ESTENSIONE DEL PRINCIPIO DI ELASTICITÀ

AD UN QUALSIASI SISTEMA ARTICOLATO COMPLESSO E NON EQUILIBRATO;

sua applicazione

al calcolo di stabilità delle Centine poligonali

DELLA TETTOIA PRINCIPALE NELLA STAZIONE DI AREZZO

per **GIOVANNI SACHERI.**

Memoria letta ed approvata per la stampa negli Atti della Società nelle adunanze 19 maggio e 21 giugno 1872.

> « Cette méthode générale et propre, à cause de sa simplicité, à être introduite dans l'enseignement pour résoudre les problèmes relatifs à la distribution des pressions et des tensions, sera aussi, je le pense, particulièrement utile aux Ingénieurs, qui dans les constructions en général, et surtout dans celles qui signalent l'époque actuelle, ont fréquemment besoin de calculer les efforts que supportent les diverses pièces de construction, pour en déterminer les dimensions, et établir leurs conditions de stabilité. »
>
> MENABREA, *Étude de statique physique*, 1868.

SIGNORI,

Fra le pubblicazioni recenti, inviate in dono a questa Società dalla gentilezza dei loro autori, voi tutti avrete di certo rilevato l'importante studio sull'equilibrio e stabilità delle centine per la tettoia dei convogli nella stazione di Arezzo, stato fatto per commissione di quel Municipio dal distinto ingegnere il cav. Giulio Marchesi, che tuttora dirige l'ufficio per le costruzioni delle ferrovie Meridionali, e che io ebbi a primo professore di costruzioni nella R. Scuola di Applicazione degli Ingegneri in Torino.

Parimenti vi è noto come ebbe origine quello studio, quando per una parte dovevasi ottemperare al voto del Consiglio superiore dei Lavori Pubblici che proponeva senz'altro la immediata demolizione di quella tettoia, e per l'altra dovevasi pur soddisfare ai legittimi desiderii dei cittadini di Arezzo, i quali non potevano persuadersi della impossibilità di conservare con un qualche ripiego una costruzione della quale sei anni or sono era stato approvato il disegno, e autorizzata l'esecuzione.

E bastava in verità avere un'idea anche solo elementare del modo di congegnare i sistemi articolati per un qualsiasi scopo, perchè rivolgendo lo sguardo sul disegno della tettoia di Arezzo, si fosse quasi istintivamente condotti a suggerire l'aggiunta di quella, tra le due diagonali, che fa da tirante, ovvero ancora dell'altra inversamente inclinata, ove si preferisse l'impiego di un *puntone* di legno, anzichè di un *tirante* di ferro.

Così sarebbesi almeno soddisfatto al noto principio fondamentale della indeformabilità dei sistemi articolati, tanto distesamente esposto nei trattati di costruzioni moderne, quasi ogni dì ripetuto con insistenza nelle scuole di ingegneria, e che d'altronde è praticamente e costantemente osservato in una immensità di applicazioni, studiate con giusto criterio.

E se tra queste, o Signori, io dovessi citarvene alcuna, non avrei d'uopo d'uscire dal caso concreto di centine articolate, così dette *a falce*, come quelle della tettoia in discorso; nè posso astenermi dal ricordare le centine così grandiose e dello stesso tipo esistenti nella stazione di Birmingham, delle quali vi presento nella figura 1ª ed in piccola scala un disegno (*). (Veggasi la Tav. II degli Atti).

(*) Nelle Esercitazioni pratiche di Costruzioni fatte in quest'anno agli allievi della Scuola d'Applicazione dal professore G. Curioni, ebbesi occasione di vedere nella Stazione di Foggia un grazioso esempio di centine a falce, che stavansi appunto ponendo in opera per mezzo di un elegante ponte di servizio scorrevole.

I disegni di quelle centine sono dovuti all'ingegnere Moreno, già allievo della Scuola di Applicazione degli Ingegneri in Torino, e che da più anni dirige in Inghilterra le costruzioni meccaniche per conto della Società Italiana delle Ferrovie Meridionali. — I particolari di

Ma se la questione si fosse soltanto aggirata sul modo più semplice e più economico di consolidare l'attuale sistema, riconoscibile a prima vista ed in se stesso difettoso, tutti gli ingegneri che fin qui se ne occuparono, si sarebbero assai probabilmente trovati d'accordo nel suggerire i tiranti diagonali succennati. Vennero invece a complicare maggiormente il problema certe difficoltà reali, dipendenti piuttosto dal metodo di calcolo a seguirsi per la determinazione algebrica degli sforzi di resistenza di tutte le parti di quel sistema complesso, non ancora consolidato, ma deformato e deformabile, quale insomma attualmente si trova.

E qui convien dire che non si seppe, o non si volle, limitare la questione al caso pratico, ed al problema proposto; ma si preferì, per non so quale vaghezza, di portarla su di un terreno più speculativo, ed abbastanza spinoso. Così è che vennero meno i metodi pratici, *generali e rigorosi*, descritti nei trattati e suggeriti nelle scuole per i sistemi articolati complessi e non deformabili, ossia per quei soli sistemi, che conviene praticamente adottare. Non v'è dunque a meravigliare che tutti gli ingegneri, i quali si posero sulla nuova via, provandosi e riprovandosi in varie guise di applicare ciò che non era razionalmente *applicabile*, siano riusciti a discordanti risultati.

L'ingegnere Marchesi ha bensì molto giustamente biasimato i metodi di calcolo adottati dagli ingegneri che lo precedettero. Egli ha bensì rilevato che quel sistema di forma prestabilita e disegnata alla cieca non poteva, nè prima nè dopo la necessaria deformazione elastica, trovarsi, anche per grossolana approssimazione, nelle condizioni di un sistema

quella tettoia ed i calcoli relativi di stabilità compariranno a suo tempo in quella importante pubblicazione annuale compilata ed eseguita per cura dei nostri allievi a complemento *indispensabile* delle loro esercitazioni pratiche. Essa è annualmente inviata in dono agli egregi ingegneri Direttori delle opere visitate, come ricordo della indicibile cortesia dimostrata nello spiegarci i loro mirabili lavori.

articolato ed *equilibrato;* vale a dire, che supponendo troncate alcune parti del sistema per surrogarvi nelle parti tagliate, e *secondo il loro asse geometrico* altrettante forze, non sarebbesi mai potuto solamente con esse ristabilire la interrotta continuità e riprodurre nelle primitive condizioni il sistema.

Ma quale metodo ha poi egli seguito? Io non debbo, o Signori, nè se il dovessi, saprei pronunziare un adeguato giudizio; ma mi basta di dirvi che invece di studiare quali altre forze dovessero ancora immaginarsi applicate per ristabilire rigorosamente il primitivo equilibrio del sistema nelle parti tagliate, si limitò di accennare misteriosamente ad una lotta di forze nascenti dalle intrinseche ed indivisibili qualità della materia per la evidente e continua tendenza delle parti a mutare di posizione e di forma; parlò di forza eccedente che andrebbe dileguandosi sminuzzata in mille effetti per entro il sistema; e non dubitò di ripetutamente asserire, che il metodo così detto dei *piani secanti,* quale si consiglia nelle scuole, e che pur si presenta colle apparenze (?) della massima razionalità, non era praticamente applicabile nelle condizioni del nostro problema ad un caso così complesso, come quello che abbiamo di fronte; perchè saremmo andati incontro a tutta la difficoltà, che la elasticità della materia introduce nel problema, o, non facendone conto, saremmo caduti in pieno nell'errore.

Poi lasciò da parte ogni metodo antico, e immaginando una nuova maniera di essere delle singole parti e del loro complesso, propose agli ingegneri un metodo nuovo di analisi, rimarchevolissimo per le grandi anomalie dei calcoli, e le curiose singolarità dei risultati.

Io non dissimulo, o Signori, le molteplici e reali difficoltà che si incontrano per arrivare un po' speditamente ad una soluzione pratica ed *accettabile* di cotesta questione (*); ma

(*) Una simile soluzione fu esposta nella medesima adunanza del 19 maggio dal prof. Curioni, e farà parte degli *Atti della Società.*

vi dissi altresì che essa fu tratta in un campo ben più difficile ancora di quello che necessitava il caso pratico e concreto proposto. Trattavasi infatti di convertire quelle centine di sistema variabile in un sistema equilibrato coll'aggiungervi quelle parti di consolidamento che il solo buon senso bastava a suggerire; e poi verificare coi metodi generali rigorosi e pratici per il calcolo dei sistemi articolati, resi per tal guisa razionalmente applicabili, se il sistema così consolidato avesse avuto in tutte le sue parti quelle dimensioni sufficienti ad assicurarne la stabilità.

Era questa senza dubbio l'unica soluzione rigorosa e pratica del problema da consegnarsi ai cittadini di Arezzo, i quali devono supporsi ben più interessati di sapere, se dopo un razionale consolidamento di quelle centine, quella tettoia sia finalmente in grado di soddisfare senz'alcun'ombra di pericolo all'uffizio per cui fu costruita, anzichè di conoscere quale più o meno bizzarra ripartizione di forze sia possibile immaginare in un sistema unanimemente riconosciuto imperfetto e che non si deve, nè si può conservare.

Ed è precisamente quest'ultima soluzione che io vi esposi nella nota *B*, come esempio pratico del metodo generale di calcolo dei sistemi articolati complessi.

Rimaneva tuttavia a risolversi il problema dal lato speculativo, e ad indicare quale fosse il vero metodo rigoroso di calcolo a seguirsi per studiare la disposizione e la intensità delle forze molecolari che tutte le parti delle centine devono realmente sviluppare per la stabilità di quel sistema non ancora equilibrato, quale attualmente si trova; e fu questo lo scopo che mi sono specialmente proposto; essendochè per una parte io non poteva acquetarmi ad ammettere che il metodo così detto dei piani secanti dovesse in questo caso venir meno e condurre all'assurdo; e per altra parte non poteva neanche convincermi, senza almeno aver fatto una prova, che introducendo nel caso nostro le indispensabili considerazioni relative alla elasticità della materia, si rendesse assolutamente inestricabile per non dire impossibile la

soluzione analitica del problema, siccome francamente asserisce il Marchesi a precipua giustificazione del nuovo metodo proposto.

Oh non è quando escono a frotte dalle nostre scuole i giovani Ingegneri colla fede sperimentata nei più generali principii della scienza applicata, e col fermo proposito di volerli adoperare in tutti i casi, e malgrado le difficoltà che essi incontrano nel dirigere da soli i primi passi della loro carriera; non è quando il più schietto empirismo dei tempi trascorsi regna ancora un po' troppo sovrano su molti rami dell'*Ingegneria* italiana, che ci sarebbe possibile di restare un solo istante indifferenti nelle lotte scientifiche che per fortuna d'Italia andranno facendosi ogni di più giganti, e non meno decisive tra il passato ed il presente.

E voi, o Signori, che vi dimostraste fin qui così bene compresi dello spirito di associazione dei nuovi tempi, e così pronti ad assecondare in ogni guisa i nostri deboli sforzi, vogliate ancor oggi acconsentire che io vi esponga i calcoli fatti ed i risultati ottenuti.

I.

Nei sistemi articolati di qualsiasi forma suolsi ordinariamente fare astrazione dalle dimensioni trasversali delle singole parti, e queste suppongonsi ridotte a semplici linee materiali ed elastiche, le quali vincolano vicendevolmente tra loro un certo numero di vertici, distribuiti a distanza prestabilita dallo scopo che vuolsi ottenere. Nel caso nostro della centina di Arezzo (*) ove si consideri, per la simmetria del sistema, poco più di una metà della centina, si avrebbero in tutto 15 vertici rilegati fra loro con 7 puntoni di legno, con 7 saette parimenti di legno, e con 7 catene o tiranti di ferro.

(*) Veggasi il disegno nella tav. II degli *Atti*.

Comunque si voglia immaginato un sistema, e sia desso bene o male congegnato, e con un qualsiasi grado di rigidità, egli è chiaro che dovranno sempre, e prima d'ogni cosa, essere soddisfatte tutte le equazioni generali dell'equilibrio in tutti i vertici del sistema fra le forze estrinseche e le forze interne o resistenze molecolari. E poichè noi abbiamo un sistema di 15 vertici tutti disposti in un medesimo piano, così dovremo scrivere per ogni vertice due equazioni di equilibrio fra le componenti omologhe, secondo due assi coordinati, delle reazioni elastiche, supposte agire per ora nel senso dell'asse geometrico delle parti costituenti il sistema, e delle forze estrinseche che potrebbero eventualmente trovarsi applicate nel vertice che si considera. Donde un complesso di 30 equazioni riducentisi poi a 27 soltanto, perchè devono essere implicitamente soddisfatte le tre equazioni caratteristiche dell'equilibrio tra le sole forze estrinseche applicate al sistema.

Ma tra le 27 equazioni non avendosi che 21 reazione incognita a determinare, ben si vede immediatamente, e senza perdere tempo in inutili tentativi di calcolo, che il sistema non potrebbe supporsi, come già dissi, *equilibrato*, vale a dire che tutte le parti di quel sistema non potrebbero in alcun modo supporsi semplicemente stirate o compresse, ma debbono pure e di necessità venire inflesse; a meno che eliminando tutte le incognite fra le equazioni suaccennate, le sei equazioni risultanti, ed esprimenti alcune condizioni geometriche dei vertici, si trovassero casualmente soddisfatte. Nè questo potrebbe in generale avvenire, se non nei sistemi di forma triangolare, o in altri casi quando siasi preventivamente obbligata la disposizione dei vertici a quelle condizioni.

È inutile che io vi dica come nel caso nostro quelle condizioni geometriche non sieno verificate. Se il fossero state, tutti i metodi, così detti diversi, stati adottati dagli Ingegneri che studiarono siffatta questione, ed i quali essenzialmente consistono nello stabilire l'equilibrio dei puntoni, o delle saette, o dei vertici delle catene, avrebbero tutti condotto ad

un medesimo risultato finale. E così pure sarebbe avvenuto, ove quella centina si fosse ridotta, e senza punto modificare la posizione relativa dei vertici, al sistema triangolare coll'aggiunta di quelle sei diagonali tiranti, di cui vi ho già fatto parola. Così sarebbonsi avute tante reazioni incognite quante equazioni d'equilibrio da soddisfare; ed il problema non avrebbe assolutamente presentato alcuna nuova difficoltà, ove si eccettui la scelta di quei soliti artifizii per abbreviare possibilmente la lunghezza dei calcoli.

Non è tuttavia per sola curiosità che io feci precedere a quel calcolo, altre considerazioni ed altri calcoli svolti nella nota *A*, nella quale mi sono proposto innanzi tutto di trovare quali modificazioni sarebbero imposte alla forma del sistema ideato dalle sei relazioni geometriche di condizione, perchè il sistema, tuttochè di elementi quadrilateri, rimanesse equilibrato. Ho però supposto, ed era in mio arbitrio di farlo, che si conservasse qual è il poligono esterno dei puntoni, siccome quello che costituisce la parte essenziale e più resistente di tutta la centina; e mi proposi di determinare i sei vertici del poligono delle catene in due casi distinti, obbligandomi dapprima a conservare l'angolo fatto dalla prima catena nel punto d'appoggio col primo puntone, e rinunziando conseguentemente a prestabilire la distanza fra i due vertici di chiave; mi obbligai inversamente nel secondo caso a ritenere la precisa altezza delle centine alla chiave che fu data alla tettoia di Arezzo, e rinunziando conseguentemente alla prima condizione.

La figura 3ª indica in modo abbastanza rilevante la diversità delle due soluzioni (segnate in rosso) confrontate tra loro, e con quella inaccettabile della tettoia di Arezzo. Ed è colla sovrapposizione di quelle figure che io intesi di parlare all'occhio di quanti talvolta progettano colla sola inspirazione di un *genio* così detto *artistico*. Io non saprei quale più pratico e luminoso esempio potrebbe meglio di questo servire a far loro comprendere come i più elementari principii della meccanica razionale non si accontentino di dettare le volute dimensioni trasversali delle parti; e che a nulla vale il più delle volte lo esagerarle per evitare i calcoli, e premunirsi da ogni eventualità; ma conviene persuadersi che quei principii fondamentali si riservano pure un vero potere discrezionale sulla forma complessiva del sistema, e sulla disposizione delle parti; e bisogna ammettere l'assoluta necessità di ricorrere a quei principii per avere quel concetto direttivo e razionale, senza del quale non è possibile ottenere una buona soluzione pratica dei problemi complessi che al Costruttore si presentano.

II.

L'obliquità delle reazioni elastiche di tutte le parti per rispetto all'asse geometrico di queste è l'unica condizione razionale che valga a spiegare la permanente rigidità del sistema, poichè permette ad un tempo di soddisfare alle 27 equazioni di equilibrio su cennate. Basta infatti sostituire in tutti i vertici e a tutte le parti resistenti che vi concorrono le loro reazioni più o meno obliquamente dirette perchè quelle inclinazioni generalmente non note, duplicando le incognite del nostro problema, ci permettano non solo di verificare tutte le condizioni dell'equilibrio, ma di tener conto (per meglio determinare il problema) di altre imprescindibili condizioni derivanti nel caso nostro e dalla elasticità della materia, e segnatamente dal grado variabile di rigidità che si incontra nelle diverse parti di quel sistema, disegnato con dimensioni là esagerate, e qui meschine, e dovunque in nessuna armonia con una razionale ed economica ripartizione delle reazioni elastiche in tutte le parti.

Eccovi intanto, o Signori, come il problema propostomi si presenti chiaramente in tutta la sua *indeterminazione*, laddove non vogliasi ricorrere alle considerazioni elastiche della materia. Esso adunque non poteva contrariamente apparire troppo determinato, se non a coloro i quali non eransi accorti che il loro metodo di calcolo supponeva implicitamente la insussistente condizione della forma equilibrata di tutto il sistema.

Quand'anche si voglia supporre, e converrà certamente di farlo, che la componente normale della reazione elastica obliqua dei tiranti di ferro sia trascurabile affatto per la esiguità della loro sezione in rispetto della loro lunghezza, vi saranno dunque pur sempre a determinarsi le 14 coppie di rotazione dei puntoni e delle saette, le quali ci dànno colle componenti tangenziali nientemeno che 35 incognite fra le 27 equazioni che noi conosciamo. Nella insupponibile ipotesi di avere a determinare le dimensioni di una centina siffatta, potrebbesi con tutta facilità rimediare alla indeterminazione suddetta; basterebbe ad es. di prestabilirsi la condizione che tali si fossero le dimensioni assegnabili ai puntoni, da resistere non solo convenientemente alle reazioni normali che si svilupperanno, ma da rendere ancora assolutamente trascurabile il materiale spostamento elastico dei vertici del poligono esterno, cosicchè gli spostamenti sensibili dovuti alle forze inflettenti delle saette agirebbero di preferenza in sui vertici del poligono delle catene.

Ma nel caso nostro concreto chi ci potrebbe negare che le dimensioni di certe saette non siano, come di fatti lo sono, siffattamente esagerate da contrastare affatto a quella ipotesi, e da non permettere che inflessioni trascurabili, le quali modificheranno di necessità gli spostamenti elastici dei vertici, e modificheranno la presupposta ripartizione delle forze intrinseche?

Egli è per questo solo motivo che ho voluto addirittura preferire la via generale, e pormi senz'altra, considerazione, nell'impegno di servirmi del principio di elasticità per determinare rigorosamente il problema, e per tener calcolo delle imprescindibili condizioni di rigidità derivanti dalle dimensioni assegnate al sistema. Ben mi accorgeva che su questa via non ancora praticamente tentata, avrei avuto ad imbattermi contro difficoltà non lievi, derivanti non solamente da quella complicazione inestricabile di calcoli dal Marchesi accennata, ma bensì dal fatto istesso, quasi direi pregiudiziale, di dovere applicare e tradurre per la prima volta in equazione quel principio di elasticità, che formulato e dimostrato a rigore dal Generale Menabrea quattr'anni or sono in una sua celebre memoria all'Accademia delle Scienze di Torino, non era stato dal medesimo applicato e tradotto in equazione che per il caso dei sistemi *equilibrati*, ed aventi così un numero di linee materiali vincolanti superiore al numero di equazioni distinte che sarebbero somministrate dalle condizioni di statica per l'equilibrio di tutti i vertici e del sistema in complesso.

Voi conoscete l'enunciato generale di quel principio, che vuole minima la somma dei lavori delle forze intrinseche; e voi sapete che la sua applicazione ci somministra tante nuove equazioni semplicissime da aggiungersi a quelle dell'equilibrio, quante sono precisamente necessarie per ben determinare in qualsiasi caso il problema. Ed il Generale Menabrea ha di più dimostrato come quel suo procedimento conduca in sostanza, e per via brevissima, al metodo già da tempo conosciuto, ma soltanto praticamente applicabile ai casi più elementari e più semplici, di esprimere tutte le condizioni geometriche alle quali un sistema elastico non può rinunziare per la stessa sua costituzione, e dopochè lo spostamento dei vertici prodotto dalle forze estrinseche supponesi avvenuto.

Trattandosi nel caso nostro di un sistema elastico, ma non equilibrato, bastavami adunque di trovar mezzo di esprimere ancora, in qualche modo che mi convenisse, i lavori molecolari di estensione e compressione prodotti dalle reazioni elastiche normali per sommarli con quelli delle forze tangenziali, ed ottenere così con due distinti termini simbolici l'espressione algebrica del principio di elasticità nel caso più generale di un sistema complesso e non equilibrato. Ed è nella nota *C* che io vi ho esposto i tentativi fatti in proposito, col più vivo desiderio di sottoporli all'autorevole vostro giudizio.

III.

Tracciata la via a seguirsi, e per dir meglio sgombratala dagli ostacoli, che sul bel principio mi si presentavano, io avrei potuto molto facilmente trascrivere le equazioni generali per un qualsiasi sistema articolato e non equilibrato, di qualsiasi forma, rettilinea o curva, circolare o parabolica, semplice o complessa; ma non l'ho fatto per alcuni motivi che mi riservo in altra occasione di dirvi.

Nella nota *D* sono intanto distese tutte le equazioni che mi occorrevano per il caso pratico ed abbastanza complesso delle centine di Arezzo. Voi potete innanzitutto convincervi della semplicità relativa dei risultati ottenuti; e vi basta perciò di sapere che non ostante le molte linee trigonometriche in giuoco, e tutte di diverso valore per i diversi vertici, ho tuttavia condotto la soluzione algebrica fino alle 7 equazioni finali che risultano dall'eliminazione delle 21 incognite eliminabili fra altrettante equazioni di equilibrio, e dalla loro successiva sostituzione nelle sette equazioni ausiliarie che furono somministrate dal principio di elasticità. E voi vedrete ancora che tra quelle equazioni finali, e determinanti le sette tensioni incognite delle catene, basti scriverne una sola qualunque, perchè più non occorra ripetere per le altre un calcolo sì poco spedito; ma basti l'una dall'altra dedurre col cambiamento degli indici.

Ed ora vi dirò dei risultati numerici che mi fu possibile ottenere colla attiva cooperazione di due miei giovani colleghi qui presenti, e della cui gentilezza ho decisamente abusato per avere il controllo.

Le infelici condizioni nelle quali erasi detto trovarsi quelle centine, ed il fatto che gli ingegneri destinati a prestar loro le cure dell'arte per una buona conservazione dovettero rinforzare convenientemente i piedritti; e più ancora l'asserzione autorevole di certi tiranti che non starebbero tesi, stata fatta in seguito a certi calcoli, di cui vi ho già parlato, mi fecero nascere dapprima un'idea, che riconobbi falsa di poi; che cioè quelle catene non potessero trovarsi per la loro disposizione in sufficiente tensione da contrastare ed eliminare completamente la spinta orizzontale, come difatti dovrebbero. Sicchè avendo, in un primo calcolo di prova, supposto che lo spostamento orizzontale sui punti d'appoggio fosse totalmente contrastato dai muri di piedritto, trovai di naturale conseguenza che tutto il poligono delle catene restava rallentato e decisamente compresso in tutti i lati, dall'imposta sino alla chiave. Io volli qui accennarvi altresì questo primo risultato, non già per contraddire chi avrebbe trovato tensioni in certi lati, e compressioni in certi altri, ma per una conseguenza di non lieve importanza pratica, che dovrò dedurre fra breve.

Supponendo però quelle centine nell'unico modo razionale di essere, cioè semplicemente appoggiate, col poligono dei puntoni sottoposto a pressione, colle saette tutte quante in tensione, e col poligono delle catene parimenti in tensione per eliminare totalmente la spinta, io non poteva che rimaner soddisfatto dei risultati ottenuti. Il segno costantemente positivo di tutte le forze tangenziali trovate, mi indicava anzitutto che il vero modo di agire di tutte le parti era pur quello che io aveva idealmente supposto fin dal principio dei calcoli.

I risultati ottenuti, e le condizioni di stabilità di tutte indistintamente le parti di quelle centine, risultano chiaramente dai paragrafi V, VI e VII della nota *D*. E certamente se il sovraccarico accidentale supposto, e che niuno potrà trovare esagerato, avesse faticato di continuo quelle centine, esse si troverebbero attualmente in condizioni di stabilità un po' troppo precarie.

Ma fortunatamente una visita fatta sul luogo bastò a rassicurarmi sulle condizioni presenti; e quanto alle future, i risultati ottenuti nella nota *B* offrono senza dubbio un opportuno mezzo di rimediare colle diagonali ad alcuni gravi

inconvenienti, ponendo i puntoni e le saette in eccellenti condizioni di stabilità, ed ancorchè volessesi avere il dovuto riguardo allo stato deteriorato nel quale potrebbero per avventura trovarsi. Resterebbe pur sempre a trovar mezzo di rimediare alla esagerata tensione di quelle catene, essendochè lo sforzo massimo di 20 chilogrammi per millimetro quadrato, che riscontrasi sostenuto dalle catene in prossimità della chiave, tuttochè presumasi in rari casi e per poco tempo raggiunto, deve tuttavia prudentemente ritenersi insostenibile.

Ed è precisamente per rimediare ad un inconveniente sì serio, che si potrebbe far rinforzare, ove nol fossero ancora a sufficienza i muri di piedritto, e poi imbiettare in un modo qualunque i cuscinetti d'imposta, ben s'intende in quel tempo in cui non fossevi sovraccarico nè di vento nè di neve, per impedire così ogni maggior scorrimento sui punti d'appoggio. La controspinta del muro avrebbe allora per effetto di diminuire la tensione di quelle catene quando il sovraccarico agisse, e così sarebbesi certi che la loro tensione potrebbesi mantenere in ogni caso eguale a quella di otto o nove chilogrammi per mm. q. che corrisponderebbe al solo peso permanente.

Studiando inoltre un qualche collegamento fra una centina e l'altra, sarà possibile sempre di conservare ai cittadini di Arezzo quella tettoia, sebbene essa sia tutt'altro che un gioiello dell'arte.

10 maggio 1872.

G. SACHERI.

Nota A,

nella quale si determinano analiticamente e graficamente le condizioni geometriche a cui debbono sottostare i vertici del poligono delle catene, perchè il sistema, tuttochè di elementi quadrilateri, possa dirsi equilibrato.

I. Considero il poligono dei puntoni (fig. 3) *0. 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13* caricato di pesi uguali p in tutti i vertici. Sostituisco nel punto *0* al piano d'appoggio la reazione verticale evidentemente eguale a $6{,}5\,p$. Suppongo ancora, come generalmente si suole per tutte le incavallature a sistemi articolati, e munite di catene per eliminare la spinta orizzontale, che quella centina sia libera di scorrere orizzontalmente sul piano d'appoggio, fintantochè le catene abbiano acquistato tutta la tensione che loro è necessaria per adempiere all'ufficio cui sono chiamate. Tutti i puntoni saranno sottoposti a sforzi di compressione che dirò $R_1\ R_2\ R_3 \ldots\ R_7$; tutte le catene si troveranno cimentate a sforzi di tensione che dirò $T_1\ T_2\ T_3 \ldots\ T_7$; e parimenti le saette sopporteranno rispettivamente le tensioni $S_1\ S_2\ S_3 \ldots\ S_7$. Assunte in questa supposizione le forze anzidette, i valori che si determineranno saranno positivi ove sussista realmente l'ipotesi fatta sul loro modo di agire, o diversamente prenderanno il segno negativo.

Dirò $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3 \ldots\ \beta_7$ gli angoli acuti fatti rispettivamente colla orizzontale dai puntoni $R_1\ R_2$ ecc.;

$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots\ \alpha_7$ gli angoli acuti fatti rispettivamente colla orizzontale dalle catene, e

$\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3 \ldots\ \gamma_7$ gli angoli acuti fatti rispettivamente colla orizzontale dalle saette.

Nello stabilire le equazioni di equilibrio regoleranno il segno delle componenti orizzontali e verticali di ciascun vertice, i due assi coordinati *ox* ed *oy*.

Si avranno nel punto o le due equazioni:

$$\left.\begin{aligned} o &= -R_1 \cos\beta_1 + T_1 \cos\alpha_1 \\ -6{,}5\,p &= -R_1 \,\mathrm{sen}\,\beta_1 + T_1 \,\mathrm{sen}\,\alpha_1 \end{aligned}\right\} \qquad (0)$$

donde

$$T_1 = 6{,}5\,\frac{\cos\beta_1}{\mathrm{sen}\,(\beta_1 - \alpha_1)}\,p.$$

$$R_1 = 6{,}5\,\frac{\cos\alpha_1}{\mathrm{sen}\,(\beta_1 - \alpha_1)}\,p.$$

ed ancora

$$\mathrm{tang}\,\alpha_1 = \frac{R_1 \,\mathrm{sen}\,\beta_1 - 6{,}5\,p}{R_1 \cos\beta_1} \qquad (\mathrm{I})$$

Nel punto 1 dovranno essere soddisfatte le due equazioni:

$$\left.\begin{aligned} o &= R_1 \cos\beta_1 - R_2 \cos\beta_2 + S_1 \cos\gamma_1 \\ p &= R_1 \,\mathrm{sen}\,\beta_1 - R_2 \,\mathrm{sen}\,\beta_2 - S_1 \,\mathrm{sen}\,\gamma_1 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

colle quali eliminando l'incognita S_1 sarà possibile di calcolare il valore di

$$R_2 = R_1 \frac{\mathrm{sen}\,(\gamma_1 + \beta_1)}{\mathrm{sen}\,(\gamma_1 + \beta_2)} - \frac{p \cos\gamma_1}{\mathrm{sen}\,(\gamma_1 + \beta_2)}$$

che si riduce a

$$R_2 = R_1 - \frac{p \cos\gamma_1}{\mathrm{sen}\,(\gamma_1 + \beta_2)}$$

ove si consideri che gli angoli $\gamma_1 + \beta_1$ e $\gamma_1 + \beta_2$ sono supplementari.

Nel punto *2* avrannosi queste altre due condizioni:

$$\left.\begin{aligned} o &= -T_1 \cos\alpha_1 + T_2 \cos\alpha_2 - S_1 \cos\gamma_1 \\ o &= -T_1 \operatorname{sen}\alpha_1 + T_2 \operatorname{sen}\alpha_2 + S_1 \operatorname{sen}\gamma_1 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Sommando membro a membro le tre prime e le tre seconde equazioni *(0) (1)* e *(2)* si otterranno quest'altre due

$$\left.\begin{aligned} o &= -R_2 \cos\beta_2 + T_2 \cos\alpha_2 \\ -5{,}5\,p &= -R_2 \operatorname{sen}\beta_2 + T_2 \operatorname{sen}\alpha_2 \end{aligned}\right\} \qquad (0,\ 1,\ 2)$$

le quali permettono di eliminare T_2 e di ricavare

$$\operatorname{tang}\alpha_2 = \frac{R_2 \operatorname{sen}\beta_2 - 5{,}5\,p}{R_2 \cos\beta_2} \qquad \text{(II)}$$

essendo R_2 quantità nota per le precedenti equazioni.

II. Scrivendo le equazioni dell'equilibrio nel punto *3*

$$\left.\begin{aligned} o &= R_2 \cos\beta_2 - R_3 \cos\beta_3 = S_2 \cos\gamma_2 \\ p &= R_2 \operatorname{sen}\beta_2 - R_3 \operatorname{sen}\beta_3 - S_2 \operatorname{sen}\gamma_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ed eliminando l'incognita S_2, si potrà facilmente dedurre il valore di R_3

$$R_3 = R_2 \frac{\operatorname{sen}(\gamma_2 + \beta_2)}{\operatorname{sen}(\gamma_2 + \beta_3)} - \frac{p \cos\gamma_2}{\operatorname{sen}(\gamma_2 + \beta_3)}$$

che si riduce a

$$R_3 = R_2 - \frac{p \cos\gamma_2}{\operatorname{sen}(\gamma_2 + \beta_3)}$$

Poi scrivendo le equazioni di equilibrio nel punto *4*

$$\left.\begin{aligned} o &= -T_2 \cos\alpha_2 + T_3 \cos\alpha_3 - S_2 \cos\gamma_2 \\ o &= -T_2 \operatorname{sen}\alpha_2 + T_3 \operatorname{sen}\alpha_3 + S_2 \operatorname{sen}\gamma_2 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

e sommando membro a membro le prime e le seconde equazioni *(1) (2) (3)* e *(4)* si otterranno quest'altre due

$$\left.\begin{aligned} o &= -R_3 \cos\beta_3 + T_3 \cos\alpha_3 \\ -4{,}5\,p &= -R_3 \operatorname{sen}\beta_3 + T_3 \operatorname{sen}\alpha_3 \end{aligned}\right\} \qquad (1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

le quali permettono di eliminare T_3 per ricavare un'altra equazione di condizione geometrica

$$\operatorname{tang}\alpha_3 = \frac{R_3 \operatorname{sen}\beta_3 - 4{,}5\,p}{R_3 \cos\beta_3} \qquad \text{(III)}$$

essendosi R_3 precedentemente determinata.

È oramai inutile di proseguire, potendosi con tutta facilità ottenere le espressioni di

$$\begin{matrix} R_4 & R_5 & R_6 & R_7\,. \\ \operatorname{tang}\alpha_4 & \operatorname{tang}\alpha_5 & \operatorname{tang}\alpha_6 & \operatorname{tang}\alpha_7 \end{matrix}$$

coll'aumentare successivamente di una unità gli indici nelle espressioni precedentemente trovate, e diminuire di un'unità il coefficiente di p. Similmente occorre appena di accennare che i calcoli numerici dei valori di R saranno notevolmente abbreviati, avendosi evidentemente

$$\gamma_1 + \beta_2 = \gamma_2 + \beta_3 = \ldots\ldots = \gamma_6 + \beta_7 = 90 - \frac{1}{2}\varphi$$

perchè il poligono dei puntoni ha i suoi vertici su di una stessa circonferenza di circolo, e le saette che partono dai vertici sono dirette secondo raggi che fanno tutti fra loro l'angolo φ.

III. Se per maggiore facilità di calcolo si prescrivesse che nella nuova centina equilibrata, la prima catena in prossimità dell'imposta dovesse ritenere la stessa inclinazione α_1 che si riscontra nelle centine costruite, si avrà allora quanto basta per calcolare dapprima i valori di $R_1\ R_2 \ldots\ldots R_7$, e successivamente quelli di $tang\ \alpha_2\ tang\ \alpha_3 \ldots\ldots tang\ \alpha_7$.

Ecco i dati numerici occorrenti.

Corda delle centine . . . . *metri 28,00*
Saetta dell'arco superiore . . . . *metri 9,80*
Saetta dell'arco inferiore . . . . *metri 7,90*
Raggio dell'arco superiore . . . . $r = m.\ 14{,}90$
Raggio dell'arco inferiore . . . . $r' = m.\ 16{,}35$
Mezz'angolo al centro dell'arco superiore $7\varphi = 69^\circ\ 59'\ 2''$
Mezz'angolo al centro dell'arco inferiore $\Psi = 58^\circ\ 52'\ 15''$

Angoli β fatti dai singoli puntoni colla orizzontale

$$\beta_1 = \frac{13}{2}\varphi = 64^\circ, 59', 7''$$

$$\beta_2 = \frac{11}{2}\varphi = 54, 59, 15$$

$$\beta_3 = \frac{9}{2}\varphi = 44, 59\ 23$$

$$\beta_4 = \frac{7}{2}\varphi = 34, 59, 31$$

$$\beta_5 = \frac{5}{2}\varphi = 24, 59, 39$$

$$\beta_6 = \frac{3}{2}\varphi = 14, 59, 48$$

$$\beta_7 = \frac{1}{2}\varphi = 4, 59, 56.$$

Angoli γ delle saette colla orizzontale

$$\gamma_1 = 90^\circ - 6\,\varphi = 30^\circ, 0', 49''$$

$$\gamma_2 = 90 - 5\,\varphi = 40, 0, 41$$

$$\gamma_3 = 90 - 4\,\varphi = 50, 0, 33$$

$$\gamma_4 = 90 - 3\,\varphi = 60, 0, 25$$

$$\gamma_5 = 90 - 2\,\varphi = 70, 0, 17$$

$$\gamma_6 = 90 - \varphi = 80, 0, 8$$

$$\gamma_7 = 90.$$

Angoli ψ sulla verticale dei raggi condotti a ciascun vertice del poligono inferiore dal centro di questo. Indicando con ψ_i uno qualunque degli angoli ψ cercati, il suo valore ricavasi assai facilmente dall'equazione

$$sen\,(i\,\varphi - \psi_i) = \frac{1{,}90 + r^1 - r}{r^1}\ sen\, i\,\varphi\ .$$

risolta numericamente. Ecco i valori trovati:

$$\psi_1 = 7^\circ\ 57'\ 25''$$

$$\psi_2 = 15, 58, 25$$

$$\psi_3 = 24, 6, 35$$

$$\psi_4 = 32, 24, 55$$

$$\psi_5 = 40, 56, 55$$

$$\psi_6 = 49, 45, 15.$$

Finalmente l'angolo α_1 fatto coll'orizzontale dalla prima catena in prossimità dell'imposta, e che come dissi preferisco di mantenere tal quale, risulterebbe così calcolato:

$$\alpha_1 = \frac{\psi_6 + \Psi}{2} = 54^\circ, 18', 45''$$

Ecco i valori di R e di $tang\,\alpha$ stati calcolati colle formole su esposte.

$$R_1 = 1{,}311\,p$$

$$R_2 = 1{,}292\,p \qquad tang\,\alpha_2 = \frac{10{,}56}{11{,}25}$$

$$R_3 = 1{,}275\,p \qquad tang\,\alpha_3 = \frac{8{,}82}{13{,}32}$$

$$R_4 = 1{,}260\,p \qquad tang\,\alpha_4 = \frac{6{,}93}{14{,}90}$$

$$R_5 = 1{,}248\,p \qquad tang\,\alpha_5 = \frac{4{,}97}{16{,}03}$$

$$R_6 = 1{,}239\,p \qquad tang\,\alpha_6 = \frac{2{,}99}{16{,}76}$$

$$R_7 = 1{,}235\,p \qquad tang\,\alpha_7 = \frac{1{,}00}{17{,}11}$$

Questi valori delle tangenti permettono di descrivere con tutta facilità il nuovo poligono delle catene, limitando le direzioni così tracciate di ogni lato all'incontro della saetta seguente sufficientemente prolungata.

IV. Questo problema è pure suscettibile di una soluzione completamente grafica. Basterebbe scomporre nel punto *0* la forza $6{,}5\,p$ in due, l'una T_1 rivolta in basso ed inclinata all'orizzonte dell'angolo α_1 e l'altra R_1 secondo il primo puntone. Trasportare la forza R_1 così trovata nel punto *1*, e scomporre la p e la R_1 secondo la saetta e la normale a questa saetta, liberandosi così della reazione di questa, che ci sarebbe incognita. La differenza delle due anzidette componenti normali formerà il cateto di un triangolo rettangolo, di cui segneremo l'ipotenusa sul prolungamento del secondo puntone, perchè questa ci misuri la forza R_2 cercata. E difatti l'espressione algebrica di R_2 più sopra trovata esprime appunto la condizione di equilibrio delle componenti di p, di R_1 e di R_2 applicate al punto *1* scomposte normalmente alla saetta.

Vengasi infine al punto *2* e si applichi la forza R_2 parallelamente al 2° puntone. Basterà scomporla in due, l'una orizzontale e l'altra verticale, e poi sottrarre dalla verticale la forza $5{,}5\,p$, perchè riesca immediatamente determinata l'inclinazione α_2 da darsi al secondo tirante.

E così si determinerebbero successivamente e con metodo esclusivamente grafico tutti i vertici del poligono delle catene.

V. Invece di conservare l'angolo α_1 della prima catena, sarebbesi potuto adempiere alla condizione di conservare fra i due poligoni sul vertice di colmo la distanza di *m. 1,90* che si riscontra nelle centine della stazione di Arezzo; ma il metodo di calcolo da seguirsi non è più così semplice. Credo inutile d'altronde di esporlo.

Sulla figura 3ª sono indicate con linee rosse le modificazioni che il disegno delle centine in questione avrebbe dovuto presentare nelle due surriferite ipotesi. E non occorre dire che tra le due soluzioni, la prima che conduce al poligono più basso, ossia ad una maggior distanza dal vertice dei puntoni alla chiave, sarebbesi dovuta preferire per la minore tensione cui sarebbero soggette le catene.

Nota B,

nella quale si determinano colle equazioni generali dei sistemi equilibrati le reazioni di tutte le parti componenti una centina, supposta preventivamente consolidata per mezzo delle diagonali tiranti.

I. Ritengansi tutte le significazioni della nota precedente, e dicansi inoltre (fig. 4ª) $V_2\ V_3 \ldots\ldots\ V_7$ le tensioni delle diagonali, ed $\varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots\ldots\ \varepsilon_7$ gli angoli fatti rispettivamente con una orizzontale dalla loro direzione.

Le condizioni di equilibrio nel punto o

$$\left.\begin{aligned} o &= -R_1 \cos\beta_1 + T_1 \cos\alpha_1 \\ -6{,}5\,p &= -R_1 \operatorname{sen}\beta_1 + T_1 \operatorname{sen}\alpha_1 \end{aligned}\right\} \qquad (o)$$

daranno immediatamente i valori di

$$T_1 = 6{,}5\,\frac{\cos\beta_1}{\operatorname{sen}(\beta_1 - \alpha_1)}\,p$$

$$R_1 = 6{,}5\,\frac{\cos\alpha_1}{\operatorname{sen}(\beta_1 - \alpha_1)}\,p$$

Le due equazioni di equilibrio nel punto 2

$$\left.\begin{aligned} o &= -T_1 \cos\alpha_1 + T_1 \cos\alpha_2 - S_1 \cos\gamma_1 \\ o &= -T_1 \operatorname{sen}\alpha_1 + T_2 \operatorname{sen}\alpha_2 + S_1 \operatorname{sen}\gamma_1 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

daranno immediatamente i valori di

$$S_1 = T_1\,\frac{\operatorname{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{sen}(\alpha_2 + \gamma_1)}$$

$$T_2 = T_1\,\frac{\operatorname{sen}(\alpha_1 + \gamma_1)}{\operatorname{sen}(\alpha_2 + \gamma_1)}$$

Scrivendo poi le due equazioni dell'equilibrio nel punto *1*

$$\left.\begin{aligned} o &= R_1 \cos\beta_1 - R_2 \cos\beta_2 + S_1 \cos\gamma_1 + V_2 \cos\varepsilon_2 \\ p &= R_1 \operatorname{sen}\beta_1 - R_2 \operatorname{sen}\beta_2 - S_1 \operatorname{sen}\gamma_1 + V_2 \operatorname{sen}\varepsilon_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

e sommando membro a membro le tre prime e le tre seconde equazioni *(0) (1)* e *(2)* si otterranno quest'altre due

$$\left.\begin{aligned} o &= -R_2 \cos\beta_2 + T_2 \cos\alpha_2 + V_2 \cos\varepsilon_2 \\ -5{,}5\,p &= -R_2 \operatorname{sen}\beta_2 + T_2 \operatorname{sen}\alpha_2 + V_2 \operatorname{sen}\varepsilon_2 \end{aligned}\right\} \qquad (0, 1, 2)$$

dalle quali ricavasi

$$V_2 = \frac{1}{\operatorname{sen}(\beta_2 - \varepsilon_2)} \left\{ 5{,}5\,p \cos\beta_2 - T_2 \operatorname{sen}(\beta_2 - \alpha_2) \right\}$$

$$R_2 = \frac{1}{\operatorname{sen}(\beta_2 - \varepsilon_2)} \left\{ 5{,}5\,p \cos\varepsilon_2 + T_2 \operatorname{sen}(\alpha_2 - \varepsilon_2) \right\}$$

II. E così si procederebbe successivamente a determinare tutte le altre reazioni; ma basterà di scrivere ancora le equazioni di equilibrio del punto *3* e del punto *4*, perchè riesca possibile di scrivere per analogia le espressioni algebriche di tutte le altre reazioni cercate. Difatti dalle due equazioni di equilibrio del punto *4*,

$$\left.\begin{aligned} o &= -T_2 \cos\alpha_2 + T_3 \cos\alpha_3 - S_2 \cos\gamma_2 - V_2 \cos\varepsilon_2 \\ o &= -T_2 \operatorname{sen}\alpha_2 + T_3 \operatorname{sen}\alpha_3 + S_2 \operatorname{sen}\gamma_2 - V_2 \operatorname{sen}\varepsilon_2 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

si possono dedurre le espressioni di S_2 e T_3 in funzione di T_2 e V_2 precedentemente conosciute; e poi scrivendo le equazioni di equilibrio nel punto *3*

$$\left.\begin{aligned} o &= R_2 \cos\beta_2 - R_3 \cos\beta_3 + S_2 \cos\gamma_2 + V_3 \cos\varepsilon_3 \\ p &= R_2 \operatorname{sen}\beta_2 - R_3 \operatorname{sen}\beta_3 - S_2 \operatorname{sen}\gamma_2 + V_3 \operatorname{sen}\varepsilon_3 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

e sommando rispettivamente fra loro tutte le prime e poi tutte le seconde equazioni *(0) (1) (2) (3)* e *(4)* si otterranno quest'altre due

$$\left.\begin{aligned} o &= -R_3 \cos\beta_3 + T_3 \cos\alpha_3 + V_3 \cos\varepsilon_3 \\ -4{,}5\,p &= -R_3 \operatorname{sen}\beta_3 + T_3 \operatorname{sen}\alpha_3 + V_3 \operatorname{sen}\varepsilon_3 \end{aligned}\right\}(0,1,2,3,4)$$

mediante le quali si potrà determinare V_3 ed R_3 in funzione della T_3 precedentemente determinata.

Ottengonsi così le quattro espressioni seguenti:

$$S_2 = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha_3 + \gamma_2)} \left\{ T_2 \operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_3) - V_2 \operatorname{sen}(\alpha_3 - \varepsilon_2) \right\}$$

$$T_3 = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha_3 + \gamma_2)} \left\{ T_2 \operatorname{sen}(\alpha_2 + \gamma_2) + T_2 \operatorname{sen}(\varepsilon_2 + \gamma_2) \right\}$$

$$V_3 = \frac{1}{\operatorname{sen}(\beta_3 - \varepsilon_3)} \left\{ 4{,}5\; p \cos\beta_3 - T_3 \operatorname{sen}(\beta_3 - \alpha_3) \right\}$$

$$R_3 = \frac{1}{\operatorname{sen}(\beta_3 - \varepsilon_3)} \left\{ 4{,}5\; p \cos\varepsilon_3 + T_3 \operatorname{sen}(\alpha_3 - \varepsilon_3) \right\}$$

Queste espressioni sono abbastanza generali perchè riesca inutile di scrivere quelle analoghe dei tre gruppi successivi

$$\begin{matrix} S_3 & T_4 & V_4 & R_4 \\ S_4 & T_5 & V_5 & R_5 \\ S_5 & T_6 & V_6 & R_6 \end{matrix}$$

bastando aumentare di un'unità gli indici posti al piede di tutte le lettere nelle espressioni precedenti, e di diminuire ad ogni volta di un'unità il coefficiente numerico di p. E colla stessa regola formerannosi pure le espressioni dell'ultimo gruppo

$$S_6 = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha_7 + \gamma_6)} \left\{ T_6 \operatorname{sen}(\alpha_6 - \alpha_7) - V_6 \operatorname{sen}(\alpha_7 - \varepsilon_6) \right\}$$

$$T_7 = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha_7 + \gamma_6)} \left\{ T_6 \operatorname{sen}(\alpha_6 + \gamma_6) + V_6 \operatorname{sen}(\varepsilon_6 + \gamma_6) \right\}$$

$$V_7 = \frac{1}{\operatorname{sen}(\beta_7 - \varepsilon_7)} \left\{ 0{,}5\, p \cos\beta_7 - T_7 \operatorname{sen}(\beta_7 - \alpha_7) \right\}$$

$$R_7 = \frac{1}{\operatorname{sen}(\beta_7 - \varepsilon_7)} \left\{ 0{,}5\, p \cos\beta_7 - T_7 \operatorname{sen}(\alpha_7 - \varepsilon_7) \right\}$$

Con tuttociò rimangono ancora le equazioni di equilibrio del punto *13* e del punto *14*. Ma le condizioni di simmetria riducono innanzitutto ad identità algebriche le due equazioni fra le componenti orizzontali; la equazione fra le componenti verticali nel punto *13*

$$p = 2\,R_7 \operatorname{sen}\beta_7 - S_7 \qquad (13)$$

determinerà l'unica reazione S_7 che ancor rimane a trovarsi; e finalmente l'equazione fra le componenti verticali nel punto *14*

$$o = -2\,T_7 \operatorname{sen}\alpha_7 - 2\,V_7 \operatorname{sen}\varepsilon_7 + S_7 \qquad (14)$$

dovendo evidentemente essere soddisfatta dai valori di T_7 V_7 ed S_7 più sopra trovati somministrerà una prova finale per comprovare i risultati dei calcoli numerici fatti.

III. Per poter applicare le formole trovate al caso nostro particolare, occorre preparare altri dati numerici, oltre a quelli che già si calcolarono nella nota precedente. Cominciando dagli angoli α fatti coll'orizzontale dai lati del poligono delle catene, essi risultano così determinati:

$$\alpha_1 = \frac{\psi_6 + \Psi}{2} = 54°,\ 18',\ 45''$$

$$\alpha_2 = \frac{\psi_5 + \psi_6}{2} = 45,\ 21,\ 5$$

$$\alpha_3 = \frac{\psi_4 + \psi_5}{2} = 36,\ 40,\ 55$$

$$\alpha_4 = \frac{\psi_3 + \psi_4}{2} = 28,\ 15,\ 40$$

$$\alpha_5 = \frac{\psi_2 + \psi_3}{2} = 20,\ 2,\ 25$$

$$\alpha_6 = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} = 11,\ 57,\ 55$$

$$\alpha_7 = \frac{\psi_1}{2} = 3,\ 58,\ 40.$$

Per calcolare le diverse inclinazioni delle diagonali, basterà di indicare con l_r la lunghezza comune di tutti i puntoni, e con $l_{s \cdot 1}\ l_{s \cdot 2} \ldots\ldots l_{s \cdot 7}$ la lunghezza delle saette; e si potranno allora facilmente dedurre le tangenti trigonometriche di tutti gli angoli ε ricorrendo alla seguente espressione generica (indice i).

$$tang\ \varepsilon_i = \frac{l_r\ sen\ \beta_i - l_{s \cdot i}\ sen\ \gamma_i}{l_r\ cos\ \beta_i + l_{s \cdot i}\ cos\ \gamma_i}$$

La lunghezza l_r è data dall'espressione

$$l_r = 2\,r\ sen\ \frac{\varphi}{2} = m\ 2{,}60$$

e le lunghezze delle singole saette hanno i seguenti valori:

$$l_{s \cdot 1} = r - \frac{r'\ sen\ \psi_6}{sen\ 6\ \varphi} = m\ 0{,}49$$

$$l_{\cdot 2} = r - \frac{r'\ sen\ \psi_5}{sen\ 5\ \varphi} = m\ 0{,}91$$

$$l_{s \cdot 3} = r - \frac{r'\ sen\ \psi_4}{sen\ 4\ \varphi} = m\ 1{,}26$$

$$l_{s \cdot 4} = r - \frac{r'\ sen\ \psi_3}{sen\ 3\ \varphi} = m\ 1{,}54$$

$$l_{s \cdot 5} = r - \frac{r'\ sen\ \psi_2}{sen\ 2\ \varphi} = m\ 1{,}74$$

$$l_{s \cdot 6} = r - \frac{r'\ sen\ \psi_1}{sen\ \varphi} = m\ 1{,}86$$

$$l_{s \cdot 7} = m\ 1{,}90$$

Ecco i valori degli angoli ε calcolati colla formola surriferita

$$\varepsilon_2 = 35°,\ 11',\ 0''$$
$$\varepsilon_3 = 18,\ 10,\ 10$$
$$\varepsilon_4 = 3,\ 5,\ 10$$
$$\varepsilon_5 = 349,\ 37,\ 35$$
$$\varepsilon_6 = 337,\ 40,\ 30$$
$$\varepsilon_7 = 327,\ 5,\ 45.$$

Rimarrebbe ancora a stabilirsi il valore di p, ossia del carico permanente ed accidentale che supponesi applicato in ciascun vertice del poligono dei puntoni; e questo si assumerà eguale a *Ch.*[i] *1100* ritenendo così lo stesso valore stato adottato dall'Ing. Marchesi.

IV. Ripigliando ad una ad una le formole stabilite, ed osservando che le dimensioni trasverse dei puntoni sono di

$$0^m,30 \times 0^m,25$$

donde una sezione resistente di

$$mq.\ 0,0750;$$

che le dimensioni trasverse delle saette sono di

$$0^m,25 \times 0^m,18$$

donde una sezione resistente di

$$mq.\ 0,0450;$$

e finalmente che le catene di ferro hanno il diametro di *mm. 40* e quindi una sezione resistente di *mmq. 1256*, sarà possibile di riferire all'unità di sezione tutti gli sforzi di estensione e di compressione delle diverse parti della centina per poter meglio formarsi un criterio del maggiore o minor grado di stabilità che tutte quelle parti presenterebbero, quando la centina fosse rinforzata a dovere per mezzo delle diagonali tiranti. Ecco i valori numerici delle tensioni e compressioni trovate ai numeri I e II di questa nota:

Valori delle tensioni sopportate dalle catene.

N° d'ordine delle catene a partire dalla chiave verso l'imposta	TENSIONE totale d'ogni catena	TENSIONE per millim. quadr. di sezione
1ª	$T_7 =$ *Ch.*ⁱ *25002*	*Ch.*ⁱ *19,9*
2ª	$T_6 =$ » *23620*	» *18,8*
3ª	$T_5 =$ » *22579*	» *18,0*
4ª	$T_4 =$ » *21089*	» *16,8*
5ª	$T_3 =$ » *19178*	» *15,3*
6ª	$T_2 =$ » *16790*	» *13,4*
7ª	$T_1 =$ » *16325*	» *13,0*

Valori delle compressioni sopportate dai puntoni.

N° d'ordine dei puntoni a partire dalla chiave verso l'imposta	PRESSIONE totale d'ogni puntone	PRESSIONE riferita al centim. quadr. di sezione
1°	$R_7 =$ *Ch.*ⁱ *25177*	*Ch*ⁱ *33,6*
2°	$R_6 =$ » *24466*	» *32,6*
3°	$R_5 =$ » *24421*	» *32,5*
4°	$R_4 =$ » *24246*	» *32,3*
5°	$R_3 =$ » *23970*	» *31,9*
6°	$R_2 =$ » *23343*	» *31,1*
7°	$R_1 =$ » *22522*	» *30,0*

Valori delle tensioni sopportate dalle saette.

N° d'ordine delle saette a partire da quella di chiave	TENSIONE totale d'ogni saetta	TENSIONE per centimetro quadrato di sezione
1ª	$S_7 = Ch.^i\ 3288$	$Ch.^i\ 7,3$
2ª	$S_6 =$ » 3047	» $6,8$
3ª	$S_5 =$ » 2843	» $6,3$
4ª	$S_4 =$ » 2679	» $6,0$
5ª	$S_3 =$ » 1762	» $3,9$
6ª	$S_2 =$ » 2552	» $5,7$
7ª	$S_1 =$ » 2628	» $5,8$

Valore delle tensioni a sopportarsi dalle diagonali e dei diametri da assegnarsi alle medesime.

N° d'ordine delle diagonali a partire dalla chiave verso l'imposta	TENSIONE totale	DIAMETRO da assegnarsi
1ª	$V_7 = Ch.^i\ 167$	$d = mm.$ —
2ª	$V_6 =$ » 569	» —
3ª	$V_5 =$ » 938	» 16
4ª	$V_4 =$ » 1291	» 18
5ª	$V_3 =$ » 1617	» 20
6ª	$V_2 =$ » 1950	» 22

Nota C,

nella quale traducesi in equazione il principio di elasticità del Generale Menabrea per il caso più generale di un sistema complesso non equilibrato.

I. In un sistema complesso e non equilibrato tutte le parti che lo compongono non avendo solamente da resistere a forze di estensione o di compressione dirette secondo il loro asse geometrico, ma dovendo inoltre essere inflesse, basterà di supporre scomposta la reazione risultante ed obliqua in due altre, l'una diretta secondo l'asse e l'altra normalmente ad esso; e si potrà riguardare il lavoro totale delle forze intrinseche, o di reazione molecolare, come uguale alla somma di due distinti lavori, di cui uno sarà prodotto dalle forze tangenziali, e l'altro da quelle normali. Quanto al primo, dicasi T una forza tangenziale qualunque di estensione o di compressione, e dicasi ω la sezione costante del prisma omogeneo che vi resiste; sia l la lunghezza del prisma, ossia la distanza dei due vertici considerati, e sia λ il totale allungamento od accorciamento prodottosi sulla distanza l per l'azione della forza T. Si indichi infine con E il coefficiente di elasticità longitudinale per la materia di cui il prisma è costituito.

Ove pongasi

$$\tau = \frac{E\,\omega}{l}$$

la forza capace di produrre la variazione totale λ, sarà

$$T = \tau\,\lambda \tag{1}$$

Per una variazione elementare $d\,\alpha$ corrispondente ad una qualsiasi variazione finita ed intermedia α, si svilupperà il lavoro di resistenza molecolare

$$\tau\,\alpha\,d\,\alpha$$

ed il lavoro totale corrispondente alla variazione totale λ sarà:

$$L_\tau = \frac{1}{2}\,\tau\,\lambda^2 \qquad (2)$$

Sostituiscasi nell'equazione *(2)* il valore di λ che ricavasi dalla *(1)* e si otterrà quest'altra espressione

$$L_\tau = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\tau}\,T^2 \qquad (3)$$

II. Per trovare una espressione del lavoro sviluppato dalle forze molecolari in virtù di una forza estrinseca normale, si immagini un prisma omogeneo di lunghezza l e di sezione costante, incastrato per un estremo, e sollecitato da una forza normale N per l'altro. Scelgansi due sezioni infinitamente vicine fra loro, e poste alla distanza x dal punto di applicazione della forza N. Si consideri un elemento di fibra compreso fra quelle due sezioni, di sezione ω e posto a distanza ν dall'asse neutro del prisma. Per l'azione della forza inflettente N l'una sezione del prisma è fatta girare intorno all'asse neutro e per rispetto all'altra d'un cert'angolo che sarà misurato dall'arco θ di raggio uguale all'unità.

Indicando ancora con E il coefficiente di elasticità longitudinale per la materia di cui il prisma è formato, la resistenza opposta dall'elemento di fibra sucennato avente una lunghezza dx, quando siasi girata una sezione per rispetto all'altra d'un angolo intermedio qualunque misurato dall'arco ψ, sarà

$$E\,\omega\,\frac{\nu\,\psi}{dx}$$

ed il lavoro elementare di questa resistenza, mentre l'arco ψ subisce un aumento differenziale $d\psi$, sarà espresso da

$$E\,\omega\,\frac{\nu^2}{dx}\,\psi\,d\,\psi$$

epperciò il lavoro resistente svolto dall'elemento di fibra considerato nel rotare di una sezione per rispetto all'altra di tutto l'angolo misurato dall'arco θ, avrà per valore

$$E\,\omega\,\frac{\nu^2}{dx}\int_0^\theta \psi\,d\,\psi = \frac{1}{2}\,E\,\omega\,\frac{\nu^2\,\theta^2}{dx}$$

e finalmente il lavoro resistente totale svolto dall'azione molecolare di tutti gli elementi di fibra compresi fra le due sezioni vicinissime considerate, sarà rappresentato dalla espressione

$$d\,L_\nu = \frac{1}{2}\,E\,\frac{\theta^2}{dx}\,\Sigma\,\omega\,\nu^2 = \frac{1}{2}\,E\,\frac{I\,\theta^2}{dx} \qquad (4)$$

ove si indichi con I il momento d'inerzia della sezione del prisma considerato rispetto all'asse neutro in essa contenuto.

Per altra parte si sa che il momento di resistenza alla flessione per una sezione qualunque deve essere uguale al momento inflettente, ossia devesi avere

$$E\,I\,\frac{\theta}{dx} = N\,x \qquad (5)$$

Ricavisi dall'equazione *(5)* il valore di θ e lo si sostituisca nella *(4)*, e si otterrà:

$$d\,L_\nu = \frac{1}{2}\,\frac{N^2}{E\,I}\,x^2\,dx$$

Epperciò il lavoro totale svolto dall'azione molecolare in virtù della sola forza estrinseca normale N sarà:

$$L_\nu = \frac{1}{2}\frac{N^2}{EI}\int_0^l x^2\,dx = \frac{1}{6}\,\frac{l^3}{EI}\,N^2$$

Pongasi ancora

$$\nu = \frac{3\,E\,I}{l^3}$$

e si avrà

$$L_\nu = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\nu}\,N^2 \tag{6}$$

espressione analoga a quella di L_τ data dalla formola *(3)*.

Ove finalmente riflettasi che il prisma sottoposto a flessione dall'unica forza normale N assume una saetta

$$s = \frac{N\,l^3}{3\,E\,I} = \frac{N}{\nu}$$

si troverà pure

$$L_\nu = \frac{1}{2}\,\nu\,s^2 \tag{7}$$

espressione analoga a quella di L_τ data dalla formola *(2)*.

III. Le formole *(6)* e *(7)* si possono in verità ricavare con metodo ben più spedito ricorrendo alla considerazione diretta del lavoro sviluppato dalla forza estrinseca N. Difatti la forza capace di produrre la totale saetta d'inflessione s essendo

$$N = \frac{3\,E\,I}{l^3}\,s,$$

per una variazione elementare di saetta $d\sigma$, corrispondente ad una qualsiasi variazione finita ed intermedia σ, si svilupperà il lavoro

$$\frac{3\,E\,I}{l^3}\,\sigma\,d\,\sigma$$

ed il lavoro totale corrispondente alla saetta s, sarà

$$L_\nu = \frac{3\,E\,I}{l^3}\,\frac{s^2}{2} = \frac{1}{2}\,\nu\,s^2$$

Mi lusingo però di avere col calcolo esposto nel paragrafo precedente confermato questo procedimento, che fu creduto da qualcuno non abbastanza rigoroso, e di avere dimostrato per altra via l'esattezza di un risultato che alcuni esitarono di accettare.

IV. Se rappresentasi col segno Σ la somma di tutte le quantità che vi sono genericamente comprese, il lavoro totale di resistenza molecolare sviluppato da tutte le parti di un qualsiasi sistema complesso e non equilibrato in virtù delle forze estrinseche che lo sollecitano sarà espresso simbolicamente dall'una o dall'altra delle espressioni che seguono:

$$\Sigma\,L = \frac{1}{2}\Sigma\,\tau\,\lambda^2 + \frac{1}{2}\,\Sigma\,\nu\,s^2$$

$$\Sigma\,L = \frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{\tau}T^2 + \frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{\nu}\,N^2$$

Il principio di elasticità vuole che sia minima la somma dei lavori ora scritta; e questa condizione è sufficiente in ogni caso a stabilire in dipendenza della preconcepita struttura del sistema quale unica ripartizione di resistenze elastiche possa avvenire fra le tante che sarebbero in generale immaginabili, quando si cercasse di soddisfare unicamente alle condizioni dell'equilibrio.

Per esprimere una tale condizione di minimum, basterà scrivere

$$\Sigma \tau \lambda d \lambda + \Sigma \nu s d s = 0$$

ovvero

$$\Sigma \frac{1}{\tau} T d T + \Sigma \frac{1}{\nu} N d N = 0$$

ed è questa intanto la così detta equazione di elasticità, che ebbi in animo di applicare per ottenere la vera soluzione del problema propostomi. La sua applicazione forma appunto l'oggetto della nota che segue.

Nota D,

nella quale si derivano dalle condizioni di equilibrio e dal principio di elasticità le equazioni algebriche occorrenti alla determinazione rigorosa ed immediata di tutte le reazioni elastiche delle diverse parti costituenti le centine della tettoia di Arezzo.

I. Sieno R e ρ coi rispettivi indici al piede le reazioni tangenziali e normali dei puntoni; S e σ le reazioni tangenziali e normali delle saette; e notisi che la componente normale della reazione elastica obliqua dei tiranti di ferro è trascurabile affatto per la esiguità della loro sezione in rispetto della loro lunghezza. Ritengansi del resto tutte le denominazioni delle note precedenti.

Dicansi P e Q le reazioni verticale ed orizzontale, opposte dai piedritti; ma ben s'intende che volendo supporre, come farò più sotto, che il sistema sia capace, come dovrebb'esserlo, di eliminare colle catene ogni spinta orizzontale, si avrà in tutte le equazioni $Q = 0$. Se preferisco di ritenere questa forza nelle equazioni generali si è unicamente per prevedere il caso, in cui si volesse assegnare a questa forza ed *a priori* un valore intermedio per tener conto ad esempio della resistenza d'attrito che non può a meno di opporsi allo scorrimento dei cuscinetti d'imposta sui piedritti, essendo i medesimi sprovvisti di rulli.

Nello stabilire le equazioni di equilibrio riterrò ancora che gli assi $o\,x$ ed $o\,y$ indichino il segno delle componenti di tutte le forze; e quanto alle forze normali supporrò in precedenza che le coppie di rotazione le quali nascono per ogni puntone dalla reazione normale ρ applicata e rivolta in senso contrario ai due estremi, e per ogni saetta dalla reazione normale σ tendano a girare da x verso y. Il valore positivo o negativo che risulterà in definitiva assegnato a queste forze varrà ad indicare se desse agiscano effettivamente in quel senso, ovvero in senso contrario.

II. Con queste supposizioni si comincierà dallo scrivere tutte le condizioni di equilibrio, per trarre prima d'ogni cosa da queste tutto quel che ci possono dare.

Nel punto 0 si hanno le due condizioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} -Q &= -R_1 \cos\beta_1 + \rho_1 \operatorname{sen}\beta_1 + T_1 \cos\alpha_1 \\ -P &= -R_1 \operatorname{sen}\beta_1 - \rho_1 \cos\beta_1 + T_1 \operatorname{sen}\alpha_1 \end{aligned}\right\} \quad (0)$$

le quali somministrano i seguenti valori delle incognite R_1 e ρ_1 amendue espressi in funzione della sola incognita T_1

$$R_1 = P \operatorname{sen}\beta_1 + Q\cos\beta_1 + T_1 \cos(\beta_1 - \alpha_1) \qquad (R_1)$$

$$\rho_1 = P\cos\beta_1 - Q\operatorname{sen}\beta_1 - T_1 \operatorname{sen}(\beta_1 - \alpha_1) \qquad (\rho_1)$$

Le condizioni di equilibrio nel punto (2)

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -T_1 \cos\alpha_1 + T_2\cos\alpha_2 - S_1\cos\gamma_1 + \sigma_1 \operatorname{sen}\gamma_1 \\ 0 &= -T_1 \operatorname{sen}\alpha_1 + T_2 \operatorname{sen}\alpha_2 + S_1 \operatorname{sen}\gamma_1 + \sigma_1 \cos\gamma_1 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

somministrano i seguenti valori delle incognite S_1 e σ_1 in funzione delle incognite T_1 e T_2

$$S_1 = -T_1\cos(\alpha_1 + \gamma_1) + T_2\cos(\alpha_2 + \gamma_1) \qquad (S_1)$$

$$\sigma_1 = T_1 \operatorname{sen}(\alpha_1 + \gamma_1) - T_2 \operatorname{sen}(\alpha_2 + \gamma_1) \qquad (\sigma_1)$$

Sommando le equazioni (0) e (2) con quest'altre le quali esprimono le condizioni d'equilibrio nel punto 1

$$\left.\begin{aligned} 0 &= R_1\cos\beta_1 - \rho_1 \operatorname{sen}\beta_1 - R_2\cos\beta_2 + \rho_2\operatorname{sen}\beta_2 \\ &\quad + S_1\cos\gamma_1 - \sigma_1\operatorname{sen}\gamma_1 \\ p &= R_1\operatorname{sen}\beta_1 + \rho_1\cos\beta_1 - R_2\operatorname{sen}\beta_2 - \rho_2\cos\beta_2 \\ &\quad - S_1\operatorname{sen}\gamma_1 - \sigma_1\cos\gamma_1 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

si hanno quest'altre due equazioni

$$\left.\begin{aligned} -Q &= T_2\cos\alpha_2 - R_2\cos\beta_2 + \rho_2\operatorname{sen}\beta_2 \\ -(P-p) &= T_2\operatorname{sen}\alpha_2 - R_2\operatorname{sen}\beta_2 - \rho_2\cos\beta_2 \end{aligned}\right\} \quad (0, 1, 2)$$

dalle quali si ricavano i seguenti valori di R_2 e ρ_2 in funzione della sola incognita T_2

$$R_2 = (P-p)\operatorname{sen}\beta_2 + Q\cos\beta_2 + T_2\cos(\beta_2 - \alpha_2) \ldots. (R_2)$$

$$\rho_2 = (P-p)\cos\beta_2 - Q\operatorname{sen}\beta_2 - T_2\operatorname{sen}(\beta_2 - \alpha_2) \ldots. (\rho_2)$$

Le equazioni di equilibrio nel punto 4 sarebbero analoghe affatto a quelle stabilite per il punto 2; basterebbe aumentare di un'unità gli indici; si potrà dunque scrivere senz'altro

$$S_2 = -T_2\cos(\alpha_2 + \gamma_2) + T_3\cos(\alpha_3 + \gamma_2) \qquad (S_2)$$

$$\sigma_2 = T_2\operatorname{sen}(\alpha_2 + \gamma_2) - T_3\operatorname{sen}(\alpha_3 + \gamma_2) \qquad (\sigma_2)$$

Riesce oramai inutile di scrivere le equazioni di equilibrio nei vertici che seguono, e proseguire la eliminazione secondo il metodo su indicato, potendosi dedurre assai facilmente i valori dei tre gruppi

$$\begin{array}{cccc} R_3 & \rho_3 & S_3 & \sigma_3 \\ R_4 & \rho_4 & S_4 & \sigma_4 \\ R_5 & \rho_5 & S_5 & \sigma_5 \end{array}$$

dai rispettivi valori precedentemente trovati coll'aumentare di un'unità gli indici al piede di tutte le lettere, ed il coefficiente numerico della lettera p.

Colla stessa regola si potrà scrivere ancora:

$$R_6 = (P - 5p)\operatorname{sen}\beta_6 + Q\cos\beta_6 + T_6\cos(\beta_6 - \alpha_6) \quad (R_6)$$

$$\rho_6 = (P - 5p)\cos\beta_6 - Q\operatorname{sen}\beta_6 - T_6\operatorname{sen}(\beta_6 - \alpha_6) \quad (\rho_6)$$

$$S_6 = -T_6\cos(\alpha_6 + \gamma_6) + T_7\cos(\alpha_7 + \gamma_6) \quad (S_6)$$

$$\sigma_6 = T_6\operatorname{sen}(\alpha_6 + \gamma_6) - T_7\operatorname{sen}(\alpha_7 + \gamma_6) \quad (\sigma_6)$$

E quanto all'ultimo gruppo con indice 7 resteranno solamente modificate le due ultime equazioni per le condizioni di simmetria del sistema, e si avrà così

$$R_7 = (P - 6\,p)\,sen\,\beta_7 + Q\cos\beta_7 + T_7\cos(\beta_7 - \alpha_7) \ldots \quad (R_7)$$

$$\rho_7 = (P - 6\,p)\cos\beta_7 - Q\,sen\,\beta_7 - T_7\,sen\,(\beta_7 - \alpha_7) \quad (\rho_7)$$

$$S_7 = 2\,T_7\,sen\,\alpha_7 \quad (S_7)$$

$$\sigma_7 = 0 \quad (\sigma_7)$$

III. Per tal guisa tutte le condizioni distinte dell'equilibrio, possibili a stabilirsi, permettono di esprimere tutte le reazioni $R\ \rho\ S$ e σ in funzione delle sole tensioni T del poligono delle catene; e non sì tosto queste saranno conosciute, potremo colle equazioni ora trovate determinare numericamente il valore di tutte le altre.

Si è per trovare sette altre equazioni determinatrici dei valori di T che è d'uopo ricorrere all'equazione di elasticità stata trovata nella nota precedente, e che fu così simboleggiata:

$$\Sigma \frac{1}{\tau}\,T\,d\,T + \Sigma \frac{1}{\nu}\,N\,d\,N = 0 \quad \text{(A)}$$

Sono in essa indicate colla sola lettera T tutte le reazioni tangenziali
$R\ \ S$ e T; e con N tutte le reazioni normali ρ e σ.

Sieno:

τ_r e ν_r i valori dei coefficienti generici τ e ν relativi alle reazioni R e ρ; essi rimarranno di valore costante per tutti i puntoni, avendo questi una stessa lunghezza ed una stessa sezione.

${}_{s,1}$ $\tau_{s,2}$ . . . . . . $\tau_{s,7}$ e $\nu_{s,1}$ $\nu_{s,2}$ . . . . . . $\nu_{s,6}$ i valori dei coefficienti τ e ν relativi alle reazioni tangenziali e normali delle saette.

$\tau_{t,1}$ $\tau_{t,2}$ . . . . . $\tau_{t,7}$ i valori del coefficiente generico τ relativo alle reazioni $T_1\ T_2$ . . . . . T_7 del poligono delle catene.

Differenziando le 7 equazioni (R) e le 7 equazioni (ρ) si troveranno altrettante espressioni della forma:

$$d\,R = \cos(\beta - \alpha)\,d\,T$$

$$d\,\rho = -\,sen\,(\beta - \alpha)\,d\,T$$

Differenziando le prime sei equazioni (S) e le sei equazioni (σ) si troveranno altrettante espressioni della forma

$$d\,S_i = -\cos(\alpha_i + \gamma_i)\,d\,T_i + \cos(\alpha_{i+1} + \gamma_i)\,d\,T_{i+1}$$

$$d\,\sigma = sen\,(\alpha_i + \gamma_i)\,d\,T_i - sen\,(\alpha_{i+1} + \gamma_i)\,d\,T_{i+1}$$

E la equazione (S_7) differenziata darà a sua volta

$$d\,S_7 = 2\,sen\,\alpha_7\,d\,T_7$$

Sostituendo nell'equazione (A) i valori algebrici dei differenziali ora trovati, si avrà un'equazione che risulterà dalla somma algebrica eguagliata a zero di 7 termini in $d\,T_1\ d\,T_2$ .... $d\,T_7$ ed i cui coefficienti avranno la forma generica seguente

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\cos(\beta_i - \alpha_i)}{\tau_r}\,R_i - \frac{sen(\beta_i - \alpha_i)}{\nu_r}\,\rho_i + \frac{\cos(\alpha_i + \gamma_{i-1})}{\tau_{s\cdot\,i-1}}\,S_{i-1} \\ &\qquad - \frac{sen\,(\alpha_i + \gamma_{i-1})}{\nu_{s\cdot\,i-1}}\,\sigma_{i-1} - \frac{\cos(\alpha_i + \gamma_i)}{\tau_{s\cdot\,i}}\,S_i \\ &\qquad\qquad + \frac{sen\,(\alpha_i + \gamma_i)}{\nu_{s\cdot\,i}}\,\sigma_i + \frac{1}{\tau_{t\cdot\,i}}\,T_i \end{aligned}\right\}\,d\,T_i$$

Solo ne differiranno un poco il primo in $d\,T_1$, e l'ultimo in $d\,T_7$; poichè nel cofficiente di $d\,T_1$ mancherà necessariamente il terzo ed il quarto termine dell'espressione sovrascritta; e nel coefficiente di $d\,T_7$ il termine in σ_7 sarà nullo, e quello in S_7 risulterà uguale a

$$+\frac{sen\,\alpha_7}{\tau_{s\cdot 7}}\,S_7$$

per le condizioni di simmetria del sistema.

Eguagliando separatamente a zero i sette anzidetti coefficienti, previa sostituzione dei valori di R ρ S e σ in funzione di T stati trovati nel paragrafo precedente, si avranno sette equazioni contenenti le sole incognite T, e che serviranno a determinarle. Quelle equazioni sarebbero della forma:

$$\left|\begin{aligned}
&\Big[P-(i-1)\,p\Big]\left\{\begin{aligned}&\frac{cos\,(\beta_i-\alpha_i)}{\tau_r}\,sen\,\beta_i\\&-\frac{sen\,(\beta_i-\alpha_i)}{\nu_r}\,cos\,\beta_i\end{aligned}\right\}\\
&+Q\left(\frac{cos(\beta_i-\alpha_i}{\tau_r}\,cos\,\beta_i-\frac{sen(\beta_i-\alpha_i}{\nu_r}\,sen\,\beta_i\right)\\
&-T_{i-1}\left\{\begin{aligned}&\frac{cos\,(\alpha_{i-1}+\gamma_{i-1})\,cos\,(\alpha_i+\gamma_{i-1})}{\tau_{s\cdot 1}}\\&+\frac{sen\,(\alpha_{i-1}+\gamma_{i-1})\,sen\,(\alpha_i+\gamma_{i-1})}{\nu_{s\cdot 1}}\end{aligned}\right\}\\
&+T_i\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{\tau_{t\cdot 1}}+\frac{\overline{cos}^2\,(\beta_i-\alpha_i)}{\tau_r}+\frac{\overline{sen}^2\,(\beta_i-\alpha_i)}{\nu_r}\\&+\frac{\overline{cos}^2(\alpha_i+\gamma_{i-1})}{\tau_{s\cdot i-1}}+\frac{\overline{sen}^2\,(\alpha_i+\gamma_{i-1})}{\nu_{\cdot si-1}}\\&+\frac{\overline{cos}^2\,(\alpha_i+\gamma_i)}{\tau_{s\cdot i}}+\frac{\overline{sen}^2\,(\alpha_i+\gamma_i)}{\nu_{s\cdot i}}\end{aligned}\right\}\\
&-T_{i+1}\left\{\begin{aligned}&\frac{cos\,(\alpha_i+\gamma_i)\,cos\,(\alpha_{i+1}+\gamma_i)}{\tau_{s\cdot i}}\\&+\frac{sen\,(\alpha_i+\gamma_i)\,sen\,(\alpha_{i+1}+\gamma_i)}{\nu_{s\cdot i}}\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right|=0 \qquad (B)$$

IV. Altro non resta che preparare i coefficienti numerici di dette equazioni per potere poi determinare le 7 tensioni incognite T. Si avrà

$$P=6{,}5\,p \qquad \text{e} \qquad p=1100\ \textit{Chilogr.}$$

Tutti gli angoli α β e γ sono già registrati nelle note precedenti.

Per calcolare

$$\tau_r=\left(\frac{E\,\omega}{l}\right)_r$$

e

$$\nu_r=\left(\frac{3\,E\,I}{l^3}\right)_r$$

scelsi per il legno il coefficiente di elasticità longitudinale

$$E=1500\ \textit{Chilogr. per mm. quadrato;}$$

si ha inoltre:

$$\omega=300^{mm}\times 250^{mm}$$

ed

$$I=\frac{1}{12}\,250\times\overline{300}^3$$

Quanto alla lunghezza l dei puntoni, essendosi già calcolata nella nota B, basterà avvertire che dev'essere espressa in millimetri.

I valori di

$$\tau_{s\cdot i}=\frac{E\,\omega_s}{l_{s\cdot i}}$$

e di

$$\nu_{s.i} = \frac{3\,E\,I_s}{l^3_{s.i}}$$

si trovano pure dando ad E il valore sucennato, e ritenendo che per tutte le saette si ha:

$$\omega_s = 250^{mm} \times 180^{mm}.$$

ed

$$I_s = \frac{1}{12} 250 \times (180)^3$$

Anche le lunghezze l_s delle singole saette furono già calcolate nella nota B.

Rimangono i valori di τ_t; e qui trattandosi di ferro, devesi ritenere $E = 18000$ chilogrammi per millimetro quadrato; si ha inoltre:

$$\omega = \frac{\pi\,(40)^2}{4}$$

avendo le catene un diametro di 40 millimetri.

Finalmente le lunghezze delle singole catene sarebbero genericamente espresse da

$$l_i = 2\,r'\,sen \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{2}$$

Tralascio di registrare tutti questi valori, perchè inutili, bastando per il calcolo nostro di ritenerne i logaritmi; e trascrivo senz'altro le 7 equazioni finali fra le sole incognite T coi loro coefficienti numerici stati calcolati secondo la formola (B)

$$1{,}1704Q - 3726{,}0 + 0{,}4702T_1 - 0{,}2048T_2 = 0$$
$$0{,}9613Q - 3906{,}3 - 0{,}2048T_1 + 1{,}7851T_2 - 1{,}3371T_3 = 0$$
$$0{,}7228Q - 3419{,}1 - 1{,}3371T_2 + 5{,}1370T_3 - 3{,}5936T_4 = 0$$
$$0{,}4837Q - 2506{,}3 - 3{,}5936T_3 + 10{,}3068T_4 - 6{,}5637T_5 = 0$$
$$0{,}2728Q - 1462{,}0 - 6{,}5637T_4 + 16{,}2115T_5 - 9{,}5736T_6 = 0$$
$$0{,}1169Q - 573{,}1 - 9{,}5736T_5 + 21{,}1335T_6 - 11{,}7541T_7 = 0$$
$$0{,}0037Q - 66{,}4 - 11{,}7541T_6 + 11{,}7221T_7 = 0$$

V. Facendo in queste equazioni $Q = 0$ perchè preferisco di supporre come caso più sfavorevole che lo scorrimento necessario a porre le catene nella dovuta tensione possa realmente avvenire, io ottenni i seguenti valori massimi delle tensioni cui potrebbero essere assoggettate le catene, quando agisse il supposto sovraccarico.

Catene a partire dal vertice di chiave.	Tensioni totali da esse sopportate.	Tensioni riferite al mm. quadrato di sezione resistente.
1ª	$T_7 =$ ch.ⁱ 29371	ch.ⁱ 23,4
2ª	$T_6 =$ » 29285	» 23,3
3ª	$T_5 =$ » 28526	» 22,7
4ª	$T_4 =$ » 27519	» 21,9
5ª	$T_3 =$ » 26127	» 20,8
6ª	$T_2 =$ » 23860	» 19,0
7ª	$T_1 =$ » 18317	» 14,6

Dal confronto di questi risultati con quelli ottenuti al numero IV della nota B già vedesi intanto come l'aggiunta delle diagonali tiranti state suggerite per consolidare il sistema migliorerebbe già, sebbene di poco, le condizioni di stabilità non molto favorevoli di quelle catene; perchè quelle in prossimità del vertice di colmo non avrebbero più da sostenere nel corso del sovraccarico accidentale che una tensione di chilog. 20 per mm. quadrato, mentre sarebbe di clilog. 23,4 la tensione massima che dovrebbero nella stessa ipotesi attualmente sostenere.

VI. Conosciute le tensioni T tutte le reazioni incognite dei puntoni sono assai facilmente calcolabili colle equazioni (R) e (ρ) trovate al numero II di questa nota.

Nel registrare i valori trovati, posi a fianco di questi anche le resistenze per centimetro quadrato che dovrebbero opporre le fibre più compresse nella sezione di massima fatica. Per tal modo potrà ognuno ritenere per il legno di cui si tratta quel coefficiente di rottura che meglio crederà convenire, e dividendo per esso il numero trovato, ne nascerà il coefficiente di stabilità per i sette puntoni.

Occorre appena di dire che quella resistenza per centimetro quadrato sarà calcolata colla formola dei solidi inflessi e ad un tempo compressi; ossia si dovrà calcolare per i puntoni una resistenza massima alla compressione espressa da

$$n\,Q_m = \frac{6}{25 \times (30)^2}\,\rho\, l_r + \frac{R}{30 \times 25}$$

e dovranno porsi per ρ i diversi valori assoluti indipendentemente dal segno. Non occorrerà poi di fare il calcolo per la resistenza alla estensione poichè il legno resiste meglio alla trazione che alla compressione.

Ecco i risultati dei calcoli

Puntoni a partire dal vertice di chiave.	Forze tangenziali di compressione	Forze normali o di flessione.	Resistenza massima alla compressione per cent. quadrato.
	Chilogr.	Chilogr.	Chilogr.
1.	$R_7 = 29414$	$\rho_7 = 25$	41,0
2.	$R_6 = 29671$	$\rho_6 = 45$	42,7
3.	$R_5 = 29582$	$\rho_5 = 29$	41,5
4.	$R_4 = 29537$	$-\rho_4 = 71$	44,3
5.	$R_3 = 29352$	$-\rho_3 = 275$	58,2
6.	$R_2 = 28478$	$-\rho_2 = 523$	74,2
7.	$R_1 = 24479$	$-\rho_1 = 369$	58,2.

Quand'anche si volesse ritenere un coefficiente di rottura

alla compressione eguale a ch.[i] 450 per centimetro quadrato, si avrebbe ad ogni modo un coefficiente di stabilità non molto conveniente, poichè generalmente ammettesi che

$$\frac{1}{n} = 6$$

sia per il legno un numero ancor troppo tenue.

Dal confronto però dei risultati qui ottenuti con quelli registrati al numero IV della nota B risulta la notevole influenza che in favore dei puntoni eserciterebbero quelle diagonali tiranti, le quali ricondurrebbero il sistema alla forma equilibrata; poichè nel caso più sfavorevole di tutto il sovraccarico non raggiungerebbesi mai la pressione di 34 chilogrammi par centimetro quadrato.

VII. Vengasi per ultimo alle saette. Le equazioni (S) e (σ) trovate al numero II di questa nota serviranno a determinare le reazioni tangenziali e normali che esse possono sviluppare. E poichè quelle saette sono soggette ad estensione e flessione, sarà per esse indispensabile di ritenere tutte due le seguenti espressioni, per avere ad un tempo sott'occhio sia la massima tensione sia la massima compressione, cui sarebbero soggette le fibre di massima fatica.

$$n\,Q'_m = \frac{6}{25 \times (18)^2}\,\sigma\, l_s + \frac{S}{25 \times 18}$$

$$n\,Q''_m = \frac{6}{25 \times (18)^2}\,\sigma\, l_s - \frac{S}{25 \times 18}$$

Ecco i risultati che si ottengono:

Saette a partire da quella di chiave.	Forze tangenziali di estensione.	Forze normali o di flessione.	Resistenze massime per centim. quadrato all'estensione.	alla compressione
	Chilogr.	Chilogr.	Chilogr.	Chilogr.
1.	$S_7 = 4075$	$\sigma_7 = 0$	9,0	»
2.	$S_6 = 4084$	$\sigma_6 = 59$	17,2	»
3.	$S_5 = 4113$	$-\sigma_5 = 472$	70,0	60,8
4.	$S_4 = 4099$	$-\sigma_4 = 591$	76,5	58,3
5.	$S_3 = 4087$	$-\sigma_3 = 861$	89.6	71,4
6.	$S_2 = 4085$	$-\sigma_2 = 1644$	119,9	101,7
7.	$S'_1 = 4218$	$-\sigma_1 = 4859$	185,0	166,3

La forza trasversale che sollecita la saetta più vicina all'imposta è veramente tale da rendere la medesima in condizioni di stabilità un pochino precarie. Ma dai calcoli instituiti nella nota B fortunatamente risulta, che le azioni delle diagonali tiranti, indispensabili a consolidare il sistema, riducono tutte indistintamente le saette colle attuali dimensioni in eccellenti condizioni di stabilità, anche avuto riguardo alla diminuzione di resistenza che potrebbe avverarsi per il deterioramento già subìto.

Non ripeterò qui le conclusioni generali che da questi calcoli ho creduto di ricavare; esse furono a bella posta trascritte prima di queste *Note*, per timore che la lunghezza dei calcoli deviasse un po' l'attenzione dallo scopo precipuo, che mi sono proposto.