origine.

Dal triangolo DQM, rettangolo in A, si ha

$$x=y\cot\theta \qquad (1),$$

e dal triangolo DRM_1, rettangolo in D, ed in cui

$$\overline{DR}=x+\Delta X$$

$$\overline{RM_1}=y+\Delta Y,$$

si deduce

$$x + \Delta X = (y + \Delta Y) \cot \theta_1 ,$$

e quindi

$$x = (y + \Delta Y) \cot \theta_1 - \Delta X \quad (2)$$

Eguagliando tra loro i valori di x dati dalle equazioni (1) e (2), e ricavando dalla risultante equazione il valore di y, si ottiene

$$y = \frac{\Delta Y \cot \theta_1 - \Delta X}{\cot \theta - \cot \theta_1} \quad (3).$$

Quest'equazione può essere trasformata in un'altra più adatta all'impiego delle scale logaritmiche nel calcolo del valore di x. Si osservi perciò che, essendo

$$\theta = \theta_1 + \Delta \theta,$$

si ha

$$\cot \theta - \cot \theta_1 = \cot(\theta_1 + \Delta \theta) - \cot \theta_1 = \frac{\cos(\theta_1 + \Delta \theta)}{\operatorname{sen}(\theta_1 + \Delta \theta)} - \frac{\cos \theta_1}{\operatorname{sen} \theta_1},$$

la quale, riducendo allo stesso denominatore, sviluppando al numeratore il coseno ed il seno della somma $\theta_1 + \Delta \theta$ e ponendo al denominatore $\operatorname{sen} \theta$ invece di $\operatorname{sen}(\theta_1 + \Delta \theta)$, diventa

$$\cot \theta - \cot \theta_1 = - \frac{\operatorname{sen} \Delta \theta}{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta_1}.$$

Si ponga ora questo valore di $\cot \theta - \cot \theta_1$ nell'equazione (3) ed immediatamente si trova

$$y = - \Delta Y \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \Delta \theta} \cos \theta_1 + \Delta X \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \Delta \theta} \operatorname{sen} \theta_1 \quad (4).$$

Quest'equazione si presta alla determinazione di y calcolando colle scale logaritmiche i due termini del secondo membro, come si è indicato nel problema V del numero 303. Trovato il valore di y si deduce quello di x dell'equazione (1), il cui secondo membro assai facilmente si calcola colle scale logaritmiche, procedendo come si è detto nel citato numero 303.

Se voglionsi le due coordinate orizzontali $x_1 = \overline{DR}$ ed $y_1 = \overline{M_1R}$ del punto D per rapporto all'origine M_1, immediatamente si ha

$$y_1 = y + \Delta Y,$$

e dal triangolo rettangolo DRM_1 risulta

$$x_1 = y_1 \cot \theta_1 \qquad (5).$$

I valori di x e di x_1, che si deducono dalle formole (1) e (5), permettono di verificare l'esattezza dell'operazione, giacchè devesi avere

$$x_1 = x + \Delta X.$$

Aggiungendo all'ordinata orizzontale Y del punto M il valore di y, si ottiene l'ordinata orizzontale del punto D per rapporto agli assi principali, ed aggiungendo rispettivamente all'ascissa X del punto M e all'ascissa X_1 del punto M_1 i dedotti valori di x ed x_1, si trovano due valori poco diversi dell'ascissa del punto D per rapporto agli stessi assi principali, e si può assumere la media di questi valori siccome rappresentante la vera ascissa del medesimo punto.

Operando per intersezione, non solo devonsi determinare le due coordinate orizzontali dei punti pei quali questo metodo si applica, ma ben anche le corrispondenti ordinate verticali. Chiamando perciò

φ la distanza zenitale letta da M col collimare a D e

φ_1 la distanza zenitale letta da M_1 col collimare allo stesso punto D,

X' l'ascissa del punto D ed

Y' l'ordinata orizzontale dello stesso punto,

D la distanza orizzontale fra M e D, e

D_1 la distanza orizzontale fra M e D_1,

z l'ordinata verticale del punto D per rapporto al centro di stazione in M e

z_1 l'ordinata verticale del punto D per rapporto al centro di stazione in M_1,

ΔZ la differenza fra le due ordinate verticali Z e Z_1 dei punti M e M_1, dal triangolo rettangolo DQM si deduce

$$D = \frac{X'-X}{\cos\theta} = \frac{Y'-Y}{\operatorname{sen}\theta} \qquad (6),$$

ed analogamente dal triangolo rettangolo DRM_1 si ricava

$$D_1 = \frac{X'-X_1}{\cos\theta_1} = \frac{Y'-Y_1}{\operatorname{sen}\theta_1}.$$

Osservando ora che z, D e φ sono rispettivamente i due cateti e l'angolo opposto al cateto D di un triangolo rettangolo, e che la stessa relazione geometrica ha luogo fra le quantità z_1, D_1 e φ_1, si ha

$$z = D\cot\varphi$$

$$z_1 = D_1 \cot\varphi_1.$$

Questi due valori di z e di z_1 permettono di verificare l'esattezza dell'operazione, giacchè si deve avere

$$z_1 = z + \Delta Z.$$

Coll'aggiungere rispettivamente all'ordinata verticale Z del punto M ed all'ordinata verticale Z_1 del punto M_1 i valori di z e z_1, si deducono due valori poco diversi dall'ordinata verticale del punto D per rapporto agli assi principali, e la media di questi due valori con molta probabilità rappresenta il valore dell'ordinata verticale del punto D che più di ciascuno di essi si avvicina al vero.

309. **Punti direttori e loro utilità nei rilevamenti un po' estesi.** — Allorquando un'operazione di rilevamento planimetrico ed altimetrico ha per oggetto di determinare le particolarità e le accidentalità di una porzione di superficie terrestre un po' estesa, ma tale da non essere ancora necessario lo stabilimento di punti trigonometrici, torna utilissimo lo scegliere uno o più punti visibili da un gran numero di stazioni, come campanili ed altri oggetti facili ad osservarsi da parecchi punti del terreno e posti a distanze piuttosto grandi dai punti dai quali vuolsi ai medesimi collimare. Questi punti soglionsi chiamare *punti direttori*, e, sia all'incominciamento delle operazioni da farsi in ogni stazione, sia al termine delle medesime, si collimerà ad un punto direttore per accertarsi

che il goniometro non ha subìto degli spostamenti nel tempo delle osservazioni.

I punti direttori si determinano per intersezione, ma non basta determinarli mediante le osservazioni fatte collimando ad essi da due stazioni; e, nell'intento di ben accertarsi dell'esatta loro posizione, è necessario calcolarne le coordinate, servendosi dei dati presi da tre stazioni non molto lontane. Così procedendo, si ottengono varii valori poco diversi delle tre coordinate di ciascun punto direttore, e nelle ordinarie operazioni pratiche di topografia si reputa sufficiente di assumere, per coordinate definitive di un punto direttore qualunque, le tre medie aritmetiche dei valori poco diversi delle ascisse, delle ordinate orizzontali e delle ordinate verticali.

Stabilite le coordinate orizzontali dei punti direttori, si possono i medesimi utilizzare per verificare l'orientamento in una stazione qualunque. Essendo infatti A (*fig.* 380) un punto direttore molto lontano dal punto di stazione M, alla cui determinazione non si fecero concorrere i dati presi collimandovi da questa stazione, si chiamino

ΔX la differenza fra le due ascisse $\overline{OP}$ ed $\overline{OQ}$ dei due punti A ed M,

ΔY la differenza fra le due ordinate $\overline{PA}$ e $\overline{QM}$ degli stessi punti,

θ_1 l'angolo azimutale AMx della direzione MA.

Dal triangolo ARM, rettangolo in R, immediatamente si deduce

$$\tang \theta_1 = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \qquad (1),$$

e, confrontando l'angolo θ_1 dato da questa formola coll'angolo azimutale stato misurato in M col collimare ad A e già convenientemente corretto come si disse nel numero 306, si arriva a verificare l'esattezza dell'orientamento in M.

Qualora il punto M sia un punto di stazione tale che, per una causa qualunque, non si può coordinare alla stazione precedente mediante due punti di collegamento e pel quale non riesce possibile operare le operazioni d'orientamento come si è detto nel citato numero 306, conviene collimare da esso a tre punti direttori, misurando i corrispondenti tre angoli azimutali, e dedurre quindi la correzione d'orientamento da farsi in M col seguente metodo. Suppongasi che siano A, B e C (*fig.* 381) tre punti direttori e che dalla stazione M siansi misurati i tre angoli azimutali delle direzioni MA, MB ed MC colla direzione Mx_1, o sensibilmente parallela all'asse OX delle ascisse od anche arbitraria. Se chiamansi

$\Delta'_{\prime\prime}X$, $\Delta'_{\prime\prime\prime}X$, $\Delta''_{\prime\prime\prime}X$ le tre differenze $X'-X''$, $X'-X'''$, $X''-X'''$ fra le ascisse $\overline{OP}$ ed $\overline{OQ}$ dei punti A e B, $\overline{OP}$ ed $\overline{OR}$ dei punti A e C, $\overline{OQ}$ ed $\overline{OR}$ dei punti B e C,

$\Delta'_{\prime\prime}Y$, $\Delta'_{\prime\prime\prime}Y$, $\Delta''_{\prime\prime\prime}Y$ le tre differenze $Y'-Y''$, $Y'-Y'''$, $Y''-Y'''$ fra le coordinate $\overline{OS}$ ed $\overline{OT}$ dei punti A e B, $\overline{OS}$ ed $\overline{OU}$ dei punti A e C, $\overline{OT}$ ed $\overline{OU}$ dei punti B e C,

$\Delta'_{\prime\prime}\theta$, $\Delta'_{\prime\prime\prime}\theta$ le due differenze $\theta'-\theta''$, $\theta'-\theta'''$ fra gli angoli azimutali AMx_1 e BMx_1, AMx_1 e CMx_1, misurati in M col collimare ai punti A, B e C

X ed Y le due coordinate orizzontali $\overline{MD}$ e $\overline{DA}$ dal punto A per rapporto all'origine M,

θ_1 il vero angolo azimutale AMx che la visuale MA fa colla direzione Mx immaginata condotta per M parallelamente ad OX, riesce facile il dedurre: dal triangolo ADM, rettangolo in D,

$$\cot\theta_1 = \frac{X}{Y};$$

dal triangolo BEM, rettangolo in E,

$$\cot(\theta_1 - \Delta'_{\prime\prime}\theta) = \frac{X - \Delta'_{\prime\prime}X}{Y - \Delta'_{\prime\prime}Y};$$

e dal triangolo CFM, rettangolo in F,

$$\cot(\theta_1 - \Delta'_{\prime\prime\prime}\theta) = \frac{X - \Delta'_{\prime\prime\prime}X}{Y - \Delta'_{\prime\prime\prime}Y}.$$

Se ora dalla prima di queste tre equazioni ricavasi il valore di Y e se si sostituisce nelle altre due, dopo aver cangiate le espressioni $\cot(\theta_1 - \Delta'_{\prime\prime}\theta)$ e $\cot(\theta_1 - \Delta'_{\prime\prime\prime}\theta)$ nelle loro equivalenti

$$\frac{\cot\theta_1 \cot\Delta'_{\prime\prime}\theta + 1}{\cot\Delta'_{\prime\prime}\theta - \cot\theta_1}$$

e

$$\frac{\cot\theta_1 \cot\Delta'_{'''}\theta + 1}{\cot\Delta'_{'''}\theta - \cot\theta_1},$$

si ottengono le equazioni

$$\frac{\cot\theta_1 \cot\Delta'_{''}\theta + 1}{\cot\Delta'_{''}\theta - \cot\theta_1} = \frac{X\cot\theta_1 - \Delta'_{''}X\cot\theta_1}{X - \Delta'_{''}Y\cot\theta_1},$$

$$\frac{\cot\theta_1 \cot\Delta'_{'''}\theta + 1}{\cot\Delta'_{'''}\theta - \cot\theta_1} = \frac{X\cot\theta_1 - \Delta'_{'''}X\cot\theta_1}{X - \Delta'_{'''}Y\cot\theta_1}.$$

Ricavando da queste equazioni i valori del prodotto $X(1+\cot^2\theta_1)$, si ha

$$X(1+\cot^2\theta_1) = \left\{\begin{matrix} \cot\theta_1(\Delta'_{''}Y - \Delta'_{''}X\cot\Delta'_{''}\theta) \\ +\cot^2\theta_1(\Delta'_{''}X + \Delta'_{''}Y\cot\Delta'_{''}\theta) \end{matrix}\right\},$$

$$X(1+\cot^2\theta_1) = \left\{\begin{matrix} \cot\theta_1(\Delta'_{'''}Y - \Delta'_{'''}X\cot\Delta'_{'''}\theta) \\ +\cot^2\theta_1(\Delta'_{'''}X + \Delta'_{'''}Y\cot\Delta'_{'''}\theta) \end{matrix}\right\},$$

ed eguagliandoli fra di loro si arriva all'equazione

$$\left\{\begin{matrix} \Delta'_{''}Y - \Delta'_{''}X\cot\Delta'_{''}\theta \\ +\cot\theta_1(\Delta'_{''}X + \Delta'_{''}Y\cot\Delta'_{''}\theta) \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \Delta'_{'''}Y - \Delta'_{'''}X\cot\Delta'_{'''}\theta \\ \cot\theta_1(\Delta'_{'''}X + \Delta'_{'''}Y\cot\Delta'_{'''}\theta) \end{matrix}\right\},$$

dalla quale, per essere

$$\Delta'_{'''}Y - \Delta'_{''}Y = Y'' - Y''' = \Delta''_{'''}Y$$

$$\Delta'_{'''}X - \Delta'_{''}X = X'' - X''' = \Delta''_{'''}X,$$

si ricava

$$\cot\theta_1 = \frac{\Delta'_{''}X\cot\Delta'_{''} - \Delta'_{'''}X\cot\Delta'_{'''}\theta + \Delta''_{'''}Y}{\Delta'_{''}Y\cot\Delta'_{''}\theta - \Delta'_{'''}Y\cot\Delta'_{'''}\theta - \Delta''_{'''}X} \qquad (2).$$

L'angolo θ_1 si può facilmente dedurre coll'uso delle scale logaritmiche. Perciò si calcolano separatamente i tre termini del numeratore ed i tre termini del denominatore; tenendo conto dei segni dati dal calcolo e di quelli che essi hanno nella formola, si ottengono i due termini della frazione che rappresenta il valore di cot θ_1; e quindi si calcola l'angolo θ_1 operando con un metodo analogo a quello tenuto nel problema IV del numero 303 per dedurre il valore di tang ω.

Determinato l'angolo θ_1, ossia quello che la direzione MA fa coll'asse delle ascisse, si paragona esso coll'angolo θ'. Se questi due angoli sono eguali, nessuna correzione si deve apportare agli angoli azimutali che vennero letti in M; se invece sono essi disuguali, la differenza $\theta_1 - \theta'$ esprime appunto questa correzione, la quale per conseguenza assai facilmente può essere eseguita.

Se, considerando il punto M siccome appartenente alla linea poligonale avente per vertici i centri delle diverse stazioni, riesce possibile ottenere le sue coordinate, se non esattamente, almeno con molta approssimazione per essere l'orientamento in detto punto poco diverso dal vero, l'angolo azimutale θ_1 può essere dedotto dalla formola (1), ponendo in essa la differenza tra l'ascissa del punto A e quella approssimata del punto M invece di ΔX e la differenza fra l'ordinata orizzontale del punto A e quella approssimata del punto M invece di ΔY. Corretti gli angoli azimutali corrispondenti alle direzioni MA, MB ed MC, riesce facile il calcolo delle coordinate orizzontali del punto M applicando la formola (4) ed (1) del numero precedente ed operando come nello stesso numero venne indicato. Considerando il punto M siccome intersezione delle accennate direzioni combinate due a due, si possono avere diversi valori delle sue coordinate orizzontali e così verificare l'esattezza dell'operazione. Fissati i valori delle coordinate orizzontali del punto M, si può passare alla determinazione delle distanze orizzontali $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ ed $\overline{MC}$ applicando la formola (6) del numero precedente, e dedurre quindi le differenze di livello fra i punti A, B e C, ed il centro di stazione in M, nello scopo di arrivare a conchiudere l'ordinata verticale dello stesso centro di stazione.

310. **Operazioni di celerimensura coordinate a punti trigonometrici.** — Allorquando trattasi di rilevare e di livellare una vasta estensione di terreno composta di vari appezzamenti e presentante svariatissime accidentalità, le operazioni di celerimensura, per raggiungere lo scopo, devono essere appoggiate a punti trigonometrici qua e là individuati sull'estensione da rilevarsi e visibili da molte località, affinchè gli operatori possano servirsene

per collegare le loro operazioni, le quali si possono allora intraprendere in più siti nel medesimo tempo.

Le stazioni ed i punti di collegamento fra una stazione e l'altra si scelgono, come già si è detto nei numeri 306 e 307; quando si arriva in vicinanza di qualche punto trigonometrico si determinano per esso i numeri generatori come per un altro punto qualunque; e quando s'incontrano dei punti trigonometrici sui quali riesce impossibile di collocare la stadia, si rilevano essi per intersezione, come si è detto doversi fare pei punti direttori, collimandovi almeno tre volte dalle stazioni che loro sono vicine. Se è possibile si può incominciare il lavoro a partire da un punto trigonometrico oppure, quando non si può o non torna conveniente di così principiare, si collima dal primo punto di stazione a quattro punti trigonometrici, perchè allora si ha mezzo non solo di determinare, ma anche di verificare l' esatta posizione del punto di stazione per rapporto ai punti trigonometrici. È essenziale di collimare da ciascuna stazione ai punti trigonometrici visibili; quando però se ne vedono molti, non è necessario di collimare a tutti ed è bene di collimare preferibilmente ad uno molto lontano ed a due altri piuttosto vicini. Se poi in qualche luogo incassato e basso e nell'interno di un bosco è giuocoforza di far stazione in siti dai quali riesce impossibile scoprire un punto trigonometrico, si sceglierà allora un punto direttore la cui posizione potrà esser determinata e verificata mediante le osservazioni che si faranno dalle stazioni successive. Pei punti che marcano le accidentalità del terreno, e che per conseguenza importa di rilevare, si determinano i numeri generatori necessarii a trovare le loro coordinate ausiliarie per rapporto al centro della stazione da cui ai medesimi si collima.

Venendo ora alle operazioni da farsi al tavolino per ben stabilire una poligonazione rilevata col coordinarla a punti trigonometrici, s'incomincierà innanzi tutto dall'accertarsi, per l'applicazione delle formole (1), (2), (3), (4), (6), (7), (8) e (9) del numero 306 che non vennero commessi errori nelle operazioni sul terreno. Riconosciuta l'esattezza del lavoro, immediatamente si passa a correggere le inesattezze d'orientamento, e questo si fa traendo partito delle visuali dirette ai punti trigonometrici ed applicando quindi la formola (2) del numero precedente col considerare i punti trigonometrici come punti direttori. Una volta basato l'orientamento delle poligonazioni sui punti trigonometrici, si può trar partito dei punti di collegamento per apportare le volute correzioni agli angoli azimutali, operando come si è detto al numero 306. Avviene qualche volta di dover fare la correzione d'orientamento mediante la visuale diretta ad un sol punto trigonometrico, ed in questo caso è necessario conoscere le coordinate orizzontali del centro di stazione per rapporto agli assi principali, onde porle nella formola (1) del numero precedente. Basta però avere dei valori approssimati di queste coordinate, e questi sono facilissimi ad ottenersi per addizioni successive delle distanze ortogonali non ancora definitivamente corrette, partendo da quelle di un punto trigonometrico posto sulla linea poligonale alla quale appartiene la stazione per cui vuolsi effettuare la correzione d'orientamento.

Corretti gli angoli azimutali, si deve passare al calcolo delle coordinate parziali del centro di ogni stazione per rapporto al centro della stazione precedente; e questo si fa precisamente come già si è detto nei due precedenti numeri. Dopo di ciò si può osservare che, se una linea poligonale di un numero qualunque di lati va da un punto trigonometrico ad un altro, per il semplicissimo assioma che la somma delle parti eguagli il tutto, devono esistere le tre relazioni

$$\Sigma x = \Delta X$$

$$\Sigma y = \Delta Y$$

$$\Sigma z = \Delta Z,$$

le quali esprimono che le differenze ΔX fra le ascisse, ΔY fra le ordinate orizzontali e ΔZ fra le ordinate verticali dei due punti trigonometrici devono rispettivamente eguagliare le somme Σx delle ascisse, Σy delle ordinate orizzontali e Σz delle ordinate verticali del primo punto della linea poligonale per rapporto agli assi coordinati ausiliarii passanti pel punto trigonometrico vicino, del secondo punto della linea poligonale per rapporto agli assi ausiliarii passanti pel primo, e, così continuando, dell'altro punto trigonometrico per rapporto agli assi ausiliarii passanti per l'ultimo punto della linea poligonale.

Le indicate condizioni generalmente manifestano delle lievi discrepanze, e per approssimarsi sempre più alla verità si possono determinare le coordinate definitive dei diversi centri di stazione col seguente metodo. Alle coordinate di un punto trigonometrico si aggiungano quelle parziali dei diversi centri di una linea poligonale che da questo punto va ad una stazione centrale, e così si ottengono tre somme, le quali si possono ritenere siccome rappresentanti le tre coordinate per rapporto agli assi principali della stazione centrale considerata. La medesima operazione si ripeta partendo da un secondo, da un terzo punto trigonometrico ed anche da un quarto. Risultano così tanti sistemi di valori poco diversi delle tre coordinate del centro della stazione centrale quanti sono i punti trigonometrici considerati, e le medie dei valori delle ascisse, delle ordinate orizzontali e delle ordinate verticali si possono ritenere siccome rappresentanti le coordinate definitive del centro della stazione considerata. Come si è determinata una stazione mediante linee poligonali partenti direttamente da punti trigonometrici, se ne possono determinare molte altre, e tutte si possono chiamare *centrali di primo ordine.* Le centrali di primo ordine da sole oppure in concorrenza ai punti trigonometrici possono servire alla determinazione di altri centri di stazione che si possono chiamare *centrali di secondo ordine;* e continuando collo stesso metodo si possono ottenere le *centrali di terzo ordine* e determinare le posizioni dei diversi centri di stazione, mediante le medie dei camminamenti che li collegano in diversi sensi.

Determinate le coordinate definitive dei centri di stazione per rapporto agli assi principali, immediatamente si ottengono quelle dei diversi punti rilevati, calcolando le coordinate ausiliarie di questi per rapporto ai centri delle stazioni da cui vennero osservati e rispettivamente aggiungendole alle coordinate definitive degli stessi centri.

311. **Rilevamento col procedimento conoidico.** — Quanto si è detto sul rilevamento e sulla livellazione dei terreni coi metodi della celerimensura, mette in evidenza come siano due i metodi di rilevamento che generalmente s'impiegano; quello d'irradiamento che si applica al più gran numero dei punti da rilevarsi; quello d'intersezione che si applica solo per quei punti nei quali non si può portar la stadia, pei punti direttori e pei punti trigonometrici. Oltre questi due metodi conviene in molte circostanze adottarne un terzo, nuovo affatto in geodesia, ideato dal professore Porro, da lui chiamato *procedimento conoidico*, e che consiste nel determinare per intersezione, non più un sol punto, ma sibbene un'intiera linea, comunque curva, visibile da due stazioni.

Con questo procedimento si rileva da ciascuna stazione, mediante gli angoli azimutali e le corrispondenti distanze zenitali, un egual numero di generatrici molto vicine della superficie conica avente il suo vertice nel centro della stazione ed avente per direttrice la curva da determinarsi. Le intersezioni delle generatrici che si corrispondono nell'una e nell'altra superficie conica, determinate coi metodi della geometria descrittiva od anche analiticamente, definiscono una curva, la quale evidentemente è quella che si ha in mira di determinare.

Operando col procedimento conoidico tornano poi utilissime le *visuali piane*, che si possono determinare col cleps, di cui venne data la descrizione nel numero 293. Queste visuali piane rappresentano il piano determinato dall'asse ottico del cannocchiale e da quello dei fili paralleli del micrometro, il quale passa pel detto asse ottico quando, trovandosi lo strumento in istato d'azione, il detto filo non è orizzontale; sono esse determinate dai tre angoli che si leggono sul circolo azimutale, sul circolo zenitale e sul circolo graduato di cui trovasi munito l'oculare; e si prestano ad avviluppare i tondeggianti della superficie delle colline isolate non che dei contrafforti nelle valli in un poliedro di facce note, ed a dedurre, sia col mezzo della geometria descrittiva, sia col calcolo trigonometrico, la rappresentazione del terreno, mediante le sue curve orizzontali.

312. Registri per le operazioni di celerimensura. — Per le operazioni sul terreno può convenire il registro, di cui si dà il modulo e la spiegazione:

INDICAZIONE DELLE STAZIONI	INDICAZIONE DEI PUNTI	DIMENSIONI LINEARI					DIMENSIONI ANGOLARI		OSSERVAZIONI
		MICROMETRO				RISULTATI	Distanze zenitali φ	Angoli azimutali θ	
		Fili inferiori	Differenze	Fili superiori	Differenze				

Nella prima colonna, intitolata *indicazione delle stazioni*, viene designata ciascuna stazione mediante una lettera, non che la località in cui essa si trova, ed in pari tempo si fa uno schizzo a vista della località medesima. Nella seconda colonna, avente il titolo *indicazione dei punti*, si registra il numero d'ordine di ciascun punto a cui si collima, e si fa anche risultare la località in cui si trova. Nelle cinque colonne successive, complessivamente intestate *dimensioni lineari*, si registrano i risultati delle letture fatte col micrometro sulla stadia; nella prima di queste cinque colonne si pongono le letture fatte coi fili inferiori, e nella terza le letture fatte coi fili superiori; nella seconda e nella quarta si pongono quelle differenze che valgono a controllare l'esattezza delle letture e della giusta loro trascrizione sul registro; nella quinta si marcano le quantità S ed A che assai facilmente si deducono dalle fatte letture, procedendo come si è detto nel numero 294. Nelle due colonne, abbracciate sotto il titolo *dimensioni angolari*, si inscrivono gli angoli φ delle visuali colla verticale, e gli angoli azimutali θ quali vengono letti sul terreno. Finalmente nell'ultima colonna intestata *osservazioni* si accenna alla particolarità di alcuni punti, ai punti di collegamento, ai punti direttori, ai punti trigonometrici.

Il registro delle osservazioni deve essere accompagnato dal registro delle verificazioni da farsi sul terreno mediante i punti di collegamento, e può tornar utile quello già dato nel risolvere il problema IV del numero 303, quando fra la seconda e la terza colonna se ne pongano altre due, nella prima delle quali si trovi per ciascun punto di collegamento la quantità S dedotta dalle letture fatte coi fili micrometrici sulla stadia, e nella seconda la distanza zenitale φ.

Per eseguire con ordine al tavolino le operazioni dirette a fissare le posizioni dei centri di stazione, importa pure di tener marcati i diversi risultamenti in apposito registro, il quale può essere foggiato come quello che immediatamente si riporta :

INDICAZIONE dei centri di stazione	INDICAZIONE dei punti di collegamento e dei punti di verificazione	CORREZIONI d'orientamento	ANGOLI AZIMUTALI corretti	COORDINATE PARZIALI dei punti di collegamento			COORDINATE PARZIALI dei centri di stazione			MEDIE delle coordinate parziali dei centri di stazione			ANGOLI θ_1 per le verificazioni d'orientamento	CORREZIONI DEFINITIVE d'orientamento
				Ascisse	Ordinate orizzontali	Ordinate verticali	Ascisse	Ordinate orizzontali	Ordinate verticali	Ascisse	Ordinate orizzontali	Ordinate verticali		

Nella prima e nella seconda colonna si trovano rispettivamente le indicazioni dei centri di stazione, dei punti di collegamento e dei punti di verificazione, come punti direttori e punti trigonometrici, mediante le stesse lettere e gli stessi numeri già posti nel primo registro. La terza colonna è destinata a ricevere le correzioni di orientamento da calcolarsi come si è detto nel numero 306; e nella quarta colonna s'inscrivono gli angoli azimutali corretti per le visuali dirette ai punti di collegamento. Le colonne, le quali sono intitolate *coordinate parziali dei punti di collegamento*, sono destinate a ricevere le coordinate x, y e z dei detti punti per rapporto ai centri delle stazioni dalle quali vennero osservati. Nelle tre colonne successive, complessivamente intestate *coordinate parziali dei punti di stazione*, si pongono le coordinate x', y', e z' di ciascun centro di stazione per rapporto al centro della stazione precedente, generalmente dedotte dalla considerazione dei quadrilateri di cui sono vertici due centri di stazione e due punti di collegamento (num. 306); ed è nelle tre colonne che vengono dopo, portanti il titolo di *medie delle coordinate parziali dei centri di stazione*, che si pongono le coordinate parziali x_m, y_m e z_m, ricavate dalle precedenti in modo da soddisfare alle condizioni che devono essere verificate nelle linee poligonali chiuse e nelle linee poligonali i cui estremi trovansi già preventivamente fissati. Nella colonna intitolata *angoli θ_1 per le verificazioni d'orientamento* si trovano quegli angoli che risultano, applicando principalmente la formola (1) del numero 309; e finalmente l'ultima colonna è destinata a ricevere le correzioni d'orientamento che possono manifestare le operazioni precedenti.

Determinate le coordinate parziali dei punti di stazione, si può passare a stabilire le loro coordinate definitive, per dedurre quelle dei diversi punti che da ciascuna stazione vennero rilevati. Per conservare ben ordinati i risultamenti di quest'operazione, può convenire il seguente modulo di registro:

CENTRI DI STAZIONE	PUNTI RILEVATI	CORREZIONI D'ORIENTAMENTO	ANGOLI AZIMUTALI CORRETTI	COORDINATE dei centri di stazione per rapporto agli assi principali			COORDINATE dei punti rilevati per rapporto ai centri di stazione			COORDINATE dei punti rilevati per rapporto agli assi principali		
				Ascisse	Ordinate orizzontali	Ordinate verticali	Ascisse	Ordinate orizzontali	Ordinate verticali	Ascisse	Ordinate orizzontali	Ordinate verticali

La prima colonna è destinata a ricevere le indicazioni dei centri di stazione da farsi colle lettere già adoperate negli altri registri. Nella seconda colonna s'indicano, mediante i numeri d'ordine che già vennero adoperati nel primo registro, i diversi punti a cui si collimò da ciascuna stazione. Nella terza colonna s'inscrivono le correzioni d'orientamento da apportarsi in ciascuna stazione e che già trovansi nell'ultima colonna del precedente registro. Nella quarta colonna si pongono gli angoli azimutali corretti per le visuali dirette ai diversi punti rilevati. Le tre colonne complessivamente intestate *coordinate dei centri di stazione per rapporto agli assi principali* sono destinate a ricevere i valori delle coordinate definitive di ciascun centro di stazione; nelle tre seguenti, le quali hanno il titolo comune di *coordinate dei punti rilevati per rapporto ai centri di stazione*, si devono porre le coordinate parziali dei punti rilevati per rapporto agli assi ausiliarii passanti pel centro della stazione, da cui ad essi si collimò, e finalmente nelle tre che ancora rimangono si devono registrare le coordinate di tutti i punti rilevati per rapporto agli assi principali.

513. **Costruzione dei piani.** — Determinate le coordinate orizzontali dei diversi punti che marcano le accidentalità d'una porzione di terreno rilevato coi metodi della celerimensura, riesce facile la costruzione del suo piano, giacchè trattasi di collocare a sito diversi punti per rapporto a due assi ortogonali ben definiti, conoscendosi le loro coordinate. Per fare prontamente quest'operazione, convien usare della carta quadrettata, in modo che il lato di ciascun quadretto rappresenti metri e multipli di metro. Ciascun punto si colloca a sito nel quadretto che gli corrisponde, servendosi delle lunghezze delle sue coordinate, e si cerca di ben rappresentare le accidentalità del terreno, consultando l'abbozzo delle località che venne fatto o per più punti in complesso, od individualmente per ogni punto.

514. **Convenienza dei metodi di celerimensura nelle operazioni di rilevamento.** — Quantunque sieno ancora pochi gli operatori che nei lavori di rilevamento applicano la celerimensura, pure essa ha già ricevuto tali e tante applicazioni da potersi asserire senza tema d'errore, che ha già fornito dati di fatto per poter decidere della sua convenienza in tutte le operazioni topografiche.

Lasciando in disparte le prime operazioni eseguite dal professore Porro nella riviera ligure ed altre, di cui in seguito si occupò nel paese e fuori, il signor Moinot, ingegnere addetto al personale tecnico di una società ferroviaria francese, fin dal 1855 applicò la celerimensura per lo studio di progetti per ferrovie. Quest'ingegnere, persuaso dell'utilità del nuovo metodo di rilevare, compilò un trattato, nel quale trovansi descritti i procedimenti che impiegò nei rilevamenti destinati allo studio delle strade ferrate e, dopo aver compiuti i lavori di rilevamento per ben 1500 chilometri di ferrovia, potè asserire: che i tracciati ricavati dai piani di studio ed applicati sul terreno, raramente hanno data una differenza di più di un metro per chilometro fra le lunghezze ricavate graficamente dal piano e quelle che colla massima cura furono canneggiate sul terreno; che il profilo longitudinale sull'asse, ricavato col livello a bolla d'aria con cannocchiale, non ha mai presentata una differenza apprezzabile quando se ne fece il confronto col risultato fornito dalle quote del piano di studio.

Questo soddisfacente risultato pratico della celerimensura, cui giunse il Moinot, fu pure raggiunto nelle operazioni topografiche eseguite per la costruzione di una rete ferroviaria dell'Italia meridionale, per la quale una società costruttrice francese ha adottato nella compilazione dei progetti i procedimenti della celerimensura, ad esclusione di qualunque altro; che anzi un distinto ingegnere appartenente alla suddetta società ha compilato un *Manuale pratico di celerimensura*, destinato al personale tecnico dell'impresa.

Oltre queste applicazioni della celerimensura fatte da ingegneri francesi, da ingegneri italiani, fra i quali con molta lode merita di essere menzionato il signor ingegnere Vincenzo Soldati, vennero compilati progetti di non lieve entità col sussidio della nuova topografia e, fra questi, alcuni in terreni tanto accidentati da rendere, se non impossibile, molto malagevole l'esecuzione del lavoro cogli antichi strumenti.

Da quanto si è detto si può adunque conchiudere che attualmente l'applicazione della celerimensura è un fatto compiuto e, quel che più monta, essere essa tenuta in grande pregio da coloro che l'hanno adottata, per l'esattezza a cui conduce con poca spesa ed in breve tempo.

Per quanto si riferisce all'esattezza, i metodi di celerimensura sono tali che, se non danno all'operatore l'infallibilità, gli diminuiscono però di molto la facilità di commettere errori, in grazia dei molteplici mezzi di verificazione inerenti al sistema; ed è ormai posto fuori di dubbio che i metodi di celerimensura, bene applicati, conducono ad un'approssimazione superiore a quella che si ottiene cogli altri sistemi. Le tre coordinate di ciascuno dei punti che marcano le accidentalità del terreno sono indipendenti dalle posizioni di tutti i punti che lo avvicinano, e quindi, gli errori di lettura commessi nel rilevare un particolare qualunque non possono influire sugli altri. Allorquando la poligonazione trovasi definita in modo da essere ben determinate, verificate e convenientemente comprovate le posizioni dei vertici, è tolto il pericolo della propagazione degli ingrandimenti degli errori, e resta eliminata la possibilità di avere considerevoli divarii fra la superficie dei rilievi e quelle dei terreni corrispondenti.

L'approssimazione che ottiensi nelle quote altimetriche è pure apprezzabile, sempre che però non si trascurino certe cautele, le quali pur troppo non sono sempre osservate da tutti gli operatori nelle livellazioni trigonometriche. È chiaro infatti che, essendo una quota altimetrica qualunque funzione dell'inclinazione dell'asse ottico del cannocchiale all'orizzonte e della distanza a cui si fa la lettura, nè in quest'inclinazione nè in questa distanza si dovrà oltrepassare un certo limite, oltre il quale l'errore di rifrazione prende proporzioni molto notevoli, e riesce troppo sensibile il divario fra la media delle letture fatte coi fili estremi e la lunghezza della parte di stadia compresa fra il suo piede ed il punto in cui essa vien ferita dall'asse ottico del cannocchiale.

Per rapporto al costo dei rilevamenti eseguiti colla celerimensura, riesce facile il convincersi come esso deve risultare notevolmente inferiore a quello dei rilievi fatti cogli antichi sistemi, se considerasi che in ogni operazione di rilevamento devono essere distinti due periodi, quello delle operazioni in campagna e quello delle operazioni al tavolino. Il primo di questi due periodi richiede spese maggiori, sia per il numero degli operatori che esige, sia perchè sovente è giuocoforza interrompere il lavoro per impreviste circostanze. Ora, coi metodi della celerimensura, il lavoro di campagna trovasi di tanto ridotto che in terreni non molto coperti e di accidentalità non straordinarie si può rilevare in un sol giorno una zona della lunghezza di 3 chilometri e della larghezza di 500 metri con tutti i minuti particolari sia planimetrici che altimetrici, e ciò con una squadra composta d'un ingegnere direttore dei lavori, d'un aiutante per fare le letture su un goniometro, d'uno scrivano per marcare i risultati delle misure, di due porta stadia e di un bracciante. Non sempre però è permesso di operare con tanta celerità, e mediamente si può ritenere che una squadra, composta come si è detto, può in una giornata condurre a compimento le operazioni necessarie e definire planimetricamente ed altimetricamente la superficie di una zona di terreno della lunghezza di 1200 metri e della larghezza di 500 metri.

Le verificazioni che si fanno sul terreno in ogni stazione, non che quelle che in seguito si possono instituire per aver collimato a punti direttori oppure a punti trigonometrici, e l'uniformità di metodo che generalmente si segue nel rilevare, contribuiscono a far sì che le operazioni, le quali hanno per iscopo di dedurre al tavolino le coordinate definitive ed anche il piano del terreno, non possono presentare incertezze nè richiedere determinazioni speciali e ricercate. Segue da ciò che generalmente queste operazioni si possono condurre a compimento con una celerità maggiore di quella che è possibile raggiungere cogli altri sistemi di rilevare, i quali sovente obbligano a lunghe e noiose operazioni di gabinetto, sia a motivo delle discrepanze che talvolta s'incontrano per non aver verificata sul terreno l'esattezza del lavoro, ed a motivo dei dubbî che nascono per insufficienza di mezzi di verificazione e per mancanza d'uniformità di metodi nell'operare sul terreno.

Fra tutti gli strumenti che si possono impiegare nelle operazioni di celerimensura, il clepsciclo del professore Porro è sicuramente quello che presenta maggiori vantaggi. La facilità di maneggio, la stabilità, la comodità e sicurezza nel trasporto, ed i mezzi che questo strumento presenta per accertarsi dell'esattezza delle osservazioni, sono requisiti che dal lato pratico lo rendono eminentemente commendevole ed i quali valgono ad accreditarlo presso qualsiasi operatore, il quale desideri avere uno strumento simultaneamente utile per le operazioni planimetriche ed altimetriche. Il suo uso, senza pericolo di errori e colla massima facilità, permette di eliminare nelle operazioni sul terreno le misure dirette tanto fastidiose e lunghe, giacchè gli ostacoli che per lungo tempo impedirono lo sviluppo dei procedimenti colla stadia trovansi felicemente e completamente superati in grazia dell'anallatismo e del forte ingrandimento del cannocchiale. La molteplicità degli oculari e dei fili micrometrici notevolmente contribuiscono a mantenere i risultati delle diverse operazioni nei limiti d'un'approssimazione superiore a quella che finora è stato possibile raggiungere cogli altri strumenti topografici; e le varie parti del cleps trovansi tutte indistintamente disposte nel modo il più razionale ed il più conveniente per arrivare speditamente a risultati sempre accettabili e buoni.

Conchiudendo sulla convenienza della celerimensura e sui pregi del clepsciclo, francamente si può asserire che la celerimensura, sia dal lato teorico che dal lato pratico, costituisce un sistema di rilievo il quale riunisce in sè tutte le doti di speditezza e di precisione, che merita di essere studiata con molta cura da chi si dedica alle operazioni di rilevamento; che minutamente deve essere spiegata in tutte le scuole d'ingegneria, non che in quelle altre d'ordine inferiore in cui s'insegna l'arte di rilevare i terreni; e che il clepsciclo del professore Porro è attualmente il migliore degli strumenti per le operazioni di celerimensura.

INDICE ANALITICO

PARTE PRIMA

Preliminari allo studio della Topografia.

CAPITOLO I.

Nozioni e definizioni generali.

CAPITOLO II.

Mezzi per costrurre in carta lunghezze proporzionali a lunghezze date.

ARTICOLO I. — Delle scale.

ARTICOLO II. — **Del compasso di proporzione.**

ARTICOLO III. — **Del nonio rettilineo.**

CAPITOLO III.

Mezzi per misurare e costrurre angoli sulla carta.

ARTICOLO I. — **Del rapportatore grafico ordinario.**

ARTICOLO II. — **Del nonio circolare.**

ARTICOLO III. — **Del rapportatore grafico con nonio.**

ARTICOLO IV. — **Tavole e scale delle corde e delle tangenti.**

PARTE SECONDA

Operazioni Topografiche elementari.

CAPITOLO I.

Planimetria.

ARTICOLO I. — Nozioni generali.

ARTICOLO II. — Strumenti per assicurare la verticalità e la orizzontalità di linee e di piani.

ARTICOLO III. — Paline, picchetti e mezzi per dirigere visuali.

ARTICOLO IV. — **Strumenti per misurare le distanze.**

ARTICOLO V. — **Squadro agrimensorio.**

ARTICOLO VI. — **Goniometri.**

ARTICOLO VII. — **Della bussola topografica.**

ARTICOLO VIII. — **Della tavoletta pretoriana.**

ARTICOLO IX. — **Strumenti a riflessione.**

CAPITOLO II.

Altimetria e Livellazione.

ARTICOLO I. — Nozioni generali.

ARTICOLO II. — Della mira.

ARTICOLO III. — Dei livelli.

ARTICOLO IV. — **Dei Clisimetri.**

ARTICOLO V. — **Degli eclimetri.**

ARTICOLO VI. — **Strumenti a riflessione per le livellazioni.**

CAPITOLO III.

Copia e riduzione dei disegni.

ARTICOLO I. — **Copia dei disegni.**

ARTICOLO II. — **Riduzione dei disegni.**

PARTE TERZA

Triangolazione Topografica.

CAPITOLO I.

Operazioni planimetriche.

ARTICOLO I. — Nozioni preliminari.

ARTICOLO II. — Segnali e scelta dei punti trigonometrici di 1° e 2° ordine.

ARTICOLO III. — Regoli su trepiedi, scelta e misura delle basi.

ARTICOLO IV. — Teodoliti e misura degli angoli.

ARTICOLO V. — **Orientamento delle reti topografiche.**

ARTICOLO VI. — **Calcoli per la determinazione di una rete topografica.**

ARTICOLO VII. — **Punti trigonometrici di terzo ordine.**

ARTICOLO VIII. — **Rilevamento dei terreni coordinato ai punti trigonometrici.**

CAPITOLO II.

Operazioni altimetriche.

ARTICOLO I. — **Nozioni generali.**

ARTICOLO II. — **Eclimetri annessi ai teodoliti, e loro uso.**

ARTICOLO III. — **Determinazione delle ordinate dei punti trigonometrici.**

PARTE QUARTA

Celerimensura.

CAPITOLO I.

Nozioni generali.

CAPITOLO II.

Strumenti ed operazioni di celerimensura.

ARTICOLO I. — **Strumenti per la misura degli angoli e delle distanze.**

ARTICOLO II. — **Mezzi per effettuare i calcoli.**

ARTICOLO III. — **Operazioni di celerimensura.**

INDICE ALFABETICO

Operazioni topografiche.

A

B

C

L

M

N

O

P

R

S

T

U

V

ERRATA-CORRIGE

Pagina	*linea*	*invece di*	*leggasi*
109	28	di	da
134	14	cosicchèbasterà	cosicchè basterà
204	22	ha ha	ha
205	19	seguitandola	seguitando la
206	39	prismi	prismi, e prendere la media aritmetica delle due letture.
238	24	$\overline{OG}$	$\overline{OC}$
ivi	27	$\overline{GE}$	$\overline{CE}$
ivi	*ivi*	GD	$\overline{CD}$
290	13	l'altra P	l'altra P'
311	33	richiamo r'',	richiamo r''.
344	penultima	Y^{a},	Y_a,
396	6	centrimetri	centimetri.

Alla Società degl. Ing^ri e degl. Ind^ti

l'autore

OPERAZIONI
TOPOGRAFICHE

LAVORO AD USO

degl'Ingegneri, degli Architetti, dei Periti in costruzione
e di quanti si trovano applicati alla direzione ed alla sorveglianza di costruzioni
civili, stradali ed idrauliche

UTILE

**agli studenti delle scuole d'applicazione per gl'Ingegneri
e dei corsi tecnici pei Periti in costruzione**

PER

GIOVANNI CURIONI

Ingegnere, Architetto e Dottore aggregato al Collegio della Facoltà di scienze fisiche e matematiche della R. Università di Torino, Professore di costruzioni civili, stradali ed idrauliche nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri, Professore di geometria pratica e costruzioni nel R. Istituto industriale e professionale di Torino, Membro ordinario residente della Società Reale d'agricoltura, industria e commercio, Membro effettivo residente della Società degl'Ingegneri e degl'industriali di Torino, e Socio onorario dell'Associazione di Conferenze di Matematiche pure ed applicate di Napoli.

TORINO
Presso AUGUSTO FEDERICO NEGRO, Editore
4, Via Alfieri, 4.

—

1869

Torino, 1869 — Stamperia dei Compositori-Tipografi, A. Oddenino e Comp.
via del Teatro d'Angennes, 16.

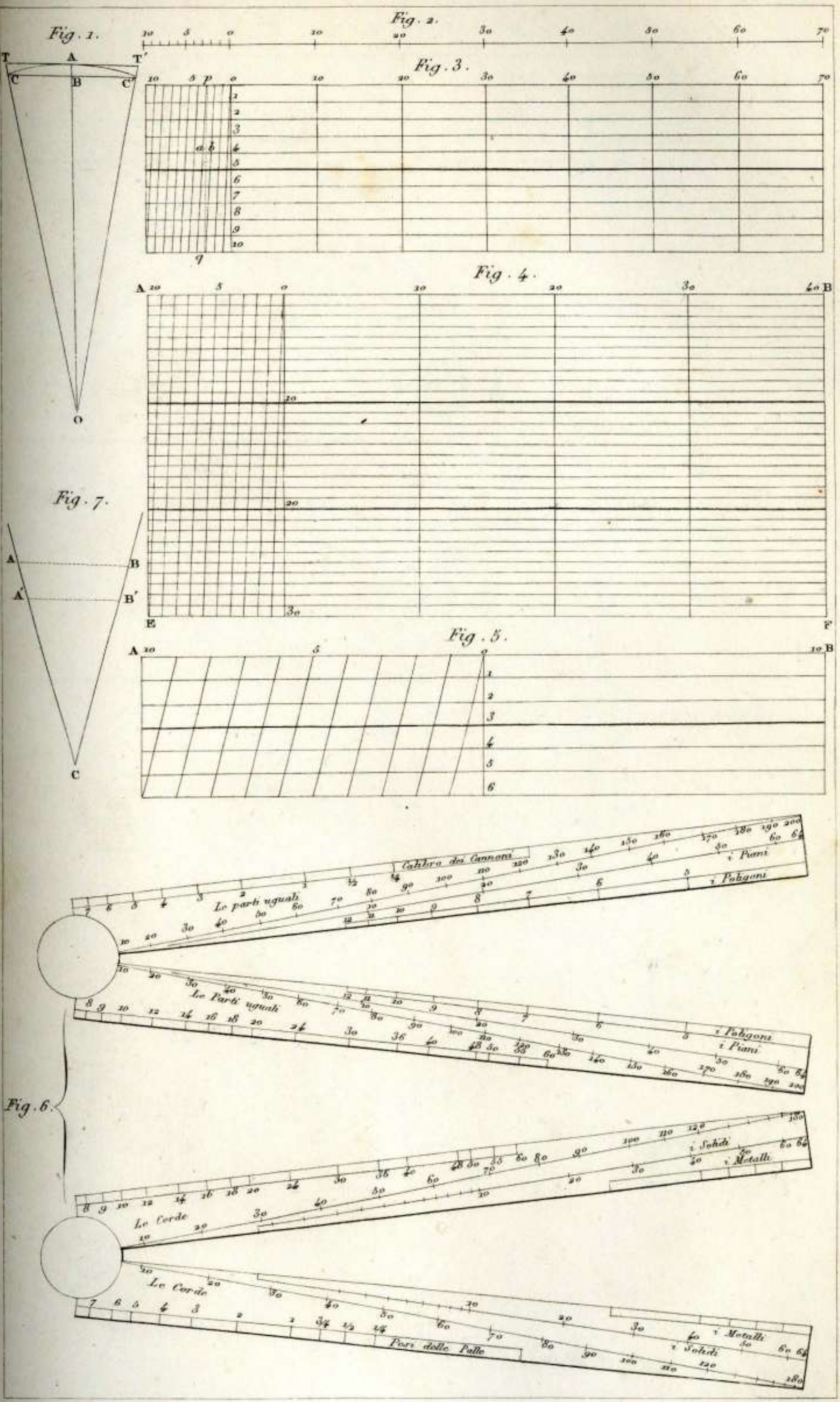


Fig. 1.
T
A
T'
C
B
C'
O
Fig. 2.
Fig. 3.
p
a b
q
Fig. 4.
A
B
E
F
Fig. 5.
Fig. 6.
Le parti uguali
Calibro dei Cannoni
i Piani
i Poligoni
Le Parti uguali
Le Corde
i Solidi
i Metalli
Pesi delle Palle
Fig. 7.
A
B
A'
B'
C

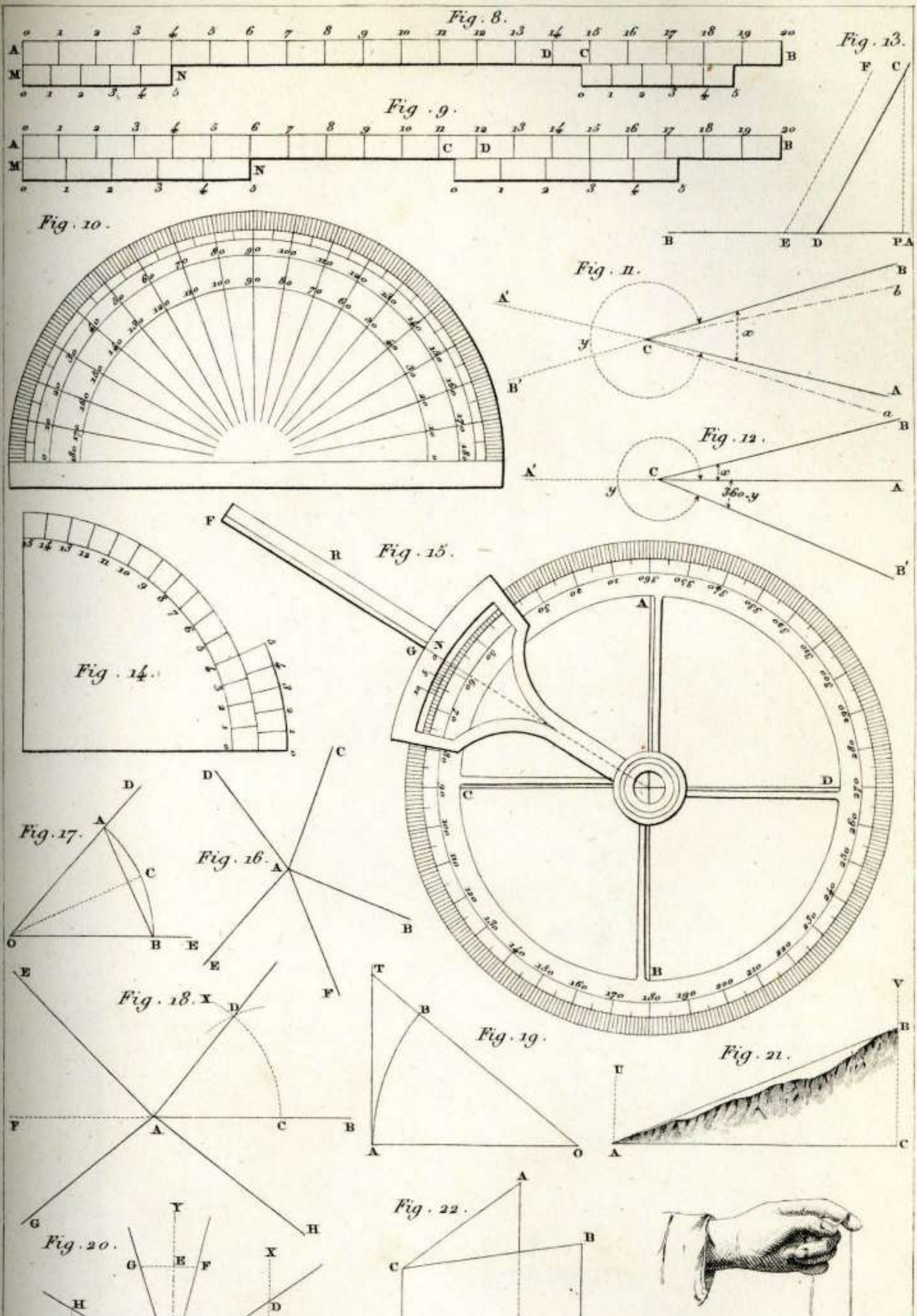


Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.

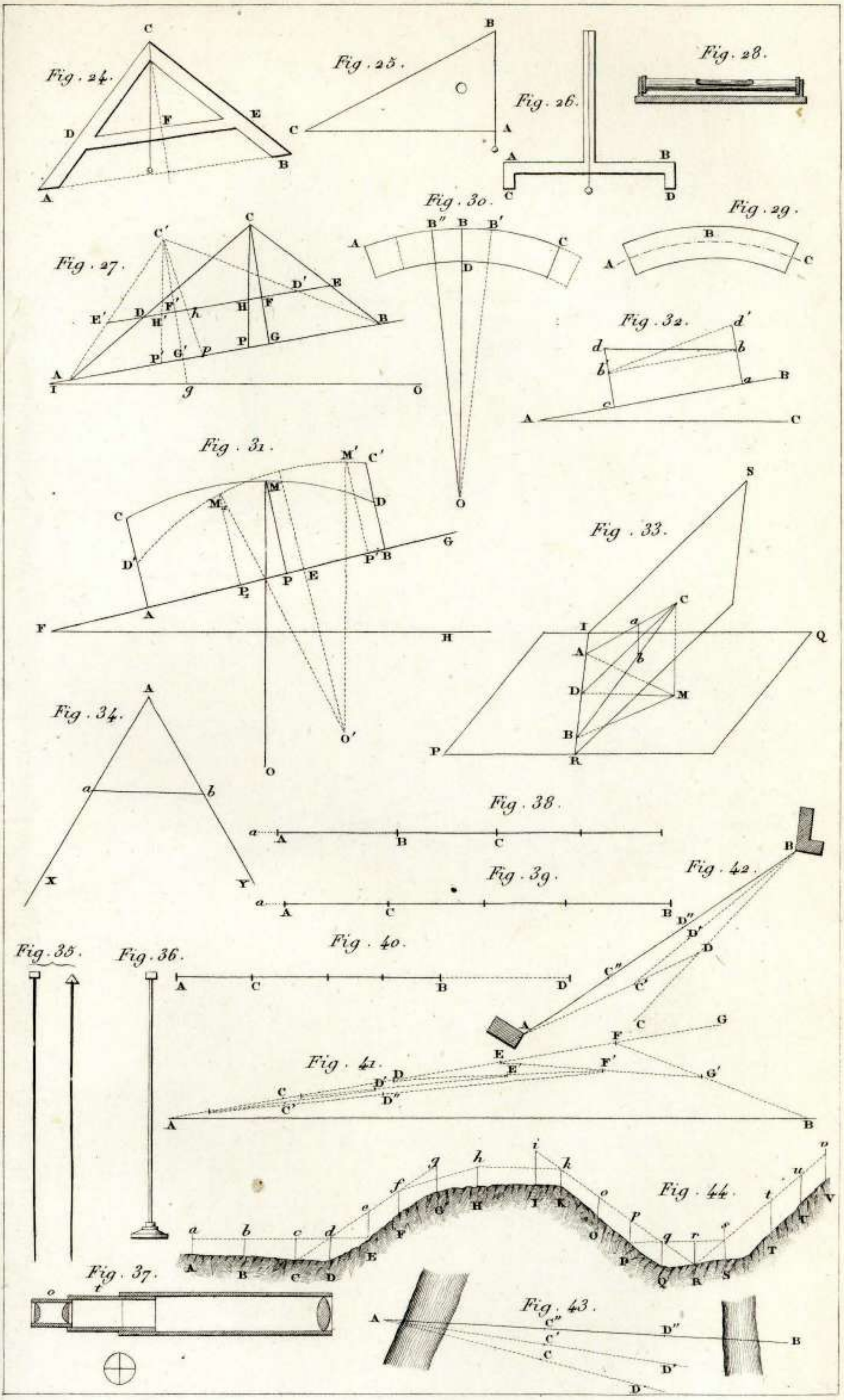


Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 28.
Fig. 27.
Fig. 30.
Fig. 29.
Fig. 32.
Fig. 31.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 42.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 44.
Fig. 37.
Fig. 43.

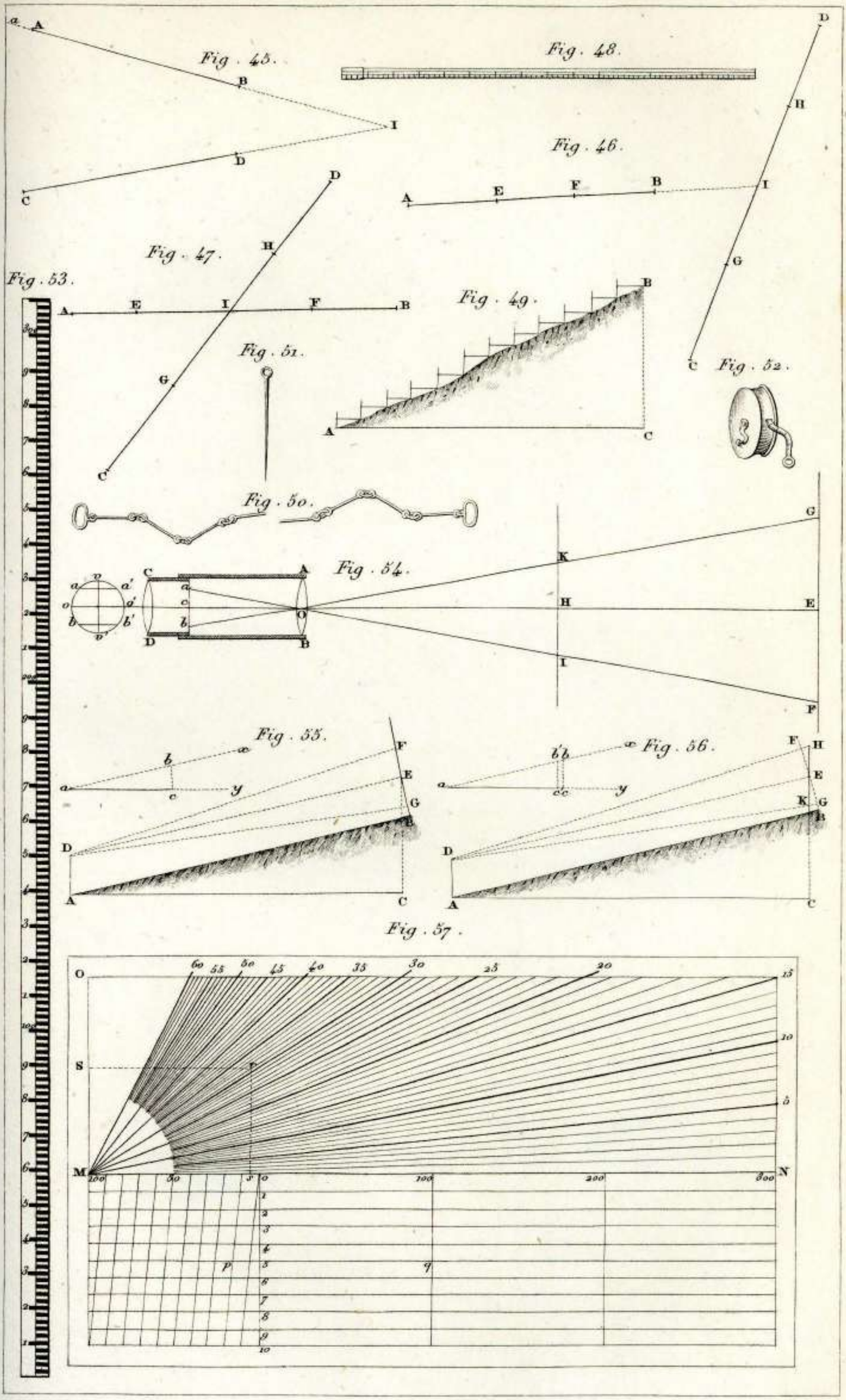


Fig. 45.
Fig. 48.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 53.
Fig. 49.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 50.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.

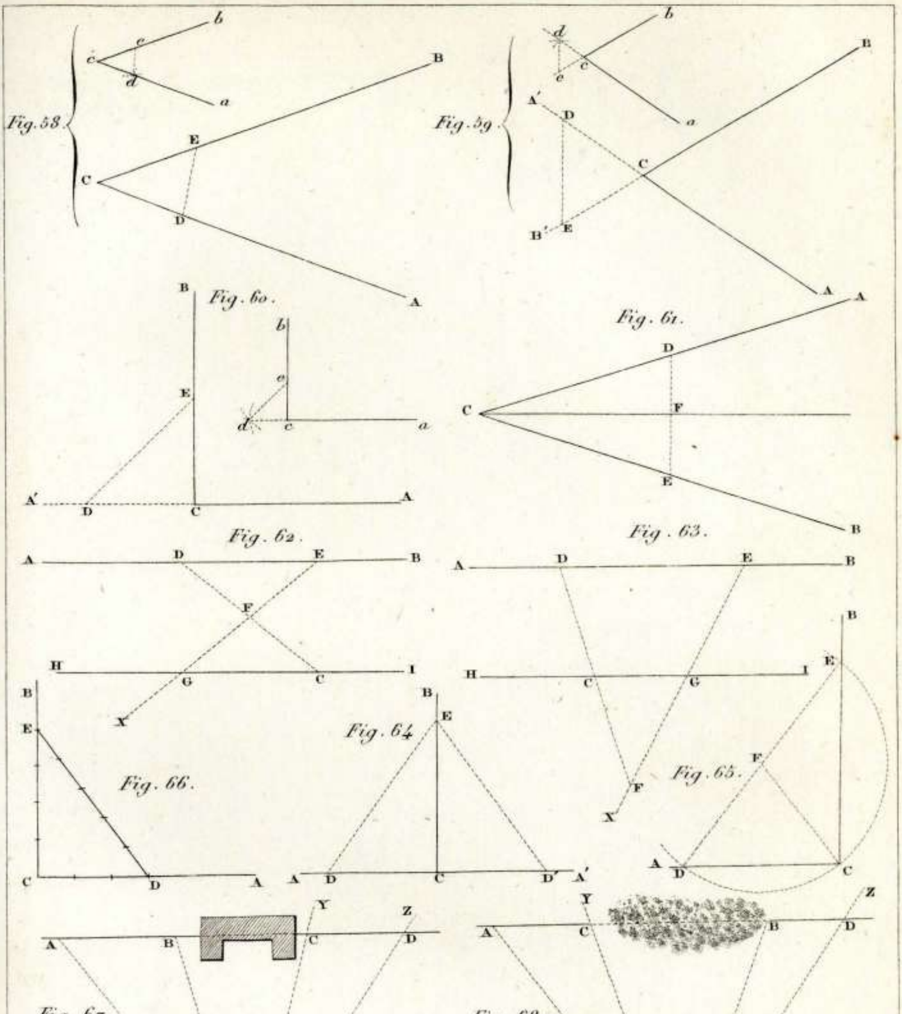


Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.

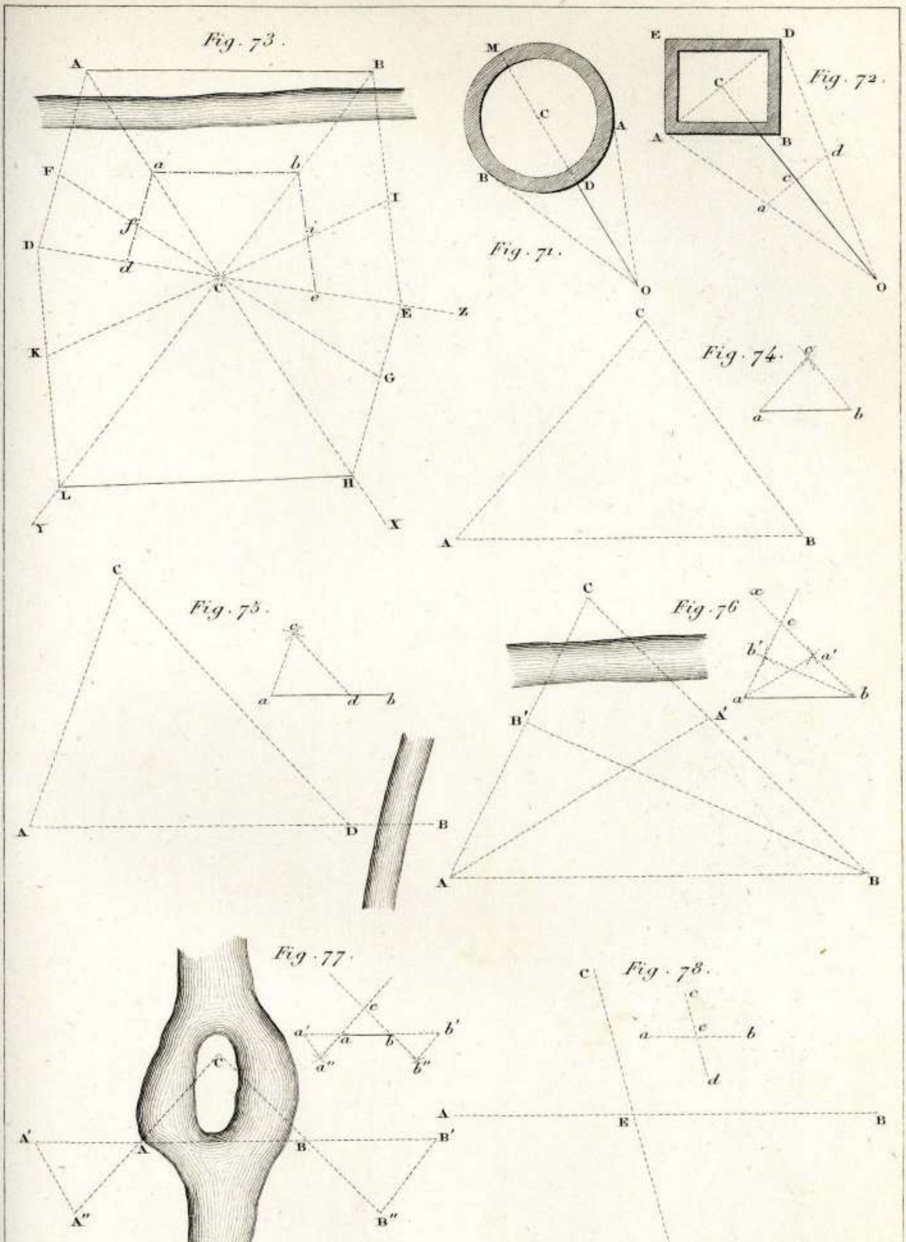


Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.

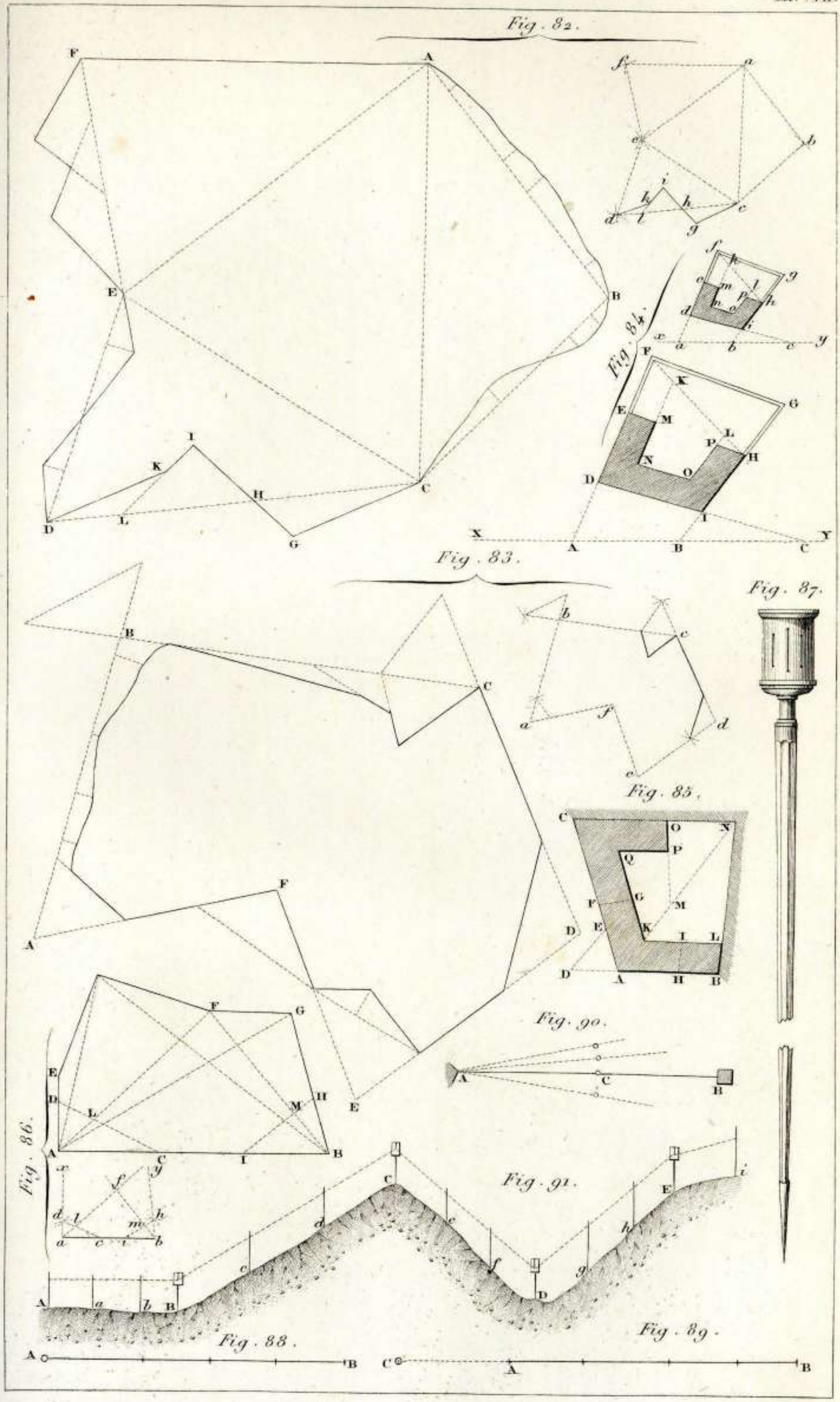


Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.

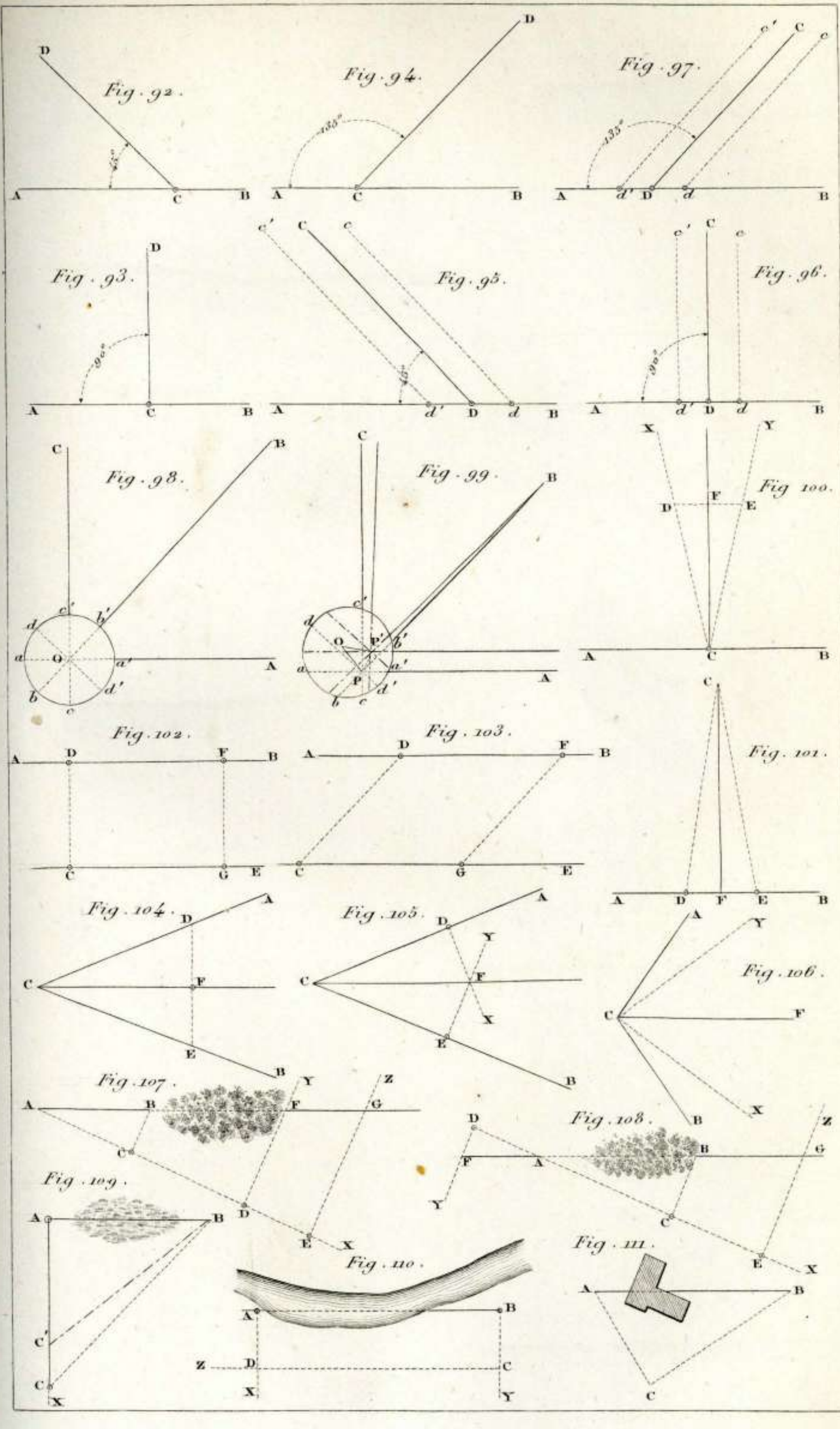


Fig. 92.
Fig. 94.
Fig. 97.
Fig. 93.
Fig. 95.
Fig. 96.
Fig. 98.
Fig. 99.
Fig. 100.
Fig. 102.
Fig. 103.
Fig. 101.
Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.

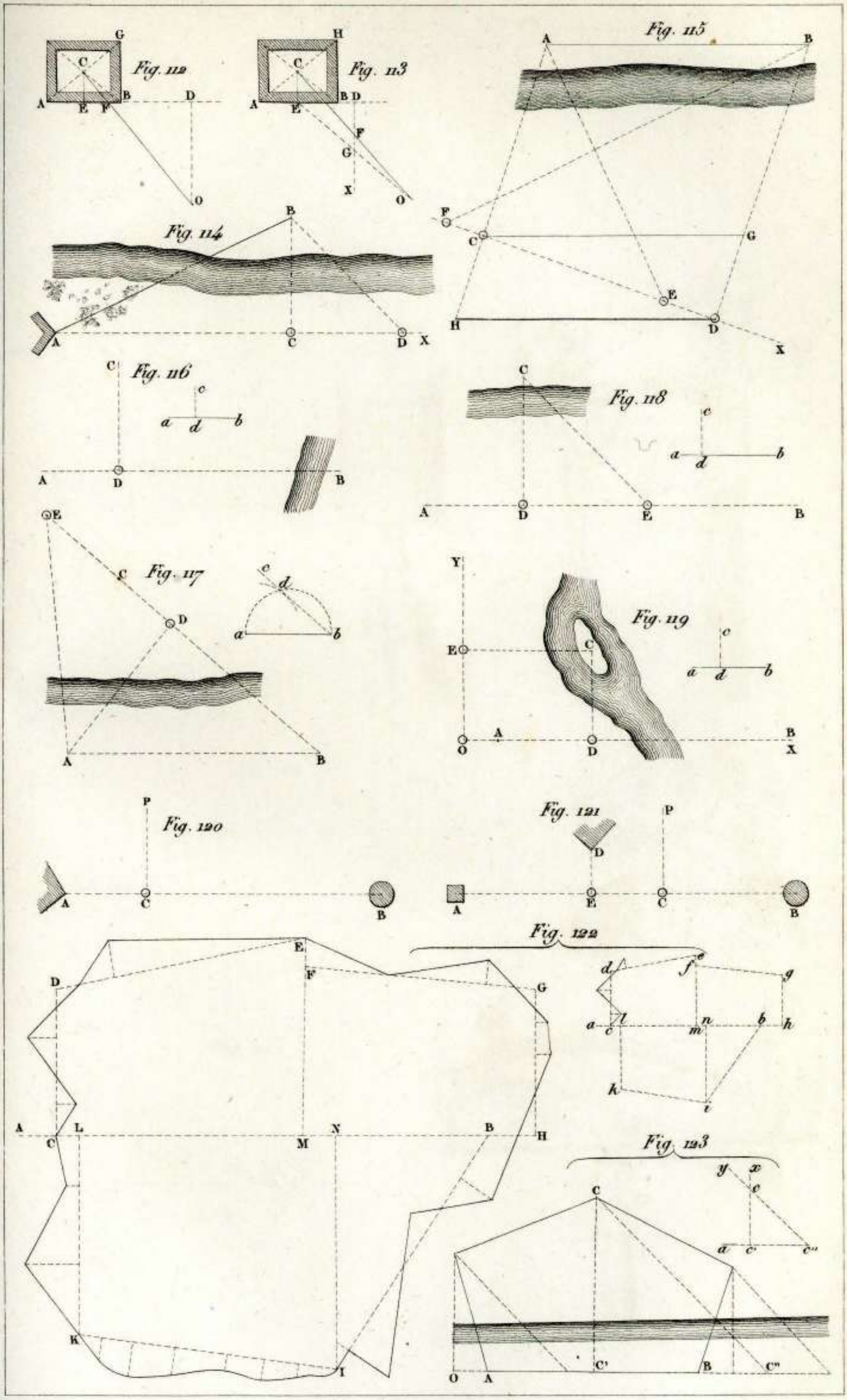


Fig. 112
A E F B G C D O
Fig. 113
A E B D H C F G X O
Fig. 114
A B C D X
Fig. 115
A B F C G E H D X
Fig. 116
C c a d b A D B
Fig. 117
E c D A B c d a b
Fig. 118
C c a d b A D E B
Fig. 119
Y E C c a d b O A D B X
Fig. 120
P A C B
Fig. 121
D P A E C B
Fig. 122
d e f g a c l m n b h k i
A C L M N B H D E F G K I
Fig. 123
y x e a c' c'' C O A C' B C''

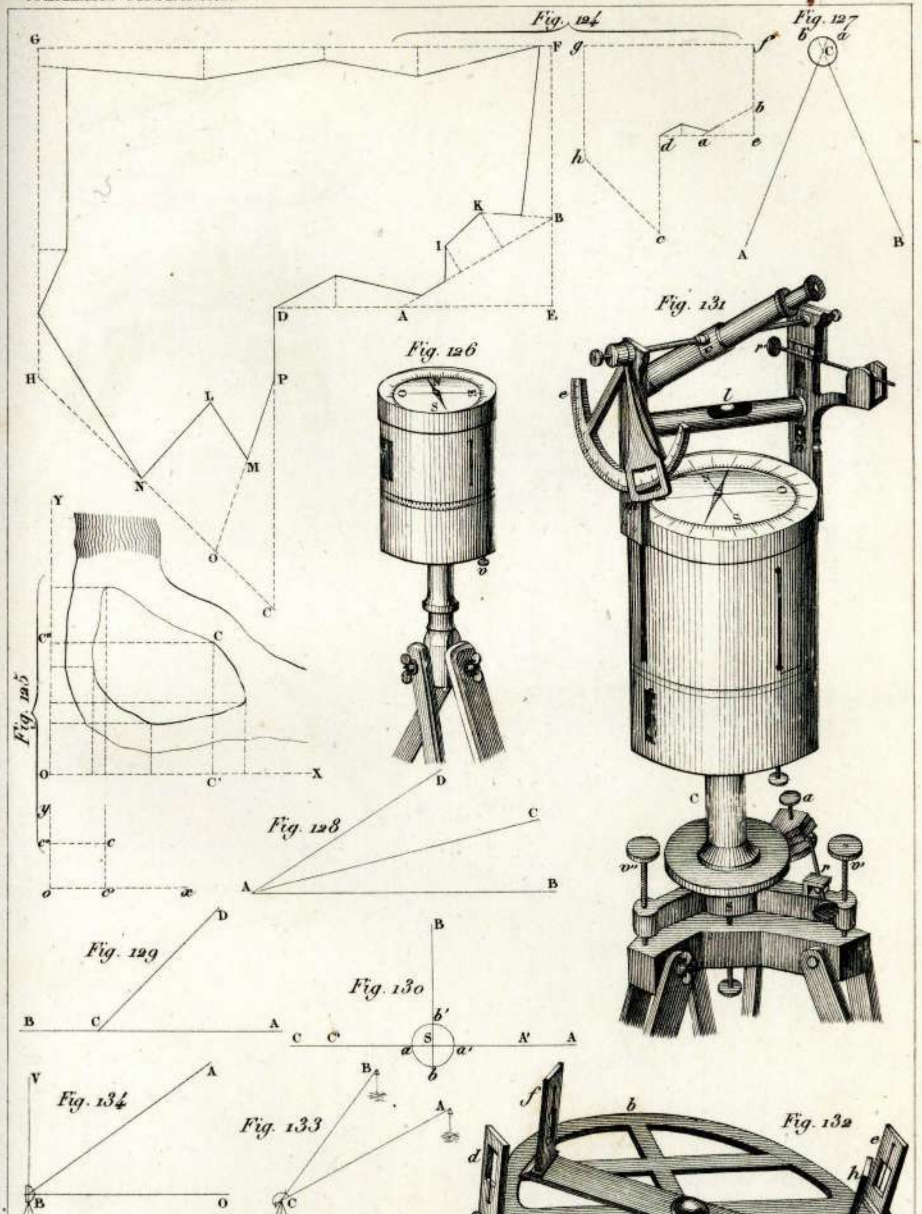


Fig. 124
Fig. 127
Fig. 131
Fig. 126
Fig. 125
Fig. 128
Fig. 129
Fig. 130
Fig. 134
Fig. 133
Fig. 132
Fig. 135

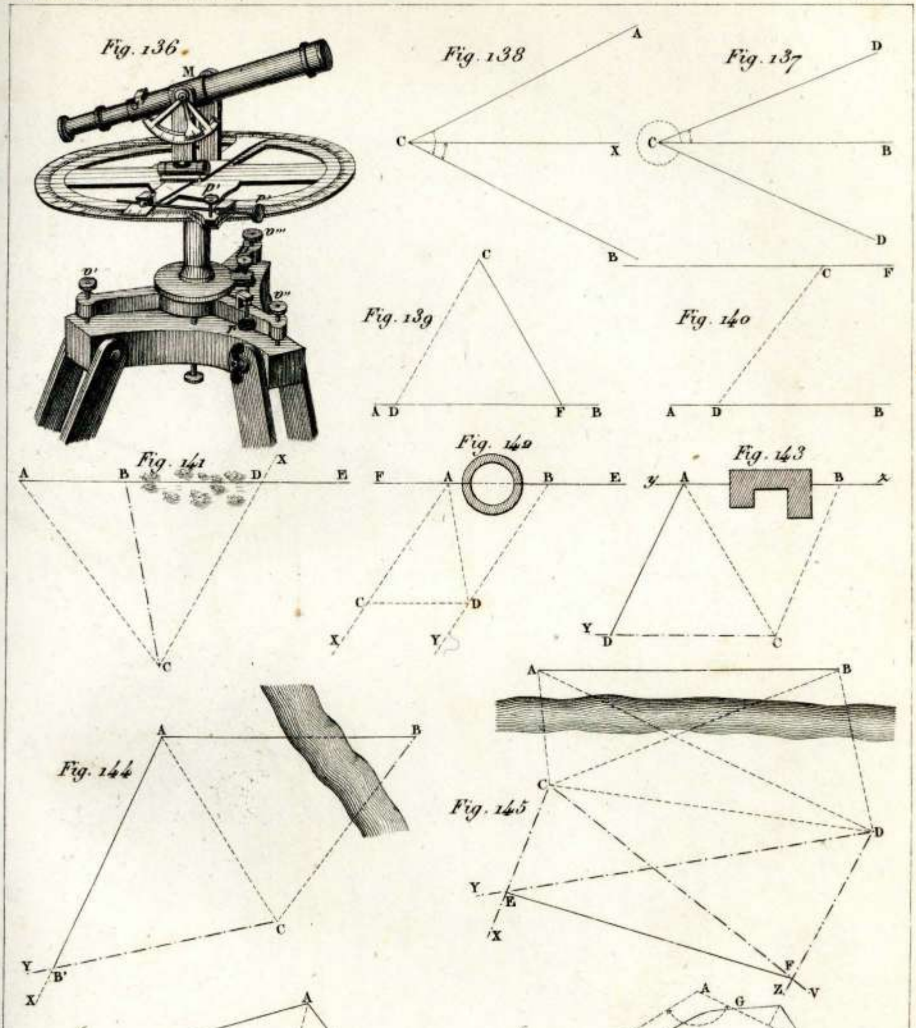


Fig. 136.
Fig. 138
Fig. 137
Fig. 139
Fig. 140
Fig. 141
Fig. 142
Fig. 143
Fig. 144
Fig. 145
Fig. 146
Fig. 147

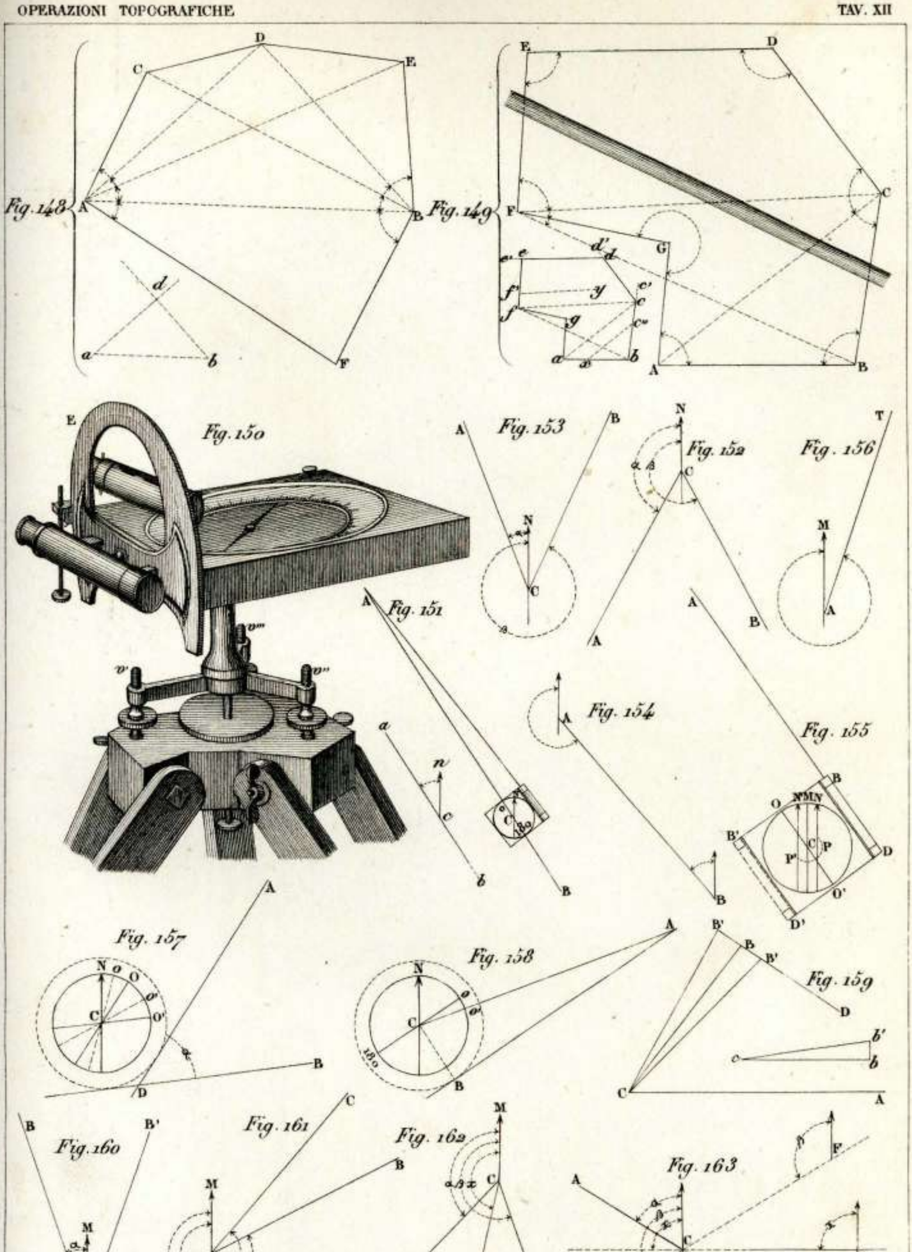


Fig. 148
Fig. 149
Fig. 150
Fig. 151
Fig. 152
Fig. 153
Fig. 154
Fig. 155
Fig. 156
Fig. 157
Fig. 158
Fig. 159
Fig. 160
Fig. 161
Fig. 162
Fig. 163
Fig. 164
Fig. 165

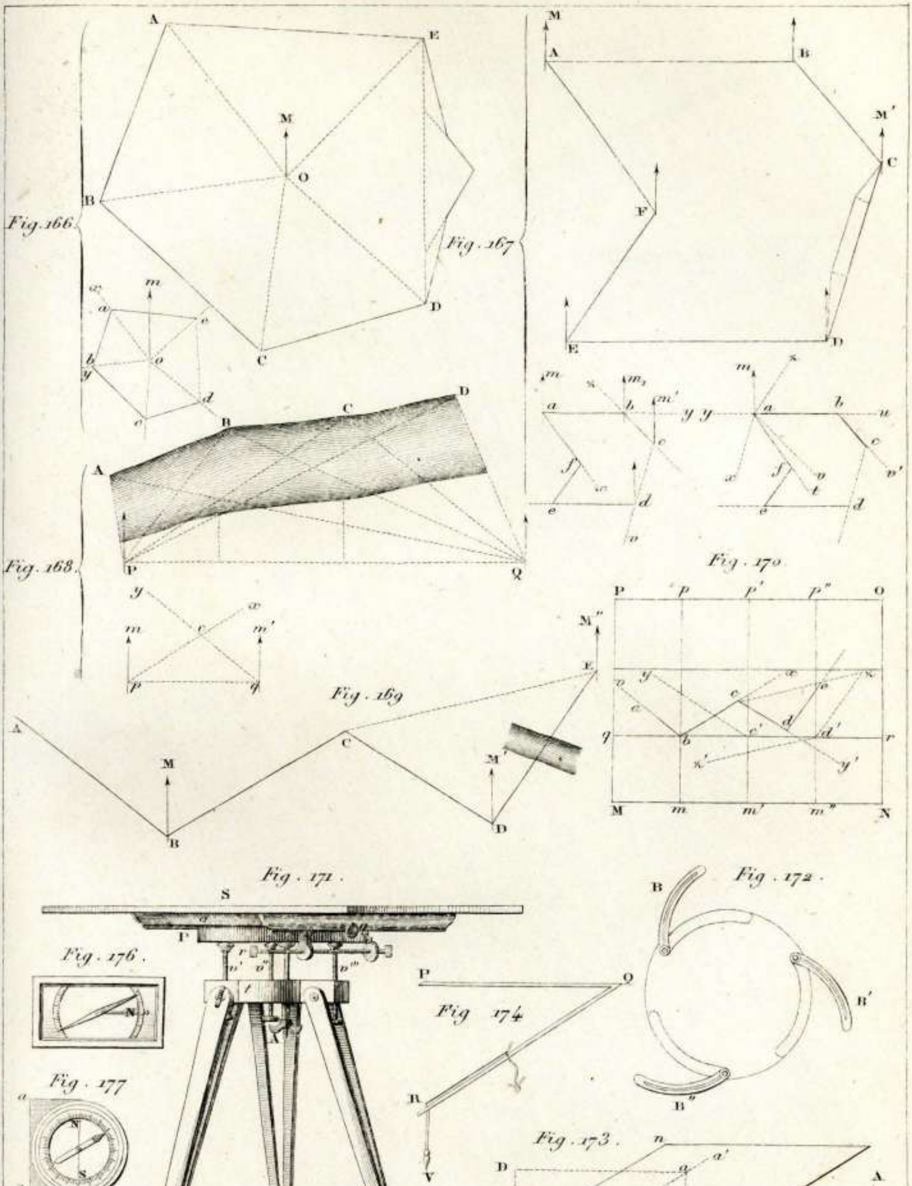


Fig. 166.
Fig. 167
Fig. 168.
Fig. 169
Fig. 170
Fig. 171.
Fig. 172.
Fig. 173.
Fig 174
Fig. 175.
Fig. 176.
Fig. 177

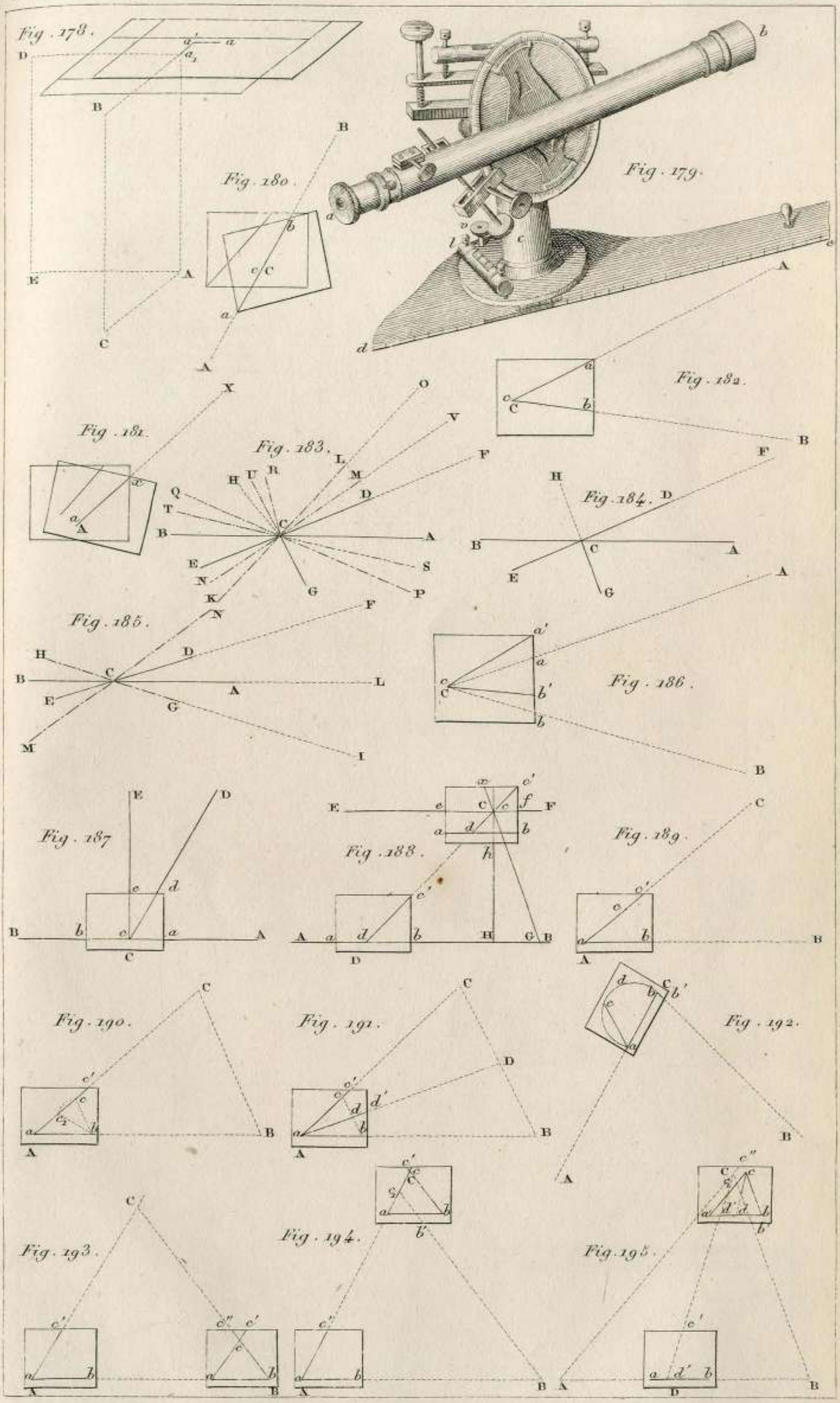


Fig. 178.
Fig. 179.
Fig. 180.
Fig. 181.
Fig. 182.
Fig. 183.
Fig. 184.
Fig. 185.
Fig. 186.
Fig. 187
Fig. 188.
Fig. 189.
Fig. 190.
Fig. 191.
Fig. 192.
Fig. 193.
Fig. 194.
Fig. 195.

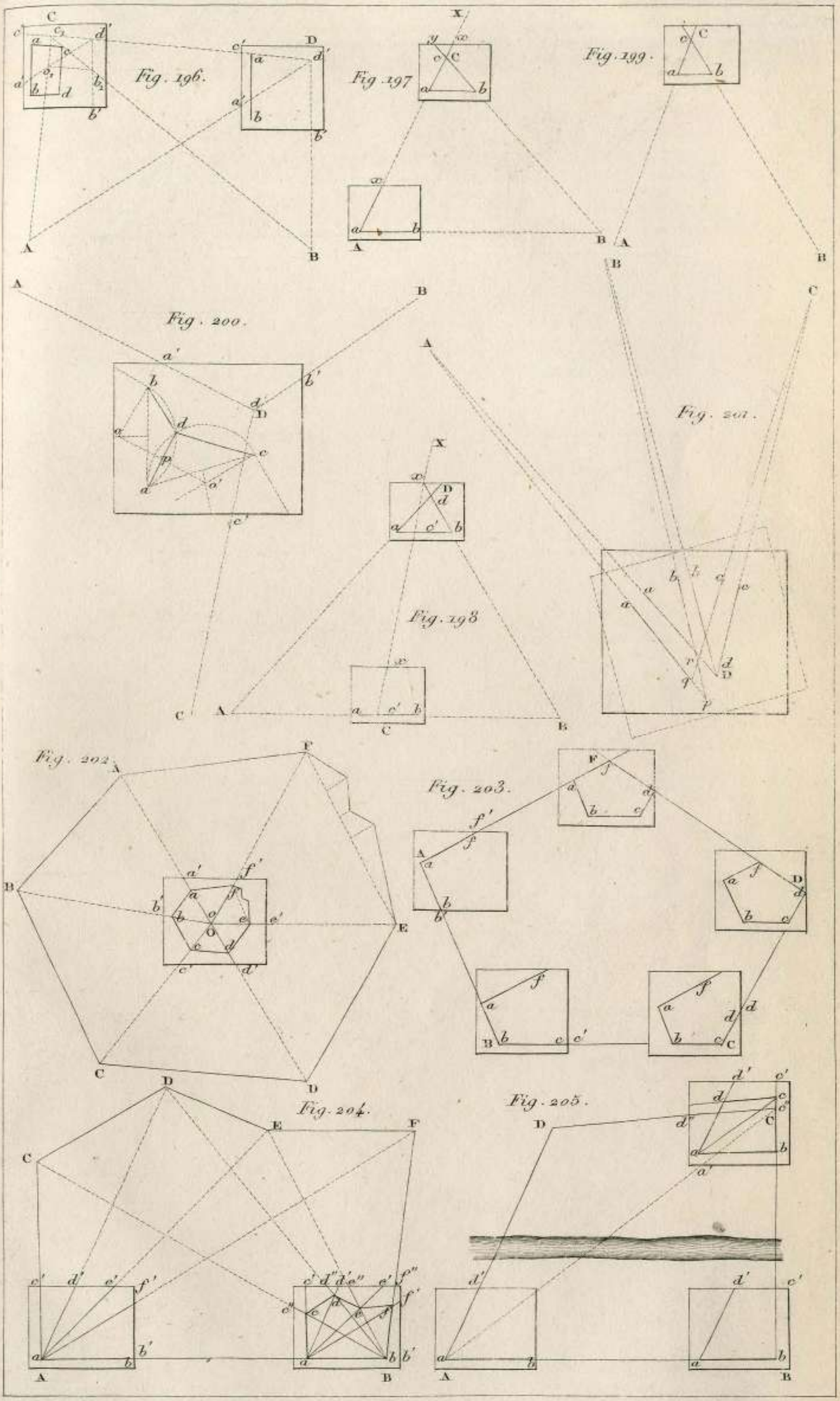


Fig. 196.
Fig. 197
Fig. 198
Fig. 199.
Fig. 200.
Fig. 201.
Fig. 202.
Fig. 203.
Fig. 204.
Fig. 205.

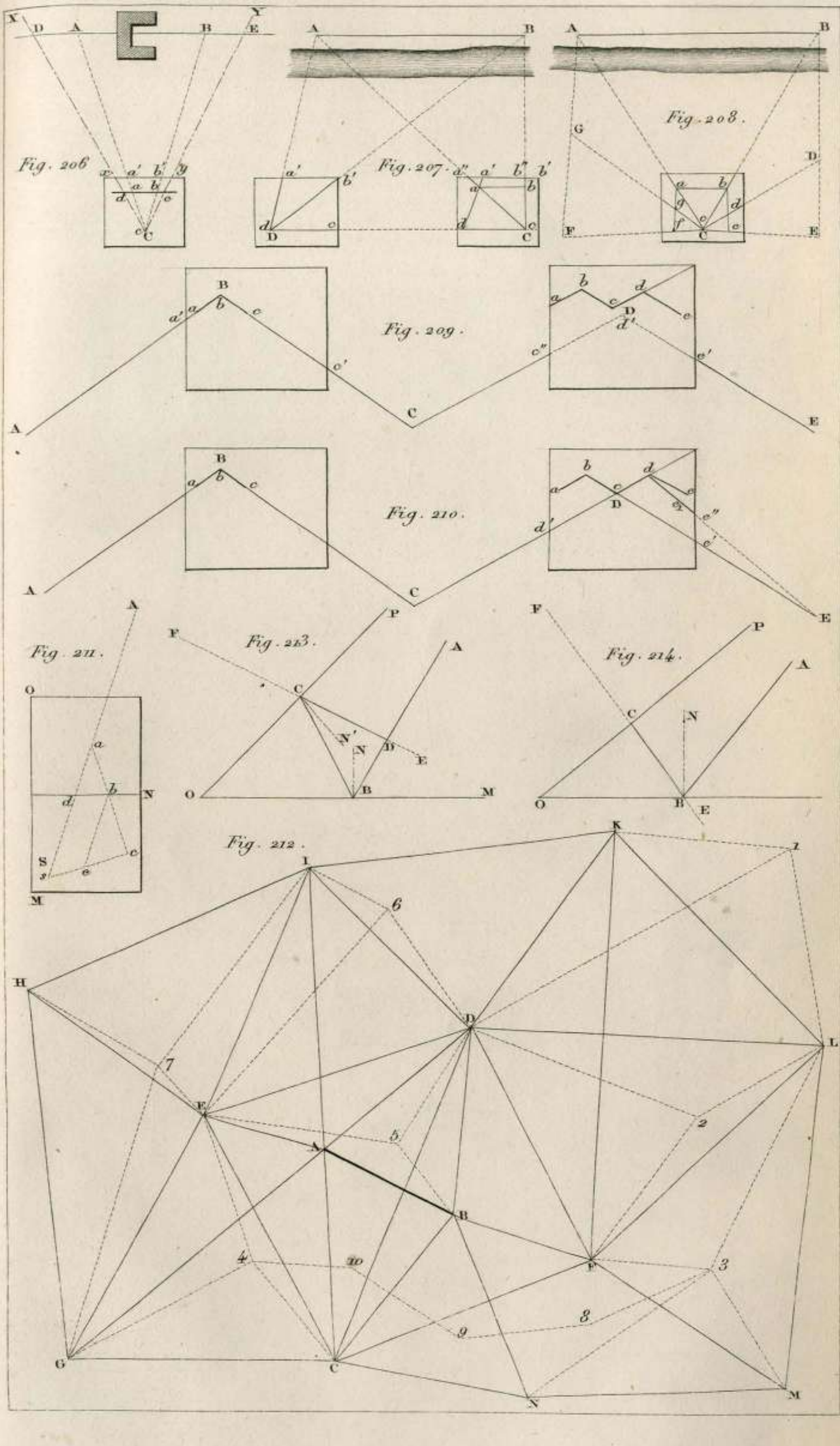


Fig. 206
Fig. 207
Fig. 208
Fig. 209
Fig. 210
Fig. 211
Fig. 213
Fig. 214
Fig. 212

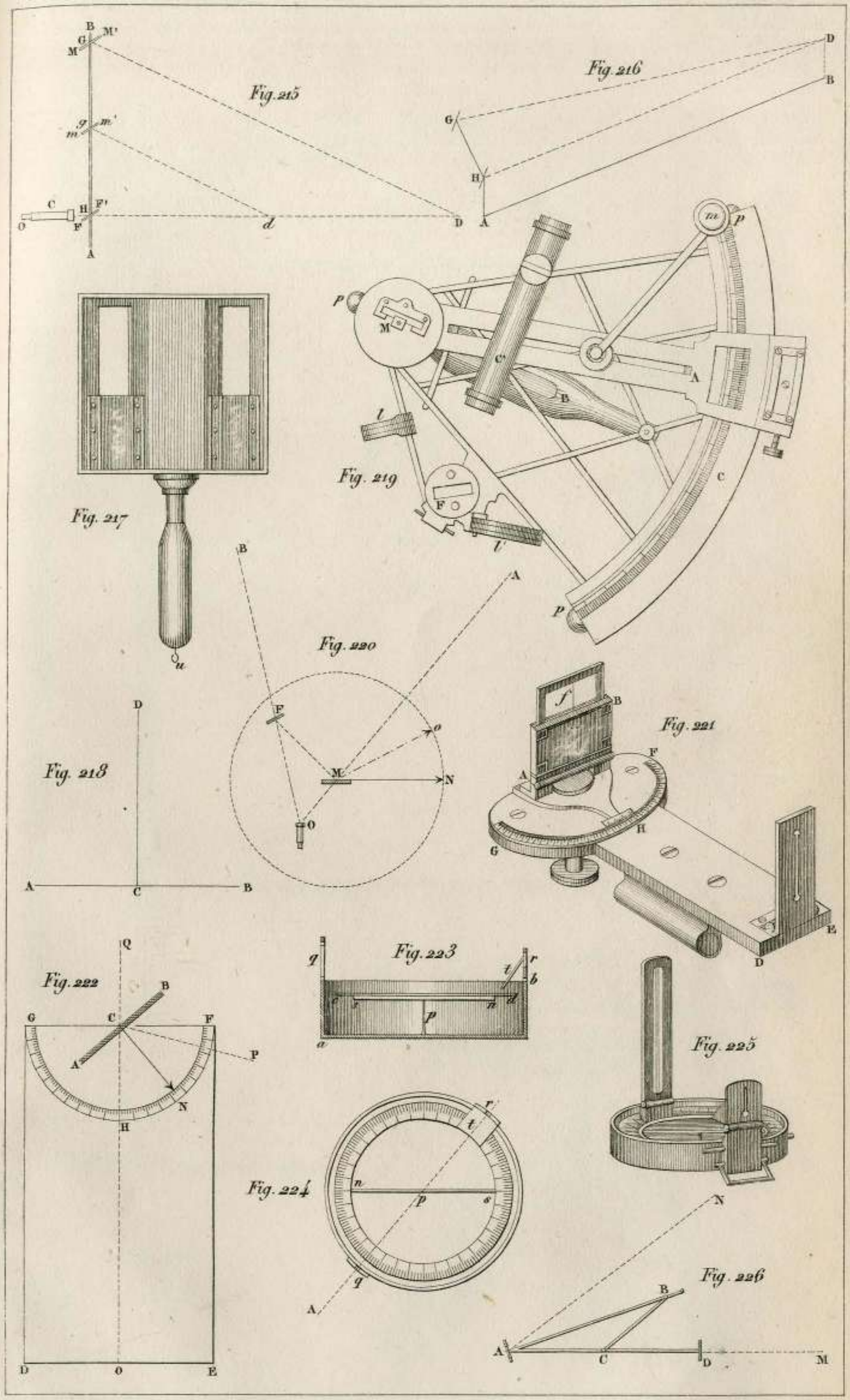


Fig. 215
Fig. 216
Fig. 217
Fig. 218
Fig. 219
Fig. 220
Fig. 221
Fig. 222
Fig. 223
Fig. 224
Fig. 225
Fig. 226

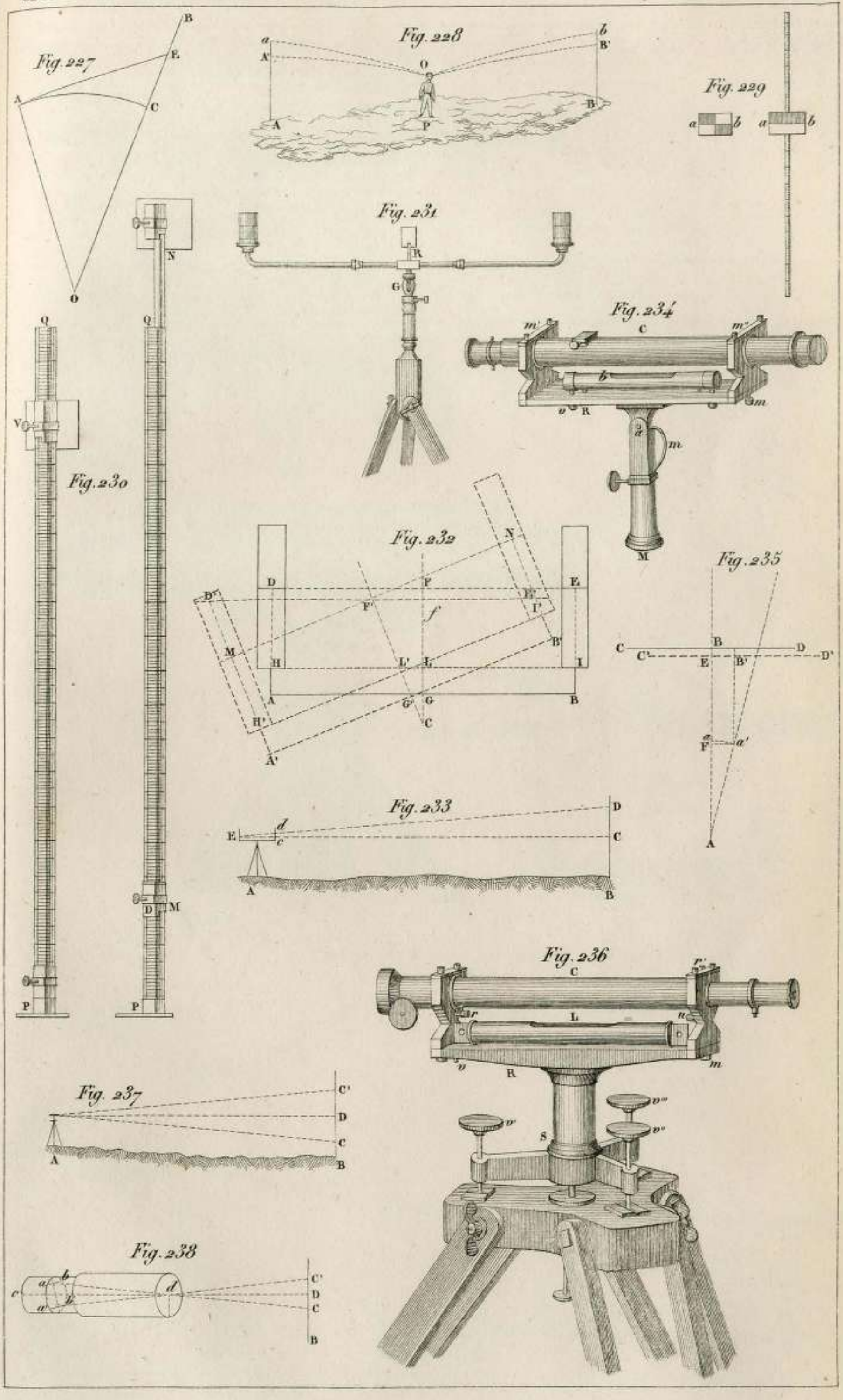


Fig. 227
Fig. 228
Fig. 229
Fig. 230
Fig. 231
Fig. 232
Fig. 233
Fig. 234
Fig. 235
Fig. 236
Fig. 237
Fig. 238

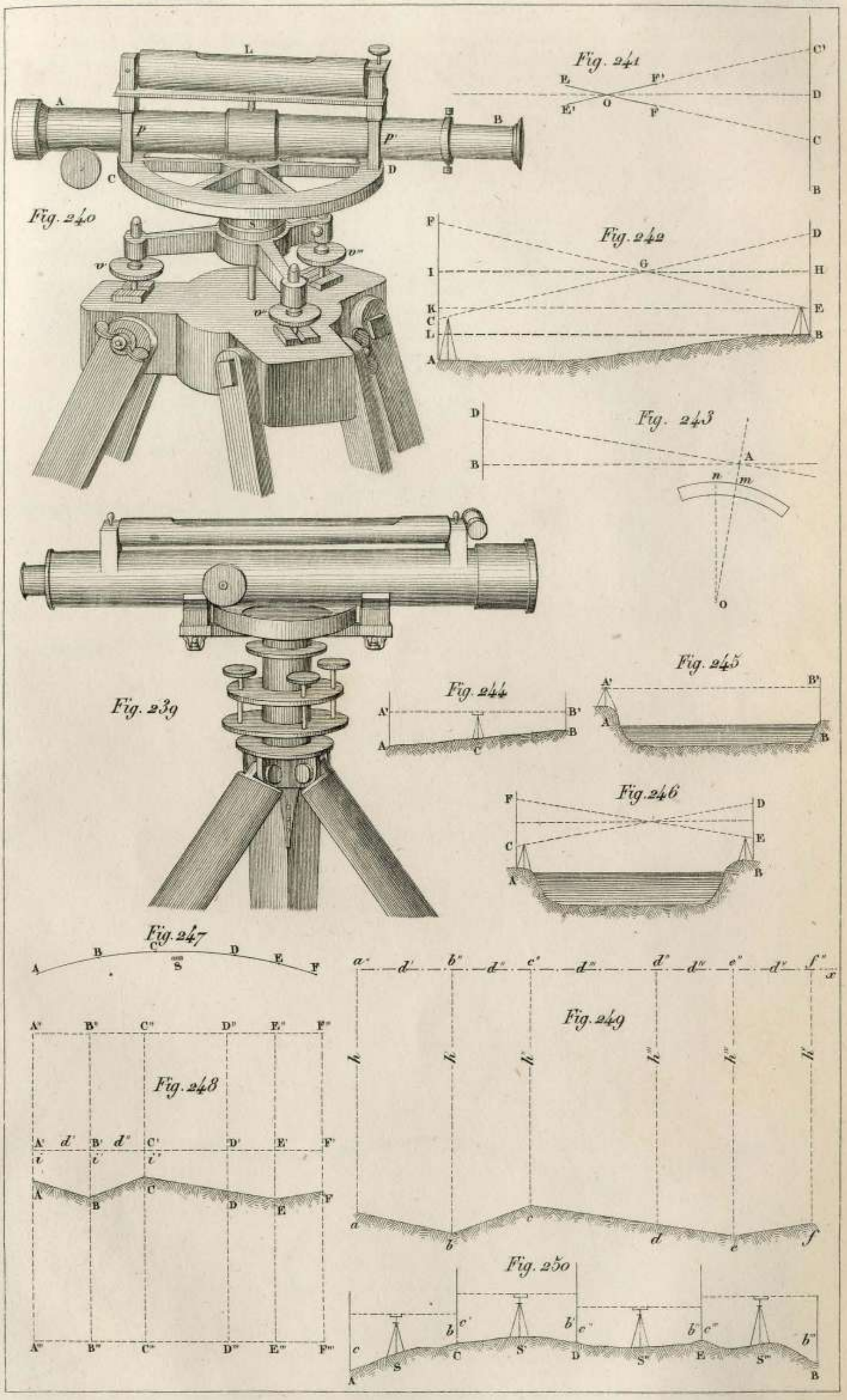


Fig. 240
Fig. 241
Fig. 242
Fig. 243
Fig. 239
Fig. 244
Fig. 245
Fig. 246
Fig. 247
Fig. 248
Fig. 249
Fig. 250

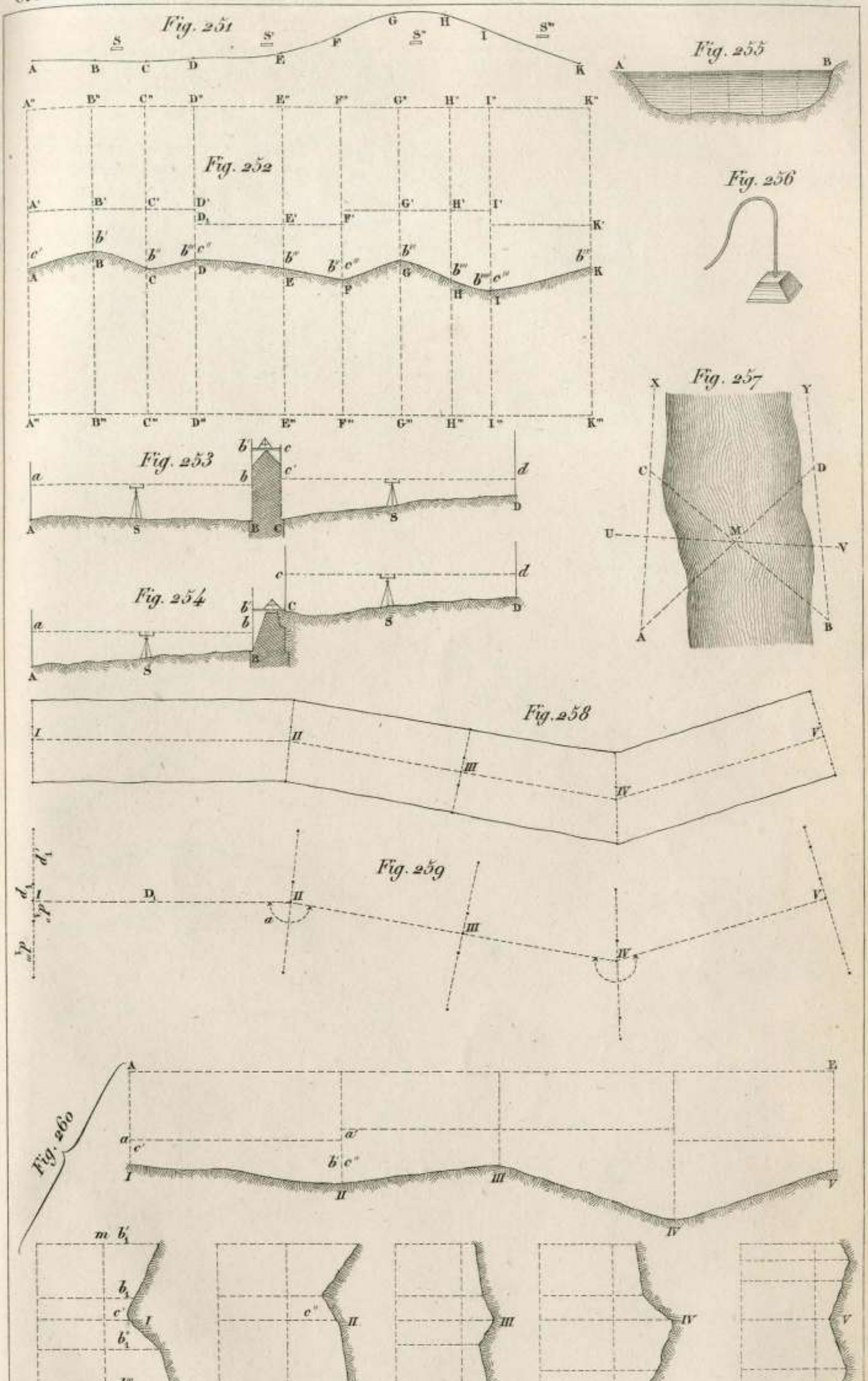


Fig. 251
Fig. 252
Fig. 253
Fig. 254
Fig. 255
Fig. 256
Fig. 257
Fig. 258
Fig. 259
Fig. 260

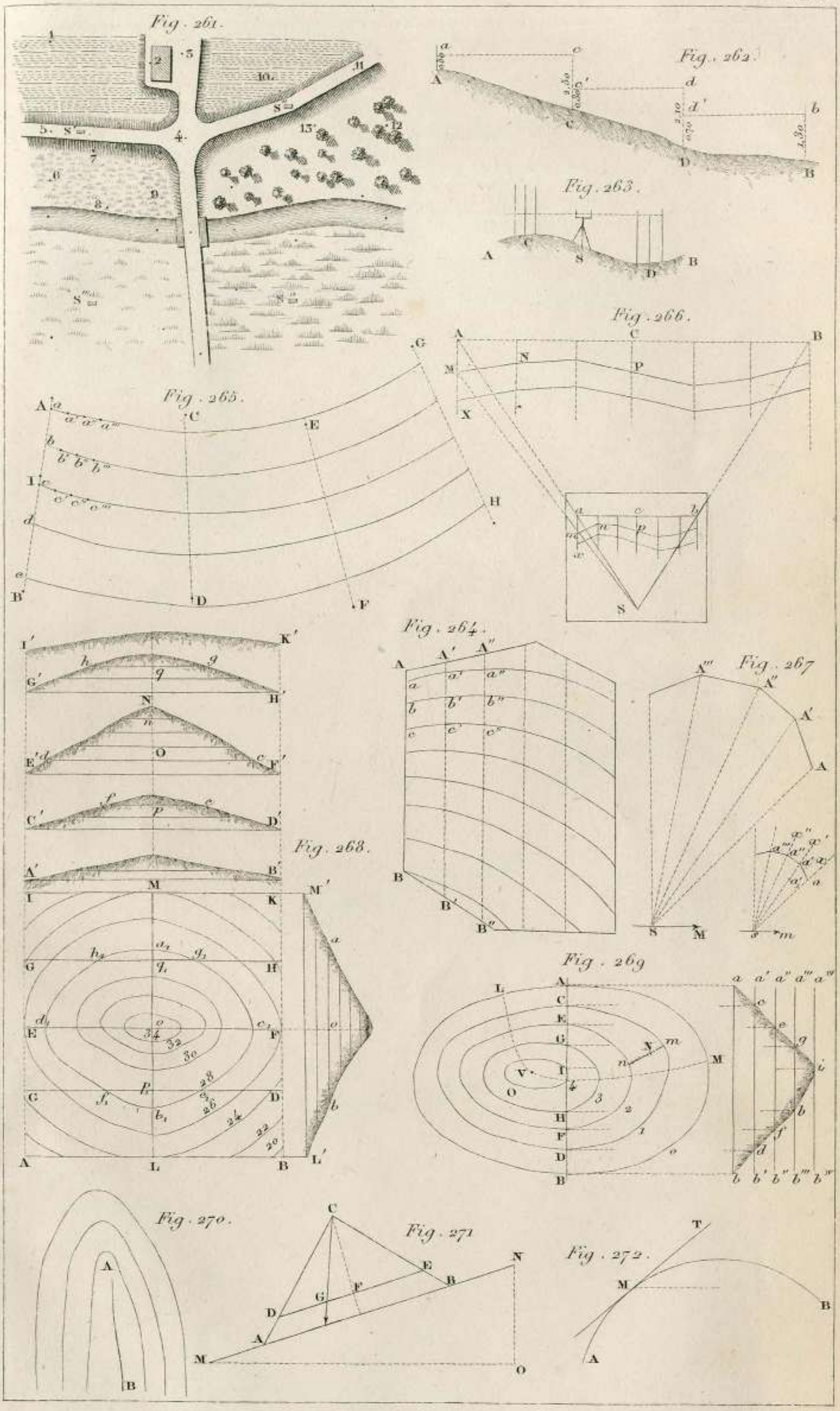


Fig. 261.
Fig. 262.
Fig. 263.
Fig. 264.
Fig. 265.
Fig. 266.
Fig. 267
Fig. 268.
Fig. 269
Fig. 270.
Fig. 271
Fig. 272.

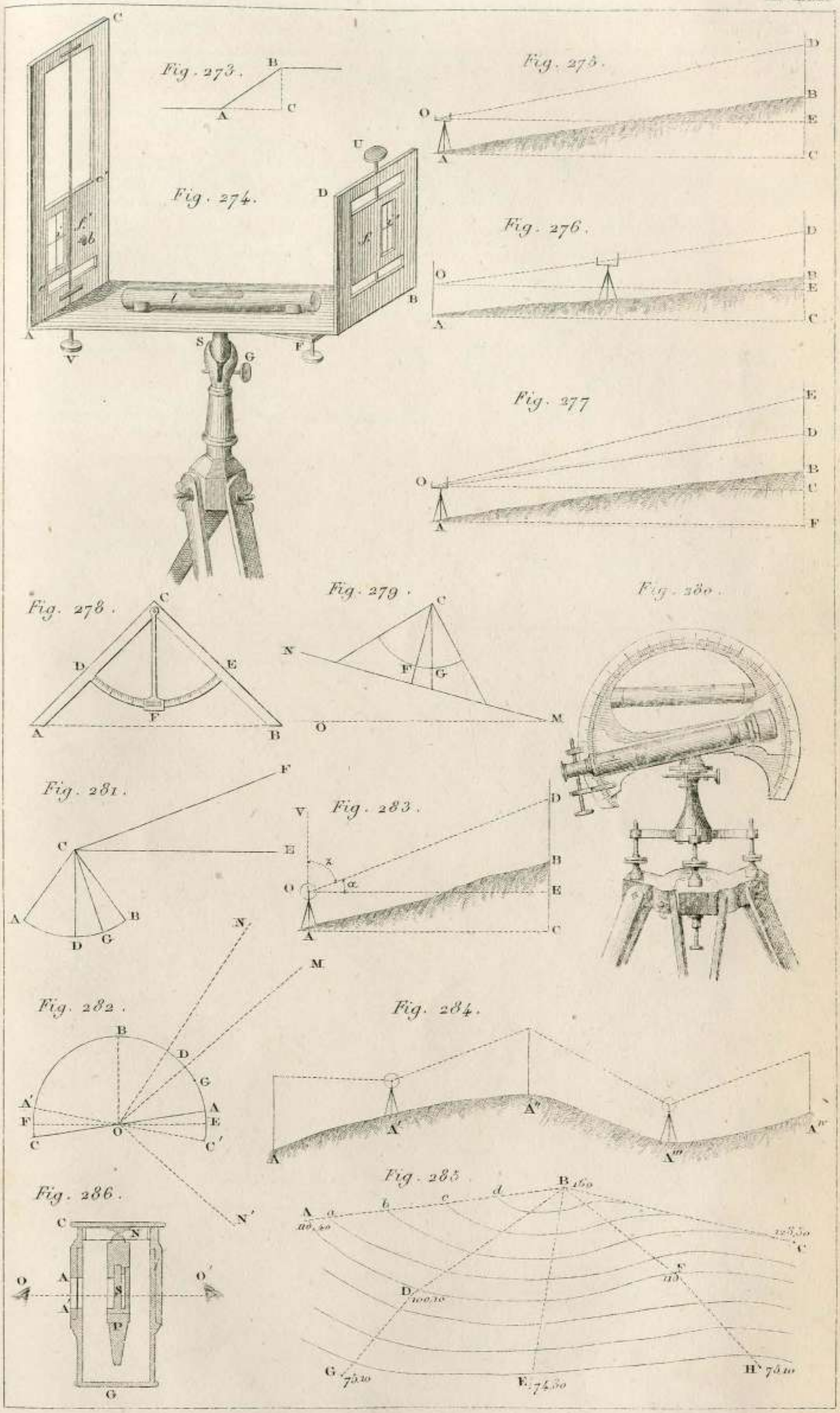


Fig. 273.
Fig. 274.
Fig. 275.
Fig. 276.
Fig. 277
Fig. 278.
Fig. 279.
Fig. 280.
Fig. 281.
Fig. 282.
Fig. 283.
Fig. 284.
Fig. 285.
Fig. 286.
B 160
A 110,40
128,50 C
D 100,10
C 115
G 75,10
E 74,50
H 75,10

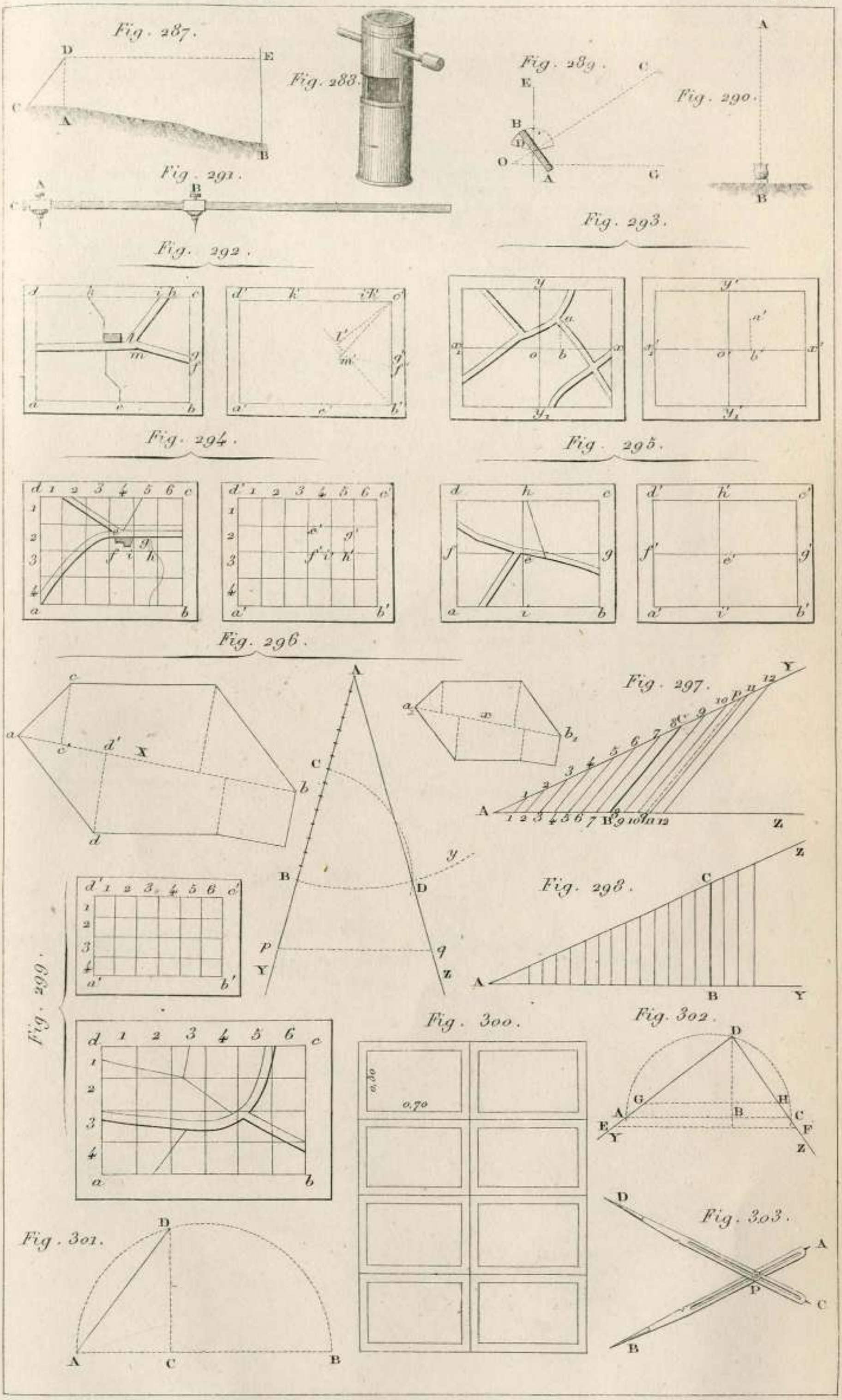


Fig. 287.
Fig. 288.
Fig. 289.
Fig. 290.
Fig. 291.
Fig. 292.
Fig. 293.
Fig. 294.
Fig. 295.
Fig. 296.
Fig. 297.
Fig. 298.
Fig. 299.
Fig. 300.
0,30
0,70
Fig. 301.
Fig. 302.
Fig. 303.

Fig. 305.

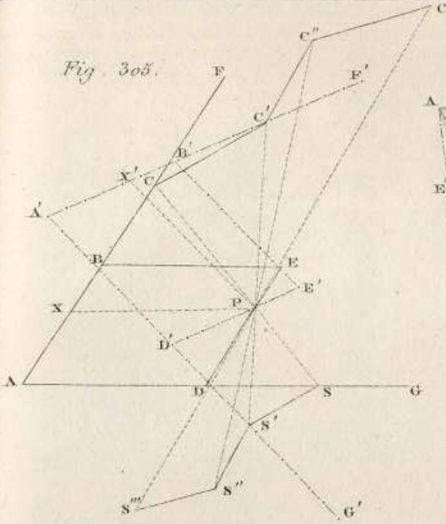


Fig. 307.

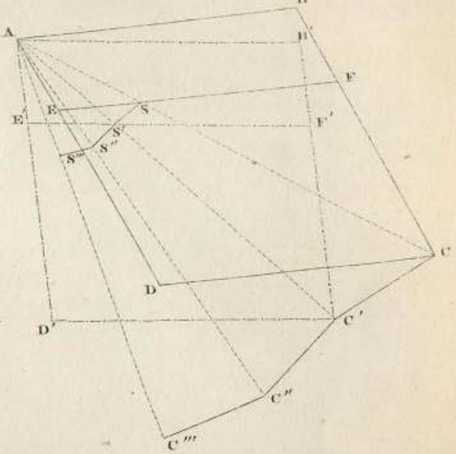


Fig. 304.

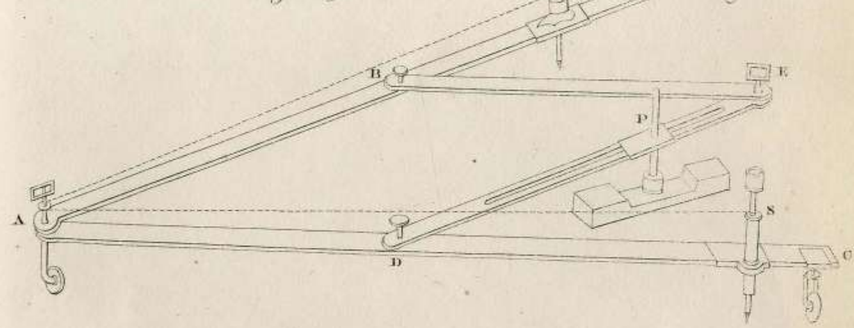


Fig. 306.

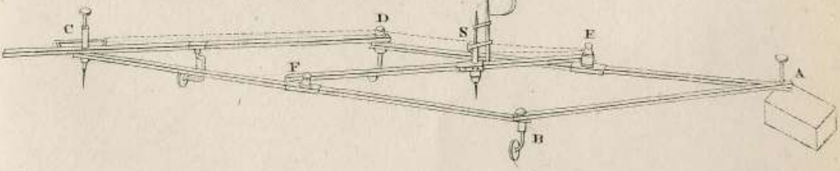
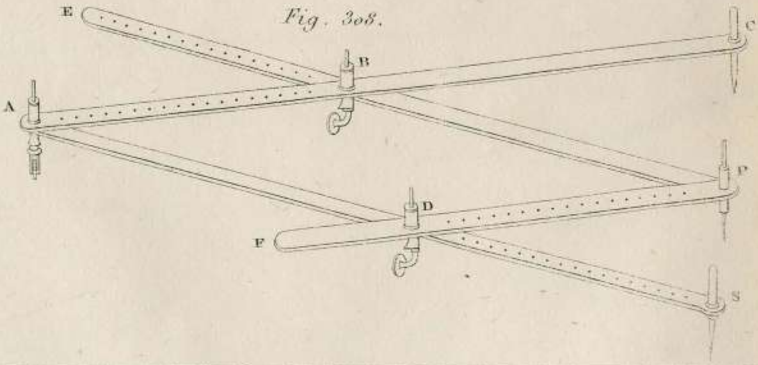


Fig. 308.



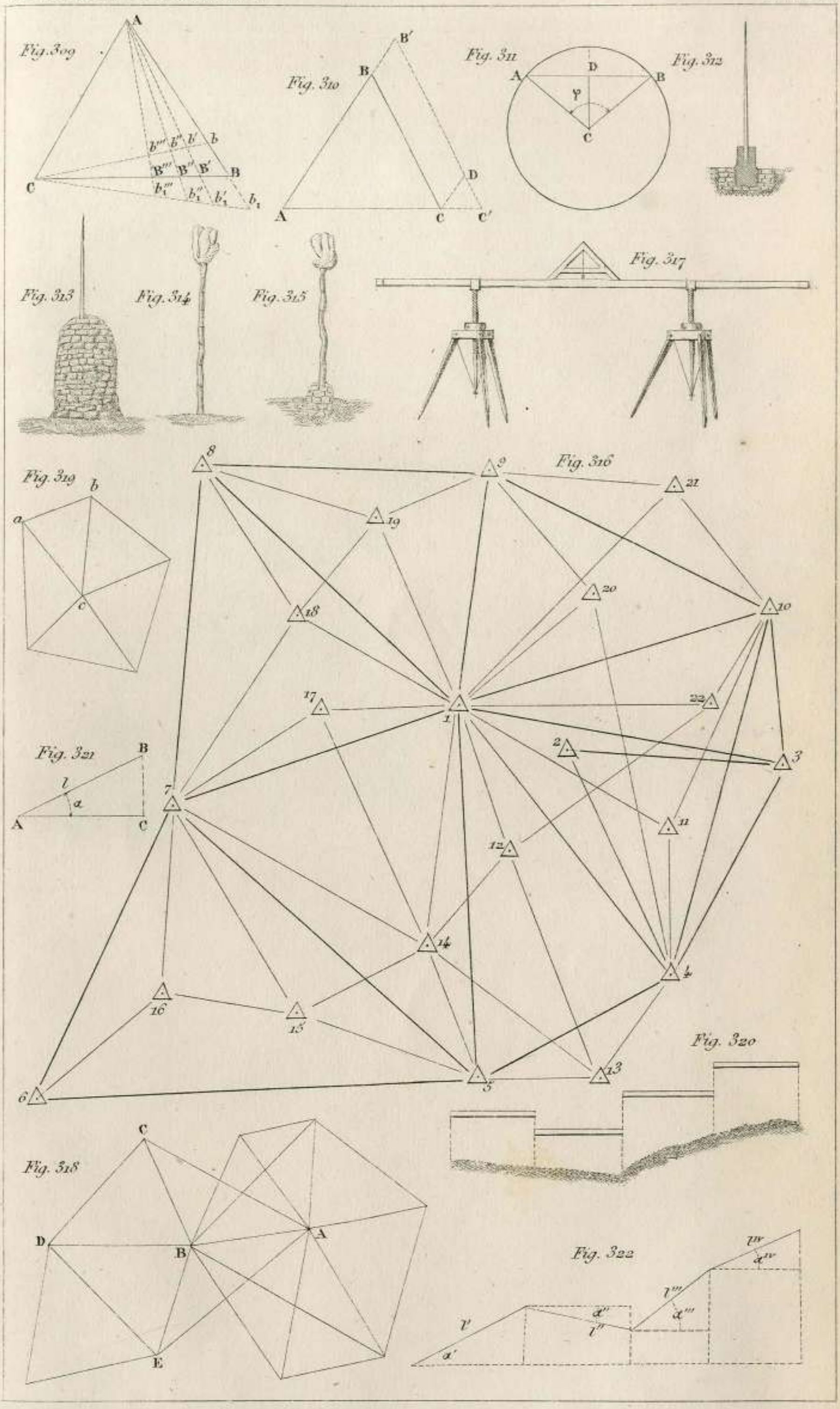


Fig. 309
Fig. 310
Fig. 311
Fig. 312
Fig. 313
Fig. 314
Fig. 315
Fig. 316
Fig. 317
Fig. 318
Fig. 319
Fig. 320
Fig. 321
Fig. 322

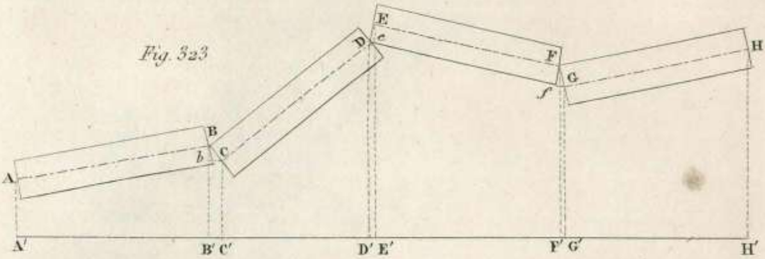


Fig. 323

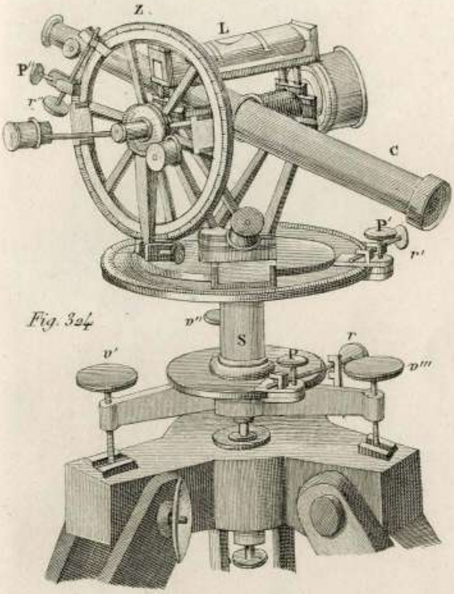


Fig. 324

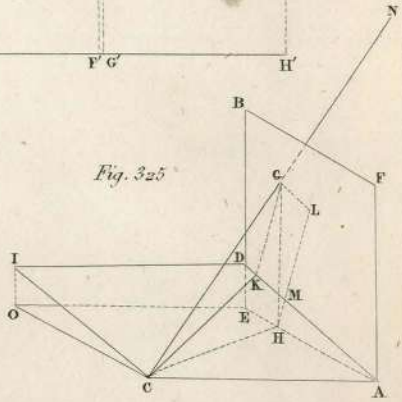


Fig. 325

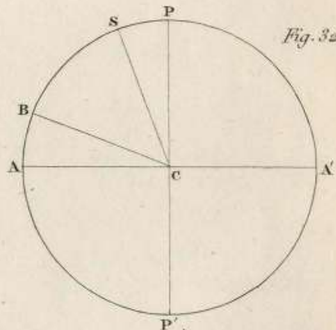


Fig. 326

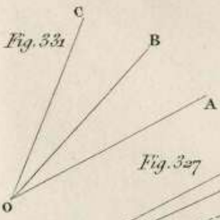


Fig. 331

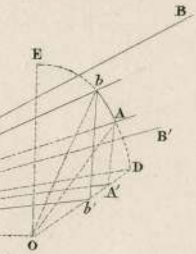


Fig. 327

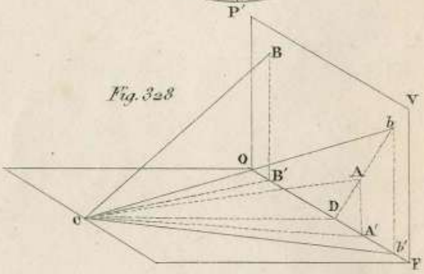


Fig. 328

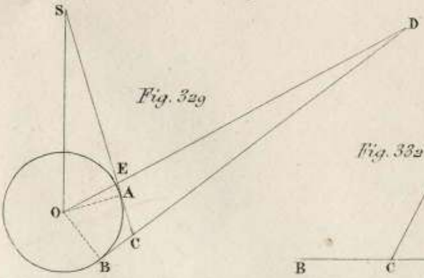


Fig. 329

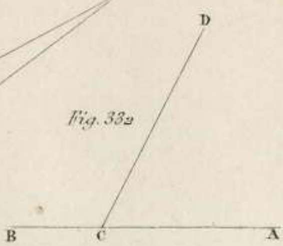


Fig. 332

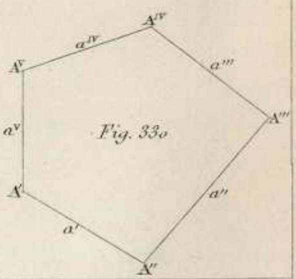


Fig. 330

Fig. 333

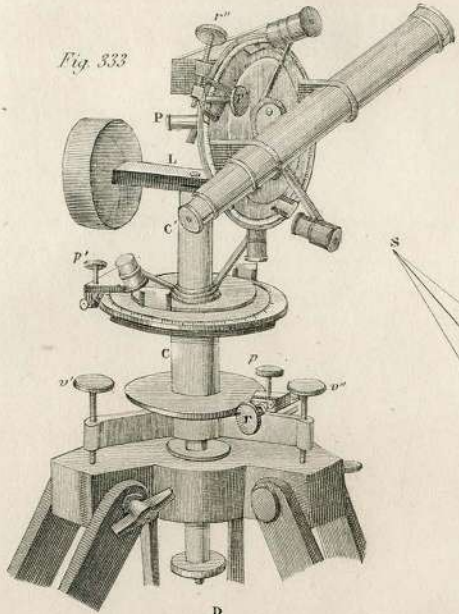


Fig. 335

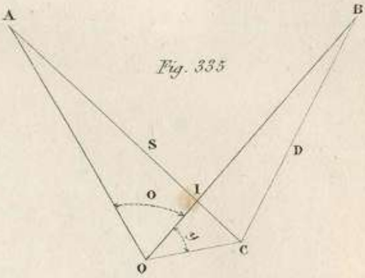


Fig. 334

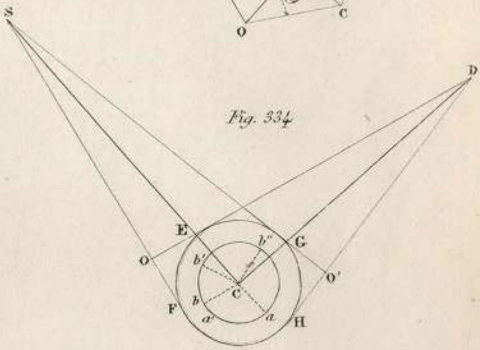


Fig. 336

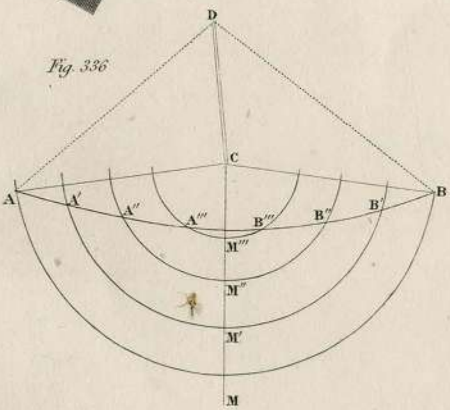


Fig. 337

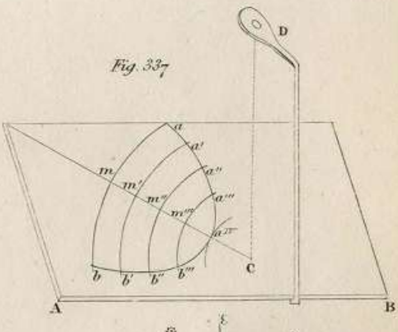


Fig. 339

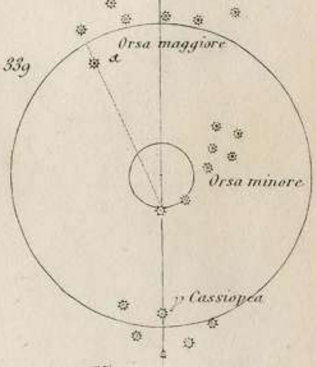


Fig. 340

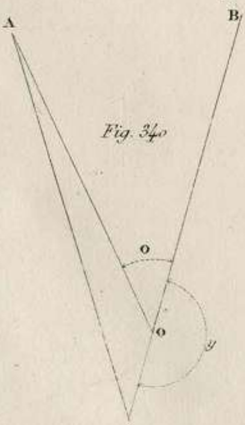


Fig. 341

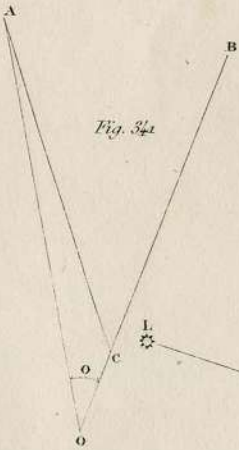
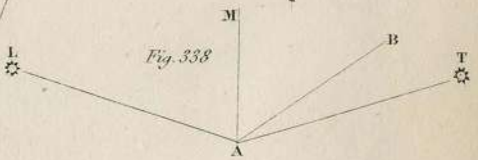


Fig. 338



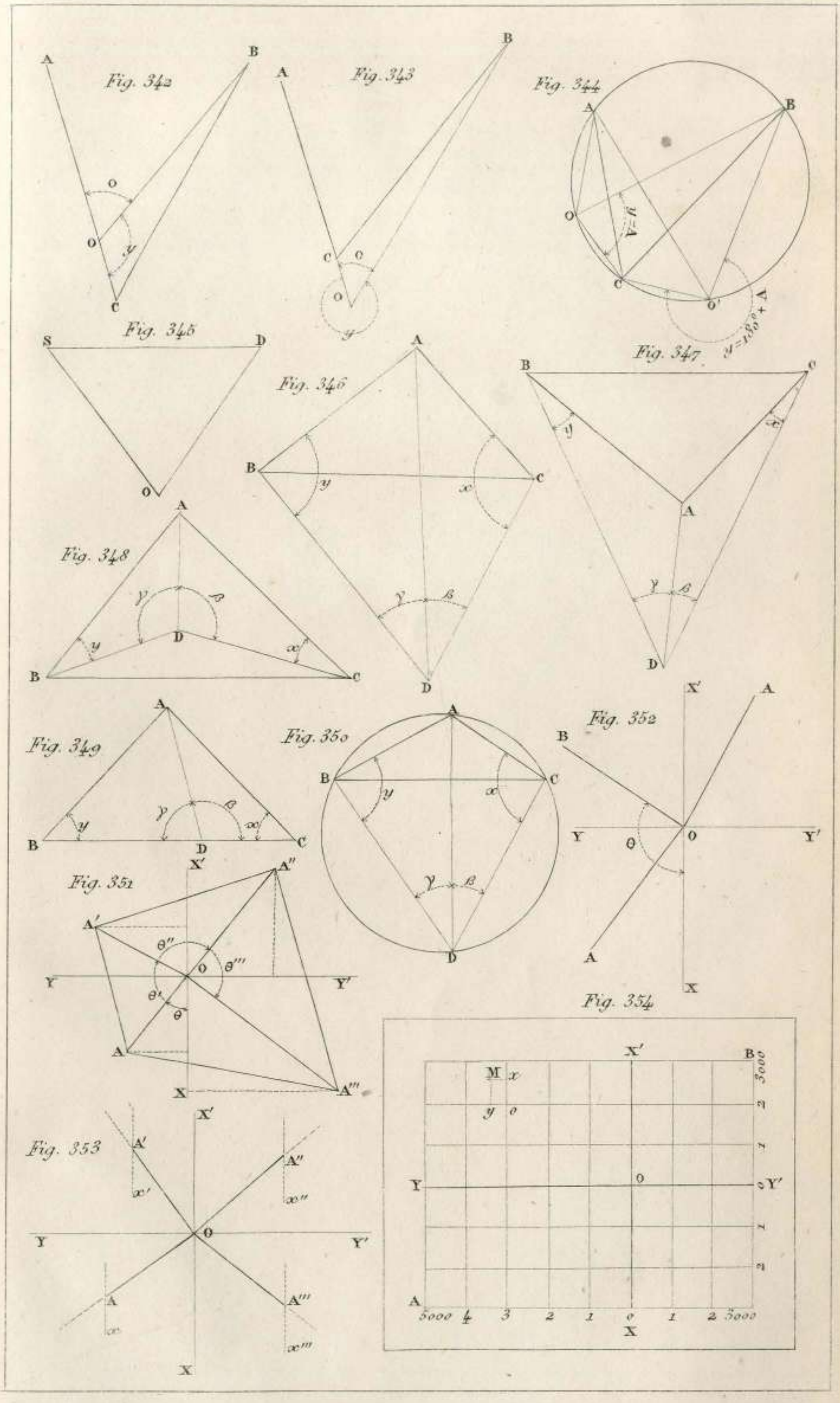


Fig. 342
Fig. 343
Fig. 344
Fig. 345
Fig. 346
Fig. 347
Fig. 348
Fig. 349
Fig. 350
Fig. 351
Fig. 352
Fig. 353
Fig. 354

Fig 355

Fig. 356

Fig. 357

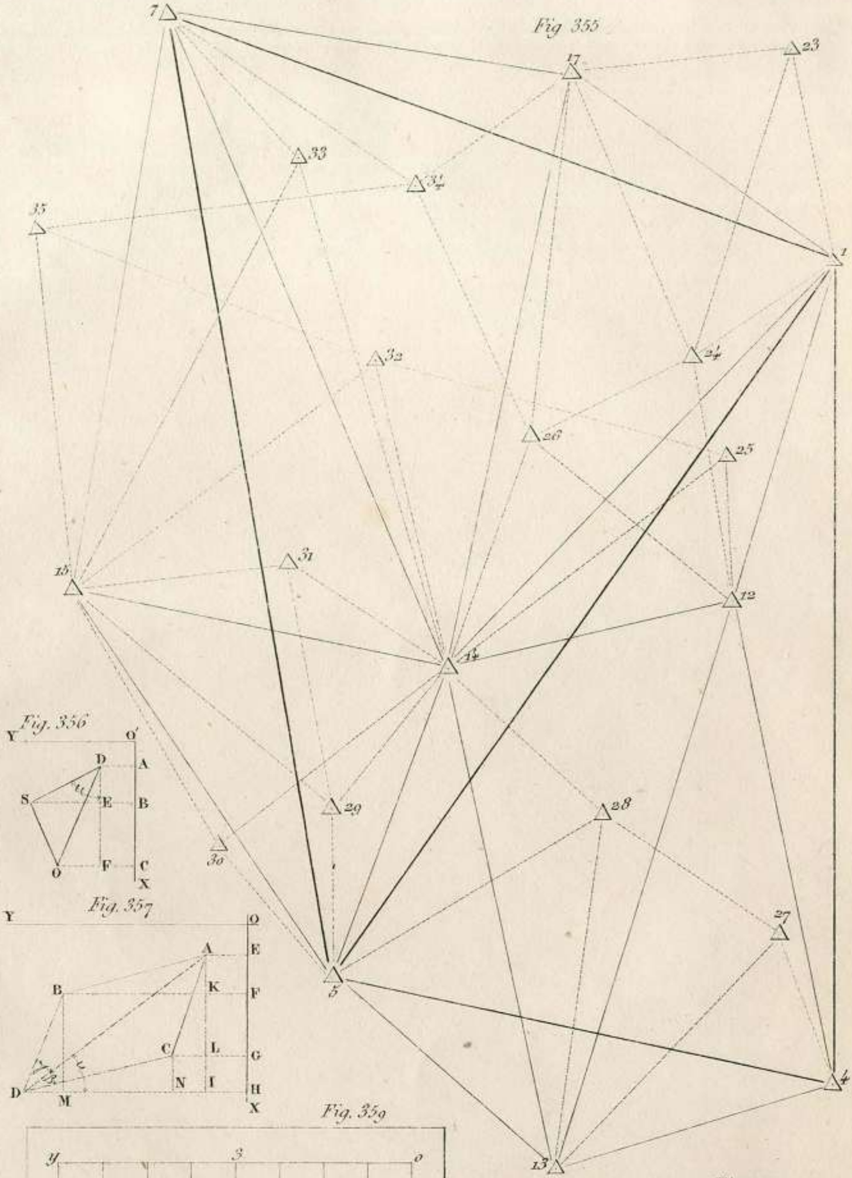


Fig. 359

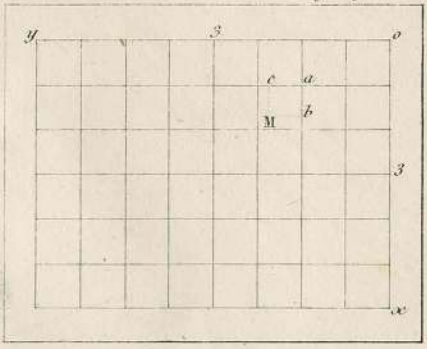
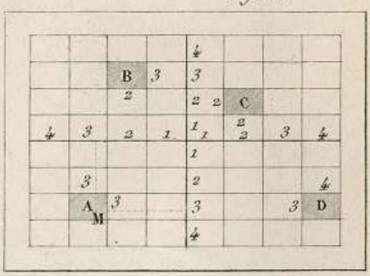


Fig. 358



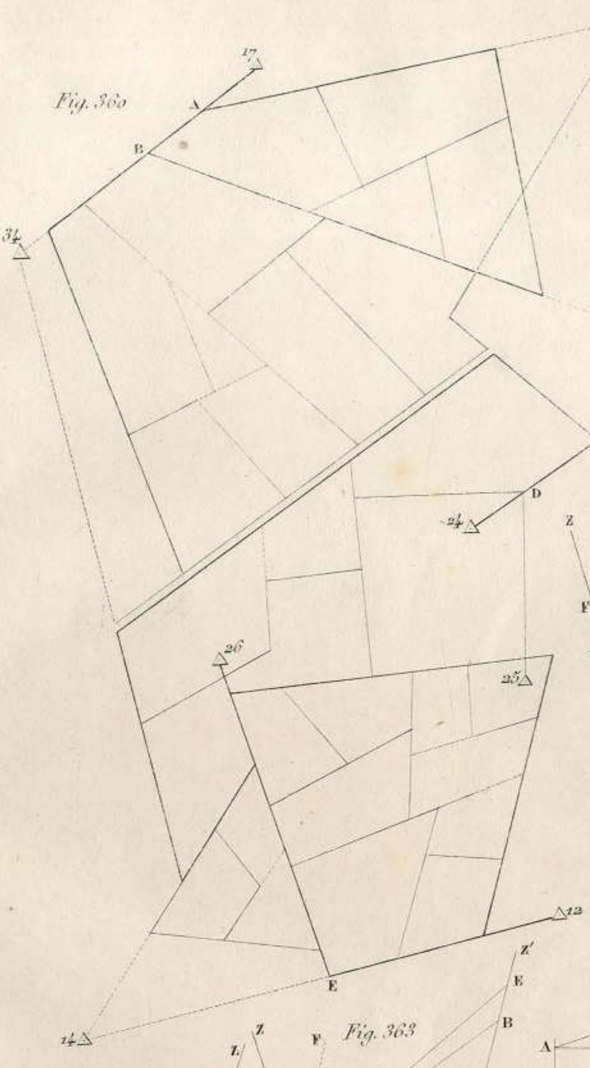


Fig. 360

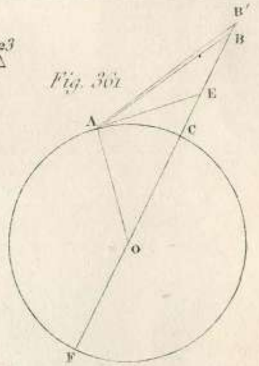


Fig. 361

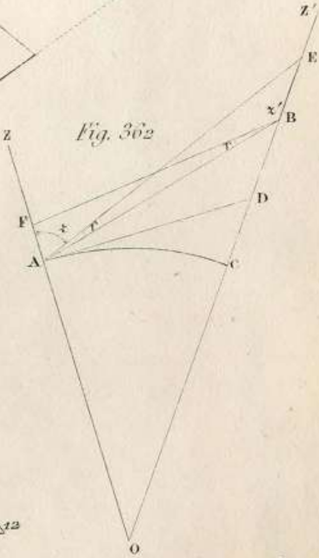


Fig. 362

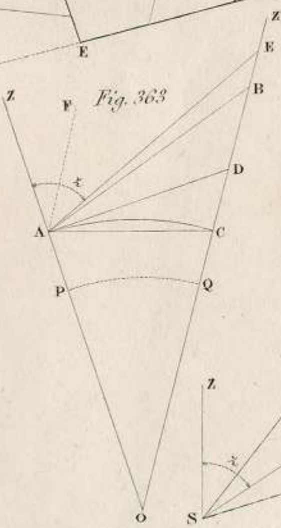


Fig. 363

Fig. 364

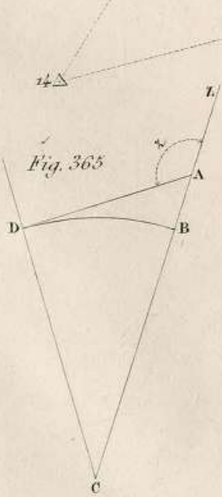


Fig. 365

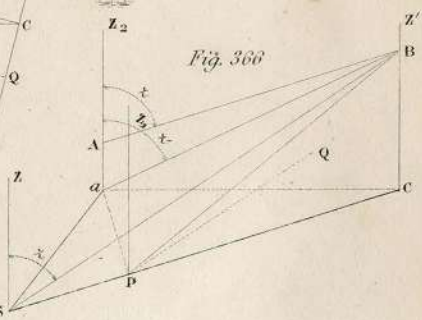


Fig. 366

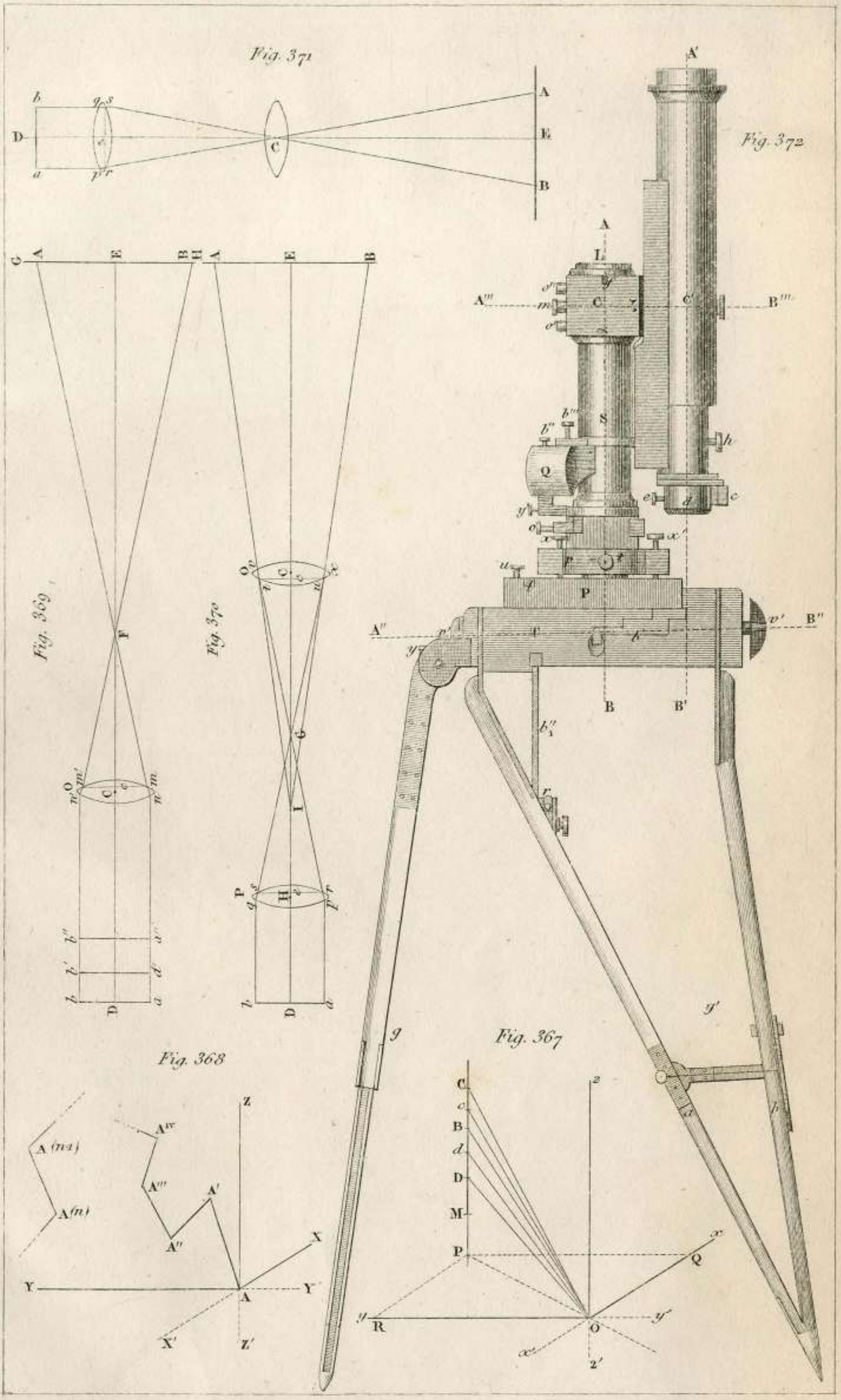


Fig. 371
Fig. 372
Fig. 369
Fig. 370
Fig. 368
Fig. 367

Fig. 373

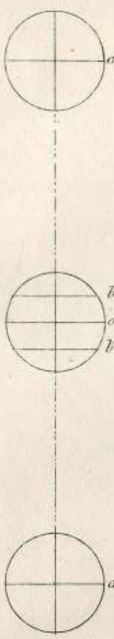


Fig. 374

Fig. 375

Fig. 376

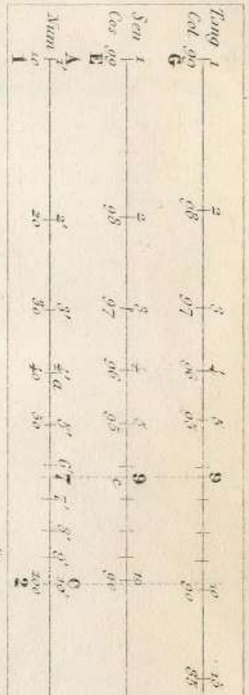


Fig. 377

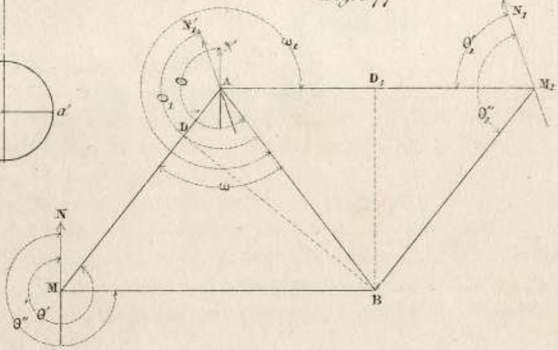


Fig. 378

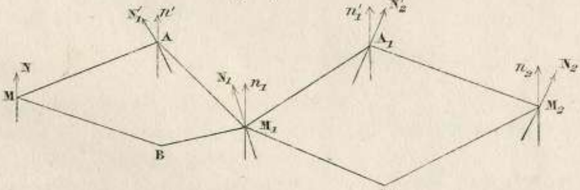


Fig. 379

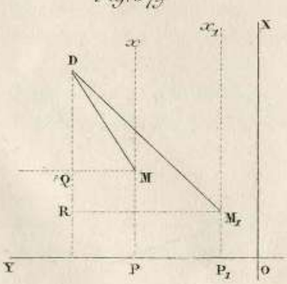


Fig. 381

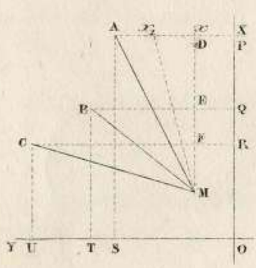
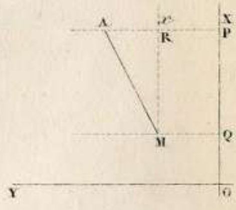


Fig. 380



INDICE DELLE FIGURE

Tavola I.

Tavola II.

Tavola III.

Tavola IV.

Tavola V.

Tavola VI.

Tavola VII.

Tavola VIII.

Tavola IX.

Tavola X.

Tavola XI.

Tavola XII.

Tavola XIII.

Tavola XIV.

Figure 292, 293, 294 e 295, per spiegare quattro diversi metodi di copia dei disegni.
» 296, 297, 298, 299, 300, 301 e 302, per far conoscere le norme ed i metodi da impiegarsi nella riduzione dei disegni.
Figura 303. — Compasso di riduzione.

Tavola XXIV.

Figura 304. — Pantografo a quattro righe.
» 305, per spiegare la teoria del pantografo a quattro righe.
» 306. — Pantografo a cinque righe.
» 307, per spiegare la teoria del pantografo a cinque righe.
» 308. — Micrografo.

Tavola XXV.

Figure 309, 310 e 311, relative alla forma ed alle dimensioni più convenienti da assegnarsi ai triangoli delle reti trigonometriche.
» 312, 313, 314 e 315, rappresentanti alcuni segnali per individuare i punti trigonometrici.
Figura 316. — Esempio di rete trigonometrica con vertici di 1º e 2º ordine.
» 317. — Regoli su trepiedi per la misura delle basi delle triangolazioni topografiche.
Figure 318 e 319, dirette a far vedere qual è la posizione più conveniente da assegnarsi ad una base per rapporto ai lati di una triangolazione.
» 320, 321 e 322, relative alla misura di una base su un terreno non orizzontale.

Tavola XXVI.

Figura 323, riferentesi ancora alla misura di una base su un terreno non orizzontale.
» 324. — Teodolite concentrico.
Figure 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331 e 332, relative alle correzioni da applicarsi agli angoli misurati con un teodolite concentrico.

Tavola XXVII.

Figura 333. — Teodolite eccentrico.
» 334, per far vedere come si deve procedere nella misura degli angoli azimutali mediante il teodolite eccentrico.
» 335, per dedurre le formole relative alla riduzione degli angoli al centro di stazione.
Figure 336, 337, 338 e 339, per far conoscere quali metodi si possono seguire onde arrivare alla determinazione approssimata della meridiana passante per un dato punto.
» 340 e 341, relative alla riduzione degli angoli al centro di stazione in due casi particolari.

Tavola XXVIII.

Figure 342, 343 e 344, relative alla riduzione degli angoli al centro di stazione in altri tre casi particolari.
Figura 345, riferentesi al calcolo dei lati d'un triangolo.

Tavola XXIX.

Tavola XXX.

Tavola XXXI.

Tavola XXXII.