

GRINO
Date
No.

d/ 624 (02) CUR

BIBLIOTECA FACOLTA' DI ARCHITETTURA
CASTELLO DEL VALENTINO
10126 TORINO

22 NOV 1979

L'ARTE DI FABBRICARE

CORSO COMPLETO

DI ISTITUZIONI TEORICO-PRATICHE

per gl'Ingegneri, per gli Architetti, pei Periti in costruzioni, pei Periti misuratori,
per gl'Intraprenditori, pei Capomastri, e per quanti si trovano applicati o vogliono applicarsi
all'esecuzione ed alla sorveglianza di costruzioni civili, stradali ed idrauliche

CON TAVOLE ILLUSTRATIVE

MECCANICA APPLICATA

ALLE

COSTRUZIONI

PER L'INGEGNERE

SILVIO CANEVAZZI

Professore nella Regia Scuola d'applicazione per gli Ingegneri di Bologna.

Parte II - Dispensa 1^a

TESTO

TORINO

Presso **AUGUSTO FEDERICO NEGRO**, Editore

nella Galleria Nazionale

con Succursali in Roma, Napoli e Cagliari (per la Sardegna).

1892

La **MECCANICA APPLICATA ALLE COSTRUZIONI**
conterà di due parti coi rispettivi atlanti di Tavole. - L'associazione è obbligatoria per tutta l'opera
Prezzo di questa Dispensa (Testo e Tavole) Lire 8.



SERIE TERZA

DELL'

ALBUM

DEGLI

INGEGNERI ED ARCHITETTI

SCELTA COLLEZIONE DI DISEGNI

di costruzioni moderne e di progetti redatti a scopo di concorso o di studio,
col corredo delle quote, dei dettagli, delle analisi dei prezzi, ecc.

Stando per ultimarsi ora le due prime Serie di questa importante pubblicazione, abbiamo determinato, di por mano alla terza Serie col proposito di migliorarla notevolmente, sia con una scelta di lavori meglio rispondenti alla sua indole speciale, sia con metodi di rappresentazione più conformi al vero sentimento del disegno architettonico e sia ancora coll'imprimerle un carattere assolutamente nazionale in guisa che, riproducendo con scrupolosa esattezza i lavori progettati da valenti Ingegneri ed Architetti, essa rispecchi fedelmente il vario e continuato movimento di questo ramo artistico nelle diverse regioni d'Italia.

Così pure affinché la nostra Opera abbia a riuscire di incontestabile utilità pratica a coloro che si avviano nella nobile carriera delle costruzioni civili e più specialmente in quelle che s'incarnano nelle forme architettoniche, pubblicheremo non solo i disegni delle più importanti costruzioni moderne, ma ben anche i progetti di edifizî redatti da rinomati Ingegneri ed Architetti, ancorchè tali progetti, siano stati compilati a solo scopo di studio o di concorso.

Abbiamo inoltre deciso di sostituire alla traduzione francese del testo, un più largo campo di dati e notizie riferentisi a particolari, analisi, ecc., che abbiano un interesse reale e facciano meglio conoscere il pregio dei lavori che riprodurremo.

Onde giungere sicuramente al nostro scopo ci siamo assicurata la cooperazione di persona competentissima, la quale dimostrò con vari ragguardevoli edifizî quanto sia il suo amore per tutto ciò che ha il carattere dello stile puro e corretto. Egli è l'Archit. Ing. Prof. Cav. A. PORTA sotto la direzione del quale procederà l'Opera in discorso.

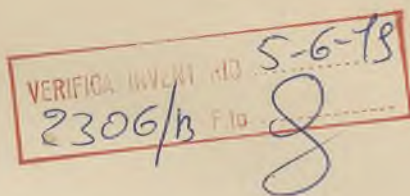
Condizioni di associazione

La pubblicazione della terza Serie si farà nello stesso formato delle due precedenti, e sarà effettuata col concorso dei migliori metodi atti a dare la più fedele riproduzione dei disegni che verranno in essa raccolti.

Questa Serie conterà pure, come le altre due, di dodici fascicoli, che saranno pubblicati colla maggior possibile sollecitudine e regolarità.

Il prezzo di ogni fascicolo è di Lire **sette** per gli associati alle due prime Serie e di Lire **otto** per gli associati alla sola terza Serie.

Per conservare in buono stato i fascicoli di questo **Album**, abbiamo fatto allestire un'elegante e forte busta o cartella in tela inglese con ricca iscrizione in oro e con apposite alette interne per tenere riuniti i fascicoli. Il prezzo di ciascuna di esse è di Lire **otto**.



L'ARTE DI FABBRICARE

CORSO COMPLETO DI ISTITUZIONI TEORICO-PRATICHE

PER GLI INGEGNERI, PER GLI ARCHITETTI, PER I PERITI IN COSTRUZIONE,
PER I PERITI MISURATORI E PER QUANTI SI TROVANO APPLICATI ALLA DIREZIONE
ED ALLA SORVEGLIANZA DI COSTRUZIONI CIVILI, STRADALI ED IDRAULICHE.

MECCANICA

APPLICATA

ALLE COSTRUZIONI

LAVORO AD USO

degli Ingegneri, degli Architetti, dei Periti in costruzione
e degli studenti delle Regie Scuole d'Applicazione per gli Ingegneri
e dei Corsi tecnici per Periti in costruzione

PER L'INGEGNERE

SILVIO CANEVAZZI

Professore nella Regia Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri di Bologna

TESTO



TORINO

Presso **AUGUSTO FEDERICO NEGRO**, Editore

4, Via Alfieri, 4.

1891

Proprietà letteraria ed artistica, con riserva della traduzione.



PARTE SECONDA

STATICA

DELLE

COSTRUZIONI

Sotto il nome di *Statica delle costruzioni* s'intende lo sviluppo dei procedimenti in uso per applicare le formole della *Resistenza dei materiali* alla ricerca delle dimensioni, del grado di stabilità o delle deformazioni delle varie parti, che entrano a comporre le opere, che s'incontrano nell'esercizio dell'arte dell'ingegnere. Come si è già visto nella Parte prima, i corpi resistenti nelle costruzioni si possono dividere in tre categorie, a cui corrispondono altrettante sezioni della *Statica delle costruzioni*, e precisamente:

a) Corpi in cui una dimensione è predominante sulle altre due, corrispondenti in via largamente approssimata alle linee materiali o solidi a sezione trasversale infinitesima, considerati nella *Teoria generale della resistenza dei materiali*.

b) Corpi in cui due dimensioni sono predominanti rispetto alla terza e che in certo qual modo vengono a corrispondere coi sistemi superficiali di punti materiali, anzi essi coinciderebbero precisamente con questi sistemi, se la terza dimensione venisse a diminuire fino a diventare più piccola di qualsiasi lunghezza assegnabile, ossia fino a diventare infinitesima.

c) Corpi in cui nessuna dimensione può essere considerata come predominante rispetto alle altre due.

In corrispondenza a queste tre categorie di corpi, si distinguono nella *Statica delle costruzioni* tre sezioni, cioè:

Sezione I. — *Equilibrio delle travature*;

Sezione II. — *Equilibrio delle superficie elastiche e delle volte*;

Sezione III. — *Equilibrio dei solidi elastici in genere e degli ammassi.*

Prima però di svolgere le questioni comprese in ciascuna di queste tre sezioni, crediamo opportuno far precedere un breve cenno sul calcolo degli integrali definiti, delle aree, dei momenti di primo e secondo grado e dei centri di percossa delle figure piane, perchè spesso s'incontrano nei calcoli di resistenza e troppo lungo sarebbe esporne il calcolo e le proprietà ogni qualvolta si presentano.

Trattandosi di argomenti che formano parte essenziale di materie, che nell'ordine degli studi debbono per la loro natura speciale precedere necessariamente quello della meccanica applicata alle costruzioni, ci proponiamo di fare soltanto un semplice richiamo dei teoremi, delle proprietà e dei metodi di calcolo più importanti nelle applicazioni, senza tenere divisi i vari procedimenti analitici, misti o puramente grafici già nettamente individuati nella prima parte di questo corso. Si ritiene opportuno di non dare una maggiore estensione a questo studio, poichè esso ha unicamente lo scopo di facilitare la chiara intelligenza dei metodi generali di calcolo indicati nella prima Parte della *Meccanica applicata alle costruzioni*, e delle spiegazioni necessarie a darsi per lo svolgimento delle questioni, che saranno trattate in questa seconda Parte, e non di sviluppare teorie, che si suppongono già note.

CAPITOLO I.

Calcolo delle aree ed integrazione approssimata.

Momenti statici — Momenti di secondo grado.

Centro di percossa.

1. Integrazione approssimata. — È noto che tutte le volte che non si può eseguire l'integrazione dell'espressione

$$A = \int_0^1 y dx = \int_0^1 f(x) dx$$

oppure che per evitare difficoltà di calcolo o per uniformità e semplicità di metodo non si vuole ricorrere al calcolo integrale, si può ottenere con molta approssimazione il valore di A calco-

lando l'espressione $\sum_0^n y \Delta x$ di cui $\int y dx$ è il valore limite quando

l'intervallo Δx diventa più piccolo di qualsiasi lunghezza assegnabile. L'operazione poi, aritmetica o geometrica, colla quale

si ottiene il valore di $\sum_0^n y \Delta x$ porta il nome di integrazione ap-

prossimata. Sia A_0, A_n (*Fig. 1^a, tav. I*) un diagramma riferito a due assi OX, OY siano $y_0, y_1, y_2, \dots y_n$ una serie dei valori dell'ordinata y all'estremità degli intervalli Δx nei punti di ascissa $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ od anche in modo più generale, siano $y_0, y_1, y_2, \dots y_n$ e $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots \Delta x_n$ due serie di valori (ai quali si può sempre far corrispondere un diagramma, quando si portino successivamente sull'asse delle x dei segmenti proporzionali ai Δx , ed alle loro estremità si elevino delle perpendicolari di lunghezza proporzionale ai corrispondenti valori delle y e si riuniscono con una linea a mano o con tratti di retta le estremità delle y) il calcolo

dell'espressione $\sum_0^n y \Delta x$ può eseguirsi in diversi modi:

a) Raccogliendo in un quadro a tre finche tutti i successivi valori di y nella prima, tutti i valori successivi di Δx nella se-

conda, avendo cura di scriverli nella stessa linea orizzontale del corrispondente valore di y , e finalmente scrivendo nella terza i valori numerici dei prodotti $y\Delta x$. Facendo la somma dei numeri che

trovansi nella terza colonna, questa darà il valore di $\sum_0^n y\Delta x$.

Se alcuni dei prodotti $y\Delta x$ sono positivi ed altri negativi allora sarà più opportuno comporre il quadro con cinque colonne come nell'esempio che riportiamo.

Numero d'ordine	Valori di y	Valori di Δx	Valori dei prodotti $y\Delta x$	
			positivi +	negativi —
0	y_0	Δx_0		
1	y_1	Δx_1		
2	y_2	Δx_2		
3	y_3	Δx_3		
4	y_4	Δx_4		

La prima colonna contiene i numeri progressivi, la seconda i valori di y , la terza quelli di Δx , la quarta i prodotti $y\Delta x$ positivi, la quinta pei valori $y\Delta x$ negativi. Fatte le due somme, il valore cercato vien dato dalla differenza dei due numeri trovati. È evidente che se per una circostanza qualunque, o perchè è in arbitrio del calcolatore di scegliere il valore dei fattori Δx , questi

risultano tutti uguali fra loro, l'operazione pel calcolo di $\sum_0^n y\Delta x$

riesce molto semplificata. Infatti Δx diventando fattore comune di tutti i termini della somma

$$\sum_0^n y\Delta x = \Delta x \sum_0^n y$$

cioè basta sommare tutti i valori di y e moltiplicare il risultato

per il fattore costante Δx : ciò risparmia tutte le moltipliche particolari ad ogni termine, sostituendovi una moltiplicazione sola e produce un guadagno di tempo con minore probabilità di commettere errori di calcolo, circostanza che ha molto valore per un

ingegnere (*). Quando le y della somma $\sum_0^n y \Delta x$ corrispondono

effettivamente alle ordinate di un diagramma o di una curva di equazione $y=f(x)$ e si vuole misurare l'area A compresa fra l'asse delle ascisse OX , le due ordinate estreme y_0, y_n e la curva, allora è sempre possibile prendere i valori Δx tutti eguali fra loro e quindi

$$A = \sum_0^n y \Delta x = \Delta x \sum_0^n y.$$

Il valore di $\sum_0^n y \Delta x$ al diminuire della lunghezza dell'intervallo

Δx fra due ordinate varia accostandosi come a valor limite ad

$$\int_0^n y dx \text{ e vi si avvicinerà tanto più, quanto più piccolo è } \Delta x. \text{ Nei}$$

casi particolari il valore di Δx sarà scelto in relazione coll'esattezza che si vuole ottenere; la miglior soluzione dovrà ritenersi quella, che senza condurre a calcoli eccessivamente lunghi, fornisce un'approssimazione sufficiente e non potrà essere determinata che volta per volta nelle singole questioni a seconda delle esigenze particolari del problema che si vuol risolvere, e secondochè si fa una ricerca di massima o di prima approssimazione, oppure un calcolo definitivo.

Il calcolo della formola $\sum_0^n y \Delta x$ fatto nel modo indicato superiormente quando le y sono le ordinate di una curva $y=f(x)$ o di un diagramma continuo $A_0 A_1 A_2, \dots A_n$ conduce a valutare

(*) Non bisogna dimenticare che qui si tratta di operazioni da eseguirsi correntemente da Ingegneri, da Periti, od anche da semplici calcolatori per rendersi conto di questi vantaggi. Astrattamente parlando, l'errore non dovrebbe entrare in considerazione nei calcoli, in pratica può aver luogo ed è interessantissimo diminuire le probabilità che esso avvenga e rendere facile con opportune disposizioni la verifica delle operazioni eseguite.

(Fig. 2^a, tav. I) una serie di rettangoli

$$A_0 A'_1 B_1 B_0, \quad A_1 A'_2 B_2 B_1, \dots, A_{n-1} A'_n B_n B_{n-1}$$

oppure

$$A''_0 A_1 B_1 B_0, \quad A''_1 A_2 B_2 B_1, \dots, A''_{n-1} A_n B_n B_{n-1}$$

e la differenza fra $\sum_0^n y \Delta x$ e $\int_0^n y dx$ è rappresentata dalla somma

dei triangoli mistilinei

$$A_0 A'_1 A_1, \quad A_1 A'_2 A_2, \dots, A_{n-1} A'_n A_n$$

oppure

$$A_0 A''_0 A_1, \quad A_1 A''_1 A_2, \dots, A_{n-1} A''_{n-1} A_n$$

e può essere abbastanza importante quando Δx abbia un valore notevole.

Allo scopo di diminuire l'importanza dell'errore che è inerente a questo metodo di calcolo, SIMPSON ha determinato una formola, che generalmente per valori abbastanza grandi di Δx rappre-

senti $\int_0^n y dx$ meglio e più esattamente che la semplice somma-

toria $\sum_0^n y \Delta x$. Consideriamo il tronco di curva (Fig. 3^a, tav. I)

$A_{k-1} A_k A_{k+1}$ e le tre ordinate y_{k-1}, y_k, y_{k+1} nell'ipotesi che gli intervalli Δx siano tutti uguali fra loro, ovvero che sia $B_{k-1} B_k = B_k B_{k+1}$. Pei tre punti $A_{k-1} A_k A_{k+1}$ facciamo passare un arco di parabola ad asse verticale (parallelo alla direzione delle y) e tiriamo $A_{k-1} A_{k+1}$: è evidente che l'area della figura $B_{k-1} A_{k-1} A_{k+1} B_{k+1}$ limitata dall'arco di parabola $A_{k+1} a_{k-1} A_k a_k A_{k+1}$ s'avvicina al segmento di area $B_{k-1} A_{k-1} A_k A_{k+1} B_{k+1}$ da valutare molto più che la somma dei due rettangoli $A_{k-1} A'_k B_k B_{k-1}$ e $A_k A'_{k+1} B_{k+1} B_k$ in guisa che calcolando l'area della prima figura si arriva ad un risultato molto più approssimato, e spesso

l'errore che si commette sarà assolutamente trascurabile, quando cioè la curva data per piccoli tronchi si confonda sensibilmente con archi di parabola.

L'area $B_{k-1} A_{k-1} a_{k-1} A_k a_k A_{k+1} B_{k+1}$ può essere espressa facilmente in funzione dell'intervallo Δx e delle ordinate y nel modo seguente:

$$B_{k-1} A_{k-1} A_k A_{k+1} B_{k+1} = B_{k-1} A_{k-1} A_k''' A_{k+1} B_{k+1} + \\ + A_{k-1} a_{k-1} A_k a_k A_{k+1} = 2\Delta x \left(\frac{y_{k-1} + y_{k+1}}{2} \right) + \frac{2}{3} A_{k-1} A_{k+1} \times A_k e_k$$

poichè $A_{k-1} a_{k-1} A_k a_k A_{k+1}$ è un segmento parabolico.

Dai due triangoli simili $A_k e_k A_k''', A_{k-1} A_{k+1} C_{k+1}$ si ricava che

$$A_k e_k : A_k A_k''' = A_{k-1} C_{k+1} : A_{k-1} A_{k+1}$$

da cui

$$\frac{2}{3} A_{k-1} A_{k+1} \cdot A_k e_k = \frac{2}{3} A_k A_k''' \cdot A_{k-1} C_{k+1} = \\ = \frac{2}{3} \left(y_k - \frac{y_{k-1} + y_{k+1}}{2} \right) 2\Delta x$$

ossia

$$B_{k-1} A_{k-1} a_{k-1} A_k a_k A_{k+1} B_{k+1} = \Delta x \left(y_{k-1} + y_{k+1} \right) + \\ + \frac{2}{3} \left(2y_k - y_{k-1} - y_{k+1} \right) \Delta x = \frac{\Delta x}{3} \left(y_{k-1} + 4y_k + y_{k+1} \right).$$

Se ora si prende in esame l'area totale $B_0 A_0 A_n B_n$ (Fig. 2^a, tav. I) avendo cura di dividere la lunghezza $B_0 B_n$ in un numero pari di parti uguali, considerandole consecutivamente due a due ed applicando la formola precedente si ricava

$$\text{area } B_0 A_0 A_n B_n = A = \frac{\Delta x}{3} \left[\left(y_0 + 4y_1 + y_2 \right) + \left(y_2 + 4y_3 + y_4 \right) + \right.$$

$$+ \dots (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \Big] =$$

$$= \frac{\Delta x}{3} \Big[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n \Big]$$

che è la formola data da SIMPSON per l'integrazione approssimata ed il calcolo delle aree. Questa formola serve anche pel calcolo di aree racchiuse da una linea di contorno qualsiasi; infatti siano A_0 ed A_n (*Fig. 4^a, tav. I*) i punti in cui due rette normali all'asse delle x toccano la linea che limita l'area, questa è evidentemente uguale all'area compresa fra il contorno superiore $A_0 A_1 \dots A_{n-1} A_n$ e l'asse delle x diminuita dell'area compresa fra il contorno inferiore $A_0 A'_1 A'_2 \dots A'_{n-1} A_n$ e lo stesso asse, quindi

$$\text{area } A_0 A_1 \dots A_{n-1} A_n A'_{n-1} \dots A'_1 = A =$$

$$= \frac{\Delta x}{3} \Big[(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots 4y_{n-1} + y_n) -$$

$$- (y_0 + 4y'_1 + 2y'_2 + \dots 4y'_{n-1} + y_n) \Big].$$

Qualche volta si usa nei calcoli la sommatoria semplice, ma per avere una maggior esattezza invece delle ordinate $y_1, y_2, y_3, \dots y_n$ si usano i valori medi

$$y'_1 = \frac{y_0 + y_1}{2}, \quad y'_2 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \dots \quad y'_n = \frac{y_{n-1} + y_n}{2}$$

oppure anche i valori $y'_1, y'_2, y'_3, \dots y'_n$ che risultano dai diagrammi elevando le ordinate $y'_1, y'_2, y'_3, \dots y'_n$ dai punti di mezzo degli intervalli Δx (*Fig. 5^a, tav. I*).

Tanto la formola del SIMPSON che la semplice sommatoria

$\sum_0 y \Delta x$ sono frequentemente impiegate dagli ingegneri; esse

servono poi tutte le volte che, dovendo eseguire un'integrazione, questa non si possa o non si voglia fare coi metodi forniti dal calcolo integrale. Un'avvertenza da aversi tutte le volte che si im-

piegano queste formole è quella di tener un grande ordine nella disposizione dei calcoli, in guisa che si possano sempre e con facilità verificare. A questo risultato s'arriva facilmente quando si abbia cura di raccogliere in appositi quadri o tabelle tutti i risultati parziali in modo che tutta la serie delle operazioni eseguite possa sempre essere tenuta presente. Per l'integrazione approssimata coll'uso della formola di SIMPSON può essere molto conveniente il seguente modulo:

Integrazione approssimata col mezzo della formola di SIMPSON.

Calcolo dell'integrale definito $A = \int_{x_0}^{x_n} y dx = \sum_0^n y \Delta x$

Punti di divisioni o sezioni	Valori di y	Valori semplici e multipli di y da sommare	Intervallo costante Δx	Osservazioni e valore dell'integrale
x_0	y_0	y_0	$\Delta x (=0)$	$\int_{x_0}^{x_n} y dx = \frac{S \Delta x}{3}$
x_1	y_1	$4 y_1$	Δx	
x_2	y_2	$2 y_2$	"	
x_3	y_3	$4 y_3$	"	
...	...	...	...	
x_{n-1}	y_{n-1}	$4 y_{n-1}$	"	
x_n	y_n	y_n	"	
=	—	S (somma)	Δx (intervallo)	$\int_{x_0}^{x_n} y dx = \frac{S \Delta x}{3}$

Spesso è opportuno eseguire il calcolo di $\sum_0^n y \Delta x$ con procedimento grafico, sia perchè i valori di y e di Δx sono dati graficamente e si trova conveniente fare il calcolo geometrico sullo stesso foglio di disegno, sia per avere un controllo di un calcolo

numerico fatto in precedenza, o finalmente per usare un metodo uniforme in tutte le operazioni necessarie a risolvere una determinata questione. Senza fermarci ad esporre i procedimenti di trasformazione delle aree e dei prodotti di due fattori o segmenti ad avere un lato od un fattore determinato, perchè costituiscono operazioni affatto elementari di geometria (riduzione di due o più rettangoli ad avere la stessa base oppure la stessa altezza), ci limiteremo a richiamare i metodi del fascio e del poligono funicolare come quelli

che più direttamente corrispondono al calcolo di $\sum_0^n y \Delta x$ ossia

ad un processo geometrico di integrazione.

Sia $A_0 A_1 A_2, \dots A_n$ un diagramma (*Fig. 5^a, tav. I*), che coll'asse delle x racchiude l'area $B_0 A_0 A_n B_n$, siano $y_0, y_1, y_2, \dots y_n$ le ordinate corrispondenti agli estremi $0, 1, 2, \dots n-1, n$ degli intervalli Δx portati o misurati successivamente sull'asse OX nei punti $B_1, B_2, B_3, B_n, \dots y'_1, y'_2, y'_3, \dots y'_n$ le ordinate corrispondenti ai punti di mezzo degli intervalli Δx ; il valore A dell'area $B_0 A_0 A_n B_n$ sarà dato con sufficiente approssimazione dalla formola

$$A = \sum_0^n y'_k \Delta x_k = y'_1 \Delta x_1 + y'_2 \Delta x_2 + y'_3 \Delta x_3 + \dots + y'_n \Delta x_n$$

in cui k indica un numero qualsiasi compreso fra 1 ed n . Tiriamo la retta OY normale ad OX nel punto O considerandola come asse delle Y e dagli estremi $C_1, C_2, C_3, \dots C_n$ delle ordinate $y'_1, y'_2, y'_3, \dots y'_n$ si conducano tante rette parallele ad OX , che determinano sulla OY la punteggiata $O, 1', 2', 3', \dots n'$. Da due punti O' , ed O_1 scelti sugli assi dell' x e delle y si proiettino le punteggiate $0, 1', 2', \dots n'$ ed $0, 1, 2, 3, \dots n$, nella figura OO_1 si è supposto uguale OO_1 , ed $n=4$ per non avere a considerare un numero troppo grande di segmenti, indi si conduca $\gamma_0 \alpha_1$ parallela ad $O_1 O$ e coincidente nella figura con $O_1 \alpha_1$ ad incontrare in α_1 la $C_1 1'$, da α_1 una retta parallela al raggio $O_1 1$ ad incontrare in α_2 la retta $C_2 2'$ e così successivamente per gli altri lati, fino ad aver costruito l'intero poligono $\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, \dots \alpha_n$, avendo cura di prolungare i suoi lati fino all'incontro della retta OX secondo la punteggiata $\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2, \dots \gamma_n$. In modo analogo da O si conduca la retta $O\beta_1$ parallela ad $O'_1 1'$ ad incontrare in β_1 la ordinata y_1 , da β_1 una retta parallela ad $O'_1 2'$ ad incontrare in β_2 la y_2 e così di seguito finchè sia costruito l'intero poligono $O\beta_1 \beta_2 \beta_3, \dots \beta_n$. Dai punti β_0 (coincidente con O) $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{n-1}$ si conducano delle rette

parallele all'asse OX ad incontrare in $\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3, \dots, \beta'_n$ le ordinate y che trovansi immediatamente a destra del punto β , che si considera. Eseguite queste costruzioni la similitudine esistente fra i triangoli

$$O', O1', O'1O2', O'1O3', \dots O'1On'$$

e i corrispondenti triangoli

$$\beta_0 \beta_1 \beta'_1, \beta_1 \beta_2 \beta'_2, \dots \beta_{n-1} \beta_n \beta'_n$$

permette di stabilire le relazioni seguenti

$$y'_1 \cdot \Delta x_1 = O'1 O \cdot \beta'_1 \beta_1$$

$$y'_2 \cdot \Delta x_2 = O'1 O \cdot \beta'_2 \beta_2$$

$$y'_3 \cdot \Delta x_3 = O'1 O \cdot \beta'_3 \beta_3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y'_n \cdot \Delta x_n = O'1 O \cdot \beta'_n \beta_n$$

dalle quali sommando si ricava

$$y'_1 \cdot \Delta x_1 + y'_2 \cdot \Delta x_2 + y'_3 \cdot \Delta x_3 + \dots y'_n \cdot \Delta x_n = \sum_1^n y' \Delta x = O'1 O \sum_0^n \beta'_k \beta_k$$

cioè: *L'area A compresa dal diagramma $A_0 A_1, \dots A_n$ dalle ordinate y_0 ed y_n e dall'asse delle x è uguale (equivalente) alla base di riduzione $O'1O$ moltiplicata per l'ordinata del diagramma $\beta_0 \beta_1 \beta_2, \dots \beta_n$ corrispondente all'ascissa x_n del punto estremo della curva o diagramma $A_0 A_1, \dots A_n$. In causa di questa proprietà il diagramma $\beta_0 \beta_1 \beta_2, \dots \beta_n$ dicesi diagramma integrale del diagramma $A_0 A_1 A_2, \dots A_n$, ed integrazione grafica col metodo del fascio funicolare l'operazione colla quale esso s'ottiene, perchè corrisponde alla costruzione del fascio funicolare per un sistema piano di forze parallele. Coll'operazione inversa a quella fatta per passare dal diagramma $A_0 A_1 A_2, \dots A_n$ al diagramma $\beta_0 \beta_1 \beta_2, \dots \beta_n$ si può da quest'ultimo poligono ricavare il primo; ciò costituisce l'operazione inversa della integrazione e prende il nome di *derivazione grafica*. Quest'ultima operazione nella sua esecuzione pratica non presenta certamente all'ingegnere grandi*

garanzie di esattezza in causa della difficoltà di condurre cogli istrumenti ordinari del disegnatore i raggi $O'_1, 1'_1, O'_1, 2'_1, \dots, O'_1, n'_1$, perfettamente paralleli ai piccoli lati $\beta_0, \beta_1, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n$ del diagramma, di cui si cerca la derivata; tuttavia questa costruzione potrà essere utilissima in certi casi particolari ed in modo speciale potrà convenire per lo studio dei diagrammi ottenuti sperimentalmente. Nella figura 6 (Tav. II) diamo il diagramma $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$, il suo diagramma integrale $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ non che i due diagrammi che corrispondono il primo alla derivata prima ed il secondo alla derivata della derivata, ossia alla derivata seconda della funzione, i cui valori sono rappresentati dalle ordinate y alla linea $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$. Senza bisogno di alcuna dimostrazione appare da questa figura, seguendo soltanto il processo di generazione dei vari diagrammi, che nei punti di massimo o minimo la derivata prima è nulla e la seconda è positiva o negativa secondochè si tratta di un punto di minimo o massimo, come appunto risulta dalla teoria analitica dei massimi e minimi delle funzioni ad una sola variabile.

Ritornando alla figura 5^a (Tav. I) il valore A della somma

$$\sum^n y'_k \Delta x_k \text{ può anche essere dato dal prodotto dei due segmenti}$$

$O_1 O$ e $\gamma_0 \gamma_n$; infatti in causa della similitudine dei triangoli

$$O_1 O 1, O_1 1 2, O_1 2 3, \dots, O_1 (n-1) n$$

e

$$\alpha_1 \gamma_0 \gamma_1, \alpha_2 \gamma_1 \gamma_2, \alpha_3 \gamma_2 \gamma_3, \dots, \alpha_n \gamma_{n-1} \gamma_n$$

risulta in generale che

$$y'_k \cdot \Delta x_k = O_1 O \cdot \gamma_{k-1} \gamma_k$$

ossia

$$y'_1 \cdot \Delta x_1 = O_1 O \cdot \gamma_0 \gamma_1$$

$$y'_2 \cdot \Delta x_2 = O_1 O \cdot \gamma_1 \gamma_2$$

$$y'_3 \cdot \Delta x_3 = O_1 O \cdot \gamma_2 \gamma_3$$

$$\dots$$

$$y'_n \cdot \Delta x_n = O_1 O \cdot \gamma_{n-1} \gamma_n.$$

Sommando membro a membro queste eguaglianze si ricava

$$y'_1 \Delta x_1 + y'_2 \Delta x_2 + y'_3 \Delta x_3 + \dots + y'_n \Delta x_n =$$

$$= \sum_1^n y'_k \Delta x_k = O_1 O \sum_0^n \gamma_{k-1} \gamma_k = O_1 O \cdot \gamma_0 \gamma_n.$$

Il segmento $\gamma_0 \gamma_n$ chiamasi segmento somma od integrale rappresentativo dell'area $B_0 A_0 A_n B_n$, poichè moltiplicandolo pel segmento $O_1 O$ base di riduzione è equivalente a quest'area, il poligono $\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ dicesi poligono d'integrazione o poligono funicolare, e processo di integrazione col metodo del poligono funicolare, il modo col quale si ottiene, perchè questa costruzione coincide con quella, alla quale si è condotti cercando col metodo del poligono funicolare la risultante ed il momento risultante di un sistema di forze parallele equipollenti ai segmenti Δx_k ed agenti secondo le rette $C_k K'_1, (C_1 1', C_2 2', C_3 3', \dots)$. Il punto A_n può essere un punto qualsiasi del diagramma ed i due metodi esposti pel

calcolo di $\sum_1^n y_k \Delta x_k$ sono evidentemente generalissimi e possono essere applicati tanto per il calcolo di una somma di prodotti, quanto per cercare il valore di un integrale definito fra due limiti dati.

2. Calcolo geometrico delle espressioni $\sum_1^n y_k \frac{\Delta x_k}{H_k}$ e $\sum_1^n y_k z_k \frac{\Delta x_k}{H_k}$.

— Nelle applicazioni della teoria della resistenza dei materiali si presenta spesso il caso di dover determinare il valore di espressioni aventi la forma $\sum_1^n y_k \frac{\Delta x_k}{H_k}$. Il calcolo numerico di questa

somma non può presentare alcuna difficoltà dopo quanto è stato detto precedentemente; infatti avremo $\frac{\Delta x}{H}$ invece di Δx , e tutto si

riduce ad un'operazione di divisione in più per ogni termine ed alla necessità di aggiungere due finche o colonne nei quadri o tabelle riassuntive delle operazioni eseguite o da eseguire pel calcolo della sommatoria, cioè la colonna dei valori di H_k e quella dei valori di $\frac{\Delta x_k}{H_k}$ oppure di $\frac{y_k}{H_k}$, come è indicato nel modulo seguente:

Quadro o tabella riassuntiva delle operazioni necessarie

pel calcolo del valore di $\int_0^n y \frac{\Delta x}{H} = \sum_0^n y_k \frac{\Delta x_k}{H_k}$

Punti di divi- sione o sezioni	VALORI DI			Valore dell'in- tervallo Δx	Valori dei prodotti $\frac{y}{H} \Delta x$ Se non si usa la for- mula di SIMPSON	Valori sem- plici o mul- tpli di $\frac{y}{H}$ da sommare Se si usa la formula di SIMPSON	Osservazioni e valore di $\int_0^n y \frac{\Delta x}{H} =$ $= \sum_0^n y_k \frac{\Delta x_k}{H_k}$
	y	H	$\frac{y}{H}$				
x_0	y_0	H_0	$\frac{y_0}{H_0}$	$\Delta x_0 (=0)$	$\frac{y_0}{H_0} \Delta x_0$	$\frac{y_0}{H_0}$	$\int_0^n y \frac{\Delta x}{H} =$ $= \sum_0^n y_k \frac{\Delta x_k}{H_k}$
x_1	y_1	H_1	$\frac{y_1}{H_1}$	Δx_1	$\frac{y_1}{H_1} \Delta x_1$	$4 \frac{y_1}{H_1}$	
x_2	y_2	H_2	$\frac{y_2}{H_2}$	Δx_2	$\frac{y_2}{H_2} \Delta x_2$	$2 \frac{y_2}{H_2}$	
x_3	y_3	H_3	$\frac{y_3}{H_3}$	Δx_3	$\frac{y_3}{H_3} \Delta x_3$	$4 \frac{y_3}{H_3}$	
...	...	...	...	...	...	...	
...	...	...	...	...	...	...	
x_{n-1}	y_{n-1}	H_{n-1}	$\frac{y_{n-1}}{H_{n-1}}$	Δx_{n-1}	$\frac{y_{n-1}}{H_{n-1}} \Delta x_{n-1}$	$4 \frac{y_{n-1}}{H_{n-1}}$	
x_n	y_n	H_n	$\frac{y_n}{H_n}$	Δx_n	$\frac{y_n}{H_n} \Delta x_n$	$\frac{y_n}{H_n}$	
=	=	=	=	=	$\sum_1$	S	$\int_0^n y \frac{dx}{H} =$ $= \sum_0^n y_k \frac{\Delta x_k}{H_k}$

Se invece il valore di $\sum_0^n y_k \frac{\Delta x_k}{H_k}$ si vuole determinare con metodo grafico allora può convenire il procedimento seguente: si traccino due assi ortogonali $X'X$, $Y'Y$ (Fig. 7^a, tav. III) ed a par-

tire dal punto O , in cui si intersecano, si portino verso X' i segmenti $Ox_1, Ox_2, Ox_3, \dots Ox_n$ proporzionali ad $H_1, H_2, H_3, \dots H_n$ (nella figura 7^a, n è stato fatto uguale a 5) e sulla OY a partire da O i segmenti $O\beta_1, \beta_1\beta_2, \beta_2\beta_3, \dots \beta_{n-1}\beta_n$ proporzionali a $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots \Delta x_n$, indi si tirino $\beta_1\alpha_1$ e si prolunghi ad incontrare in γ_2 la $\alpha_2\alpha'_2$ parallela ad OY' , $\beta_2\gamma_2$ e si prolunghi ad incontrare in γ_3 la $\alpha_3\alpha'_3$ parallela alla OY' e così di seguito finchè sia costruito l'intero poligono $O\alpha_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4, \dots \gamma_n$. Da un punto O'_1 scelto sull'asse OX' distante a da O si conducano tanti raggi ordinatamente paralleli ai lati $\beta_1\alpha_1, \beta_2\gamma_2, \beta_3\gamma_3, \dots \beta_n\gamma_n$, i quali determinano sulla OY la serie di punti $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots \delta_n$. Dalla similitudine dei triangoli $O\alpha_1\beta_1, OO'_1\delta_1, \beta_1\gamma_2\beta_2, \delta_1O'_1\delta_2, \dots \beta_{n-1}\gamma_n\beta_n, \delta_{n-1}O'_1\delta_n$ si ricava

$$(O\beta_1 = \Delta x_1) : H_1 :: O\delta_1 : (OO'_1 = a)$$

$$(\beta_1\beta_2 = \Delta x_2) : H_2 :: \delta_1\delta_2 : (OO'_1 = a)$$

.....

$$(\beta_{n-1}\beta_n = \Delta x_n) : H_n :: \delta_{n-1}\delta_n : (OO'_1 = a)$$

ossia

$$O\delta_1 = a \frac{\Delta x_1}{H_1}$$

$$\delta_1\delta_2 = a \frac{\Delta x_2}{H_2}$$

.....

$$\delta_{n-1}\delta_n = a \frac{\Delta x_n}{H_n}.$$

Se sull'asse OX si prendono i segmenti $O\xi_1, O\xi_2, O\xi_3, \dots O\xi_n$ rispettivamente proporzionali ad $y_1, y_2, y_3, \dots y_n$ e dai punti $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots \delta_n$ si conducono tante rette parallele ad OX indi, preso sull'asse OY $OO_1 = a$, si proiettano da esso i punti $O, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ e si conduce per O la retta $O\varepsilon_1$ parallela ad $O_1\xi_1$ ad incontrare in ε_1 la $\delta_1\varepsilon_1$, da ε_1 la $\varepsilon_1\varepsilon_2$ parallela ad $O_1\xi_2$ ad incontrare in ε_2 la retta $\delta_2\varepsilon_2$ e così successivamente finchè sia costruito l'intero poligono $O\varepsilon_1\varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$ le lunghezze $\delta_k\varepsilon_k$ sono proporzionali a

$\sum_1 y \frac{\Delta x}{H}$. Infatti dai punti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots \varepsilon_n$, si conducano tante rette

parallele ad OY ad incontrare ordinatamente in $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \dots, \varepsilon'_{n-1}$, le rette $\delta_2 \varepsilon_2, \delta_3 \varepsilon_3, \delta_4 \varepsilon_4, \dots, \delta_n \varepsilon_n$, in causa della similitudine dei triangoli $O_1 O \xi_1, O \delta_1 \varepsilon, O_1 O \xi_2, \varepsilon_1 \varepsilon'_1 \varepsilon_2, O_1 O \xi_3, \varepsilon_2 \varepsilon'_2 \varepsilon_3, \dots, O_1 O \xi_n, \varepsilon_{n-1} \varepsilon'_{n-1} \varepsilon_n$ si ottengono le proporzioni

$$(O_1 O = a) : (O \xi_1 = y_1) :: \left(O \delta_1 = a \frac{\Delta x_1}{H_1} \right) : \delta_1 \varepsilon_1$$

$$(O_1 O = a) : (O \xi_2 = y_2) :: \left(\delta_1 \delta_2 = a \frac{\Delta x_2}{H_2} \right) : \varepsilon'_1 \varepsilon_2$$

$$(O_1 O = a) : (O \xi_3 = y_3) :: \left(\delta_2 \delta_3 = a \frac{\Delta x_3}{H_3} \right) : \varepsilon'_2 \varepsilon_3$$

.....

$$(O_1 O = a) : (O \xi_n = y_n) :: \left(\delta_{n-1} \delta_n = a \frac{\Delta x_n}{H_n} \right) : \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n$$

da cui si ricava

$$\delta_1 \varepsilon_1 = y_1 \frac{\Delta x_1}{H_1}$$

$$\varepsilon'_1 \varepsilon_2 = y_2 \frac{\Delta x_2}{H_2}$$

$$\varepsilon'_2 \varepsilon_3 = y_3 \frac{\Delta x_3}{H_3}$$

.....

$$\varepsilon'_{n-1} \varepsilon_n = y_n \frac{\Delta x_n}{H_n}$$

e sommando

$$\delta_1 \varepsilon_1 + \varepsilon'_1 \varepsilon_2 + \varepsilon'_2 \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon'_{n-1} \varepsilon_n = \delta_n \varepsilon_n = \sum_0^n y_k \frac{\Delta x_k}{H_k}$$

cioè il segmento $\delta_n \varepsilon_n$ rappresenta la somma cercata.

Se finalmente si dovesse calcolare $\sum_0^n y_k z_k \frac{\Delta x_k}{H_k}$ in cui z rappresenta un numero od un segmento, è evidente che si ricade nel

primo caso trattato, poichè si deve cercare la somma dei prodotti dei segmenti $\bar{o}_1 \varepsilon_1, \varepsilon'_1 \varepsilon_2, \varepsilon'_2 \varepsilon_3, \dots \varepsilon'_{n-1} \varepsilon_n$ moltiplicati rispettivamente per $z_1, z_2, z_3, \dots z_n$, operazione, che può eseguirsi, come già è stato dimostrato, col metodo del fascio oppure del poligono funicolare. Nella figura 7^a (Tav. III) si sono proiettati sull'asse OX tutti i punti ε_k e sull'asse OY sono state prese tante lunghezze $O\lambda_1, O\lambda_2, O\lambda_3, \dots O\lambda_n$ proporzionali rispettivamente a $z_1, z_2, z_3, \dots z_n$, e dai punti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_n$ sono state condotte tante rette $\lambda_1 \nu_1, \lambda_2 \nu_2, \lambda_3 \nu_3, \dots \lambda_n \nu_n$ parallele ad OX indi, proiettato da O_1 la serie $O\varepsilon''_1, \varepsilon''_2 \varepsilon''_3, \dots \varepsilon''_n$ dei punti ε''_k , proiezioni sull'asse OX dei punti ε_k , è stato costruito un poligono funicolare che collega le rette $\lambda_k \nu_k$ deducendolo dal fascio $O_1, O\varepsilon''_1, \varepsilon''_2 \varepsilon''_3, \dots \varepsilon''_n$, che proietta il poligono dei segmenti $O\varepsilon''_1, \varepsilon''_1 \varepsilon''_2, \varepsilon''_2 \varepsilon''_3, \dots \varepsilon''_{n-1} \varepsilon''_n$ dal punto O_1 . La somma $O\mu_n$ dei segmenti $O\mu_1, \mu_1 \nu_2, \mu_2 \nu_3, \dots \mu_{n-1} \mu_n$, che i lati di questo poligono prolungati determinano sull'asse OX è propor-

zionale a $\sum_0^n y_k z_k \frac{\Delta v_k}{H_k}$ ed è equivalente a questa espressione

quando venga moltiplicata pel segmento $a = O_1 O$ base di riduzione per la costruzione del poligono funicolare $O\lambda_1 \nu_1 \nu_2, \dots \nu_n$.

OSSERVAZIONE. — Se il tracciamento dei vari fasci e poligoni conducesse a figure troppo complesse, cosa che può avvenire facilmente quando il numero dei termini della somma sia grande, si può rendere più semplice l'operazione scindendo la figura in due o tre figure separate. Sarà sempre facile metterle in rapporto l'una coll'altra quando si abbia cura di tracciare per ciascuna di esse i due assi fondamentali di riferimento $X'OX, Y'OY$. Nella figura 8^a (Tav. III), diamo un esempio di questa scomposizione costruendo separatamente alcuni dei poligoni tracciati nella figura 7^a: si è avuto cura di chiamare colle stesse lettere i punti corrispondenti delle varie figure elementari che nella figura generale si sovrapporrebbero.

3. Momento statico delle figure piane. - Baricentro. — Sia (Fig. 9^a, tav. IV) Ω una figura piana qualsiasi riferita a due assi ortogonali OX, OY giacenti nel suo piano, E un numero determinato per ogni suo punto in funzione delle coordinate x, y , $d\omega$ l'elemento di area $dx dy$, Oz una retta qualsiasi passante per O e determinata in posizione dall'angolo α , che essa fa coll'asse delle x , v la distanza $m n$ di un punto $m(x, y)$ della figura Ω dall'asse Oz : l'espressione

$\int E v d\omega$, intendendo esteso l'integrale a tutta la figura Ω , porta

il nome di *momento di primo grado* o *momento statico* della figura Ω rispetto all'asse Oz . Nelle applicazioni della teoria gene-

rale della resistenza dei materiali alla statica delle costruzioni ordinariamente E per una determinata sezione ha un valore costante, per cui $\int E d\omega v = E \int d\omega v$; in tal caso si suole chiamare momento statico della figura Ω rispetto all'asse Ox l'espressione $\int d\omega v$, intendendo che ad E si attribuisce come valore l'unità, se E avesse un valore costante sì, ma diverso dall'unità, basterà moltiplicare $\int d\omega v$ per E per avere il valore del momento $\int E v d\omega$. Dalla figura 9^a (*Tav. IV*), risulta che

$$v = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

quindi sostituendo nell'espressione superiore a v il suo valore

$$\begin{aligned} \int E v d\omega &= \int E y d\omega \cos \alpha - \int E x d\omega \sin \alpha = \cos \alpha \int E y d\omega - \\ &\quad - \sin \alpha \int E x d\omega. \end{aligned}$$

Se si indica con M il momento statico della figura, segnando al piede come indice l'indicazione dell'asse rispetto al quale esso s'intende preso, la formola superiore diventa

$$M_z = \cos \alpha M_x - \sin \alpha M_y \quad (1).$$

Se invece di due assi ortogonali si fossero presi due assi obliquangoli (*Fig. 10^a, Tav. IV*) OY' , OX allora

$$v = y' \sin(\theta - \alpha) - x' \sin \alpha = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} y - \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} x,$$

ove θ esprime l'angolo compreso dagli assi, ed x ed y rappresentano le distanze del punto m dai due assi OX ed OY' misurate ortogonalmente ai medesimi, quindi

$$M_z = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} M_x - \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} M_{y'} \quad (2).$$

Le formole (1) e (2) permettono di determinare il momento statico rispetto ad un asse qualsiasi passante per un punto del piano quando siano noti i momenti rispetto a due assi passanti pel medesimo. Dalla (1) si ricava che $M_z = 0$ quando

$$\text{tang } \alpha = \frac{M_x}{M_y} \quad (3).$$

Sia u, u_2 una retta parallela alla oz e distante u dalla medesima, in causa della definizione data di momento statico

$$M_u = \int E d\omega (u + v) = u \int E d\omega + \int E v d\omega = u \int E d\omega + M_z.$$

Se si pone $A = \int E d\omega$

$$M_u = u \cdot A + M_z \quad (4)$$

quando E è costante e si suppone uguale all'unità A è l'area della figura Ω .

Dalla (4) si deduce il seguente teorema: *Il momento statico di una figura rispetto ad un'asse è uguale al momento statico della figura stessa rispetto ad una retta parallela all'asse dato e passante per l'origine delle coordinate O , più il prodotto della distanza u fra le due rette per il valore dell'integrale $\int E d\omega$, oppure per l'area della figura stessa se E è costante ed uguale all'unità.*

Siano (Fig. 11^a, tav. IV) OX, OY due assi coordinati ortogonali, $O'X', O'Y'$ altri due assi paralleli ai precedenti e passanti pel punto O' di coordinate $(\bar{x}, \bar{y})$; pel teorema precedente

$$M_x = A \bar{y} + M_{x'}, \quad M_y = A \bar{x} + M_{y'}$$

da cui

$$M_{x'} = M_x - A \bar{y}, \quad M_{y'} = M_y - A \bar{x}$$

Se in queste equazioni si pone $M_{x'} = 0, M_{y'} = 0$ si ricava

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\int E y d\omega}{\int E d\omega} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\int E x d\omega}{\int E d\omega} \quad (5)$$

se E è costante ed uguale all'unità

$$\bar{x} = \frac{\int x d\omega}{\int d\omega} \quad \bar{y} = \frac{\int y d\omega}{\int d\omega} \quad (6)$$

i valori di $\bar{x}$ ed $\bar{y}$ sono sempre reali, quindi:

a) *Esiste sempre nel piano un punto pel quale si verifica la proprietà che i momenti statici rispetto a due assi ortogonali passanti pel medesimo sono nulli, quindi in causa della (1) sono pure uguali a zero i momenti statici della figura rispetto a qualsiasi asse passante pel punto stesso: tale punto prende il nome di baricentro della figura e dicesi asse baricentrico qualsiasi asse passante pel medesimo.*

b) *Le coordinate del baricentro sono date dal rapporto fra il momento statico della figura rispetto ad un dato asse ed il valore integrale $\int E d\omega$ relativo alla figura stessa, cioè coincidono con quelle del centro di gravità dell'area materiale Ω nell'ipotesi che la sua densità in un punto qualsiasi abbia il valore E .*

In causa di questa proprietà le espressioni baricentro e centro di gravità si corrispondono e sono riguardate dagli ingegneri come sinonime, e se E è costante, questo punto viene a coincidere col centro della figura. Se E è variabile, e variabile con legge di continuità, è evidente che per porzioni $\Delta\Omega$ abbastanza piccole della figura Ω e tali che nel loro interno E non cambi di segno e che la differenza fra il suo massimo e minimo valore non superi un determinato numero K , che potrà essere assunto tanto piccolo quanto si vuole, si può con sufficiente approssimazione supporre che E abbia un valore costante uguale al valor medio fra quelli che esso riceve nell'estensione o campo $\Delta\Omega$, e quindi che il baricentro dell'area elementare $\Delta\Omega$ coincida col centro di figura della stessa area elementare considerata.

4. **Calcolo dei momenti statici delle figure piane.** — La ricerca del momento statico di una figura importa il calcolo dell'espressione $\int E v d\omega$ oppure, per quanto è stato detto, più spesso importa il calcolo di $\int v d\omega$. Questo risultato si ottiene facilmente per le figure semplici limitate da rette oppure da curve, le cui equazioni

si prestino ad integrazioni semplici, ed anche per quelle figure che risultano dall'insieme di più figure le quali soddisfino tutte a queste condizioni. Come esempio determineremo il baricentro ed il momento statico rispetto ad un lato in un rettangolo, in un triangolo ed in un segmento parabolico.

Rettangolo. — In un rettangolo in causa della simmetria della figura il baricentro è immediatamente determinato dal punto di incontro delle due mediane (quando E ha un valore costante). I momenti statici rispetto ai suoi lati $AB=a$ e $AC=b$ (*Fig. 22^a, tav. V*) per definizione sono dati da

$$M_a = \int_0^b a dv \cdot v = a \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^b = \frac{ab^2}{2}$$

$$M_b = \int_0^a b du \cdot u = b \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^a = \frac{a^2 b}{2}.$$

Triangolo — Il baricentro di un triangolo ABC (*Fig. 24^a, tav. V*) si trova necessariamente sulle mediane: è però facile dimostrare che, detta h l'altezza CD rispetto al lato $a=AB$, esso dista $\frac{1}{3}h$ della base a e $\frac{2}{3}h$ dal vertice C misurando le distanze in senso normale alla AB . Infatti dalla figura (24), ponendo $z=ln$, si ricava $z:a=h-y:h$ quindi, continuando ad attribuire ai soliti simboli lo stesso valore,

$$M_a = \int_0^h z y dy = \frac{a}{h} \int_0^h (h-y) y dy = \left[\frac{a y^2}{2} - \frac{a y^3}{h \cdot 3} \right]_0^h = \frac{1}{6} a h^2$$

e per conseguenza

$$\bar{y} = \frac{M_a}{A} = \frac{\frac{1}{6} a h^2}{\frac{1}{2} a h} = \frac{1}{3} h = DG$$

cioè

$$LG = \frac{h}{3} \qquad GC = \frac{2}{3} h$$

ed il baricentro si trova sulla mediana ai due terzi contati a partire dal vertice.

Segmento parabolico. — Sia AC_2B (Fig. 35^a, tav. VII) un segmento parabolico ad asse verticale (parallelo a GY e coincidente con esso) avente per corda $AB=2a$ e per freccia $GC_2=f$ e limitato dalla parabola AC_2B , la quale per le proprietà inerenti alle parabole deve per un punto T qualsiasi soddisfare alla relazione

$$\frac{GC_2 - LT}{GC_2} = \frac{GL^2}{GB^2}$$

e quindi riguardando GX e GY come assi coordinati

$$\frac{f-y}{f} = \frac{x^2}{a^2} \text{ od anche } y = f \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right).$$

In causa della simmetria della figura il baricentro si trova necessariamente sulla retta GC_2 , quindi basterà determinare la sua distanza $G, G=\bar{y}$ dall'asse $AB=2a$. Applicando le formole trovate superiormente si ricava

$$M_a = 2 \int_0^a y^2 \frac{dx}{2} = 2 \int_0^a \frac{1}{2} f^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^2 dx = \frac{8}{15} a f^2$$

$$A = 2 \int_0^a y dx = 2 \int_0^a f \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \frac{4}{3} a f$$

$$\bar{y} = \frac{M_a}{A} = \frac{8 \cdot 3}{15 \cdot 4} \frac{a f^2}{a f} = \frac{24}{60} f = \frac{4}{10} f = 0,4 f.$$

Procedendo in modo analogo si possono determinare i momenti statici ed i baricentri di tutte le figure, che soddisfino alla condizione accennata superiormente di condurre a formole, delle quali sia possibile l'integrazione.

Se non si può o non si vuole eseguire l'integrazione esatta che dà il valore di M_z , essa può essere sostituita da un'integrazione

approssimata mediante la formola $M_z = \sum_0^n E_m \Delta \Omega v$ in cui $\Delta \Omega$ rap-

presenta una porzione elementare dell'area Ω , E_m il valor medio di E nel campo $\Delta\Omega$ e v la distanza del baricentro della figura elementare $\Delta\Omega$ dall'asse $z'z$, rispetto al quale si prende il momento (*Fig. 12^a, tav. IV*). Ordinariamente E ha sempre valori dello stesso segno, in ogni caso però, come si è già avvertito, è sottinteso che la scelta delle porzioni elementari $\Delta\Omega$ deve essere fatta in modo che il valore di E nell'interno della medesima non cangi mai segno e che l'oscillazione di questo valore non sia molto grande. Se E è costante, allora il baricentro delle figure, in cui si divide l'area Ω , coincide col loro centro di figura, quindi non è più necessario che esse siano molto piccole, ma basta che abbiano forma tale, che il loro centro sia facilmente determinabile. In generale la figura viene divisa mediante rette in triangoli, rettangoli, segmenti parabolici, poligoni regolari od in zone limitate da due rette parallele e da due tronchi delle linee di contorno secondo

chè la sua forma meglio permette. Il calcolo di $\sum_{o}^n E_m \Delta\Omega v$ o di

$\sum_{o}^n \Delta\Omega v$ rientra nel caso studiato al numero 1 e non sembra

necessario aggiungere ulteriori schiarimenti; al fattore y della for-

mola $\sum_{o}^n y \Delta x$ corrisponde v ed al fattore Δx il prodotto $E_m \Delta\Omega$,

oppure solo $\Delta\Omega$ se $E=1$, ed il calcolo numerico della sommatoria si conduce nello stesso identico modo indicato al numero 1: per semplicità e chiarezza converrà raccogliere gli elementi di calcolo in un quadro analogo a quello riportato a pagina 8.

Quanto al calcolo grafico sono interessanti le osservazioni seguenti: I fattori $\Delta\Omega$ (oppure $E_m \Delta\Omega$) essendo a due dimensioni è necessario per applicare la costruzione del numero 1 ridurli ad una base costante, affinchè possano essere rappresentati da segmenti. Ciò si ottiene facilmente con una trasformazione di aree o più semplicemente, poichè le aree $\Delta\Omega$ sono figure semplici e facilmente valutabili, ponendo $a \Delta x_1 = \Delta\Omega_1$, $a \Delta x_2 = \Delta\Omega_2$, $\dots$ $a \Delta x_n = \Delta\Omega_n$, e nel caso raro che E non fosse costante per tutta la figura

$$a \Delta x_1 = (E_m)_1 \Delta\Omega_1, \quad a \Delta x_2 = (E_m)_2 \Delta\Omega_2, \quad \dots \quad a \Delta x_n = (E_m)_n \Delta\Omega_n$$

in cui a rappresenta la base di riduzione delle aree $\Delta\Omega$, oppure la costante di proporzionalità fra i segmenti Δx ed i prodotti $(E_m) \Delta\Omega$.

Allora

$$\int E v d\omega = \sum_1^n (E_m)_k \Delta\Omega_k v_k = a \sum_1^n v_k \Delta\alpha_k$$

$$\int v d\omega = \sum_1^n \Delta\Omega_k v_k = a \sum_1^n v_k \Delta\alpha_k$$

formole, che tenuto conto del fattore costante a , corrispondono all'espressione $\sum_1^n y \Delta x$ studiata al numero 1 quando, si faccia $y=v$, e che si calcolano nello stesso modo.

Sia Ω (*Fig. 13^a, tav. IV*) la figura, di cui si vuol calcolare il momento statico rispetto all'asse zz' . Si divida la figura Ω in tante porzioni elementari $\Delta\Omega$ mediante rette parallele all'asse zz' ; nei casi speciali in cui la figura possa esser divisa in rettangoli, triangoli, ecc., di cui si sappia determinare il centro di figura e che E sia costante, si adotta quest'ultima divisione invece di quella generale e valevole in ogni caso indicata precedentemente (divisione della figura in zone o striscie mediante rette parallele all'asse zz'), perchè conduce a considerare un minor numero di termini nella sommatoria. Siano $G_1, G_2, \dots G_n$ (nella figura $n=6$) i centri di figura delle aree $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \dots \Delta\Omega_n$, sopra una retta $z_1 z'_1$ parallela a zz' si prendano successivamente i segmenti (supponendo $E=1$)

$$\alpha_0 \alpha_1 = \frac{\Delta\Omega_1}{a}, \quad \alpha_1 \alpha_2 = \frac{\Delta\Omega_2}{a}, \quad \dots \quad \alpha_{n-1} \alpha_n = \frac{\Delta\Omega_n}{a}$$

e da un polo O distante b dalla retta $z_1 z'_1$, si proiettino i punti $\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2, \dots \alpha_n$. Dai punti $G_1, G_2, \dots G_n$ si conducano tante rette $G_1 \beta_1, G_2 \beta_2, \dots G_n \beta_n$ parallele a zz' , e sulle medesime si costruisca un poligono funicolare $\beta_1 \beta_2 \beta_3, \dots \beta_n$ deducendolo dal poligono dei segmenti $\alpha_0 \alpha_1, \alpha_1 \alpha_2, \dots \alpha_{n-1} \alpha_n$ e si prolunghino i suoi lati ad incontrare in $\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2, \dots \gamma_n$ l'asse zz' , seguendo il procedimento indicato al numero 1 (*Pag. 16 e 17*) per il calcolo di-

$\sum_1^n y \Delta x$ col metodo del poligono funicolare: il segmento $\gamma_0 \gamma_n$ è proporzionale al momento statico cercato. Infatti per quanto è

stato detto al numero 1

$$b \cdot \gamma_0 \gamma_n = \sum_1^n \alpha_{k-1} \alpha_k \cdot v_k$$

quindi

$$ab \cdot \gamma_0 \gamma_n = a \sum_1^n \alpha_{k-1} \alpha_k \cdot v_k = \sum_{k=1}^{k=n} v_k \cdot a \cdot \alpha_{k-1} \alpha_k = \sum_{k=1}^{k=n} v_k \Delta \Omega_k$$

Dalla figura (13) in causa della similitudine dei triangoli $\gamma_0 R \gamma_n$, $\alpha_0 O \alpha_n$ si ricava $\alpha_0 \alpha_n \times \bar{V} = b \times \gamma_0 \gamma_n$ e moltiplicando per la base di riduzione a

$$ab \cdot \gamma_0 \gamma_n = M_s = \bar{V} \cdot a \cdot \alpha_0 \alpha_n = \bar{V} \cdot A.$$

Questa relazione ci permette di determinare subito l'asse baricentrico parallelo a $z z'$, infatti se per R punto d'incontro dei lati estremi del poligono funicolare conduciamo una retta RN parallela a $z z'$ per essa $\bar{V}=0$ quindi anche $M=0$ e il baricentro della figura si troverà necessariamente sulla RN . La retta RN chiamasi asse di momento nullo e qualche volta dicesi anche retta risultante, perchè coincide colla risultante di un sistema di forze o segmenti P paralleli a $z z'$ applicati ai punti G ed equipollenti ordinatamente ai segmenti $\alpha_k \alpha_{k+1}$, infatti l'ordinata V_1 della risultante di un tal sistema sarebbe data, come è noto, da

$$V_1 = \frac{\sum P v}{\sum P} = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{k-1} \alpha_k \cdot v_k}{\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{k-1} \alpha_k} = \frac{a \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{k-1} \alpha_k \cdot v_k}{a \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{k-1} \alpha_k} = \frac{M}{A} = \bar{V}.$$

Da queste proprietà si ricava immediatamente un metodo per la ricerca del baricentro di una figura piana: si determinino due assi di momento nullo, il loro punto d'incontro è il baricentro cercato. Se la figura ha un asse di simmetria questo è necessariamente anche asse di momento nullo (nell'ipotesi che E abbia un valor costante) perchè ad ogni elemento d'area, che dà luogo ad un momento positivo rispetto all'asse di simmetria, ne corrisponde

un altro il cui momento è uguale e di segno contrario al primo; in tal caso basta determinare un altro asse di momento nullo diverso dall'asse di simmetria per avere il baricentro cercato. Se poi esistono due assi di simmetria della figura, allora il baricentro è il punto d'incontro dei medesimi.

Nel caso generale la ricerca del baricentro può farsi nel modo seguente: si divida la figura data Ω (*Fig. 14^a, tav. IV*) in tante aree elementari $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \dots, \Delta\Omega_n$ (nel caso della figura $n=4$) e si determinino i baricentri $G_1, G_2, \dots, G_n$ delle medesime. A partire da O sopra due assi scelti arbitrariamente (d'ordinario ortogonali) si prendano successivamente tanti segmenti α_k, α_{k+1} tali che sia

$$\alpha_0 \alpha_1 = \alpha'_0 \alpha'_1 = \frac{\Delta\Omega_1}{a}, \alpha_1 \alpha_2 = \alpha'_1 \alpha'_2 = \frac{\Delta\Omega_2}{a} \dots, \alpha_{n-1} \alpha_n = \alpha'_{n-1} \alpha'_n = \frac{\Delta\Omega_n}{a}$$

(a base di riduzione delle aree) e si proiettino da un polo O_1 le due serie di punti α (od anche da due poli diversi O_1 ed O'_1 si proiettino le due serie dei punti α), per ognuno dei punti G_k si facciano passare due rette $G_k \beta_k$ e $G_k \beta'_k$ parallele agli assi OX ed OY e sulle medesime si costruiscano due poligoni funicolari deducendoli dai fasci $O_1, \alpha_0 \alpha_1, \dots, \alpha_n, O'_1, \alpha'_0 \alpha'_1, \alpha'_2 \alpha'_3, \dots$ (nella figura 14^a i punti O_1 ed O'_1 coincidono) e si determinino i punti R ed R' in cui i lati estremi dei due poligoni si intersecano. Se per R' si conduce una retta parallela ad OY e per R una parallela ad OX ad intersecarsi in G , G è il baricentro della figura, poichè per esso passano due assi di momento nullo diversi. Se gli assi OX ed OY sono ortogonali allora si può evitare di costruire uno dei due fasci di centro O_1 ed O'_1 conducendo i lati del primo poligono funicolare paralleli ai raggi $O_1 \alpha_1, O_1 \alpha_2, \dots, O_1 \alpha_n$ e quelli del secondo invece perpendicolari agli stessi raggi.

5. Momenti di secondo grado e momenti d'inerzia delle figure piane. —

Sia Ω una figura piana riferita come al numero 3 a due assi OX, OY ortogonali e giacenti nel suo piano (*Fig. 15^a, tav. V*), $d\omega$ l'elemento d'area $dx dy$ corrispondente al punto qualsiasi m , Ox ed Ox' due assi passanti per O e determinati dagli angoli α ed α' che essi fanno coll'asse delle x, u e v le distanze del punto m da questi due assi, E una funzione ad un sol valore delle coordinate x ed y del punto m . L'espressione

$$\int E d\omega u v = I_{xx'}$$

in cui l'integrale s'intende esteso a tutta la figura Ω , dicesi momento di secondo grado, momento centrifugo od anche prodotto d'inerzia relativo ai due assi Oz , Oz' . Se i due assi coincidono in una sola retta Oz allora $\alpha' = \alpha$, $u = v$ e l'espressione superiore diventa

$$\int E d\omega v^2 = I_z$$

che prende il nome di momento d'inerzia della figura rispetto all'asse Oz . Come appare dalle formole trovate nella parte prima, capitoli IV e V, queste quantità ed espressioni analoghe e che si possono facilmente ridurre ad avere questa stessa forma, sebbene non si riferiscano direttamente a sezioni piane, ma piuttosto a punti isolati od a linee continue, entrano spessissimo nei calcoli della resistenza dei materiali ed in generale nei problemi più comuni, E ha un valore costante, quindi per una considerazione analoga a quella fatta al numero 3 riguarderemo in generale $E = 1$ ed allora il momento centrifugo e quello d'inerzia prendono la forma

$$I_{zz'} = \int d\omega uv \quad I_z = \int d\omega v^2.$$

Nei numeri che seguono studieremo le proprietà di questi momenti specialmente nell'ipotesi $E = 1$, poichè ciò è quanto si verifica ordinariamente nei problemi usuali che si presentano all'ingegnere; nei casi eccezionali in cui E vari da punto a punto, dopo quanto è stato detto intorno ai momenti statici, sarebbe facilissimo tener conto della sua variazione ed i teoremi che dimostreremo non sarebbero sensibilmente alterati. Supponiamo l'asse Oz' normale all'asse Oz allora

$$\alpha' = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

e dalla figura 15^a (Tav. V) si ricava

$$v = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

$$u = y \sin \alpha + x \cos \alpha$$

quindi

$$\begin{aligned} I_{zz'} = \int E d\omega uv &= \int E d\omega (y \cos \alpha - x \sin \alpha) (y \sin \alpha + x \cos \alpha) = \\ &= \sin \alpha \cos \alpha \left[\int E d\omega y^2 - \int E d\omega x^2 \right] - \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\int E d\omega y^2} \right\} (7)$$

$$\left. \begin{aligned} -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int E d\omega xy &= \sin \alpha \cos \alpha (I_x - I_y). \\ -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) I_{xy} &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (I_x - I_y) - \cos 2\alpha I_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} I_z &= \int E v^2 d\omega = \int E d\omega (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 = \cos^2 \alpha \int E d\omega y^2 + \\ &+ \sin^2 \alpha \int E d\omega x^2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int E d\omega xy = \cos^2 \alpha I_x + \\ &+ \sin^2 \alpha I_y - \sin 2\alpha I_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (8).$$

Se si ricorda dalla trigonometria che

$$\sin 2\alpha = \frac{\operatorname{tang} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 2\alpha}} \quad \cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 2\alpha}}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 2\alpha}}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 2\alpha}}$$

le formole (7) ed (8) possono anche scriversi nel modo seguente:

$$\left. \begin{aligned} I_{xx'} &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (I_x - I_y) - \cos 2\alpha I_{xy} = \\ &= \frac{I_x - I_y}{2} \frac{\operatorname{tang} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 2\alpha}} - \frac{I_{xy}}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 2\alpha}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} I_z &= \cos^2 \alpha I_x + \sin^2 \alpha I_y - \sin 2\alpha I_{xy} = \frac{I_x + I_y}{2} + \\ &+ \frac{I_x - I_y - 2 I_{xy} \operatorname{tang} 2\alpha}{2\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 2\alpha}} \end{aligned} \right\} \quad (10).$$

La formola (7) mostra come $I_{xx'}$ abbia sempre un valore finito quando I_x , I_y , I_{xy} siano tali, e come esso varia con legge di conti-

nuità al variare di α passando dal positivo al negativo o viceversa; vi sarà quindi un valore di α per cui $I_{zz'}=0$, valore che si otterrà ponendo

$$\frac{(I_x - I_y) \operatorname{tang} 2\alpha - 2I_{xy}}{2\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 2\alpha}} = 0$$

ossia sarà $I_{zz'}=0$ quando $\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$.

Derivando il valore di I_z rispetto ad α ed uguagliando allo zero la derivata per cercare per quali valori di α I_z diventi massimo o minimo si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{dI_z}{d\alpha} &= +2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha d(I_y - I_x) + 2(\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) dI_{xy} = \\ &= \operatorname{sen} 2\alpha (I_y - I_x) - 2\cos 2\alpha I_{xy} = 0 \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (11)$$

come precedentemente, ossia

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{arc tang} = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \right) \\ \alpha_2 &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left(\operatorname{arc tang} = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \right). \end{aligned}$$

Sostituendo il valore (11) di $\operatorname{tang} 2\alpha$ nella (10) tenendo conto del doppio segno del radicale e chiamando con I_1 ed I_2 i due valori corrispondenti di I_z risulta

$$\left. \begin{aligned} \frac{I_1}{I_2} &= \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{I_x - I_y - \frac{4I_{xy}^2}{I_x - I_y}}{2\sqrt{1 + \frac{4I_{xy}^2}{(I_x - I_y)^2}}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \\ &\pm \frac{1}{2} \frac{(I_x - I_y)^2 - 4I_{xy}^2}{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 - 4I_{xy}^2} \end{aligned} \right\} (12).$$

Cioè: *Esistono sempre due assi ortogonali passanti per il punto qualunque O, pei quali il prodotto d'inerzia è uguale a zero; tali assi corrispondono identicamente a quelli per cui I_x prende un valor massimo o minimo e vengono detti assi principali d'inerzia relativi al punto O, uno porta il nome di asse principale maggiore e l'altro asse principale minore secondo che I_x prende il massimo valore I_1 , od il minimo I_2 . I valori massimo e minimo I_1 ed I_2 di I_x sono le radici di un'equazione di secondo grado e precisamente della equazione*

$$I^2 - (I_x + I_y)I - I_{xy}^2 = 0.$$

Se si prende la derivata seconda di I_x rispetto alla variabile α

$$\frac{d^2 I_x}{d\alpha^2} = 2 \cos 2\alpha (I_y - I_x) - 4 \sin 2\alpha I_{xy}$$

dal suo segno si dedurrà facilmente quale dei due valori di α conduce ad un momento d'inerzia massimo e quale invece ad un momento d'inerzia minimo.

Se si prendono come assi coordinati gli assi principali d'inerzia allora $I_{xy} = 0$ e si ricorda che

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

la (12) prende le forme seguenti

$$\begin{aligned} I_x = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha &= I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(I_1 + I_2) + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}}(I_1 - I_2) = I_1 - (I_1 - I_2) \sin^2 \alpha \end{aligned} \quad (13).$$

Se i due momenti principali d'inerzia hanno ugual valore, cioè se $I_1 = I_2 = I$ allora

$$I_z = I \cos^2 \alpha + I \sin^2 \alpha = I (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = I$$

$$I_{zz'} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha (I_x - I_y) = \frac{1}{2} \sin 2\alpha (I - I) = 0$$

cioè: Il momento d'inerzia rispetto ad un asse qualsiasi passante per il punto O ha un valore costante, il prodotto d'inerzia rispetto ad una coppia qualsiasi di assi ortogonali passanti per O è costantemente uguale a zero quando i valori I_1 ed I_2 dei momenti principali d'inerzia sono uguali fra loro.

Quando il prodotto d'inerzia rispetto a due assi Oz ed Oz' è uguale allo zero essi diconsi assi coniugati. È facile trovare la condizione perchè ciò si verifichi. Siano (Fig. 15^a, tav. V) Oz ed Oz' , due assi passanti per O determinati dagli angoli α e β , che fanno coll'asse delle x , y ed u , le distanze di un punto m qualsiasi della figura Ω da Oz e Oz' , e supponiamo inoltre che gli assi coordinati OX ed OY coincidano colle direzioni degli assi principali di inerzia in guisa che $I_x = I_1$, $I_y = I_2$, $I_{xy} = 0$.

Dalla figura (15) si ricava

$$v = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

$$u = x \sin \beta - y \cos \beta$$

quindi, essendo $I_{xy} = \int E d\omega xy = 0$,

$$\begin{aligned} I_{zz'} &= \int E u_1 v d\omega = \int E d\omega (y \cos \alpha - x \sin \alpha) (x \sin \beta - y \cos \beta) = \\ &= \sin \alpha \cos \beta \int E d\omega xy + \cos \alpha \sin \beta \int E d\omega xy - \\ &\quad - \sin \alpha \sin \beta \int E d\omega x^2 - \cos \alpha \cos \beta \int E d\omega y^2 = \\ &= -\sin \alpha \sin \beta I_y - \cos \alpha \cos \beta I_x \end{aligned}$$

affinchè $I_{zz'}$ sia uguale allo zero dovrà essere

$$-\sin \alpha \sin \beta I_y = \cos \alpha \cos \beta I_x$$

ossia

$$-\operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta = \frac{I_x}{I_y} = \frac{I_1}{I_2} \quad (14).$$

Segue da ciò

Che due assi coniugati d'inerzia sono sempre separati dagli assi principali,

Che gli assi principali sono assi coniugati d'inerzia,

Che se i momenti principali d'inerzia sono uguali fra loro, tutte le coppie di assi ortogonali passanti per O sono assi coniugati d'inerzia.

6. Teorema di trasposizione. — *Il momento d'inerzia di una figura rispetto ad un asse qualsiasi è uguale al momento di inerzia della figura, rispetto ad un asse parallelo passante pel baricentro della figura, più il prodotto della sua area per il quadrato della distanza d fra i due assi. Il prodotto d'inerzia di una figura rispetto a due assi qualsiasi è uguale al prodotto d'inerzia rispetto a due assi paralleli passanti pel baricentro, più il prodotto della sua area per il rettangolo delle distanze d e d_1 fra gli assi paralleli.*

Sia Ω una figura piana (Fig. 16^a, tav. V), G il suo baricentro, Gz_1 e Gz'_1 due assi passanti per G ed ordinatamente paralleli agli assi Oz ed Oz' , d e d_1 le distanze fra gli assi Oz e Gz_1 , ed Oz' e Gz'_1 , v ed u le distanze di un punto m della figura Ω da Oz ed Oz_1 , v_1 ed u_1 le distanze dello stesso punto m dagli assi Gz_1 e Gz'_1 ,

$$\begin{aligned} I_{zz'} &= \int d\omega uv = \int d\omega (d+v_1) (d_1+u_1) = dd_1 \int d\omega + \\ &+ d \int d\omega u_1 + d_1 \int d\omega v_1 + \int d\omega u_1 v_1 \\ I_z &= \int d\omega v^2 = \int d\omega (d+v_1)^2 = d^2 \int d\omega + \\ &+ 2d \int d\omega v_1 + \int d\omega v_1^2 \end{aligned}$$

ma $\int d\omega = A$ area della figura Ω , $\int v_1 d\omega = 0$, $\int u_1 d\omega = 0$ perchè sono i momenti statici della figura rispetto a rette passanti pel baricentro, $\int d\omega v_1 u_1 = I_{z_1 z'_1}$, $\int d\omega v_1^2 = I_{z_1}$

quindi

$$I_{zz'} = I_{z_1 z'_1} + d d_1 A \quad (15)$$

$$I_z = I_{z_1} + d^2 A \quad (16)$$

che è quanto si voleva dimostrare.

OSSERVAZIONE. — Se E fosse variabile da punto a punto allora A non sarebbe più l'area della figura Ω , ma il valore dell'integrale $\int E d\omega$ ed il punto G sarebbe quello, le cui coordinate $\bar{u}$ e $\bar{v}$ sarebbero date dalle relazioni

$$\bar{u} = \frac{\int E u d\Omega}{\int E d\Omega} \quad \bar{v} = \frac{\int E v d\Omega}{\int E d\Omega}.$$

7. **Elisse d'inerzia.** — Chiamasi raggio di girazione di una figura una retta ρ tale che il suo quadrato moltiplicato per l'area A della figura stessa (o per $\int E d\omega$ se E è diverso dall'unità e variabile da punto a punto) è uguale al momento d'inerzia. Se I_z è il momento d'inerzia rispetto all'asse zz'

$$\rho_z^2 = \frac{I_z}{A}$$

in seguito a questa definizione prendendo come assi coordinati gli assi principali d'inerzia, la (13) diventa

$$I_z = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \sin^2 \alpha =$$

$$= A \rho_1^2 \cos^2 \alpha + A \rho_2^2 \sin^2 \alpha = A \rho_z^2$$

e dividendo per A

$$\rho_z^2 = \rho_1^2 \cos^2 \alpha + \rho_2^2 \sin^2 \alpha.$$

Se sulla Oz a partire dal punto O si prende una lunghezza On tale che sia $On = \frac{D}{\sqrt{I_z}}$ (Fig. 17^a, tav. V), in cui D è una co-



stante arbitraria e si indicano con x ed y le coordinate del punto n

$$\cos \alpha = \frac{x}{On} = x \frac{\sqrt{I_z}}{D}$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{On} = y \frac{\sqrt{I_z}}{D}$$

Sostituendo a $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ questi valori nella (13) si ottiene

$$I_z = x^2 \frac{I_1 I_z}{D} + y^2 \frac{I_2 I_z}{D}:$$

se si fa $D = \rho_1^2 \rho_2^2$ e si toglie I_z fattor comune si ottiene

$$\frac{x^2}{\rho_2^2} + \frac{y^2}{\rho_1^2} = 1 \quad (17)$$

equazione che rappresenta un'ellisse riferita ai suoi assi, i cui diametri variano in relazione al variare del momento d'inerzia intorno all'asse, che coincide in direzione col diametro che si considera. Questa curva porta il nome di ellisse d'inerzia e se il punto O coincide col baricentro G della figura, allora essa dicesi *ellisse centrale* d'inerzia e fornisce un'idea esatta del modo, col quale variano i momenti d'inerzia rispetto agli assi passanti per un punto.

Gli assi coniugati d'inerzia sono diametri coniugati nell'ellisse centrale. Infatti se si chiamano con α' e β' gli angoli che due diametri coniugati fanno coll'asse delle x in una ellisse riferita ai suoi assi ρ_1 e ρ_2 è noto che

$$\tan \alpha' \tan \beta' = \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}.$$

Superiormente si è dimostrato, che due assi coniugati d'inerzia passanti per O e determinati mediante gli angoli α e β che essi fanno con uno degli assi principali d'inerzia debbono soddisfare alla relazione (14) in cui si può trascurare il segno — se si considerano due assi separati dagli assi principali d'inerzia; ossia deve verificarsi la relazione

$$\tan \alpha \tan \beta = \frac{I_1}{I_2}.$$

Ma $I_1 = A \rho_1^2$, $I_2 = A \rho_2^2$, quindi

$$\operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta = \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} = \operatorname{tang} \alpha' \operatorname{tang} \beta' \quad (18)$$

cioè se $\alpha' = \alpha$ anche $\beta' = \beta$ e le direzioni di due assi coniugati d'inerzia sono anche direzioni di diametri coniugati nell'ellisse d'inerzia e formano come questi ultimi un fascio in involuzione, quindi:

a) Gli elementi o direzioni coniugate si corrispondono in doppio modo;

b) Esiste sempre una coppia di direzioni coniugate ad angolo retto, che coincide colle direzioni degli assi dell'ellisse d'inerzia e quindi cogli assi principali d'inerzia;

c) Se esiste più di una coppia di direzioni coniugate ortogonali allora tutte le coppie di direzioni coniugate sono ad angolo retto e l'ellisse d'inerzia si cangia in un circolo.

Nell'ellisse d'inerzia il raggio di girazione rispetto ad un diametro è uguale al semidiametro coniugato moltiplicato per il seno dell'angolo θ compreso dai medesimi. Infatti sia $ABCD$ l'ellisse d'inerzia riferita ai suoi assi AB , CD (Fig. 18^a, tav. V), Onz la direzione di un diametro, On' il semidiametro coniugato

e θ l'angolo $n'On$. Si è visto superiormente che $I_z = \frac{D}{On^2} = \frac{A \rho_1^2 \rho_2^2}{On^2}$,

ma per una proprietà dell'ellisse due semidiametri coniugati On ed On' soddisfano alla relazione

$$On \times On' \sin \theta = \rho_1 \rho_2$$

quindi

$On = \frac{\rho_1 \rho_2}{On' \sin \theta}$ valore che sostituito nella relazione superiore da

$$I_z = \frac{D}{On} = \frac{A \rho_1^2 \rho_2^2}{\frac{\rho_1^2 \rho_2^2}{On'^2 \sin^2 \theta}} = A \cdot On'^2 \sin^2 \theta = A \rho_z^2$$

cioè

$$\rho_z = On' \sin \theta \quad c. d. d.$$

È noto che in un ellisse il luogo dei punti d'incontro delle tangenti all'ellisse colle normali condotte ad esse dal fuoco F è un circolo $CEDH$, che ha per diametro l'asse maggiore (Fig. 19^a,

tav. V). Si costruisca questo circolo prendendo CD come diametro e, condotto l'asse qualunque Oz , si tracci la perpendicolare ad Oz passante pel fuoco F e si prolunghi fino ad incontrare il circolo $CEDF$ in n'_1 , per n'_1 passerà la tangente all'ellisse condotta pel punto n' estremo del diametro coniugato ad On , quindi

$$n'_1 p_1 = n' p = p_z.$$

I punti analoghi a p_1 cadono necessariamente sulla circonferenza del circolo avente per diametro FO .

Se si dovesse cercare invece il momento d'inerzia rispetto all'asse z_1 , z'_1 , parallelo ad Oz basterebbe prolungare la Fp_1 fino ad incontrare z_1 , z'_1 in p_2 , ribaltare la lunghezza $p_1 n'_1$ in $p_1 n'_2$ e congiungere n'_2 con p_2 ; la retta $n'_2 p_2$ è il raggio di girazione rispetto all'asse z_1 , z'_1 .

Infatti pel teorema di trasposizione

$$I_{z_1} = I_z + A d^2 = A (\overline{p_1 p_2}^2 + \overline{p_1 n'_1}^2) = A \overline{p_2 n'_2}^2 \quad \text{c. d. d.}$$

8. Circoli d'inerzia. — Il tracciamento dell'ellisse centrale d'inerzia presenta sempre una certa difficoltà e non offre tutte quelle garanzie di esattezza, che in molti casi possono interessare. Per evitare questo inconveniente il MOHR consiglia di far dipendere la determinazione dei vari raggi di girazione da un circolo invece che da un'ellisse, poichè, essendo esso costruibile col compasso, si può essere sicuri di raggiungere tutta quella esattezza, che il disegnatore può ragionevolmente sperare di poter conseguire.

Supponiamo ancora di avere (*Fig. 20^a, tav. V*) la figura Q riferita a due assi coordinati ortogonali coincidenti cogli assi principali d'inerzia passanti pel baricentro, *esistono sempre due punti F , F' pei quali i momenti d'inerzia rispetto a tutti gli assi passanti pei medesimi sono uguali fra loro*. Supponiamo di indicare con a e b le coordinate di un punto, che soddisfi alla condizione enunciata, due assi qualunque ortogonali passanti pel medesimo sono necessariamente coniugati d'inerzia (Num. 6 e 7) quindi se si immaginano due assi FX'_0 ed FY'_0 passanti per i medesimi e paralleli agli assi OX ed OY dovrà essere

$$I_{x'y'} = \int d\omega x' y' = \int d\omega (x-a)(y-b) = abA + \int d\omega xy = 0$$

$$\int x d\omega = 0, \int y d\omega = 0 \text{ perchè sono i momenti statici della figura}$$

rispetto a due assi baricentrici, per ipotesi $\int d\omega \cdot xy = 0$ perchè

gli assi delle x e delle y sono gli assi principali d'inerzia, quindi, essendo $A \neq 0$, dovrà essere $ab=0$, cioè il punto od i punti, che soddisfano alla condizione imposta, giacciono sopra uno degli assi principali d'inerzia. Indichiamo con d la distanza del punto F dal baricentro O , perchè I_x sia uguale a I_y , deve verificarsi la condizione $I_1 = I_2 + A d^2$ in cui A rappresenta l'area della figura, quindi

$$d = \pm \sqrt{\frac{I_1 - I_2}{A}} = \pm \sqrt{\rho_1^2 - \rho_2^2}$$

da cui risulta essere necessario che I_1 sia maggiore di I_2 perchè il radicale abbia un valore reale, cioè *i punti cercati si trovano necessariamente sull'asse principale d'inerzia maggiore* che nel caso presente supporremo essere OX ; essi sono in numero di due F ed F' e sono equidistanti dal baricentro O (Fig. 20^a, tav. V). Se sull'asse principale d'inerzia minore Oy si prende una lunghezza $OC = \rho_2$ e fatto centro in C con raggio uguale a ρ_1 si taglia l'asse maggiore in F ed F' , questi due punti sono i punti cercati, in fatti

$$OF = -OF' = \sqrt{CF^2 - OC^2} = \sqrt{\rho_1^2 - \rho_2^2}.$$

In questi punti i momenti d'inerzia rispetto a qualsiasi asse passante pei medesimi hanno un valore costante, (Num. 5) l'ellisse d'inerzia si cangia in un circolo, che prende il nome di circolo d'inerzia, ed i due punti F ed F' vengono detti fuochi di inerzia.

Sia Ox un asse qualunque baricentrico, per F conduciamo le due rette FN ed Fz' , una normale e l'altra parallela ad Ox , in causa del teorema di trasposizione

$$\begin{aligned} I_x = A \rho_z^2 = I_{x'} - A \times FN^2 &= A (\overline{FA'}^2 - \overline{FN}^2) = A (\overline{FA_1}^2 - \overline{FN}^2) = \\ &= A \times \overline{A_1 N}^2 \end{aligned}$$

da cui si ricava dividendo per A

$$\rho_z = A_1 N = \frac{1}{2} A_1 B_1$$

cioe: *I raggi di girazione rispetto agli assi baricentrici sono uguali alle semicorde che il circolo d'inerzia intercetta sui medesimi.*

Sia $z'z'$ un asse qualsiasi nel piano, dal punto F conduciamo una normale al medesimo PFN (*Fig. 20^a, tav. V*) ad incontrare in N la Oz condotta pel baricentro parallelamente a $z'z'$ e sia A_1 il punto in cui quest'ultima interseca il circolo di inerzia, la retta PA_1 è il raggio di girazione corrispondente all'asse $z'z'$. Infatti pel teorema di trasposizione

$$\left. \begin{aligned} I_{z'} &= I_z + A \cdot \overline{PN}^2 = A(\rho_z^2 + \overline{PN}^2) = \\ &= A(\overline{NA_1}^2 + \overline{NP}^2) = A \cdot \overline{PA_1}^2 = A\rho_{z'}^2 \end{aligned} \right\} (19).$$

Dal punto F' conduciamo la $F'P'$ normale all'asse $z'z'$ ad incontrarlo in P' e poniamo

$$FP = PN - FN = e$$

$$F'P' = P'N' + F'N' = e'.$$

In causa dell'eguaglianza dei due triangoli $OF'N'$, OFN , $F'N' = FN$ inoltre $PN = P'N'$ perchè lati opposti di un rettangolo quindi

$$\begin{aligned} \rho_{z'}^2 &= \overline{PA_1}^2 = \overline{PN}^2 + \overline{NA_1}^2 = \overline{PN}^2 + \overline{FA_1}^2 - \overline{FN}^2 = \overline{FA_1}^2 + \\ &+ (PN - FN)(PN + FN) = \overline{FA_1}^2 + PF(P'N' + F'N') = \\ &= \overline{FA_1}^2 + PF \times P'F' = \rho_1^2 + ee' \end{aligned}$$

e moltiplicando per A area della figura (o valore dell'integrale $\int E d\omega$ se E ha un valore variabile da punto a punto della figura)

$$A\rho_{z'}^2 = I_{z'} = A\rho_1^2 + Aee' = I_1 + A \cdot ee' \quad (20).$$

Questa relazione permette di determinare immediatamente gli assi principali d'inerzia per un punto S del piano: si congiunga il punto S del piano con F' ed F (*Fig. 21^a, tav. V*), si faccia passare per S un asse qualsiasi Sz^1 e si tirino le due rette normali ad esso $FP = e$ ed $F'P' = e'$, perchè Sz' sia asse principale d'inerzia bisogna $I_{z'}$ sia un massimo od un minimo fra i valori possibili, cioè che

$$I_{z'} = I_1 + Aee' = I_1 + A \cdot FS \times F'S \sin \alpha \sin (180 - \beta - \alpha) =$$

$$= I_1 + A \times FS \times F'S \sin \alpha \sin (\beta + \alpha)$$

riceva un valore massimo o minimo. I_1 , A , FS , $F'S$ sono quantità costanti, quindi dovrà essere

$$\frac{d(\sin \alpha \sin (\beta + \alpha))}{d\alpha} = \cos \alpha \sin (\beta + \alpha) + \sin \alpha \cos (\beta + \alpha) = 0$$

da cui

$$\sin (2\alpha + \beta) = 0$$

ossia

$$2\alpha + \beta = 180 \quad \alpha = \frac{180 - \beta}{2} = \gamma$$

cioè *gli assi principali pel punto S bisecano gli angoli formati dalle due rette SF ed SF' prolungate.*

Se si indica con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distanza di un punto m di una figura piana Ω da un punto fisso O , che ordinariamente è il baricentro della figura stessa, chiamasi momento polare d'inerzia della figura rispetto al punto O l'espressione $\int E d\omega r^2$ intendendo l'integrale esteso a tutta la figura Ω . Indicando con I_p questa quantità e supponendo riferita la figura a due assi ortogonali passanti pel punto O

$$I_p = \int E d\omega r^2 = \int E d\omega (x^2 + y^2) = \int E d\omega x^2 + \int E d\omega y^2 = I_x + I_y$$

nel caso che la figura data sia un circolo e che il punto O coincida col centro del medesimo $I_x = I_y$ e quindi

$$I_p = 2I_x = 2I_y = 2I.$$

La stessa proprietà ha luogo anche pel quadrato, poichè prendendo come assi i due assi principali d'inerzia, ossia le due mediane

$$I_x = I_y = I_1 = I_2 = I$$

quindi anche in questo caso

$$I_p = 2I.$$

OSSERVAZIONE. — Il momento d'inerzia ed il prodotto d'inerzia constando della somma di tanti elementi della forma $E d\omega v^2$, $E d\omega uv$ tutti i teoremi enunciati superiormente si verificano tanto che si tratti di una sola ed unica figura, oppure di un sistema di due o più figure, soltanto in questo caso gli integrali o le sommatorie dovranno essere spezzate in tanti integrali o somme separate quante sono le figure che si considerano. Ciò risulta evidente dal fatto che in tutti i teoremi dimostranti non si è mai introdotto o fatto uso della condizione che gli elementi $E d\omega$ dovessero essere contigui e succedentisi con legge di continuità; essi sono un risultato analitico, rappresentabile anche geometricamente, dell'ipotesi fatta di prendere i momenti di secondo grado rispetto a due assi distinti o sovrapposti delle quantità $E d\omega$, quindi tutto quanto è stato detto è valido anche quando si considerasse un sistema finito di punti, ai quali si supponessero inerenti determinate quantità $E d\omega = \Delta E$ come potrebbero essere, masse, forze o segmenti.

9. Calcolo dei momenti d'inerzia delle figure piane. — La determinazione del valore dei momenti e dei prodotti d'inerzia delle figure

piane importa il calcolo delle espressioni $\int E d\omega v^2$ ed $\int E d\omega uv$

oppure delle espressioni, che con molta approssimazione si possono riguardare come equivalenti, $\Sigma \Delta \Omega v^2$ e $\Sigma \Delta \Omega uv$. Se per avventura il valore di E non fosse o non si potesse riguardare come costante, allora, come nel caso dei momenti statici, all'elemento $d\omega$ bisognerebbe sostituire negli integrali $E d\omega$ ed alle aree elementari $\Delta \Omega$, nelle sommatorie il prodotto $E_m \Delta \Omega$, in cui E_m esprime il valor medio di E entro il campo dell'area elementare $\Delta \Omega$, avendo cura di scegliere le aree elementari in modo che nel loro interno E non cambi di segno e possibilmente tali che la differenza fra il massimo e minimo valore di E sia sufficientemente piccola in relazione all'approssimazione che si vuol raggiungere. Il calcolo di queste espressioni potrà essere fatto al solito in tre modi diversi:

- a) Eseguendo le integrazioni indicate;
- b) Impiegando l'integrazione approssimata per sommatorie;
- c) Ricorrendo all'integrazione grafica ed in modo speciale usando il poligono od il fascio funicolare.

Si può sempre usare il primo metodo quando la figura sia limitata da una linea tale che, espresso y in funzione di x o viceversa, la funzione che trovasi sotto il segno $\int$, sia integrabile,

oppure quando la figura possa scindersi in tante figure parziali, per ciascuna delle quali si verifichi questa condizione. I teoremi dimostrati antecedentemente, e quello di trasposizione in modo speciale, permettono di determinare i momenti d'inerzia rispetto ad un asse qualsiasi quando siano noti quelli rispetto agli assi principali d'inerzia passanti pel baricentro della figura, quindi avviene d'ordinario che soltanto a questi si suole restringere la ricerca, sebbene qualche volta possa interessare, in causa della forma della figura oppure del problema che si vuol risolvere, di fare la ricerca diretta del momento d'inerzia rispetto ad un asse non passante pel baricentro. Crediamo opportuno di riportare alcuni esempi di determinazione del valore del momento d'inerzia scegliendo le figure più semplici e che più spesso s'incontrano nella risoluzione dei problemi della statica delle costruzioni.

a) *Rettangolo.* — Sia $ABCD$ un rettangolo (*Fig. 22^a, tav. V*) conduciamo le due rette mediane XX' , YY' , il punto G sarà il baricentro ed GX ed GY gli assi principali d'inerzia, perchè essi sono assi di simmetria della figura. Indicando al solito con $I_x = I_1$ e $I_y = I_2$ i momenti d'inerzia rispetto agli assi GX ed GY e ponendo $BD = b$, $AB = a$, $d\omega = dx dy$ sarà

$$I_x = I_1 = \int y^2 dy dx = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2 dy \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx = a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy =$$

$$= a \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{1}{12} ab^3$$

$$I_y = I_2 = \int x^2 dx dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2 dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy =$$

$$= b \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} = \frac{1}{12} ba^3.$$

Se si indica con I_a il momento rispetto al lato AB pel teorema di trasposizione

$$I_a = I_x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 A = \frac{1}{12} a b^3 + \frac{b^2}{4} a b = \frac{1}{3} a b^3$$

ed analogamente $I_b = \frac{1}{3} b a^3$.

Se con I_z si rappresenta il momento rispetto ad una retta qualsiasi Gz passante per G e con α l'angolo che essa fa coll'asse GX

$$\begin{aligned} I_z &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha = \frac{A}{12} (b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha) = \\ &= \frac{ab}{12} (b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha). \end{aligned}$$

Se $a=b$, ossia se il rettangolo è un quadrato, allora

$$I_x = I_y = I_1 = I_2 = I = \frac{1}{12} a^4$$

ed il momento polare I_p

$$I_p = I_x + I_y = 2I = \frac{1}{6} a^4.$$

Se si volesse calcolare il prodotto d'inerzia rispetto ai due lati $AB=a$ ed $AC=b$ esso risulterebbe

$$I_{ab} = \int_0^b y dy \int_0^a x dx = \frac{a^2}{2} \int_0^b y dy = \frac{a^2 b^2}{4}.$$

Rispetto agli assi GX e GY il prodotto d'inerzia è uguale allo zero perchè essi sono assi principali d'inerzia.

b) *Triangolo*. — Sia ABC (*Fig. 24, tav. V*) un triangolo e poniamo il lato $AB=a$ e l'altezza CD uguale ad h , il momento d'inerzia I_a rispetto al lato AB , ricordando che $ln = z \frac{a}{h} (h-y)$, è dato da

$$I_a = \int dx dy y^2 = \int_0^h y^2 z dy = \int_0^h y^2 \frac{(h-y)}{h} a dy =$$

$$= \int_0^h a y^2 dy - \frac{a}{h} \int_0^h y^3 dy = \frac{a h^3}{3} - \frac{a h^3}{4} = \frac{a h^3}{12}.$$

Se pel baricentro G ed il vertice C del triangolo si fanno passare due assi Gx e Cx' , i momenti d'inerzia I_x ed $I_{x'}$ rispetto a questi due assi in causa del teorema di trasposizione sono dati da

$$I_x = I_a - A \frac{h^2}{9} = \frac{1}{12} a h^3 - \frac{a h^3}{18} = \frac{1}{36} a h^3$$

$$I_{x'} = I_x + A \frac{4h^2}{9} = \frac{1}{36} a h^3 + \frac{4a h^3}{18} = \frac{9}{36} a h^3 = \frac{1}{4} a h^3.$$

c) *Parallelogramma.* — Sia $ABCD$ un parallelogramma (Fig. 23^a, tav. V) $AB = a$ e poniamo l'altezza $DH = h$ e la diagonale $AC = c$, pel baricentro G conduciamo Gx parallela ad AB

$$I_x = \int d\omega y^2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} a dy y^2 = a \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{1}{12} a h^3.$$

Il momento d'inerzia rispetto alla diagonale AC , I_c , si ricava facilmente dalla osservazione che esso è la somma dei momenti d'inerzia dei due triangoli ABC , ADC rispetto alla base comune AC , quindi dette h' ed h'' le altezze dei due triangoli ed osservando che $h' = h''$

$$I_c = \frac{1}{12} c h'^3 + \frac{1}{12} c h''^3 = 2 \times \frac{1}{12} c h'^3 = \frac{c h'^3}{6}.$$

d) *Figure derivabili dal rettangolo.* — Sotto questo nome comprendiamo certe figure, molto usate nelle costruzioni quali forme delle sezioni delle travature resistenti specialmente a flessione; esse sono dette sezioni a doppio T semplice o composto, a piattabande semplice, a **C**, *Zorès*, a **Z** e ad **U**, e sono rappresentate schematicamente nelle figure 25^a, 26^a, 27^a, 28^a, 29^a, 30^a, 31^a (Tav. VI) cioè senza l'arrotondamento, che ordinariamente esse ricevono agli angoli, nel passaggio al laminatoio della trave intera o dei diversi ferri, che la compongono. Queste figure si possono derivare dal rettangolo formato dai loro lati esterni togliendo uno o

più rettangoli di dimensioni più piccole all'interno delle medesime, quindi il loro momento d'inerzia è uguale al momento d'inerzia del rettangolo primitivo diminuito del momento d'inerzia dei rettangoli dedotti, oppure alla somma dei momenti d'inerzia delle porzioni di figura, che nel loro insieme compongono l'intera sezione. Per brevità d'esposizione riteniamo indicato con I_x ed I_y i momenti d'inerzia rispetto agli assi XX' , YY' segnati sulle singole figure, con G il baricentro e con a , b , a' , b' , a'' , b'' , ecc., le lunghezze pure segnate sulle diverse sezioni. Ritenendo nel calcolo dei momenti d'inerzia il criterio indicato superiormente, risulta:

a) Sezione a piattabande (*Fig. 25^a, tav. VI*)

$$I_x = \frac{1}{12} a (b^3 - b'^3)$$

$$I_y = \frac{1}{12} (b - b') a^3.$$

b) Sezione a doppio T (*Fig. 26^a, tav. VI*)

$$I_x = \frac{1}{12} (ab^3 - a'b'^3)$$

$$I_y = \frac{1}{12} (b - b') a^3 + \frac{1}{12} b' (a - a')^3.$$

c) Sezione a doppio T composto (*Fig. 27^a, tav. VI*)

$$I_x = \frac{1}{12} (ab^3 - a'b'^3 - a''b''^3 - a'''b'''^3)$$

$$I_y = \frac{1}{12} \left[(b - b') a^3 + (b' - b'') (a - a')^3 + (b'' - b''') (a - (a' + a''))^3 + b''' (a - (a' + a'' + a'''))^3 \right].$$

d) Per le sezioni rappresentate nelle figure 28^a, 29^a, 30^a (*Tav. VI*) l'espressione del momento d'inerzia intorno all'asse XX' è evidentemente uguale a quella corrispondente alle sezioni a doppio T, cioè

$$I_x = \frac{1}{12} (ab^3 - a'b'^3)$$

e non sembra necessario dare un'analisi più particolareggiata. Quanto alla sezione ad **U** (*Fig. 31^a, tav. VI*) il suo momento d'inerzia I_x rispetto all'asse $X_1 X_1'$ coincidente col lato inferiore della figura è dato da

$$I_x = \frac{1}{3} (a - a') b^3 + \frac{1}{3} a' \times (b - b')^3.$$

e) *Circolo*. — Sia $ABCD$ un circolo di raggio r riferito a due assi XX' , YY' passanti pel baricentro G , essendo entrambi assi di simmetria sono anche necessariamente assi principali d'inerzia; per un teorema antecedente (Num. 8) $I_p = I_1 + I_2$, ma nel caso del circolo $I_1 = I_2 = I$, dunque

$$I = \frac{1}{2} I_p.$$

D'altra parte essendo l'elemento d'area espresso in coordinate polari $\rho d\rho d\omega$ (ρ raggio vettore, ω anomalia)

$$I_p = \int d\omega \rho^2 = \int_0^r \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\omega = 2\pi \frac{r^4}{4} = \frac{\pi r^4}{2}$$

quindi

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I_p = \frac{\pi r^4}{4}.$$

Se invece di un circolo si deve cercare il momento d'inerzia di una corona circolare, detto r il raggio del circolo esterno, r' il raggio del circolo interno, d e d' i corrispondenti diametri (*Fig. 33^a, tav. VI*)

$$I_x = I_y = I = \frac{\pi}{4} (r^4 - r'^4) = \frac{\pi}{64} (d^4 - d'^4).$$

Questa stessa espressione vale per il momento d'inerzia di una lamiera ondulata rispetto all'asse XX' considerando l'ampiezza di un'intera onda (*Fig. 34^a, tav. VII*) poichè la somma dei momenti d'inerzia dei due quadranti inferiori all'asse XX' è equivalente al momento d'inerzia della semi corona circolare rappresentata nella figura con linee punteggiate.

f) *Ellisse*. — Il momento d'inerzia di un'ellisse rispetto ad un asse si può facilmente dedurre da quello del circolo: siano $ABCD$

(Fig. 35^a, tav. VII) un'ellisse, $AB=2a$ e $CD=2b$ i suoi assi, AC_1B il circolo costruito sull'asse maggiore riguardato come diametro, $y=LN$ le ordinate rispetto ad AB dell'ellisse, $y'=LP$ le ordinate rispetto alla stessa retta del circolo. È noto che

$$y' : y :: a : b$$

da cui

$$y = \frac{b}{a} y'$$

quindi indicando con I_x il momento d'inerzia dell'ellisse rispetto all'asse AB

$$I_x = \int y^2 d\omega = \frac{b}{a} \int y'^2 d\omega = \frac{b}{a} \pi \frac{a^4}{4} = \frac{\pi b a^3}{4}.$$

Per una corona ellittica (Fig. 36^a, tav. VII) nella quale a e b siano i semiassi del contorno esterno, a' e b' i semiassi del contorno interno

$$I_x = \frac{\pi}{4} (a^3 b - a'^3 b').$$

Segmento parabolico. — Sia AC_2B (Fig. 35^a, tav. VII) un segmento parabolico ad asse verticale di equazione (Vedi num. 4)

$$y = f \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$$

in cui f è la freccia GC_2 ed a la semicorda GB ; il suo momento d'inerzia I_x rispetto alla corda AB è dato immediatamente dalla somma dei momenti d'inerzia di tutte le striscie verticali infinitamente sottili analoghe ad $\alpha\beta\gamma\delta$, ossia da

$$I_x = 2 \int_0^a \frac{1}{3} f^3 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^3 dx = \frac{32}{105} a f^3.$$

Quando si debba determinare il momento d'inerzia di una figura piana, o di un sistema di figure piane limitate da un contorno qualsiasi, può presentarsi facilmente il caso che anche scomponendo in parti la figura il calcolo esatto dell'integrale $\int d\omega y^2$ riesca molto dif-

ficile od anche assolutamente impossibile: in tal caso si può ricorrere all'integrazione approssimata per sommatorie. Si divida in striscie o zone di piccola altezza la figura (*Fig. 37^a, tav. VII*) mediante tante rette normali all'asse zz' , rispetto al quale si cerca il momento d'inerzia, avendo cura, se si vuole applicare la formola di SIMPSON, che il numero delle zone o striscie riesca un numero pari e che esse abbiano tutte un'altezza Δx costante. Ciò premesso se si indicano con $y_0', y_1', y_2', \dots y_n'$, le ordinate del contorno superiore, con $y_0'', y_1'', y_2'', \dots y_n''$ quelle del contorno inferiore, per le cose dette superiormente usando la formola di Simpson

$$\begin{aligned} I_z &= \int y'^3 \frac{dx}{3} - \int y''^3 \frac{dx}{3} = \sum_0^n y'^3 \frac{\Delta x}{3} - \sum_0^n y''^3 \frac{\Delta x}{3} = \\ &= \frac{\Delta x}{9} \left[y_0'^3 + 4y_1'^3 + 2y_2'^3 + \dots + 4y_{n-1}'^3 + y_n'^3 \right] - \\ &- \frac{\Delta x}{9} \left[y_0''^3 + 4y_1''^3 + 2y_2''^3 + \dots + 4y_{n-1}''^3 + y_n''^3 \right]. \end{aligned}$$

Invece di questo processo indicato dal PONCELET, si può ricorrere all'altro proposto dal BELANGER di decomporre la figura in striscie o zone mediante tante rette parallele all'asse zz' (*Fig. 38^a, tav. VII*) che indicheremo coi simboli $\Delta \Omega_1, \Delta \Omega_2, \dots \Delta \Omega_n$. Siano $G_0, G_1, G_2, \dots G_n$ i corrispondenti centri di gravità, $y_1, y_2, \dots y_n$ le ordinate dei medesimi rispetto all'asse zz' , $x_1, x_2, \dots x_n$ le lunghezze medie parallelamente all'asse zz' delle varie striscie, $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_n$ i raggi di girazione delle aree $\Delta \Omega_k$ rispetto agli assi paralleli a zz' e passanti pei baricentri di ogni zona G_k , k esprimendo un numero intero qualsiasi compreso fra 1 ed n , $\Delta y_1, \Delta y_2, \dots \Delta y_n$ le altezze delle varie striscie: in causa del teorema di trasposizione

$$I_z = \sum_0^n \left[\Delta y_k x_k y_k^2 + \Delta y_k x_k \rho_k^2 \right]$$

ma trattandosi di zone, assimilabili per forma ad un parallelogramma, la cui altezza Δy deve riguardarsi come molto piccola, $\rho_k^2 = \frac{1}{12} \Delta y_k^2$ è a più forte ragione da considerarsi come quantità piccolissima e trascurabile, quindi in via approssimata, sce-

gliando opportunamente il valore di Δy , si può ritenere

$$I_z = \sum_0^k \alpha_k \Delta y_k y_n^2 = \frac{\Lambda x}{3} \left(x_0 y_0^2 + 4x_1 y_1^2 + \right. \\ \left. + 2x_2 y_2^2 + \dots + 4x_{n-1} y_{n-1}^2 + x_n y_n^2 \right).$$

Supponiamo ora che si debba calcolare il prodotto d'inerzia I_{xy} della figura rispetto ai due assi OX_1 ed OY_1 ; (*Fig. 38^a, tav. VII*) se si indicano con $y_1, y_2, \dots y_k \dots y_n, x_1, x_2, \dots x_k \dots x_n$ le coordinate dei baricentri G_k di ogni striscia, con $f_1, f_2, \dots f_k \dots f_n$ le aree corrispondenti delle varie zone supposte abbastanza piccole, con $(I_{xy}')_k$ il prodotto d'inerzia della striscia k^{esima} rispetto a due assi passanti pel suo baricentro e paralleli ad OX_1 ed OY_1 , allora in causa del teorema di trasposizione (*Vedi num. 6, Parte II*) sarà

$$I_{xy} = \sum_0^n \left[f_k x_k y_k + (I_{xy}')_k \right] = f_1 x_1 y_1 + f_2 x_2 y_2 + f_3 x_3 y_3 + \\ + \dots + f_n x_n y_n + (I_{xy}')_1 + (I_{xy}')_2 + \dots + (I_{xy}')_n. \quad (21).$$

Osservazione. — Negli esempi precedenti sono sempre state considerate figure cogli angoli netti e ben determinati, però nei casi pratici gli angoli delle varie figure o sezioni che si impiegano sono spesso smussati od arrotondati in modo analogo a quello rappresentato per una sezione ad angolo nella figura 43 (*Tav. IX*). A seconda dell'importanza di tali smussature rispetto all'area totale della figura e dell'esattezza, che si vuole ottenere nel calcolo, si prescinde affatto da tali leggere modificazioni della forma ed estensione dell'area della sezione che si considera, oppure se ne tiene conto dividendo la figura in aree elementari in modo che il momento d'inerzia corrisponda esattamente al contorno reale della sezione, come è indicato con linee punteggiate nella sezione ad angolo rappresentata nella figura sopra citata (*Fig. 43, tav. IX*).

10. Determinazione geometrica del momento d'inerzia e del prodotto d'inerzia di una figura piana. — Sia $ABCDEFH$ una figura qualsiasi (*Fig. 39^a, tav. VIII*) di cui si vuole determinare il momento d'inerzia rispetto all'asse XX' con procedimento geometrico. Si

divida la figura in zone o striscie elementari con rette parallele all'asse XX' e siano $G_1, G_2, G_3, \dots G_k \dots G_n$ i baricentri delle diverse zone, $y_1, y_2, y_3, \dots y_k \dots y_n$ le ordinate rispetto all'asse XX' dei baricentri G_k , $f_1, f_2, f_3, \dots f_k \dots f_n$ le aree delle zone considerate, $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots \rho_k \dots \rho_n$ i loro raggi di girazione rispetto ad assi passanti pei punti G_k e paralleli all'asse XX' . In causa del teorema di trasposizione

$$I_x = \sum_1^n \left(f_k y_k^2 + f_k \rho_k^2 \right) = \sum_1^n f_k \left[\sqrt{y_k^2 + \rho_k^2} \sqrt{y_k^2 + \rho_k^2} \right] = \\ = \sum_1^n f_k y_k \left(y_k + \frac{\rho_k^2}{y_k} \right).$$

Il poligono funicolare e delle forze permettono di costruire abbastanza semplicemente entrambe le espressioni, cioè

$$I_x = \sum_1^n f_k \sqrt{y_k^2 + \rho_k^2} \sqrt{y_k^2 + \rho_k^2} \quad (22)$$

$$I_x = \sum_1^n f_k y_k \left(y_k + \frac{\rho_k^2}{y_k} \right) \quad (23).$$

Si prolunghino le ordinate dei baricentri delle singole striscie di una quantità $\sqrt{y_k^2 + \rho_k^2} - y_k$. Ciò si ottiene facilmente prendendo sulla retta $G_k V_k$ parallela ad XX' e passante per G_k una lunghezza $G_k g_k$ uguale a ρ_k indi, fatto centro nel punto x_k piede della ordinata y_k , si ribalti in $G'_k x_k$ sulla y_k stessa prolungata la lunghezza $x_k g_k$: come appare dalla figura 39^a (Tav. VIII). $G'_k x_k = y'_k = \sqrt{y_k^2 + \rho_k^2}$. Pei punti G'_k si tirino tante rette $G'_k \xi'_k$ parallele ad XX' e lungo le medesime si immaginino agenti forze o segmenti di intensità o lunghezza $z'_k = \frac{f_k}{a}$, in cui a rappresenta

la base comune di riduzione delle aree f_k in guisa che sia $z'_1 = \frac{f_1}{a}$,

$z'_2 = \frac{f_2}{a}, \dots z'_k = \frac{f_k}{a} \dots z'_n = \frac{f_n}{a}$. Col metodo svolto al numero 1 pel calcolo delle sommatorie usando il poligono funicolare si costruisca il poligono $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ dei segmenti $z'_1 = \alpha_0 \alpha_1, z'_2 = \alpha_1 \alpha_2, \dots z'_n = \alpha_{n-1} \alpha_n$ e scelto O_2 come polo distante b dalla

retta $\alpha_0 \alpha_n$ si deduca il poligono funicolare $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ (nella figura $n=6$) e si prolunghino i suoi lati ad intersecare in $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ l'asse XX' determinando i segmenti $z_1'' = \gamma_0 \gamma_1, z_2'' = \gamma_1 \gamma_2, \dots, z_n'' = \gamma_{n-1} \gamma_n$. Per quanto fu detto al numero 1

$$\gamma_0 \gamma_n \times b = \sum_1^n z_k' y_k' = \sum_1^n z_k' \sqrt{y_k^2 + \rho_k^2}$$

e moltiplicando i due membri dell'equazione per la costante a

$$ab \gamma_0 \gamma_n = \sum_1^n a z_k' y_k' = \sum_1^n f_k \sqrt{y_k^2 + z_k^2}.$$

Prendiamo ora un altro polo O_3 distante c dalla retta $\gamma_0 \gamma_n$ e da esso proiettiamo i segmenti z_k'' e sulle rette $G'_k \xi'_k$ costruiamo un secondo poligono funicolare $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ dedotto dal poligono $O_3, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ e prolunghiamo i suoi lati ad incontrare in $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ l'asse XX' determinandovi i segmenti $z_1''' = \varepsilon_0 \varepsilon_1, z_2''' = \varepsilon_1 \varepsilon_2, \dots, z_n''' = \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n$. Per la proprietà già accennata del poligono funicolare

$$\varepsilon_0 \varepsilon_n \times c = \sum_1^n z_k'' y_k' = \sum_1^n z_k'' \sqrt{y_k^2 + \rho_k^2}$$

e moltiplicando per le due costanti a e b

$$\begin{aligned} abc \varepsilon_0 \varepsilon_n &= abc \sum_1^n z_k''' = \sum_1^n ab z_k'' \sqrt{y_k^2 + \rho_k^2} = \\ &= \sum_1^n a z' \sqrt{y_k^2 + \rho_n^2} \sqrt{y_k^2 + \rho_n^2} = \sum_1^n f_k (y_n^2 + \rho_k^2) = I_x. \end{aligned}$$

Se le striscie hanno una piccola altezza esse possono con grande approssimazione assimilarsi ad un rettangolo di altezza Δy , quindi

$\rho_k = \sqrt{\frac{1}{12} \Delta y^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \Delta y} \cdot \frac{1}{6} \Delta y_k$ in confronto della ordinata y_k può essere trascurato, specialmente per quelle striscie che sono ad

una certa distanza dall'asse XX' , mentre la stessa cosa non può dirsi per le striscie vicine all'asse XX' , per le quali y_k ha un valore molto piccolo. Quando si possa accettare questa semplificazione si possono trascurare gli spostamenti $G_k G'_k$ e supporre le rette $G'_k \xi'_k$ coincidenti colle rette $G_k V_k$ (parallele all'asse XX' passanti pei punti G_k): in ogni caso particolare bisognerà regolarsi secondo le circostanze, cioè a seconda dell'altezza Δy delle varie zone e della esattezza, che si vuole ottenere. Se la figura intera o qualche sua parte fosse scomponibile in aree, di cui si conosca o si possa determinare facilmente il momento d'inerzia rispetto agli assi passanti per i baricentri parziali e paralleli all'asse dato, l'operazione resta molto semplificata, poichè alle molte zone si potrebbero sostituire poche figure, facilitando molto la costruzione dei diversi poligoni; il calcolo però si condurrebbe nello stesso identico modo indicato superiormente.

Il più delle volte interessa determinare il momento d'inerzia rispetto ad un asse parallelo ad una data direzione e passante pel baricentro della figura. Se questo non è noto *a priori* e se nella direzione data non esiste alcun'asse di simmetria, allora è necessario risolvere contemporaneamente le due questioni:

a) Determinare un asse baricentrico parallelo ad una direzione data.

b) Determinare il valore del momento d'inerzia rispetto all'asse trovato.

Si arriva facilmente a questo risultato calcolando l'espressione (23) del momento d'inerzia

$$I_x = \sum_1^n f_k y_k \left(y_k + \frac{\rho_k^2}{y_k} \right)$$

invece della (22), di cui ci siamo serviti nel calcolo precedente.

$$I_x = \sum_1^n f_k \sqrt{(y_k^2 + \rho_k^2)} \sqrt{(y_k^2 + \rho_k^2)}.$$

Ripetiamo sulla figura Ω (Fig. 40^a, tav. VIII) la stessa divisione fatta nella figura 39^a conservando gli stessi simboli, indi si costruisca il poligono $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ come precedentemente in modo che

$$\alpha_0 \alpha_n \times a = a \sum_1^n z'_k = \sum_1^n f_k.$$

Pei punti G_k si conducano tante rette $G_k V_k$ parallele all'asse XX' , e sopra di esse si costruisca un poligono funicolare deducendolo dal poligono $O_2, \alpha_n, \alpha_1, \dots \alpha_n$ e sia R^1 il punto d'incontro dei suoi lati estremi; una retta parallela all'asse XX' e passante R^1 sarà certamente asse baricentrico della figura, poichè per essa il momento statico della figura è nullo (Num. 3). Si prolunghino i lati $\beta_0 \beta_1, \beta_1 \beta_2, \dots \beta_{n-1} \beta_n$ del poligono funicolare ad incontrare l'asse baricentrico $R^1 V^1$ nei punti $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n$ (γ_0, γ_n ed R^1 coincideranno necessariamente in un sol punto) i segmenti $z_1'' = \gamma_0 \gamma_1, z_2'' = \gamma_1 \gamma_2, \dots z_n'' = \gamma_{n-1} \gamma_n$ sono proporzionali ai momenti statici delle singole zone od aree elementari $\Delta \Omega_k = f_k$: infatti per le proprietà dimostrate al numero 1

$$z_k'' \times b = z_k' y_k$$

e moltiplicando per a

$$ab z_k'' = a z_k' y_k = f_k y_k$$

in cui y_k esprime la distanza del punto G_k dell'asse baricentrico $R^1 V^1$.

Se ora si vuole determinare il momento d'inerzia della figura rispetto all'asse $R^1 V^1$ bisogna moltiplicare ciascuno dei termini $f_k y_k$ per i fattori $y_k + \frac{\rho_k^2}{y_k}$. Applicando il metodo del poligono funicolare si può arrivare a questo risultato nel modo seguente: Si spostino parallelamente a se stesse le rette $G_k V_k$ in $G_k' V_k'$ in modo che esse distino dall'asse baricentrico di una lunghezza uguale ad $y_k + \frac{\rho_k^2}{y_k}$. Ciò si ottiene facilmente prendendo sulla $G_k V_k$ una lunghezza $G_k N_k = \rho_k$, unendo il piede x_k dell'ordinata y_k col punto N_k e conducendo da N_k una normale alla $N_k x_k$ ad incontrare in G_k' l'ordinata y_k prolungata: nel triangolo $G_k' N_k x_k$, rettangolo in N_k , l'altezza $N_k G_k'$ è media proporzionale fra i due segmenti, che il suo piede G_k' determina sull'ipotenusa, quindi

$$G_k G_k' = \frac{G_k N_k^2}{y_k} = \frac{\rho_k^2}{y_k} \quad y_k' = x_k G_k' = x_k G_k + G_k G_k' = y_k + \frac{\rho_k^2}{y_k}.$$

Dal punto O_3 distante c dalla retta $R' V'$ proiettiamo i segmenti z_k'' e sulle rette $G_k' V_k'$ si costruisca un poligono funicolare

$\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n$ deducendolo dal poligono $O_2, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ e si prolungano i suoi lati ad incontrare nei punti $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ l'asse baricentrico $R'V'$; il segmento $\varepsilon_0 \varepsilon_n = \sum z_k'''$ ($z_1''' = \varepsilon_0 \varepsilon_1$, $z_2''' = \varepsilon_1 \varepsilon_2$, $\dots, z_n''' = \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n$) è proporzionale al momento d'inerzia cercato.

Infatti per la proprietà del poligono funicolare dimostrata al numero 1

$$c \times \varepsilon_0 \varepsilon_n = c \sum_1^n z_k''' = \sum_1^n z_k'' \left(y_k + \frac{\rho_k^2}{y_k} \right)$$

e moltiplicando per la costante ab

$$\begin{aligned} abc \varepsilon_0 \varepsilon_n &= abc \sum_1^n z_k''' = \sum_1^n ab z_k'' \left(y_k + \frac{\rho_k^2}{y_k} \right) = \\ &= \sum_1^n a z_k' y_k \left(y_k + \frac{\rho_k^2}{y_k} \right) = \sum_1^n f_k y_k \left(y_k + \frac{\rho_k^2}{y_k} \right) = \\ &= \sum_1^n f_k (y_k^2 + \rho_k^2) = I_{(R'V')} \end{aligned}$$

Anche in questo caso si può osservare che se le varie zone hanno un'altezza molto piccola gli spostamenti $G_k G_k'$ sono trascurabili per quelle zone, che distano sensibilmente dall'asse $R'V'$, perchè, ρ_k^2 essendo molto piccolo, $\frac{\rho_k^2}{y_k}$ sarà piccolissimo e trascurabile, mentre non può dirsi lo stesso per le zone molto vicine al baricentro, perchè per queste, y_k essendo molto piccolo, lo spostamento $G_k G_k' = \frac{\rho_k^2}{y_k}$ può assumere valori notevoli. Se la figura Ω è tale da poter essere divisa facilmente in poche aree elementari (rettangoli, parallelogrammi, ecc.) di cui si possano facilmente determinare i baricentri parziali ed i momenti d'inerzia, allora come precedentemente l'operazione grafica resta molto semplificata diminuendo considerevolmente il numero dei segmenti z_k', z_k'', z_k''' e quello dei lati dei due poligoni funicolari. In relazione all'applicazione della teoria dei momenti di inerzia al calcolo delle travature soggette a flessione si suole prendere la base c corrispondente al secondo poligono funicolare uguale alla lunghezza, che misura la distanza fra il punto del contorno della figura più lontano dall'asse $R'V'$ e l'asse stesso.

Il metodo del fascio funicolare può pure servire per calcolare le due espressioni

$$I = \sum_1^n f_k \sqrt{y_k^2 + \rho_k^2} \sqrt{y_k^2 + \rho_k^2},$$

$$I = \sum_1^n f_k y_k \left(y_k + \frac{\rho_k^2}{y_k} \right)$$

però per questo calcolo particolare si presta meglio il poligono funicolare, quindi non svilupperemo alcun esempio potendo bastare quanto fu detto al numero 1 per indicare la via da seguire qualora si volesse ricorrere a questo procedimento. Ci limitiamo quindi ad esporre due metodi, che permettono di ottenere il momento d'inerzia come prodotto di due aree e che possono riescire utili, specialmente quando si disponga di un planimetro per la misura delle superficie; il primo è stato proposto dal professore MOHR e riposa sulle proprietà del poligono funicolare, il secondo invece potrebbe piuttosto essere considerato come affine al processo indicato sotto il nome di metodo di integrazione grafica coll'uso del fascio funicolare, sebbene la disposizione della figura sia notevolmente diversa.

Sia Ω una figura piana (*Fig. 41, tav. IX*) e sulla medesima supponiamo di aver già eseguite le stesse operazioni fatte nell'ultimo caso trattato fino alla costruzione del poligono funicolare $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ ($n=5$) coll'avvertenza di prendere per la seconda base b il valore

$$b = \frac{1}{2} \sum_1^n z_k' = \frac{\alpha_0 \alpha_n}{2}$$

e di disporre la figura in modo che il polo O_2 cada sulla normale elevata alla retta $\alpha_0 \alpha_n$ nel suo punto di mezzo.

Dalla similitudine dei due triangoli $\alpha_1 \alpha_2 O_2$ e $\gamma_1 \gamma_2 \beta_2$ (in generale $\alpha_k \alpha_{k+1} O_2$ e $\gamma_k \gamma_{k+1} \beta_{k+1}$) si ricava

$$\alpha_1 \alpha_2 : \gamma_1 \gamma_2 :: b : y_2 \quad \text{ossia} \quad b \cdot \gamma_1 \gamma_2 = y_2 \times \alpha_1 \alpha_2$$

moltiplicando i due membri di questa equazione per αy_2 si ottiene

$$a \cdot x_1 \alpha_2 \cdot y_2^2 = ab \times \gamma_1 \gamma_2 \times y_2 = a \sum_1^n z_k' \times \frac{\gamma_1 \gamma_2 \times y_2}{2}.$$

Ripetendo per gli altri triangoli $O_2 \alpha_k \alpha_{k+1}, \beta_{k+1} \gamma_k \gamma_{k+1}$ lo stesso calcolo si ricava in generale

$$a \times \alpha_k \alpha_{k+1} \times y_{k+1}^2 = a \sum_1^n z_k' \times \frac{\gamma_k \gamma_{k+1} \times y_{k+1}}{2} \quad (24)$$

ma

$$a \times \alpha_k \alpha_{k+1} = a z_{k+1}' = f_{k+1} \quad \frac{\gamma_k \gamma_{k+1}}{2} y_{k+1} = f_{k+1}'$$

in cui f_{k+1}' esprime l'area del triangolo $\beta_{k+1} \gamma_k \gamma_{k+1}$, quindi, se si pone

$$A = \sum_1^n f_k \quad A' = \sum_1^n f_k'$$

e si sommano tutte le equazioni analoghe alla (24), si ottiene

$$I_{(R'V')} = \sum_1^n f_k y_k^2 = a \sum_1^n z_k' \times \sum_1^n f_k' = A \times A'$$

cioè: *Il momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico $R'V'$ è uguale al prodotto dell'area A della figura Ω per l'area A' compresa fra il poligono funicolare $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ ed i suoi lati estremi prolungati fino ad incontrarsi in R^1 .*

Se l'asse, rispetto al quale si cerca il momento non è baricentrico, il momento d'inerzia può ancora essere rappresentato mediante il prodotto di due aree. Supponiamo di dover determinare il momento d'inerzia I_x rispetto all'asse XX' parallelo a $R'V'$ e distante h dal medesimo; in causa dal teorema di trasposizione

$$I_{(XX')} = I_{(R'V')} + A h^2 = A (A' + h^2)$$

ma nel triangolo $N_0 R' N_n$ rettangolo in R^1 ed isoscele la base è uguale al doppio dell'altezza, quindi la sua area A'' è data da h^2 ed il momento $I_{(XX')}$ risulta espresso dal prodotto dell'area A della

figura Ω per l'area compresa dal poligono funicolare $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$, i suoi lati estremi prolungati e l'asse XX' , rispetto al quale si cerca il momento, che è quanto volevasi dimostrare.

Questo metodo pel calcolo del momento d'inerzia non può dirsi esatto che quando l'altezza delle varie striscie sia molto piccola, infatti esso da

$$\sum_1^n f_k y_k^2 \quad \text{e non} \quad \sum_1^n f_k (y_k^2 + \rho_k^2);$$

se però invece del poligono funicolare $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ si considera la funicolare (oppure i tronchi di funicolare), che esso inviluppa ed alla quale (od ai quali) esso si ridurrebbe qualora le varie striscie avessero un'altezza infinitesima, allora si ottiene un risultato esatto, poichè nell'ipotesi che le varie striscie abbiano un'altezza infinitamente piccola ρ_k^2 diventa un infinitesimo di ordine superiore e quindi è trascurabile. L'area compresa fra il poligono funicolare $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ e la curva funicolare (oppure la serie di tronchi di curve funicolari) che esso inviluppa è proporzionale all'errore che si commette considerando delle striscie o zone elementari di altezza finita Δy invece che zone di altezza dy infinitamente piccola.

Supponiamo ancora divisa la figura Ω (*Fig. 41, tav. IX*) in striscie di altezza Δy (oppure dy) mediante un sistema di rette parallele all'asse XX' ed indichiamo con ξ la larghezza media $\mu\nu$ di una qualsiasi di queste striscie, indi si conduca l'asse X, X' parallelo ad XX' e distante da esso di una lunghezza c . Sull'asse X, X' si proiettino i segmenti $\mu\nu$ ortogonalmente in mn e da un punto qualsiasi O' dell'asse XX' si conducono i raggi $O'm$ ed $O'n$ ad intersecare in μ' e ν' la retta $\mu\nu$ determinando il segmento $\mu'\nu' = \xi'$. Si proietti ancora il segmento ξ' ortogonalmente sull'asse X, X' , in $m'n'$ e si tirino i raggi $O'm'$ ed $O'n'$ ad intersecare in μ'' e ν'' la retta $\mu\nu$ determinando il segmento $\mu''\nu'' = \xi''$, il luogo geometrico dei punti μ' e ν' determina una figura Ω_1 , e quello dei punti μ'' e ν'' un'altra figura Ω_2 tali che moltiplicando Ω_1 per c si ottiene il momento statico M_x della figura Ω rispetto all'asse XX' e moltiplicando l'area della figura Ω_2 per c^2 si ottiene il momento d'inerzia I_x della stessa figura Ω rispetto al medesimo asse XX' . Infatti in causa delle proprietà dei triangoli simili

$$\xi : \xi' :: c : y$$

$$\xi' : \xi'' :: c : y$$

da cui si ricava

$$\xi = \frac{c\xi'}{y}$$

$$\xi' = \frac{c\xi''}{y}.$$

Per definizione, supponendo che l'altezza delle varie striscie o zone sia molto piccola, (Vedi num. 3 e 7)

$$M_x = \Omega \bar{y} = \int \xi dy \cdot y$$

$$I_x = \Omega \rho_x^2 = \int \xi dy \cdot y^2$$

quindi, tenendo conto dei valori di ξ e ξ' trovati superiormente,

$$M_x = \Omega \bar{y} = \int \xi dy \cdot y = \int y \cdot \frac{c\xi'}{y} dy = c \int \xi' dy = c\Omega_1$$

$$I_x = \Omega \rho_x^2 = \int \xi dy \cdot y^2 = \int y^2 \cdot \frac{c\xi'}{y} dy =$$

$$= \int y^2 \frac{c^2 \xi''}{y^2} dy = c^2 \int \xi'' dy = c^2 \Omega_2$$

equazioni che dimostrano il teorema enunciato. Questo procedimento pel calcolo dei momenti statici e dei momenti d'inerzia si suole indicare col nome di metodo *delle aree ridotte*, perchè appunto riposa sulla riduzione dell'area Ω alle due aree sussidiarie Ω_1 ed Ω_2 .

Si presenta raramente il caso di dover calcolare geometricamente dei prodotti d'inerzia o momenti centrifughi; il processo però da seguire per tale operazione non è essenzialmente diverso da quello usato pel calcolo dei momenti d'inerzia, poichè in ultima analisi si deve costruire una somma di prodotti. Se si prendono le zone elementari, in cui si suppone divisa la figura data, in modo che esse risultino limitate da due rette parallele ad uno degli assi dati XX' , YY' (*Fig. 40^a, tav. VIII*) allora gli assi paralleli ad XX' ed YY' passanti pei centri di gravità G_k di ogni striscia possono essere riguardati come assi principali d'i-

inerzia per la striscia stessa (in causa della simmetria della figura ogni zona può sensibilmente essere assimilata ad un rettangolo) e nella formola (21) che dà il prodotto d'inerzia I_{xy} (Vedi parte II, pag. 52)

$$I_{xy} = f_1 x_1 y_1 + f_2 x_2 y_2 + \dots + f_n x_n y_n + \\ + (I'_{xy})_1 + (I'_{xy})_2 + \dots + (I'_{xy})_n \quad (21),$$

sono uguali a zero tutti i prodotti d'inerzia $(I'_{xy})_1, (I'_{xy})_2, \dots, (I'_{xy})_k, \dots, (I'_{xy})_n$ e rimane

$$I_{xy} = f_1 x_1 y_1 + f_2 x_2 y_2 + \dots + f_k x_k y_k + \dots + f_n x_n y_n \quad (25).$$

Sia Ω l'area di cui si vuole determinare il prodotto d'inerzia rispetto ai due assi XX' ed YY' , (*Fig. 40^a, tav. VIII*) si divida la figura in zone mediante rette parallele ad XX' e, determinati i baricentri G_k delle varie zone, si tirino le $G_k V_k$ e $G_k U_k$ parallele rispettivamente ad XX' ed YY' . Sulle rette $G_k V_k$ si costruisca il poligono funicolare $\beta_0 \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$ nel modo indicato a pagina 55 (Parte II) per la ricerca del momento d'inerzia e si prolunghino i suoi lati ad incontrare in $\gamma_0', \gamma_1', \gamma_2', \dots, \gamma_n'$ l'asse XX' . Sulla retta $Y_1 Y_1'$ parallela ad YY' si determini la serie di punti $\gamma_0'', \gamma_1'', \gamma_2'', \dots, \gamma_n''$ in modo che sia $\gamma_0'' \gamma_1'' = \gamma_0' \gamma_1', \gamma_1'' \gamma_2'' = \gamma_1' \gamma_2', \dots, \gamma_{n-1}'' \gamma_n'' = \gamma_{n-1}' \gamma_n'$ e preso O'_3 distante c' da $Y_1 Y_1'$, si proiettino i punti $\gamma_0'', \gamma_1'', \dots, \gamma_n''$ e si deduca il poligono funicolare $\varepsilon_0' \varepsilon_1' \varepsilon_2' \dots \varepsilon_n'$ coi vertici giacenti ordinatamente sulle rette $G_k U_k$. Se si prolungano i lati di questo poligono funicolare fino ad incontrare in $\varepsilon_0', \varepsilon_1', \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_n'$ l'asse YY' allora

$$\varepsilon'_{k-1} \varepsilon'_k \cdot c' = \gamma''_{k-1} \gamma_k \cdot x''_k = \gamma'_{k-1} \gamma'_k \cdot x_k$$

e moltiplicando quest'uguaglianza per $a b$

$$a b c' \cdot \varepsilon'_{k-1} \varepsilon'_k = x_k a b \cdot \gamma'_{k-1} \gamma'_k = \\ = x_k y_k a \cdot \alpha_{k-1} \alpha_k = x_k y_k a z'_k = x_k y_k f_k$$

e quindi

$$a b c' \cdot \varepsilon'_0 \varepsilon'_n = a b c' \sum_1^n \varepsilon'_{k-1} \varepsilon'_k = \sum_1^n f_k x_k y_k = I_{xy}$$

espressione che dimostra come il prodotto d'inerzia possa essere rappresentato mediante il prodotto di quattro rette usando della costruzione superiormente indicata.

11. Ricerca degli assi principali d'inerzia. — Sia Ω una figura riferita a due assi ortogonali OX ed OY (*Fig. 42^a, tav. IX*), che supporremo passanti pel baricentro O della figura; ritenendo le notazioni usate nei numeri precedenti la determinazione degli assi principali d'inerzia si riduce a calcolare mediante la formola (11) il valore dell'angolo α , che uno di essi fa coll'asse OX . Per giungere a questo risultato si determinino con uno dei metodi indicati precedentemente I_x , I_y e finalmente I_{xy} , si sostituiscano questi valori nella formola (11)

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

ed un calcolo di sua natura semplice e facile ad eseguire farà conoscere il valore cercato α_1 dell'angolo α . I valori poi dei due momenti d'inerzia principali I_1 ed I_2 si potranno ricavare dalla formola (10) sostituendo successivamente ad α i valori α_1 ed

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2} \text{ oppure dalla formola (12)}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 - 4I_{xy}^2}.$$

Invece di determinare direttamente il valore di I_{xy} molte volte si preferisce di cercare il momento d'inerzia della figura Ω rispetto ad un terzo asse Oz , (*Fig. 42, tav. IX*) che si suol prendere inclinato di 45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ sull'asse OX , e quindi ricavare il valore di I_{xy} mediante la formola (8)

$$I_z = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha I_{xy}.$$

Supponendo l'angolo $z OX = \frac{\pi}{4}$

$$\cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \quad \operatorname{sen} 2\alpha = 1$$

quindi

$$I_z = I_{45} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - I_{xy}$$

da cui

$$I_{xy} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - I_{45} = A \left[\left(\frac{\rho_x^2 + \rho_y^2}{2} \right) - \rho_{45}^2 \right]$$

e

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{I_x + I_y - 2I_{45}}{I_x - I_y} = \frac{(\rho_x^2 + \rho_y^2) - 2\rho_{45}^2}{\rho_x^2 - \rho_y^2} \quad (24)$$

formola, che può essere facilmente calcolata numericamente, oppure risolta mediante semplici costruzioni geometriche nel modo seguente. Su una retta indefinita WW' (*Fig. 42, tav. IX*) prendiamo una lunghezza $ab = \rho_x$ e dal punto a eleviamo una perpendicolare $ac = \rho_y$, indi, fatto centro in c , con raggio uguale a ρ_x tagliamo la WW' in d e poniamo $cb = h$, $ad = k$; per le note proprietà dei triangoli rettangoli:

$$h^2 = \rho_x^2 + \rho_y^2 \quad k^2 = \rho_x^2 - \rho_y^2$$

e quindi

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{h^2 - 2\rho_{45}^2}{k^2}.$$

Sia b una base arbitraria di riduzione, si ponga

$$bh' = h^2, \quad bk' = k^2, \quad bl = 2\rho_{45}^2, \quad h' - l = t$$

allora

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{h' - l}{k'} = \frac{t}{k'}.$$

Da O (*Fig. 42^a, tav. IX*) si porti verso X una lunghezza $OP = k'$, dal punto P si elevi una perpendicolare ad OX e si prenda sulla medesima $PN = t$, l'angolo NOP è l'angolo 2α . Conducendo quindi per O la OX_1 bisettrice dell'angolo NOX e la sua normale OY_1 , OX_1 ed OY_1 saranno gli assi principali d'inerzia cercati. Il valore poi dei momenti d'inerzia principali I_1 ed I_2 verrà determinato come precedentemente mediante le formole (12) del numero 5, oppure direttamente usando dei procedimenti indicati superiormente.

La ricerca degli assi principali d'inerzia può farsi anche in un altro modo: supponiamo determinati i tre raggi di girazione di una figura Ω (*Fig. 44^a, tav. IX*) rispetto a tre assi OX , OY , Oz passanti pel suo baricentro O ; pel punto O conduciamo le nor-

mali ad OX, OY, Oz e prendiamo su esse rispettivamente $OB = OB' = \rho_x, OC = OC' = \rho_y, OD = OD' = \rho_z$, dai punti B e B' conduciamo due rette parallele ad OX , da C e C' due rette parallele ad OY e finalmente da D e D' due rette parallele ad Oz . Queste sei rette debbono essere tangenti all'ellisse centrale d'inerzia, (Parte II, pag. 39) quindi servendosi del teorema di BRIANCHON si potrà costruire come involuppo di tangenti l'ellisse stessa e dalla medesima ricavare la direzione degli assi principali d'inerzia, che coincidono cogli assi dell'ellisse, le direzioni degli assi coniugati e finalmente il valore del raggio di girazione ρ intorno ad un asse qualsiasi (Num. 7).

La costruzione però di un'ellisse per tangenti o per punti non offre sempre al disegnatore tutte le garanzie, che esso può desiderare, e la determinazione degli assi può riescire alquanto incerta; ad evitare questo inconveniente si può ricorrere alla seguente costruzione, che riposa sulla proprietà degli assi coniugati di coincidere coi diametri coniugati dell'ellisse d'inerzia e quindi di formare un fascio di raggi in involuzione. Combinando fra loro le tre coppie di tangenti all'ellisse d'inerzia parallele a due a due si ottengono due parallelogrammi circoscritti alla curva e precisamente $bb'b_1b_1', cc'c_1c_1'$ le cui diagonali ob, ob_1, oc, oc_1 , costituiscono due coppie di diametri coniugati. Se si traccia un circolo qualunque di centro C_1 e passante pel punto O , centro del fascio di raggi in involuzione, i raggi $O, (b, b_1, c, c_1)$, determineranno sul circolo quattro punti $\beta, \beta', \gamma, \gamma'$ in involuzione; se si conducano le rette $\beta\beta', \gamma\gamma'$ e quante altre si vogliano, che congiungano punti corrispondenti delle serie in involuzioni $\beta, \gamma, \delta, \dots \beta', \gamma', \delta'$, tutte queste rette per una proprietà notissima dell'involuzione passeranno per un punto fisso S determinato dall'incontro delle due rette $\beta\beta', \gamma\gamma'$. Tiriamo la SC_1 e prolunghiamola ad incontrare in α ed α' il circolo di centro C_1 e per O conduciamo due raggi Oa ed Oa' passanti rispettivamente per α ed α' , questi saranno gli assi principali d'inerzia; infatti essi costituiscono una coppia di raggi o diametri coniugati e sono ad angolo retto fra loro. Se il punto S coincidesse col punto C_1 tutte le coppie di diametri coniugati sarebbero ad angolo retto e l'ellisse centrale d'inerzia si cangierebbe in un circolo. È facile vedere che il punto S cadrà sempre entro il circolo $O\beta\gamma\beta'\gamma'$ perchè nell'ellisse una coppia di diametri coniugati è sempre separata da un'altra coppia di diametri coniugati (L'involuzione non ammette raggi doppi).

La forma dell'ellisse d'inerzia ci farà conoscere quale dei due assi sia il maggiore e quale il minore, nonchè i corrispondenti raggi di girazione, che, volendo, potranno anche essere ricavati

dalla formola (12)

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2} (I_x + I_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 - 4 I_{xy}}$$

ricordando che per definizione $\rho^2 = \frac{I}{A}$.

Il circolo $O\beta\gamma\beta'\gamma'$ permette anche di determinare immediatamente la direzione coniugata ad una retta qualsiasi Od , infatti sia δ il punto in cui Od taglia il circolo $O\beta\gamma\beta'\gamma'$, tiriamo δS ad incontrare in δ' la circonferenza, $O\delta'$ è la direzione coniugata cercata.

Se si richiama la formola (18)

$$\text{tang } \alpha \text{ tang } \beta = \frac{I_1}{I_2} = \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}$$

essa permette di determinare facilmente quale dei due assi Oa od Ob sia da considerarsi come asse maggiore. Sovra un punto T dell'asse Oa si elevi una perpendicolare al medesimo e si prolunghino due diametri coniugati, per es., Oc ed Od ad incontrarla in γ_1 e γ_1' ; evidentemente i due angoli corrispondono agli angoli α e β della formola (18). Per una nota proprietà dei diametri coniugati di un'ellisse i prodotti delle distanze dei punti da essi determinati sopra una retta tangente all'estremità di un asse T dal punto di tangenza debbono essere costantemente uguali al quadrato dell'altro asse OT' ; quindi

$$\gamma_1 T \times \gamma_1' T = \overline{OT}^2 \text{ tang } \varepsilon_1 \text{ tang } \varepsilon_2 = \overline{OT'}^2.$$

Se T non è l'estremità di un asse, allora OT ed OT' non sono uguali agli assi, però sono proporzionali ad essi, quindi, costruendo una media proporzionale Tw fra $\gamma_1 T$ e $\gamma_1' T$, secondo che Tw è minore o maggiore di OT , Oa sarà o no l'asse maggiore.

Calcolati i valori dei raggi di girazione ρ_1 e ρ_2 e trovata la posizione dell'asse principale d'inerzia maggiore si possono immediatamente determinare i due fuochi d'inerzia F ed F' distanti da O della quantità $d = \sqrt{\rho_1^2 - \rho_2^2}$, i due circoli d'inerzia, e quindi i raggi di girazione ed i momenti d'inerzia rispetto a qualsiasi asse tracciato sul piano mediante le costruzioni indicate nei numeri 6, 7 ed 8.

La ricerca degli assi principali d'inerzia si suole fare ordinariamente per il baricentro della figura che si considera, perchè

nelle applicazioni sono principalmente questi due assi che occorre ricercare, ed inoltre perchè conosciuti i due assi principali baricentrici ed i fuochi d'inerzia F ed F' , si possono sempre determinare facilmente gli assi principali in un altro punto qualsiasi del piano ed il valore del momento d'inerzia della figura rispetto ad un asse qualsivoglia passante pel medesimo.

Siano OX ed OY gli assi principali d'inerzia della figura Ω passanti pel baricentro O (*Fig. 45^a, tav. IX*), F ed F' i fuochi d'inerzia A, R, S, T uno dei cerchi d'inerzia e sia C' un punto del piano, per il quale si vogliono determinare gli assi principali di inerzia. Si unisca il punto C' coi fuochi F ed F' e pel punto C' si conducano due rette $C'T$ e $C'S$ normali fra loro e bisettrici dei due angoli supplementari $F'C'F$, $F'C'F_1'$ in causa del teorema dimostrato al numero 8 $C'T$ e $C'S$ sono gli assi principali cercati. Il momento d'inerzia poi rispetto ad un asse qualsiasi $C'z'$, $I_{(C'z')}$ si ottiene con facilità applicando i teoremi e le costruzioni già esposte ai numeri 6 ed 8: $I_{(C'z')} = \Omega \rho^2_{(C'z')} = \Omega \cdot \overline{PA_1}^2$.

È però importante avvertire che le costruzioni e calcoli indicati superiormente per la ricerca degli assi principali d'inerzia corrispondenti al baricentro della figura Ω possono convenire per qualsiasi altro punto del piano, poichè le proprietà e teoremi su cui basano sono generali ed appartengono a tutti i punti del piano.

Nella tavola X (*Fig. 46*) è rappresentata la ricerca dell'ellisse centrale e del circolo d'inerzia di una figura piana dissimmetrica $\Omega = ABCDEKLMNQ$. Essa è divisa in quattro figure elementari rettangolari $f_1 = ABCD'$, $f_2 = DD'S'S$, $f_3 = SS'QE$, $f_4 = KLMN$, i cui centri di gravità sono indicati nei punti G_1, G_2, G_3, G_4 e, ridotte le aree ad una base costante a , sono indicati nella figura tre assi OX, OY ed OZ rispetto ai quali è stata eseguita la ricerca del momento d'inerzia dell'area $ABCDEKLMNQ$: la direzione OY è normale ad OX ed OZ fa un angolo di 45° colle due direzioni OX ed OY . La figura Ω non avendo assi di simmetria si sono applicate ai baricentri G delle aree elementari delle forze o segmenti proporzionali ad f_k nelle direzioni OX ed OY e, costruiti i due poligoni dei segmenti $\Sigma z'$, $[(\alpha)_1]$ ed $(\alpha)_2$, si sono dedotti i poligoni funicolari $(\gamma)_1$ e $(\gamma)_2$, che nel punto d'incontro dei loro lati estremi (γ_0, γ_4) determinano un punto per ciascuno degli assi baricentrici paralleli rispettivamente ad OX e ad OY , (Num. 4) ossia alle direzioni nelle quali si suppongono diretti i segmenti rappresentativi delle aree elementari f , e quindi, conducendo questi due assi, risulta determinato il punto O baricentro di tutta la figura Ω . Dopo ciò, seguendo il procedimento indicato nel

numero 10, si sono spostate parallelamente a se stesse le rette, secondo le quali si suppongono diretti i segmenti proporzionali alle aree f , di quantità rispettivamente uguali a $\frac{(\rho_x)_k^2}{y_k}$ ed a $\frac{(\rho_y)_k^2}{x_k}$ e, supposto agire in queste direzioni dei segmenti proporzionali a prodotti (fy) ed (fx) , sono stati determinati in $(\epsilon)_1$ ed $(\epsilon)_2$ i poligoni funicolari $\delta_0\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4\delta_5$ che danno i segmenti $\Sigma_1 z'''$ e $\Sigma_2 z'''$ proporzionali ai momenti d'inerzia intorno agli assi OX ed OY . Noto il baricentro O si è condotto per esso OZ inclinato di 45° sopra OX ed OY ed, indicata con w la distanza dei punti G dall'asse OZ , si sono tracciate delle rette parallele ad OZ e distanti dalla medesima delle quantità $w_k^1 = \sqrt{w_k^2 + (\rho_z)_k^2}$ secondo le quali si sono supposte agire dei segmenti proporzionali alle aree elementari f . Costruito in $(\alpha)_3$ il poligono $\Sigma_3 z'$ sono stati tracciati in $(\gamma)_3$ un primo poligono funicolare dedotto dal poligono $(\alpha)_3$ ed in $(\epsilon)_3$ un secondo poligono funicolare dedotto dal poligono $O_3\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \dots \gamma_n$ $(\gamma)_3$ entrambi coi vertici posti sulle stesse rette distanti $w_k^1 = \sqrt{w_k^2 + (\rho_z)_k^2}$ dall'asse Oz ; per quanto è stato detto al numero 10 il segmento $\epsilon_0\epsilon_4 = \Sigma_3 z'''$ è proporzionale al momento d'inerzia della figura intorno allo stesso asse OZ .

Per definizione $\rho^2 = \frac{I}{A}$ in cui ρ è il raggio di girazione, A l'area ed I il momento d'inerzia della figura Ω intorno ad un asse, quindi nel nostro caso (Vedi *fig. 47^a, tav. X*) ponendo $Ol = \lambda = \frac{bc}{\Sigma z'}$, si ricava

$$\rho^2 = \frac{I}{A} = \frac{abc\Sigma z'''}{a\Sigma z'} = \frac{bc\Sigma z'''}{\Sigma z'} = \lambda\Sigma z'''$$

cioè ρ è la media proporzionale fra la lunghezza λ e $\Sigma z'''$. Nella figura 47 (*Tav. X*) è rappresentata la ricerca della lunghezza $\lambda = Ol$ quarta proporzionale dopo $\Sigma z'$, b e c e dei raggi di girazioni ρ_1 , ρ_2 , ρ_{45} come medie proporzionali fra il segmento $Ol = \lambda$ e rispettivamente $\Sigma_1 z'''$, $\Sigma_2 z'''$ e $\Sigma_{45} z'''$ ricorrendo alle note proprietà delle rette parallele intersecate da rette concorrenti e della normale ad un diametro del circolo, che, come è noto, è media proporzionale fra le due porzioni del diametro stesso determinate dal suo piede.

Pel punto O in senso rispettivamente normale ad OX , OY ed OZ sono stati presi i segmenti $O\eta_1 = O\eta_1' = \rho_1$, $O\eta_2 = O\eta_2' = \rho_2$, $O\eta_3 = O\eta_3' = \rho_{45}$ e per η_1 ed η_1' si sono condotte due rette paral-

lele ad OX , per η_2 ed η_2' due rette parallele ad OY e finalmente per η_3 ed η_3' due rette parallele ad OZ : per quanto è stato detto al numero 11 l'ellisse centrale d'inerzia deve essere tangente a queste rette, e quindi è perfettamente determinata e può essere costruita con uno dei procedimenti indicati precedentemente o con altri dedotti dal teorema di BRIANCHON ed in generale dalle proprietà dell'ellisse. Determinati i tre momenti d'inerzia intorno agli assi OX , OY ed OZ , coi procedimenti geometrici indicati superiormente, oppure servendosi delle formole (11) e (12), possono essere fissate le direzioni degli assi principali, nonchè i valori dei momenti principali d'inerzia e dei corrispondenti raggi di girazione e quindi si possono calcolare, oppure trovare col mezzo delle costruzioni geometriche espote nei numeri precedenti ed indicate nella tavola X, la posizione dei due fuochi d'inerzia F ed F' nonchè il circolo d'inerzia W_1, W_2, W_3 , in guisa che il problema della determinazione dei momenti d'inerzia della figura Ω rispetto ad un asse baricentrico qualsiasi, e quindi anche per un'asse tracciato comunque nel piano, deve considerarsi come completamente risoluto.

Il procedimento indicato nella tavola X è generale e può convenire per qualsiasi altra figura; la serie poi delle operazioni da eseguire può risultare più o meno complessa dipendentemente dal maggiore o minore numero di figure elementari, in cui può essere scomposta l'area data, e dall'avere essa o no uno o più assi di simmetria. In questo esempio pel calcolo dei momenti d'inerzia ci siamo serviti del metodo usuale basato sulle proprietà dei poligoni funicolari; naturalmente gli stessi momenti d'inerzia potevano essere anche calcolati con un'altro dei procedimenti geometrici accennati superiormente, quali sarebbero ad esempio il processo di MOHR o quello delle aree ridotte, oppure finalmente potrebbero essere determinati con procedimento analitico mediante

la formola $I = \int y^2 d\omega$ od anche con processo aritmetico valutando numericamente l'espressione $\Sigma y^2 \Delta\omega$ nel modo indicato al numero 1 ed al numero 8.

12. Centri di percossa. — Sia $ABCDE = \Omega$ una figura piana (*Fig. 48^a, tav. XI*) riferita a due assi ortogonali OX , OY esistenti nel suo piano, m un punto qualsiasi della figura, E una funzione ad un sol valore (*funzione monodroma*) delle coordinate del punto m : $d\omega$ o $\Delta\omega$ l'area elementare $dx dy$, oppure $\Delta x \Delta y$, corrispondente al punto m , secondochè si prendono in considerazione elementi d'area infinitesimi, oppure soltanto relativamente molto piccoli, in guisa che gli integrali vengano sostituiti con sommatorie: il punto, le cui coordinate x_1 ed y_1 soddisfano alle condizioni

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\sum E x y \Delta \omega}{\sum E y \Delta \omega} = \frac{\int E x y d\omega}{\int E y d\omega} \\ y_1 &= \frac{\sum E y^2 \Delta \omega}{\sum E y \Delta \omega} = \frac{\int E y^2 d\omega}{\int E y d\omega} \end{aligned} \right\} (25)$$

chiamasi centro di percossa o di pressione della figura rispetto all'asse OX , che prende il nome di asse di rotazione.

Questo punto, quando E ha un valore costante, coincide colla proiezione sul piano della figura del centro di gravità di un solido cilindrico, la cui sezione retta corrisponda alla figura $ABCDE$ e sia limitato dal piano della figura Ω e da un altro piano qualsiasi passante per l'asse OX . Infatti sia λ la tangente trigonometrica dell'angolo, che questo piano fa col piano delle xy , allora z , altezza di uno qualsiasi dei cilindri elementari che compongono il solido considerato, è data da $z = \lambda y$. Se si attribuisce a tutti questi cilindretti una densità E costante, le coordinate $\bar{x}$ ed $\bar{y}$ del centro di gravità sono date (Num. 3, form. 5 e 6) da

$$\bar{x} = \frac{\sum E z x \Delta \omega}{\sum E z \Delta \omega} = \frac{\sum E \lambda y x \Delta \omega}{\sum E \lambda y \Delta \omega} = \frac{\sum E y x \Delta \omega}{\sum E y \Delta \omega} = x_1$$

$$\bar{y} = \frac{\sum E z y \Delta \omega}{\sum E z \Delta \omega} = \frac{\sum E \lambda y^2 \Delta \omega}{\sum E \lambda y \Delta \omega} = \frac{\sum E y^2 \Delta \omega}{\sum E y \Delta \omega} = y_1.$$

Anche qui sarà opportuno osservare, come già si è fatto trattando dei momenti statici e dei momenti di secondo grado, che ordinariamente E ha un valore costante in tutta l'estensione della figura Ω , che si assume come valore unitario, per cui noi riterremo sempre in seguito nelle applicazioni $E=1$ e quindi

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\sum x y \Delta \omega}{\sum y \Delta \omega} \\ y_1 &= \frac{\sum y^2 \Delta \omega}{\sum y \Delta \omega} \end{aligned} \right\} (26).$$

Se E non avesse valore costante si terrà conto della sua varia-

zione nello stesso modo indicato quando si sono studiati i momenti di primo e di secondo grado delle figure piane.

La definizione del centro di percossa è affatto generale, cioè essa comprende il caso che si tratti di una sola figura piana Ω , oppure di un sistema di più figure, e finalmente comprende anche il caso che si consideri un numero finito di punti, ai quali siano inerenti delle quantità $\Delta E = E \Delta \omega$ provenienti dal fatto che ai suddetti punti siano applicate delle forze, delle masse o dei segmenti ΔE .

La proprietà contenuta nelle equazioni (25) oppure (26), conduce immediatamente a queste due conclusioni:

a) Se la figura ha un asse di simmetria normale all'asse di rotazione (OX) il centro di percossa si trova necessariamente sopra di questo asse, poichè considerando il detto asse come asse delle y ad ogni prodotto $Exy d\omega$, oppure $xy d\omega$, positivo ne corrisponde un altro uguale e di segno contrario.

b) Il centro di pressione coincide col centro di un sistema di forze parallele applicate ai diversi punti della figura o del sistema di figure od ai punti isolati, che si considerano, e, quando E ha un valore costante, di intensità proporzionali alla distanza, che questi punti hanno dall'asse di rotazione OX , quindi è che nel caso di un sistema di figure o punti isolati si potranno convenientemente applicare alla ricerca del centro di pressione di tutto il sistema i metodi, che servono alla determinazione dei centri di gravità dei sistemi di forze parallele, quando per ogni figura si siano determinati i centri corrispondenti e l'intensità $\Sigma Ey \Delta \omega$ delle forze o segmenti, che ai medesimi possono intendersi applicati.

Sia GX_1 (*Fig. 48^a, tav. XI*) una retta parallela all'asse di rotazione OX e passante pel centro di gravità G , è noto che (Vedi num. 6)

$$I_x = I_{x_1} + \bar{y}^2 A = A (\bar{y}^2 + \rho_{x_1}^2)$$

in cui $A = \int E d\omega = \int d\omega$ se ($E=1$) quindi

$$y_1 = \frac{\Sigma \omega y^2}{\Sigma \omega y} = \frac{A (\bar{y}^2 + \rho_{x_1}^2)}{A \bar{y}} = \bar{y} + \frac{\rho_{x_1}^2}{\bar{y}} \quad (27)$$

cioè il centro di pressione dista dall'asse di rotazione di una quantità $\bar{y} + \frac{\rho_{x_1}^2}{\bar{y}}$, e quindi dall'asse GX_1 , parallelo ad OX e passante

pel baricentro G , di una quantità u data della formola

$$u = \frac{\rho x_1^2}{y} \quad (28).$$

Consideriamo (*Fig. 49^a, tav. XI*) due assi qualsiansi OX ed OY_1 , ed indichiamo con u e v le distanze dai medesimi di un punto m della figura Ω , con θ l'angolo compreso dagli assi, con x ed y le coordinate obliquangole

$$\int u^2 d\omega = \Sigma u^2 \Delta\omega = \Sigma y^2 \sin^2 \theta \Delta\omega = \sin^2 \theta \Sigma y^2 \Delta\omega = y_1 \sin^2 \theta \Sigma y \Delta\omega$$

$$\begin{aligned} \int uv d\omega &= \Sigma uv \Delta\omega = \Sigma yx \sin^2 \theta \Delta\omega = \sin^2 \theta \Sigma xy \Delta\omega = \\ &= x_1 \sin^2 \theta \Sigma y \Delta\omega = y_1 \sin^2 \theta \Sigma x \Delta\omega \end{aligned}$$

Se l'asse OY_1 passa pel centro di pressione P allora $\Sigma uv \Delta\omega = 0$ perchè il momento di un sistema di forze rispetto ad un asse passante pel suo centro di gravità è sempre uguale a zero (Vedi num. 3) quindi si verifica la relazione

$$\sin^2 \theta \Sigma xy \Delta\omega = x_1 \sin^2 \theta \Sigma y \Delta\omega = y_1 \sin^2 \theta \Sigma x \Delta\omega = 0$$

cioè i due assi OX ed OY_1 sono assi coniugati d'inerzia rispetto al loro punto d'incontro O e quindi sono diametri coniugati nell'ellisse d'inerzia corrispondente al punto O . Inoltre essi godono della proprietà che mentre il centro di pressione corrispondente ad OX cade sopra OY_1 , anche il centro di pressione corrispondente ad OY_1 cade sopra OX . Da queste proprietà si deduce il seguente teorema: *Tutti gli assi passanti per P sono coniugati d'inerzia coll'asse OX rispetto al punto O in cui l'intersecano ed i loro centri di pressione cadono tutti sulla OX , che ha per centro di pressione corrispondente il punto P , per cui passano tutti gli assi considerati. Quindi fra centri di pressione ed assi di rotazione corrispondenti esiste la seguente legge di reciprocità, alle rette uscenti da un punto corrispondono tanti punti in linea retta, la quale è appunto la retta corrispondente al punto comune alle rette primitivamente considerate.*

Per definizione (*Fig. 49^a, tav. XI*) indicando con $(x_1)_x$ $(y_1)_x$ ed $(x_1)_y$ $(y_1)_y$ le coordinate del centro di percossa della figura Ω ri-

spetto all'asse delle x (OX) oppure delle y (OY)

$$(x_1)_x = \frac{\int xy d\omega}{\int y d\omega} = \frac{\int xy d\omega}{\bar{y} \int d\omega} = \frac{I_{xy}}{\bar{y} A}$$

ed analogamente

$$(y_1)_y = \frac{\int xy d\omega}{\int x d\omega} = \frac{\int xy d\omega}{\bar{x} \int d\omega} = \frac{I_{xy}}{\bar{x} A}$$

da cui si ricava

$$\left. \begin{aligned} (x_1)_x \bar{y} A &= \int d\omega xy = I_{xy} \\ (y_1)_y \bar{x} A &= \int d\omega xy = I_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

e quindi anche

$$(x_1)_x \bar{y} = (y_1)_y \bar{x} \quad (31).$$

Ossia: *Il prodotto d'inerzia rispetto a due assi è esprimibile in funzione del prodotto dell'area A della figura per due costanti e precisamente la coordinata $\bar{x}$ del baricentro moltiplicata per la coordinata y_1 del centro di percossa rispetto all'asse delle y , oppure la coordinata $\bar{y}$ del baricentro moltiplicata per la coordinata x_1 del centro di percossa rispetto all'asse delle x .*

Da questi due teoremi si deducono le seguenti conseguenze:

a) Se dal punto P (*Fig. 50^a, tav. XI*) si abbassa la perpendicolare sull'asse Ox ad incontrarlo nel punto C , Cx e CP costituiscono due assi coniugati d'inerzia rispetto al punto P ad angolo retto, quindi sono gli assi principali d'inerzia relativi al punto C .

b) Se Ox rappresenta un asse (*Fig. 50^a, tav. XI*) di rotazione il centro di percossa corrispondente si trova sulla perpendicolare al medesimo condotta pel punto C , rispetto al quale esso è asse principale d'inerzia; quindi dato un asse, se da uno dei fuochi d'inerzia F si cala al medesimo la perpendicolare (Num. 8) FD e si prolunga in F_1 in modo che FD sia uguale a F_1D (*Fig. 50^a, tav. XI*) e si tira la $F'F_1$ il punto C , in cui essa interseca l'asse $X'X$, è il punto rispetto al quale questo asse è principale d'inerzia (Vedi parte II pag. 43); conducendo la CZ normale a Cx sopra di essa dovrà trovarsi il punto P .

c) Indicando con ρ_x e ρ_{x_1} il raggio di girazione della figura rispetto all'asse xx' ed all'asse baricentrico GX_1 , parallelo ad xx' il centro di percossa P trovasi sulla CZ ad una distanza d da C data da (Form. 27)

$$d = \frac{\rho_x^2}{\bar{y}} = \bar{y} + u = \bar{y} + \frac{\rho_{x_1}^2}{\bar{y}}.$$

d) Se si unisce il punto P col baricentro G le rette GP e GX_1 sono diametri coniugati nell'ellisse centrale d'inerzia: infatti, se si indicano con y' le ordinate ortogonali di un punto rispetto all'asse GX_1 , $y = \bar{y} + y'$, e se si rappresentano con x' le distanze dello stesso punto dall'asse GP , per quanto è stato detto precedentemente (Vedi sopra pag. 71) dovrà essere

$$\Sigma x' y \Delta \omega = \Sigma x' \bar{y} \Delta \omega + \Sigma x' y' \Delta \omega = \bar{y} \Sigma x' \Delta \omega + \Sigma x' y' \Delta \omega = 0.$$

Ma $\Sigma x' \Delta \omega = 0$ perchè è il momento statico della figura rispetto ad un asse passante pel baricentro, quindi

$$\Sigma x' y' \Delta \omega = 0$$

cioè GP e GX_1 sono assi coniugati d'inerzia rispetto al baricentro G e quindi anche diametri coniugati rispetto all'ellisse centrale d'inerzia.

e) Dalla figura 50^a (Tav. XI) detto θ l'angolo PGX_1 e ponendo si ricava che

$$u = GP \sin \theta = u' \sin \theta$$

$$\bar{y} = GO \sin \theta = \bar{y}' \sin \theta.$$

Superiormente abbiamo trovato la relazione (28) $u = \frac{\rho_{x_1}^2}{\bar{y}}$, dividendo per $\sin^2 \theta$ si ricava

$$\frac{u \bar{y}}{\sin^2 \theta} = \frac{\rho_{x_1}^2}{\sin^2 \theta}$$

cioè

$$u' \bar{y}' = \frac{\rho_{x_1}^2}{\sin^2 \theta} = \rho_{x_1}'^2 \quad (32)$$

in cui ρ_{x_1}' esprime la lunghezza del semidiametro coniugato nell'ellisse centrale d'inerzia alla retta GX_1 , cioè la porzione della retta GP che dal baricentro G va al punto di contatto della tangente all'ellisse centrale d'inerzia parallela a GX_1 , e quindi anche ad xx' , cioè: *Tra l'asse di rotazione ed il corrispondente centro di percossa relativamente ad una data figura esiste la stessa relazione di posizione che passa fra polare ad antipolo (punto simmetrico al polo rispetto al baricentro) nell'ellisse centrale d'inerzia. Se si considera l'insieme di tutti gli assi di rotazione del piano e dei corrispondenti centri di pressione, essi costituiscono un sistema antipolare reciproco rispetto all'ellisse centrale d'inerzia.*

Dalle relazioni

$$PC = \frac{\rho_x^2}{y} = \bar{y} + u = \bar{y} + \frac{\rho_{x_1}}{y}$$

$$u' \bar{y}' = PG \cdot PG = \rho_{x_1}'^2$$

risulta che il centro di gravità G della figura Ω trovasi sull'asse passante per P , che corrisponde al punto all'infinito dell'asse xx' , poichè essendo per esso $\bar{y} = \bar{y}' = 0$

$$u = \frac{\rho_{x'}^2}{y} = \infty \qquad u' = \frac{\rho_{x'}'^2}{y'} = \infty$$

e che esso separa l'asse xx' dal centro di pressione P corrispondente. Se quindi si prendono come assi coordinati delle rette passanti pel baricentro, allora u ed $\bar{y}$ oppure u' ed $\bar{y}'$ vanno riguardate come aventi segno diverso, e perciò le relazioni superiori si sogliono scrivere nella forma seguente

$$u \bar{y} = -\rho_{x'}^2 \qquad u' \bar{y}' = -\rho_{x'}'^2$$

mettendo in evidenza il segno negativo pel prodotto $u \bar{y}$ ovvero $u' \bar{y}'$

Superiormente si è dimostrato che l'asse PG ed Ox parallelo a GX_1 costituiscono due direzioni coniugate rispetto all'ellisse centrale d'inerzia, quindi essi debbono soddisfare alla relazione (14)

$$\text{tang } \alpha' \text{ tang } \alpha'' = \frac{I_1}{I_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

Segue da ciò che un punto preso sugli assi principali d'inerzia baricentrici considerati come assi coordinati (*Fig. 51^a, tav. XI*) per es. $W(x_0, 0)$ oppure $V(0, y_0)$ ha necessariamente come asse corrispondente una retta normale all'asse sul quale esso si trova, perchè essendo tang α' necessariamente uguale a zero oppure all'infinito dovrà essere tang α'' rispettivamente uguale all'infinito

oppure allo zero, $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ essendo diverso da zero. Se con $\bar{x}_0$ ed $\bar{y}_0$ si indicano le distanze del baricentro G degli assi rispettivamente corrispondenti a $W(x_0, 0)$ ed a $V(0, y_0)$ e con ρ_1 e ρ_2 i raggi di girazione corrispondenti agli assi GX e GY

$$\bar{x}_0 = -\frac{\rho_1^2}{x_0} \qquad \bar{y}_0 = -\frac{\rho_2^2}{y_0} \qquad (33).$$

13. Relazione tra le coordinate del centro di pressione e l'equazione dell'asse di rotazione corrispondente. — Siano (x_1, y_1) le coordinate del centro di pressione P (*Fig. 51^a, tav. XI*) corrispondente all'asse di rotazione xx' , la cui equazione è rappresentata in generale da $Bx + Cy + D = 0$ od anche da $y = ax + b$ o finalmente da

$$\frac{x}{\left(\frac{D}{B}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{D}{C}\right)} + 1 = 0$$

in cui

$$a = -\frac{B}{C} \qquad b = -\frac{D}{C} \qquad (34),$$

e dove

$$x_0 = -\frac{D}{B} \qquad y_0 = -\frac{D}{C}$$

rappresentano le distanze dall'origine G delle coordinate delle traccie W e V sugli assi coordinati della retta xx' avente per equazione

Supponiamo di prendere come assi coordinati gli assi principali d'inerzia baricentrici GX e GY ed indichiamo con u la distanza dall'asse di rotazione xx' di un punto qualsiasi m della figura Ω , le cui coordinate rispetto a GX e GY supporremo rappresentate con x' ed y' . Superiormente è stato dimostrato che le coordinate del centro di pressione coincidono con quelle del centro di un sistema di forze parallele di direzione variabile applicate ai punti

m e rappresentate in intensità dal prodotto $E u d\omega$ quindi (Num. 3) si dovranno verificare le relazioni

La distanza u in funzione delle coordinate (x', y') del punto qualsiasi m della figura Ω dall'asse xx' è notoriamente espressa da

quindi le due equazioni superiori diventano

G è il centro di gravità della figura Ω , GX e GY sono i suoi assi principali d'inerzia baricentrici, quindi (Vedi num. 3 e 5)

e le equazioni trovate diventano

Conformemente ai simboli usati superiormente

$$A = \Sigma E \Delta \omega \quad I_x = I_1 = \Sigma E y'^2 \Delta \omega = A \rho_1^2 \quad I_y = I_2 = \Sigma E x'^2 \Delta \omega = A \rho_2^2$$

quindi le (35) diventano

$$\begin{aligned} & x_1 D = B \rho_2^2 & y_1 D = C \rho_1^2 \\ \text{ossia} & & \\ & \frac{D}{B} = -x_0 = \frac{\rho_2^2}{x_1} & \frac{D}{C} = -y_0 = \frac{\rho_1^2}{y_1} \end{aligned} \quad (36).$$

sostituendo a $\frac{D}{B}$ e $\frac{D}{C}$ questi valori nell'equazione della retta xx' , si ottiene

$$\frac{xx_1}{\rho_2^2} + \frac{yy_1}{\rho_1^2} + 1 = 0 \quad (37).$$

equazione dell'antipolare rispetto all'ellisse, che ha per semiassi ρ_1 e ρ_2 , cioè rispetto all'ellisse centrale d'inerzia, del punto $P(x_1, y_1)$, come doveva appunto verificarsi per quanto è stato detto al numero precedente.

Se si indicano con α' , ed α'' gli angoli, che le rette PG ed xx' fanno coll'asse della x dalla figura 51 (*Tav. XI*) si ricava

$$\text{tang. } \alpha' = \frac{y_1}{x_1}$$

$$- \text{tang. } \alpha'' = \frac{y_0}{x_0} = \frac{\rho_1^2 x_1}{\rho_2^2 y_1}$$

e quindi

$$- \text{tang. } \alpha' \text{ tang. } \alpha'' = \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} = \frac{A \rho_1^2}{A \rho_2^2} = \frac{I_1}{I_2}$$

cioè la relazione (14) che dimostra come le direzioni GP ed xx' siano coniugate rispetto all'ellisse centrale d'inerzia.

Oss. I valori $(-x_0) = \frac{D}{B} = \frac{\rho_2^2}{x_1}$, $(-y_0) = \frac{D}{C} = \frac{\rho_1^2}{y_1}$ si potevano anche ricavare immediatamente dalle (33) osservando che per la legge di reciprocità gli assi corrispondenti alle due traccie W e V dell'asse di rotazione xx' sugli assi coordinati sono appunto due rette normali rispettivamente a GX , GY e per le quali necessariamente $\bar{x}_0 = x_1$, $\bar{y}_0 = y_1$.

Tenendo conto di questi risultati e delle equazioni (36) (37) si possono enunciare i seguenti teoremi:

1° Dato il centro di percossa è determinato l'asse di rotazione corrispondente e viceversa (Form. 36 e 37).

2° Quando il centro di pressione si muove sopra una linea retta, l'asse di rotazione ruota intorno ad un punto, che è il centro di percossa corrispondente alla retta prima considerata e viceversa.

Infatti nell'equazione (37) possono riguardarsi come coordinate correnti tanto le (x, y) quanto le (x_1, y_1) .

3° Se la retta su cui si muove il centro di pressione passa pel baricentro della figura, cioè se $b = -\frac{D}{C} = 0$, gli assi corrispondenti ruotano intorno ad un punto posto a distanza infinita perchè

$$y_1 = \frac{\rho_1^2}{D} = -\frac{\rho_1^2}{b} = \infty \qquad x_1 = \frac{\rho_2^2}{D} = \frac{\rho_2^2}{\left(\frac{D}{\frac{C}{B}}\right)} = \frac{a}{b} \rho_2^2 = \infty$$

e sono tutti paralleli alla direzione coniugata rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della retta, su cui si muove il centro di pressione, perchè dalla (36) ricavasi

$$\frac{y}{x} = -\frac{x_1}{y_1} \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}$$

e ponendo $\text{tang } \alpha' = \frac{x}{y}$, $\text{tang } \alpha'' = \frac{y_1}{x_1}$ risulta

$$-\text{tang } \alpha' \text{ tang } \alpha'' = \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} = \frac{I_1}{I_2}$$

che è la nota relazione (14), che passa fra le direzioni coniugate nell'ellisse centrale d'inerzia.

4° Se il centro di pressione si muove generando una curva D l'asse di rotazione si muove inviluppando la curva reciproca D' in guisa chè se il centro di pressione percorresse la curva D' l'asse di rotazione corrispondente invilupperebbe la curva D .

14.5 Determinazione del centro di percossa corrispondente ad un'asse di rotazione dato e dell'asse di rotazione corrispondente ad un dato punto considerato come centro di percossa. — Supponiamo data una figura Ω ed un asse xx' nel suo piano (*Fig. 51^a, tav. XI*) il centro di percossa corrispondente all'asse xx' può essere determinato in varî modi.

a) Se l'asse xx' è dato mediante la sua equazione ridotta alla forma $y = ax + b = -\frac{B}{C}x - \frac{D}{C}$, in causa delle relazioni (34)

e (36) si ottiene

$$a = -\frac{B}{C} = -\frac{\frac{D}{C}}{\frac{D}{B}} = -\frac{x_1 \rho_1}{y_1 \rho_2} \quad b = -\frac{D}{C} = -\frac{\rho_1^2}{y_1} \quad (38).$$

Queste equazioni permettono di determinare immediatamente x_1 ed y_1 coordinate del centro di percossa P corrispondente all'asse xx' qualora si siano determinati in precedenza i raggi di girazione intorno agli assi principali d'inerzia baricentrici, ricerca che abbiamo vista essere sempre possibile mediante integrazione esatta od approssimata.

Un calcolo inverso permette di calcolare il valore dei parametri a e b dell'equazione dell'asse di rotazione quando sia dato il centro di percossa mediante le sue coordinate x_1 ed y_1 . Se indichiamo con W e V le traccie sugli assi della retta xx' e rispettivamente con x_0 ed y_0 la loro distanza dal baricentro G , dall'equazione dell'asse di rotazione si ricavano le relazioni (*Fig. 52^a, tav. X*) contenute implicitamente nelle formole (33)

$$\left. \begin{aligned} GV = (-y_0) &= \frac{\rho_1^2}{y_1} & y_1 &= \frac{\rho_1^2}{(-y_0)} \\ GW = (-x_0) &= \frac{\rho_2^2}{x_1} & x_1 &= \frac{\rho_2^2}{(-x_0)} \end{aligned} \right\} (39).$$

che sono semplicissime e che permettono di risolvere sempre e con facilità il problema proposto.

b) La stessa questione può essere risolta geometricamente ricordando la proprietà dimostrata superiormente che il centro di percossa e l'asse di rotazione corrispondente coincidono cogli antipoli ed antipolari corrispondenti nell'ellisse centrale d'inerzia. Si determini l'ellisse centrale d'inerzia della figura Ω data (*Fig. 53^a, tav. XI*) indi si prenda il punto P_1 , simmetrico del punto P dato, e si determini la polare $X'_1 X_1$ del punto P_1 , $X'_1 X_1$ è l'asse di rotazione corrispondente al punto P ; essa infatti è la polare del punto P , e quindi l'antipolare di P . La determinazione poi della polare può farsi conducendo da P_1 due tangenti all'ellisse e congiungendo i due punti di contatto, oppure costruendo un quadrangolo inscritto nella ellisse ed avente due lati passanti per P_1 , la retta che unisce gli altri due punti diagonali è l'asse di ro-

tazione cercato. Se invece è dato l'asse X_1X_1' , dai due punti T e T' , in cui esso taglia l'ellisse, si conducano le tangenti all'ellisse e si prolunghino fino al loro punto d'incontro P_1 , si prenda il punto P simmetrico di P_1 rispetto al baricentro della figura, P è il centro di percossa corrispondente all'asse dato.

La costruzione indicata al numero 7 può anche servire a determinare il centro di percossa, questo infatti si deve trovare contemporaneamente su una retta W_1V_1 parallela all'asse di rotazione e distante dal medesimo $\delta = \bar{y} + \frac{\rho_{x1}}{y}$ (Vedi Fig. 54^a, tav. XI,

Vedi anche il numero 12 per il significato dei simboli algebrici), e sul diametro GS dell'ellisse centrale d'inerzia coniugato alla direzione $X_1'X_1$, quindi sarà nel loro punto d'incontro P (Fig. 54^a, tav. XI). Con un processo inverso dato il punto P si tira la GP e quindi la GX_1 diametro coniugato nell'ellisse centrale d'inerzia alla retta GP , indi si conduce una retta WV parallela a GX_1 e distante da essa $\bar{y}$ (sempre calcolabile perchè sono noti u e ρ_{x1}) la WV è l'asse di rotazione corrispondente al punto P .

c) Si può anche determinare facilmente il centro di percossa corrispondente ad un dato asse di rotazione o viceversa, ricorrendo alle proprietà dei fuochi d'inerzia F ed F' (Num. 8). Supponiamo determinati gli assi principali d'inerzia baricentrici di una data figura Ω (Fig. 55^a, tav. XII) i fuochi d'inerzia F ed F' ed i due assi corrispondenti ff ed $f'f'$, che diremo assi focali, e che saranno necessariamente paralleli all'asse delle y e normali ad XX' , perchè la FF' passa pel baricentro della figura e coincide con un asse principale di inerzia.

Se si indicano con $+x_f$ e $-x_f$ le assisse dei due fuochi, gli assi polari corrispondenti avranno per equazione (Vedi form. 33)

$$x_0 = -\frac{\rho_2^2}{x_f} = -\frac{\rho_2^2}{\pm \sqrt{\rho_1^2 - \rho_2^2}}$$

perchè $y_f = 0$, cioè i due punti t e t' in cui ff ed $f'f'$ segano l'asse delle x saranno dati da una terza proporzionale dopo $x_f = \pm \sqrt{\rho_1^2 - \rho_2^2}$, e ρ_2 .

Se si porta sulla OY il segmento Gl uguale a ρ_2 e si tira la lF , la normale ad $F'l$, condotta pel punto l , interseca l'asse XX' nel punto t , ed in modo analogo si determina t' ; infatti per le proprietà

ben note dei triangoli rettangoli $tG = -\frac{Gl^2}{GF} = \frac{\rho_2^2}{x_f}$

Consideriamo ora una retta qualsiasi mn , il centro di pressione che le corrisponde dovrà trovarsi sul punto d'incontro degli assi di rotazione corrispondenti a tutti i suoi punti. Tiriamo mF ed nF' e dai punti F ed F' le FP ed $F'P$ normali rispettivamente ad Fm ed $F'n$, il loro punto d'incontro P è il centro di percossa della retta mn . Infatti m è il punto d'incontro di ff e di mF , quindi la polare corrispondente passerà per F e sarà normale ad mF , perchè nel punto F tutte le coppie di assi ad angolo retto sono coniugati (Num. 7), e per ciò sulla FP deve trovarsi l'antipolo della mn ; ma per la stessa ragione esso deve trovarsi sulla $F'P$, dunque sarà il punto, in cui queste due rette si incontrano. Con una costruzione inversa dato il punto P si determina l'asse corrispondente mn : si congiunga P con F ed F' e per F ed F' si conducano le Fm ed $F'n$ rispettivamente normali a PF e PF' , la retta determinata dai punti m ed n in cui Fm ed $F'n$ incontrano rispettivamente le polari dei punti F ed F' è l'asse cercato. Infatti l'asse mn in causa della legge di reciprocità dovrà passare pei punti poli delle rette PF e PF' ; per la stessa legge (Vedi num. 12 pag. 70) questi punti si dovranno trovare contemporaneamente sulle due polari focali ff , $f'f'$ e sulle normali a PF e PF' condotte pei due fuochi di inerzia, dunque saranno i punti m ed n , ed mn è l'asse cercato.

La costruzione indicata al numero 8 può servire essa pure a determinare il centro di pressione P corrispondente ad un asse X_1X_1' (Fig. 56^a, tav. XII). Dai punti F ed F' si conducano due normali FD ed $F'D'$ all'asse X_1X_1' (Fig. 56^a, tav. XII) e si prolunghi FD in F_1 in modo che F_1D sia uguale FD , indi si tiri F_1F' a segare in C l'asse X_1X_1' , si conduca CF e la bisettrice CZ dell'angolo $F'CF$, che riuscirà necessariamente normale ad X_1X_1' , questa sarà asse principale d'inerzia rispetto al punto C insieme all'asse X_1X_1' (Vedi num. 8), quindi il centro di pressione

P si troverà sulla CZ ad una distanza $\bar{y} + \frac{\rho_{x'}^2}{y}$, in cui $\rho_{x'}$ è il raggio di girazione della figura rispetto all'asse GB ed $\bar{y}$ è uguale a $CL = DN$.

Il punto P si può determinare geometricamente tirando per B , estremità della corda AB parallela ad $X_1'X_1$ condotta pel baricentro nel circolo d'inerzia, una normale a DB ad incontrare DF prolungata nel punto Q , se per Q si conduce una parallela ad $X_1'X_1$ ad incontrare in P l'asse CZ , P è il centro di pressione cercato.

Infatti esso dista da C di una lunghezza uguale ad $\bar{y} + \frac{\rho_{x'}^2}{y}$ come

appare dalla figura 56^a esaminando il triangolo DEQ rettangolo in Q ; da esso infatti si ricava $DN : NB :: NB : NQ$ e quindi

$$QN = LP = u = \frac{\overline{NB}^2}{DN} = \frac{\rho_x^2}{y} \quad c. d. d.$$

15. Nocciuolo centrale delle figure piane. — Se si immagina una figura piana qualsiasi Ω (Fig. 57, 58, 59, 60, *tav.* XII) ed una retta VW , la quale si muova toccando sempre il suo contorno ed involuppendola interamente fino a ritornare alla posizione primitiva, l'area racchiusa dal luogo geometrico delle successive posizioni occupate dal centro di pressione corrispondente alla retta mobile VW chiamasi *nocciuolo centrale della figura* Ω . In causa della relazione di reciprocità, che esiste fra asse di rotazione e centro di pressione corrispondente, il nocciuolo centrale può anche definirsi la figura antipolare corrispondente alla figura data, ossia la figura polare reciproca rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della figura simmetrica alla figura Ω data rispetto al suo baricentro. Se la figura Ω ha un contorno curvilineo il nocciuolo centrale avrà pure un contorno curvilineo e le due curve saranno reciproche; se invece, o totalmente od in parte, Ω ha un contorno poligonale, il nocciuolo avrà pure un contorno poligonale, e precisamente i lati dell'uno poligono corrisponderanno ordinatamente ai vertici dell'altro e viceversa. Segue da ciò che se si vuole determinare il nocciuolo centrale di una figura piana Ω si dovranno cercare gli assi corrispondenti ai vertici della linea di contorno, ovvero gli antipoli dei suoi lati se la figura è limitata da una linea poligonale; se poi è invece chiusa da una o più linee curve, allora bisognerà scegliere su questo contorno un certo numero di punti (includendovi sempre i punti dove vi è soluzione di continuità della linea di contorno) e di questi determinare le antipolari od assi di rotazione corrispondenti. Il numero dei punti da scegliere sarà indicato dal fatto che bisogna avere un numero di antipolari sufficienti per mostrare con sufficiente approssimazione, mediante il loro involuppo, la forma e l'andamento della curva reciproca. Trattandosi di figure reciproche si può naturalmente invertire la soluzione cioè pei punti scelti sulla linea contorno di Ω condurre le tangenti alla medesima (nei punti in cui due curve si incontrano si dovranno condurre le due tangenti alle due curve, che ivi si intersecano) e per ciascuna di esse determinare il relativo antipolo o centro di pressione corrispondente, unendo con curve a mano questi punti

(avvertendo che ai punti d'incontro di due tronchi di curva corrispondono lati rettilinei) si avrà ugualmente la curva, che limita il nocciuolo centrale. Se la figura Ω presenta uno o più assi di simmetria, in causa della legge di reciprocità che lega la linea di contorno della figura Ω con quella che limita il nocciuolo centrale, questa ultima figura avrà altrettanti assi di simmetria, in guisa che costruita una parte della linea del contorno del nocciuolo centrale, la parte simmetrica potrà essere immediatamente tracciata senza ripetere ulteriormente punto per punto, o retta per retta, la ricerca generale dell'antipolare o dell'antipolo corrispondente.

a) *Nocciuolo centrale di un rettangolo.* — Sia $ABCD$ (Fig. 58^a, tav. XII) un rettangolo riferito agli assi OX , OY passanti pel suo baricentro e paralleli ai lati. La figura essendo simmetrica rispetto agli assi ed avendo quattro lati, due a due paralleli e simmetrici rispetto ad OX ed OY , il nocciuolo centrale sarà una figura con quattro vertici giacenti sugli assi e posti due a due simmetricamente rispetto agli assi stessi, quindi sarà un rombo. Sia $AB=CD=a$, $BC=AD=b$, le coordinate del centro di percossa corrispondente al lato AB saranno date dalle equazioni (33), oppure dalle (36) che loro sono equivalenti,

$$x_1 = -\frac{\rho_{y'}^2}{x_0} \qquad y_1 = -\frac{\rho_{x'}^2}{y_0}$$

nel nostro caso

$$x_0 = \infty \quad y_0 = -\frac{b}{2} \quad \rho_{x'}^2 = \rho_1^2 = \frac{1}{12}b^2 \quad \rho_{y'}^2 = \rho_2^2 = \frac{1}{12}a^2$$

quindi

$$x_1 = \frac{\frac{1}{12}a^2}{\infty} = 0 \qquad y_1 = -\frac{\frac{1}{12}b^2}{-\frac{b}{2}} = \frac{b}{6}$$

analogamente le coordinate del centro di percossa del lato BC sono date da

$$x_1 = -\frac{\rho_{y'}^2}{x_0} = -\frac{\frac{1}{12}a^2}{-\frac{a}{2}} = \frac{a}{6}$$

$$y_1 = -\frac{\rho_{x'}^2}{y_0} = -\frac{\frac{1}{12}b^2}{\infty} = 0.$$

Gli antipoli degli altri due lati saranno posti simmetricamente rispetto al baricentro, quindi il nocciuolo centrale a_1, c_1, b_1, d_1 è un rombo, le cui diagonali a_1, b_1 e c_1, d_1 coincidono cogli assi OX ed OY ed hanno rispettivamente la lunghezza di un terzo del lato del rettangolo, cui sono parallele.

Per un quadrato, il nocciuolo centrale è ancora un quadrato, perchè in tal caso le due diagonali del rombo a_1, c_1, b_1, d_1 hanno uguale lunghezza.

b) *Nocciuolo centrale di un rombo.* — Sia $ABCD$ un rombo riferito a due assi coincidenti colle sue diagonali (*Fig.* 59^a, *tav.* XII) e sia $AC=a, BD=b$. I vertici A, B, C, D essendo simmetrici rispetto agli assi e cadendo sugli assi stessi il nocciuolo centrale sarà un quadrilatero, i cui lati saranno a due a due paralleli agli assi OX ed OY e disposti simmetricamente rispetto ai medesimi, cioè un rettangolo. Indicando con x_0 ed y_0 le distanze dal baricentro delle traccie dell'asse di rotazione corrispondente al punto $P(x_1, y_1)$ ed avente per equazione $y = ax + b = -\frac{B}{C}x - \frac{D}{C}$ dalle equazioni (36) e (38)

$$x_1 = -\frac{\rho_2^2}{x_0} \quad y_1 = -\frac{\rho_1^2}{y_0}$$

$$b = -\frac{D}{C} = -\frac{\rho_1^2}{y_1} \quad a = -\frac{B}{C} = -\frac{x_1 \rho_1^2}{y_1 \rho_2^2}$$

si ricava

pel punto A

$$x_0 = -\frac{\rho_2^2}{x_1} = -\frac{\frac{1}{24}a^2}{\frac{1}{2}a} = -\frac{a}{12}$$

$$y_0 = -\frac{\rho_1^2}{y_1} = -\frac{\frac{1}{24}b^2}{0} = -\infty$$

$$a = -\frac{B}{C} = -\frac{x_1 \rho_1^2}{y_1 \rho_2^2} = -\infty$$

pel punto B

$$x_0 = -\frac{\rho_2^2}{x_1} = -\frac{\rho_2^2}{0} = -\infty$$

$$y_0 = -\frac{\rho_1}{y_1} = -\frac{\frac{1}{24}b^2}{\frac{1}{2}b} = -\frac{b}{12}$$

$$a = -\frac{B}{C} = -\frac{x_1 \rho_1^2}{y_1 \rho_2^2} = 0$$

Quindi i lati, e per conseguenza anche le mediane del rettangolo, che rappresenta il nocciuolo centrale, hanno rispettivamente una lunghezza uguale ad $\frac{1}{6}$ della diagonale del rombo, cui sono paralleli.

c) *Nocciuolo centrale del circolo.* — In causa della simmetria del circolo rispetto al baricentro in tutte le direzioni il nocciuolo centrale sarà pure un circolo, il cui raggio r sarà uguale alle traccie x_0 oppure y_0 dell'asse corrispondente al punto del circolo di coordinate $x_1=R$, $y_1=0$ oppure $x_1=0$, $y_1=R$, in cui R rappresenta il raggio del circolo dato, quindi

$$r = x_0 = -\frac{\rho_{y'}^2}{x_1} = -\frac{\frac{R^2}{4}}{R} = -\frac{1}{4}R.$$

d) *Nocciuolo centrale di una sezione a piattabande derivata dal rettangolo.* — Siano (Fig. 60^a, tav. XII) $abcd$, $efgl$ le due piattabande, di cui rappresentiamo per ciascuna di esse con ω l'area e con ρ_n il raggio di girazione rispetto ad una retta parallela all'asse baricentrico OX e passante pel baricentro parziale della piattabanda stessa: inoltre supponremo OX ed OY ortogonali fra loro e che entrambi siano assi di simmetria della figura. Indichiamo con h_1 la distanza fra i baricentri delle due piattabande, con h l'altezza della sezione. In causa della simmetria della figura il momento d'inerzia I_x rispetto all'asse OX è dato da (Vedi num. 6, teorema di trasposizione).

$$I_x = A \rho_x^2 = 2\omega \cdot \rho_x^2 = \frac{2\omega h_1^2}{4} + 2\omega \rho_n^2$$

$$\rho_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{2\omega \left(\frac{h_1^2}{4} + \rho_n^2 \right)}{2\omega} = \frac{h_1^2}{4} + \rho_n^2$$

e quindi il centro di percossa corrispondente al lato gl della piattabanda inferiore cadrà sull'asse OY e disterà dall'asse OX di una quantità y_1 data dalla formola

$$y_1 = u - \frac{\rho_x^2}{y_0} = - \frac{\frac{h_1^2}{4} + \rho_n^2}{h}.$$

Se lo spessore s delle due piattabande è molto piccolo rispetto ad h ,

$\rho_n^2 = \frac{1}{12} s^2$ diventa trascurabile ed h_1 può sensibilmente in pratica considerarsi uguale h , quindi in un calcolo di prima approssimazione, e molte volte anche in un calcolo definitivo, può ritenersi senza errore sensibile in relazione allo scopo che si vuol raggiungere

$$y_1 = \frac{h}{2}$$

cioè in tale ipotesi si può ritenere che il centro di percossa cada sul contorno della piattabanda superiore, risultato che facilita assai la ricerca del nocciuolo centrale senza alterare molto l'esattezza del calcolo per queste sezioni a piattabande e per altre affini, sebbene con minore approssimazione, tanto usate nella costruzione delle travature.

e) *Nocciuolo centrale di una figura qualsiasi.* — Il procedimento analitico in questo caso raramente è il più conveniente, quindi si ricorre ordinariamente ai metodi grafici per la determinazione delle polari od antipoli corrispondenti a punti o rette date.

Dopo quanto è stato detto superiormente sembra superfluo indicare particolareggiatamente per qualche caso speciale tutte le operazioni grafiche da eseguire per la ricerca del nocciuolo centrale, poichè esse non sono che una successiva e continuata ripetizione di uno dei processi indicati al numero 14 per la ricerca dei centri di pressione e degli assi di rotazione corrispondenti, e ciò finchè si siano trovati tanti punti o tante rette quante ne occorrono per poter disegnare con sufficiente approssimazione il nocciuolo centrale per punti oppure per inviluppo di rette.

Nella tavola XIII (*Fig. 61^a*) è riportata la figura $\Omega = ABCD EKL MNQ$, sulla quale nella tavola X è stata eseguita la ricerca degli assi principali d'inerzia nell'ipotesi più generale, cioè che non esista alcun asse di simmetria, indicando gli assi principali d'inerzia ed i fuochi d'inerzia F ed F' , nonchè gli assi focali

corrispondenti f_1, f_1' ed f_1', f_1'' . Se si conducono le due rette CL ed AN il contorno che involuppa la figura è dato da $ABCLMNA$ e, come si è già osservato, il nocciuolo centrale d'inerzia si può determinare o ricercando le antipolari dei vertici A, B, C, L, M, N che lo inviluppano e lo limitano, oppure gli antipoli delle rette AB, BC, CL, LM, MN, NA , che nel loro insieme ne determinano i vertici. Nella figura 61 (*Tav. XIII*) sono indicate mediante un tratto ed un punto le costruzioni, esposte superiormente, necessarie per determinare l'antipolare del punto A e l'antipolo della retta AB ricorrendo all'ellisse centrale d'inerzia e con un tratto e due punti le costruzioni geometriche occorrenti per segnare l'antipolare e l'antipolo corrispondente al punto L ed alla retta LM ricorrendo alle proprietà dei fuochi d'inerzia e degli assi focali.

Nelle figure 62, 63 e 64 (*Tav. XIII*) si riportano una sezione di una rotaia (tipo Vignolles), di un ferro ad angolo ed una sezione trapezoidale segnando il contorno dei loro nocciuoli centrali d'inerzia per dare un'idea della forma, che essi prendono per tali figure. La serie delle costruzioni geometriche necessarie per la loro determinazione essendo sempre la stessa non si è creduto necessario di lasciar la traccia delle operazioni eseguite, sembrando ciò superfluo dopo quanto è stato detto superiormente e più atto a complicare la figura che a renderla più chiara ed intelligibile.

16. Tavole numeriche e grafiche pel calcolo dei valori delle funzioni, composizione ed uso. — L'ingegnere nell'esercizio della sua professione si trova spesso a dover risolvere ripetutamente lo stesso problema con dati diversi, cioè a determinare una certa quantità od il valore di una funzione, che dipende dal valore assunto da una o più variabili, in corrispondenza di diversi gruppi di valori delle variabili stesse. I calcoli necessari per la risoluzione di questioni di questo genere corrispondono sempre alla stessa serie di operazioni aritmetiche ed il tempo, che l'ingegnere perde nell'esecuzione dei medesimi, può riescire abbastanza lungo; acquistano quindi in tal caso particolare importanza tutti quei processi, che valgono a diminuirlo sensibilmente. A raggiungere questo scopo possono servire opportunamente delle tavole, coll'uso delle quali, assegnati alle variabili i valori, che loro corrispondono, si possono ricavare i valori, che assume in ogni caso speciale la funzione, in modo esatto od almeno con approssimazione sufficiente. Tali tavole possono essere numeriche o grafiche: le prime prendono la forma di quadri oppure di serie di quadri o tabelle, nei quali sono raccolti i valori della funzione per determinate serie di valori delle variabili scelti convenientemente; le seconde invece risul-

tano dall'insieme di linee tracciate in un piano, le quali rappresentano il variare della funzione corrispondentemente ai diversi valori, che possono assumere le variabili, da cui essa dipende. Queste ultime vengono dette anche tavole diagrammatiche od anche nomografiche, perchè esse rappresentano una legge (*νομος*), ed indicasi col nome di nomografia (*) l'insieme dei principî e metodi che servono a costruirle.

a) *Tavole numeriche.* — La formazione di una tavola numerica dei valori di una funzione risulta relativamente molto semplice quando la detta funzione non dipenda da più di due variabili; se essa contiene tre variabili allora le tavole prendono già spesso un'estensione soverchia e non è più consigliabile in via generale il ricorrervi quando si debba considerare un numero maggiore di variabili. Il procedimento da seguire per la composizione di queste tavole varia secondo il numero delle variabili, che entrano nella funzione, e si riduce in ultima analisi a calcolare i valori della funzione stessa corrispondenti ad una serie di gruppi di valori delle variabili e ad inserire tali valori in un quadro, dal quale appaia chiaramente e senza pericolo di errore quali siano i valori delle variabili cui corrispondono. Non occorre mai che la serie dei gruppi di valori delle variabili superi certi limiti, in generale abbastanza ristretti, e che caso per caso sono fissati dalla natura della questione, che si vuol risolvere. In senso puramente algebrico le diverse variabili possono assumere valori compresi fra limiti spesso determinati, qualche volta molto estesi, sovente anche infiniti; in senso pratico però tali variabili hanno in generale un campo di variazione molto ristretto dipendente dalla natura delle questioni, che si possono presentare all'ingegnere. Astrattamente l'altezza di un muro per sostegno d'acqua può suppersi grandissima; in pratica però non si fanno in genere tali opere con un'altezza superiore a metri sessanta, quindi in una tavola numerica destinata a dare lo spessore di un muro per sostegno d'acqua il valore delle altezze h da prendere in considerazione sarebbe naturalmente limitato fra $h=0$ ed $h=60^m,00$. Ad ogni numero corrisponde un logaritmo; le tavole però che danno i logaritmi dei numeri non eccedono mai certi limiti com-

(*) Il nome di *nomografia* è stato introdotto nel 1891 dall'Ingegnere MAURIZIO D'OCAGNE in una pubblicazione, nella quale esso ha esposto una teoria generale su questo argomento. Vedi *Nomographie, Les calculs usuels effectués au moyen des abaques, Essai d'une théorie générale*. Nella seconda parte di questo paragrafo saranno riassunti i risultati principali, ai quali è giunto il predetto Ingegnere D'OCAGNE.

presi fra zero e 1000, oppure 10000, o finalmente 100000, a seconda degli usi a cui le tavole stesse sono destinate. Si può quindi ritenere che l'estensione utile di una tavola numerica pel calcolo di una funzione è sempre ben determinata dai limiti estremi entro i quali in pratica possono assumere valori diversi le singole variabili $\alpha, \beta, \gamma \dots$ che entrano nella medesima.

Gli intervalli o differenze fra due successivi valori delle variabili $\delta\alpha_k = \alpha_{k+1} - \alpha_k, \delta\beta_p = \beta_{p+1} - \beta_p, \delta\gamma_i = \gamma_{i+1} - \gamma_i \dots$ debbono essere scelti in modo che essi risultino abbastanza grandi per essere in ogni caso esattamente apprezzati coi mezzi di misura, di cui dispone l'ingegnere, e perchè la tavola non prenda dimensioni soverchiamente grandi per l'eccessivo numero dei valori della funzione in essa inscritti. Nello stesso tempo gli intervalli stessi debbono essere abbastanza piccoli perchè per valori intermedi delle variabili il valore della funzione possa essere determinato con sufficiente approssimazione mediante interpolazione proporzionale, che è quanto dire supponendo che per l'intervallo considerato la funzione vari linearmente al variare delle variabili. Siano α_k ed α_{k+1} due valori successivi considerati nella tavola numerica della variabile α ed α' un valore compreso fra α_k ed α_{k+1} , $\phi(\alpha_k)$, $\phi(\alpha_{k+1})$ e $\phi(\alpha')$ i corrispondenti valori della funzione $\phi(\alpha)$, se si ammette che la funzione $\phi(\alpha)$ vari linearmente fra α_k ed α_{k+1} , ciò equivale a ritenere che invece di $\phi(\alpha')$ si possa prendere $\phi_1(\alpha')$ valutato colla formola d'interpolazione lineare

$$\phi_1(\alpha') = \phi(\alpha_k) + [\phi(\alpha_{k+1}) - \phi(\alpha_k)] \frac{\alpha' - \alpha_k}{\alpha_{k+1} - \alpha_k}$$

se $\phi_1(\alpha') - \phi(\alpha')$ è minore delle quantità che nel calcolo, che si vuole eseguire, rappresentano un'errore sensibile, allora si può con sufficiente approssimazione ritenere $\phi_1(\alpha') = \phi(\alpha')$ e l'intervallo scelto fra i valori della variabile α è conveniente; se invece si verifica il caso opposto, allora $\delta\alpha_k$ è troppo grande e sarà necessario diminuirlo se si vuol arrivare ad un risultato pratico attendibile.

Da queste considerazioni risulta come l'estensione di una tavola numerica ed il numero di valori delle variabili da prendere in considerazione sia sempre sufficientemente determinato e debba variare da problema a problema non solo, ma per lo stesso problema debba anche variare a seconda della maggiore o minore esattezza che si vuol raggiungere, e secondo che si voglia fare soltanto un calcolo largamente approssimato o di massima, oppure un calcolo più rigoroso e definitivo.

Se l'espressione analitica, di cui si vogliono cercare i successivi valori, dipende da una sola variabile, allora la tavola numerica consta di due sole colonne; nella prima si inscrivono successivamente i valori assegnati alla variabile in base ai criteri superiormente esposti, nell'altra i valori corrispondenti della funzione. Per un valore α' della variabile α compresa fra α_k ed α_{k+1} si ritiene per $\phi(\alpha')$ il valore $\phi_1(\alpha')$ calcolato per mezzo della formula di interpolazione semplice, già indicata precedentemente,

$$\phi_1(\alpha') = \phi(\alpha_k) + [\phi(\alpha_{k+1}) - \phi(\alpha_k)] \frac{\alpha' - \alpha_k}{\alpha_{k+1} - \alpha_k}.$$

Se invece di una sola variabile se ne debbono considerare due α e β , allora la disposizione conveniente alla tavola numerica, che deve servire a determinare i valori della funzione, è alquanto diversa. La predetta tavola consta di una prima colonna verticale, in cui sono iscritti i valori di α da prendere in considerazione compresi fra i valori limiti α_1 ed α_n (questi ultimi compresi). Lateralmente a questa prima colonna se ne tracciano tante altre quanti sono i valori $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_p, \dots, \beta_m$ della variabile β che si prendono in esame, avendo cura di scrivere in testa ad ogni colonna i successivi valori $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p, \dots, \beta_m$. In corrispondenza di ogni valore α_k , ed in linea orizzontale col medesimo, si scrive nella p^{esima} colonna il valore corrispondente $\phi(\alpha_k, \beta_p)$ della funzione $\phi(\alpha, \beta)$, avendo cura di contemplare tutte le permutazioni possibili di α_k e β_p , assegnando rispettivamente a k e p i valori dei numeri interi compresi fra 1 ed n e fra 1 ed m (gli estremi compresi). Completato il quadro, i valori della funzione corrispondenti a quelli delle variabili contemplati nella formazione del quadro si ottengono immediatamente ed in modo esatto dal quadro stesso, i valori poi della funzione corrispondenti a valori delle variabili intermedi e compresi fra quelli iscritti nel quadro si ottengono in via approssimata mediante interpolazione lineare. Siano α' e β' due valori di α e β rispettivamente compresi fra α_k ed α_{k+1} e fra β_p e β_{p+1} , si ritiene per valore di $\phi(\alpha', \beta')$ quello ottenuto mediante interpolazione lineare, o per parti proporzionali, $\phi_1(\alpha', \beta')$ calcolato colla formula

$$\phi_1(\alpha', \beta') = \phi(\alpha_k, \beta_p) + \frac{\beta' - \beta_p}{\beta_{p+1} - \beta_p} \left[\frac{\alpha' - \alpha_k}{\alpha_{k+1} - \alpha_k} (\phi(\alpha_{k+1}, \beta_{p+1}) - \phi(\alpha_k, \beta_{p+1})) - \frac{\alpha' - \alpha_k}{\alpha_{k+1} - \alpha_k} (\phi(\alpha_{k+1}, \beta_p) - \phi(\alpha_k, \beta_p)) \right]$$

Tale sostituzione di valori od approssimazione di calcolo, come si è già osservato superiormente, potrà sempre essere accettata come sufficientemente approssimata tutte le volte che

$$\phi(\alpha', \beta') - \phi_1(\alpha', \beta')$$

sia minore delle quantità, che in relazione alla natura del calcolo che si vuole eseguire, si ritengono come utilmente apprezzabili.

Se la funzione ϕ dipende da tre variabili α , β e γ , allora, scelto coi criteri suesposti i limiti entro i quali le dette variabili debbono variare e l'intervallo fra i loro valori successivi, la tavola numerica consta di tanti quadri numerici quanti sono i valori considerati di una delle variabili, per es., γ (ordinariamente quella che ammette un minor numero di valori utili). In testa a ciascun quadro si scrive il valore corrispondente γ_i della variabile γ , esso poi comprende tante linee orizzontali e tante colonne, quanti sono rispettivamente i valori utili di α e di β , scrivendo all'origine di ogni linea ed in testa di ogni colonna rispettivamente il valore di α_k e β_p corrispondente delle variabili α e β , e nel punto d'incontro della k esima linea colla p esima colonna del quadro, il valore $\phi(\alpha_k, \beta_p, \gamma_i)$ della funzione $\phi(\alpha, \beta, \gamma)$, in cui k, p , debbono assumere in ciascun quadro tutti i valori compatibili coi valori considerati delle variabili α e β , come è stato detto nel caso precedente.

Pei valori di α , β e γ compresi nei varî quadri si ottiene in modo esatto il valore della funzione $\phi(\alpha, \beta, \gamma)$; per quelli invece, che sono compresi fra i valori contemplati nei varî quadri, o si prende in via largamente approssimata il valore di $\phi(\alpha, \beta, \gamma)$ corrispondente ai valori immediatamente superiori od inferiori delle variabili, oppure, con maggiore approssimazione, si determina il valore di $\phi(\alpha, \beta, \gamma)$ interpolando per parti proporzionali in modo analogo a quello indicato nei due casi precedenti. Con una serie di gruppi di quadri, si possono costruire tavole numeriche pel calcolo di funzioni a quattro variabili, ecc., ma, oltrecchè tali casi si presentano raramente in pratica, l'uso di simili quadri o tavole diventa malagevole, ed in generale, esclusa fatta di qualche caso affatto speciale, non è consigliabile. Sembra quindi inutile fermarsi a descrivere il loro modo di calcolo, tanto più che esso è in tutto analogo a quelli indicati nei casi precedenti, sebbene più complesso, in causa di dover considerare la variazione di altre quantità in più delle tre già esaminate, e si può dedurre da essi con tutta facilità senza bisogno di ulteriori spiegazioni.

Un bell'esempio dell'uso di tavole numeriche a semplice, doppia e tripla entrata, cioè pel calcolo di funzioni che dipendono da una, da due, oppure da tre variabili, viene dato dal BRESSE per

la risoluzione del problema accennato nella parte I, numero 79 pagina 275, cioè per la determinazione del valore della spinta orizzontale Q prodotta da un arco simmetrico a fibra media circolare, coll'asse esistente in un piano verticale, riposante a cerniera sopra appoggi di livello ed immobili, caricato da pesi.

Il BRESSE (*) dimostra che la spinta Q è uguale al carico agente sull'arco moltiplicato per due coefficienti F e H , dei quali, il primo ha influenza predominante e dà un primo valore della spinta largamente approssimato, e lo chiama coefficiente principale, il secondo invece ha minore importanza, esso lo indica col nome di coefficiente di correzione, e serve ad ottenere un valore più esatto della spinta stessa. Nel caso che l'arco sia caricato da un peso uniformemente distribuito rispetto alla sua corda, il coefficiente F dipende unicamente dal rapporto dell'angolo al centro 2ϕ dell'arco (*Fig. 65, tav. XIV*) a π , quindi esso raccoglie in una colonna i valori utili di $\frac{2\phi}{\pi} = \alpha$, e nell'altra i corrispondenti valori di F , componendo così una tavola numerica a semplice entrata nel modo che indichiamo, riproducendo una parte della tavola stessa:

$\frac{2\phi}{\pi} = \alpha$	$F = f(\alpha)$	$\frac{2\phi}{\pi} = \alpha$	$F = f(\alpha)$
0,12	2,641	0,18	1,751
0,13	2,436	0,19	1,657
0,14	2,261	0,20	1,573
0,15	2,108	0,21	1,496
0,16	1,974	0,22	1,426
0,17	1,856	. . .	. . .

questa tavola di valori numerici permette di determinare, direttamente, o per interpolazione, il valore di F corrispondente ad un valore qualsiasi del rapporto $\alpha = \frac{2\phi}{\pi}$.

(*) BRESSE, *Cours de Mécanique appliquée*, Seconda edizione, parte prima, pag. 238 e seguenti.

Da questa tavola si ottengono immediatamente i valori di F corrispondenti a valori di α e β compresi fra i limiti del quadro ed iscritti nel medesimo,

per $\alpha=0,15$ e $\beta=0,20$ $F=3,132$

$\alpha=0,19$ $\beta=0,90$ $F=0,403$

Pei valori di α e β non iscritti nella tavola numerica superiore il valore di F si ottiene approssimativamente mediante interpolazione lineare. Proseguendo ulteriormente lo studio degli archi circolari elastici il BRESSE introduce anche l'uso di una tavola a tripla entrata; sembra però superfluo il riportarla, anche solo parzialmente come esempio, poichè quanto è stato detto superiormente non lascia alcun dubbio sul modo di composizione di tali tavole e sul loro uso. In generale le tavole numeriche pel calcolo delle funzioni richiedono un lavoro piuttosto lungo per la loro formazione; una volta però che esse siano state composte, tornano molto utili, specialmente quando si debba ripetere sovente lo stesso calcolo, come avviene nel valutare i volumi di sterro e riporto nelle costruzioni stradali, nel calcolo degli spessori da assegnare ai muri per sostegno di terre o di acque, per la risoluzione rapida di certi problemi di costruzione, nella redazione di progetti di massima, ecc., ecc. (*)

b) *Tavole grafiche.* — Come le tavole numeriche così possono anche servire per la determinazione dei valori, che può assumere una funzione, delle tavole grafiche, la cui costruzione si può far dipendere da alcuni principî semplicissimi, che nel loro insieme costituiscono ciò che l'Ingegnere D'OCAGNE ha chiamato nomografia, ossia la scienza che ha per scopo la rappresentazione geometrica della legge, che collega il valore di una data funzione con quello delle variabili da cui dipende.

$$\text{Sia} \qquad F(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \qquad (E) \qquad (40)$$

una relazione fra tre variabili, essa potrà sempre essere riguardata come il risultato dell'eliminazione della α e della γ fra le tre seguenti equazioni:

(*) Una tavola numerica può dare il valore di una funzione od anche soltanto quello di uno o più termini o fattori che entrino nella medesima.

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, \alpha) &= 0 & (\varepsilon_1) \\ \phi(x, y, \beta) &= 0 & (\varepsilon_2) & (\varepsilon) \\ \psi(x, y, \gamma) &= 0 & (\varepsilon_3) \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

delle quali, data E , due possono essere assunte ad arbitrio, la terza invece riesce determinata, perchè deve essere il risultato dell'eliminazione di α e β fra $\{E\}$, (ε_1) ed (ε_2) . Riferendoci alle coordinate cartesiane ad assi ortogonali, se si tracciano le curve corrispondenti alle equazioni (ε_1) , (ε_2) ed (ε_3) dando ad α , β e γ valori diversi e succedentisi in modo che l'intervallo compreso fra due valori successivi abbia sempre lo stesso valore, od almeno valori non molto diversi, si otterranno tre sistemi di linee corrispondenti ordinatamente ai successivi valori di α , β e γ . Se nelle equazioni (ε) si suppone che una delle tre variabili, per es. α , sia rappresentata dalla terza coordinata z ; le linee accennate superiormente, e che corrispondono a valori determinati α_k di α , rappresentano la proiezione sul piano delle x , y della intersezione della superficie (ε_1) col piano parallelo agli assi OX ed OY , che ha per equazione $z = \alpha_k$. La stessa cosa deve dirsi per (ε_2) ed (ε_3) se si prendono in esame i diversi valori delle variabili β e γ . Se gli intervalli $\delta\alpha_k = \alpha_{k+1} - \alpha_k$ $\delta\beta_p = \beta_{p+1} - \beta_p$. . . sono tutti uguali allora le dette linee geometricamente corrispondono alle ordinarie curve di livello equidistanti (verticalmente) delle superficie (ε) e poichè non si tratta di altezze vere e reali, ma soltanto di linee intersezioni con una superficie convenzionale e per le quali α , β , γ hanno un valore costante, così le distingueremo col nome di linee di uguale valenza od *isoplete* (*). Se gli intervalli fra i valori delle variabili sono stati scelti in modo che fra due isoplete di una stessa serie sia accettabile con sufficiente approssimazione l'interpolazione lineare fatta nello stesso modo che si usa fra le curve di livello, che rappresentano l'andamento di una superficie accidentata, cosa che si può sempre fare poichè l'importanza dell'intervallo fra i valori delle variabili dipende unicamente dalla volontà di chi compone la tavola, allora è evidente che per ogni punto del piano si possono assegnare con sufficiente approssimazione i valori caratteristici di ciascuna delle tre isoplete passante pel medesimo, e quindi anche, determinato un punto come intersezione di due isoplete appartenenti a due diversi sistemi (per es. (ε_1)

(*) Parola proposta da VÖGLER e adottata da LALANNE.

ed (ε_3)), si può tracciare l'isopleta passante per lo stesso punto ed appartenente al terzo sistema. Le tre isoplete, o curve di uguale valenza, passanti per un punto rappresentano evidentemente una terna di valori α, β, γ soddisfacenti alla equazione (E) $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ considerata come il risultato della eliminazione di x ed y fra le tre equazioni (ε_1) , (ε_2) ed (ε_3) . Segue da ciò che il piano punteggiato, ossia l'insieme di tutti i punti del piano della figura, rappresenta tutte le soluzioni compatibili della relazione (E) , cioè tutte le terne di valori α, β, γ , le quali soddisfano alla equazione $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, e che, dati i valori di due variabili (per es. α e β), sono determinate due isoplete appartenenti a due sistemi; tracciando l'isopleta del terzo sistema passante pel loro punto d'incontro M si ottiene il valore corrispondente della terza variabile (Vedi Fig. 66, *lav. XIV*; M è il punto in cui si intersecano le isoplete $\alpha_k, \beta_p, \gamma_i$).

È però evidente, in causa della natura delle operazioni grafiche da eseguire nei singoli casi, che, se le isoplete hanno forma curvilinea, la costruzione delle medesime e l'interpolazione diventano difficili, complesse e molte volte anche non possono dare garanzia di grande esattezza, quindi il problema della determinazione dei valori di una funzione col mezzo delle tavole grafiche non può dirsi praticamente risoluto altrocchè quando si possa far dipendere da costruzioni, che siano effettuabili totalmente, o per la maggior parte almeno, colla riga e col compasso.

Perchè i tre sistemi di isoplete siano formati da linee rette è necessario che le equazioni (ε_1) , (ε_2) , (ε_3) siano lineari in x ed y , cioè che esse abbiano la forma

$$\left. \begin{aligned} x f_1(x) + y f_2(x) + f_3(x) &= 0 & (\varepsilon_1) \\ x \phi_1(\beta) + y \phi_2(\beta) + \phi_3(\beta) &= 0 & (\varepsilon_2) \\ x \psi_1(\gamma) + y \psi_2(\gamma) + \psi_3(\gamma) &= 0 & (\varepsilon_3) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

e quindi che l'equazione (E) sia il risultato dell'eliminazione delle x ed y fra le tre relazioni superiori, cioè che essa sia espressa da

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{vmatrix} f_1(x), f_2(x), f_3(x) \\ \phi_1(\beta), \phi_2(\beta), \phi_3(\beta) \\ \psi_1(\gamma), \psi_2(\gamma), \psi_3(\gamma) \end{vmatrix} = 0 \quad (E) \quad (43).$$

Non è cosa facile e non è neppure nell'indole di questo lavoro determinare i criterî per riconoscere se una equazione $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ soddisfi a questa condizione (*); qui ci basta osservare che le funzioni, che l'ingegnere incontra nell'esercizio della sua professione, hanno ordinariamente una forma semplice, od almeno non molto complessa, per cui in generale è facile, dopo qualche tentativo, riconoscere se la detta funzione entra o no nella categoria di quelle equazioni, alle quali corrispondono tre sistemi di isoplete rettilinee, ossia se soddisfa alla condizione (43) (E).

Se si prende in esame la funzione

$$f(\alpha)\psi_1(\gamma) + \phi(\beta)\psi_2(\gamma) + \psi_3(\gamma) = 0 \quad (E) \quad (44)$$

si riconosce subito che essa ha una forma tale da soddisfare alla condizione (43), infatti basta porre

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= 1 & f_2(\alpha) &= 0 & f_3(\alpha) &= -f(\alpha) \\ \phi_1(\beta) &= 0 & \phi_2(\beta) &= 1 & \phi_3(\beta) &= -\phi(\beta) \end{aligned}$$

perchè sia

$$f(\alpha)\psi_1(\gamma) + \phi(\beta)\psi_2(\gamma) + \psi_3(\gamma) = \begin{vmatrix} 1, & 0, & -f(\alpha) \\ 0, & 1, & -\phi(\beta) \\ \psi_1(\gamma), & \psi_2(\gamma), & \psi_3(\gamma) \end{vmatrix} = 0.$$

Assumendo

$$\left. \begin{aligned} x - f(\alpha) &= 0 & (e_1) \\ y - \phi(\beta) &= 0 & (e_2) \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

la relazione (E) (44) prende la forma

$$x\psi_1(\gamma) + y\psi_2(\gamma) + \psi_3(\gamma) = 0 \quad (e_3) \quad (46)$$

e le tre equazioni (e) delle isoplete sono tutte lineari in x ed y .

Il metodo ordinario di rappresentare una funzione $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, che in molti casi può dare ottimi risultati pel calcolo di uno dei valori delle variabili, noti gli altri due, consiste nel porre

(*) Un caso particolare è stato studiato da LECORNU, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, vol. CII, pag. 815. Vedi M. D'OCAGNE, Opera citata.

$$x = \alpha \quad (\varepsilon_1)$$

$$y = \beta \quad (\varepsilon_2)$$

e quindi

$$F(x, y, \gamma) = 0 \quad (\varepsilon_3).$$

Le isoplete (ε_1) ed (ε_2) corrispondenti ai valori di α e di β sono sempre serie di rette parallele agli assi coordinati ed ordinariamente equidistanti fra loro; le isoplete (ε_3) corrispondenti ai valori di γ sono invece generalmente linee curve più o meno difficili a tracciare a seconda dei casi. Se questo metodo fosse stato applicato all'equazione (44) si sarebbe ottenuto per le isoplete (ε_3) una serie di linee curve, invece ponendo

$$x = f(\alpha) \quad (\varepsilon_1)$$

$$y = \phi(\beta) \quad (\varepsilon_2)$$

$$x\psi_1(\gamma) + y\psi_2(\gamma) + \psi_3(\gamma) = 0 \quad (\varepsilon_3)$$

tutte le tre serie di isoplete sono composte di linee rette; le linee di ugual valenza (ε_1) ed (ε_2) sono ancora normali agli assi coordinati, ma la loro distanza dall'origine delle coordinate invece di essere proporzionale ai valori di α e di β , lo è invece ai valori delle funzioni $f(\alpha)$ e $\phi(\beta)$. Si comprende facilmente come in questo caso non sia assolutamente necessario tracciare tutte le isoplete (ε_1) ed (ε_2) perchè esse costituiscono due sistemi di rette parallele e rispettivamente normali agli assi x ed y ; sarà in generale sufficiente indicare i loro punti d'incontro cogli assi coordinati scrivendovi accanto il numero rappresentativo della isopleta corrispondente. In tal modo si vengono a segnare sugli assi coordinati due scale graduate secondo una legge particolare ($x = f(\alpha)$, $y = \phi(\beta)$) sulle quali leggendo i valori di α e β e tirando pei punti corrispondenti due rette normali rispettivamente all'asse delle x e delle y si ottiene nella loro intersezione il punto, pel quale passa la terza isopleta (ε_3) , quindi il valore di γ , oppure, con processo inverso, dato da γ ed α si ottiene β , e dato γ e β si può avere il valore corrispondente di α . Questo modo particolare di rappresentare i valori di una funzione dà origine ad una vera deformazione della figura tracciata prendendo per isoplete (ε_1) ed (ε_2) rispettivamente $x = \alpha$ ed $y = \beta$, per cui il terzo sistema di isoplete risulta composto di linee rette invece che di curve, e costituisce ciò che LALANNE chiama il *principio dell'anamorfosi*. Esso consiste

in ciò che altri chiamano il principio di graduazione delle coordinate e discende naturalmente dalle considerazioni superiori ponendo $x=f(\alpha)$, $y=\phi(\beta)$. Infatti se si prende in esame un'equazione qualsiasi $F_1(x, y)=0$ a cui corrisponde una curva F_1 , e si graduano gli assi coordinati con una certa legge, le coordinate x' ed y' di un punto saranno in un determinato rapporto colle coordinate x ed y misurate ad una scala ordinaria di parti uguali, cioè sarà $x'=f'(x)$, $y'=\phi'(y)$ e se nell'equazione $F_1(x, y)=0$ si sostituiscono ad x ed y i loro valori in funzione di x' ed y' si otterrà una nuova equazione $F_1'(x', y')=0$ a cui corrisponderà una nuova curva F_1' , che sarà più semplice della precedente se la graduazione degli assi è stata fatta convenientemente. Questo risultato è specialmente importante quando permette di sostituire delle curve con delle linee rette, cosa che può farsi quando si verificano le condizioni esposte superiormente. Una delle applicazioni più conosciute di questo principio di *deformazione* o d'*anamorfosi* è quella fatta alle carte marine, nota sotto il nome di *proiezione di MERCATORE*.

Se le isoplete di ciascun sistema, oltre ad essere rettilinee, sono anche parallele fra loro, per l'analogia esistente fra le isoplete e le linee di livello si può impiegare un modo di rappresentazione analogo a quello, che nel disegno a quote si usa pei piani inclinati; infatti in tal caso le superficie (ϵ_1), (ϵ_2) ed (ϵ_3) o sono piani o sono superficie cilindriche colle generatrici parallele al piano delle x , y . Ciò equivale a dire che si potrà tralasciare di segnare le varie isoplete e limitarsi a tracciare una retta normale alla loro direzione e quotata in modo che le varie quote rappresentino successivamente il valore della isopleta passante pel punto, contro il quale essa è segnata, come è già stato indicato superiormente in via incidentale per un caso particolare discutendo le relazioni (45) e (46); tali rette quotate possono chiamarsi *scale di valenza* del sistema di isoplete rettilinee e parallele cui corrispondono. In tal modo per un punto qualsiasi del piano M (Fig. 67, tav. XIV) si determina la terna di isoplete, o di valori corrispondenti, abbassando dal medesimo le perpendicolari sulle tre scale di valenza, o, più semplicemente, se si ha un trasparente qualsiasi (un foglio di carta, una lastra di vetro, ecc.) sul quale siano tracciate le tre direzioni normali alle tre scale di valenza, questo in ogni posizione dà una terna di valori delle variabili nei punti in cui le tre direzioni incontrano le scale stesse; dati quindi due di questi valori rimane immediatamente determinato il terzo muovendo e disponendo opportunamente nel piano il trasparente stesso (Fig. 67^a, tav. XIV).

La condizione perchè le isoplete siano tutte rette parallele è espressa dal fatto che i coefficienti angolari delle loro equazioni abbiano valori costanti, in guisa che esse possano essere scritte sotto la forma

$$y = \lambda_1 x + f(\alpha)$$

$$y = \lambda_2 x + \phi(\beta)$$

$$y = \lambda_3 x + \psi(\gamma)$$

e quindi l'equazione (E), risultato della eliminazione di x ed y fra le relazioni (ϵ), dovrà avere la forma

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & -1 & f(\alpha) \\ \lambda_2 & -1 & \phi(\beta) \\ \lambda_3 & -1 & \psi(\gamma) \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda_3 - \lambda_2) f(\alpha) + (\lambda_1 - \lambda_3) \phi(\beta) + (\lambda_2 - \lambda_1) \psi(\gamma) = 0$$

che è quanto dire, essendo λ_1 , λ_2 , e λ_3 quantità costanti, che (E) deve avere la forma

$$f(\alpha) + \phi(\beta) = \psi(\gamma) \quad (47).$$

Per un'equazione che abbia la forma (47) o possa ridursi ad essa è naturale scegliere come equazioni (ϵ_1) ed (ϵ_2)

$$x = f(\alpha) \quad (\epsilon_1)$$

$$y = \phi(\beta) \quad (\epsilon_2)$$

e quindi

$$x + y = \psi(\gamma) \quad (\epsilon_3)$$

in guisa che l'asse delle x e delle y opportunamente quotati costituiscono le scale di valenza dei primi due sistemi di isoplete (ϵ_1) ed (ϵ_2), il terzo sistema poi di isoplete è formato da rette, che fanno un'angolo negativo di 45 gradi coll'asse delle x , quindi la loro scala di valenza sarà diretta secondo la bisettrice OZ_1 dell'angolo positivo degli assi coordinati (*Fig. 68^a, tav. XIV*) e potrà essere facilmente quotata osservando che per una isopleta qualsiasi dovrà essere $x + y = \psi(\gamma)$, quindi, considerando il punto S , in

cui essa incontra la scala, dovranno verificarsi le relazioni

$$x + y = \psi(\gamma) \quad x = y = OS \cos 45^\circ = \frac{OS}{\sqrt{2}}$$

ossia

$$OS = \frac{\psi(\gamma)}{\sqrt{2}}$$

relazione che permette di tracciare immediatamente la terza scala di valenza quando sono noti i successivi valori di $\psi(\gamma)$.

L'ingegnere LALLEMAND, volendo evitare di moltiplicare per $\frac{1}{\sqrt{2}}$ i valori di $\psi(\gamma)$ per ottenere la terza scala, prende gli assi coordinati inclinati in modo (*Fig. 69^a, tav. XIV*) che sia

$$XOY = \frac{2\pi}{3} \quad XOZ_1 = Z_1OY = \frac{\pi}{3} \quad XOY_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Tracciate le scale di valenza per $x = f(\alpha)$ e per $y = \phi(\beta)$ rispettivamente sugli assi OX ed OY , la terza equazione (ε_3) per un'isopleta qualsiasi mn dà $x + y = \psi(\gamma)$, e pel punto S , in cui essa incontra la corrispondente scala di valenza, si debbono verificare le relazioni

$$x + y = \psi(\gamma) \quad x = y = OS \cos \frac{\pi}{3} = \frac{OS}{2}$$

quindi

$$OS = 2x = 2Oa = 2Ob = \psi(\gamma) \quad (*).$$

(*) Questa proprietà può dedursi elementarmente considerando nella figura 69 (*Tav. XIV*) un punto qualsiasi Q , per esso infatti si deve verificare la relazione

$$\begin{aligned} x + y = Oc + Od &= Oa - ac + Ob + bd = Oa + Ob - ac + bd = Oa + Ob - \\ &- SQ \cos \frac{\pi}{6} + SQ \cos \frac{\pi}{6} = Oa + Ob = OS \cos \frac{\pi}{3} + OS \cos \frac{\pi}{3} = \\ &= 2 OS \cos \frac{\pi}{3} = 2 \frac{OS}{2} = OS \end{aligned}$$

ma $x + y = \psi(\gamma)$ per ipotesi, quindi $OS = \psi(\gamma)$.

Riferendosi agli assi coordinati ortogonali XOY_1 l'equazione della retta mn sarebbe

$$y_1 = -x \tan \frac{\pi}{6} + \frac{OS}{\cos \frac{\pi}{6}}$$

Quindi per costruire le tre scale di valenza basta portare rispettivamente sugli assi OX , OY ed OZ , delle lunghezze proporzionali ordinatamente a $f(\alpha)$, $\phi(\beta)$ e $\psi(\gamma)$, e poichè, stabilita la scala, questa può essere trasportata parallelamente a sè stessa in modo che ogni punto descriva una retta normale alla sua direzione senza che venga alcuna alterazione nella lettura, la retta OZ_1 può trasportarsi nella posizione qualsiasi AZ_2 dando così origine alle tavole grafiche del LALLEMAND, dette anche tavole esagonali, perchè le tre scale hanno le inclinazioni di tre lati consecutivi di un esagono regolare. Le scale di valenza qualche volta si pongono ai limiti del disegno o del foglio come è indicato nella figura 70^a (Tav. XIV) e ciò per semplice comodità di uso; in tal caso le tre scale costituiscono un triangolo equilatero fondamentale o di riferimento per l'uso della tavola grafica.

Se la funzione (E) è tale che possa essere messa sotto la forma

$$\alpha = \phi(\beta, \gamma) \quad (48)$$

allora la forma più semplice da assumere per le isoplete (ε_1) ed (ε_2) può essere una delle due seguenti

$$\left. \begin{array}{ll} x = \alpha & (\varepsilon_1) \\ y = \beta & (\varepsilon_2) \end{array} \right\} (49) \quad \left. \begin{array}{ll} x = \frac{y}{\alpha} & (\varepsilon_1) \\ y = \beta & (\varepsilon_2) \end{array} \right\} (50)$$

e quindi la (ε_3) risulta ordinatamente

$$x = \phi(y, \gamma) \quad (\varepsilon_2) \quad \frac{y}{x} = \phi(y, \gamma) \quad (\varepsilon_3)$$

Nel primo caso i valori della funzione (E) sono rappresentati dalle ascisse dei punti d'incontro delle rette $y = \beta$ colle curve $x = \phi(y, \gamma)$; questi valori segnati sull'asse dalle x , OX (Fig. 71, tav. XV) costituiscono una scala di valenza, che potrà essere chiamata *scala binaria* per distinguerla dalle precedenti, che dipendono da valori di una sola variabile, mentre questa tiene conto dei valori di due quantità, e può servire utilmente per rendere di una applicazione più generale l'uso dei diagrammi a tre sistemi di isoplete rettilinee e parallele. Infatti se si ha una funzione della forma

$$f(\alpha, \delta) + \phi(\beta, \varepsilon) = \psi(\gamma, \eta) \quad (51)$$

e si pone

$$x_1 = f(\alpha, \delta)$$

$$x_2 = \phi(\beta, \varepsilon)$$

$$x_3 = \psi(\gamma, \eta)$$

essa si riduce immediatamente al tipo (47)

$$x_1 + x_2 = x_3$$

rappresentabile con mezzo di isoplete rettilinee e parallele.

Costruite quindi le tre scale binarie $O_1 x_1$, $O_2 x_2$, $O_3 x_3$ (*Fig. 72^a, tav. XV*) queste potranno servire come in un diagramma esagonale ordinario per la ricerca di un gruppo di valori corrispondenti delle variabili. Dalla figura risulta che

$$\text{per } \alpha = \alpha_k \quad \delta = \delta_r \quad \text{è} \quad x_1 = x_1^{(k,r)}$$

$$\text{per } \beta = \beta_p \quad \varepsilon = \varepsilon_s \quad \text{è} \quad x_2 = x_2^{(p,s)}$$

quindi

$$x_3 = x_3^{(i,t)} \quad \text{e se} \quad \eta = \eta_i \quad \text{sarà} \quad \gamma = \gamma_i.$$

Nel secondo caso, cioè quando si prendono come isoplete le linee rappresentate dalle relazioni (50), si ottiene per i vari valori di β e di γ un fascio di rette uscenti dall'origine O degli assi coordinati, i cui coefficienti angolari rappresentano i valori α della funzione $\phi(\beta, \gamma)$. Una terna di valori corrispondenti α_k , β_p , γ_i si ottiene congiungendo coll'origine O delle coordinate il punto C (*Fig. 73^a, tav. XV*) in cui si incontrano le isoplete

$$y = \beta_p \quad \text{ed} \quad \frac{y}{x} = \phi(\gamma, \gamma_i).$$

L'insieme delle rette CO può dirsi *fascio di valenza binaria* od anche *scala binaria raggianti*, poichè serve a far conoscere il valore di una funzione di due variabili, e può essere utilizzato in modo analogo a quello indicato superiormente per le scale binarie rettilinee. Torna acconcio osservare che il metodo delle scale binarie suppone la divisione delle diverse variabili in gruppi di due;

una stessa variabile può entrare in due gruppi contemporaneamente, ma allora essa non può essere presa come incognita. Perchè il processo sia applicabile bisogna che siano determinate due isoplete, le quali col loro punto d'incontro stabiliscono la posizione della terza isopleta, che serve a fissare il valore dell'incognita; se l'incognita entra in due scale binarie una sola isopleta rimane determinata di posizione, quindi non è possibile trovare il valore dell'incognita cercata.

In entrambi questi casi alle isoplete (ε_3) corrisponderanno in genere linee curve, però se l'equazione (E) soddisfa alle condizioni (43) o più particolarmente se essa può dedursi dalla (44) facendo

$$\psi_1(\gamma) = -1 \quad f(\alpha) = \alpha$$

in guisa da prendere la forma

$$\alpha = \phi(\beta) \psi_2(\gamma) + \psi_3(\gamma) \quad (52)$$

in tal caso può essere applicato il metodo di trasformazione del LALANNE (anamorfosi) ponendo rispettivamente

$$x = \alpha \quad (\varepsilon_1) \quad x = \frac{1}{\phi(\beta)} \quad (\varepsilon_1)$$

$$y = \phi(\beta) \quad (\varepsilon_2) \quad y = \alpha x \quad (\varepsilon_2)$$

poichè allora si ottengono per (ε_3) delle equazioni lineari

$$x = y \psi_2(\gamma) + \psi_3(\gamma) \quad y = \psi_2(\gamma) + x \psi_3(\gamma)$$

ed i tre sistemi di isoplete sono tutti formati da linee rette, cosa che semplifica molto e rende più facile l'uso della tavola grafica.

Finalmente la funzione (E) qualche volta può mettersi sotto la forma

$$\gamma = F'(\alpha, \beta) + F''(\alpha, \beta)$$

in tal caso dev'essere evidentemente rappresentare i valori delle due funzioni

$$\gamma' = F'(\alpha, \beta) \quad \gamma'' = F''(\alpha, \beta)$$

e sommare i risultati. Tale operazione può essere fatta mediante un solo disegno scegliendo per entrambe le equazioni gli stessi

sistemi di isoplete (ϵ_1) ed (ϵ_2). Usando di questo espediente si avranno in generale due scale di valenza comuni alle due equazioni ed un reticolato formato dai due sistemi di curve corrispondenti alle due equazioni (ϵ_3), ossia dal terzo gruppo di isoplete corrispondenti a $\gamma' = F'(\alpha, \beta)$ e $\gamma'' = F''(\alpha, \beta)$. Nel caso particolare che una di queste funzioni per es. $\gamma' = F'(\alpha, \beta)$ possa essere rappresentata mediante tre sistemi di isoplete rettilinee e parallele, allora il disegno risulta composto (Fig. 74^a, tav. XV) delle tre scale di valenza corrispondenti a $\gamma' = F'(\alpha, \beta)$, che potranno essere tracciate per quella sola parte che interessa nelle applicazioni. La determinazione di γ_i corrispondente ai valori di α_k e β_p viene fatta nel modo seguente: fissati sulle scale di valenza i punti α_k e β_p si conducano da essi le normali alle scale $\alpha\alpha$ e $\beta\beta$ ad intersecarsi in C , per C si tiri $C\gamma_i'$ normale alla terza scala e per interpolazione si determini la curva γ_i'' passante per lo stesso punto C , il valore γ_i è dato da

$$\gamma_i = \gamma_i' + \gamma_i'' \quad (53).$$

Le curve che danno i valori γ'' vengono, dette *scale addizionali*, perchè in realtà servano a calcolare il valore della somma di due funzioni: come si è già osservato più volte sarà sufficiente che tanto le scale di valenza, quanto le varie isoplete, siano segnate in una determinata tavola grafica soltanto pel tratto, a cui corrispondono in pratica valori utili.

L'uso delle scale binarie ed addizionali permette la rappresentazione grafica di funzioni complesse di più variabili, non sembra però interessante per ora spingere più avanti questa analisi; in pratica non occorre in generale fare applicazioni che escano dal campo delle proprietà studiate, ogni caso particolare può ordinariamente essere riguardato come una conseguenza di quanto è stato detto superiormente in quanto che il metodo è completamente tracciato ed il suo uso non può presentare difficoltà alcuna, tanto più che si presenterà in seguito l'occasione di farne varie applicazioni. Si ritiene invece essere cosa utile mostrare come l'uso del principio geometrico di dualità e la trasformazione correlativa delle figure piane possa in molti casi essere utilizzata con vantaggio per la rappresentazione e per il calcolo dei valori di una funzione(*).

È noto che un piano Σ considerato come forma geometrica di seconda specie (luogo di tutti i suoi punti oppure di tutte le sue

(*) D'OCAGNE, Opera citata.

rette) può sempre essere trasformato collinearmente o correlativamente stabilendo la corrispondenza fra quattro elementi fondamentali (punti o rette), tre dei quali non appartengano ad una stessa forma di prima specie contenuta nel medesimo, poichè in base a questa corrispondenza può essere determinata la posizione di un altro elemento qualsiasi (punto o retta). Infatti un quinto punto M (Fig. 75^a, tav. XV) può sempre essere considerato come il punto d'incontro di due raggi appartenenti ai fasci $(A, BMD C)$ e $(B, ADC M)$ per tre elementi dei quali (i raggi AB, AD, AC e BA, BD, BC) sono noti i tre elementi (raggi o punti) corrispondenti nell'altra figura Σ' , e quindi è determinata la forma geometrica di prima specie corrispondente ai fasci considerati; per una retta basterà ripetere la costruzione precedente per due dei suoi punti. Prendiamo in esame soltanto la trasformazione correlativa delle figure piane, cioè tale che ad un punto corrisponda una retta e viceversa, ad un punto che si muove in linea retta una retta che ruota intorno ad un punto, che è quello corrispondente alla retta generata dal punto mobile (punteggiata e fascio di raggi corrispondenti), e supponiamo che gli elementi fondamentali siano stati scelti in modo che al triangolo rettangolo $C_\infty OD_\infty$ (Fig. 76^a, tav. XV) con due vertici posti a distanza infinita corrisponda il trilatero $C_\infty AB$ avente due lati paralleli ed equidistanti da OY ed il terzo lato AB normale ad essi e giacente sulla retta OD_∞ , ed indichiamo con λ la distanza $OB = -OA$. Supponiamo inoltre fissato il senso positivo delle misure sui vari assi fatte a partire da O, A e B rispettivamente nelle direzioni OX, OY, AX' e BY' e la stessa unità di misura per tutti gli assi, cosa che notoriamente equivale a fissare la quarta coppia di elementi corrispondenti (punto e retta unità) che congiuntamente ai precedenti servono a fissare il valore del rapporto anarmonico o la proiettività fra le forme di prima specie, che entrano a formare le due figure correlative Σ e Σ' (*). Nel sistema Σ (piano punteggiato) un punto M è determinato dall'incontro di due rette MQ ed MP passanti pel medesimo, parallele agli assi fondamentali OX ed OY e distanti dai medesimi delle quantità $x = OP, y = OQ$, che sono dette coordinate cartesiane del punto e che lo individuano nel piano; nel sistema Σ' (piano rigato) l'elemento corrispondente al punto M , cioè la retta mm è fissata in posizione dalle distanze $AR = x' BS = y'$ dei suoi punti d'incontro cogli assi fondamentali AX' e BY' , e le x' ed y' sono dette coordinate parallele

(*) FIEDLER G., *Trattato di geometria descrittiva*.

della retta mm . Un luogo di elementi fra le cui coordinate passa una relazione lineare rappresenta nel piano Σ una serie di punti situati sulla retta, che ha per equazione la relazione stessa $ax + by + c = 0$, la stessa equazione $ax' + by' + c = 0$ rappresenta in Σ' una serie di rette passanti per un punto e per ciò essa può dirsi l'equazione del punto in coordinate parallele, infatti da questa relazione si ricava

$$\frac{x' + \frac{c}{a}}{y'} = -\frac{b}{a}$$

equazione che dimostra come le punteggiate determinate dalle coppie di valori corrispondenti di x' ed y' sono simili fra loro ed hanno il punto all'infinito corrispondente, quindi esse sono prospettive e le rette determinate dai punti corrispondenti passano tutte per uno stesso punto T .

Nell'equazione $ax' + by' + c = 0$ facciamo successivamente $x' = 0$ ed $y' = 0$, si ricavano allora rispettivamente per y' ed x' i valori

$$y_0' = -\frac{c}{b} \quad x_0' = -\frac{c}{a}$$

che chiameremo coordinate iniziali, perchè corrispondono ad un valore nullo dell'altra coordinata. Sulle rette AX' e BY' prendiamo due lunghezze

$$AG = -\frac{c}{a} = x_0' \quad BH = -\frac{c}{b} = y_0'$$

e tiriamo AH e BG , il punto T , comune alle due rette, è il centro del fascio di rette, le cui coordinate parallele soddisfano alla relazione

$$ax' + by' + c = 0$$

perchè AH e BG appartengono a questo fascio, e precisamente corrispondono rispettivamente ai valori

$$x' = 0 \quad y' = y_0' = -\frac{c}{b} \quad \text{ed} \quad x' = x_0' = -\frac{c}{a}, \quad y' = 0.$$

Nel sistema Σ il punto T è determinato per mezzo delle sue coordinate $OL = x_1$ ed $LT = y_1$, e dalla figura si ricavano le seguenti

relazioni

$$\frac{L T}{A L} = \frac{B H}{A B} \quad \frac{L T}{B L} = \frac{A G}{A B}$$

ed anche

$$L T = y_1 = B H \frac{A L}{A B} = -\frac{c}{b} \frac{\lambda + x_1}{2\lambda} \quad L T = y_1 = A G \frac{B L}{A B} = -\frac{c}{a} \frac{\lambda - x_1}{2\lambda}$$

confrontando i due valori di y_1 si ricava

$$\frac{c}{b} \frac{\lambda + x_1}{2\lambda} = \frac{c}{a} \frac{\lambda - x_1}{2\lambda}$$

e quindi

$$x_1 = \lambda \frac{b-a}{a+b} \quad y_1 = -\frac{c}{a+b} \quad (54).$$

Per un punto T posto sugli assi $A X'$ e $B Y'$ $x_1 = \mp \lambda$ quindi $a+b = \mp(b-a)$

$$\text{per } x_1 = \lambda \quad a = 0 \quad y = -\frac{c}{b} = y'$$

$$\text{per } x_1 = -\lambda \quad b = 0 \quad x = -\frac{c}{a} = x'$$

cioè le rette parallele agli assi $O X$, $O Y$ hanno per corrispondenti punti posti rispettivamente sugli assi $A X'$ e $B Y'$ e così disposti che per un punto e per la sua retta corrispondente

$$x = x' = -\frac{c}{a} \quad y = y' = -\frac{c}{b}$$

che è quanto dire che le coordinate cartesiane dei punti sono uguali alle coordinate parallele nelle rette corrispondenti, ed il passaggio da una figura Σ alla figura correlativa Σ' si può fare con somma facilità mediante operazioni eseguibili colla riga e col compasso prendendo come coordinate parallele di rette le coordinate cartesiane dei punti e viceversa. La condizione poi che tre rette passino per un punto si trasforma nell'altra che tre punti siano in linea retta.

Se si prende in esame una tavola grafica in cui siano tracciati i tre sistemi di isoplete (ε_1) (ε_2) (ε_3) corrispondenti ad un'equazione

(E) $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ avendo avuto cura di scegliere le (ϵ_1) ed (ϵ_2) in modo che si abbiano due sistemi di rette normali agli assi OX ed OY , per determinare i punti corrispondenti correlativamente ad esse (Fig. 77^a, tav. XVI) basta portare le corrispondenti scale di valenza rispettivamente sugli assi AX' e BY' . Se anche il terzo sistema di isoplete è formato da linee rette, nel piano Σ' gli corrisponderà in generale una curva, tracciata la quale, una terna di valori α, β, γ corrispondenti si ottiene osservando che essi in Σ sono date da tre rette passanti per un punto, quindi in Σ' si otterranno da tre punti posti in linea retta. Si congiunga α_k con β_p , il punto γ_i in cui la retta $\alpha_k \beta_p$ sega la curva γ dà il valore cercato della terza variabile. Se il terzo sistema di isoplete è formato in Σ da linee rette parallele od uscenti da un punto, allora la curva γ in Σ' si cambia in una retta rendendo oltremodo facile l'uso e la costruzione della tavola grafica.

L'ingegnere D'OCAGNE prende in esame anche dei punti, che esso chiama doppiamente isopleti, perchè tengono conto della variazione di due variabili. Supponiamo di trasformare correlativamente il piano Σ ad isoplete tutte rettilinee, cioè che soddisfano alle condizioni (42), nel quale però l'equazione (ϵ_1) invece che dipendere da un solo parametro α ne comprende due α e δ , ossia (ϵ_1) ha la forma generale $f(x, y, \alpha, \delta) = 0$ e più particolarmente

$$x f_1(\alpha, \delta) + y f_2(\alpha, \delta) + f_3(\alpha, \delta) = 0.$$

In tal caso ai sistemi di rette (ϵ_2) ed (ϵ_3) corrispondono in generale due curve β e γ , ed ai sistemi di rette, che si possono ottenere facendo variare α e δ , due sistemi di curve α e δ formanti reticolato (Fig. 78^a, tav. XVI), ed un gruppo di quattro valori corrispondenti si trova su una stessa retta, in guisa che congiungendo β_p con γ_i e costruendo per interpolazione la curva δ_r passante pel punto in cui $\beta_p \gamma_i$ interseca la curva α_k si ottiene il valore della quarta variabile δ_r .

È evidente che il metodo dei punti doppiamente isopleti può essere esteso in modo analogo a quello fatto per le scale binarie alla considerazione di funzioni dipendenti da cinque o sei variabili, l'uso dei trasparenti permette di allargare il campo di applicazione delle tavole grafiche sovrapponendo e rendendo mobili l'uno sull'altro due diagrammi, oppure le direzioni di assi determinati, come si è già accennato parlando dei diagrammi esagonali di LALLEMAND. Se si osserva che a tre curve passanti per un punto corrispondono correlativamente tre curve tangenti ad una stessa retta, correlativa al punto in cui si

intersecano le tre curve prese in esame, si comprende come si possano anche considerare isoplete tangenziali, le quali però non potranno avere interesse pratico che quando con tale espediente sia possibile sostituire dei punti isopleti a delle rette isoplete, ed in generale quando sia possibile passare da una figura complessa ad un'altra più semplice e più facile a tracciare. Le considerazioni però che si riferiscono a queste applicazioni sono di loro natura semplicissime e si deducono con facilità somma dalle cose esposte in modo analogo a quello usato nei vari casi presi in esame; non sembra quindi necessario svolgere ulteriormente questi concetti, i quali per ora non hanno applicazioni importanti che per quella parte che riflette quanto è stato detto superiormente.

Esposti così i metodi principali, coi quali possono essere composte le tavole grafiche pel calcolo dei valori di una variabile funzione di altre variabili nella risoluzione dei problemi, che si possono presentare all'ingegnere, esamineremo alcuni esempi per rendere più chiara l'intelligenza e l'uso delle predette tavole.

Sia (*E*) rappresentato dall'equazione $\alpha\beta=\gamma$, se si pone

$$x = \alpha \quad (\varepsilon_1)$$

$$y = \beta \quad (\varepsilon_2)$$

allora

$$xy = \gamma \quad (\varepsilon_3)$$

che dà per il terzo sistema (ε_3) isoplete iperboliche e conduce alla costruzione della tavola grafica di POUCHET indicata schematicamente nella figura 79^a (*Tav. XVI*). Se si osserva che per le proprietà dei logaritmi deve verificarsi la relazione

$$\log \alpha + \log \beta = \log \gamma$$

allora si ha un'equazione che entra nel caso già considerato che sia

$$\psi(\gamma) = f(\alpha) + \phi(\beta) \quad (47)$$

e che può essere rappresentato mediante due assi ortogonali aventi come scale di valenza

$$x = f(\alpha) = \log \alpha \quad (\varepsilon_1) \quad y = \phi(\beta) = \log \beta \quad (\varepsilon_2)$$

e per terza scala una retta OZ_1 inclinata a 45° sugli assi ed avente

per scala di valenza $z_1 = OC = \frac{\psi(\gamma)}{\sqrt{2}} = \frac{\log \gamma}{\sqrt{2}}$, conducendo le isoplete

(ε_1) , (ε_2) ed (ε_3) si ottiene una tavola grafica conosciuta sotto il nome di tavola di LALANNE (vedi *Fig. 80^a, tav. XVI*), oppure si può ricorrere ai diagrammi esagonali di LALLEMAND ponendo

$$x = f(\alpha) = \log \alpha \quad y = \phi(\beta) = \log \beta \quad z_1 = \psi(\gamma) = \log \gamma$$

come è indicato nella figura 81^a (*Tav. XVI*). Queste tavole possono servire per la moltiplica, divisione innalzamento a potenza ed estrazione di radice, poichè pel modo col quale sono costruite danno la somma, e quindi anche la differenza, di due o più segmenti, le cui lunghezze rappresentano i logaritmi, più particolarmente le mantisse, di due o più numeri. Non sembra necessario dare spiegazioni particolari sull'uso di queste tavole essendo presupposta una conoscenza esatta dell'uso dei logaritmi; nella figura 80^a (*Tav. XVI*) le quote di valenza corrispondenti alle rette (ε_3) normali alla diagonale OD rappresentano la somma delle coordinate cartesiane di ciascuno dei suoi punti, e quindi, avendo segnato sugli assi OX ed OY due scale logaritmiche, le quote predette corrispondono al numero, il cui logaritmo è uguale alla somma dei logaritmi considerati, cioè il prodotto dei numeri corrispondenti. Nella figura 81^a (*Tav. XVI*) in corrispondenza dei punti M_1 , M_2 ed M_3 sono indicate le costruzioni necessarie per ottenere ordinatamente i prodotti 2×9 , 2×2 e 2×3 servendosi di un diagramma o tavola grafica esagonale, o, più esattamente, di un diagramma triangolare, equivalente al diagramma esagonale di LALLEMAND, ottenuto trasportando parallelamente a se stesso e normalmente alla propria direzione l'asse OY in O_2Y_2 .

Se nella tavola di LALANNE (*Fig. 80^a, tav. XVI*) si conducono delle rette OD , OH , . . . in modo che sia

$$\text{tang. } DOX = \text{tang } \gamma_1 = 1 \quad \text{tang } HOX = \text{tang } \gamma_2 = 2 \quad . . .$$

è evidente che pei punti posti su tali rette le ordinate sono uguali, doppie, . . . delle assisse, quindi le isoplete (ε_3) passanti per quei punti portano una quota rispettivamente uguale al quadrato, al cubo . . . del numero corrispondente alla lunghezza che rappresenta l'ascissa. Questa proprietà permette di ottenere con molta speditezza le potenze e le radici di ordine secondo, terzo, . . . come è indicato nei punti C ed M per la ricerca di 2^2 e 2^3 e di $\sqrt{4}$ e $\sqrt[3]{8}$ senza essere obbligati a moltiplicare o dividere le lun-

ghezze rappresentanti i numeri dati per gli esponenti o per gli indici dei radicali. A titolo di semplice osservazione avvertiamo che coll'uso della tavola di LALANNE si possono ottenere facilmente altri risultati, per es., il volume di una sfera di raggio r conducendo LN parallela ad OH e distante dall'origine O di una lunghezza rappresentante il logaritmo di $\frac{4}{3}\pi$, l'area di un circolo conducendo PH parallela ad OD e distante dall'origine O di una lunghezza OP rappresentante il logaritmo di π , ecc. . . . (*)

(*) Giunge ora a nostra conoscenza un volume pubblicato nel giugno del 1892 dall'Ingegnere FERDINANDO SAMUELLI sui triangoli e rettangoli calcolatori. Questo pregevole studio redatto con molto ordine e copia di esempi insegna il modo di usare tavole grafiche speciali per ottenere prodotti, quozienti, potenze e radici di numeri in sostituzione del regolo calcolatore con un procedimento analogo a quello, col quale si può giungere allo stesso risultato servendosi della tavola di LALANNE, oppure dei diagrammi di LALLEMAND. I triangoli e rettangoli del SAMUELLI corrispondono ad una tavola grafica a tre sistemi di isoplete rettilinee e parallele relative a tre scale di valenza segnate su tre assi inclinati gli uni sugli altri di un angolo uguale a $\frac{\pi}{6}$, mentre nella tavola di LALANNE ed in quella di LALLEMAND gli assi comprendono angoli rappresentati rispettivamente da $\frac{\pi}{4}$ e da $\frac{\pi}{3}$.

Supponiamo di avere ancora l'equazione

$$\log \alpha + \log \beta = \log \gamma \quad (E)$$

e le equazioni delle tre isoplete

$$v = \cos \frac{\pi}{6} \log \alpha \quad (e_1)$$

$$w = \cos \frac{\pi}{6} \log \beta \quad (e_2)$$

$$\frac{v+w}{\cos \frac{\pi}{6}} = \log \gamma \quad (e_3).$$

Sugli assi OV ed OW (Fig. 69^a, tav. XIV) che comprendono coll'asse OX angoli uguali a $\frac{\pi}{6}$ si traccino le scale di valenza prendendo le distanze v e w dall'origine O uguali rispettivamente

$$v = \log \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{6} \quad w = \log \beta \cdot \cos \frac{\pi}{6}$$

ossia segnando sugli assi OV ed OW due scale logaritmiche prendendo per

Nell'equazione di 3° grado

$$z^3 + pz + q = 0 \quad (E) \quad (55)$$

se si pone

$$x = p = \alpha \quad (\varepsilon_1)$$

$$y = q = \beta \quad (\varepsilon_2)$$

allora

$$z^3 + zx + y = 0 \quad (\varepsilon_3)$$

unità una lunghezza b uguale alla lunghezza $a = OR$ della scala logaritmica moltiplicata per $\cos \frac{\pi}{6}$ che si suppone tracciata sopra OX , le isoplete α e β incontreranno l'asse OX in punti distanti da O di lunghezze

$$v' = \frac{v}{\cos \frac{\pi}{6}} \quad w' = \frac{w}{\cos \frac{\pi}{6}}$$

che è quanto dire in punti a cui corrisponde nella scala logaritmica segnata sopra OX lo stesso numero segnato contro il punto, in cui l'isopleta stessa incontra il suo asse di valenza. Le isoplete α e β intersecano l'asse OX facendo con esso un angolo rispettivamente uguale a $\frac{\pi}{3}$ ed a $\frac{2\pi}{3}$; esse possono essere determinate dall'unica scala di valenza obliqua OX , invece che dalle due scale OV ed OW , mediante le distanze v' e w' del loro punto d'incontro coll'asse OX dall'origine O , e possono essere distinte coi nomi di oblique di destra e di sinistra secondochè sono parallele ad una retta, che faccia con OX un angolo $\frac{\pi}{3}$, oppure un angolo uguale a $\frac{2\pi}{3}$.

Sia OR la lunghezza dell'unità della scala logaritmica misurata sull'asse OX , sulla OR si costruisca il triangolo equilatero ORS_1 avendo cura di ripetere la divisione logaritmica anche sui lati OS , S_1R e sopra $SR_1 = S_1R$ diretto secondo il prolungamento di OS_1 . I lati OS_1 ed RS_1 danno rispettivamente le direzioni delle oblique di destra e di sinistra perchè fanno con OX angoli uguali a $\frac{\pi}{3}$ ed a $\frac{2\pi}{3}$; le isoplete poi (ε_3) del terzo sistema sono individuate dal fatto che per un punto C qualsiasi in cui una di esse incontra l'asse di valenza OX si deve verificare la relazione

$$OC = x = \frac{v}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{w}{\cos \frac{\pi}{6}} \quad \text{ossia} \quad \frac{v+w}{\cos \frac{\pi}{6}} = 2. OC = 2x$$

perchè $VOX = WOX = \frac{\pi}{6}$. D'altra parte l'equazione della terza isopleta (ε_3)

che rappresenta delle rette, delle quali alcune sono tracciate nella figura 82^a (*Tav. XVII*). Con una trasformazione correlativa si ottengono (*Fig. 83^a, tav. XVII*) le due punteggiate

$$x' = p = \alpha$$

$$y' = q = \beta$$

e la curva γ , che permette di determinare il valore γ_i di z unendo

dà $\frac{v+w}{\cos \frac{\pi}{6}} = \log \gamma = 2x$ ossia $x = \frac{\log \gamma}{2}$, cioè per la scala di valenza delle

isoplete verticali del terzo sistema (ϵ_3) bisogna tracciare una scala logaritmica con un'unità uguale alla metà di quella scelta per le isoplete oblique ad OX . Se si prolunga CT ad incontrare in U il lato OS_1 (oppure il lato $S_1R = S_1R_1$) del triangolo OS_1R e si indica con x' la distanza del punto U da O dalla figura 69 (*Tav. XIV*) risulta che

$$x' = \frac{x}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{x}{\frac{1}{2}} = 2x$$

cioè U determina sul lato OS_1 oppure $S_1R = S_1R_1$ un punto tale che nella scala logaritmica tracciata sul medesimo corrisponde al numero, che nella scala di valenza tracciata sopra l'asse OX e corrispondente alle isoplete (ϵ_3) indicherebbe il valore dell'isopleta considerata; in altri termini le scale logaritmiche tracciate sui lati OS_1 ed $S_1R = S_1R_1$ possono servire a determinare le isoplete (ϵ_3).

L'ingegnere SAMUELLI chiama il triangolo OS_1R triangolo fondamentale, perchè serve di base alla formazione delle sue tavole calcolatrici; anzi sovrappo-
nendo la parte OS_1Q del detto triangolo alla parte S_1QR in $S_1O'R$ l'autore ricava un rettangolo, che esso crede si presti meglio del triangolo per l'esecuzione delle varie operazioni aritmetiche, che possono occorrere ad un ingegnere.

Dalle cose esposte risulta che le tavole del SAMUELLI corrispondono esattamente con tavole grafiche ordinarie ad isoplete rettilinee e parallele, nelle quali le inclinazioni rispettive degli assi sono rappresentate da angoli uguali

a $\frac{\pi}{6}$ e le scale ordinarie di valenza sono sostituite da scale oblique e precisamente da tre scale logaritmiche uguali tracciate sui tre lati di un triangolo equilatero, prendendo come unità della scala logaritmica la lunghezza a comune ai tre lati del triangolo stesso. Osservazioni analoghe si potrebbero fare per altre tavole grafiche proposte per eseguire i calcoli usuali di moltiplicazione, divisione. . . ; ma ci sembra che quanto è stato detto possa essere sufficiente per mostrare l'importanza di queste ricerche, e come esse si possono collegare col metodo generale esposto senza estenderci ulteriormente con una descrizione particolareggiata delle varie tavole.

con una retta i due punti corrispondenti ad $x' = p = \alpha_k$ ed $y' = q = \beta_p$. . . ; se $\alpha_k = 2$ e $\beta_p = -6$ $\gamma_3 = z = 1,46$.

Prendiamo ora in esame l'equazione completa di 3° grado

$$z^3 + nz^2 + pz + q = 0 \quad (56)$$

ponendo

$$x = p \quad (\varepsilon_1) \quad y = q \quad (\varepsilon_2)$$

si ottiene per (ε_3)

$$z^3 + nz^2 + xz + y = 0$$

equazione lineare in y ed x , ma che contiene due parametri $\alpha = z$ ed $n = \beta$ e quindi non può essere rappresentata graficamente che ricorrendo al metodo delle scale binarie, oppure a quello dei punti doppiamente isopleti. L'equazione (56) è riducibile alla forma

$$f(\alpha, \beta) + \phi(\beta, \delta) = \psi(\gamma)$$

ponendo

$$f(\alpha, \delta) = z^3 + pz \quad \phi(\beta, \delta) = nz^2 \quad \psi(\gamma) = -q$$

può quindi essere rappresentata con diagrammi ad isoplete rettilinee e parallele (per es. diagrammi esagonali) con due scale binarie $x = z^3 + pz$, $y = nz^2$ ed una lineare $z_1 = -q$. L'uso delle scale binarie avrebbe però in questo caso l'inconveniente che bisognerebbe scegliere due scale, le quali contengono la stessa variabile z , e quindi questa, per quanto è stato detto superiormente, non potrebbe essere presa come incognita. L'Ingegnere D'OCAGNE dà il procedimento seguente basato sulle proprietà dei punti doppiamente isopleti e nella figura 84^a (*Tav. XVII*) riportiamo la tavola grafica corrispondente (*). Sulle due rette AX' e BY' portiamo le scale di coordinate parallele

$$x' = p \quad y' = q$$

le serie di punti (le linee) corrispondenti al variare di z e di n sono nella figura correlativa i luoghi geometrici dei punti corrispondenti alla retta $y + xz + nz^2 + z^3 = 0$ nella quale, riferendosi alla forma $ax + by + c = 0$ dell'equazione della retta, è

$$a = z \quad b = 1 \quad c = z^3 + nz^2.$$

(*) Tolta dalla *Nomographie* dello stesso D'OCAGNE, già citata.

Le relazioni (54) mostrano che il punto corrispondente ad una retta è dato da

$$x_1 = \lambda \frac{b-a}{a+b} = \frac{AB}{2} \times \frac{1-z}{1+z}, \quad y_1 = \frac{c}{a+b} = \frac{z^3 + nz^2}{1+z}$$

quindi i due sistemi di curve corrispondenti ai punti doppiamente isopleti sono costituiti il primo (z) da linee rette parallele all'asse delle y , il secondo (n) da curve affini fra loro secondo la direzione dell'asse delle y rappresentate dall'equazione

$$y = \frac{z^3}{1+z} + n \frac{z^2}{1+z}$$

e quindi facilmente costruibili quando siano stati calcolati a parte i valori

$$z_1 = \frac{z^3}{1+z} \quad z_2 = \frac{z^2}{1+z}.$$

In seguito alle cose dette non può sorgere dubbio alcuno circa al modo di servirsi della tavola grafica rappresentata nella figura 84^a, (Tav. XVII) la radice z dell'equazione è la quota della retta parallela all'asse delle y passante per il punto, in cui la retta determinata dalla coordinata $x'=p$ $y'=q$ sega la curva (n); se si fa $n=0$ si ricade nel caso studiato precedentemente a cui corrisponde l'isopleta BG per cui è $n=0$. Sulla tavola grafica (Fig. 84^a, tav. XVII) risulta che per

$$n=1 \quad p=2,16 \quad q=3,2 \quad \text{si ha} \quad z=1,6.$$

17. Aritmometri. Regolo calcolatore. — Nel numero precedente si è visto come mediante tavole numeriche sia possibile ottenere immediatamente il valore di una funzione; è pure stato dimostrato che lo stesso risultato può essere raggiunto col mezzo di tavole grafiche. Alcune di queste, per la loro particolare disposizione, sono anche specialmente adatte alle operazioni aritmetiche di moltiplica, divisione, innalzamento a potenza ed estrazione di radice, e fra queste sono principalmente rimarchevoli le tavole di LALANNE e di LALLEMAND, ed anche quelli recentissime del SAMUELLI (*).

(*) F. SAMUELLI, *I triangoli ed i rettangoli calcolatori e le scale logaritmiche*, Firenze, 1892.

La necessità di eseguire operazioni aritmetiche si presenta spesso all'ingegnere, e sovente nella redazione di progetti di massima, nelle ricerche di prima approssimazione, nei lavori di campagna e di esercizio corrente interessa di giungere al risultato senza stancare troppo la mente, perdendo il minor tempo possibile e rimanendo entro i limiti di una determinata approssimazione. Risulterà quindi oltremodo utile un istrumento, il quale permetta di eseguire rapidamente e con sufficiente approssimazione simili calcoli; esso però non potrà dirsi veramente tale per la maggioranza degli ingegneri se non è semplice, di poco costo, di uso facile e possibilmente tascabile. Sono stati immaginati vari apparecchi, che permettono di eseguire le operazioni aritmetiche e che sono conosciuti sotto il nome generico di aritmometri; fra questi però soltanto i regoli calcolatori sono tali da soddisfare alle condizioni accennate superiormente, gli altri constano in genere di meccanismi complicati, sono costosi e per ora non posseggono tutte quelle qualità, che sono necessarie perchè divengano un annesso indispensabile in ogni studio di ingegnere.

Due o più regoli rettilinei, scorrevoli uno sull'altro e divisi in parti secondo una determinata legge allo scopo di eseguire operazioni numeriche mediante il confronto ed il movimento delle scale medesime costituiscono ciò che si chiama un regolo calcolatore. Se sopra un regolo rettilineo AB diviso in parti uguali ed opportunamente numerate si portano col compasso successivamente varie lunghezze misurate alla stessa scala, che ha servito a dividere in parti il regolo AB , avendo riguardo anche al loro segno, la posizione ove cade la punta estrema del compasso alla fine dell'operazione segna un punto sulla scala AB , a cui corrisponde un numero di divisioni uguale alla somma algebrica dei numeri rappresentanti le varie lunghezze elementari, e precisamente la somma dei numeri rappresentanti le lunghezze positive diminuita della somma dei numeri rappresentanti le lunghezze negative, qualunque sia l'ordine, col quale le varie operazioni di somma o sottrazione sono state eseguite. Invece di servirsi del compasso, cosa che importa sempre un'operazione lunga e poco comoda, si può ottenere lo stesso risultato col mezzo di una seconda scala di divisioni, uguale alla precedente, mobile sulla medesima, e, per rendere più facile l'operazione, di un corsoio mobile a sfregamento dolce lungo la scala fissa, che serva a determinare esattamente ed a stabilire in certo qual modo sulla scala fissa il punto, in cui cade l'estremo dell'ultimo segmento sommato o sottratto. In tutti i regoli calcolatori si trovano il regolo fisso e quello scorrevole; quanto al corsoio, esso è usato solo negli ultimi

modelli di regoli calcolatori ed è stato un'innovazione utile, perchè aiuta singolarmente le operazioni di somma e sottrazione e fissa in modo chiaro e preciso l'estremo di ogni segmento aggiunto o dedotto. Sia AB il regolo fisso ((a) *Fig. 85^a, tav. XVIII*) CD lo scorrevole ed E il corsoio, se si deve eseguire la somma algebrica $\alpha + \beta - \gamma$ basterà leggere sopra AB il numero α e, portato il corsoio E in corrispondenza della divisione α , far avanzare lo scorrevole finchè lo zero della scala mobile si trovi in corrispondenza dell'estremo α del segmento $A\alpha$. Indi si faccia muovere il corsoio E fino in E' in modo che esso corrisponda alla divisione β dello scorrevole ((b) *Fig. 85^a, tav. XVIII*) la divisione corrispondente della scala fissa darà la somma $\alpha + \beta$. Se ora si muove ancora lo scorrevole finchè la divisione corrispondente al numero γ cada sotto la divisione del regolo fisso indicata dal corsoio E' e si porta in seguito il corsoio stesso in corrispondenza dello zero della scala mobile, esso marcherà sulla scala fissa in E'' la divisione corrispondente al numero rappresentato da $\alpha + \beta - \gamma$ ((c) *Fig. 85^a, tav. XVIII*).

Questo esempio, per quanto semplice, mostra come un strumento composto di due regoli graduati scorrevoli l'uno sull'altro, permette di eseguire le operazioni di somma e sottrazione di quanti termini si vogliono e che tale risultato si raggiunge con facilità e precisione assai maggiore aggiungendo un corsoio, parte non indispensabile, ma assai utile in un regolo calcolatore, per fissare il punto estremo, che rappresenta il risultato dell'ultima somma o sottrazione eseguita: a stretto rigore un operatore attento può eseguire le stesse operazioni senza l'aiuto del corsoio. Se si debbono prendere in considerazione anche numeri negativi allora la scala delle divisioni dovrà essere continuata sul regolo fisso anche a sinistra dello zero, oppure, cosa equivalente, bisognerà incominciare la serie delle operazioni da un punto, che rappresenti un numero facile a sottrarre dal risultato finale, come sarebbe 10 100 oppure 1000. È evidente che le operazioni indicate superiormente possono anche essere eseguite collo scorrevole invertito, ((d) *Fig. 85^a, tav. XVIII*) in tal caso basta portare la divisione β dello scorrevole in corrispondenza della divisione α del regolo fisso, allora all'estremo dello scorrevole si legge sul regolo fisso il risultato $\alpha + \beta$ ed in corrispondenza della divisione γ dello scorrevole il risultato totale dell'operazione, cioè $\alpha + \beta - \gamma$. In modo analogo si possono eseguire le operazioni di somma e sottrazione quando invece di tre si abbia da prendere in considerazione un maggior numero di segmenti rappresentanti colla loro lunghezza numeri determinati.

Se invece di due scale ordinarie di parti uguali sono segnate sul regolo fisso e sopra quello scorrevole due scale logaritmiche, cioè tali che le varie divisioni determinino dei segmenti, la cui lunghezza a partire dall'origine sia uguale all'unità assunta per la scala stessa, moltiplicata pel logaritmo del numero segnato opportunamente contro ciascuna divisione, è evidente, in causa delle proprietà dei logaritmi, che le operazioni di somma e sottrazione fatta colle lunghezze relative ai varî numeri corrispondono rispettivamente a moltipliche e divisioni fatte coi numeri stessi. Questa proprietà delle scale logaritmiche fu messa in rilievo da EDMONDO GUNTER di Londra nel 1624 (*), cioè dieci anni dopo che NAPIER aveva trovato i logaritmi e dimostrato l'utilità dei medesimi nell'esecuzione nei calcoli aritmetici. GUNTER proponeva di eseguire le somme e sottrazioni delle lunghezze rappresentanti i logaritmi dei numeri coll'uso del compasso; poco dopo però WINGATE sostituiva l'uso del compasso con una seconda scala logaritmica uguale alla prima e scorrevole contro la medesima.

Se si tracciano varie scale logaritmiche parallele (*Fig. 86^a, tav. XVIII*), avendo cura di porre l'origine delle medesime sopra una stessa retta normale alla loro direzione e di prendere le lunghezze unità delle varie scale in modo, che esse stiano fra loro come i numeri $1, 2, 3, 4, \dots, n$, sulla stessa normale alla loro direzione condotta da un punto qualsiasi termineranno segmenti, che, contati dall'origine, rappresentano logaritmi, che stanno in rapporti inversi di quelli corrispondenti alle unità rispettive. Basterà quindi passare da una scala ad un'altra, cosa che può farsi con estrema facilità mediante un corsoio mobile lungo il regolo, sul quale sono segnate le varie scale, per moltiplicare o dividere un logaritmo per $2, 3, \dots, k, \dots, n$ e quindi per ottenere la k esima potenza oppure la radice k esima del numero primitivamente considerato. Se parallelamente e contro la scala logaritmica si tracciano tre scale (*Fig. 86^a, tav. XVIII*), due colle divisioni indicanti i gradi corrispondenti ai seni ed alle tangenti, che hanno valori espressi in parti del raggio uguali ai numeri rappresentati dalle divisioni corrispondenti della scala logaritmica, ed una scala di parti uguali in millesimi dell'unità assunta per la scala logaritmica, col metodo indicato superiormente, cioè coll'uso di un corsoio, oppure con una retta tracciata normalmente alla direzione comune delle varie scale, si otterranno immediatamente i valori dei seni e delle tangenti corrispondenti ad un dato angolo, ed il valore in millesimi del logaritmo corrispondente ad un dato numero. Se le tre scale dei seni, tangenti e parti proporzionali

(*) Q. SELLA, *Teorica e pratica del regolo calcolatore*.

si suppongono tracciate sopra un regolo scorrevole contro quello, sul quale sono segnate le scale logaritmiche, allora il numero corrispondente al seno od alla tangente si può avere, invertendo lo scorrevole e conducendo in corrispondenza all'origine del regolo fisso, la divisione che corrisponde all'angolo dato; l'altro estremo dello scorrevole indica il numero cercato. Conducendo poi l'estremo dello scorrevole invertito contro un dato numero della scala logaritmica, l'estremo del regolo fisso indica in millesimi il valore del logaritmo sulla scala delle parti uguali. Se sullo scorrevole si trova indicata una scala logaritmica, allora, senza invertire lo scorrevole, si possono fare le letture delle parti uguali a sinistra e corrisponderranno al logaritmo del numero dello scorrevole, che viene in corrispondenza dell'origine del regolo fisso, e lo stesso si dica per seni e per le tangenti.

Per la determinazione delle quantità accennate superiormente una sola scala logaritmica estesa ad una sola unità non può bastare, ne occorrono almeno due consecutive. Infatti un'unità aggiunta alla caratteristica di un logaritmo gli fa rappresentare un numero dieci volte più grande, ora a partire dall'angolo di $0^{\circ},34',24,7$ fino a 90° , il seno varia da 0,01 ad 1,00 e fra lo stesso angolo di $0^{\circ},34',24'',7$ e 45° , la tangente varia da 0,01 a 1,00; è quindi necessaria una scala logaritmica della lunghezza di due unità, per la rappresentazione della lunghezza delle linee trigonometriche degli angoli compresi fra i limiti sovraccennati quando non si voglia ricorrere a particolari espedienti, che renderebbero naturalmente più difficile la ricerca del numero rappresentante in parti del raggio il valore del seno o della tangente d'un dato angolo. La doppia scala logaritmica occorre pure per le operazioni di somma e sottrazione; infatti queste si eseguiscano più specialmente sulle mantisse (lunghezze rappresentanti le mantisse) quanto alle caratteristiche, esse sono sempre rappresentate da numeri semplici, ed il computo delle unità delle medesime può in ogni caso essere fatto a memoria con estrema facilità. Le lunghezze rappresentanti le mantisse variano fra 0 (zero) ed 1 (uno), quindi occorrono due scale successive uguali all'unità per poter avere sempre ed in ogni caso il risultato della somma, oppure della differenza di due mantisse. Trasportando il risultato da una scala all'altra, nella prima per la somma, nella seconda per la sottrazione, si può continuare indefinitamente coll'uso di due scale nelle operazioni di addizione e sottrazione.

Partendo da questi concetti SETH PARTRIDGE costruì nel 1657 un regolo calcolatore con otto scale (*), tre segnate sopra un

(*) Q. SELLA, Opera citata.

regolo fisso e di queste una di parti uguali e due logaritmiche, e cinque sopra un regolo scorrevole a scanellatura entro il regolo fisso, (delle quali, due logaritmiche sulla faccia anteriore dello scorrevole e tre altre sulla faccia posteriore, e precisamente la scala dei seni, delle tangenti e delle parti uguali). Tale regolo si prestava assai per eseguire i calcoli usuali occorrenti all'ingegnere e nella sua forma è rimasto tale fino a questi ultimi tempi, in cui TAVERNIER e VINAY (*) vi apportarono alcune leggere modificazioni. Essi hanno aggiunto l'uso del corsoio per rendere più facile il confronto fra le varie scale e la determinazione degli estremi dei segmenti sommati o sottratti durante varie e successive operazioni, ed hanno cambiato l'unità della scala logaritmica segnata sulla parte inferiore dello scorrevole, prendendola uguale al doppio di quella usata per la scala logaritmica superiore dello stesso scorrevole. Pei geometri e per la risoluzione di problemi speciali, come computo di interessi, cambio, ecc., si sono costruiti regoli particolarmente adatti a tali usi, modificando opportunamente il numero, l'estensione, la posizione ed il significato delle varie scale (**). Questi apparecchi non possono che formare l'oggetto di studi speciali, da farsi consultando le memorie originali pubblicate sopra tali argomenti; qui ci limitiamo a descrivere soltanto il regolo calcolatore come è ora costruito da TAVERNIER-GRAVET, poichè essendo in esso segnate le scale logaritmiche fatte sopra due unità diverse, una doppia dell'altra, quelle dei seni, delle tangenti e delle parti uguali, si presta meglio alle operazioni e calcoli di ordine generale, che più comunemente si presentano all'ingegnere.

Il regolo calcolatore TAVERNIER-GRAVET (*Fig. 87^a, 88^a, 89^a, 90^a, 91^a, 92^a, tav. XVIII*) si compone di un regolo fisso in legno lungo 26 centimetri (*Fig. 87^a, tav. XVIII*) entro il quale si muove a scanellatura un'asta scorrevole a fregamento dolce (*Fig. 90^a, 91^a*) della lunghezza stessa del regolo fisso. Lateralmente al regolo fisso, sono tracciate due scale ordinarie in centimetri e millimetri, una sopra un lato tagliato obliquamente va da metri 0,00 a metri 0,25, e dista dagli estremi del regolo fisso di metri 0,005, l'altra, segnata sul lato tagliato ad angolo retto, va da metri 0,00 fino a metri 0,26, e sul fondo della guida, entro cui si muove lo scorrevole, continua la stessa divisione da 26 fino a 52 centimetri (*Fig. 87^a, tav. XVIII*).

(*) CULMANN, *Statica grafica*.

(**) CULMANN, Opera citata. — CAVANI, *Celerimensura*. — *Enciclopedia delle arti ed industrie* (Macchine da calcolare). — LABOULAYE, *Dictionnaire des arts et manufactures* (Calculer).

Per la prima parte il regolo si può adoperare come una misura ordinaria lunga 26 centimetri, per la seconda parte come una misura lunga metri 0,52, poichè l'orlo sinistro dello scorrevole indica sulla divisione esistente nel fondo della guida, entro cui si muove, la distanza fra il principio del regolo fisso e l'estremo destro dello scorrevole.

Sopra il regolo fisso (*Fig. 87^a, tav. XVIII*) e lateralmente agli orli delle guide dello scorrevole sono segnate due scale logaritmiche; quella superiore ha come unità una lunghezza uguale a metri 0,125 e si estende per metri 0,250, cioè comprende le scale corrispondenti a due unità e per ciò la chiameremo scala doppia. La scala inferiore ha per unità una lunghezza uguale a metri 0,250, cioè esattamente doppia di quella corrispondente alla scala superiore; essa comprende naturalmente una sola unità e per ciò la chiameremo scala semplice o scala inferiore del regolo. Lungo il regolo fisso si muove un corsoio mobile a sfregamento dolce *E* (*Fig. 87^a, 88^a, tav. XVIII*) foggiato in modo da indicare i punti delle varie scale, che si trovano sopra una stessa retta normale alla direzione comune delle medesime. Se sulla scala inferiore si legge un numero e ad occhio, o, meglio, col corsoio si determina il punto corrispondente della scala superiore, ad esso corrisponderà un numero, il cui logaritmo è esattamente il doppio di quello relativo al numero letto sulla scala inferiore; cioè col semplice confronto fatto fra le due scale col mezzo del corsoio, dato un numero si può determinare il suo quadrato; con una operazione inversa, cioè leggendo il numero sulla scala superiore e cercando quello, che gli corrisponde sulla scala inferiore, si può avere la radice quadrata del numero considerato.

Lo scorrevole porta nella sua parte anteriore (*Fig. 90^a, tav. XVIII*) due scale logaritmiche identiche a quelle tracciate sul regolo fisso e precisamente quella superiore ha per unità una lunghezza uguale a metri 0,125 e quella inferiore una lunghezza doppia. Nella parte posteriore dello stesso scorrevole (*Fig. 91^a, tav. XVIII*) sono tracciate tre scale; quella di mezzo è una scala di parti uguali ciascuna ad $\frac{1}{500}$ dell'unità presa per la costruzione della scala inferiore del regolo fisso, cioè metri 0,25, ed è graduata da destra a sinistra in guisa chè portato l'origine dello scorrevole diretto in corrispondenza di un numero qualsiasi della scala inferiore del regolo, l'estremo destro di questo segna sul rovescio dello scorrevole il valore in frazioni decimali (in millesimi e si possono apprezzare ad occhio le frazioni di millesimo) della mantissa del logaritmo corrispondente; un incavo *I* con linea di fede fatto nel regolo permette di fare questa lettura colla maggiore precisione possibile. Le altre due scale numerate una da sinistra a destra,

quella marcata S , e l'altra da destra a sinistra, indicata sul regolo colla lettera T , sono divise in modo da corrispondere successivamente a $\log \operatorname{sen} x$ e $\log \operatorname{tang} x$ in cui x varia pei seni da $x=0^\circ$, $34', 24'', 7$ ad $x=90^\circ$ e per le tangenti da $x=0^\circ$, $34', 24'', 7$ fino ad $x=45^\circ$, prendendo come unità per la scala logaritmica una lunghezza uguale a metri 0,125 come per la scala superiore del regolo fisso. È evidente che condotto lo scorrevole in una posizione tale che l'estremo destro del regolo segni sul rovescio del medesimo un determinato angolo, sulla parte diretta invece esso segnerà in centesimi il valore corrispondente pel seno (la numerazione della scala dei seni va da sinistra a destra). Se invece si ritira a sinistra lo scorrevole finchè la linea di fede, seguita in un incavo praticato dalla parte posteriore del regolo, sia in corrispondenza di un dato angolo l'estremità dello scorrevole indicherà in parti centesimali del raggio sulla scala superiore fissa il valore della tangente (per le quali la numerazione della scala delle tangenti va da destra a sinistra).

Il regolo è fatto in modo che lo scorrevole può essere messo nella sua posizione normale oppure invertito o rovesciato; naturalmente invertendo lo scorrevole riescono invertite le scale ed il modo di leggere le indicazioni; rovesciando lo scorrevole ed invertendolo si possono portare in corrispondenza la scala superiore del regolo fisso e quella delle tangenti, la scala inferiore del regolo fisso e quella delle parti uguali, per cui una, oppure due sole posizioni del corsoio, possono dare i numeri, che si corrispondono nelle varie scale (arco in gradi, seni e tangenti in parti del raggio, logaritmi in frazioni decimali dell'unità). Disgraziatamente le divisioni corrispondenti agli angoli sono fatte piuttosto grossolanamente nella loro generalità, poichè mentre procedono per la scala di $\log \operatorname{sen} x$ di $10'$ in $10'$ fino a 10° , dopo sono marcate di $20'$ in $20'$ fino a 20° , di mezzo grado in mezzo grado fino a 30 gradi, in seguito sono notati solo i gradi fino a 60 , oltre questo limite si hanno ancora cinque divisioni fino a 70 e tre sole da 70° a 90° cioè, quelle che corrispondono a 75° ad 80° ed a 90° . La scala delle tangenti va solo fino a 45° e si distingue da quella dei seni come modo di divisione in quanto che oltre 30° fino a 45° porta l'indicazione dei mezzi gradi; per angoli superiori ai 45° si potranno invece calcolare le cotangenti. Sulla faccia posteriore del regolo fisso (*Fig. 92^a, tav. XVIII*) sono indicati i valori di quantità, che spesso occorrono nei calcoli, come π , g , e , . . . densità, misure, ecc.

Qualunque sia il modo, col quale si usa il regolo, le scale trigonometriche danno i seni e le tangenti in parti del raggio; se il numero trovato sulla scala superiore si legge nella scala infe-

riore e si porta l'origine dello scorrevole contro la divisione corrispondente, rovesciando il regolo la scala delle parti uguali dà in frazioni decimali dell'unità il logaritmo corrispondente e più precisamente la mantissa. Quanto alla caratteristica essa sarà 2 pei numeri, che si leggono sulla prima metà della scala superiore (da $x=0^{\circ},34',24,7$ ad $x=5,45'$) e $2+1=1$ pei numeri che si leggono sulla seconda metà della scala superiore (cioè da $x=5,45'$ fino ad $x=90$ per i seni, e fino ad $x=45^{\circ}$ invece per le tangenti) infatti entro questi limiti i seni e le tangenti di un angolo espresse

in parti del raggio variano rispettivamente da $\frac{1}{100}$ a $\frac{10}{100}$ e da

$\frac{10}{100}$ a $\frac{100}{100}$, quindi le caratteristiche debbono variare da 2 a 1 e da 1 a zero.

Essendo presupposte cognizioni sufficienti di aritmetica, algebra, geometria e trigonometria non sembra necessario estendersi minutamente in tutte le particolarità necessarie per eseguire una qualunque operazione col regolo calcolatore e ci limitiamo a rinviare il lettore desideroso di avere spiegazioni più ampie all'aureo libretto del SELLA, *Teorica e pratica del regolo calcolatore*. Per ciò che si riferisce alle modalità principali quanto è stato detto in principio di questo paragrafo intorno alla somma e sottrazione dei segmenti ed alla divisione dei medesimi in parti uguali, non chè alla loro moltiplicazione per numeri semplici, col confronto di scale logaritmiche fatte prendendo come unità base lunghezze, che stiano fra loro come $1:2:3\cdots n$, può essere sufficiente per intendere le varie operazioni, che si possono eseguire col regolo calcolatore. Questo strumento però porta solo due scale fatte con unità una doppia dell'altra, quindi facilmente (in modo speciale facendo uso del corsoio) possono essere determinate la serie dei successivi quadrati e $A^2, (A^2)^2, (A^4)^2\cdots$ delle radici quadrate successive $\sqrt{A}, \sqrt[4]{A}, \sqrt[8]{A}\cdots$ di un numero. Per le potenze dispari invece, e più specialmente per la potenza di terzo grado e per l'estrazione della radice terza, occorre far muovere lo scorrevole invertito servendosi contemporaneamente delle due scale fatte con unità fondamentale diversa. Si conduca lo scorrevole invertito in una posizione tale che il numero, di cui si vuole fare il cubo, letto sulla scala inferiore del regolo fisso corrisponda alla divisione, che lo rappresenta nella scala tracciata sullo scorrevole, l'estremità destra dello scorrevole allora dista dall'origine della scala fissa di una lunghezza uguale al triplo del segmento, che nella scala superiore del regolo rappresenta il numero dato. Sia A il nu-

mero di cui si cerca il cubo, a il numero delle sue cifre significative intere, se l'estremo destro del regolo cade nella prima metà della scala superiore il cubo avrà $3a - 2$ cifre intere, se esso cade sulla seconda metà scala superiore il cubo avrà $3a - 1$ cifre intere. Finalmente se l'estremo dello scorrevole cade fuori del regolo a destra, allora la lettura può farsi a sinistra in corrispondenza dell'estremo dello scorrevole invertito ed il cubo ha $3a$ cifre intere, poichè la somma delle mantisse aggiunge rispettivamente una o due unità a quello delle unità risultante dalla somma delle caratteristiche. L'estrazione della radice terza si fa con processo inverso leggendo il numero dato sulla prima metà della scala superiore e portando in corrispondenza di esso l'estremo destro, la metà, oppure l'estremo sinistro dello scorrevole (invertito) secondochè al numero delle cifre del numero dato bisogna aggiungere nessuna unità oppure una o due unità per renderlo esattamente divisibile per tre.

È importante osservare che il regolo calcolatore dà più specialmente il risultato delle operazioni eseguite sulle mantisse dei logaritmi dei numeri, mentre per le caratteristiche la loro somma o sottrazione va fatta a memoria. Trattandosi di numeri sempre molto piccoli tale calcolo non può presentare alcuna difficoltà, tuttavia esso può essere semplificato dalle considerazioni seguenti, che aiutano assai a stabilire il numero delle cifre intere, che un dato risultato deve avere. La mantissa di un logaritmo essendo sempre una frazione dell'unità, la somma di più mantisse può essere uguale ad una frazione oppure, al massimo, ad una frazione più tante unità quante sono le mantisse sommate meno una, quindi nella moltiplica il prodotto avrà tante cifre intere quante sono le cifre intere dei varî fattori sommati assieme, meno tante unità quanti sono i fattori stessi meno uno, più le unità k che possono eventualmente provenire dalla somma delle mantisse. Siano A, B, C, D quattro numeri a, b, c, d il numero delle cifre intere di ciascuno di essi, il prodotto avrà un numero di cifre intere rappresentato da

$$a + b + c + d - 3 + k.$$

Se le operazioni di somma si incominciano sulla prima scala superiore del regolo (metà di sinistra) si avranno tante unità k quante volte addizionando due mantisse il risultato sorte dalla prima scala e deve essere letto sulla seconda. Quando la somma non è più possibile anche sulla seconda scala perchè lo scorrevole uscirebbe dal regolo fisso, allora si trasporta e si fissa sulla prima scala col mezzo del corsoio il risultato ottenuto e si seguita

nelle operazioni di somma dei logaritmi (moltiplica) tenendo sempre presente che si ha una nuova unità k tutte le volte che per leggere il risultato bisogna passare dalla prima alla seconda scala. Nelle operazioni di sottrazione dei logaritmi (divisioni) la differenza di due mantisse può essere positiva, oppure bisognerà aggiungere un'unità, perchè essa riesca veramente tale; nel primo caso il numero delle cifre intere del quoziente è dato dalla differenza fra il numero delle cifre intere del dividendo e quello del divisore più una, nel secondo invece, dalla differenza semplice senza la aggiunta di alcuna unità. Se si ha l'avvertenza di incominciare le operazioni di sottrazione leggendo il minuendo M sulla seconda scala superiore del regolo fisso, si verifica il primo caso quando il risultato della sottrazione si legge ancora sulla scala stessa; se invece esso deve essere letto sulla prima scala, allora si verifica il secondo. Indicando con m ed s il numero delle cifre intere del minuendo M e del sottraendo S , la differenza avrà per caratteristica $(m-1)-(s-1)$, oppure $(m-1)-(s-1)-1$, secondo quello dei due casi considerati che si verifica, cioè il numero delle cifre del quoziente dei due numeri proposti sarà dato da $m-s+1$, se il risultato si legge sulla seconda scala, e da $m-s$, se si legge invece sulla prima. Indicando con k_1 il numero dei passaggi da una metà della scala all'altra per effetto della sottrazione, nella valutazione del quoziente di due numeri k_1 non può assumere che i due valori $k_1=0$, $k_1=1$ ed il numero delle cifre intere del quoziente sarà dato in generale da $m-s+1-k_1$.

Quando si vuol trovare la potenza p -esima di un numero A , allora il numero delle cifre sarà dato da $a+a+a \dots - (p-1)+k = pa - (p-1) + k$, poichè tale operazione non è che una serie di moltipliche, in cui i vari fattori sono tutti uguali. Per l'estrazione di radice ricordiamo che il numero trovato elevato alla potenza di grado uguale all'indice della radice cercata deve riprodurre il numero dato, quindi, detto r il numero delle cifre della radice ed a quello del numero dato, se n è l'indice del radicale, dovrà essere

$$r = \frac{a}{n}$$

oppure

$$r = \frac{a+1}{n} \quad r = \frac{a+2}{n} \quad \dots \quad r = \frac{a+t}{n}$$

in cui t è un numero intero minore di n e rappresenta il numero di unità che bisogna aggiungere ad a perchè il quoziente $r = \frac{a+t}{n}$

sia un numero intero. È quasi inutile avvertire che se il numero dato non ha cifre significative intere, allora i numeri a , b , c , d , m , s , r , sono uguali a zero, oppure diventano negativi e conterranno tante unità quanti sono i zeri che precedono la prima cifra significativa dopo la virgola. Queste regole coincidono evidentemente colle leggi relative all'uso delle caratteristiche nei logaritmi, soltanto hanno il vantaggio che si riferiscono unicamente al numero delle cifre dei numeri dati ed alle operazioni materiali, che si eseguiscano col regolo, quindi rendono estremamente semplice l'uso del regolo stesso e la determinazione delle cifre intere del risultato delle operazioni eseguite.

Nel libro del SELLA sono indicate schematicamente le posizioni dello scorrevole per eseguire le varie operazioni di moltiplica e divisione, innalzamento a potenza ed estrazione di radice, ed è tenuto conto del vantaggio di giungere possibilmente al risultato con una sola posizione dello scorrevole, usandolo ora diretto, ora invertito o rovesciato. Una descrizione così minuta non può trovare qui il suo luogo e chi desidera cognizioni speciali potrà consultare con profitto l'opera già citata del SELLA; quanto è stato detto può bastare per mostrare l'uso del regolo ed il modo, od i varî modi, coi quali una data operazione può essere eseguita. In via generale si può asserire che, meglio di qualsiasi quadro minuto e riferentesi a tutti i casi possibili, è utile per l'ingegnere, che voglia imparare l'uso del regolo calcolatore, un esercizio continuato per alcuni giorni. L'esattezza poi che si può raggiungere con questo strumento viene valutata dal CULMANN ad $\frac{1}{300}$ in media, partendo dalla supposizione che si possa apprezzare un quinto di divisione, cosa non impossibile quando uno si sia famigliarizzato coll'uso del regolo calcolatore (*). Costruendo regoli che abbiano

(*) L'Ingegnere CASTIGLIANO partendo dall'ipotesi che nelle letture si possa ammettere un errore compreso fra $\frac{1}{4}$ ed $\frac{1}{5}$ di millimetro trova che l'approssimazione che si ottiene nei calcoli coll'uso del regolo calcolatore ordinario è rappresentata in media da $\frac{1}{250} = 0,004$. Sia u la lunghezza dell'unità della scala logaritmica, α un numero, $\delta\alpha$ l'errore d'apprezzamento corrispondente; l'errore che potrà verificarsi nei calcoli per una inesattezza nella lettura sarà dato da

$$\begin{aligned} u \log (\alpha \pm \delta\alpha) - u \log \alpha &= u \log \left(\frac{\alpha \pm \delta\alpha}{\alpha} \right) = u \log \left(1 \pm \frac{\delta\alpha}{\alpha} \right) = \\ &= 0,4343 u \log \text{nat} \left(1 \pm \frac{\delta\alpha}{\alpha} \right) = \pm 0,4343 u \frac{\delta\alpha}{\alpha} \end{aligned}$$

una lunghezza maggiore si possono tracciare un maggior numero di divisioni e quindi si può raggiungere una approssimazione maggiore, però l'uso dello strumento diventa più incomodo e, ad eccezione di casi particolari per la risoluzione di problemi determinati, tali regoli non sono impiegati attualmente per l'uso generale; il regolo calcolatore della lunghezza di centimetri 0,25 è considerato, in via generale, come il più conveniente.

Come complemento delle cose dette riportiamo due esempi numerici di calcoli eseguiti col regolo calcolatore e precisamente una moltiplicazione ed una divisione, nonché la ricerca di una quarta proporzionale dopo tre quantità date, perchè rappresentano le operazioni, che più comunemente vengono fatte con questo strumento.

a) Debba eseguire il prodotto $X = AB$, in cui sia $A = 25$, $B = 37$ e quindi $a = 2$, $b = 2$ (a e b rappresentano il numero delle cifre intere dei fattori). Si porti l'origine dello scorrevole diretto sotto la divisione corrispondente al numero 25 letto sulla prima scala superiore del regolo ed il corsoio sulla divisione corrispondente al numero 37 letto nella prima scala superiore dello scorrevole, il prodotto (somma dei due logaritmi) è fissato dal corsoio nella divisione corrispondente della scala superiore del regolo fisso, che dà 925. Il risultato dell'operazione essendo fornito dalla prima scala del regolo calcolatore $k = 0$, ed il numero x delle cifre del prodotto, sarà dato da

$$x = a + b - 1 + k = 2 + 2 - 1 = 3$$

cioè sarà

$$X = AB = 25 \times 37 = 925.$$

Se fosse $A = 48,5$, $B = 57,3$, allora il risultato della somma delle

perchè essendo $\frac{\partial x}{x}$ molto piccolo si può sviluppare in serie $\log \text{nat} \left(1 \pm \frac{\partial x}{x} \right)$ e trascurare le potenze di ordine superiore di $\frac{\partial x}{x}$. L'errore nelle letture e compreso fra $\frac{1}{4}$ ed $\frac{1}{5}$ di millimetro, in media si può ritenere che esso sia espresso da $\frac{0^m,0004343}{2}$, quindi dovrà essere

$$\pm 0,4343 u \frac{\partial x}{x} \leq \frac{0^m,0004343}{2} \text{ ossia } \pm \frac{\partial x}{x} \leq \frac{1}{2000 u}.$$

$$\text{Se } u = 0^m,125 \quad \pm \frac{\partial x}{x} = \frac{1}{250} = 0,004.$$

due mantisse, si leggerebbe nella seconda scala superiore del regolo fisso, quindi $k=1$ ed il numero delle cifre del prodotto sarebbe dato da

$$a+b-1+k=a+b-1+1=a+b=2+2=4$$

e quindi sarà

$$X=AB=48,50 \times 57,30 = 2779,05.$$

b) Debba eseguire la divisione $X=\frac{A}{B}$, in cui sia $A=81$, $B=27$: si legga nella seconda scala superiore del regolo fisso il numero $A=81$ e si porti la divisione corrispondente a $B=27$ letta sulla prima scala dello scorrevole, contro la divisione della seconda scala superiore corrispondente ad $A=81$, allora l'estremo sinistro dello scorrevole indica sulla scala superiore del regolo il quoziente 3 (differenza dei due logaritmi, $\log. A - \log. B$). Il risultato dell'operazione essendo fornito dalla seconda scala, $k_1=0$ ed il numero x delle cifre intere del quoziente sarà dato da

$$x=a-b+1-k_1=a-b+1=2-2+1=1$$

quindi

$$X=\frac{A}{B}=\frac{81}{27}=3.$$

Se $A=1230$, $B=825$, allora l'estremo sinistro dello scorrevole cade sulla prima scala superiore del regolo fisso e dà 149. In tal caso $k_1=1$ ed

$$x=a-b+1-k_1=a-b+1-1=(a-b)=4-3=1$$

quindi

$$X=\frac{A}{B}=\frac{1230}{825}=1,49.$$

OSSERVAZIONE. — Uno dei calcoli più frequenti che si presentano ad un ingegnere è la divisione di un prodotto, ossia la ricerca di una quarta proportionale dopo tre quantità date

$$X=\frac{A \ B}{C}.$$

Tale operazione può farsi eseguendo ordinatamente prima il prodotto e poi la divisione come nei due esempi riportati, cioè la somma dei due segmenti α e β rappresentanti i logaritmi dei nu-

meri A e B e sottraendo in seguito dal risultato il segmento γ , che rappresenta il logaritmo del numero C . Più semplicemente però essa può eseguirsi con una sola posizione dello scorrevole, come è già stato indicato in principio del paragrafo esponendo i modi, coi quali si può ottenere la somma algebrica $\alpha + \beta - \gamma$, usando di due regoli divisi in parti secondo una scala determinata e scorrevoli uno sull'altro. Si inverte lo scorrevole e si porti la divisione B del medesimo letto sulla sua prima scala, sotto la divisione A letto sulla prima scala superiore del regolo fisso, indi si muova il corsoio finchè esso giunga in corrispondenza della divisione C dello scorrevole letto sulla prima scala del medesimo; l'altra punta del corsoio darà sulla scala superiore del regolo fisso

il quoziente X . Sarà poi $x = a + b - 1 + \binom{k=0}{k=1} - c + 1 - \binom{k_1=0}{k_1=1}$

secondochè nelle operazioni di somma o sottrazione si fanno le letture sempre sulla stessa scala corrispondente ad un'unità, oppure si deve passare alla scala vicina. Se il segmento che rappresenta C fosse maggiore di quello che corrisponde a $\log A + \log B$, allora conviene leggere A sulla seconda metà della scala superiore del regolo fisso.

Supponiamo che sia

$$A=45 \quad B=37 \quad C=22$$

$$x = (a + b) - 1 + (k=1) - c + 1 - (k=0) = 2 + 2 - 2 + 1 = 3$$

$$X = \frac{A B}{C} = \frac{45 \times 75}{22} = 153,409.$$

Se

$$A=23 \quad B=32 \quad C=15$$

$$x = (a + b) - 1 + (k=0) - c + 1 - (k_1=0) = 2 + 2 - 1 - 2 + 1 = 2$$

$$X = \frac{A B}{C} = \frac{23 \times 32}{15} = 49,06.$$

Un esercizio continuato per alcuni giorni renderà il calcolatore adatto ad eseguire con notevole risparmio di tempo qualsiasi calcolo usuale adoperando lo scorrevole diretto, invertito o rovesciato, ed il corsoio a seconda dell'opportunità.

È già stato osservato che non sempre i regoli calcolatori hanno la disposizione e le dimensioni accennate superiormente; sono state tentate varie forme e sono state cambiate anche le scale

allo scopo di rendere più facile l'uso dello strumento, oppure per risolvere più direttamente determinati problemi. Il regolo calcolatore descritto è quello che conviene maggiormente nell'uso corrente: in generale poi per le altre forme o disposizioni di scale calcolatrici non occorre dare spiegazioni speciali; tenendo presente quanto è stato detto sulla somma e sottrazione di segmenti, la semplice ispezione, o tutt'al più un'esame alquanto accurato dello strumento, sono sufficienti a farne comprendere l'uso.

Come modificazioni del regolo calcolatore usuale, o meglio, come applicazione delle scale semplici e logaritmiche, citiamo il regolo a scale ripiegate di MANNHEIM, il regolo in cartone di LALANNE, l'aritmografo circolare, nel quale le scale sono marcate su corone circolari, delle quali alcune sono mobili ed altre fisse, e quello cilindrico, in cui le scale sono invece segnate sopra zone di uno stesso cilindro limitate da piani normali all'asse, nonchè quello dell'Ingegnere CASTIGLIANO (*), il quale con una disposizione ingegnossissima permette di prendere come unità della scala logaritmica una lunghezza uguale ad un metro, e quindi di raggiungere un grado di esattezza molto superiore a quella, che può ottenersi col regolo calcolatore semplice.

Oltre i regoli calcolatori, si sono immaginati altri strumenti composti di meccanismi complessi, conosciuti col nome generico di *aritmometri*, per mezzo dei quali, individuati due numeri mediante dischi, piastrine mobili, ecc., si può ottenere meccanicamente il loro prodotto od il loro quoziente. Tali apparecchi però, sempre complicati, pesanti e molto costosi, non formano il corredo ordinario dell'ingegnere e non si trovano, o non si possono trovare ordinariamente, che negli uffici delle grandi amministrazioni, quindi non crediamo opportuno fermarci alla descrizione dei medesimi e rinviando il lettore desideroso di conoscere tali mecca-

(*) A. CASTIGLIANO, *Monografie*, Torino, editore A. F. Negro. — Nell'aritmografo del CASTIGLIANO la scala logaritmica è lunga un metro ed è divisa in quattro parti della lunghezza di metri 0,25 ciascuna disposte parallelamente una sotto l'altra. Le letture poi sono fatte col mezzo di una piastrina, detta *compasso*, che porta una *punta* scorrevole lungo la medesima e due bracci fissi, sopra ciascuno dei quali sono segnati due indici: disponendo diversamente la punta e gli indici si possono eseguire somme e sottrazioni di segmenti e quindi ottenere il prodotto od il quoziente dei numeri corrispondenti. CASTIGLIANO ritiene che col suo aritmografo si possa ottenere nei calcoli un'approssimazione rappresentata da $\frac{1}{2000}$ infatti (vedi nota alla pag. 128)

$$\pm \frac{\delta x}{a} = \frac{1}{2000 u} = \frac{1}{2000}$$

nismi alle opere e memorie speciali ed agli articoli corrispondenti dei giornali (*) tecnici e delle enciclopedie.

18. *Planimetri.* — L'ingegnere deve spesso misurare delle aree piane, che corrispondono in generale a rilievi topografici oppure a superficie di speciali diagrammi od integrali definiti da linee determinate. Se l'area è limitata da linee rette o da archi di circolo, di parabola ecc., scomposta la figura totale in parti facilmente misurabili (triangoli, rettangoli, ecc...), poche lunghezze rilevate dal disegno bastano ordinariamente a risolvere il problema ed al numero 1° (Parte II^a) abbiamo visto come la misura di un'area possa sempre essere ottenuta in ogni caso con somme di prodotti da eseguirsi con procedimento aritmetico oppure geometrico. Però se il contorno della figura è irregolare il numero delle parti in cui essa deve essere scomposta aumenta, ed è tanto più grande quanto maggiore è l'esattezza che si vuol raggiungere, quindi cresce il numero delle operazioni elementari e la misura dell'area richiede un tempo relativamente lungo. L'esattezza che può essere raggiunta colla misura diretta dipende dalla precisione, colla quale possono essere rilevate dal disegno le varie lunghezze necessarie per la misura delle aree elementari, o colla quale possono essere eseguite le operazioni di moltiplica e somma di segmenti. Per quanto grande sia la nitidezza di un disegno e la cura, che si pone nella lettura delle lunghezze rilevate dal medesimo, non si può sperare di raggiungere correntemente un'approssimazione maggiore di $\frac{1}{300}$; inoltre le figure elementari non hanno in genere una forma facilmente misurabile che per assimilazione approssimata, infatti le zone considerate ai numeri 1, 2, 3, 4, ecc. Parte II, sono riguardate come trapezie mentre in realtà sono limitate da un contorno parzialmente curvilineo. Non può quindi non riescire molto interessante un'apparecchio, il quale entro il limite di un determinato grado d'approssimazione possa dare meccanicamente, con rapidità e con operazioni, la cui semplicità escluda il pericolo d'errore, l'area di una figura piana: esso potrà servire utilmente pei calcoli di massima, di prima previsione ed anche per calcoli definitivi quando il grado di approssimazione richiesto corrisponde

(*) Rous, *Instruments et machines à calculer.* — JORDAN, *Handbuch der Vermessungskunde.* — LABOULAYE, *Dictionnaire des arts et manufactures.* — *Enciclopedia delle arti ed industrie*; articolo, *Macchine da calcolare*, dell'Ingegnere GIUSEPPE PASTORE, alla fine del quale trovasi un'estesa bibliografia relativa a questo argomento. Per la sua semplicità e poco costo è notevole un'apparecchio presentato all'associazione francese per l'avanzamento delle scienze (Congresso di Marsiglia 1891) dall'Ingegnere M. GENAILLE.

a quello che l'istrumento può dare. Gli apparecchi che servono, o possono servire, a raggiungere questo scopo portano il nome di planimetri od anche di integratori meccanici e sono di origine relativamente recente, qualora si escludano alcuni mezzi primitivi, quali il *metodo delle pesate* applicato da Galileo e ripreso nel 1714 da MARINONI, ed il *metodo del reticolo* (*) rappresentato dagli strumenti immaginati da HOGREFE e da GAETANO CAIRO.

Il primo planimetro, che meriti veramente tal nome, è dovuto al Prof. TITO GONELLA di Firenze (**); se ne occuparono in seguito OPIKOFER (***), CORIOLIS, PONCELET, LALANNE e finalmente AMSLER LAFFON di Sciaffusa, il quale oltre al planimetro ordinario per la misura delle aree, ha costruito anche un particolare integratore capace di dare i momenti di primo e di secondo grado di una figura piana rispetto ad una retta (****), e quindi di rendere estremamente facili i calcoli e le operazioni necessarie per la ricerca dei centri di gravità, della resistenza delle travature e quelli che occorrono per valutare i movimenti di terra e determinare le distanze medie di trasporto.

In questi ultimi tempi si sono immaginati molti apparecchi collo scopo di eseguire quadrature, la cui descrizione particolareggiata non può essere letta con profitto da chi vi abbia particolare interesse che sulle memorie speciali, sparse in gran parte nei giornali scientifici e tecnici più reputati (****) e fra questi meritano speciale menzione i planimetri sferici di CORADI, che danno una grandissima approssimazione, e gli integraligrafi di

(*) *Enciclopedia delle arti ed industrie*, già citata.

(**) *Teoria e descrizione di una macchina colla quale si quadrano le superficie piane* (Planimetro GONELLA), *Antologia* di aprile, maggio e giugno dell'anno 1825.

(***) Nel 1826; OPIKOFER ottenne la medaglia d'oro all'Esposizione di Berna del 1836.

(****) CULMANN, *Traité de statique graphique*, Parigi, 1880. — A. FAVARO, *L'integratore di DUPREZ ed il planimetro di AMSLER*. — *Enciclopedia delle arti ed industrie*, articolo citato.

(*****). Citiamo come esempio: *Rivista di topografia e catasto*, 1889 ottobre. *Note dell'Ingegnere V. GATTONI sui nuovi planimetri di precisione*. — *Zeitschrift für Vermessungswesen* 1881 (CORADI), 1883-1888 (LORBER). — *Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur und Architektenvereins* 1884. — *Tijdschrift for kadaster en landmeetkunde*. — *Technische Blätter für das Königreich Böhmen*. — *Enciclopedia* diverse agli articoli *Planimetri*, *Macchine per calcolare*, *Integratori*, ecc.

ABDANK-ABAKANOWICS (*) che danno la linea integrale, e quindi la somma di un numero grandissimo di elementi infinitamente piccoli, per cui possono servire per risolvere problemi planimetrici, la ricerca di momenti, ecc. Fra tutti questi apparecchi ci limiteremo a descrivere succintamente solo il planimetro di AMSLER LAFFON, detto anche planimetro polare perchè le sue parti si muovono intorno ad assi normali al piano della figura da misurare. Preferiamo descrivere questo speciale strumento fra i molti apparecchi preposti per la misura delle aree perchè il planimetro polare dà già un'approssimazione comparabile, ed anche superiore (**) a quella che può ottenersi col rilievo dal disegno delle lunghezze necessarie alle misure delle aree elementari della figura, specialmente quando esse sono limitate da linee poco regolari, e comparabile e spesso superiore a quella che può ottenersi eseguendo i calcoli di moltiplicazione, divisione, ecc. col regolo calcolatore. Il planimetro polare ha poi comune con questo ultimo strumento due qualità; la semplicità dell'apparecchio facile ad essere usato e trasportato entro apposita busta ed il suo estremo buon mercato (**); condizioni entrambe, che congiunte ai pregi accennati superiormente, sono atte a fare di questo planimetro un'annesso quasi indispensabile di ogni studio di ingegnere.

Il planimetro polare di AMSLER (vedi *Fig. 93, tav. XIX*) si compone di due bracci $AB = a$, $BC = b$ uniti a cerniera in B ; nella fi-

(*) *Die Kugelplanimeter von G. CORADI, Zurigo.* — ABDANK-ABAKANOWICS, *Les intégraphes, la courbe intégrale et ses applications*, Parigi, 1886. — *Gli integraligrafi* di ABDANK-ABAKANOWICS sono anche costruiti da G. CORADI di Zurigo. — W. JORDAN, *Handbuch der Vermessungskunde*, Stoccarda, 1888.

(**) L'ufficio del Catasto, vice-direzione di Bologna, preferisce l'uso del planimetro al rilievo fatto sul disegno delle lunghezze necessarie per la misura di un'area. Per le piccole superficie nell'ufficio predetto si fa uso di un planimetro polare, a cui è annesso un pantografo, allo scopo di raggiungere una maggiore facilità nell'uso dello strumento ed una più grande approssimazione nel calcolo delle aree.

(***) Il planimetro polare di AMSLER costa da L. 50,00 a L. 80,00. — Il planimetro polare di AMSLER congiunto al pantografo (come usasi negli uffici del Catasto per le piccole estensioni superficiali) costa circa L. 140,00. — Il prezzo del planimetro sferico del CORADI varia da L. 125,00 a L. 180,00, e quello dei planimetri sferici a rulli dello stesso CORADI oscilla intorno a L. 200,00. Questi ultimi planimetri sono di precisione, danno un errore valutabile a circa un quinto di quello, che può aversi nel planimetro polare; sono però più delicati, racchiusi in grandi buste e quindi non tascabili: possono essere usati con grande utilità quando si voglia raggiungere un grado di approssimazione molto elevato per es. nelle misure delle aree di diagrammi forniti da indicatori e simili.

gura 94 (*Tav. XIX*) è pure rappresentato lo stesso strumento, ma solo schematicamente per poterne comprendere meglio le parti essenziali e la sua teoria. Il braccio BC porta una rotella D di raggio r distante $DB=d$ dalla cerniera B e girevole intorno ad un'asse parallelo al braccio BC . La rotella D è congiunta con un piccolo tamburro cilindrico E , intorno al quale è segnata una divisione in cento parti uguali; un nonio F opportunamente disposto permette di apprezzare i decimi di divisione. L'albero della rotella D porta una vite perpetua G , che comanda un quadrante H , sul quale sono segnate dieci divisioni, e le cose sono disposte in modo che per ogni giro della rotella il quadrante si muove davanti un indice fisso L di un decimo della sua circonferenza, ossia pel tratto corrispondente ad una divisione; sul quadrante H si leggono i giri interi della rotella, sul tamburro E invece le frazioni di giro, servendosi del nonio F per maggiore esattezza, e l'insieme della rotella, tamburro e quadrante porta il nome di rotella planimetrica. Il braccio BC del planimetro è qualche volta formato di un sol pezzo, e quindi è di lunghezza invariabile; altre volte è composto di due pezzi, rientranti l'uno nell'altro, da muoversi a mano o con vite di richiamo VW in guisa chè entro certi limiti il braccio BC può essere allungato od accorciato a volontà. All'estremità A del braccio AB trovasi una punta S , che può essere fissata sulla tavoletta, o sul foglio del disegno, mediante un peso P ; l'estremità C del braccio BC porta una punta (ordinariamente meno acuta della punta S) fissa ad un bottone Q , detta calcatoio, colla quale si può seguire a mano e percorrere il contorno di una figura piana qualsiasi. Come effetto dell'attrito fra la rotella D ed il foglio del disegno se il braccio BC si muove in direzione parallela al proprio asse la rotella D non può muoversi, quando esso invece si sposta in direzione normale allora la rotella gira di un angolo ψ e l'arco svolto $x=r\psi$ è uguale al cammino percorso dal braccio BC in quella direzione. Finalmente se il braccio BC ruota intorno alla cerniera B di un angolo ϕ la rotella percorre un arco di cerchio di raggio $d=BD$ misurato dall'arco x , di rotella svoltosi in guisa che deve essere $\phi=\frac{x}{d}$; qualsiasi movimento nel piano potrà sempre essere riguardato come una composizione dei tre movimenti considerati.

Premessa questa breve descrizione è facilissimo comprendere l'uso e la teoria del planimetro AMSLER. Prendiamo in esame la figura schematica (*Fig. 95^a, tav. XIX*) del planimetro, supponiamo fissata la punta S dello strumento in un punto esterno alla figura Ω da misurare e condotta la punta del calcatoio Q in corrispon-

denza del punto C del contorno della figura Ω . È evidente che il passaggio del calcolatore da un punto C ad un altro C_1 infinitamente vicino potrà sempre essere supposto come fatto con un movimento di traslazione del braccio BC parallelamente a se stesso per un tratto $BB_1 = CC_1'$ ed un altro di rotazione $d\phi$ dello stesso braccio intorno al punto B_1 ; non è il caso di occuparsi del movimento in senso parallelo alla direzione BC , rappresentato da $BB_1 \sin \phi$, che non è misurato dalla rotella e non ha valore pel computo dell'area del parallelogramma CBB_1C_1' , la cui misura si ottiene moltiplicando la lunghezza del braccio BC per l'altezza $BB_1 \cos \phi = dx = -r d\psi$ del parallelogramma stesso. L'area della figura elementare $CBB_1C_1 = CBB_1C_1' + C_1'B_1C_1$ sarà quindi data da

$$b dx + \frac{1}{2} b^2 d\phi = b r d\psi + \frac{1}{2} b^2 d\phi. (*)$$

Se il calcolatore percorre tutto il perimetro della figura Ω il braccio BC genererà l'area $B_0C_0CC_1C_2B_2$ in senso positivo ed in senso inverso l'area $B_2C_2C_3C_0B_0$ come somme di aree elementari analoghe a quella rappresentata in CBB_1C_1 . La somma delle due aree generate dal braccio BC movendosi in modo che un suo estremo B resti costantemente sul circolo di centro S e l'altro sul perimetro $C_0C_1C_2C_3$ è necessariamente uguale all'area data Ω più l'area Ω' racchiusa dal perimetro generato dal punto B nel suo movimento, area che deve essere in realtà sottratta da Ω perchè è negativa, quindi (facendo uso del simbolo d ovvero Δ secondochè

(*) Materialmente questo movimento si ottiene conducendo B a coincidere con B_1 conservando sempre il braccio BC parallelo alla sua posizione iniziale in modo da generare il parallelogramma piccolissimo $BC_1'B_1$ e facendo in seguito ruotare il braccio BC intorno al punto B_1 finchè esso venga a disporsi secondo B_1C_1 in modo da generare il settore circolare $C_1'B_1C_1$. Nel primo movimento, risultante dal moto di BC secondo la propria direzione ed in senso normale, la rotella planimetrica non segna che quest'ultima traslazione, (altezza del parallelogramma infinitesimo CBB_1C_1') che abbiamo chiamato dx e che risulta espressa per un arco BB_1 infinitamente piccolo da

$$dx = BB_1 \cos \phi = r d\psi.$$

Nel secondo movimento la rotella segna l'angolo al centro $d\phi = \frac{dx_1}{d}$ del settore circolare $C_1'B_1C_1$, quindi l'area di tutta la superficie generata durante un movimento infinitesimo del braccio BC è data da

$$b r d\psi + \frac{1}{2} b^2 d\phi.$$

si considerano incrementi infinitesimi della variabile oppure incrementi soltanto molto piccoli).

$$\Omega - \Omega' = \Sigma(\text{elementi } CBB_1C_1) = \Sigma b \Delta \alpha + \Sigma \frac{1}{2} b \Delta \phi = b \Sigma r \Delta \psi + \frac{1}{2} b^2 \Sigma \Delta \phi.$$

Se con n si indica il numero dei giri della rotella planimetrica e con n' ed n'' le indicazioni lette sul contatore E ed H prima e dopo aver percorso col calcatoio il perimetro della figura

$$n = n' - n'' = \frac{r \psi}{2 \pi r}.$$

Inoltre $\Sigma \Delta \phi$ se il polo S è esterno alla figura Ω è necessariamente uguale a zero perchè il punto B percorre un arco B_0B_2 ritornando alla posizione primitiva; se poi S è interno all'area Ω allora il punto B percorre l'intera circonferenza $B_0B_1B_2B_3$ (*Fig. 96^a, tav. XIX*) per ritornare alla posizione primitiva, quindi $\Sigma \Delta \phi = 2\pi$ e l'espressione dell'area Ω risulta

1° caso; *Polo esterno alla figura* ($\Omega' = 0 \quad \Sigma \Delta \phi = 0$):

$$\Omega = 2\pi r (n' - n'') b = 2\pi r b n = \alpha n \quad (57)$$

2° caso; *Polo interno alla figura* ($\Omega' \sim 0$ ($\Omega' = \pi a^2$), $\Sigma \Delta \phi = 2\pi$):

$$\begin{aligned} \Omega - \Omega' &= \Omega - \pi a^2 = 2\pi r (n' - n'') b + \pi b^2 = \\ &= 2\pi r b n + \pi b^2 = \alpha n + \pi b^2. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Omega - \Omega' &= \Omega - \pi a^2 = 2\pi r (n' - n'') b + \pi b^2 = \\ &= 2\pi r b n + \pi b^2 = \alpha n + \pi b^2. \end{aligned}} \right\} (58)$$

ossia

$$\Omega = 2\pi r b n + \pi a^2 + \pi b^2 = \alpha n + \pi (a^2 + b^2).$$

Se si indica con ν il numero di giri della rotella corrispondenti alle rotazioni angolari analoghe a $C_1'B_1C_1$,

$$\nu = \frac{2\pi d}{2\pi r} \quad \text{od anche} \quad 2\pi r b \nu = 2\pi b d$$

aggiungendo e togliendo i termini di questa uguaglianza all'espressione di Ω corrispondente al secondo caso si ottiene

$$\Omega = 2\pi r b (n - \nu) + \pi (a^2 + b^2 + 2bd) = \alpha (n - \nu) + \pi (a^2 + b^2 + 2bd).$$

Disponiamo lo strumento in una posizione tale (*Fig. 97^a, tav. XIX*)

che il piano della rotella passi pel polo S , allora

$$\rho^2 = \overline{SC}^2 = \overline{SD}^2 + \overline{DC}^2 = a^2 - d^2 + d^2 + b^2 + 2bd = a^2 + b^2 + 2bd$$

quindi

$$\Omega = \alpha(n - \nu) + \pi \rho^2. \quad (59).$$

Se $n - \nu < 0$ vuol dire che l'area Ω è minore di quella del circolo di raggio $\rho = \sqrt{a^2 + b^2 + 2bd}$ e quindi il termine $\alpha(n - \nu)$ va sottratto da $\pi \rho^2$.

Le cose dette superiormente mettono in evidenza che è sempre preferibile in via generale usare il planimetro polare disponendo lo strumento in modo che il polo cada fuori della figura da misurare, poichè in tal caso l'espressione dell'area risulta più semplice. Quando però si debba quadrare una superficie molto estesa, allora può essere necessario, od anche solo conveniente, far cadere il polo S nell'interno della figura; in tal caso bisogna ricordare che al risultato dato da αn bisogna aggiungere $\pi(a^2 + b^2)$ cioè l'area di un circolo il cui raggio sia uguale all'ipotenusa del triangolo rettangolo avente per cateti i due bracci dello strumento, oppure bisogna servirsi della formola (59) e ricordare di aggiungere ad $\alpha(n - \nu)$ la costante $\pi \rho^2$, il cui valore è ordinariamente inciso sullo strumento. Se il braccio BC del planimetro è fatto in modo che possa allungarsi od accorciarsi, in corrispondenza di varie divisioni segnate sul braccio stesso sono incisi i valori delle costanti $\pi \rho^2$ corrispondenti a quello speciale valore di $b = BC$.

Il planimetro polare AMSLER può dare facilmente un'approssimazione di $\frac{1}{300}$, ciò risulta dalla media di esperienze fatte sopra aree variabili fra cinquanta o cento centimetri quadrati; l'approssimazione è maggiore per le aree grandi, minore per le aree piccole (*) ed è naturalmente influenzata dalla qualità della carta, dal suo stato igrometrico ecc., dall'abilità dell'operatore e dallo stato di conservazione dello strumento. La natura di questo la-

(*) L'inesattezza proveniente dall'inevitabile tremolio della mano, che conduce il calcolio, e dall'oscillazione della punta intorno alla linea di contorno ha più valore nelle piccole superficie che nelle grandi. Negli uffici del Catasto italiano si usano planimetri, ai quali è annesso un pantografo, e la mano conduce la punta dell'istrumento, che segna la figura più grande. Con ciò si ottiene il vantaggio che una piccola area è misurata con movimenti corrispondenti ad un'estensione superficiale molto più grande, che sta con essa in un rapporto dato; inoltre l'effetto del tremolio della mano viene diminuito in ragione del rapporto esistente fra le due aree racchiuse dalle linee percorse dalle due punte del pantografo.

voro di indole puramente riassuntiva non ci permette d'iniziare una discussione sull'errore possibile con questo apparecchio e con altri analoghi. Tale questione trovasi però svolta ampiamente nelle opere e memorie speciali che trattano dei mezzi di misura, fra queste notiamo il trattato del D' W. JORDAN, *Handbuch der Vermessungskunde* già citato, uno studio del prof. LORBER (*) presentato all'Accademia montanistica di Loeben e molti altri lavori sparsi nei giornali tecnici in genere, e più particolarmente in quelli, che si occupano di preferenza di argomenti attinenti alle operazioni di rilievo e di misura (**). Si trova riportato in qualche studio che col planimetro di AMSLER (***) si può ottenere in condizioni favorevoli un'approssimazione di $\frac{1}{1000}$ ed anche più; non è però prudente, in via generale, fare assegnamento su tale risultato, e quando si voglia raggiungere nella misura un così alto grado di precisione sarà meglio ricorrere ad altri apparecchi, quali i planimetri di precisione del CORADI, al sommatore di BEUVIÈRE ecc., nei quali sono eliminate le cause d'errore, che provengono dalla variabilità dell'attrito fra la rotella planimetrica e la carta, sulla quale è tracciato il disegno. In un gran numero di casi però l'approssimazione data dal planimetro polare è sufficiente ed è sempre comparabile coll'approssimazione data dei metodi numerici e grafici usuali per il calcolo dell'estensione superficiali delle figure piane, quando gli elementi pel calcolo della superficie debbono essere rilevati dal disegno rappresentante l'area stessa. La semplicità poi ed il buon mercato dell'apparecchio fanno sì che il planimetro di AMSLER, come il regolo calcolatore, ha i caratteri per entrare nell'uso corrente per la risoluzione dei problemi d'ingegneria, e quindi questi due strumenti debbono essere noti in tutti i loro particolari ed essere famigliari a tutti gli ingegneri (****).

AMSLER LAFFON ha costruito anche un altro planimetro, il quale può dare contemporaneamente l'area, il momento statico ed il momento d'inerzia di una figura. Se il braccio B_1C_1 del planimetro ordinario (*Fig. 98^a, tav. XX*) invece che unirlo a cerniera

(*) *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 1884, Vol. I.

(**) *Zeitschrift für Vermessungswesen*, *Zeitschrift für Instrumentenkunde*. — Vedi anche BAUERNFEIND, *Elemente des Vermessungskunde*. — E. BOHN, *Landmessung*. — BRONIMANN, *Katastermessung*. — *Rivista di topografia e catasto*.

(***) *Rivista di topografia e catasto*, luogo citato. — *Enciclopedia delle arti ed industrie* (Macchine da calcolare).

(****) Questi istrumenti hanno anche il vantaggio di prestarsi facilmente come mezzi di controllo di calcoli eseguiti.

col braccio A, B_1 si fissa invariabilmente con una ruota dentata mobile intorno ad un asse B_1 normale al piano della figura; se l'asse stesso B_1 mediante un braccio è reso solidale con un carello UU' scorrevole lungo un regolo LL' in modo che il detto carello non possa muoversi che parallelamente ad esso seguendo la guida U' : è evidente che questa disposizione corrisponde a quella di un planimetro polare ordinario, nel quale il braccio AB è stato allungato indefinitamente portando il polo S a distanza infinita.

Il carello UU' porta un contrappeso G , che permette di regolare le cose in modo che la parte estrema RR' del carello riposi sul foglio di carta con debole pressione e soltanto nella misura sufficiente perchè funzionino regolarmente le rotelle planimetriche annesse allo strumento; esso porta anche due assi B_2 e B_3 disposti in modo che incontrano la direzione B_1S_x e sono paralleli all'asse B_1 , a questi assi sono unite due ruote dentate β_2 e β_3 , che hanno per raggio r' una lunghezza data da $r' = \frac{B_2 B_3}{7}$: $B_2 B_3$ può essere scelto ad arbitrio. La ruota β_1 porta due corone semicircolari dentate, una con raggio uguale ad $r'' = 2r' = \frac{2}{7} B_2 B_3$ comanda la

ruota β_2 , e l'altra con un raggio uguale ad $r''' = 3r' = \frac{3}{7} B_2 B_3$ comanda la ruota β_3 . Al braccio $B_1 C_1$ è unita una rotella planimetrica coll'asse parallelo al braccio stesso, altre due rotelle planimetriche sono unite in D_2 e D_3 alle ruote dentate β_2 e β_3 e sono disposte in modo che quando il braccio $B_1 C_1$ coincide in direzione od è parallelo ad XX' , l'asse della rotella planimetrica D_2 sia normale allo stesso asse XX' e quello della rotella D_3 invece gli sia parallelo.

Supponiamo che a ciascuna delle ruote β_2 e β_3 sia unito invariabilmente un braccio $B_2 C_2$ e $B_3 C_3$ con direzione parallela agli assi delle rotelle planimetriche rispettive D_2 e D_3 (*Fig. 99^a, tav. XXI*) uguali ciascuno in lunghezza a $B_1 C_1 = b$ e muniti entrambi alla loro estremità di una punta calcatoio Q_2 e Q_3 . Quando il carello si muove senza che vari l'angolo che $B_1 C_1$ fa con XX' , le tre punte Q_1, Q_2, Q_3 generano rette parallele ad XX' ed uguali in lunghezza; quando invece il carrello UU' sta fermo ed il braccio $B_1 C_1$ ruota intorno all'asse B_1 facendo con XX' un'angolo $\gamma_1 = \gamma$ i bracci ideali $B_2 C_2$ e $B_3 C_3$ si muoveranno pure intorno agli assi B_2 e B_3 e faranno colla retta XX' , rispettivamente gli angoli $\gamma_2 = 90 + 2\gamma$ e $\gamma_3 = 3\gamma$ in causa dei rapporti esistenti fra i raggi delle varie ruote dentate dell'apparecchio. Se si indicano con y_1, y_2 ed y_3 le distanze delle punte dei calcatoi Q_1, Q_2 e Q_3 da rette parallele alla

fondamentale XX' e passanti rispettivamente per B_1 , B_2 e B_3 risulta dalla figura 99^a (*Tav. XXI*) che

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= b \operatorname{sen} \gamma_1 = b \operatorname{sen} \gamma \\ y_2 &= b \operatorname{sen} \gamma_2 = b \operatorname{sen} (90 + 2\gamma) = b \cos 2\gamma = \\ &= b(1 - 2 \operatorname{sen}^2 \gamma) = b - \frac{2y_1^2}{b} \\ y_3 &= b \operatorname{sen} \gamma_3 = b \operatorname{sen} 3\gamma = b(3 \operatorname{sen} \gamma - 4 \operatorname{sen}^3 \gamma) = 3y_1 - \frac{4y_1^3}{b^2} \end{aligned} \right\} (60).$$

Durante il movimento dello strumento i tre calcolai Q_1 , Q_2 e Q_3 percorrono il contorno di tre figure, una reale Q_1 e le altre due Q_2 , Q_3 ideali, nelle quali le zone orizzontali corrispondenti $\alpha_1 \alpha_1'$, $\alpha_2 \alpha_2'$ ed $\alpha_3 \alpha_3'$, cioè quelle percorse delle punte Q_1 , Q_2 e Q_3 senza fare variare la loro distanza dalla fondamentale XX_1 , sono tutte uguali fra loro in guisa ch   pu   scriversi

$$\alpha_1 \alpha_1' = \alpha_2 \alpha_2' = \alpha_3 \alpha_3' = z$$

mentre ch   le y dei punti o zone orizzontali corrispondenti sono espresse dalle formole (60) quindi sar  

$$\int z dy_1 = \Omega_1$$

$$\int z dy_2 = \Omega_2$$

$$\int z dy_3 = \Omega_3.$$

D'altra parte, indicati con n_1 , n_2 ed n_3 il numero di giri fatti da ognuna delle tre rotelle planimetriche, per le propriet   dei planimetri dimostrate superiormente ed essendo il polo S esterno alle figure Q_1 , Q_2 , Q_3 , si debbono verificare le relazioni

$$\Omega_1 = 2\pi r_1 n_1 b = \alpha_1 n_1$$

$$\Omega_2 = 2\pi r_2 n_2 b = \alpha_2 n_2$$

$$\Omega_3 = 2\pi r_3 n_3 b = \alpha_3 n_3$$

quindi, indicando con A , M_x ed I_x rispettivamente l'area, il mo-

mento statico ed il momento di inerzia della figura Ω , rispetto ad assi passanti per B_2 e B_3 e paralleli ad XX' e con

$$\sigma_1 = 2\pi r_1, \quad \sigma_2 = 2\pi r_2, \quad \sigma_3 = 2\pi r_3$$

le circonferenze delle tre rotelle planimetriche, sarà

$$\alpha_1 n_1 = \int z dy_1 = A$$

$$\alpha_2 n_2 = \int z dy_2 = -\frac{4}{b} \int y_1 z dy_1 = -\frac{4}{b} M_x$$

$$\alpha_3 n_3 = \int z dy_3 = 3 \int z dy_1 - \frac{12}{b_2} \int z y_1^2 dy_1 = 3A - \frac{12}{b_2} I_x$$

da cui si ricava

$$\left. \begin{aligned} A &= \alpha_1 n_1 = (\sigma_1 b) n_1 \\ M_x &= -\frac{b}{4} \alpha_2 n_2 = -\left(\frac{\sigma_2 b^2}{4}\right) n_2 \\ I_x &= \frac{1}{4} b^2 \alpha_1 n_1 - \frac{b^2}{12} \alpha_3 n_3 = \left(\frac{\sigma_1 b^3}{4}\right) n_1 - \left(\frac{\sigma_3 b^3}{12}\right) n_3 \end{aligned} \right\} (61).$$

Le quantità fra parentesi sono costanti e dipendono unicamente dalle dimensioni dello strumento; se si ha cura di graduare la rotella D_2 in senso inverso delle altre due si ottiene senz'altro il cambiamento di segno del momento statico M_x . Coll'uso poi dei teoremi dimostrati ai numeri 3, 4, 6 e seguenti si possono determinare il baricentro della figura Ω , ed i momenti statici e d'inerzia rispetto ad una retta qualsiasi del piano.

Il signor AMSLER, per rendere meno costoso il planimetro dei momenti, ha costruiti apparecchi, i quali danno ancora i momenti di primo e secondo grado, però non più contemporaneamente, ma solo successivamente; cioè ogni qualvolta si percorre il contorno della figura data col calcatoio si ottiene l'area, oppure il momento statico o gli elementi necessari pel calcolo del momento d'inerzia della figura stessa, a seconda del modo, col quale è disposto lo strumento. La modificazione, che a questo scopo il signor AMSLER ha fatto all'apparecchio descritto, consiste in ciò che la ruota β_1 (*Fig. 100^a, tav. XXI*) ha il suo asse in B_1 e può essere resa folle sul suo asse, oppure può essere fissata con una vite di pressione al

braccio A, B , in due modi diversi col mezzo di una scannellatura speciale. Contemporaneamente il braccio B, C , del planimetro ordinario porta una ruota dentata β_2 comandata dalla ruota β_1 ed avente un raggio uguale alla metà di quello della ruota β_1 ; questa ruota può essere anch'essa resa fissa o mobile sopra il braccio B, C , e porta l'unica rotella planimetrica dello strumento.

Fissando opportunamente ora l'una or l'altra di queste ruote e riunendo ad un carrello mobile UU' lungo un regolo LL' ora l'uno ora l'altro braccio del planimetro come è indicato in M si ottengono disposizioni convenienti per avere l'area, i momenti statici ed i momenti d'inerzia di una figura. Così per es., lasciando libera la ruota β_1 ed assicurando la ruota β_2 al braccio B, C , lo strumento può essere adoperato come un planimetro polare ordinario, invece riunendo l'estremità C , dell'asta B, C , col carrello, fissando la ruota principale β_1 , liberando la ruota β_2 e percorrendo colla punta A , la figura Q , si ottiene la disposizione adatta a dare i momenti statici (già studiata superiormente). Essendo stato spiegato minutamente il planimetro dei momenti nella sua forma più completa non sembra necessario arrestarci su queste forme derivate, le quali saranno subito comprese confrontandole colla forma tipo, sebbene vari un poco il significato delle costanti nella formola, che serve per la determinazione del momento d'inerzia, perchè appunto per questa ricerca si scambia la disposizione dei bracci rilegando al carrello mobile UU' ora B, C , ed ora B, A . L'uso poi di questi apparecchi può essere appreso in poche ore esaminando accuratamente lo strumento ed esercitandosi a determinare le aree ed i momenti statici e d'inerzia di figure semplici, come cerchi, quadrati, rettangoli, ecc. dei quali si possono calcolare le stesse quantità con facilità ed esattezza mediante misure dirette fatte sul disegno e si può quindi ottenere così un facile controllo delle operazioni di misura eseguite.

Non è a nostra cognizione che i planimetri dei momenti siano fino ad ora molto usati dagli ingegneri; tuttavia essi possono rendere grandi servigi non solo nei calcoli dei movimenti di terra, ma anche nella determinazione delle reazioni incognite nei problemi impliciti della statica delle costruzioni e nel calcolo delle deformazioni, oppure delle sezioni resistenti, come avremo occasione di vedere particolareggiatamente in seguito nello studio dell'equilibrio delle travature, e come risulta anche immediatamente dall'esame delle formole trovate nello studio della *Teoria generale della resistenza dei materiali*.

L'ARTE DI FABBRICARE

CORSO COMPLETO

DI ISTITUZIONI TEORICO-PRATICHE

per gl'Ingegneri, per gli Architetti, per Periti in costruzioni, per Periti misuratori,
per gl'Intraprenditori, per Capomastri, e per quanti si trovano applicati o vogliono applicarsi
all'esecuzione ed alla sorveglianza di costruzioni civili, stradali ed idrauliche

CON TAVOLE ILLUSTRATIVE

MECCANICA APPLICATA ALLE COSTRUZIONI

PER L'INGEGNERE

SILVIO CANEVAZZI

Professore nella Regia Scuola d'applicazione per gli Ingegneri di Bologna.

Parte II - Dispensa 1^a

TAVOLE

TORINO

Presso AUGUSTO FEDERICO NEGRO, Editore

nella Galleria Nazionale

con Succursali in Roma, Napoli e Cagliari (per la Sardegna).

1892

La **MECCANICA APPLICATA ALLE COSTRUZIONI**
conterà di due parti coi rispettivi atlanti di Tavole. - L'associazione è obbligatoria per tutta l'opera
Prezzo di questa Dispensa (Testo e Tavole) Lire 8.

Editore — AUGUSTO FEDERICO NEGRO — Torino
nella Galleria Nazionale

SERIE TERZA

DELL'

ALBUM

DEGLI

INGEGNERI ED ARCHITETTI

SCELTA COLLEZIONE DI DISEGNI

di costruzioni moderne e di progetti redatti a scopo di concorso o di studio,
col corredo delle quote, dei dettagli, delle analisi dei prezzi, ecc.

Stando per ultimarsi ora le due prime Serie di questa importante pubblicazione, abbiamo determinato, di por mano alla terza Serie col proposito di migliorarla notevolmente, sia con una scelta di lavori meglio rispondenti alla sua indole speciale, sia con metodi di rappresentazione più conformi al vero sentimento del disegno architettonico e sia ancora coll'imprimerle un carattere assolutamente nazionale in guisa che, riproducendo con scrupolosa esattezza i lavori progettati da valenti Ingegneri ed Architetti, essa rispecchi fedelmente il vario e continuato movimento di questo ramo artistico nelle diverse regioni d'Italia.

Così pure affinché la nostra Opera abbia a riuscire di incontestabile utilità pratica a coloro che si avviano nella nobile carriera delle costruzioni civili e più specialmente in quelle che s'incarnano nelle forme architettoniche, pubblicheremo non solo i disegni delle più importanti costruzioni moderne, ma ben anche i progetti di edifizî redatti da rinomati Ingegneri ed Architetti, ancorchè tali progetti, siano stati compilati a solo scopo di studio o di concorso.

Abbiamo inoltre deciso di sostituire alla traduzione francese del testo, un più largo campo di dati e notizie riferentisi a particolari, analisi, ecc., che abbiano un interesse reale e facciano meglio conoscere il pregio dei lavori che riprodurremo.

Onde giungere sicuramente al nostro scopo ci siamo assicurata la cooperazione di persona competentissima, la quale dimostrò con vari ragguardevoli edifizî quanto sia il suo amore per tutto ciò che ha il carattere dello stile puro e corretto. Egli è l'Archit. Ing. Prof. Cav. A. PORTA sotto la direzione del quale procederà l'Opera in discorso.

Condizioni di associazione

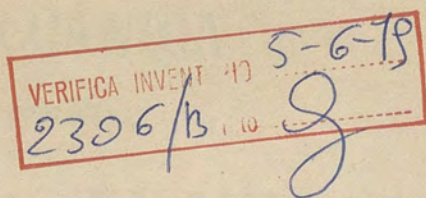
La pubblicazione della terza Serie si farà nello stesso formato delle due precedenti, e sarà effettuata col concorso dei migliori metodi atti a dare la più fedele riproduzione dei disegni che verranno in essa raccolti.

Questa Serie conterà pure, come le altre due, di dodici fascicoli, che saranno pubblicati colla maggior possibile sollecitudine e regolarità.

Il prezzo di ogni fascicolo è di Lire **sette** per gli associati alle due prime Serie e di Lire **otto** per gli associati alla sola terza Serie.

Per conservare in buono stato i fascicoli di questo **Album**, abbiamo fatto allestire un'elegante e forte busta o cartella in tela inglese con ricca iscrizione in oro e con apposite alette interne per tenere riuniti i fascicoli. Il prezzo di ciascuna di esse è di Lire **otto**.

624 (02) : 624.07 CAN



L'ARTE
DI
FABBRICARE

CORSO COMPLETO DI ISTITUZIONI TEORICO-PRATICHE

PER GLI INGEGNERI, PER GLI ARCHITETTI, PER PERITI IN COSTRUZIONE,
PER PERITI MISURATORI E PER QUANTI SI TROVANO APPLICATI ALLA DIREZIONE
ED ALLA SORVEGLIANZA DI COSTRUZIONI CIVILI, STRADALI ED IDRAULICHE

18-1-81

WHITE

FABRICARE

THE FABRICARE COMPANY
LIMITED
10, ABchurch Lane, LONDON, E.C. 4
TELEGRAMS: FABRICARE LTD LONDON
TELEPHONE: 2511

MECCANICA

APPLICATA

ALLE COSTRUZIONI

LAVORO AD USO

degli Ingegneri, degli Architetti, dei Periti in costruzione
e degli studenti delle Regie Scuole d'Applicazione per gli Ingegneri
e dei Corsi tecnici per Periti in costruzione

PER L'INGEGNERE

SILVIO CANEVAZZI

Professore nella Regia Scuola degli Ingegneri di Bologna

TAVOLE



TORINO

Presso **AUGUSTO FEDERICO NEGRO**, Editore
nella **Galleria Nazionale**

1892

Proprietà letteraria, con riserva della traduzione.









Fig. 7.

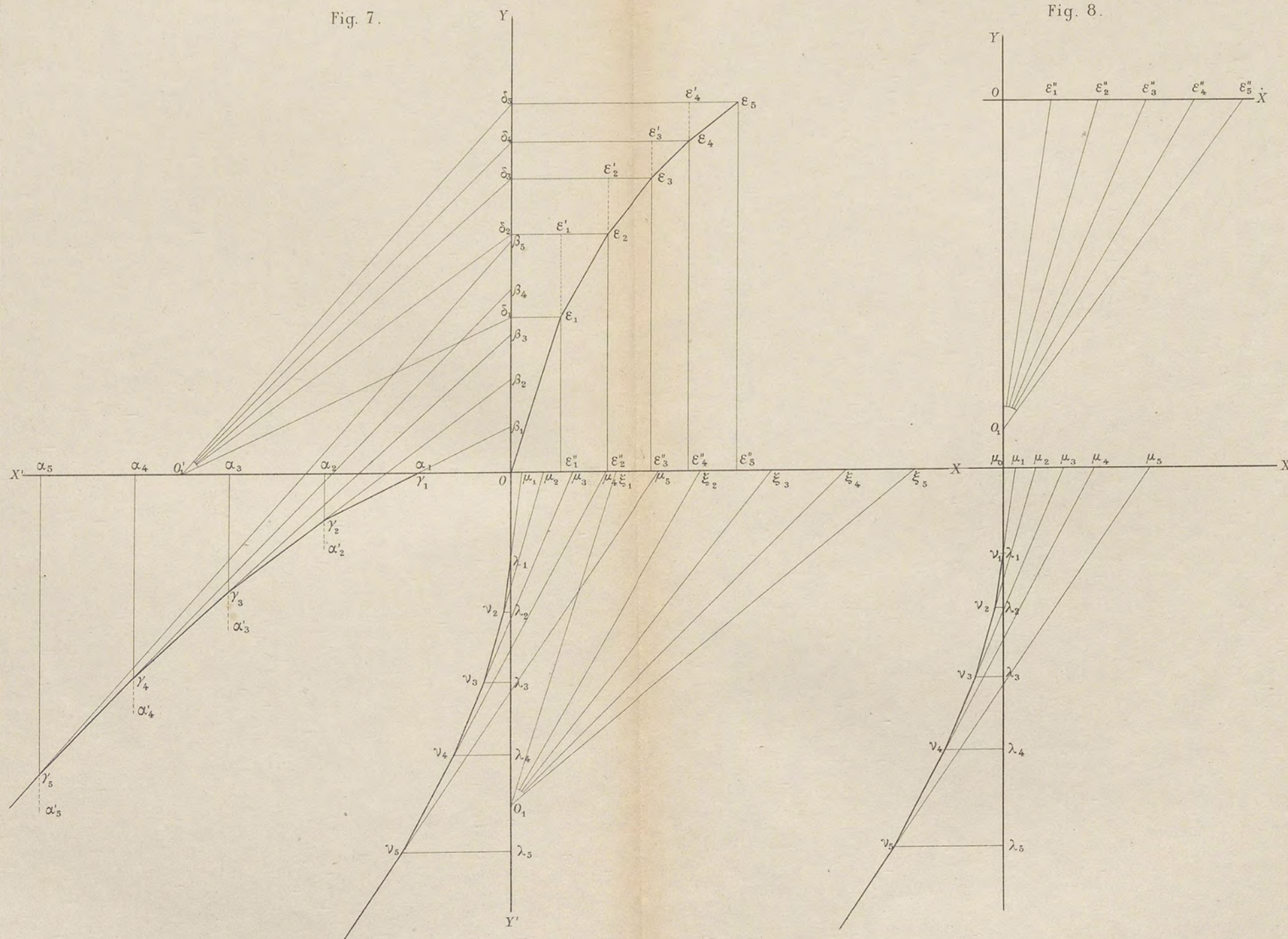


Fig. 8.

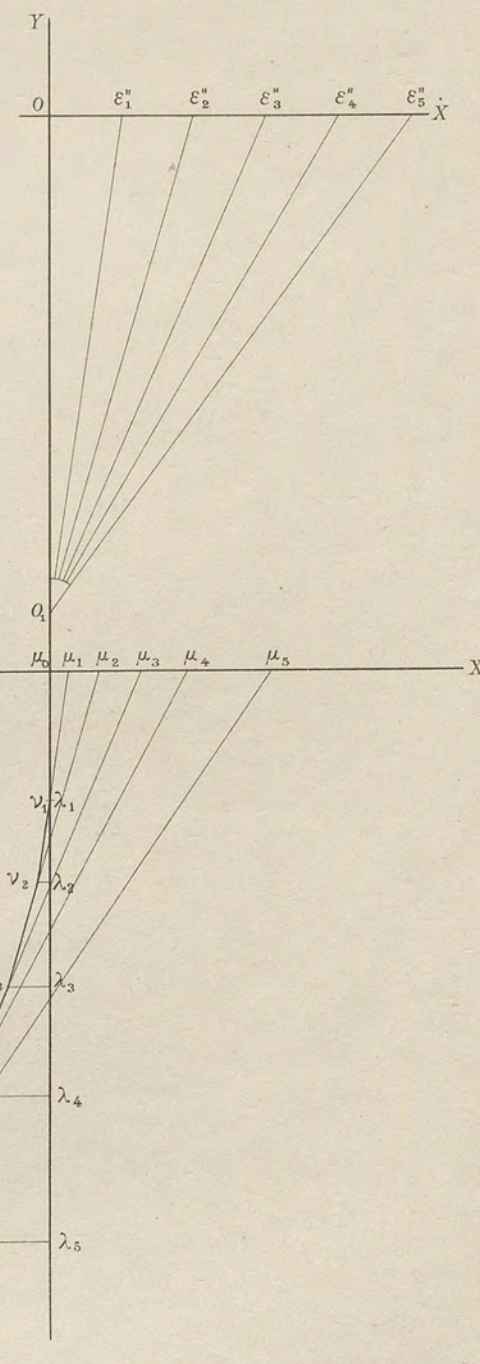




Fig. 9.

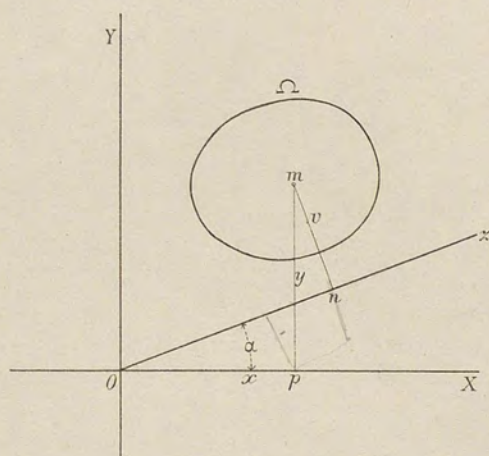


Fig. 10.

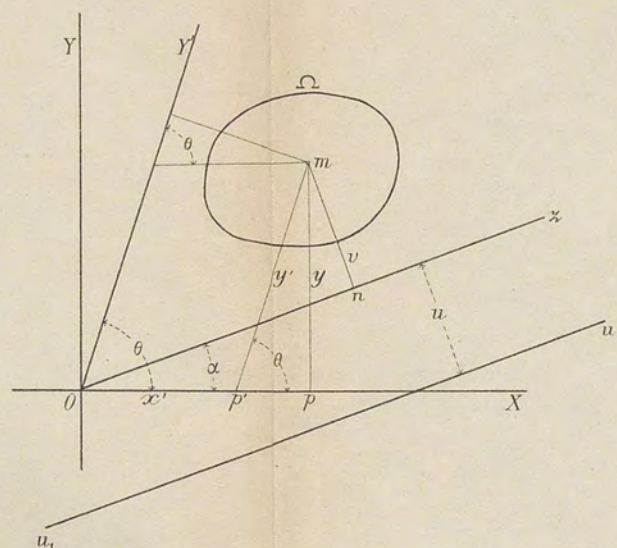


Fig. 11.

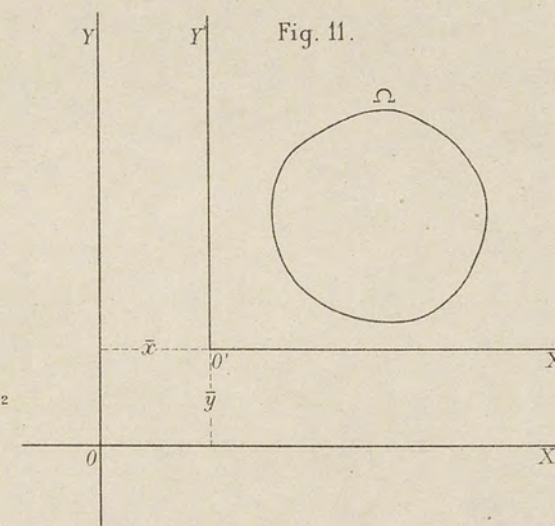


Fig. 12.

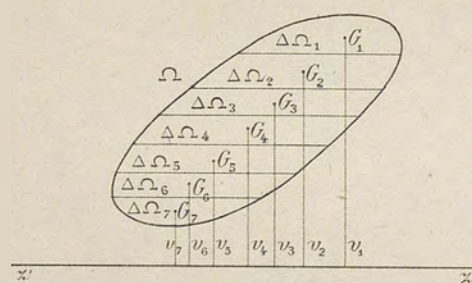


Fig. 13.

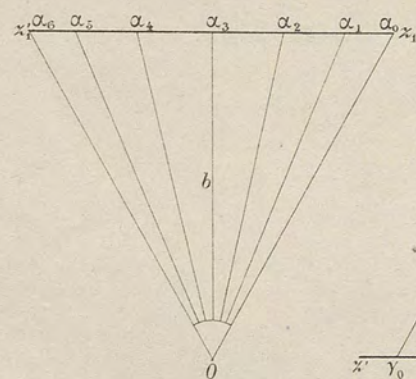


Fig. 14.

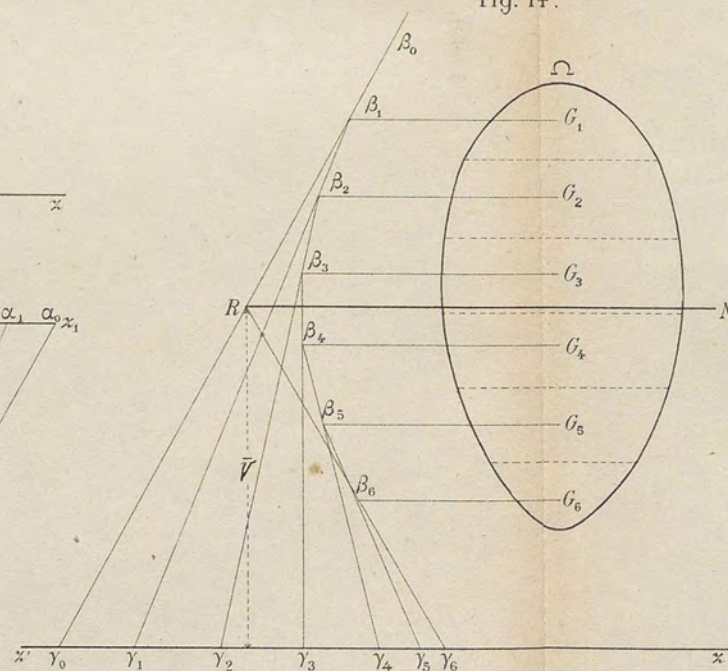


Fig. 15.

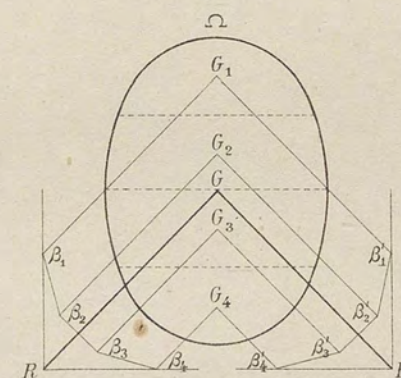


Fig. 16.

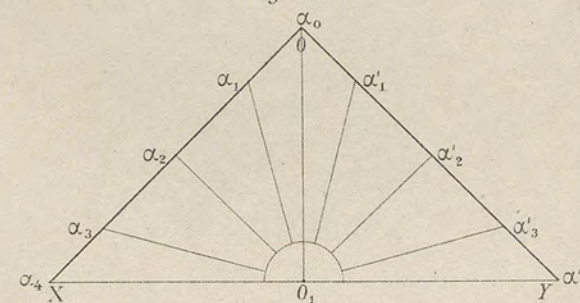






Fig. 25.

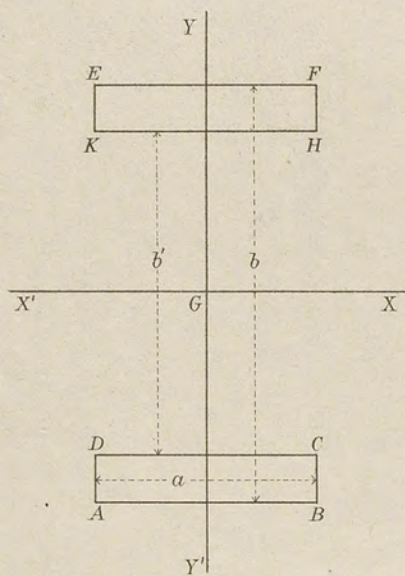


Fig. 26.

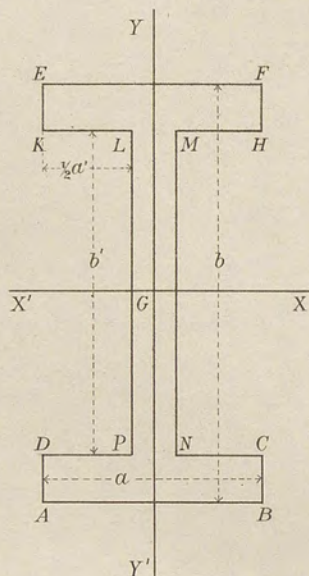


Fig. 27.

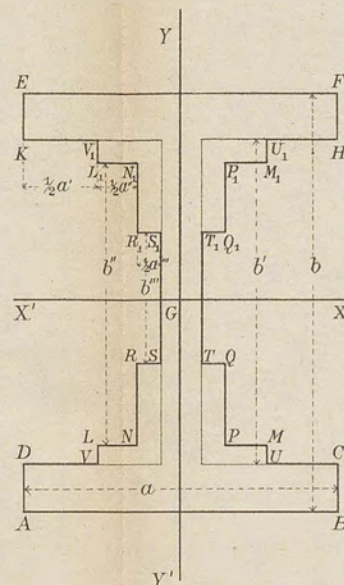


Fig. 28.

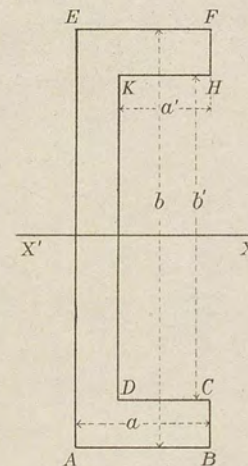


Fig. 29.

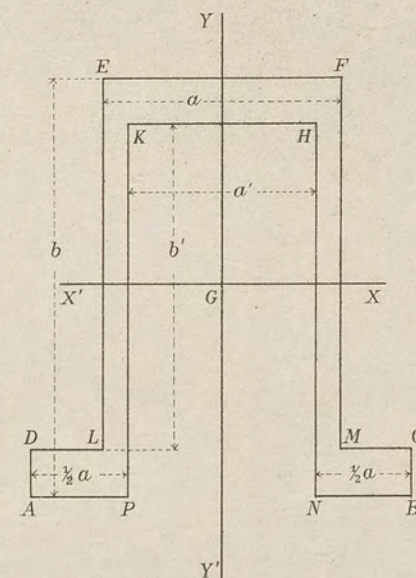


Fig. 30.

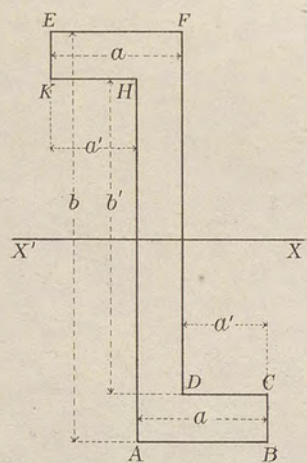


Fig. 31.

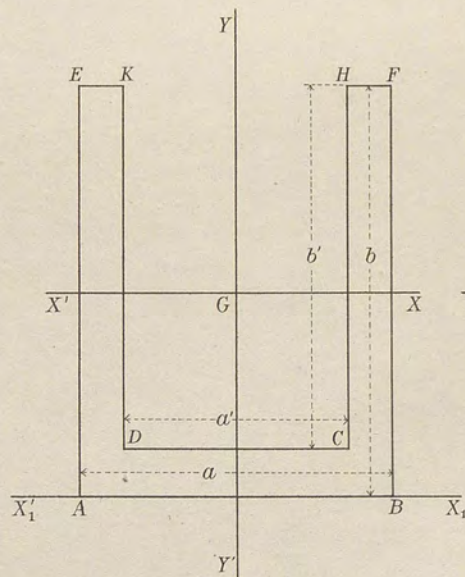


Fig. 32.

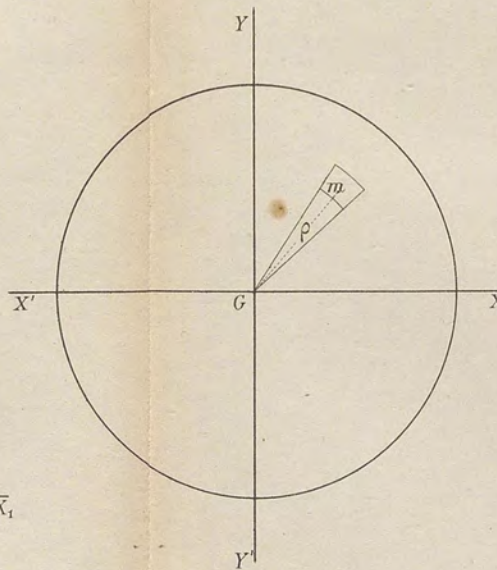


Fig. 33.

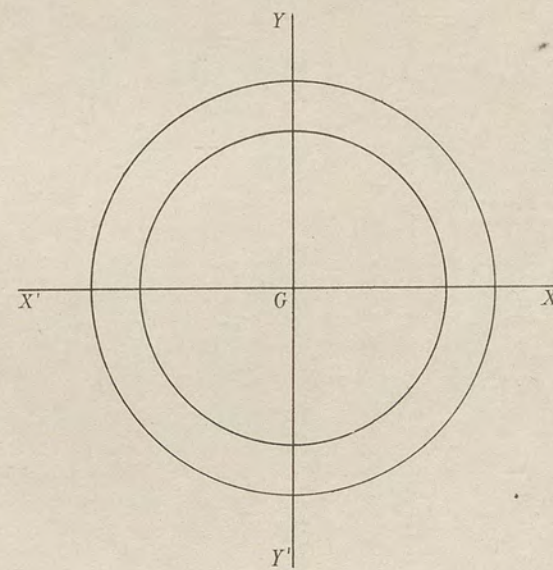






Fig. 34.

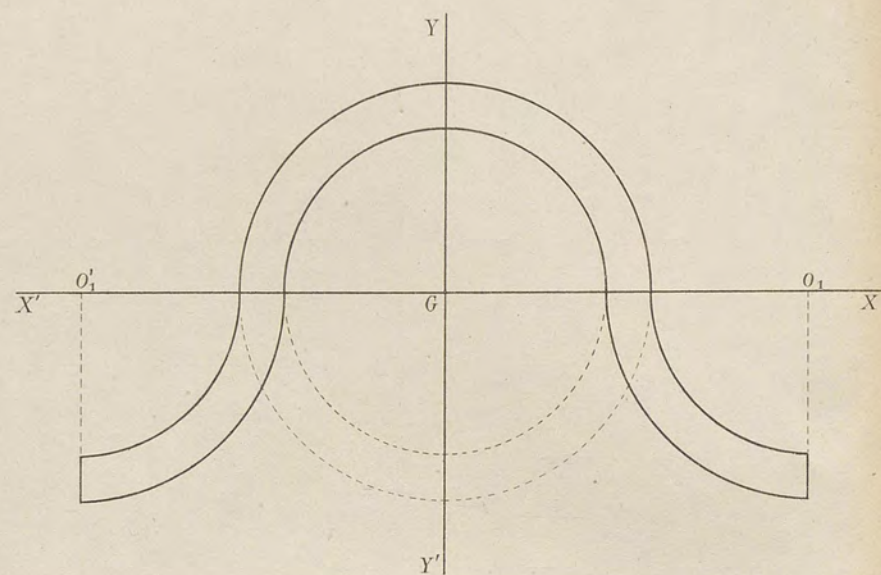


Fig. 35

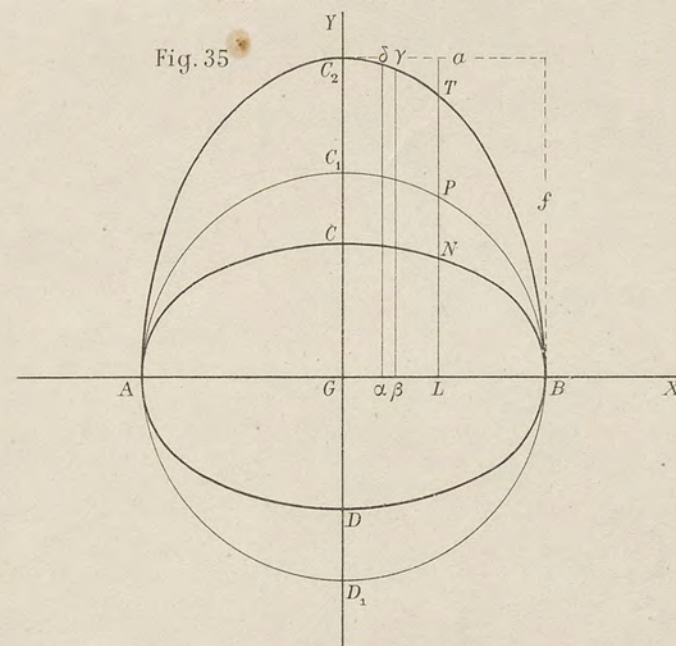


Fig. 36.

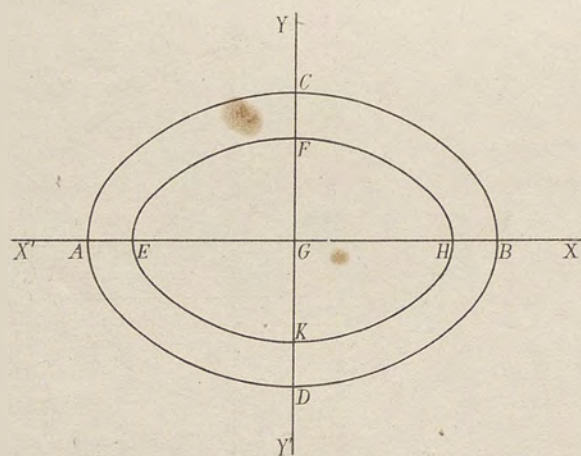


Fig. 37.

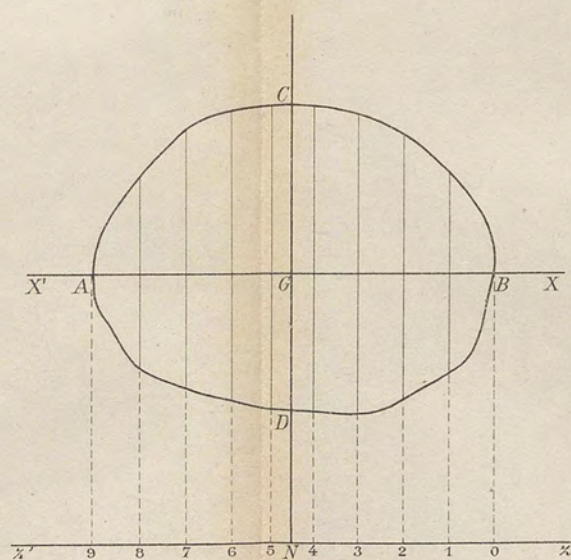


Fig. 38

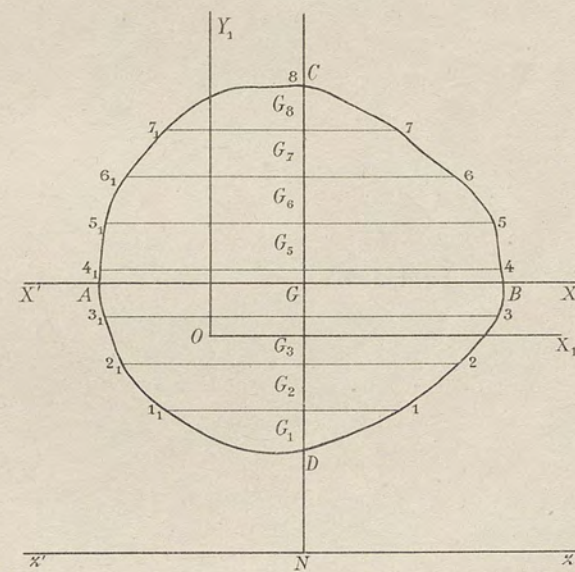






Fig. 39

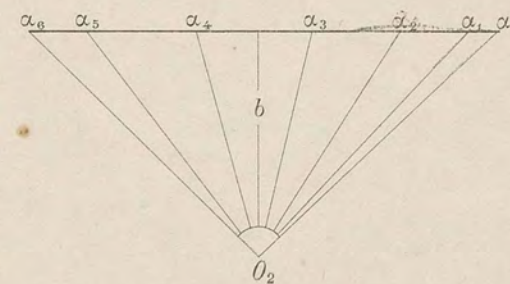
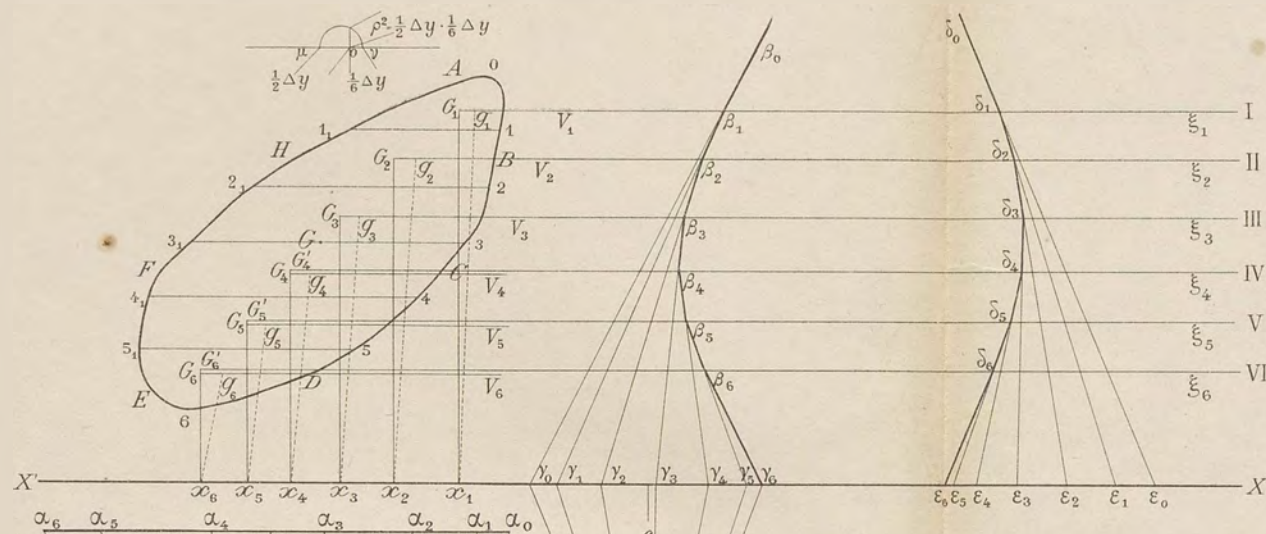
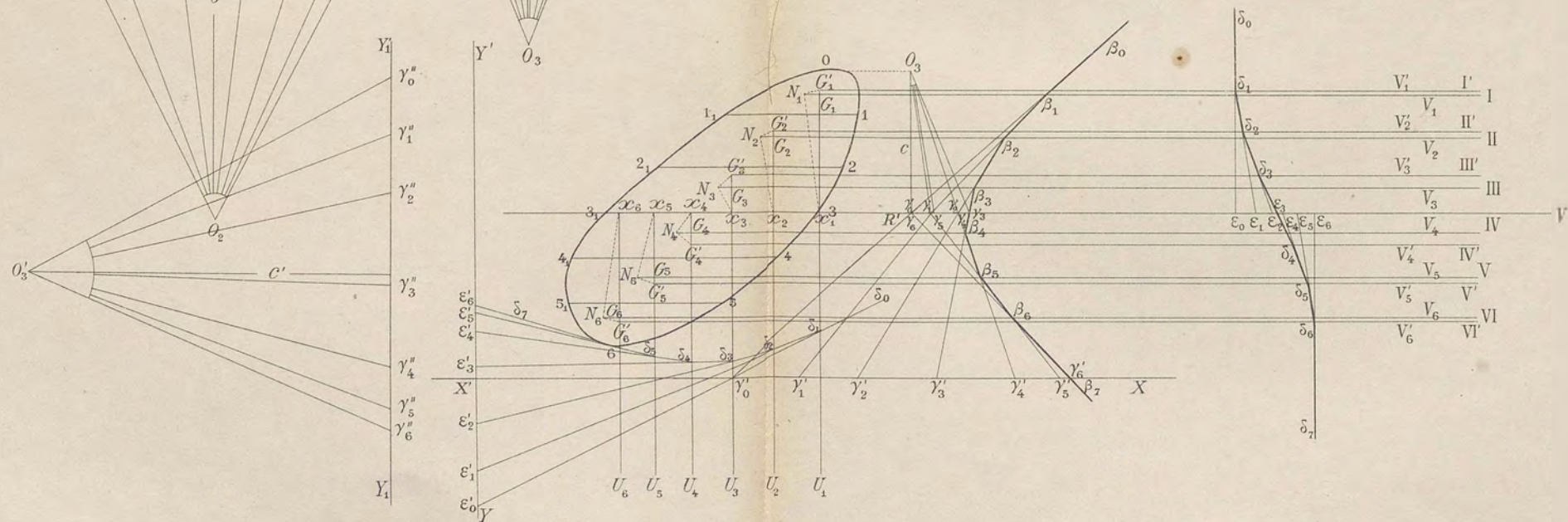


Fig. 40







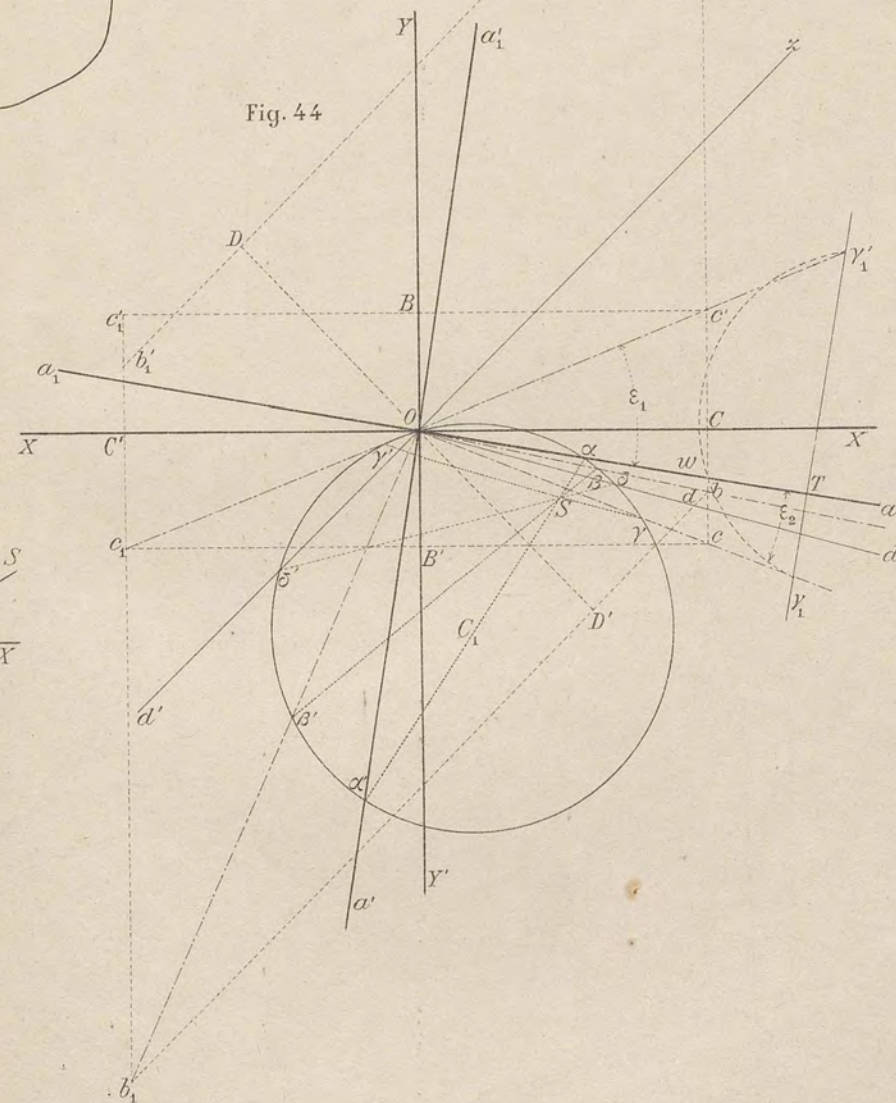
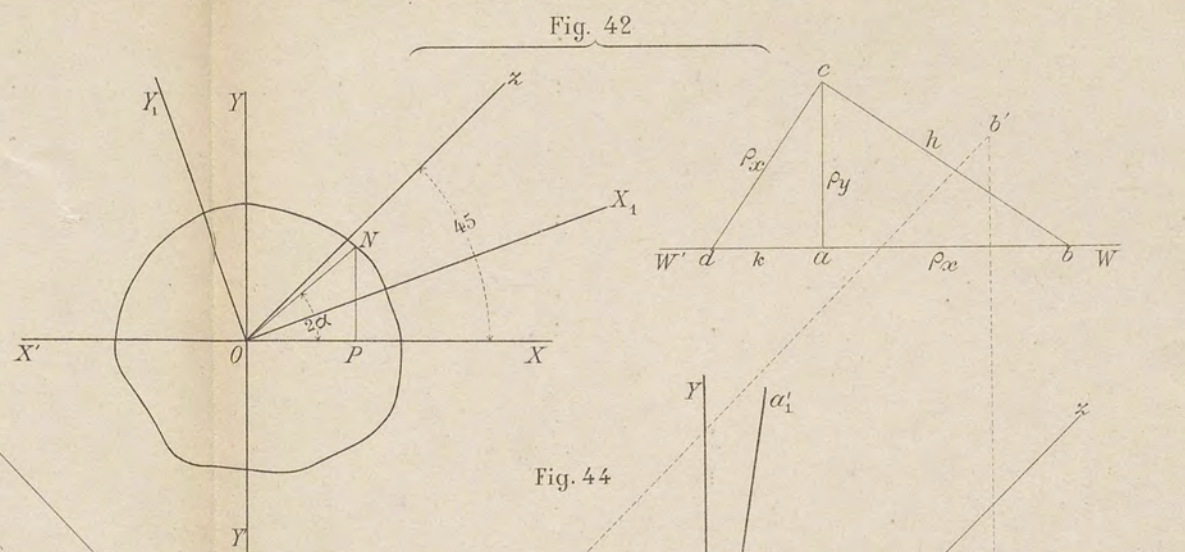
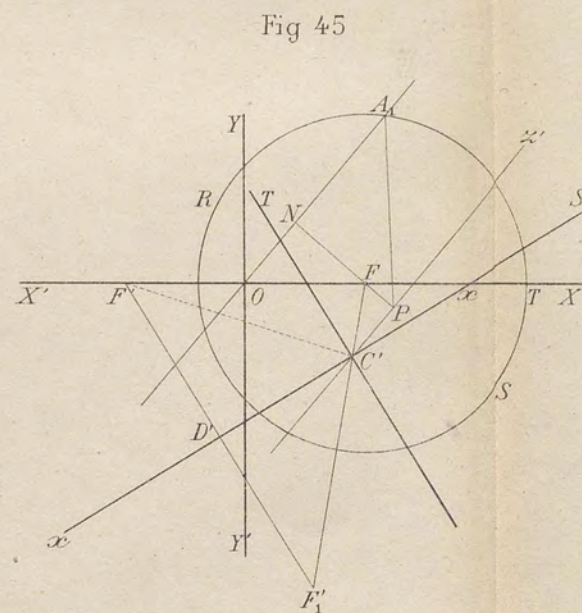
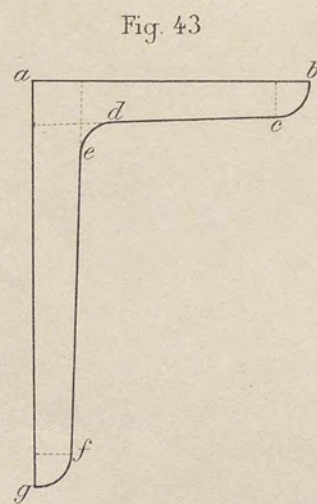
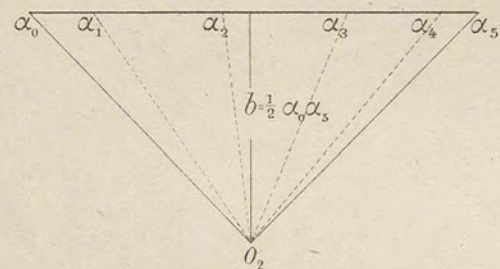
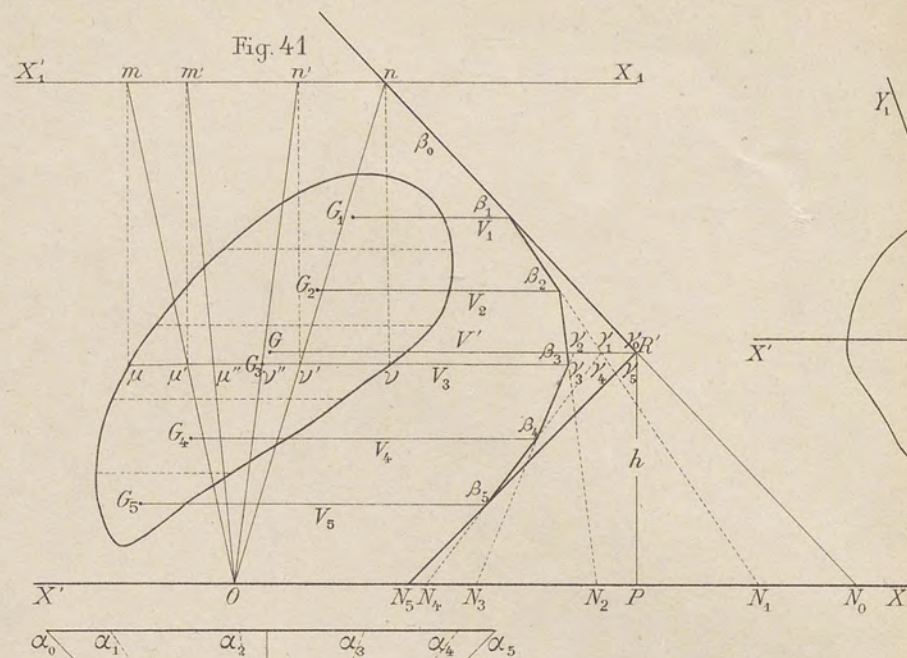




Fig. 47.

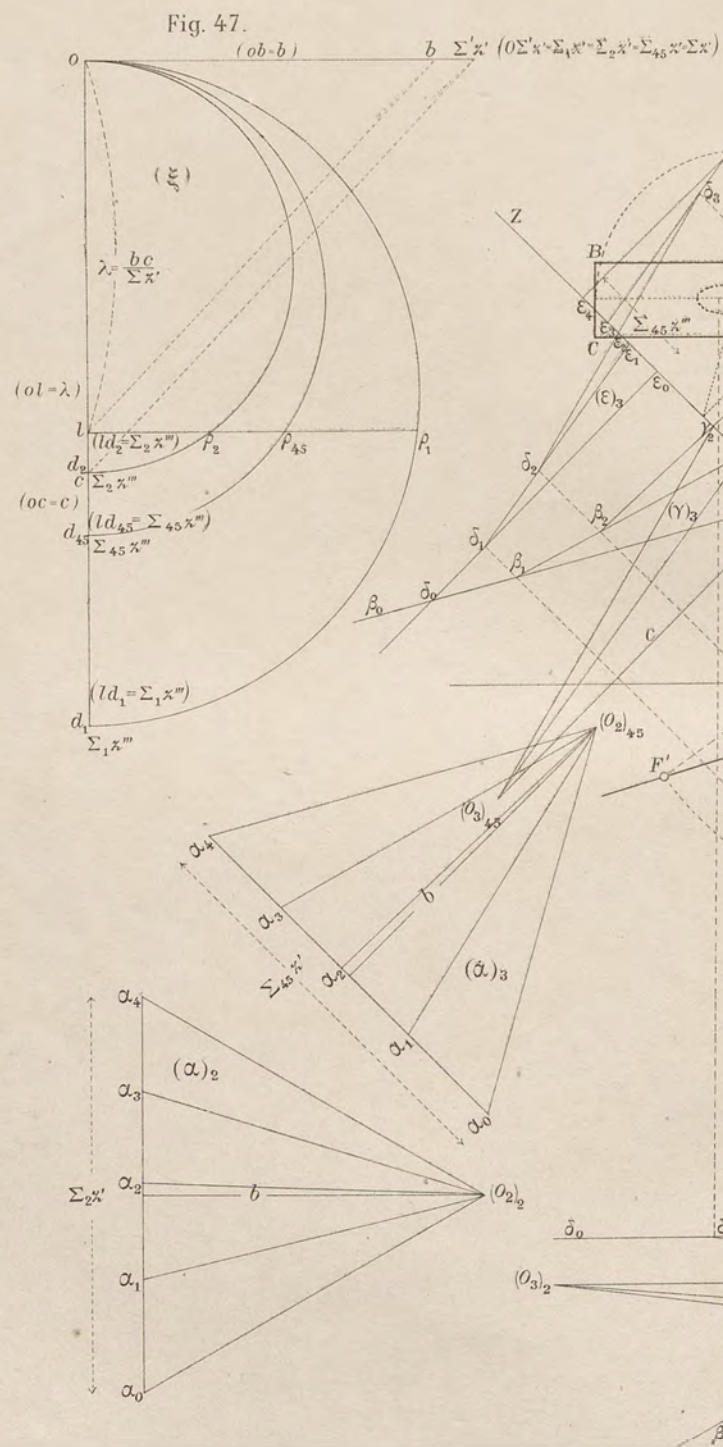


Fig. 46.

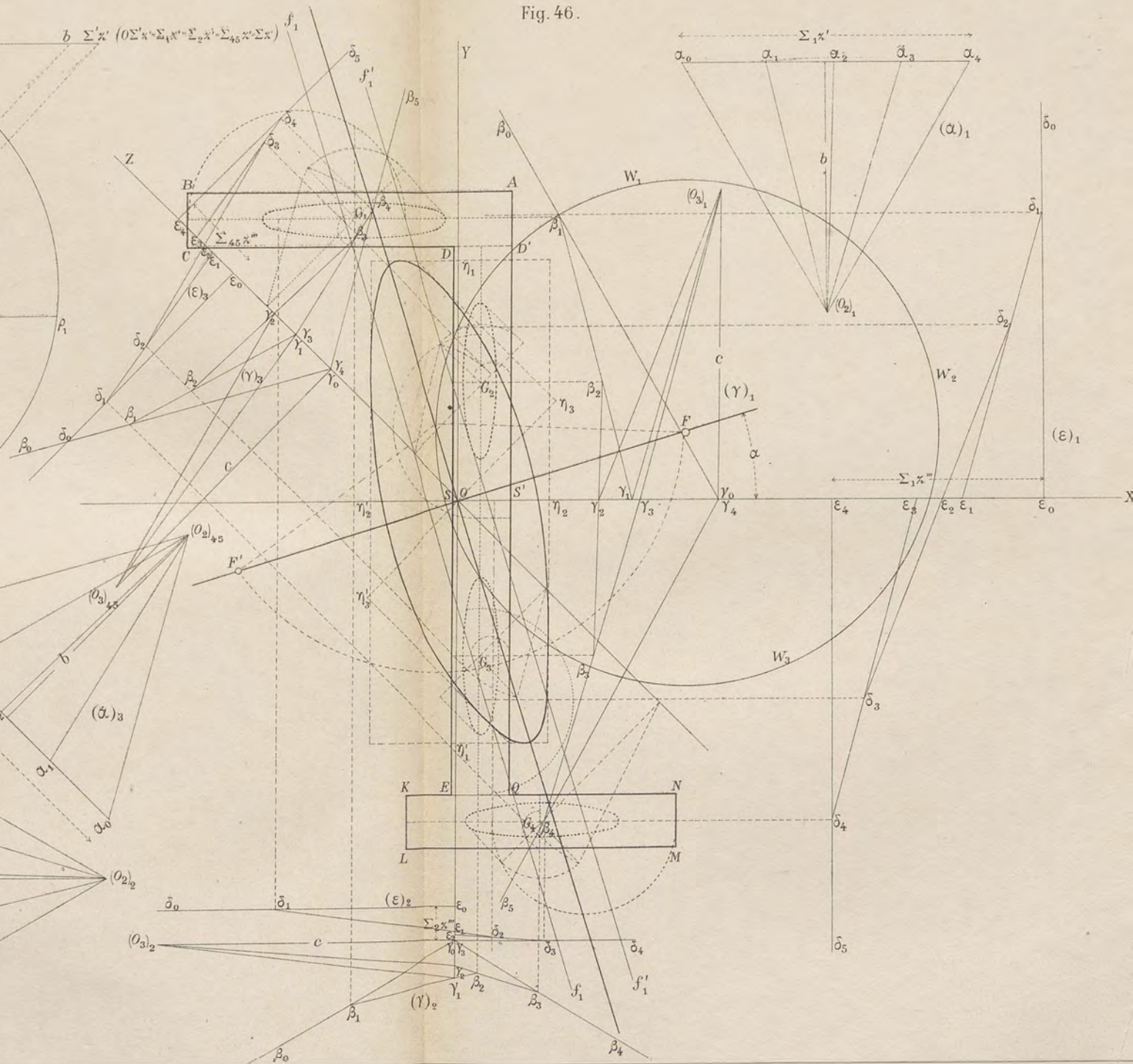




Fig. 48.

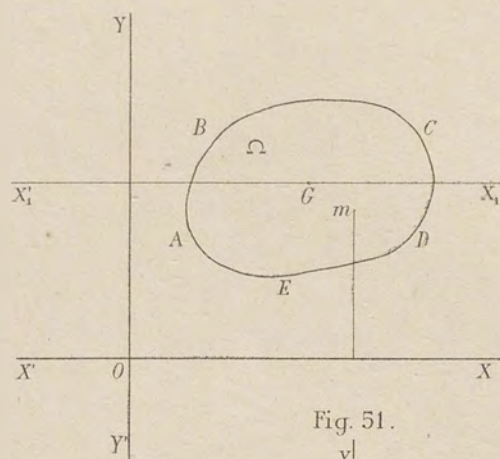


Fig. 49.

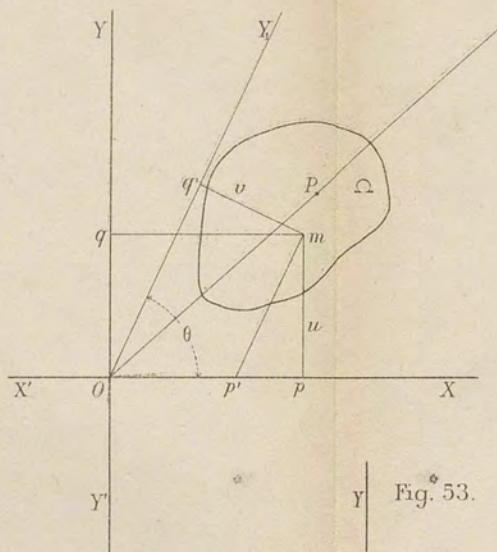


Fig. 50.

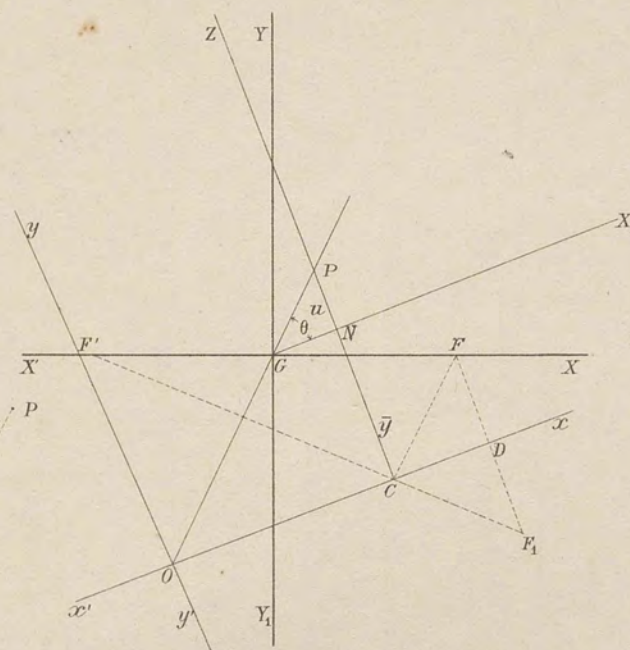


Fig. 51.

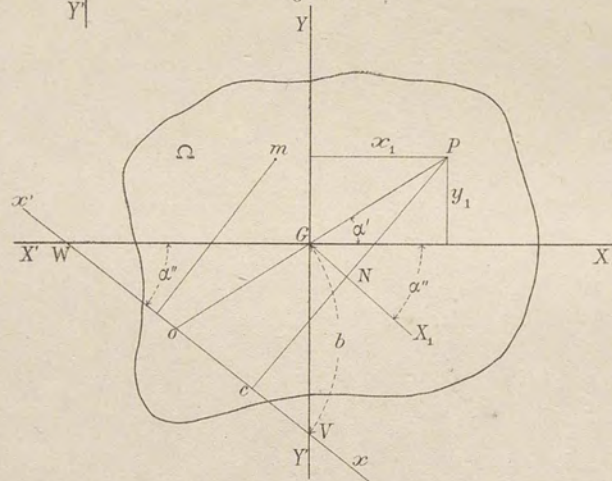


Fig. 53.

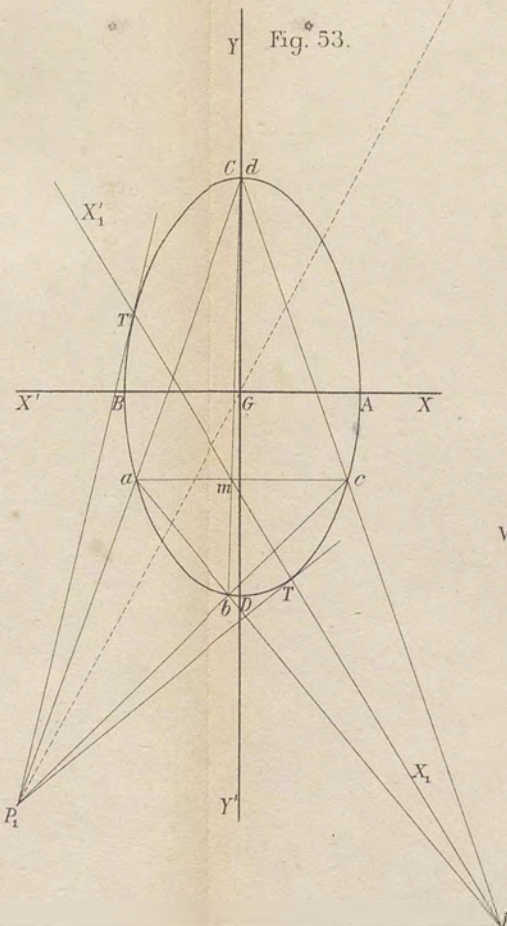


Fig. 52.

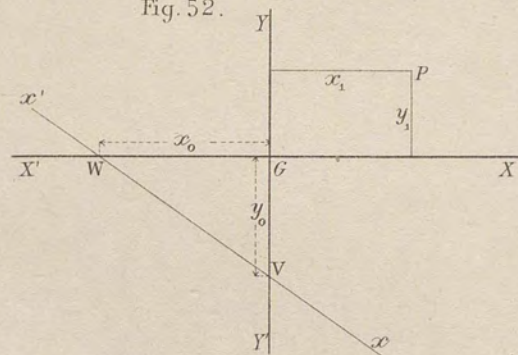


Fig. 54.

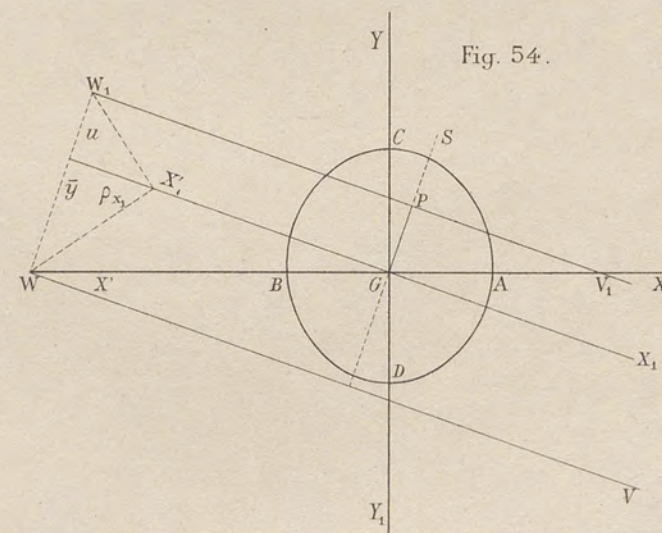




Fig. 55

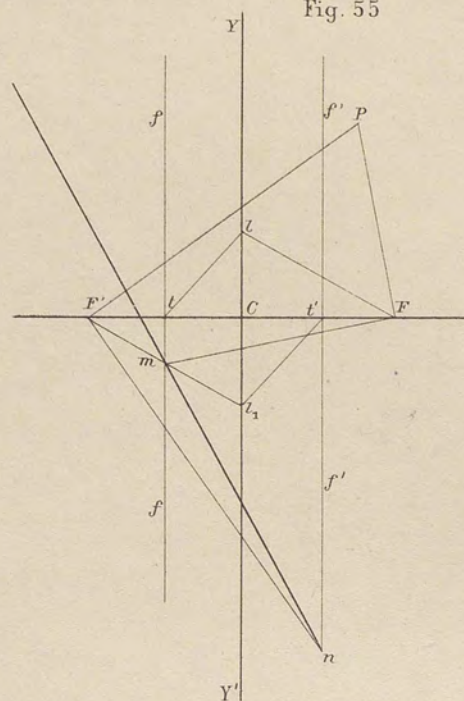


Fig. 56

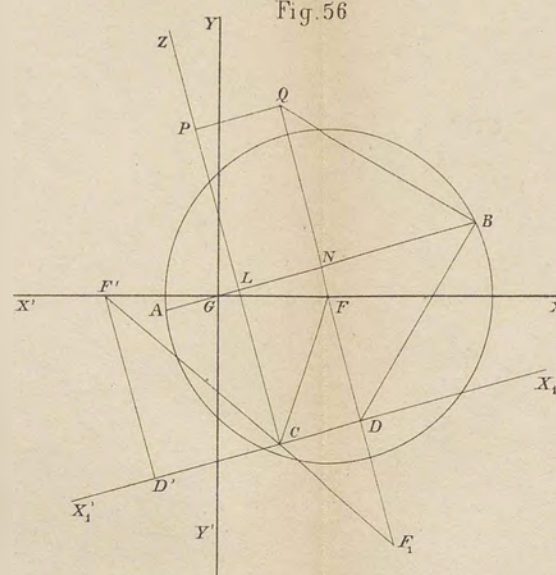


Fig. 57

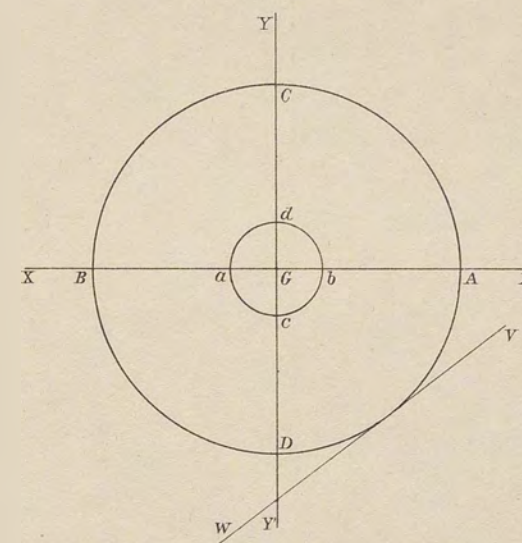


Fig. 58

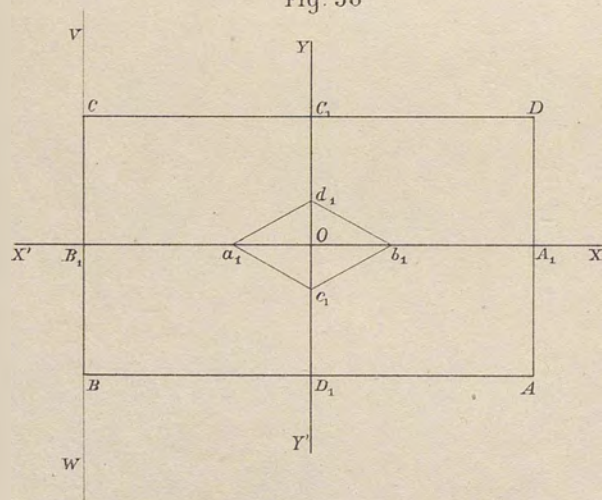


Fig. 59

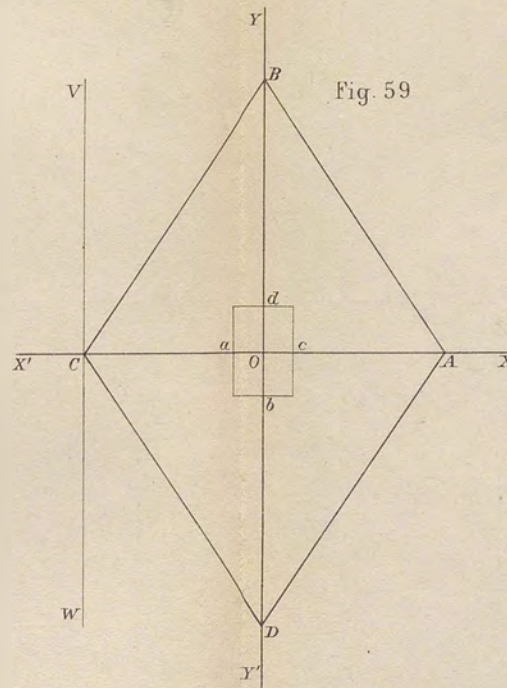
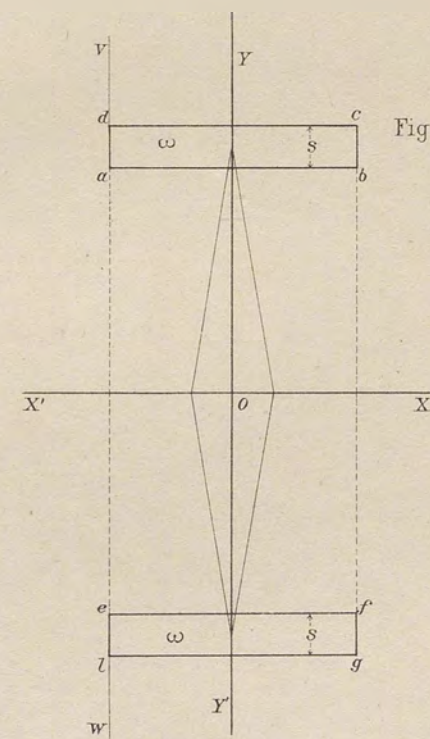
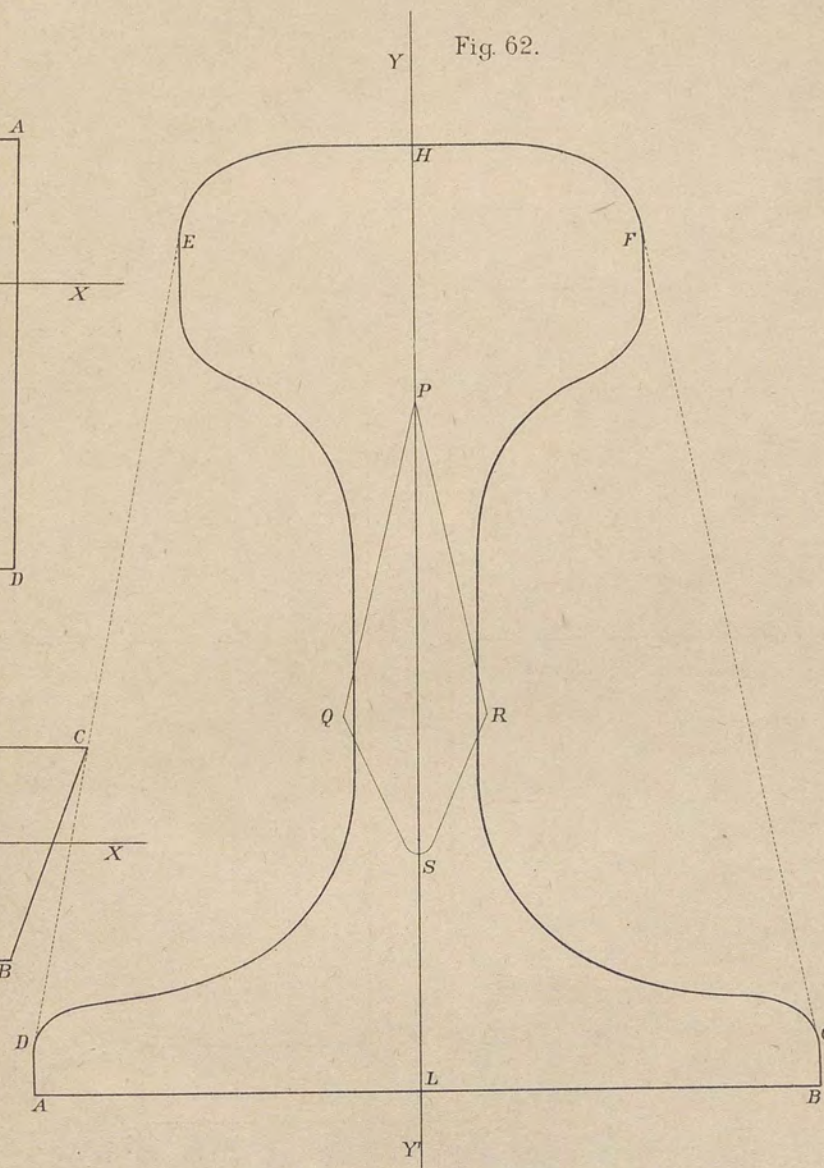
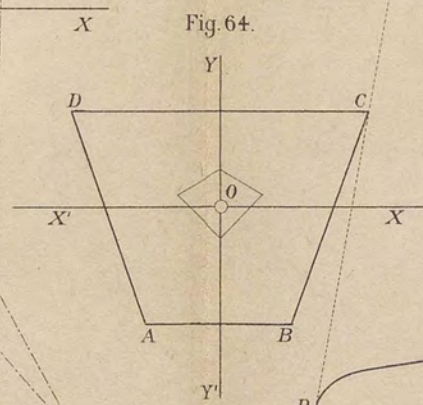
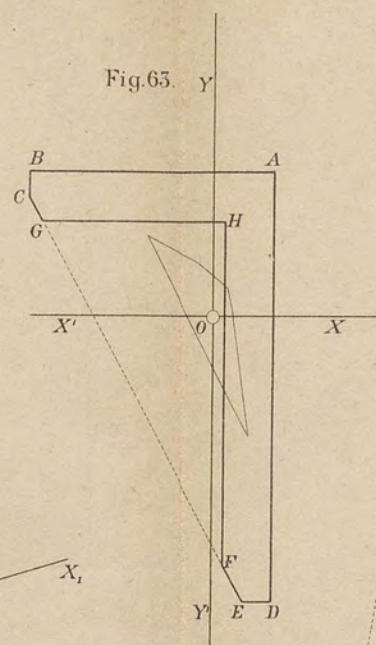
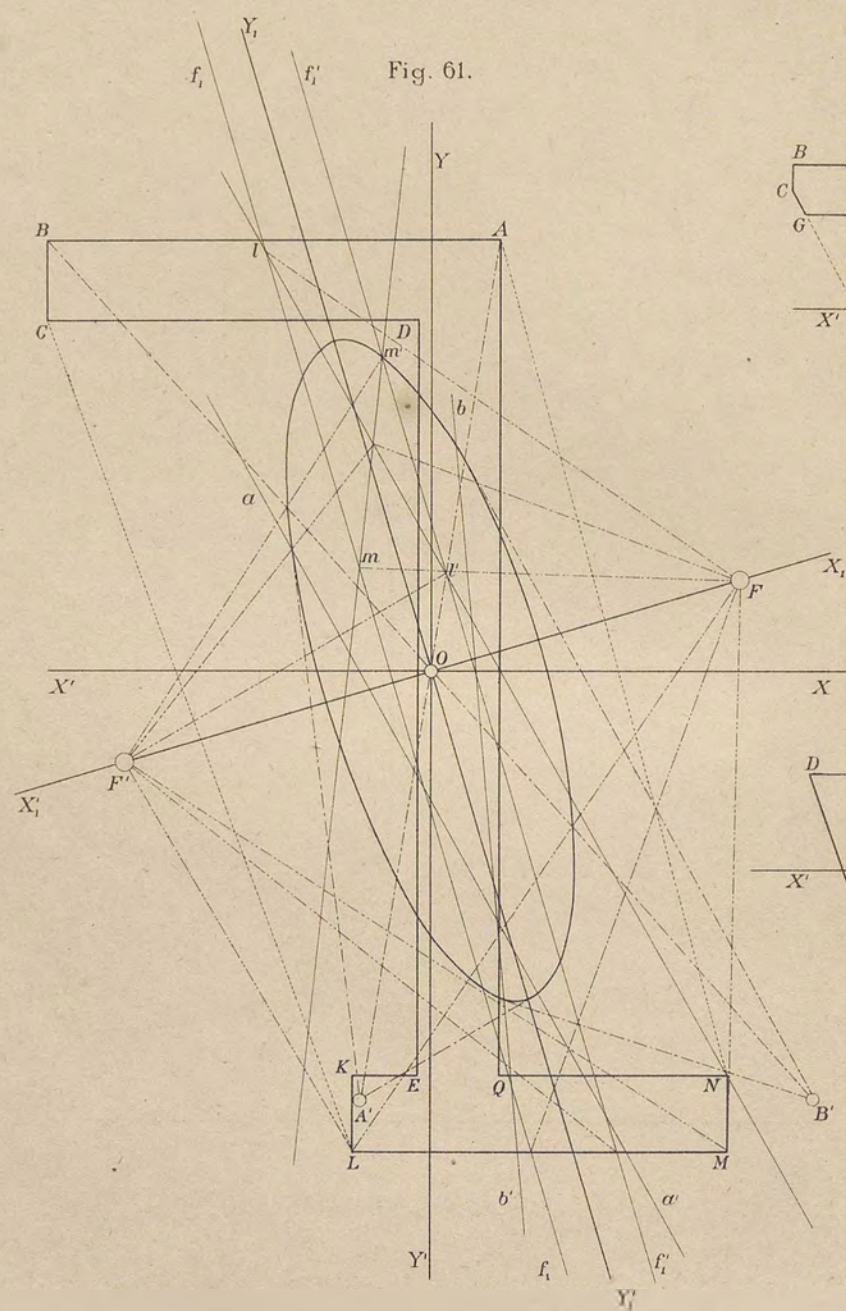


Fig. 60









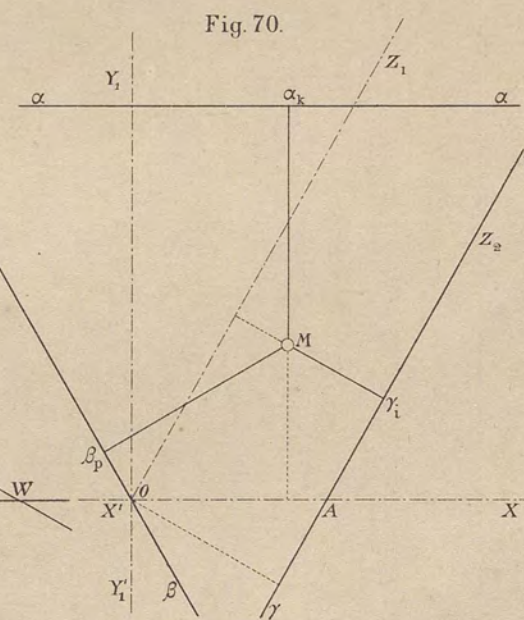
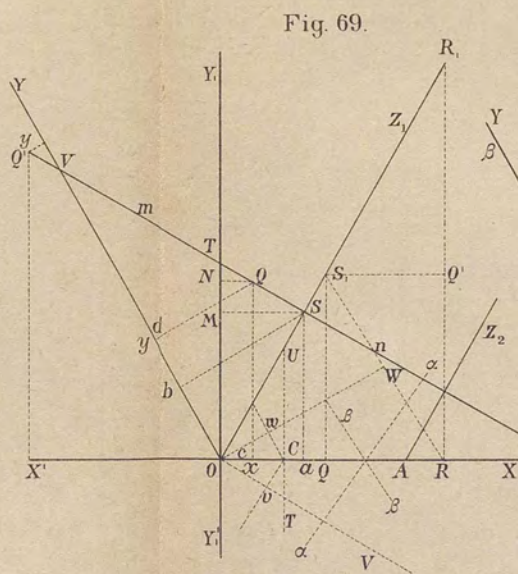
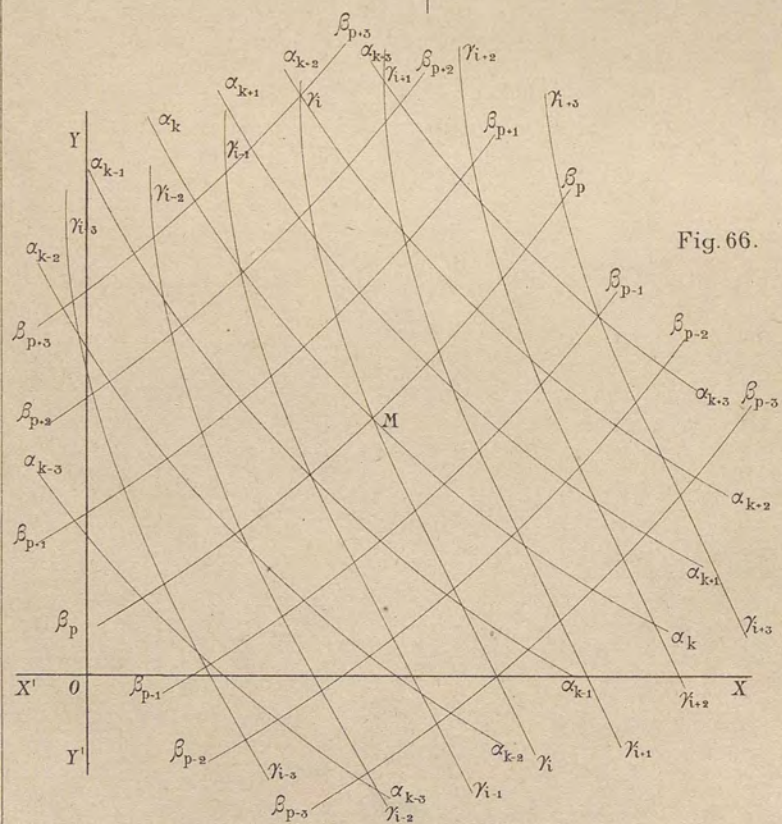
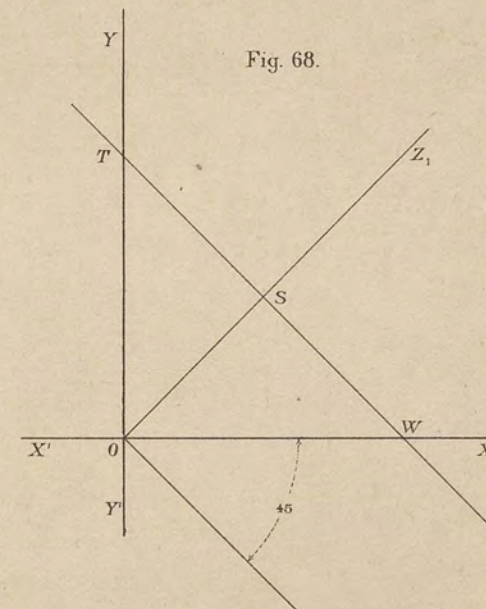
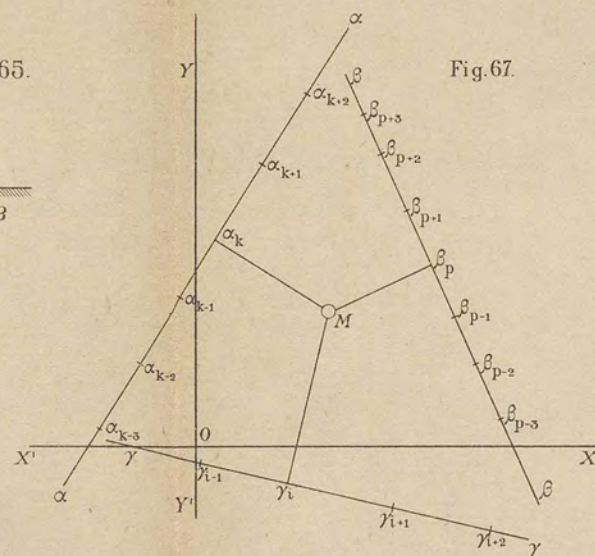
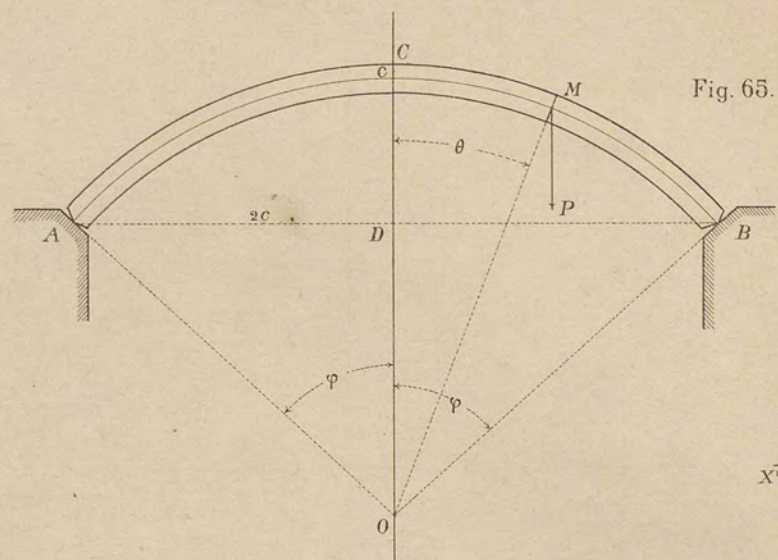




Fig. 77.

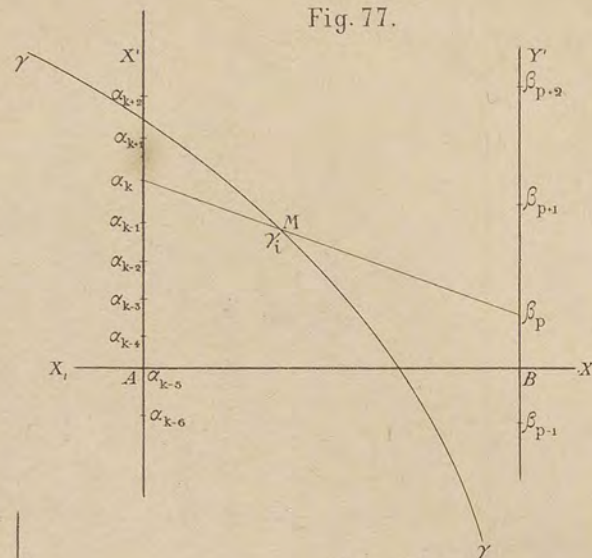


Fig. 78.

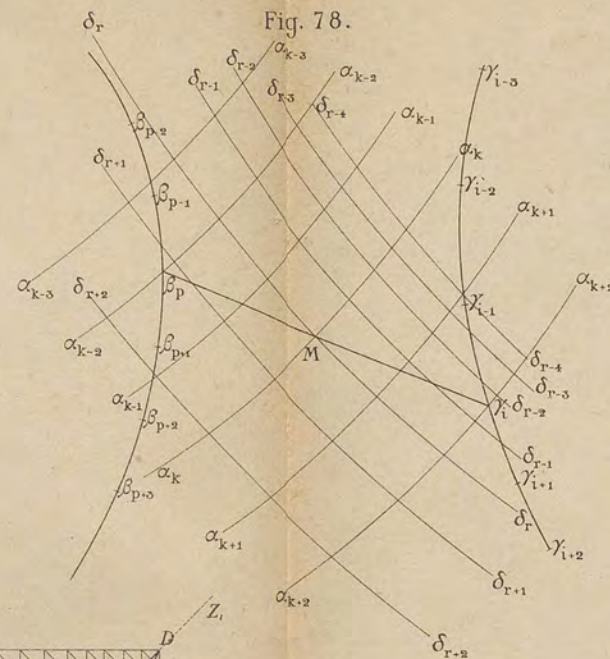


Fig. 79.

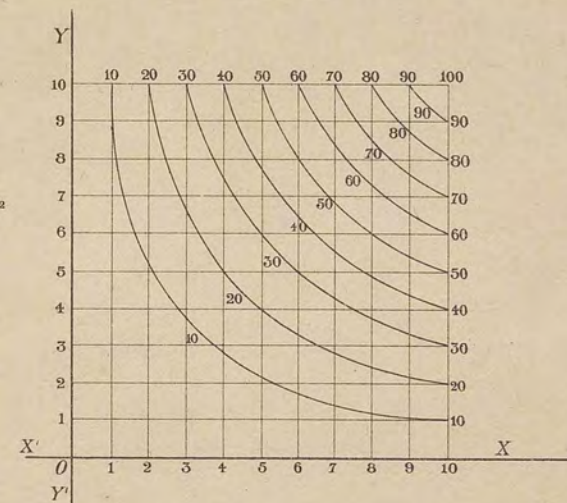


Fig. 80.

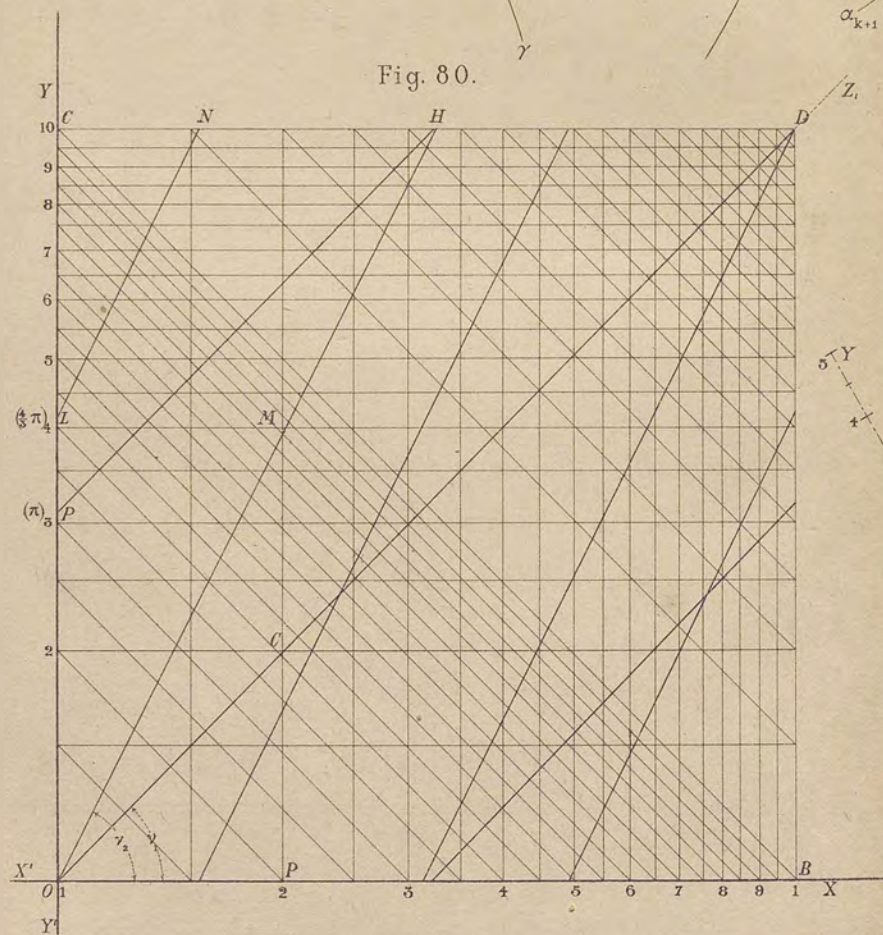


Fig. 81.

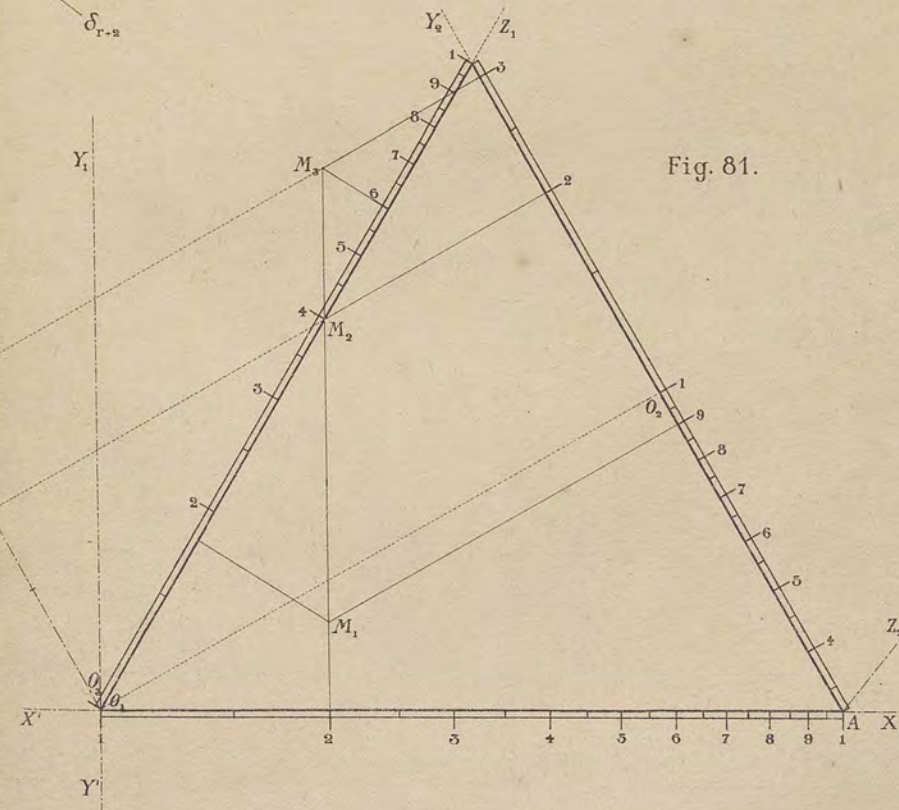




Fig. 82.

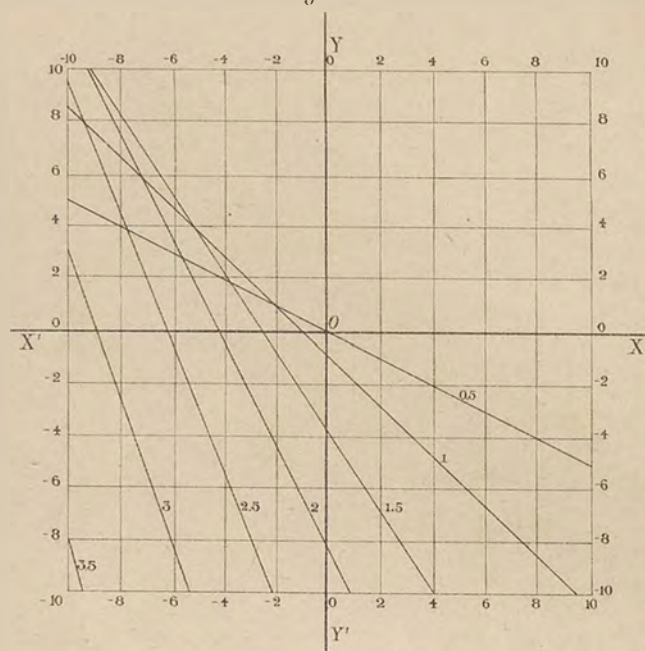


Fig. 83.

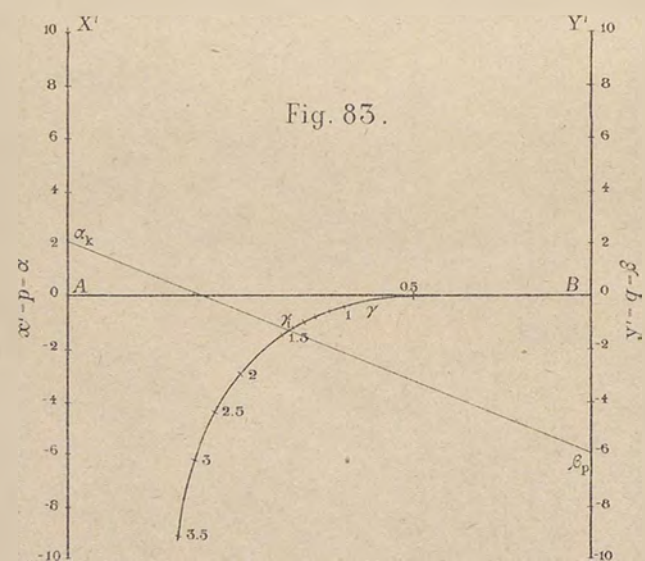


Fig. 84.

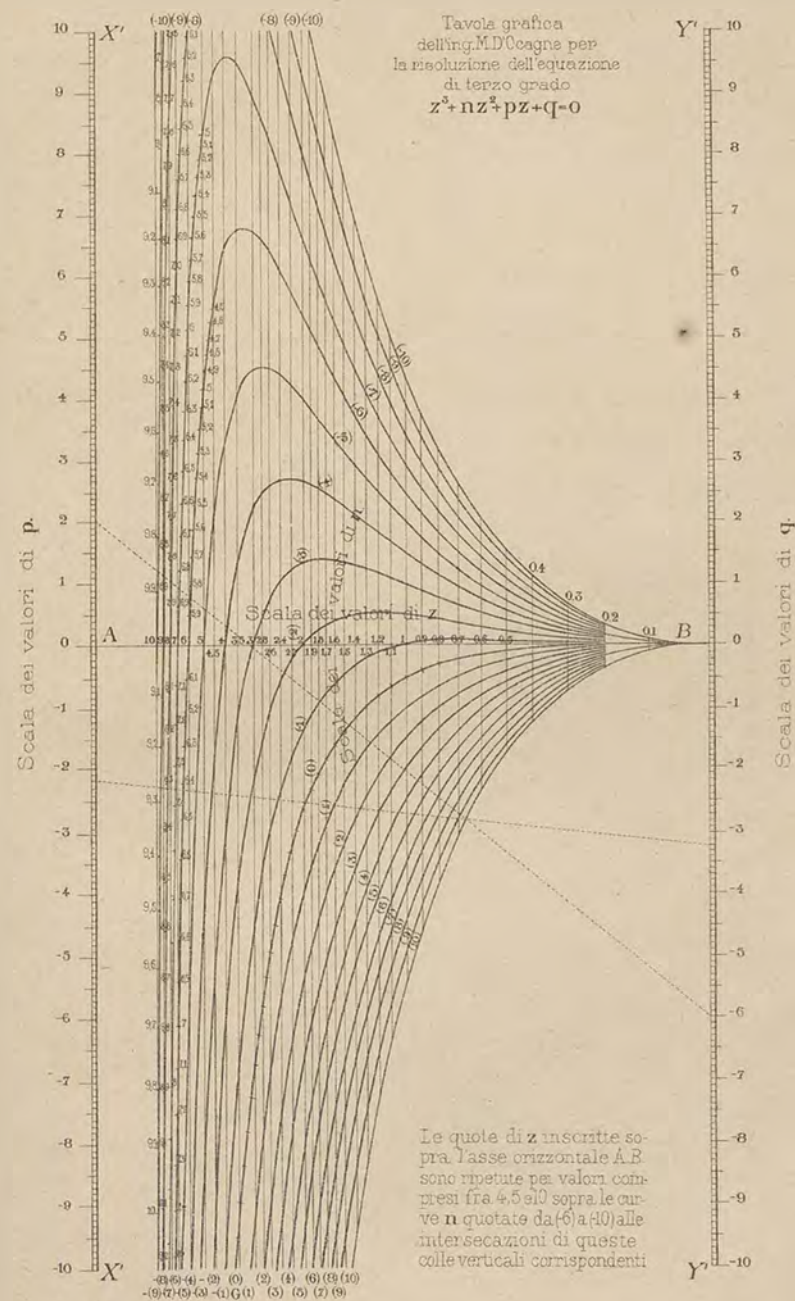




Fig. 85

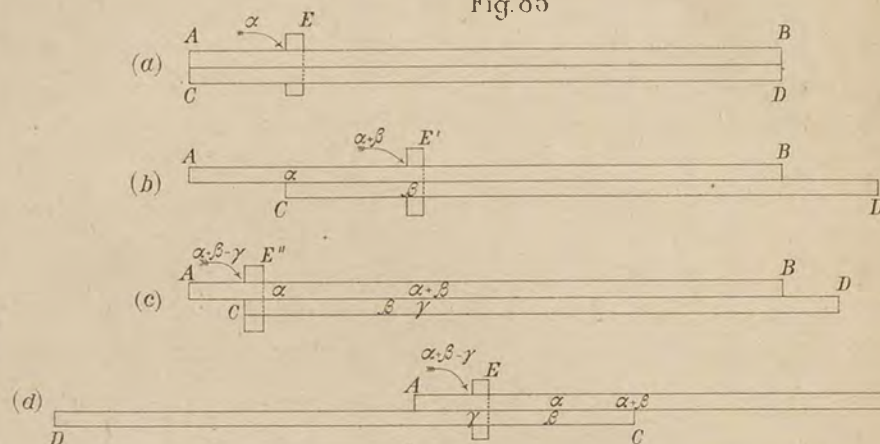


Fig. 86

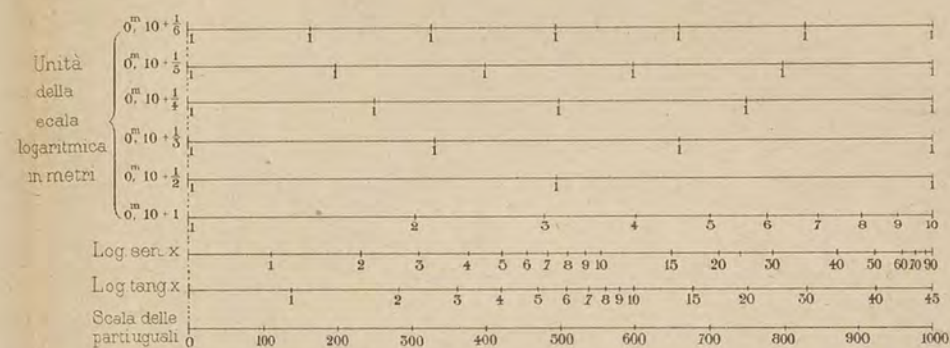


Fig. 87

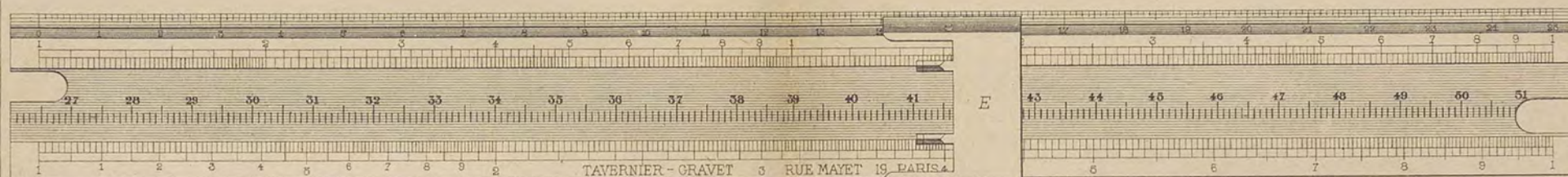


Fig. 88



Fig. 90

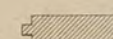
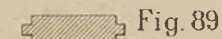


Fig. 91

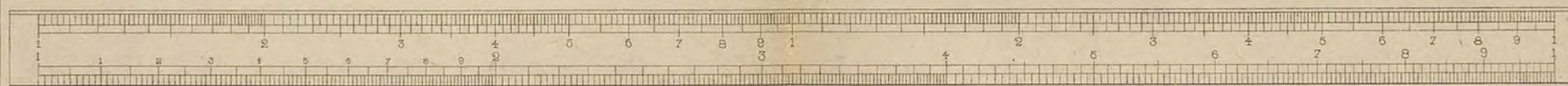
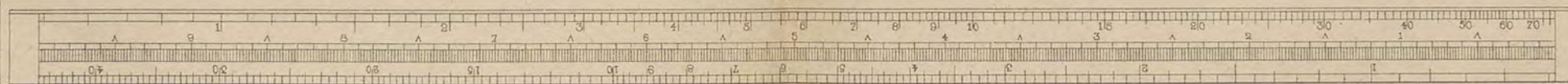


Fig.92



Ppp. cyl. sph.		Ppp. cyl. sph.		Mesures Françaises		Mesures Anglaises		$\pi = 3,1416$	chev. ord. = 45 k m. "	$\square$ insc. $D^2 = C^2 : 19,74$	dilat. lin de 0 à 100°							
											force tir $\square$ de 0 m. 01							
eau	... 1,000 1,273 1,910	marbre	... 0,352 0,449 0,673	toise-m.	... 1,949	arp. = arc.	34,19	pouce-c ^m	... 2,540	ton = mc.	1,016	acier	... 1 : 927	for. 2290 à 7236 k				
mercure	... 0,074 0,084 0,141	meulière	... 0,400 0,509 0,761	piéd-	... 0,325	once = gr.	30,59	piéd = m.	... 0,305	gallon = lit.	4,084	cyl. droit surf. : D : 0,318	civre	... 1 : 583	fonte	... 1 : 200		
plomb.	... 0,088 0,102 0,168	ter gr.	... 0,580 0,661 0,995	pouce =	... 0,027	livre = k.	0,459	yard = m.	... 0,914	buschel =	36,34	$V^2 = 2 g h \quad g = 9,81$	c droit. surf. : D : 0,636	laiton	... 1 : 633	plâtre	... 5 à 16 k	
cuvr. j.	... 0,117 0,149 0,224	pierre-	... 0,481 0,612 0,918	q. t. mq	3,799	boiss. = lit.	13,0	mille = m.	... 1,609	quarter =	25,8	$C = 2,718251828$	ref. h = 2 k m 0,0788	c tronc. surf. : $1(D + D') : 0,636$	étain	... 1 : 362	mortier	... 1,5 à 12 k
bronz c.	... 0,116 0,148 0,224	maçon	... 0,389 0,470 0,702	pi. q. =	0,105	seier =	156	pi. q. mq	0,0929	l. av. p = k	2,403	log e = $\frac{1}{2,718}$ 0,36129	ref. h = 2 k m 0,0125	tronc. cub h $(A + A' + \sqrt{AA'}) : \frac{1}{4}$	plomb	... 1 : 356	chêne	... 700 k
fonte	... 0,139 0,177 0,266	chêne	... 1,166 1,190 1,636	c. m-c	7,034	noeud = m ² / 0,514	p. c. m-c	0,223	schell = f.	0,116	$\mu = 2,303$	μ = 2,303	surf. ref. h = 1 k m 0,066	sphère surf. : D ² : 0,318	zinc	... 1 : 140	corde	... 400 k
fer	... 0,128 0,164 0,245	sapin-	... 1,818 2,315 3,472	pi. c. =	0,034	mil. m-a-m	1852	acre = ar.	40,46	livre = m.	25,20	log X = μ log hyp X	vitesse du son = 333 m	sin A : sin B : a : b	verre	... 1 : 122	aparin	... 800 k



Fig. 93.

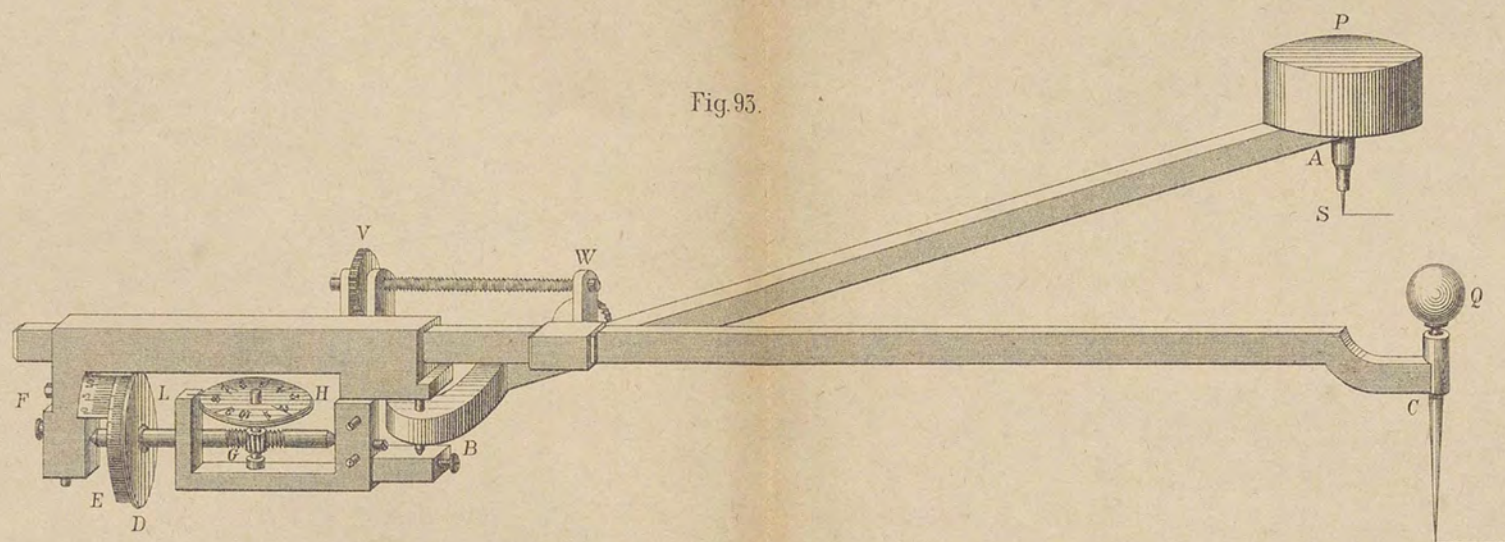


Fig. 94.

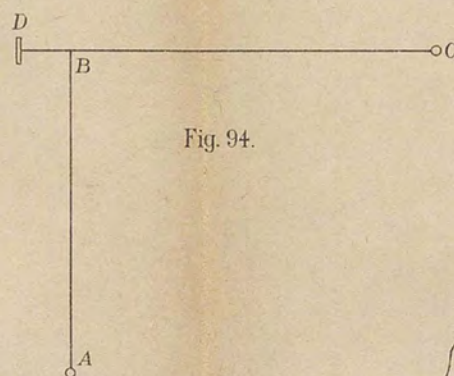


Fig. 96.

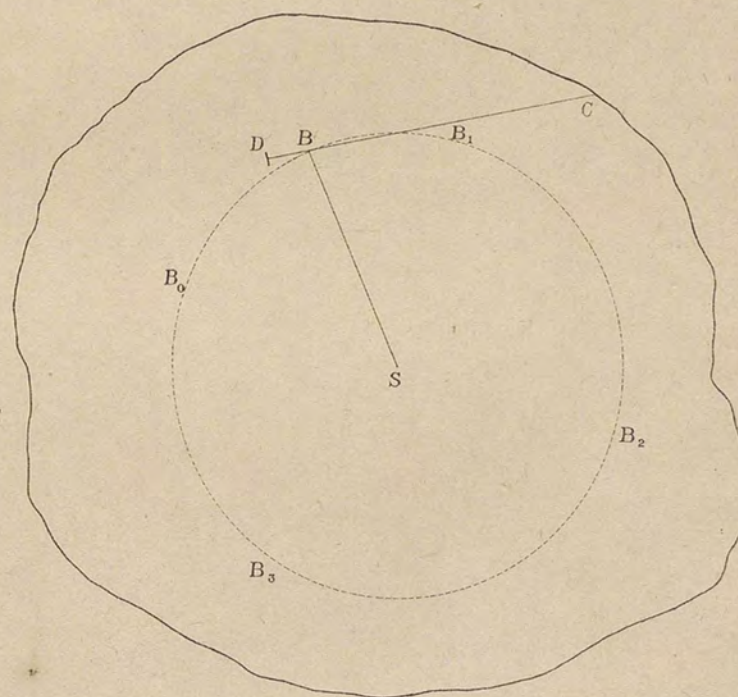


Fig. 97.

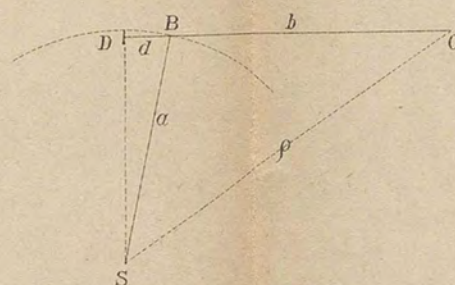


Fig. 95.

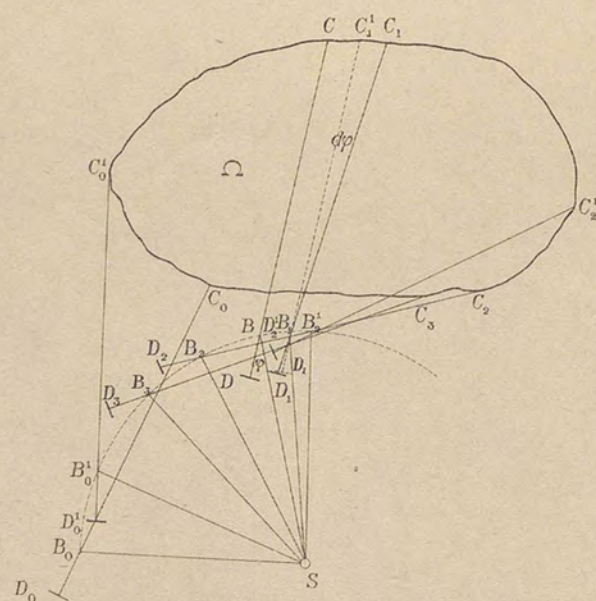
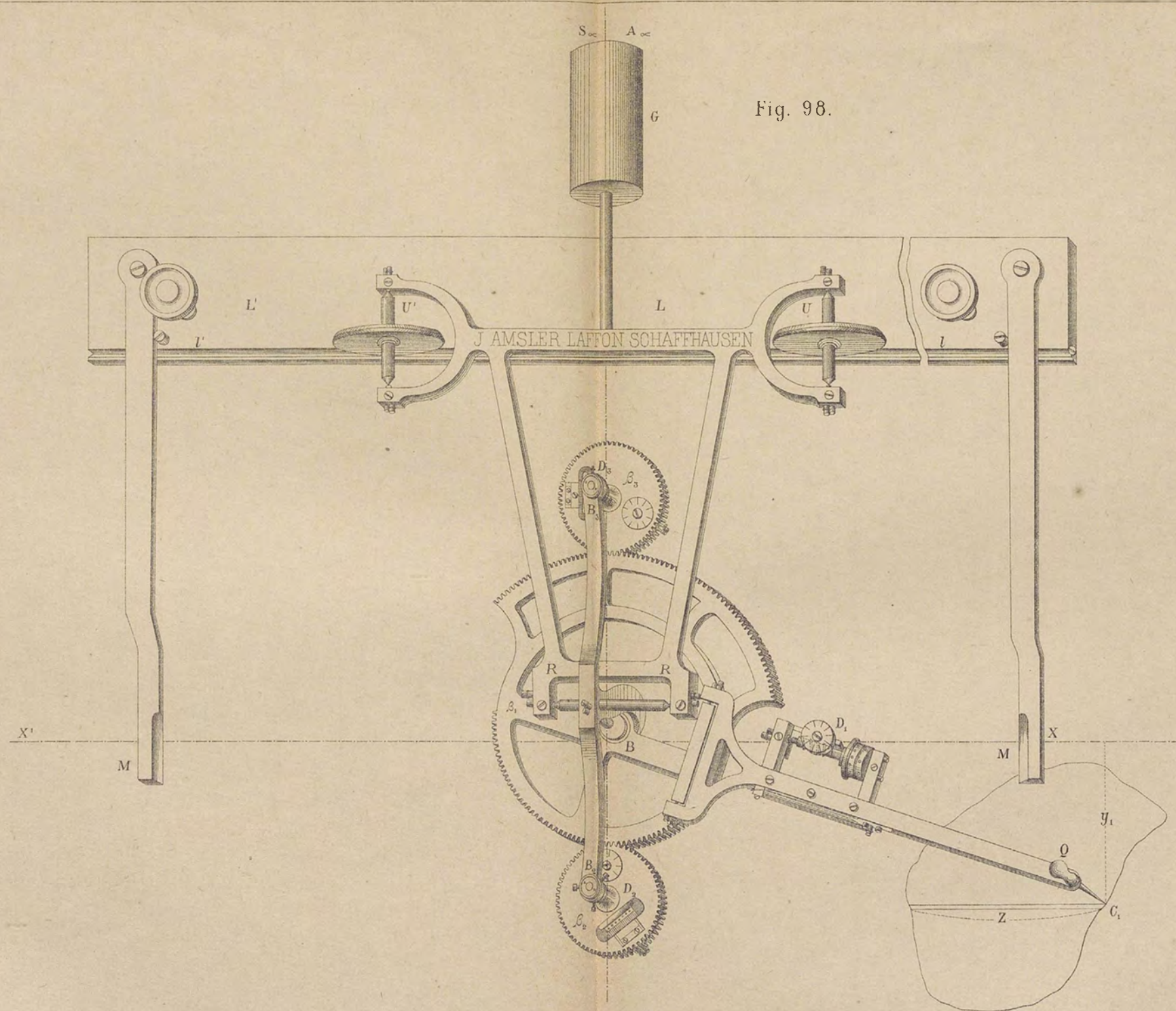


Fig. 98.







L'ARTE DI FABBRICARE

CORSO COMPLETO

DI ISTITUZIONI TEORICO-PRATICHE

per gl'Ingegneri, per gli Architetti, per i Periti in costruzioni, per i Periti misuratori,
per gl'Intraprenditori, per i Capomastri, e per quanti si trovano applicati o vogliono applicarsi
all'esecuzione ed alla sorveglianza di costruzioni civili, stradali ed idrauliche

CON TAVOLE ILLUSTRATIVE

MECCANICA APPLICATA ALLE COSTRUZIONI

PER L'INGEGNERE

SILVIO CANEVAZZI

Professore nella Regia Scuola d'applicazione per gli Ingegneri di Bologna.

Parte II - Dispensa 2^a

TESTO

TORINO

Presso AUGUSTO FEDERICO NEGRO, Editore

nella **Galleria Nazionale**

con Succursali in Roma, Napoli e Cagliari (per la Sardegna).

1894

La **MECCANICA APPLICATA ALLE COSTRUZIONI**
conterà di due parti coi rispettivi atlanti di Tavole. - L'associazione è obbligatoria per tutta l'opera.
Prezzo di questa Dispensa (Testo e Tavole) Lire 8.

RACCOLTA
DI
PROGETTI DI COSTRUZIONI
IN LEGNO ED IN METALLO

PER L'INGEGNERE PROF.

DOMENICO GORRIERI

Quest'opera formerà il quinto volume dell'Appendice all'Arte di Fabbricare
a complemento della magistrale opera dell'Ingegnere Prof. Comm. G. Curioni

Prefazione dell'Autore

Invitato dal chiarissimo Ingegnere Cav. SILVIO CANEVAZZI, Professore nella Regia Scuola d'applicazione per gli Ingegneri, di Bologna, ad assumere la compilazione del *quinto volume dell'Appendice all'Arte di fabbricare*, rimasto a pubblicarsi per cagione della morte immatura del Prof. Comm. GIOVANNI CURIONI, ho accettato tale incarico per me molto lusinghiero, perchè ebbi assicurazione dallo stesso Prof. CANEVAZZI che nella compilazione di esso avrei potuto confidare sui suoi autorevoli consigli e sulla valida sua assistenza.

Il programma da eseguirsi in questo lavoro è sintetizzato nel titolo che il Prof. CURIONI voleva dare al volume stesso, *Raccolta di progetti di costruzioni in legno ed in metallo*; ed io tenterò nello sviluppo di tale programma, di raggiungere, per quanto mi sarà possibile, lo scopo da lui propostosi nelle altre appendici all'Arte di fabbricare, quello cioè di *avviare gli allievi ed i giovani Ingegneri allo studio di composizione*, facilitando loro con opportuni esempi lo studio dei progetti che più comunemente si presentano da sviluppare nella pratica dell'arte dell'Ingegnere.

I progetti di *costruzioni in legno ed in metallo* che verranno da me trattati saranno studiati in ispecial modo riguardo alle condizioni di stabilità e di resistenza delle varie parti componenti le costruzioni stesse, non che nei loro particolari di costruzione.

Di ogni progetto verrà dato il preventivo di spesa, collegando i calcoli estimativi per quanto sarà possibile alle analisi già date dal Prof. CURIONI, e stando pei prezzi elementari a quelli che trovansi pubblicati nei *capitolati d'oneri* e nelle *tariffe dei prezzi* di diverse città d'Italia. Nella pratica da me fatta nell'insegnamento ho riconosciuto quanto questi esempi di preventivi di spesa dei lavori che vengono progettati, siano utili agli allievi e giovani Ingegneri, i quali, capaci di studiare accuratamente progetti anche difficoltosi, si trovano qualche volta imbarazzati a pronunciarsi sull'importo dell'opera progettata. Lo scopo però di questi esempi estimativi sarà di indicare il metodo da seguirsi nel compilarli e si dovrà quindi nello studio del costo dei lavori progettati uniformare i prezzi elementari, e le mercedi giornaliere nelle singole analisi a quelli realmente in uso nel luogo e nel tempo in cui i lavori devono venire eseguiti.

È pubblicata la 1^a dispensa composta di 9 fogli in-8 gr., di 7 tavole in-folio e di 1 tavola piccola. Essa tratta dei solai in legno e dei solai in ferro. Il suo prezzo per gli associati all'Appendice all'Arte di fabbricare, dell'Ingegnere Prof. G. CURIONI è di Lire 10, e per gli acquirenti di questo solo volume di Lire 12.

È in corso di stampa la dispensa seconda.

L'associazione è obbligatoria per l'intero volume quinto sopra annunciato.



CAPITOLO II.

Travature ad asse rettilineo sollecitate da forze
agenti secondo l'asse.

19. Travature ad asse rettilineo. Diversi modi di sollecitazione. — Nella teoria generale della resistenza dei materiali (Parte I, num. 62, pag. 175) è stata definita la travatura nel modo seguente: se si immagina nello spazio (*Fig. 101^a, tav. XXII*) una linea AB senza soluzione di continuità, cuspidi e punti doppi, che abbia una curvatura piccola e variabile lentamente da punto a punto e si suppone in un piano σ normale a questa curva tracciata una figura m tale che il suo centro di gravità O cada sulla linea AB e che la sua dimensione trasversale misurata lungo la linea di intersezione col piano osculatore sia piccola in confronto del raggio di curvatura ρ della linea AB corrispondente al punto O , e le altre dimensioni della figura m siano comparabili a questa, dicesi *travatura* od anche *travatura semplice* il solido generato dalla figura m mentre il piano σ si muove lungo la linea AB , nell'ipotesi che durante il movimento siano sempre verificate le condizioni enunciate e che nel passaggio del piano σ da una posizione ad un'altra vicina la figura m varî debolmente di forma in confronto della distanza OO' fra le due posizioni considerate contata sulla AB , cioè la differenza delle dimensioni trasversali omologhe della figura m nelle due posizioni prese in esame sia piccola rispetto alla lunghezza OO' . AB dicesi asse longitudinale della travatura e la linea generata da uno qualsiasi dei punti della figura m posta nel piano mobile σ si chiama fibra; la fibra corrispondente al centro di gravità O della figura m , ossia l'asse della travatura, si dice anche fibra media. Se invece di una *travatura semplice* si considera un insieme di più solidi, corrispondenti ciascuno alla definizione superiore e riuniti fra loro in un modo qualsiasi, il sistema che ne risulta chiamasi *travatura composta*.

Come si è già osservato nella teoria generale della resistenza dei materiali le travature semplici si dividono in due categorie:

- a) Travature ad asse rettilineo;
- b) Travature ad asse curvilineo.

In questo capitolo ci occuperemo unicamente delle travature ad asse rettilineo e soltanto in via incidentale prenderemo in esame

qualche solido, il quale, per la natura speciale degli sforzi che lo sollecitano, è soggetto in ogni sezione ad uno sforzo diretto sempre tangenzialmente all'asse curvilineo del medesimo dando luogo ad uno sforzo di semplice tensione oppure di compressione.

Le forze che sollecitano una trave ad asse rettilineo possono agire:

- a) Nella direzione dell'asse;
- b) In un piano passante per l'asse e con direzione normale ad esso;
- c) In piani normali all'asse senza essere soggette al vincolo d'incontrarlo;
- d) In un modo qualsiasi rispetto alla direzione dell'asse della travatura e delle varie sezioni normali o longitudinali (passanti per l'asse se la travatura ha per asse una curva piana, corrispondenti al piano osculatore se l'asse è a doppia curvatura).

Abbiamo già visto nella parte prima di questo corso (Num. 57, pag. 161) che trasportando tutte le forze esterne a ciascuna sezione al suo centro O di gravità si ottiene una forza risultante R scomponibile in tre componenti X, Y, Z , agenti secondo tre assi passanti pel centro O e diretti il primo normalmente alla sezione e gli altri due nel piano della sezione medesima, ed un momento risultante M_r , scomponibile esso pure in tre momenti M_x, M_y, M_z intorno agli stessi assi, che si ha l'avvertenza di prendere in modo che due di essi, quelli delle y e delle z , coincidano cogli assi principali d'inerzia della sezione considerata allo scopo di rendere più semplici le formule, poichè in tal modo è uguale a zero il momento centrifugo della sezione. Le quantità X, Y, Z, M_x, M_y, M_z rappresentano per ogni sezione l'effetto di una parte della travatura sull'altra e per ciò vengono dette *caratteristiche meccaniche* o di *sollecitazione*, e nell'analisi fatta al numero 65 (Parte I, pag. 183) abbiamo visto come esse possano ridursi a quattro $X, F = \sqrt{Y^2 + Z^2}, M_x, M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$ capaci di dare origine a deformazioni di natura essenzialmente diversa, più particolarmente come esse producano effettivamente fenomeni di tensione o compressione, di scorrimento, di torsione e di flessione. In base al principio della sovrapposizione degli effetti ciascuno di questi casi speciali può essere studiato separatamente; se si presenterà il caso di una sollecitazione complessa, cioè che si abbiano contemporaneamente azioni che producano tensione o compressione, scorrimento e flessione o torsione, gli effetti di ciascuna di esse potranno essere composti nel modo indicato nella parte prima ai numeri 67, 68 e 74 ed ottenere così la deformazione e lo sforzo unitario risultante subito dal materiale in ciascun punto della travatura.

20. Travature ad asse rettilineo soggette a sforzi agenti secondo l'asse. Differenza fra il caso della tensione e quello della compressione. — Supponiamo di avere un solido o travatura ad asse rettilineo sollecitato da forze agenti secondo l'asse: l'effetto delle medesime può manifestarsi in due modi diversi:

a) Gli sforzi agiscono secondo l'asse ed hanno senso d'azione divergente rispetto ad una stessa sezione σ normale all'asse passante per un punto C intermedio fra i due punti d'applicazione delle forze considerate (*Fig. 102^a, tav. XXII*) ossia gli sforzi agenti sulla trave tendono ad allontanare fra loro due sezioni normali della medesima; allora dicesi che ha luogo *sollecitazione a tensione*;

b) Gli sforzi agiscono secondo l'asse ed hanno senso d'azione opposto e convergente rispetto ad una sezione σ normale all'asse passante per un punto C intermedio fra i due punti d'applicazione delle forze considerate (*Fig. 103^a, tav. XXII*) ossia gli sforzi agenti sulla trave tendono ad avvicinare fra loro due sezioni normali alla medesima: allora dicesi che ha luogo *sollecitazione a compressione*.

Questi due casi differiscono fra loro in modo essenziale.

La sollecitazione a tensione in una trave ad asse rettilineo provocata da forze agenti secondo l'asse in generale non è accompagnata da altra deformazione concomitante; solo eventualmente potrebbe esservi un piccolo momento di inflessione detto anche *momento di raddrizzamento*, in causa di una leggera eccentricità rispetto all'asse nell'applicazione della forza sollecitante o per eterogeneità (ineguaglianza di composizione) del materiale. Tale momento per la natura stessa della causa che vi dà origine è sempre in pratica molto piccolo, esso tende a diminuire di valore per effetto della deformazione elastica ed a ridursi rapidamente a zero, quindi non può mai avere grande importanza e modificare radicalmente le condizioni di resistenza del solido.

La sollecitazione a compressione in una trave ad asse rettilineo provocata da forze agenti secondo il medesimo avviene in condizioni diverse; se una leggera eccentricità od eterogeneità del materiale dà origine in alcune od in tutte le sezioni trasversali ad un momento d'inflessione, questo tende a produrre una deformazione che aumenta il braccio di leva della forza sollecitante, e quindi anche il valore del momento, il quale prende valori sempre più grandi producendo effetti d'inflessione sempre crescenti. Inoltre, sia per le due cause sopra accennate, sia per altre ragioni collegate colle proprietà intrinseche alla natura della materia, per es., dilatazioni trasversali, assi d'elasticità, ecc., l'esperienza prova

che un solido soggetto a compressione sotto l'azione di forze assiali d'intensità sufficiente mostra sempre tendenza ad inflettersi lateralmente tutte le volte che la sua lunghezza supera sensibilmente la minima dimensione della sua sezione trasversale più piccola, cioè ne è un multiplo rappresentato da un numero superiore a quattro, e meglio e più chiaramente se è superiore a dieci od a quindici; e se lo sforzo è sufficientemente grande tale inflessione avviene realmente, e con tanta maggior facilità quanto maggiore è la lunghezza del solido, dando luogo al fenomeno conosciuto col nome di *pressoflessione*. Questa circostanza modifica completamente le condizioni di resistenza della trave e non permette di raccogliere in un'unica discussione il caso della tensione e della compressione, riguardando quest'ultima come una tensione negativa, perchè mentre la prima è retta da un'unica legge riflettente soltanto la traslazione delle sezioni trasversali del solido nel senso dell'asse, la seconda, oltrechè a questa legge, deve anche soddisfare a quella a cui vanno soggette le travi, che si deformano per rotazione delle loro sezioni trasversali intorno ad assi giacenti nel loro piano. Per lo studio dei solidi ad asse rettilineo soggetti a semplice tensione non occorre tener conto che di un'unica formola di resistenza e di deformazione (Parte I, num. 64 e 65, pag. 179), mentre invece per la compressione in generale bisogna tener conto di due formole di resistenza e di deformazione. Solo nel caso speciale che si possa escludere il pericolo della inflessione laterale della trave, cioè nel caso di solidi molto corti, le formole che si usano pel caso della tensione possono servire anche per la compressione riguardata come una tensione negativa.

21. Solidi ad asse rettilineo sollecitati a tensione semplice. — Dalle cose dette risulta che un solido o trave ad asse rettilineo è soggetto a semplice tensione quando le sue sezioni trasversali, considerate come sistemi rigidi di punti giacenti in un piano, tendono ad allontanarsi le une dalle altre nel senso dell'asse restando parallele a se stesse, oppure, cosa completamente equivalente, quando la risultante delle forze esterne ad ogni sezione si riduce ad un'unica forza agente secondo l'asse e diretta esternamente alla sezione stessa. Nella teoria generale della resistenza dei materiali al numero 64 (Pag. 179) abbiamo visto che a questa speciale sollecitazione corrispondono la formola di elasticità

$$X = EA \frac{\delta \Delta s}{\Delta s} = EA \epsilon \quad (62)$$

e quella di resistenza

$$X = R A \quad (63)$$

nelle quali X rappresenta la forza agente nel senso dell'asse, A l'area della sezione resistente, E il modulo di elasticità, i l'allungamento proporzionale od unitario corrispondente ad ogni tronco infinitesimo di lunghezza ds della trave ed $R = Ei$ lo sforzo unitario sopportato dal materiale. Se si indicano con L il lavoro di deformazione espresso in funzione delle deformazioni, con Λ lo stesso lavoro espresso in funzione delle forze e delle deformazioni e finalmente con Γ la stessa quantità espressa in funzione delle sole forze esterne è stato dimostrato al numero 57, pagina 161, parte prima, che

$$\left. \begin{aligned} dL &= \frac{1}{2} E A i^2 ds \\ d\Lambda &= \frac{1}{2} X i ds \\ d\Gamma &= \frac{1}{2} \frac{X^2}{E A} ds. \end{aligned} \right\} (64).$$

Ordinariamente si presenta il caso che la tensione è prodotta da sforzi assiali agenti alle estremità della travatura, che in tal caso speciale prende più particolarmente il nome di *tirante*. In queste condizioni lo sforzo X ha un valore costante in tutte le sezioni del solido e si suole indicare colla lettera T ; contemporaneamente in questo caso si sogliono conservare costanti lungo tutto il tirante la sezione trasversale A e la natura del materiale, di cui esso è composto. Se si indica con l la lunghezza del tirante e con λ l'allungamento totale che esso subisce sotto l'azione delle forze esterne, dalle formole superiori si ricava

$$\lambda = \int_0^l i ds = \int_0^l \frac{X}{E A} ds = \frac{T}{E A} \int_0^l ds = \frac{T}{E A} \int_0^l d\varpi = \frac{Tl}{E A}$$

e quindi

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{T}{E A} = i = \frac{d\lambda}{dl}.$$

Le formole poi che danno il lavoro di deformazione di tutto il solido diventano

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \int_0^l E A i^2 ds = \frac{E A i^2}{2} \int_0^l dx = \frac{E A i^2 l}{2} = \frac{E A \lambda^2}{2 l} \\ \Lambda &= \frac{1}{2} \int_0^l X i ds = \frac{T i}{2} \int_0^l ds = \frac{T i l}{2} = T \frac{\lambda}{2} \\ \Gamma &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{X^2}{E A} ds = \frac{T^2}{2 E A} \int_0^l dx = \frac{T^2 l}{2 E A} \end{aligned} \right\} (65)$$

e come conseguenza, applicando il teorema delle derivate del lavoro di deformazione,

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{d\Gamma}{dT} = \frac{T l}{E A} \\ T &= \frac{dL}{d\lambda} = E A \frac{\lambda}{l} \end{aligned} \right\} (66)$$

come era già stato trovato precedentemente con altro metodo.

La deformazione λ si può ottenere anche usando il teorema di correlazione dimostrato al numero 73 della teoria generale della resistenza dei materiali (Parte I, pag. 231) (*); infatti considerando solo forze assiali ed essendo in questo caso $\delta'_k = \lambda$ la formola generale (185) dà

$$\lambda = \int_0^l \frac{X(X_k)}{E A} dm = \frac{T}{E A} \int_0^l dx = \frac{T l}{E A} \quad \left\} (66bis)$$

Queste equazioni servono a risolvere i problemi relativi all'equilibrio dei tiranti ed a dimostrare alcune interessanti proprietà del medesimo.

Dalla relazione

$$i = \frac{d\lambda}{dl} = \frac{T}{E A} = \frac{\lambda}{l}$$

(*) Vedi anche parte prima, nota A.

si ricava che in un tirante a sezione costante l'allungamento proporzionale ha un valore costante in tutti i punti del solido, ed uguale al rapporto dell'allungamento totale subito dal tirante alla lunghezza del medesimo.

Dalla formola $\Delta = \frac{T\lambda}{2}$ risulta che il lavoro di deformazione del tirante è uguale alla metà del lavoro della forza T applicata alla sua estremità sviluppato in causa dell'allungamento λ ed espresso da $T\lambda$ qualora il valore della tensione T sia supposto costante. In quest'ultima ipotesi la deformazione del tirante non si arresta alla posizione di equilibrio, ma, come è già stato osservato più volte nella teoria generale della resistenza dei materiali, essa continua finchè sia estinta tutta la forza viva acquistata. Se si indica con λ_1 questo speciale allungamento, con λ_0 l'allungamento del tirante allo stato di equilibrio, con T la reazione elastica assiale e con T_1 lo sforzo sollecitante il tirante, supposto di intensità costante, nell'istante in cui cessa il movimento di deformazione, dovrà essere

$$T_1\lambda_1 - T\frac{\lambda_1}{2} = 0.$$

In causa delle equazioni di elasticità

$$T_1 = EA \frac{\lambda_0}{l} \quad T = EA \frac{\lambda_1}{l}$$

quindi

$$EA \frac{\lambda_1\lambda_0}{l} - EA \frac{\lambda_1^2}{2l} = 0 \quad \text{ossia} \quad \lambda_1 = 2\lambda_0$$

cioè alla fine della deformazione del tirante l'allungamento è doppio di quello corrispondente alla posizione di equilibrio. Giunto il tirante ad avere un allungamento λ_1 la forza viva è tutta estinta, esso non può rimanere in equilibrio e ritorna indietro passando in senso inverso per tutte le posizioni già occupate, perchè si tratta di un sistema che ammette una funzione potenziale, dando luogo ad oscillazioni o vibrazioni comprese fra i limiti $\lambda = 0$ e $\lambda = \lambda_1 = 2\lambda_0$ e di ampiezza sempre decrescente in causa delle perdite di energia dovute alla resistenza dei mezzi, all'attrito, alla trasformazione dell'energia di movimento in altre energie fisiche, ecc.

22. Problemi diversi relativi ai solidi soggetti a tensione semplice. — Supponiamo che si debbano risolvere le seguenti questioni:

PROBLEMA 1°. — *Calcolare il diametro d di un tirante in ferro a sezione circolare lungo metri otto ($l=8,00$), il quale debba resistere ad una tensione $T=8\,000,00\text{ Kg}$.*

In questo caso particolare A , area della sezione resistente, è rappresentata da $A = \frac{\pi d^2}{4}$ ed il limite dei carichi permanenti R può ritenersi uguale a $\text{Kg. } 8\,000\,000$ per metro quadrato, quindi dalla formola di resistenza $T=RA$ si ricava

$$8\,000 = 8\,000\,000 \frac{\pi d^2}{4}$$

da cui

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 8\,000}{\pi \cdot 8\,000\,000}} = \sqrt{\frac{3\,2}{3,14 \times 8\,000}} = \text{m. } 0,036$$

dalla formola di elasticità

$$\lambda = \frac{Tl}{EA} = \frac{8\,000 \times 8}{16\,000\,000\,000 \times \text{mq. } 0,001\,018} = \text{m. } 0,0039.$$

Il lavoro di deformazione si può ricavare facilmente da una qualsiasi delle tre formole

$$L = \frac{1}{2} EA \frac{\lambda}{l}; \quad \Gamma = \frac{T^2 l}{2 EA}; \quad \Lambda = \frac{1}{2} T \lambda$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} T \lambda = \frac{1}{2} \cdot 8\,000 \cdot 0,0039 = \text{Kgm. } 15,60.$$

Come caso particolare consideriamo un'asta verticale di ferro AB a sezione costante attaccata in alto ad un punto fisso B (*Fig. 104^a, tav. XXII*) e determiniamo la lunghezza l che può avere perchè sotto l'azione del proprio peso essa sia in buone condizioni di resistenza. Lo sforzo sollecitante T in questo caso è evidentemente massimo nel punto d'attacco B e detta ρ la densità del materiale esso è espresso da $T = \rho A l$; quindi l'equazione di resistenza dà $\rho A l = RA$ da cui

$$l = \frac{R}{\rho} = \frac{8\,000\,000}{7\,800} = \text{m. } 1\,025,00.$$

PROBLEMA 2°. — *Calcolare la sezione che deve avere un tirante di lunghezza invariabile per resistere permanentemente in buone condizioni ad una tensione T_1 quando esso sia messo in opera sotto l'azione di una tensione T alla temperatura t , e questa possa in seguito variare da un massimo t' ad un minimo t'' .*

Siano

l la lunghezza del tirante

α il coefficiente di dilatazione del materiale per metro di lunghezza e per grado di temperatura

E il modulo di elasticità.

Le condizioni a cui deve soddisfare il tirante sono due: esso deve poter resistere ad una tensione T_1 quando la temperatura è arrivata a t' gradi ed il tirante ha subito un allungamento $\alpha l(t' - t)$, ossia una diminuzione nella tensione che agisce nel tirante alla temperatura t rappresentata da

$$T' = EA \frac{\lambda'}{l} = EA \frac{\alpha l(t' - t)}{l} = EA \alpha (t' - t).$$

Il tirante inoltre non deve subire uno sforzo unitario superiore ad $R = R_a = \frac{1}{n} R_s$ (Parte I, num. 113, pag. 490) quando la temperatura discende a t'' gradi, cioè quando la tensione che esso sopporta a t è aumentata di una quantità T'' data dalla formola

$$T'' = EA \frac{\lambda''}{l} = EA \frac{\alpha l(t - t'')}{l} = EA \alpha (t - t'').$$

Da queste considerazioni risulta che il tirante deve avere un'area resistente A tale da soddisfare alle due seguenti relazioni

$$T - EA \alpha (t' - t) \geq T_1$$

$$T + EA \alpha (t - t'') \leq R.$$

Tenendo conto soltanto del segno di uguaglianza, che corrisponde ad un valore limite di A , ed eliminando T fra le due equazioni precedenti si ricava

$$RA - EA \alpha (t' - t'') = T_1$$

e quindi

$$A = \frac{T_1}{R - E \alpha (t' - t'')} \quad (67).$$

Se $R > E_{\alpha}(t' - t'')$ esiste un valore positivo di A e quindi una soluzione pratica del problema; se $R < E_{\alpha}(t' - t'')$ allora non esiste alcuna soluzione possibile. L'ipotesi che sia $R = E_{\alpha}(t' - t'')$ condurrebbe ad un valore infinito per A , mentre $R < E_{\alpha}(t' - t'')$ darebbe un'area resistente negativa, soluzione impossibile perchè contraddice ai dati della questione.

PROBLEMA 3°. — *Determinare il numero e le dimensioni delle chiavarde necessarie a riunire il fondo AB ad un tubo cilindrico C che ha per sezione retta una corona circolare di larghezza costante, assoggettato all'azione di due pressioni costanti agenti una nell'interno e l'altra all'esterno del medesimo.*

Siano p_1 e p_2 le pressioni riferite al metro quadrato di superficie agenti rispettivamente all'interno ed all'esterno del cilindro considerato, d_1 il diametro interno del cilindro, d_2 quello del fondo piatto AB (Fig. 105^a, tav. XXII). Lo sforzo complessivo T a cui debbono resistere le n caviglie, che stabiliscono l'unione del fondo col cilindro, è dato dalla risultante delle forze che agiscono sulle due faccie del detto fondo. All'interno agisce una pressione $P_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} p_1$, all'esterno una pressione $-P_2 = -\frac{\pi d_2^2}{4} p_2$ quindi

$$T = \frac{\pi}{4} (p_1 d_1^2 - p_2 d_2^2).$$

Se si indica con d il diametro delle chiavarde e con n il loro numero, l'area resistente complessiva è data da $A = n \frac{\pi d^2}{4}$, quindi, applicando la formola di resistenza $T = RA$, si ottiene

$$\frac{\pi}{4} (p_1 d_1^2 - p_2 d_2^2) = n \frac{\pi d^2}{4} R,$$

od anche

$$p_1 d_1^2 - p_2 d_2^2 = n R d^2.$$

Avendosi due variabili n e d il problema ammette più soluzioni; ordinariamente però gli ingegneri assumono il valore del diametro d in relazione alle esigenze costruttive ed allora la formola superiore dà il numero minimo di caviglie occorrenti per stabilire il collegamento. La natura della questione esclude che si possano accettare per n valori frazionari, quindi se risolvendo l'equazione di resistenza risulta un numero fratto si prenderà come soluzione il numero intero immediatamente superiore.

Se il fondo fosse attaccato al cilindro mediante una corona continua invece che con caviglie (*Fig. 105^a, tav. XXII*), come si verificherebbe nel caso che esso provenisse dalla fusione in un sol pezzo del cilindro e del fondo, allora detto d_2 il diametro esterno del cilindro ed s lo spessore delle sue pareti, osservando che $d_2 = d_1 + 2s$, l'equazione di resistenza diventa

$$\frac{\pi}{4} (p_1 d_1^2 - p_2 (d_1^2 + 4d_1 s + 4s^2)) = \frac{\pi}{4} R (d_1^2 + 4d_1 s + 4s^2 - d_1^2).$$

In generale s è molto piccolo rispetto a d_1 , quindi in questa ipotesi, trascurando le potenze di s superiori alla prima, si ottiene in via sufficientemente approssimata

$$(p_1 - p_2) d_1^2 = s (4p_2 d_1 + 4R d_1)$$

od anche

$$s = \frac{p_1 - p_2}{4(p_2 + R)} d_1 \quad (68).$$

Se s non è molto piccolo in confronto a d_1 , questa formola non è più accettabile e bisogna risolvere l'equazione completa di secondo grado rispetto ad s ridotta alla forma tipica

$$s^2 + d_1 s - \frac{p_1 - p_2}{4(R + p_2)} d_1^2 = 0$$

da cui si ricava

$$s = \frac{d_1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{p_1 - p_2}{R + p_2}} - 1 \right) \quad (68^{bis}).$$

PROBLEMA 4°. — *Determinare lo spessore da assegnare ad un tubo cilindrico C che ha per sezione retta una corona circolare di larghezza costante $s = r_2 - r_1$ assoggettato all'azione di due pressioni costanti per metro quadrato agenti rispettivamente una all'interno e l'altra all'esterno del medesimo.*

Rappresentino (*Fig. 106^a, tav. XXII*)

l la lunghezza del cilindro in metri

p_1 e p_2 le pressioni in chilogrammi per metro quadrato agenti rispettivamente sulla superficie interna ed esterna del cilindro, e p la loro differenza $p_1 - p_2$

$d_1=2r_1$, $d_2=2r_2$ i diametri interni ed esterni del cilindro, r il raggio corrispondente ad un punto qualsiasi ed $s=r_2-r_1$ lo spessore costante delle pareti del cilindro

R il limite R_s (Parte I, num. 113, pag. 490) dei carichi permanenti ammissibile uguale ad una determinata frazione $\frac{1}{n}$ del carico di rottura R_s .

Nella teoria generale della resistenza dei materiali (Num. 87, pag. 338) è stato risoluto esattamente il problema della determinazione delle forze interne nei solidi di rivoluzione in cui una dimensione, lo spessore, è molto piccola rispetto alle altre due e più particolarmente pei cilindri e le sfere cave sollecitate da pressioni costanti agenti sulle loro superficie interna ed esterna. Prendendo in esame un cilindro cavo ed indicando con p_{yy} lo sforzo unitario agente in un punto qualsiasi di una sezione fatta con un piano passante per l'asse del medesimo abbiamo trovato (Form. 283)

$$p_{yy} = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + (p_1 - p_2) \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2} = A + \frac{B}{r^2}$$

dove A e B rappresentano due costanti il cui valore è determinato quando siano noti i raggi r_1 ed r_2 e le pressioni p_1 e p_2 . Se le pareti del cilindro sono molto sottili, e specialmente se i valori di r_1 ed r_2 sono notevoli in confronto di $s=r_2-r_1$, è evidente che pel variare di r da r_1 ad r_2 p_{yy} varia con legge di continuità ed assume valori estremi poco differenti fra loro. In base a queste considerazioni pei cilindri cavi a pareti sottili si può ritenere con approssimazione sufficiente nella pratica per p_{yy} un valore medio costante riguardando la superficie cilindrica come un solido soggetto a tensione semplice agente in ogni anello di larghezza unitaria con direzione tangente al suo asse. Il valore poi dello sforzo T che agisce tangenzialmente alla linea mediana di una sezione retta del cilindro può essere determinato nel modo seguente. Sia ACB la linea mediana della semicorona circolare, che si ottiene sezionando il cilindro con un piano σ normale al suo asse, DEF e GHL le sezioni della superficie interna ed esterna del medesimo. Se per un tronco di cilindro di lunghezza l simmetrico rispetto alla sezione σ considerata si prende in esame un elemento ds della linea DEF la pressione $lp_1 ds$ agente sull'area elementare lds , od anche, considerando una lunghezza di cilindro $l=1,00$, la pressione $p_1 ds$ fa colla sezione AB un angolo α ed agisce normalmente all'elemento ds dando luogo secondo l'asse

delle x (OB) e delle y (OC) a due componenti espresse rispettivamente da

$$p_1 ds \cos \alpha = p_1 dy$$

$$p_1 ds \sin \alpha = p_1 dx.$$

Analogamente sulla superficie esterna GHL per ogni elemento ds si avranno due componenti

$$p_2 ds \cos \alpha = p_2 dy$$

$$p_2 ds \sin \alpha = p_2 dx.$$

Se si sommano le componenti parallele all'asse delle x la risultante riesce uguale allo zero poichè, in causa della simmetria della figura, ad ogni elemento ds ne corrisponde un altro simmetrico rispetto all'asse delle y , pel quale la componente della pressione parallela all'asse delle x è data da

$$-p_1 dy, \quad -p_2 dy.$$

Sommando invece le componenti parallele all'asse delle y s'ottiene

$$\begin{aligned} T &= \int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} p_1 ds \cos \alpha - \int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} p_2 ds \cos \alpha = \int_{x=-\frac{d_1}{2}}^{+\frac{d_1}{2}} p_1 dx - \int_{x=-\frac{d_2}{2}}^{x=\frac{d_2}{2}} p_2 dx = \\ &= p_1 d_1 - p_2 d_2 = (p_1 - p_2) d_1 - 2sp_2. \end{aligned}$$

Pel calcolo della sezione resistente in base all'ipotesi fatta si potrà usare pei cilindri a parete sottile la formola di resistenza a tensione semplice $T = RA$, in cui A esprime la sezione resistente secondo un piano passante per l'asse, cioè il doppio dello spessore moltiplicata per la lunghezza del cilindro, che per semplicità abbiamo supposto uguale all'unità. Sostituendo nell'equazione di resistenza ai simboli i loro valori in funzione delle quantità date s'ottiene

$$(p_1 - p_2) d_1 - 2sp_2 = 2sR$$

da cui si ricava

$$s = \frac{(p_1 - p_2) d_1}{2(R + p_2)} = \frac{p d_1}{2(R + p_2)} \quad (69).$$

È importante osservare che se la lunghezza del cilindro fosse diversa dall'unità l entrerebbe come fattore comune nel numeratore e nel denominatore, quindi il risultato è indipendente dalla lunghezza l del cilindro considerato.

Nei casi che si presentano nella pratica la pressione p_2 è ordinariamente piccola, quindi, trattandosi di una formola di sua natura approssimata, si suole trascurare p_2 al denominatore e scrivere semplicemente

$$s = \frac{p d_1}{2R} \quad (69^{bis}).$$

Spesso le pressioni p_1 e p_2 sono date in atmosfere, in tal caso indicando con ν_1 e ν_2 il numero di atmosfere e con γ il numero di chilogrammi corrispondenti alla pressione di un'atmosfera sopra un metro quadrato

$$p_1 = \nu_1 \gamma \qquad p_2 = \nu_2 \gamma \qquad p = \nu \gamma$$

e quindi

$$s = \frac{1}{2} \frac{\nu \gamma d_1}{R + \nu_2 \gamma} \quad \text{oppure} \quad s = \frac{\nu \gamma d_1}{2R}.$$

Nell'applicare le formole superiori alla determinazione degli spessori dei tubi o cilindri a pareti sottili bisogna tener presente che la forza T agisce in un piano normale all'asse del cilindro. Se si tratta di un materiale a struttura fibrosa e che le fibre siano dirette parallelamente all'asse, nel determinare il valore R del limite dei carichi permanenti bisogna partire dal valore del coefficiente di rottura in senso normale alle fibre.

Quanto alla componente agente nel senso delle generatrici del cilindro, se il materiale è omogeneo, non è il caso di occuparsene poichè le formole (283) (Parte I, pag. 338) mostrano che p_{zz} è sempre inferiore a p_{yy} , sforzo diretto normalmente alle generatrici, infatti

$$p_{yy} = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + (p_1 - p_2) \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2} = A + \frac{B}{r^2}$$

$$p_{zz} = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - (p_1 - p_2) \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2} = A - \frac{B}{r^2}$$

nelle condizioni supposte nella risoluzione di questo problema A e B hanno valore positivo, quindi $p_{zz} < p_{yy}$.

È necessario avvertire che gl'ingegneri, nel calcolo degli spessori dei tubi soggetti a pressione interna, come condotte per acqua, gaz, vapori, ecc., sogliono aggiungere al risultato della formola una costante, determinata dall'esperienza e dipendente dalla natura del materiale impiegato, allo scopo di ovviare agli inconvenienti che potrebbero provenire da vizi di costruzione, da cause imprevedute quali sarebbero scosse, urti, il trasporto e gli accidenti della messa in opera, ecc., e finalmente per ulteriore garanzia in causa del modo approssimato, col quale la formola è dedotta.

Indicando con s' la costante addizionale, le formole superiori diventano

$$s = \frac{pd_1}{2R} + s' \qquad s = \frac{\gamma\gamma d_1}{2R} + s' \qquad (70)$$

che sono quelle usate correntemente dagli ingegneri per pressioni basse o mediocri e che hanno il gran vantaggio di essere molto semplici e di facile maneggio.

Per le pressioni basse o mediocri e per le dimensioni che occorrono nei lavori usuali l'esperienza consiglia l'uso delle formole superiori assumendo per s' i valori seguenti:

<i>Natura del materiale</i>	<i>Valore di s' in millimetri</i>
Lamiera di ferro	3,00
Ghisa	da 6,00 a 10,00
Ottone	4,00
Rame	5,00
Piombo	5,50
Zinco fuso	5,00
Legno	da 13,00 a 26,00
Arenaria	30,00
Terracotta	da 13,00 a 40,00

Nell'impianto delle condotte d'acqua si presenta quasi sempre il caso di dover considerare cilindri o tubi soggetti a pressioni interne non molto forti, rappresentate al più da un numero limitato di atmosfere.

Pel calcolo degli spessori convenienti si suole spesso far uso delle formole del MORIN (*) che si deducono immediatamente dalla

(*) A. MORIN, *Résistance des matériaux*. Terza edizione, vol. I, pag. 94.

formola

$$s = \frac{\gamma \gamma d_1}{2R} + s'$$

sostituendo a R ed s' i valori che loro competono in base ai risultati sperimentati a seconda del materiale impiegato (*).

Formole pel calcolo dello spessore dei tubi nelle condotte di acqua (**)

Ghisa	colata orizzontalmente	$s = 0,0100 + 0,00200 d_1 \gamma$
	colata verticalmente	$s = 0,0080 + 0,00160 d_1 \gamma$
Ferro	.	$s = 0,0030 + 0,00086 d_1 \gamma$
Rame laminato	.	$s = 0,0040 + 0,00147 d_1 \gamma$
Piombo	.	$s = 0,0050 + 0,00242 d_1 \gamma$
Zinco	.	$s = 0,0040 + 0,00620 d_1 \gamma$
Legno	.	$s = 0,0270 + 0,03230 d_1 \gamma$
Pietre naturali	.	$s = 0,0300 + 0,00365 d_1 \gamma$
Pietre artificiali	.	$s = 0,0400 + 0,00538 d_1 \gamma$

Quando si tratta di alte pressioni le formole superiori diventano meno attendibili differendo troppo lo sforzo unitario medio dai valori estremi, quindi non si può ricorrere ed esse se non correggendole in certo qual modo colla scelta di un coefficiente molto basso per limite dei carichi permanenti. L'ordinanza del Governo francese 22 maggio 1843, ora abrogata e sostituita col decreto 25 gennaio 1865 che sopprime tutte le misure preventive salvo la prova a freddo della caldaia (***), prescriveva per il calcolo delle caldaie a vapore la formola

$$s = 0,003 + 0,0018 d_1 \gamma$$

la quale corrisponde ad una tensione unitaria riferita al metro

(*) Vedi CLAUDEL, *Aide-mémoire des ingénieurs*, etc.

(**) Nelle condotte d'acqua per la città di Parigi secondo MORIN è stato posto $\gamma = 10$, ciò che per la ghisa conduce alla formola

$$s = 0,008 + 0,016 d_1.$$

Quando il tubo sia ad efflusso libero e non vi sia alcun pericolo di colpi d'ariete, urti, ecc., allora lo spessore può essere ridotto notevolmente, la parte variabile $0,0016 d_1 \gamma$ diventa piccolissima e lo spessore sarà determinato quasi unicamente dalla parte costante limitata a ciò che è necessario perchè il tubo sopporti il trasporto e le eventualità della messa in opera.

(***) COLLIGNON, *Résistance des matériaux*, 1877, pag. 458.

quadrato $R = 2\,800\,000$. BRIX per il calcolo dei cilindri soggetti a forti pressioni consiglia la formola

$$s = \frac{d_1}{2} (e^{\frac{p}{R}} - 1) + s' = \frac{d_1}{2} (2,71828^{\frac{p}{R}} - 1) + s'$$

avvertendo di prendere per R la metà del valore che si usa nelle altre costruzioni per quelle parti che sono esposte alla fiamma: pel ferro sarebbe consigliabile in tal caso $R = 3500000$, e per s' il valore dato dalla tabella precedente.

In queste formole v e p esprimono rispettivamente in atmosfere ed in chilogrammi per unità di superficie la pressione interna effettiva: se $\frac{p}{R}$ è una frazione molto piccola allora la formola di BRIX può prendere in via approssimata la forma

$$s = \frac{d_1}{2} \frac{p}{R} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p}{R} + \frac{1}{6} \left(\frac{p}{R} \right)^2 \right) + s'.$$

GRASHOF dà, pel calcolo dello spessore dei tubi, una formola generale dedotta razionalmente dalle formole ricavate dalla teoria generale della resistenza dei materiali nella parte prima al numero 87. Tale formola non potrebbe essere ora discussa senza trattare dell'equilibrio delle superficie resistenti, quindi rimettiamo al capitolo relativo l'esame della medesima limitandoci per ora ad accennare come essa possa convenire in tutti i casi e sia più specialmente adatta pel calcolo di pareti di spessore considerevole (*).

La formola

$$s = \frac{p d_1}{2 R} + s'$$

trovata superiormente può servire anche per determinare le dimensioni di un cerchio messo come rinforzo ad un tubo cili-

(*) Indicando con m il coefficiente di contrattibilità laterale (Parte I, pag. 131) la formola di GRASHOF è la seguente

$$s = \frac{d_1}{2} \left(-1 + \sqrt{\frac{m R + (m-1) p}{m R - (m+1) p}} \right)$$

dove deve essere $p < \frac{m}{m+1} R$.

drico soggetto ad una pressione interna $p_1 > p_2$ purchè il suo spessore sia molto piccolo. Per determinare la pressione interna p_1' sopportata dal cerchio si potrà ritenere che essa sia approssimativamente uguale alla pressione effettiva $p\,l' = (p_1 - p_2)\,l'$, in cui l' corrisponde alla distanza fra le mezzerie degli intervalli esistenti fra cerchio e cerchio.

Per il calcolo dello spessore da assegnare alle pareti di una sfera cava soggetta ad una pressione interna p_1 e ad una pressione esterna p_2 ($p_2 < p_1$) si può fare una discussione analoga a quella fatta pei cilindri ritenendo che le formole 281 del numero 87 (Parte I, pag. 337) permettano di considerare in via di approssimazione il valore p_{yy} come costante nelle sfere a pareti sottili e soggette a pressioni basse o tutt'al più mediocri. Non bisogna però dimenticare che i risultati ai quali si arriverebbe non potrebbero aver valore attendibile altrochè nel caso particolare di sfere a pareti molto sottili soggette a pressioni non molto forti. In questa particolare ipotesi il calcolo dello spessore di una sfera cava di diametro interno d_1 può considerarsi come un'applicazione della formola generale di resistenza alla tensione semplice

$$T = RA$$

dove T e A si determinano in modo analogo a quello fatto pei cilindri.

$$T = \frac{\pi d_1^2}{4} p_1 - \frac{\pi}{4} p_2 (d_1^2 + 4d_1 s + 4s^2) = \frac{\pi d_1^2}{4} (p_1 - p_2) - \pi s (d_1 + s) p_2$$

$$RA = \frac{R\pi}{4} \{ (d_1^2 + 4d_1 s + 4s^2) - d_1^2 \} = R\pi (s d_1 + s^2) = R\pi s (d_1 + s)$$

quindi

$$\frac{1}{4} \{ (p_1 - p_2) d_1^2 - 4s (d_1 + s) p_2 \} = R s (d_1 + s)$$

da cui

$$\frac{s}{d_1} + \frac{s^2}{d_1^2} = \frac{p_1 - p_2}{4(R + p_2)} = \frac{p}{4(R + p_2)}$$

s è per ipotesi molto piccolo ed in generale $\left(\frac{s}{d_1}\right)^2$ è trascurabile rispetto ad $\frac{s}{d_1}$, quindi nel caso delle sfere cave a pareti sottili e

diametro relativamente notevole nell'ipotesi che essa sia soggetta a pressioni p_1 e p_2 piccole o mediocri

$$s = \frac{1}{4} \frac{p d_1}{R + p_2} \quad (71)$$

se $\left(\frac{s}{d_1}\right)^2$ non è trascurabile rispetto ad $\frac{s}{d_1}$ allora bisogna risolvere l'equazione di secondo grado trovata precedentemente

$$s^2 + d_1 s = \frac{p}{R + p_2} \frac{d_1^2}{4}$$

da cui si ricava

$$s = -\frac{d_1}{2} + \sqrt{\frac{d_1^2}{4} + \frac{p}{R + p_2} \frac{d_1^2}{4}} = \frac{d_1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{p}{R + p_2}} - 1 \right) \quad (71^{bis}).$$

23. Solidi di uniforme resistenza alla estensione. — Un solido omogeneo ad asse rettilineo si dice di uniforme resistenza all'estensione quando esso abbia tali dimensioni che per ogni sezione trasversale sia costante il valore del carico unitario R , oppure, condizione equivalente, quando sia costante il valore dell'allungamento unitario i , calcolati rispettivamente colle formole di resistenza e di elasticità. Il concetto dell'uniforme resistenza corrisponde a quello di impiegare la minor quantità di materiale in relazione ad un determinato coefficiente di sicurezza $\frac{1}{n}$ e conduce naturalmente a

far variare la forma e le dimensioni della sezione trasversale del corpo in relazione al variare delle forze esterne alla medesima.

La costruzione di un solido con sezione variabile, specialmente se la legge di variazione è continua rispetto alla lunghezza dell'asse, presenta spesso in pratica difficoltà non indifferenti e per conseguenza importa un aumento di spesa nella costruzione. Inoltre nel maggior numero di casi non è tanto la maggior leggerezza della costruzione che interessa, quanto piuttosto la minor spesa compatibile con un dato valor limite del coefficiente di sicurezza. Quindi in pratica il più delle volte, senza rinunciare in modo assoluto al concetto dell'uniforme resistenza, se ne sostituisce un altro che vi ottempera in modo approssimato. Si divide la lunghezza del solido in m parti, che potranno essere uguali o disuguali a seconda della convenienza, e per ciascuna di esse si conserva costante la sezione resistente determinata in base al massimo

sforzo sollecitante, che ha luogo nel tronco considerato. Ciò corrisponde al concetto di costruire un solido, nel quale il coefficiente di sicurezza $\frac{1}{n}$ (Vedi Parte I, num. 113, pag. 490) abbia un determinato valore oppure se ne scosti meno di una determinata quantità, che potrà essere assegnata facilmente in ogni singolo caso. Il profilo della sezione del solido fatta con un piano passante per l'asse chiamasi profilo pratico di uniforme resistenza mentre invece quello che si otterrebbe mantenendo $\frac{1}{n}$ costante si dice profilo teorico di uniforme resistenza; il profilo pratico è circoscritto a gradinata al profilo teorico, cioè per variazione discreta delle ordinate rispetto all'asse considerato come asse delle ascisse.

Nell'applicare all'uniforme resistenza la soluzione pratica per tronchi a sezione costante bisogna ricordare quanto è stato detto nella teoria generale della resistenza dei materiali relativamente alle sezioni singolari per forma o per carico. Si è osservato che nelle sezioni singolari ed in prossimità alle medesime le formole della resistenza dei materiali cadono in difetto o per lo meno danno risultati soltanto largamente approssimati. Considerazioni di ordine teorico mostrano che in *C* e *D* (*) vi sarà discontinuità (*Fig. 107^a, tav. XXII*) nelle azioni molecolari e inoltre l'esperienza prova che in un solido ad asse rettilineo soggetto a tensione o compressione nelle sezioni in cui vi è un brusco cambiamento di dimensioni si manifesta una tendenza nel corpo a rompersi secondo una direzione obliqua al loro piano come è indicato nelle figure 108^a e 109^a (*Tav. XXII*) che rappresentano appunto i risultati ottenuti da LEGER nelle sue esperienze. Quindi nell'applicazione della teoria dell'uniforme resistenza se il corpo non consta di più pezzi riuniti artificialmente mediante i collegamenti usuali, ma è formato da un unico blocco proveniente dalla cava, ricavato da un solo tronco d'albero od ottenuto all'officina non si dovrà mai passare bruscamente da una sezione più grande ad un'altra più piccola. Il passaggio dovrà esser fatto per gradi adottando un profilo continuo come è indicato nella figura 110^a (*Tav. XXII*) che con termine tecnico chiamasi *congedo* o *profilo di congedo* e che avrà una lunghezza comparabile e possibilmente alquanto superiore alla differenza delle dimensioni trasversali delle due sezioni. Se il corpo consta di vari pezzi riuniti allora la variazione della sezione potrà essere ottenuta diminuendo in una determinata sezione il

(*) Alcuni autori indicano i punti e le sezioni singolari per forma e per carico col nome di *punti o sezioni critiche*.

numero dei pezzi che compongono il solido. In questo caso non è più necessario il *congedo*, non vi è soluzione di continuità fra fibre aderenti e quindi non si sviluppano sforzi trasversali provenienti dal vincolo di continuità ed aderenza che lega le varie molecole. Non bisogna però interrompere il pezzo elementare componente il solido nella sezione, in cui a norma del profilo si vuole stabilire la variazione di sezione, ma prolungarlo di tanto quanto è necessario per stabilire il suo collegamento colle altre parti componenti la travatura resistente, poichè solo dopo tale unione esso può ragionevolmente essere considerato come facente parte del corpo resistente.

Se si indica con $R_a = \frac{R_s}{n}$ il valore dello sforzo unitario massimo ammissibile per la resistenza a tensione con un determinato coefficiente di sicurezza $\frac{1}{n}$ o, cosa equivalente, con un determinato indice di stabilità n , la condizione dell'uniforme resistenza a tensione è espressa dalla relazione

$$R_a = \frac{T}{A}$$

dove T esprime per ogni sezione la tensione assiale ed A l'area resistente.

Come applicazione consideriamo il caso di un tirante a sezione circolare di lunghezza l disposto verticalmente ed attaccato in alto nel punto A (*Fig. 111^a, tav. XXIII*) il quale debba sostenere all'estremo inferiore B un carico P e debba avere la sezione retta circolare. Prendiamo come asse delle x l'asse BA del solido e come asse delle y la normale al medesimo passante per B e giacente nel piano della figura (sezione fatta con un piano passante per l'asse). Il valore di T per una sezione trasversale qualsiasi CD determinata dall'ascissa $BG = x$ è uguale alla somma delle forze parallele all'asse agenti esternamente alla sezione considerata. Se si indica con ρ la densità del materiale, con V il suo volume, il peso del solido compreso fra CD e l'estremo B sarà dato da

$$\rho \int_0^x dV = \rho \int_0^x \pi \overline{GD}^2 dx = \rho \pi \int_0^x y^2 dx$$

quindi

$$T = P + \rho \pi \int_0^x y^2 dx$$

L'area resistente A ha per espressione

$$\pi y^2$$

quindi la formola $T = A R_a$ diventa

$$P + \pi \rho \int_0^x y^2 dx = \pi y^2 R_a.$$

Per togliere i simboli trascendentali si derivi l'equazione precedente

$$\pi \rho y^2 dx = 2 \pi y dy R_a$$

separando le variabili s'ottiene

$$\frac{dy}{y} = \frac{\rho}{2 R_a} dx$$

e quindi integrando

$$\log y = \frac{\rho}{2 R_a} x + C.$$

Supponiamo che per $x = 0$ sia $y = r_0$, allora

$$\log r_0 = C$$

sottraendo questa equazione dalla precedente risulta

$$\log \frac{y}{r_0} = \frac{\rho}{2 R_a} x$$

e passando dai logaritmi ai numeri si ottiene finalmente

$$y = r_0 e^{\frac{\rho x}{2 R_a}}.$$

Questa equazione mostra che per avere un solido di uniforme resistenza bisogna che i raggi y delle diverse sezioni varino

come le ordinate della curva logaritmica rappresentata dall'equazione

$$y = r_0 e^{\frac{\rho x}{2R_a}} \quad (72).$$

Per trovare il raggio r_m della sezione superiore bisognerà porre nella (72) $x = l$, si ottiene allora

$$r_m = r_0 e^{\frac{\rho l}{2R_a}}.$$

R_a è un numero molto grande pei materiali che si usano ordinariamente nelle costruzioni, quindi $\frac{\rho l}{2R_a}$ e $\frac{\rho x}{2R_a}$ sono generalmente numeri molto piccoli, per cui nel maggior numero di casi si possono calcolare i varî valori di y con formole semplici e di facile maneggio sviluppando in serie il valore di y e trascurando tutti i termini, che contengono le potenze superiori alla prima od alla seconda di $\frac{\rho x}{2R_a}$, dipendentemente dal grado di esattezza che si vuol raggiungere. È noto che per valori molto piccoli di x si può scrivere

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \times 2}$$

quindi nel nostro caso si potrà porre

$$y = r \left\{ 1 + \frac{\rho x}{2R_a} + \frac{1}{2} \frac{\rho^2 x^2}{4R_a^2} \right\}$$

determinato un certo numero di valori dell'ordinata y si potrà tracciare a mano il profilo teorico di uniforme resistenza (*Fig. 111^a, tav. XXIII*).

Se dalla risoluzione teorica del problema si vuole passare alla soluzione pratica in causa della difficoltà di ottenere un corpo limitato da una superficie di rotazione, che abbia come generatrice una curva logaritmica, si divida la lunghezza del solido in m parti uguali di lunghezza Δl , e per ciascheduna di queste si supponga una sezione costante ed uguale alla sezione resistente massima necessaria per la stabilità del tronco considerato.

Le lunghezze dei varî tronchi a sezione costante possono a tutto rigore essere fissate comunque; si suole però sceglierle in relazione a ragioni di simmetria o di uniformità di misura, ecc., e pei solidi soggetti a tensione l'abitudine è che le dette lunghezze dei successivi tronchi a sezione costante siano tutte uguali fra loro. In questa particolare ipotesi indichiamo con Δl la lunghezza comune ai varî tronchi e con $r_1, r_2, r_3 \dots r_{m-1}, r_m$ i raggi delle successive sezioni resistenti: pel primo tronco il raggio r_1 sarà dato dalla equazione di resistenza $T = RA$ nella quale $T = P + \rho \pi r_1^2 \Delta l$, $A = \pi r_1^2$ ed $R = R_s = \frac{1}{n} R_s$. Sostituendo questi valori nell'equazione di resistenza s'ottiene

$$P + \rho \pi r_1^2 \Delta l = R \pi r_1^2$$

e poichè per ipotesi nella soluzione esatta della questione

$$P = \pi r_0^2 R$$

si ha la relazione

$$\pi r_0^2 R + \rho \pi r_1^2 \Delta l = R \pi r_1^2$$

od anche

$$r_1 = \sqrt{\frac{R r_0^2}{R - \rho \Delta l}} = r_0 \sqrt{\frac{R}{R - \rho \Delta l}}$$

In modo analogo l'equazione di resistenza pel secondo tronco risulta

$$\pi r_2^2 R = \rho \pi r_2^2 \Delta l + \rho \pi r_1^2 \Delta l + P = \rho \pi r_2^2 \Delta l + R \pi r_1^2$$

da cui si ricava

$$r_2 = r_1 \sqrt{\frac{R}{R - \rho \Delta l}} = r_0 \left(\sqrt{\frac{R}{R - \rho \Delta l}} \right)^2$$

e procedendo nello stesso modo si ottiene per una sezione qualsiasi k

$$r_k = r_0 \left(\sqrt{\frac{R}{R - \rho \Delta l}} \right)^k \quad (73)$$

e per la sezione estrema in A

$$r_m = r_0 \left(\sqrt{\frac{R}{R - \rho \Delta l}} \right)^m$$

Questa formola permette di calcolare i raggi dei singoli tronchi che dovranno essere fra loro accordati con *congedi*, come si è indicato superiormente quando si tratti di solidi ricavati da un solo pezzo di materiale e non formati colla sovrapposizione di varie parti. La lunghezza poi Δl di ciascun tronco sarà scelta in generale in relazione alle esigenze costruttive, cioè in modo tale che la maggior spesa che si incontra nella costruzione di un solido a sezione variabile sia compensata dal risparmio che si ottiene nel materiale impiegato. Se il corpo consta di varie parti riunite artificialmente la lunghezza Δl si sceglie in modo che la variazione della sezione resistente da tronco a tronco corrisponda all'area trasversale di una delle parti componenti, in guisa che basta interrompere successivamente le varie parti per ottenere il solido di uniforme resistenza.

Se invece di un solido a sezione circolare si considera un tirante o fune a sezione rettangolare col lato a costante ed il lato $b = 2y$ variabile (*Fig. 112^a, tav. XXIII*) l'equazione fondamentale che dà il profilo teorico risulta

$$P + 2a\rho \int_0^x y dx = 2Ray$$

da cui si ricava come precedentemente

$$y = b_0 e^{\frac{\rho x}{R}} \quad (74)$$

e per la soluzione pratica l'equazione di resistenza pei vari tronchi diventa successivamente (*Fig. 112^a, tav. XXIII*),

$$Rab_0 = P$$

$$Rab_1 = \rho ab_1 \Delta l + P = \rho ab_1 \Delta l + Rab_0$$

$$Rab_2 = \rho ab_2 \Delta l + \rho ab_1 \Delta l + P = \rho ab_2 \Delta l + Rab_1$$

$$Rab_3 = \rho ab_3 \Delta l + \rho ab_2 \Delta l + \rho ab_1 \Delta l + P = \rho ab_3 \Delta l + Rab_2$$

.....

dalle quali si ricava

$$b_0 = \frac{P}{Ra}$$

$$b_1 = b_0 \frac{R}{R - \rho \Delta l}$$

$$b_2 = b_1 \frac{R}{R - \rho \Delta l} = b_0 \left(\frac{R}{R - \rho \Delta l} \right)^2$$

$$b_3 = b_2 \frac{R}{R - \rho \Delta l} = b_0 \left(\frac{R}{R - \rho \Delta l} \right)^3$$

.....

$$b_k = b_0 \left(\frac{R}{R - \rho \Delta l} \right)^k \quad (75)$$

.....

$$b_m = b_0 \left(\frac{R}{R - \rho \Delta l} \right)^m.$$

Se fra i lati a e b si stabilisce un rapporto costante ε in guisa che sia $a = \varepsilon b = 2\varepsilon y$ si ottiene in modo affatto analogo

$$y = b_0 e^{\frac{\rho x}{2R}} \quad b_0 = \sqrt{\frac{R}{\varepsilon P}}$$

$$b_k = b_0 \left(\sqrt{\frac{R}{R - \rho \Delta l}} \right)^k.$$

La teoria dei solidi di uniforme resistenza alla tensione trova applicazione specialmente nella fabbricazione dei lunghi canapi, che servono per l'estrazione del materiale nei pozzi delle miniere. La materia escavata è caricata sopra appositi vagonetti, i quali possono entrare entro una gabbia a più piani attaccata ad un canape, che alla superficie del suolo si avvolge intorno ad un tamburo mosso da una macchina a vapore. Senza entrare in particolari costruttivi si comprende facilmente come nelle estrazioni importanti

da profondità superiori a metri 500,00 occorranno funi di grande diametro, le quali richiederebbero enormi raggi di curvatura nei tamburi d'avvolgimento. Trascurando questa precauzione l'elasticità delle fibre sarebbe facilmente alterata, quindi gli ingegneri ricorrono di preferenza alle funi piatte a sezione rettangolare fabbricate unendo assieme, l'uno a fianco dell'altro, i varî trefoli. Come esempio riportiamo la seguente tabella estratta dall'*Arte mineraria* dell'ingegnere V. ZOPPETTI (Vol. II, pag. 128) in cui sono date le dimensioni di una fune piatta in aloè pel servizio di estrazione in una miniera nell'ipotesi che il peso P della gabbia carica sia di chilogrammi 3100,00 e che la profondità da cui si estrae il minerale sia di metri 700. La fune è piatta a sezione rettangolare e fra i lati della medesima passa tale rapporto che la larghezza b ha un valore compreso tra quattro o cinque volte quello dello spessore a : i varî tronchi hanno tutti una lunghezza $\Delta l = 100$ metri.

Indicazione dei diversi tronchi o tratte	Lunghezza in metri	Peso d'ogni tratta in Kg.	Larghezza della fune in mm.	Spessore della fune in mm.
1	100	477	150	32
2	100	550,3	160	35
3	100	635	170	37,5
4	100	732,7	180	40
5	100	845	195	43
6	100	975	210	46,6
7	100	1125,4	225	50
Peso totale Kg. 5340,7			Spessore medio m. 0,0406	

A. T. PONSON nel suo trattato sulla coltivazione delle miniere di carbone (Vol. III, pag. 167) riporta un quadro, dal quale appare in modo evidente il vantaggio di usare canapi a sezione variabile per l'estrazione da grandi profondità in confronto di quelli a sezione costante, e crediamo cosa utile il riprodurlo come complemento di ciò che è stato detto sui solidi di uniforme resistenza alla tensione.

INDICAZIONI	Canapi a sezione variabile carico totale della gabbia d'estrazione $P=2800$ Kg.					Canapi a sezione costante carico totale della gabbia d'estrazione $P=2800$ Kg.				
	Dimensioni dei canapi			Peso dei canapi		Carico totale in Kg.	Dimensioni dei canapi			Peso totale in Kg.
	Sezione in cmq.	Larghezza in cm.	Spessore in cm.	Per 100 ^m di lunghezza in Kg.	Per la totalità della lunghezza in Kg.		Sezione in cmq.	Larghezza in cm.	Spessori in cm.	
Profondità dell'estrazione (trate di 100 ^m ciascuna)										
100	40,00	16	2,5	440	440	3240	—	—	—	—
200	46,28	16,5	2,8	508	948	3748	—	—	—	—
300	52,88	17	3,1	580	1528	4328	—	—	—	—
400	61,83	18	3,4	673	2201	5001	75,65	19	4	3344
500	71,44	18,5	3,8	778	2974	5774	107,64	21,5	5	5912
600	82,48	20	4,1	902	3876	6676	186,66	25	7,5	12375

24. Ponti sospesi. — Come esempio di una costruzione nella quale le parti di maggior importanza siano soggette unicamente a sforzi di tensione, prendiamo in esame i ponti sospesi. La teoria di questi sistemi, considerata nella loro forma primitiva e più semplice è di esposizione breve e facilissima, poichè in essa le reazioni opposte dai vincoli sono determinabili col solo aiuto della statica generale dei sistemi di forma invariabile, ossia, usando un termine introdotto da qualche autore recente, essi formano un sistema *isostatico*. Nei ponti in genere si distinguono tre parti principali:

a) Il *piano del ponte*, cioè la superficie resistente sulla quale ha luogo il passaggio dei carichi (solaio in legno, in ferro, misto o massicciata stradale secondo i casi);

b) L'*apparecchio portante* (vòlta in muratura, trave in legno od in ferro, catena o canape di sospensione secondo i casi) al quale è unito il piano o solaio del ponte direttamente, mediante aste di trasmissione isolate o formanti sistema, e finalmente nei ponti in muratura mediante i timpani o rinfianchi delle vòlte;

c) I *sostegni* od *appoggi* che mantengono in posto l'apparecchio portante (pile e spalle in muratura, palate e testate in legno, palate metalliche, torri e bielle con canapi d'ormeggio per annullare l'effetto della componente orizzontale della reazione che tenderebbe a rovesciarle).

L'organo che più particolarmente caratterizza il ponte dipendentemente dalla natura del materiale usato nella sua costruzione e dalla sua forma è l'apparecchio portante: nei ponti sospesi tale apparecchio è costituito da catene o canapi, ai quali è unito per mezzo di aste di trasmissione il piano del ponte formato da un solaio con travi in legno od in ferro ricoperto da una superficie resistente di carreggio costituita ordinariamente di tavole e tavoloni in legname. Allo scopo di diminuire le deformazioni che i carichi mobili producono nella catena, che di sua natura è essenzialmente di forma variabile, e l'effetto delle vibrazioni, nei ponti sospesi di costruzione moderna si sono aggiunti alla catena o canape principale di sospensione, canapi secondari e travi d'irrigidimento al solaio od al canape, ossia canapi e travi destinate a limitare o ad impedire gli spostamenti relativi dei punti del sistema. Lo studio dei ponti sospesi irrigiditi si collega con quello delle travature composte e combinate e non può formare oggetto del presente numero, in cui si vuole solo dare un esempio del modo, col quale si possono determinare le sezioni resistenti in una data costruzione a membrature tese, quindi ci limiteremo ad occuparci dei ponti sospesi aventi la forma primitiva e più semplice descritta superiormente.

Come è già stato accennato l'apparecchio portante nei ponti sospesi è formato da canapi flessibili composti ordinariamente di fili di ferro o d'acciaio (ferro omogeneo, *flusseisen*) oppure da catene a lunghe maglie semplici, doppie, multiple, riunite fra loro mediante bolzoni o caviglie in modo che l'unione riesca mobile a cerniera intorno all'asse della caviglia stessa. In via assoluta non possono essere esclusi canapi formati anche di materie tessili, essi però non potrebbero essere impiegati che in lavori provvisori, oppure in costruzioni affatto primitive (*).

Il solaio o piano del ponte si compone essenzialmente di una superficie resistente di carreggio, ordinariamente composta di due strati di tavole in legno sovrapposte, dei quali l'inferiore molto grosso (tavoloni dello spessore $0,06 \div 0,08$) riposa direttamente su travi trasversali normali all'asse del ponte dette *traversi*, oppure sopra travi longitudinali, cioè parallele all'asse del ponte, dette *lungherine*, che alla loro volta poi riposano sui traversi, vedi figure 113^a e 114^a (*Tav. XXIII*), nelle quali le varie parti sono indicate colle notazioni seguenti: *t* = tavole superiori costituenti la superficie su cui avviene il carreggio; *tt* = tavoloni resistenti al peso dei carichi; *lon* = lungherine; *tr* = traversi: lateralmente alla carreggiata stradale sono rappresentati nelle figure i marciapiedi *m*.

Ordinariamente la distanza fra i traversi non è mai inferiore ad un metro, raramente supera metri 2,50, così pure la distanza fra le lungherine è raramente inferiore a metri 0,80 e non supera mai metri 1,60. All'estremità dei traversi sono attaccate direttamente, oppure mediante staffe, delle aste o dei canapi, i quali alla loro volta sono attaccati al canape o catena principale (Vedi *Fig. 115^a, tav. XXIII*) e servono a trasmetterle il peso del solaio. Quando l'apparecchio portante è una catena a lunghe maglie le aste di trasmissione sono riunite con articolazione a cerniera alle caviglie, che stabiliscono l'unione delle varie maglie; quando l'apparecchio portante è formato da uno o più canapi allora le aste o funi di trasmissione si collegano col canape principale col mezzo di legature, sellette, staffe (Vedi *Fig. 116^a, tav. XXIII*) o di altri simili espedienti.

Il calcolo di un ponte sospeso comprende la determinazione della forma che prenderà il canape principale e degli sforzi che

(*) NAVIER ricorda che in America prima che vi arrivassero gli Europei esistevano ponti di corde. — Vedi HUMBOLDT, *Vues des cordilières et monuments des peuples indigènes de l'Amérique* — Costruzioni analoghe si trovano nel Thibet, ecc.

si sviluppano nel medesimo per poterne assegnare colla formula di resistenza l'area della sezione resistente, la valutazione degli sforzi e delle sezioni resistenti per le aste di trasmissione e pei sistemi d'appoggio e d'attacco del canape principale e finalmente la determinazione degli sforzi e delle dimensioni per tutte le parti che entrano a comporre il solaio. Nel piano del ponte gli sforzi agiscono normalmente agli assi dei solidi formanti l'orditura del medesimo, quindi il loro calcolo è un'applicazione della teoria della flessione e come metodo generale coincide col calcolo usuale di un solaio comune, soltanto vi è differenza nel valore ed anche nella distribuzione possibile dei carichi. Il calcolo del ponte sospeso sarà quindi limitato a quello del canape principale, delle aste di sospensione e dei canapi di ormeggio.

L'apparecchio portante dei ponti sospesi ordinari pel modo speciale col quale esso è costruito è incapace di resistere a sforzi obliqui, dalle cerniere (prescindendo dall'attrito) non può essere opposta alcuna resistenza all'effetto dei momenti delle forze, quindi per l'equilibrio è necessario che il momento della risultante di tutte le forze precedenti una determinata cerniera preso rispetto alla cerniera stessa sia nullo, ossia la detta risultante deve passare per il punto di riunione considerato. L'apparecchio portante dei ponti sospesi costituisce un sistema analogo alla catena di travi considerata al numero 82 della parte prima (Pag. 395) ed i vertici o nodi debbono cadere sui lati del poligono delle risultanti. Si è detto che nelle catene di sospensione le aste di trasmissione sono articolate agli assi delle cerniere d'unione delle varie maglie, i canapi flessibili poi possono essere riguardati come catene a maglie infinitamente corte (od a cerniere infinitamente vicine), quindi si può concludere che l'apparecchio portante si disporrà necessariamente secondo il poligono delle risultanti delle forze che lo sollecitano, comprendendo fra queste anche le reazioni dei punti d'attacco.

Dalle cose dette risulta che la forma che prenderà il canape dipende essenzialmente dalla natura dei carichi che lo sollecitano in relazione alle leggi che determinano la forma e l'equilibrio dei poligoni funicolari. Nel caso dei ponti sospesi il carico si compone di due parti; una è costituita dal peso proprio della costruzione, che senza errore sensibile può riguardarsi come distribuito in modo uniforme sul ponte per metro quadrato di solaio, l'altra è costituita dal carico accidentale che può insistere sul piano del ponte e che può essere formato da una folla di persone che occupi il ponte, oppure da uno o più carri pesanti che s'avanzino sul me-

desimo. Il governo francese nel 1870 (*) ha stabilito che i ponti sospesi debbono essere calcolati e provati prima di essere aperti all'esercizio in base ad un sovracarico di Kg. 200 uniformemente distribuito per metro quadrato di piano del ponte e ad un carico isolato formato da una vettura pesante Kg. 11000,00 se il ponte è a semplice via, oppure da due vetture dello stesso peso ciascuna animata da un movimento opposto se il ponte è a due vie, cioè se ha la larghezza ordinaria di circa metri 5,00 che permette lo scambio di due vetture. In Italia non sono ancora state promulgate disposizioni speciali a questo proposito, per cui l'ingegnere è libero di fissare i sovracarichi in base ad un'analisi ragionata delle condizioni di esercizio del ponte; sarà però sempre cosa opportuna non scostarsi molto dalle condizioni fissate dalla sopra citata circolare quando manchino ragioni speciali per scegliere numeri differenti (**).

Rappresentino

e la larghezza del piano del ponte

l la sua lunghezza

g' , q' e p' rispettivamente il peso proprio, il carico accidentale ed il carico totale uniformemente distribuito per metro quadrato di ponte

λ la distanza fra traverso e traverso contata fra i loro assi; λ è ordinariamente costante per tutta la lunghezza del ponte ed in questo esempio supporremo che effettivamente sia tale

O il punto più basso del poligono di sospensione: si possono presentare due casi, se il punto più basso è rappresentato da un vertice del poligono allora la posizione di O è nettamente determinata, se invece si hanno due vertici di livello, e quindi un lato orizzontale come luogo dei punti più bassi, allora riterremo per convenzione che il punto O sia il punto di mezzo del lato orizzontale

$m + m' = \frac{l}{\lambda}$ il numero dei campi o spazi compresi fra traverso e traverso: ordinariamente nelle applicazioni la costruzione è simmetrica rispetto ad una verticale passante pel punto O , quindi $m' = m = \frac{l}{2\lambda}$. Se O cade in un vertice allora m ed m' sono numeri

(*) Decreto in data 4 maggio 1870, del Ministro dei lavori pubblici, marchese di TALHOUEY.

(**) Una commissione nominata dal Ministro dei lavori pubblici sta ora (luglio 1893) studiando un regolamento generale per l'esecuzione delle costruzioni in metallo.

interi, se O cade nel mezzo di un lato del poligono allora m e m' sono rappresentati da un numero frazionario: se si indica con r un numero intero, il valore di m o di m' è dato da una espressione della forma $\frac{2r-1}{2}$

$c=m\lambda$ e $c'=m'\lambda$ la lunghezza delle due porzioni di ponte a destra ed a sinistra della verticale passante per O ; evidentemente $l=c+c'$, e se la costruzione è simmetrica $l=2c=2m\lambda$

$2g$, $2q$ e $2p$ rispettivamente il peso proprio (compreso in generale anche quello ragguagliato del canape e delle aste di trasmissione) il carico accidentale ed il carico totale uniformemente distribuito per metro corrente di ponte

$2K$ il massimo carico accidentale che può gravitare sopra un traverso distribuito simmetricamente rispetto al punto di mezzo del medesimo.

In causa della simmetria, che si suppone nella distribuzione del carico, le aste di trasmissione supporteranno metà del carico che nelle varie ipotesi gravita sopra ogni traverso, e precisamente

$$G = \frac{2g\lambda}{2} = g\lambda \text{ per effetto del peso proprio}$$

$$Q = \frac{2q\lambda}{2} = q\lambda \text{ per effetto del carico accidentale uniformemente}$$

distribuito sul piano del ponte

$P = G + Q = (g + q)\lambda = p\lambda$ per effetto del carico totale uniformemente distribuito rispetto al piano del ponte

K per effetto del carico accidentale massimo, che può essere sopportato da un traverso per effetto del movimento di uno o più carichi isolati.

Siano A e B (*Fig. 117^a e 118^a, tav. XXIII*) (*) i punti d'attacco del canape o catena di sospensione ed indichiamo i punti d'attacco delle aste di trasmissione coll'apparecchio portante, detti anche *nodi* ovvero *nodi d'attacco*, coi numeri $1, 2, 3, \dots k, k+1, \dots m$ ed $1', 2', 3', \dots k', (k+1)', \dots m'$ secondo che essi si trovano a destra od a sinistra del punto O .

Se si prescinde dal peso proprio del canape, oppure si immagina che esso sia concentrato nei nodi o computato per ragguaglio col peso proprio del ponte, i tronchi del canape di sospensione compresi fra due nodi successivi sono necessariamente rettilinei, perchè il loro asse deve coincidere colla direzione della risultante di tutte

(*) La figura 117^a corrisponde al caso che il punto O cada sul vertice più basso e la figura 118^a a quello in cui O coincida col punto di mezzo del lato orizzontale $11'$.

le forze precedenti o susseguenti il tronco che si considera. Se l'apparecchio portante è formato da catene a lunghe maglie rigide unite fra loro nei nodi d'attacco allora in ciascun tronco non possono aver luogo altre deformazioni che quelle comprese entro il limite di elasticità se la costruzione è stabile, e quindi esse non possono alterare sensibilmente la forma della maglia.

Conveniamo di prendere come assi coordinati una retta orizzontale passante per O' , $O'X$ ed una verticale passante per O , $O'Y$ ed indichiamo con x_k ed y_k le coordinate di un nodo qualsiasi e con α_k l'angolo che il lato susseguente al nodo k fa coll'orizzontale $O'X$. Se si considera il tronco di canape compreso fra una

verticale equidistante dai nodi k e $k+1$ $\left(x = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$

e l'asse $O'Y$ quando O cade nel mezzo di un lato, oppure fra la stessa verticale e quella equidistante dai nodi O ed 1 $\left(x = \frac{x_1}{2}\right)$

quando O cade in un vertice del poligono di sospensione, perchè questa porzione di canape sia in equilibrio si dovranno verificare le due equazioni di equilibrio alla traslazione parallelamente agli assi $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, e quella di equilibrio alla rotazione $\Sigma M = 0$.

Rappresentiamo con T lo sforzo assiale in uno qualsiasi dei lati del poligono di sospensione, contrassegnandolo con un indice corrispondente al numero d'ordine di quello dei due nodi che lo limitano che porta un indice inferiore, e con H una costante. Proiettando parallelamente all'asse delle x e delle y le forze che animano la porzione di poligono considerato si ottiene

$$T_k \cos \alpha_k = T_0 \cos \alpha_0 = H$$

e

$$T_k \sin \alpha_k = T_0 \sin \alpha_0 + p \frac{x_{k+1} - x_k}{2} + p x_k - \frac{p x_1}{2}$$

se O cade in un vertice, se invece O cade nella metà di un lato

$$T_k \sin \alpha_k = T_0 \sin \alpha_0 + p \frac{x_{k+1} - x_k}{2} + p x_k.$$

La differenza fra queste due ultime formole sta nel termine $\frac{p x_1}{2}$ che manca nella seconda; per non ripetere due volte i calcoli li eseguiremo servendoci della prima formola, cancellando nel risul-

tato i termini che dipendono da $\frac{p x_1}{2}$ si avrà l'equazione corrispondente alla seconda ipotesi, cioè che O cada sulla metà del lato ll' .

Dividendo membro a membro le due equazioni di equilibrio si ottiene

$$\text{tang } \alpha_k = \text{tang } \alpha_0 + \frac{p}{2H} (x_{k+1} + x_k) - \frac{p x_1}{2H}$$

ma dalla figura risulta

$$\text{tang } \alpha_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$$

quindi sostituendo e moltiplicando tutta l'equazione per $x_{k+1} - x_k$ si ha fra le coordinate di due nodi successivi la seguente relazione

$$\begin{aligned} y_{k+1} - y_k &= (x_{k+1} - x_k) \text{tang } \alpha_0 + \frac{p}{2H} (x_{k+1}^2 - x_k^2) - \\ &\quad - \frac{p x_1}{2H} (x_{k+1} - x_k). \end{aligned}$$

In modo analogo si può stabilire la seguente serie di equazioni

$$\begin{aligned} y_k - y_{k-1} &= (x_k - x_{k-1}) \text{tang } \alpha_0 + \frac{p}{2H} (x_k^2 - x_{k-1}^2) - \\ &\quad - \frac{p x_1}{2H} (x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{k-1} - y_{k-2} &= (x_{k-1} - x_{k-2}) \text{tang } \alpha_0 + \frac{p}{2H} (x_{k-1}^2 - x_{k-2}^2) - \\ &\quad - \frac{p x_1}{2H} (x_{k-1} - x_{k-2}) \end{aligned}$$

.....

$$y_3 - y_2 = (x_3 - x_2) \text{tang } \alpha_0 + \frac{p}{2H} (x_3^2 - x_2^2) - \frac{p x_1}{2H} (x_3 - x_2)$$

$$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1) \operatorname{tang} \alpha_0 + \frac{p}{2H} (x_2^2 - x_1^2) - \frac{p x_1}{2H} (x_2 - x_1)$$

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0) \operatorname{tang} \alpha_0 + \frac{p}{2H} (x_1^2 - x_0^2) - \frac{p x_1}{2H} (x_1 - x_0).$$

Sommando tutte queste uguaglianze membro a membro si vede come tutti i termini contenenti $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ ed $y_1, y_2, y_3, \dots, y_k$ si eliminano due a due e non restano che quelli contenenti x_{k+1}, y_{k+1}, x_0 ed y_0 , quindi, riducendo e tralasciando l'indice $k+1$ reso ora inutile perchè si riferisce ad un nodo qualsiasi indipendentemente da qualsiasi considerazione, si ottiene

$$y - y_0 = (x - x_0) \operatorname{tang} \alpha_0 + \frac{p}{2H} (x^2 - x_0^2) - \frac{p x_1}{2H} (x - x_0) \quad (76).$$

Se il punto O cade nel mezzo del lato orizzontale ll' allora si annullano i termini contenenti $\frac{p x_1}{2H}$ e l'equazione finale risulta

$$y - y_0 = (x - x_0) \operatorname{tang} \alpha_0 + \frac{p}{2H} (x^2 - x_0^2) \quad (76^{bis}).$$

Se si considerano x ed y come coordinate correnti entrambe le equazioni rappresentano una parabola ad asse verticale il cui vertice si otterrà ponendo $\frac{dy}{dx} = 0$, quando O cade sopra un nodo, e ponendo la sottotangente uguale al doppio della freccia quando O cade nel mezzo del lato ll' .

I CASO. — O cade in un vertice del poligono di sospensione. In questo caso

$$x_0 = 0 \quad \operatorname{tang} \alpha_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} \alpha_0 + \frac{p}{H} x - \frac{p x_1}{2H} = \frac{y_1 - y_0}{x_1} + \frac{p}{H} x - \frac{p x_1}{2H}.$$

O essendo il punto più basso dovrà essere $\frac{dy}{dx} = 0$ per $x = 0$ quindi

$$\operatorname{tang} \alpha_0 = \frac{p x_1}{2H}$$

sostituendo questo valore di $\tan \alpha_0$ nell'equazione (76) si ottiene

$$y - y_0 = \frac{p x^2}{2H}$$

e trasportando l'origine delle coordinate in O

$$y = \frac{p x^2}{2H} \quad (77).$$

II CASO. — Il punto O cade nel mezzo del lato orizzontale $11' = h$.

In questo caso $\frac{p x_1}{2H} = 0$, $\tan \alpha_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$ e l'equazione (76^{bis}) diventa

$$y - y_0 = \frac{p x^2}{2H}$$

che rappresenta una parabola ad asse verticale coincidente coll'asse delle y . La posizione poi del vertice si ottiene facilmente usando della proprietà sopra menzionata della sottotangente; indichiamo con f_1 la freccia dell'arco di parabola che ha per corda il lato $11' = h = 2x_1$ allora

$$\frac{2f_1}{x_1} = \frac{p x_1}{H} \quad \text{da cui} \quad f_1 = \frac{p x_1^2}{2H}$$

che serve a stabilire il vertice O_1 della parabola nella quale è inscritto il poligono di sospensione. È bene osservare che se si trasporta l'origine delle coordinate in O l'equazione $y - y_0 = \frac{p x^2}{2H}$

diventa $y = \frac{p x^2}{2H}$ che rappresenta una parabola inscritta nel poligono di sospensione ed uguale alla precedente: se gli intervalli fra i nodi diventano infinitamente piccoli le due parabole coincidono in un'unica curva.

Per risolvere completamente la questione rimane a determinare il valore di H , ciò può farsi facilmente ricorrendo alla terza equazione di equilibrio $\Sigma M = 0$, oppure sostituendo nell'equazione della parabola ad x un valore pel quale sia noto il valore corrispondente di y in guisa da avere un'equazione numerica da cui ricavare H . Per semplicità supponiamo che la costruzione sia simmetrica rispetto all'asse OY , come appunto ha luogo ordinariamente, ed indichiamo con f la freccia OE dell'arco di parabola che costi-

tuisce l'asse della catenaria di sospensione; per l'equilibrio della porzione $O, 1, 2, 3, \dots k \dots m B$ del canape alla rotazione deve essere

$$Hf = \frac{pc^2}{2} \quad \text{ossia} \quad H = \frac{pc^2}{2f} \quad (78).$$

Lo stesso risultato s'ottiene dalla equazione della parabola osservando che per $x=c$, $y=f$ e quindi

$$f = \frac{pc^2}{2H} \quad \text{ossia} \quad H = \frac{pc^2}{2f}.$$

Sostituendo ad H il suo valore l'equazione della parabola diventa

$$y = \frac{px^2}{2H} = \frac{px^2}{2 \frac{pc^2}{2f}} = \frac{f}{c^2} x^2 \quad (79)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \frac{f}{c^2} x \quad (80).$$

Quando il punto O cade nel vertice più basso del poligono di sospensione

$$x_k = k\lambda \quad c = m\lambda$$

quando invece cade nel mezzo del lato ll' allora

$$x_k = \frac{2k-1}{2} \lambda \quad c = \frac{2m-1}{2} \lambda$$

quindi nei due casi l'equazione per la determinazione del valore dell'ordinata y_k diventa rispettivamente

$$y_k = \frac{f}{c^2} x_k^2 = \frac{f}{m^2 \lambda^2} k^2 \lambda^2 = \frac{f}{m^2} k^2 \quad (81)$$

$$y_k = \frac{f}{c^2} x_k^2 = \frac{f(2k-1)^2}{(2m-1)^2 \lambda^2} \lambda^2 = \frac{f}{(2m-1)^2} (2k-1)^2 \quad (81 \text{ bis})$$

ritenendo che l'asse delle x sia tangente al vertice della parabola sulla quale si trovano i nodi. Con queste equazioni si possono determinare le varie ordinate dei nodi in funzione della sola freccia e del numero d'ordine k che loro corrisponde.

L'equazione d'equilibrio parallelamente all'asse delle x permette di determinare il valore dello sforzo T_k di tensione agente in uno

qualsiasi dei lati $k, k+1$ e la sua espressione analitica può prendere varie forme in causa delle relazioni esistenti fra i seni coseni e tangenti degli angoli α_k , gli elementi del poligono funicolare e le coordinate della curva, nella quale esso è inscritto. Dalla equazione $T_k \cos \alpha_k = H$ si ricava

$$\begin{aligned} T_k &= \frac{H}{\cos \alpha_k} = \frac{p c^2}{2f \cos \alpha_k} = \frac{p c^2}{2f} \sqrt{1 + t g^2 \alpha_k} = \frac{p c^2}{2f} \sqrt{1 + \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \right)^2} = \\ &= \frac{p c^2}{2f} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = \frac{p c^2}{2f} \sqrt{1 + 4 \frac{f^2}{c^4} x^2} = \sqrt{(p x)^2 + \left(\frac{p c^2}{2f} \right)^2} \quad (82). \end{aligned}$$

L'ultima espressione di T_k poteva anche essere ottenuta osservando che T_k è la risultante della tensione orizzontale agente nel canape e del peso applicato al medesimo fra il punto O ed il tronco $k, k+1$ considerato.

Ricavato il valore di T_k per i vari tronchi $k, k+1$ il calcolo della sezione resistente del canape o della catena va fatto colla formola di resistenza a tensione semplice $T = R A$ poichè tutti gli sforzi sono diretti secondo gli assi dei varî tronchi o membrature componenti l'apparecchio portante del ponte. Difficilmente si fa il sistema di uniforme resistenza variando la sezione da tronco a tronco a seconda dei valori di T_k . Se il ponte ha un'ampiezza piccola od anche solo moderata si calcola l'area resistente nel tronco maggiormente sollecitato, cioè in quello d'attacco, per cui α_k ha il massimo valore, e si conserva la stessa sezione per tutto il canape, se il ponte ha invece una grande ampiezza allora si divide la lunghezza del canape in un piccolo numero di parti e per ciascuna di esse si conserva la sezione costante uguale a quella che è necessaria nel punto più sollecitato della porzione di canape considerata: quest'ultima disposizione equivale alla costruzione di un profilo pratico di uniforme resistenza. Per le catene a lunghe maglie riesce più facile la variazione delle sezioni resistenti e quindi il numero di parti a sezione resistente diversa può essere maggiore che nei canapi di fili ritorti o paralleli. Il calcolo effettivo della sezione resistente si fa con una delle due formole

$$\frac{p c^2}{2f} \sqrt{1 + \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \right)^2} = R A$$

$$\sqrt{(p x)^2 + \left(\frac{p c^2}{2f} \right)^2} = R A$$

in cui per R si metterà il valore ammissibile $R_s' = \frac{1}{n} R_s'$ corrispondente al materiale che si considera e per A il valore della sezione resistente espresso in funzione di una sola variabile od almeno lasciando incognita una sola dimensione. Quando si deve calcolare un canape fatto con fili metallici molte volte si assume come incognita il numero m_1 dei fili oppure il numero m_1' dei treffoli; se si indica con t lo sforzo a cui può resistere permanentemente un filo e con d il suo diametro, con t' lo sforzo a cui può resistere un treffolo, l'equazione di resistenza può essere scritta nel modo seguente

$$\sqrt{(px)^2 + \left(\frac{pc^2}{2f}\right)^2} = RA = m_1 \frac{\pi d^2}{4} R = m_1 t = m_1' t'.$$

Nelle aste di trasmissione si sviluppa uno sforzo di tensione uguale alla metà del carico che gravita sul traverso: pel carico uniformemente distribuito la tensione T' nelle aste è data da

$$T' = \frac{p'\lambda e}{2} = p\lambda$$

pel carico isolato $2K$ invece è dato da

$$T' = K.$$

Nei ponti destinati al carreggio nelle condizioni ordinarie di transito e di distanza fra i traversi $2K > p'\lambda e$, quindi il calcolo della sezione resistente delle aste di trasmissione si fa colla formola di resistenza alla tensione semplice ponendo $T' = K$. Anche qui bisogna avvertire che per R si porrà il valor limite ammissibile $R_s' = \frac{R_s}{n}$ e per A la sua espressione in funzione di una sola variabile, ossia lasciando indeterminata una sola dimensione; ordinariamente la sezione ha forma circolare di diametro d quindi $A = \frac{\pi d^2}{4}$. Se l'asta di trasmissione è formata con fili di diametro δ allora si suole prendere per incognita il numero m_2 dei fili e la formola diventa

$$T' = RA = m_2 \frac{\pi \delta^2}{4} R = m_2 t_2.$$

I punti A e B in cui è fissato il canape di sospensione debbono resistere ad una pressione diretta dall'alto al basso che nei ponti sospesi simmetrici è uguale a pc (Vedi *Fig. 119^a, tav. XXIV*)

e ad una spinta o tensione orizzontale H diretta verso il canape. Ordinariamente gli appoggi A e B sono formati da colonne in muratura o metalliche, oppure da vere bielle AA' , BB' oscillanti intorno ai punti A' e B' . Ad eccezione del caso, certamente poco probabile, che in A e B si trovi naturalmente una roccia di una compattezza e resistenza non comune, sarà necessario impedire l'effetto disastroso prodotto dal momento di rovesciamento della forza H eliminandola col prolungare al di là di A e di B il canape stesso di sospensione, oppure mettendo al di là di A e di B due canapi, i quali vadano ad ancorarsi profondamente in un suolo resistente. Essi debbono avere tale resistenza da poter fare equilibrio alla forza H in guisa che i supporti in A ed in B non debbano resistere altrochè alla pressione $S = D = pc = \frac{pl}{2}$: questi

canapi ausiliari destinati ad impedire il rovesciamento dei supporti sono detti canapi d'ormeggio od anche di ritegno.

La tensione T_r nel canape o catena di ritegno si ottiene immediatamente osservando che sotto la sua azione il punto B (oppure il punto A) (*Fig. 120^a, tav. XXIV*) deve essere in equilibrio, quindi, detto β l'angolo che essa fa coll'orizzonte

$$T_r \cos \beta = T_m \cos \alpha_m$$

da cui

$$T_r = \frac{\cos \alpha_m}{\cos \beta} T_m = \frac{\cos \alpha_m}{\cos \beta} \sqrt{(pc)^2 + \left(\frac{pc^2}{2f}\right)^2} = \frac{pc^2}{2f \cos \beta} \quad (83)$$

e quindi l'area resistente A_r

$$A_r = \frac{T_r}{R_a} = \frac{\cos \alpha_m \sqrt{(pc)^2 + \left(\frac{pc^2}{2f}\right)^2}}{R_a' \cos \beta} = \frac{pc^2}{2R_a' f \cos \beta}.$$

Se in vicinanza all'appoggio del ponte sospeso esiste un terreno roccioso compatto allora il canape di ritegno viene ancorato al medesimo mediante speciali disposizioni, che non è il caso di descrivere qui in modo particolareggiato. In via generale può dirsi che esso viene attaccato a robuste piastre di ghisa, oppure a verghe metalliche riunite ed incastrate con muratura alla roccia facendo sovente uso di vòlte rovescie per ripartire meglio la pressione. Se in vicinanza all'appoggio non esiste un terreno compatto e tale da prestarsi ad un ormeggio conveniente allora bisogna crearlo artificialmente costruendo un masso di muratura,

che abbia dimensioni sufficienti. L'importanza di questo masso viene facilmente determinata dall'osservare che esso deve eliminare non solo, ma deve anche essere capace di sviluppare reazioni verticali ed orizzontali superiori in un dato rapporto γ alle componenti verticali ed orizzontali di T_r . Per l'equilibrio basterebbe che fosse $\gamma = 1$ ma allora si avrebbe una condizione di equilibrio instabile: ritenendo che gli sforzi reali non possano mai superare del 50 % quelli previsti, gli ingegneri sogliono fissare come condizione di stabilità che γ abbia un valore compreso fra 1,50 e 2,10. Sia V il volume del masso di muratura, ρ la sua densità, a e b i lati della sua base, h la sua altezza, P' il suo peso, ϕ il coefficiente d'attrito fra terra e muratura: in base alle cose esposte superiormente perchè la costruzione sia stabile dovranno essere verificate le due relazioni seguenti

$$P' = \gamma T_r \sin \beta \qquad \phi P' = \gamma T_r \cos \beta$$

od anche

$$\rho \cdot a \cdot b \cdot h = \gamma \sqrt{(pc)^2 + \left(\frac{pc^2}{2f}\right)^2} \cos \alpha_m \tan \beta = \gamma \frac{pc^2}{2f} \tan \beta$$

$$\phi \cdot \rho \cdot a \cdot b \cdot h = \gamma \sqrt{(pc)^2 + \left(\frac{pc^2}{2f}\right)^2} \cos \alpha_m = \gamma \frac{pc^2}{2f}$$

Le incognite della questione essendo tre a , b , h , esiste un'infinità di soluzioni, cosa utilissima in pratica poichè così l'ingegnere, in relazione alle necessità costruttive, può assumere pel masso quell'altezza h oppure quella lunghezza o larghezza che più gli convengono.

Per la risoluzione di vari problemi interessa all'ingegnere di conoscere la lunghezza del canape e quella complessiva delle aste di trasmissione; la risoluzione della prima questione importa la somma delle lunghezze s_k dei vari tronchi k , $k+1$

$$\begin{aligned} s_k &= \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \\ &= \sqrt{(\Delta x_k)^2 + \left(\frac{f}{c^2}(x_k^2 + 2x_k \Delta x_k + \Delta x_k^2) - \frac{f}{c^2}x_k^2\right)^2} = \\ &= \sqrt{\Delta x_k^2 + \frac{f^2}{c^4}(2x_k \Delta x_k + \Delta x_k^2)^2}. \end{aligned}$$

Per la risoluzione poi della seconda questione è necessario determinare la somma delle lunghezze delle varie aste, che indicheremo con s' , mentre rappresenteremo con s_k' la lunghezza dell'asta qualsiasi corrispondente al nodo k^{esimo} . Se si sceglie per asse delle x una retta orizzontale passante pel punto più basso O del canape e se tutti i punti d'attacco dei traversi sono sopra un'orizzontale AB distante y_0 da O (*Fig. 121^a, tav. XXV*) s_k' sarà eguale alla y_k del nodo k aumentata della costante y_0 . Se poi i punti d'attacco delle aste coi traversi sono situati sopra una curva convessa verso l'alto e tangente in O' alla $A_1'B_1'$ (*Fig. 122^a, tav. XXV*) allora s_k' è eguale alla somma precedente aumentata dall'ordinata y_k' del punto corrispondente della linea dei punti d'attacco preso rispetto ad $A_1'B_1'$.

Pei bisogni che si possono presentare agli ingegneri in generale è sufficiente calcolare la lunghezza dell'arco di parabola nel quale sono inscritti i vertici del poligono di sospensione, quindi la lunghezza dell'arco misurato a partire dal punto più basso O fino ad uno dei due punti d'attacco. Tale lunghezza si può ottenere integrando l'espressione analitica del differenziale dell'arco,

$$s = \int_{x=0}^{x=c} ds = \int_{x=0}^{x=c} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{x=0}^{x=c} \left\{ 1 + \left(\frac{2f}{c^2} x\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dx.$$

Nel caso dei ponti sospesi la catenaria soddisfa alle condizioni necessarie perchè $\frac{2f}{c^2} x$ possa essere considerata come una quantità molto piccola ($\frac{f}{c}$ varia da $\frac{1}{10}$ ad $\frac{1}{20}$ ed $\frac{x}{c}$ è sempre una frazione dell'unità) quindi la quantità $\left\{ 1 + \left(\frac{2fx}{c^2}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$ potrà essere sviluppata colla legge delle potenze di un binomio e si avrà una esattezza sufficiente per la pratica tenendo conto soltanto dei primi tre od anche solo dei primi due termini (*). Accettando questa ap-

(*) RÉSAL osserva che valutando la lunghezza del canape del ponte sospeso di Brooklin, nel quale $2c = 487$ metri ed $f = 36$ metri, colla formola

$$s = c \left(1 + \frac{2}{3} \left(\frac{f}{c}\right)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{f}{c}\right)^4 \right)$$

si commette un errore sulla lunghezza reale, che non supera un centimetro (RÉSAL, *Ponts métalliques*, vol. I, pag. 224).

prossimazione, vincolata alla condizione che $\frac{2fx}{c^2}$ abbia un valore molto piccolo, si ottiene

$$s = \int_{x=0}^{x=c} \left\{ 1 + \left(\frac{2fx}{c^2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dx = \int_{x=0}^{x=c} \left(1 + \frac{2f^2}{c^4} x^2 - \frac{2f^4 x^4}{c^8} \right) dx =$$

$$= \left\{ x + \frac{2f^2 x^3}{3c^4} - \frac{2f^4 x^5}{5c^8} \right\}_0^c = c \left(1 + \frac{2}{3} \left(\frac{f}{c} \right)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{f}{c} \right)^4 \right)$$

e con più larga approssimazione trascurando $\left(\frac{f}{c} \right)^4$ in confronto di $\left(\frac{f}{c} \right)^2$

$$s = c \left(1 + \frac{2}{3} \left(\frac{f}{c} \right)^2 \right).$$

Se nel canape di sospensione avviene un allungamento od accorciamento uniforme dovuto ad una variazione di temperatura è facile determinare la freccia f' che in seguito al medesimo prenderà la catenaria, e quindi di quanto si alza od abbassa il piano del ponte nel suo punto di mezzo per effetto di una variazione di temperatura da t'' a t' gradi. Se con ε si indica il coefficiente di dilatazione per metro e per grado, la lunghezza s del mezzo canape $OB = OA$ diventerà

$$s_1 = s \{ 1 + \varepsilon (t' - t'') \}.$$

Ma per la relazione trovata precedentemente fra la freccia f' la semicorda c e la lunghezza dell'arco di catenaria deve essere

$$s_1 = s (1 + \varepsilon (t' - t'')) = c \left(1 + \frac{2}{3} \left(\frac{f'}{c} \right)^2 \right)$$

quindi

$$f' = c \sqrt{\frac{3}{2} \{ s (1 + \varepsilon (t' - t'')) - c \}}.$$

La lunghezza complessiva s' delle aste di trasmissione si può avere esattamente nel modo seguente. Consideriamo (*Fig. 121^a, tav. XXV*) l'asse delle ascisse tangente al vertice della parabola, allora l'equazione dei vertici del poligono di sospensione quando i traversi sono tutti equidistanti ed il punto O cade in un vertice del poligono stesso è data dalla (81)

$$y_k = \frac{f\lambda^2}{c^2} k^2 = \frac{f}{c^2} \frac{c^2}{m^2} k^2 = \frac{f}{m^2} k^2$$

quindi per la metà del ponte

$$\begin{aligned} S' &= \sum_0^m y_k = \frac{f}{m^2} \sum_0^m k^2 = \frac{f}{m^2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + \dots + m^2) = \\ &= \frac{f}{m^2} \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} = \frac{f}{6m} (m+1)(2m+1). \end{aligned}$$

Alle volte il piano del ponte invece che essere rappresentato da un piano orizzontale ha la forma di un cilindro a direttrice parabolica con asse verticale ed il vertice O' in corrispondenza del mezzo del ponte (*Fig. 122^a, tav. XXV*). Se si indica con y_0 la lunghezza OO' , con f_1 la freccia della parabola inferiore e con y' le ordinate della linea dei punti d'attacco rispetto ad una orizzontale passante pel punto O' , la lunghezza complessiva s' delle aste di trasmissione è data da

$$\begin{aligned} s' &= 2 \sum_1^n (y + y_0 + y') = 2 \left\{ m y_0 + \frac{(m+1)(2m+1)}{6m} f + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(m+1)(2m+1)}{6m} f' \right\}. \end{aligned}$$

Se il punto O non cade in un vertice ma bensì nel mezzo intervallo λ , allora la formola precedente cade in difetto e bisogna calcolare separatamente la lunghezza delle varie ordinate e sommarle per avere la lunghezza totale delle aste di trasmissione, oppure applicare la formola seguente:

$$s' = \sum_{k=1}^{k=m} s'_k = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{f}{(2m-1)} (2k-1)^2 = \frac{f}{2m-1} \sum_{k=1}^{k=m} (2k-1)^2.$$

Le formole trovate superiormente permettono di determinare la tensione T_k che agisce in un tronco qualsiasi $k, k+1$ del poligono di sospensione tenendo conto del peso proprio del canape e delle aste d'attacco. Siano ρ e ρ' le densità dei materiali usati nel canape e nelle aste di trasmissione, ω l'area incognita della sezione resistente del canape, ω' l'area nota della sezione resistente delle aste ($T' = R\omega'$) s ed s' la lunghezza totale del canape e delle aste. Il peso p'' che deve sopportare il canape si comporrà del peso p trasmesso dalle aste più il peso proprio delle aste stesse

$\frac{\rho' \omega' s'}{c}$ ragguagliato per metro corrente di ponte, più quello del canape $\frac{\rho \omega s}{c} = \frac{2 \rho \omega s}{l}$ pure ragguagliato alla stessa unità di misura, per cui sarà

$$p'' = p + \frac{\rho \omega s}{c} + \frac{\rho' \omega' s'}{c}$$

dalla formola

$$R\omega = T_k = \frac{p x_k}{\text{sen } \alpha_k}$$

si ricava

$$R\omega = T_k = \frac{p'' x_k}{\text{sen } \alpha_k} = \frac{p x_k + \frac{\rho \omega s}{c} x_k + \frac{\rho' \omega' s'}{c} x_k}{\text{sen } \alpha_k}$$

se si pone $x_k = c$ si ottiene

$$(R \text{ sen } \alpha_k - s \rho) \omega = p c + s' \omega' \rho'$$

da cui

$$\omega = \frac{p c + s' \omega' \rho'}{R \text{ sen } \alpha_k - s \rho}$$

Finora abbiamo considerato il carico uniformemente distribuito sul solaio del ponte; in realtà sul medesimo si possono muovere anche carichi isolati, sotto l'azione dei quali le aste di trasmissione subiscono il massimo sforzo di trazione ed il canape del ponte si deforma disponendosi secondo la forma conveniente all'equilibrio per ogni posizione del carico, qualora il solaio del ponte si supponga completamente cedevole e flessibile. Non potendosi fare astrazione del peso proprio del solaio del ponte il

canape si disporrà secondo due archi di parabola, che non è difficile determinare ricordando che la lunghezza del canape è nota ed invariabile. Non svilupperemo questa ricerca perchè essa non si collega direttamente colle formole di resistenza ed elasticità per la sollecitazione a tensione semplice, ed in questo paragrafo ci siamo appunto prefissi di fare un'applicazione delle medesime. Avvertiamo però che tale studio si può trovare svolto completamente nei libri che trattano più specialmente del calcolo e della costruzione dei ponti sospesi; fra gli altri citiamo: RÉSAL, *Ponts métalliques*, volume I, capitolo IV. Attualmente poi questa ricerca perde molto della sua importanza poichè nelle costruzioni moderne si accentua sempre più la tendenza a ricorrere a speciali espedienti per irrigidire i ponti sospesi, cioè per diminuire le loro deformazioni per l'azione di carichi isolati in moto. Ciò si ottiene con canapi sussidiari che partendo dalle sponde vanno ad attaccarsi a punti del solaio; oppure rendendo solidali i varî traversi riunendoli con travi longitudinali capaci di resistere ai momenti flettenti, e quindi atti ad impedire gli spostamenti relativi dei medesimi, o finalmente rendendo rigido l'apparecchio portante in modo che esso possa conservare la propria forma anche quando la curva od il poligono delle risultanti non coincide colla curva o col poligono formato dagli assi delle membrature che lo compongono.

È evidente che in questi due ultimi casi la natura ed il modo di resistere del sistema cambiano completamente. Oltre a sforzi di tensione si debbono considerare anche momenti flettenti e sforzi di compressione per cui lo studio di una simile costruzione esce dal campo delle applicazioni della tensione semplice ed avremo occasione di occuparcene quando saranno discusse le questioni relative alla resistenza degli archi a tre cerniere e delle travature combinate.

Se nella risoluzione di un ponte sospeso invece che al calcolo si vuole ricorrere a procedimenti geometrici, essa riesce estremamente semplice poichè in ultima analisi si riduce a costruire un poligono funicolare collegante un dato sistema di forze colla condizione d'avere come retta di chiusura una retta data e come base del poligono delle forze una lunghezza determinata. Si disegni in scala schematicamente il ponte rappresentando il solaio, e quindi anche la linea d'attacco delle aste di trasmissione colla linea $A'B'$ (*Fig. 123°, tav. XXV*) e si segnino gli assi vv' ($v_1 v_1' \dots v_2 v_2' \dots v_k v_k' \dots$) delle varie aste di trasmissione, nonchè i due punti d'attacco A e B ed un punto O determinato dal valore che si fissa per la freccia in quel punto; se la costruzione è simme-

trica, come appunto si suppone in questo caso, il punto O è il vertice della catenaria di sospensione. Sopra una retta indefinita $\beta_0\beta_n$ parallela alla direzione delle vv' si portino tanti segmenti $\beta_0\beta_1, \beta_1\beta_2, \beta_2\beta_3, \dots$ equipollenti ordinatamente agli sforzi $P_1, P_2, P_3, \dots$ agente nelle aste $v_1v_1', v_2v_2', v_3v_3', \dots$ e scelto un polo arbitrario C_1 si deduca un poligono funicolare collegante le forze $P_1P_2P_3\dots$ il quale intersechi in A_1 e B_1 le verticali (le rette parallele alle vv') passanti rispettivamente per A e per B . La retta A_1B_1 è la retta di chiusura del poligono funicolare e se da C_1 si conduce C_1D parallela ad A_1B_1 e C_1D_1 normale a $\beta_0\beta_{m-1}$, β_0D è la reazione verticale nel punto A , $D\beta_{m-1}$ la reazione verticale nel punto B e C_1D_1 rappresenta alla scala delle forze la tensione orizzontale H_1 corrispondente al poligono funicolare tracciato. È noto che i poligoni funicolari che collegano uno stesso sistema di forze parallele sono figure affini fra loro quando hanno la stessa retta di chiusura e che il prodotto della tensione orizzontale H_1 per l'ordinata compresa fra i lati del poligono funicolare η_1 per una data sezione è costante qualunque sia la base di riduzione H_1 ed il poligono funicolare corrispondente. Se si prolunga OE in O_1E_1 e si indicano con H la tensione orizzontale e con η le ordinate rispetto alla retta di chiusura corrispondenti al poligono d'equilibrio del canape o catena di sospensione, adempiendo alla condizione che esso passi per tre punti determinati, cioè i due punti d'attacco del canape e quello che viene determinato dal fatto che in una data sezione (ordinariamente quella di mezzo) è noto il valore dell'ordinata η del poligono, poichè in pratica è dato *a priori* o viene assunto dall'ingegnere il valore della freccia che dovrà avere il canape, per la proprietà anzidetta $OE \times H = O_1E_1 \times H_1$ da cui si ricava

$$H = \frac{O_1E_1}{OE} H_1 = \frac{\eta_1}{\eta} H_1.$$

Se si prende $D_1D' = \eta$, $D_1D_1' = \eta_1$ e si tira $D'C_1$ e per D_1' si conduce $D_1'C_1'$ parallela a $D'C_1$, dai due triangoli simili C_1D_1D' , $C_1'D_1D_1'$ si ricava

$$\frac{D_1D'}{D_1C_1} = \frac{D_1D_1'}{D_1C_1'} \quad \text{ossia} \quad D_1C_1' = \frac{D_1D_1'}{D_1D'} D_1C_1 = \frac{\eta_1}{\eta} H_1$$

cioè D_1C_1' rappresenta alla scala delle forze la tensione orizzontale H cercata. Se si conduce per D una retta parallela alla AB

congiungente i punti d'attacco e si prolunga fino ad incontrare in C la $C_1'C$ parallela alla $\beta_0\beta_{m-1}$ e preso C come polo si costruisce un secondo poligono funicolare partendo da uno dei punti d'attacco, questo rappresenterà il poligono d'equilibrio che prenderà il canape di sospensione. Infatti la retta di chiusura deve essere parallela a CD quindi coincide colla AB avendo con essa un punto comune, inoltre le ordinate η di questo poligono funicolare hanno colle ordinate η_1 del poligono precedente il rapporto $\frac{H_1}{H}$.

I raggi $C\beta_0, C\beta_1, C\beta_2, C\beta_3, \dots$ danno alla scala delle forze le tensioni agenti nei varî tronchi del poligono di sospensione, e la formola di resistenza $T=RA$ permette di calcolare per ciascuno di essi l'area resistente. La lunghezza poi del canape di sospensione o dei varî tronchi del medesimo, nonchè quella delle varie aste, si ottiene graficamente misurandole sul disegno schematico del ponte a norma della scala impiegata. Questo processo è generale qualunque sia la posizione dei punti d'attacco A e B ed indipendente dalla natura dei carichi agenti sul ponte: servendosi di una curva d'errore permette anche di determinare approssimativamente la deformazione prodotta nel canape da un carico isolato. Basta per questo tracciare alcuni poligoni funicolari corrispondenti alla data ipotesi di carico, misurare la lunghezza complessiva dei loro lati e portarla come ascissa sopra un asse considerando come ordinata il valore della tensione orizzontale corrispondente; riunendo le estremità delle ordinate con una curva a mano si avrà facilmente in via di approssimazione la tensione H che corrisponde alla lunghezza nota del canape.

Si è già osservato precedentemente che in pratica i punti A e B sono di livello, che il carico è uniformemente distribuito per metro corrente di proiezione orizzontale di catenaria, la quale in tal caso diventa un arco di parabola. Ciò risulta oltrechè dalla discussione precedente, dalle relazioni proiettive esistenti fra poligono delle forze e poligono funicolare; infatti la punteggiata sezione del fascio parallelo delle forze è simile alla punteggiata sezione del fascio proiettante il poligono delle forze. Finalmente in pratica è data l'ordinata massima OE nel punto di mezzo del ponte, che prende il nome di freccia della catenaria o del canape di sospensione. Con questi dati, indipendentemente dalle proprietà del poligono funicolare e di quello delle forze, si può tracciare la catenaria in cui sarà inscritto il poligono di sospensione mediante i procedimenti noti pel tracciamento della parabola. Costruita la parabola (*Fig. 124^a, tav. XXV*) si prenda $OO''=OE$ e si tirino $O'A$ e $O'B$, queste saranno le tangenti alla

parabola in A ed in B , indi si conduca in direzione parallela alle forze una retta qualsiasi e sulla medesima si prenda un segmento $\beta_0 \beta_m$ rappresentativo di tutto il carico $p l$ esistente sul ponte. Dagli estremi $\beta_0 \beta_m$ si conducano due rette $\beta_0 C$ e $\beta_m C$ rispettivamente parallele ad $A O''$ e $B O''$ ad intersecarsi in C e per C si tiri CD parallela ad AB , e quindi (in questo caso) normale $\beta_0 \beta_m$, CD rappresenta alla scala delle forze la tensione orizzontale agente nel canape di sospensione. Se si divide poi il segmento $\beta_0 \beta_m$ in $2r$ parti uguali e si tirano i raggi $C1, C3, C5, C7, \dots C \left(\frac{2k-1}{2} \right) \dots$

questi rappresentano alla scala delle forze le tensioni agenti nei varî tronchi del canape di sospensione, ed i segmenti $13; 3,5; 5,7, \dots (2k+1)(2k+3) \dots$ gli sforzi agenti nelle varie aste di trasmissione ed il numero d'ordine delle medesime s'ottiene sommando i due indici corrispondenti agli estremi del segmento considerato e dividendo per quattro. Applicando la formola di resistenza alla tensione semplice $T = RA$ si potranno calcolare le aree delle sezioni resistenti delle varie membrature, e le lunghezze del canape di sospensione e delle aste di trasmissione potranno essere dedotte graficamente per misura diretta fatta sul disegno.

25. Solidi ad asse rettilineo soggetti a compressione. — Se in una travatura ad asse rettilineo agiscono forze dirette secondo l'asse e con senso concorrente rispetto ad una sezione trasversale compresa fra i loro punti d'applicazione, si dice che essa è soggetta a compressione. È già stato notato al paragrafo 20, che nel caso della sollecitazione a compressione nei solidi ad asse rettilineo, l'esperienza ha dimostrato che si possono presentare due casi ben distinti:

a) Il solido si deforma per semplice accorciamento od avvicinamento delle due sezioni trasversali, le quali restano parallele a se stesse;

b) Il solido si deforma dando luogo ad un accorciamento e contemporaneamente ad un incurvamento per inflessione laterale, in guisa che le sue sezioni trasversali, oltre all'avvicinarsi, ruotano anche intorno ad un asse giacente nel loro piano.

Nel primo caso, il fenomeno è comparabile in tutto a quello che avviene quando un solido ad asse rettilineo è soggetto a tensione semplice, e solo le forze e le deformazioni hanno direzione contraria, quindi vanno prese con segno negativo. Nel secondo caso invece la sezione resistente, oltre ad una forza normale uguale e contraria alla forza assiale X , sviluppa anche un momento resistente dovuto alle reazioni molecolari agenti con intensità diversa nei singoli punti della sezione in causa della rotazione da essa subita, e quindi fra le caratteristiche di sollecitazione, oltre

alla forza assiale, bisogna annoverare anche un momento flettente. L'esperienza dimostra che l'inflessione laterale incomincia a manifestarsi quando la lunghezza del solido diventa notevole rispetto alla minima dimensione della sua sezione trasversale più piccola, e si accentua sempre più, quanto più grande è la lunghezza stessa, finchè, aumentando lo sforzo fino a produrre la rottura, questa, se la lunghezza è molto grande, avviene manifestamente per effetto della inflessione laterale. L'incurvamento della travatura essendo tanto più sensibile, quanto è maggiore la lunghezza relativa del corpo, cioè il rapporto θ fra la sua lunghezza l e la minima dimensione δ della sua sezione trasversale più piccola, è naturale che sia difficile assegnare un limite preciso per la manifestazione dei due diversi modi di deformazione, ma che invece si passi per gradi dall'uno all'altro. Dalla media delle esperienze sembra che si possa concludere in via generale e come risultato di prima approssimazione, che fino a che θ è minore di 5 non si abbia nei metalli altro che compressione semplice, od almeno, se incurvamento vi è, questo non è apprezzabile.

Quando $\theta = \frac{l}{\delta}$ oscilla fra 5 e 20 oppure 30, la compressione e l'inflessione laterale, se si aumenta lo sforzo fino alla rottura del solido, si manifestano insieme e successivamente, con importanza diversa, ma sempre nettamente apprezzabili. Finalmente, se θ è superiore a 30, allora, nella rottura, l'incurvamento per inflessione laterale è manifestamente preponderante.

L'incurvamento per effetto della compressione assiale comincia ad essere sensibile, pel legno, quando θ supera 7 od 8, e per la muratura e le pietre naturali quando θ è superiore a 10 (Vedi Parte I, cap. VII, *Risultati delle esperienze*).

L'incurvamento nelle travature soggette a sforzi assiali di compressione, che alcuni indicano anche col nome speciale di *pressoflessione*, ha una grande importanza pel costruttore, poichè cambia completamente le condizioni di resistenza del solido; le forze molecolari agenti nelle varie sezioni non sono più uniformemente distribuite, ma assumono intensità variabili da punto a punto e non può essere trascurato in modo alcuno. Conveniamo d'indicare con C lo sforzo assiale X in una sezione qualsiasi, quando è negativo e produce compressione; se tale sforzo fosse diretto assolutamente secondo l'asse rettilineo di un solido isotropo a sezione simmetrica rispetto a due assi normali giacenti nella sezione stessa, razionalmente ed in via puramente astratta non si comprenderebbe come esso dovesse essere soggetto a deformazioni prodotte da una inflessione laterale, poichè non vi è alcuna sezione

rispetto alla quale abbia luogo un momento flettente. L'esperienza però prova che nelle travature ad asse rettilineo, fatte colla maggiore cura e con materiale omogeneo, tanto quanto è sperabile ottenere in pratica, soggette a sforzi di compressione usando tutte le precauzioni possibili perchè la sollecitazione avvenga secondo l'asse, l'incurvamento laterale per inflessione può avvenire ed avviene realmente, tutte le volte che la lunghezza libera del solido è sufficientemente grande e lo sforzo sollecitante abbastanza importante. Non si può dire a priori con precisione, quale sia la causa dell'incurvamento per inflessione laterale delle travature compresse; si possono però indicare varie circostanze, le quali tutte possono, in grado più o meno elevato, concorrere a produrre la pressoflessione.

Osserviamo in primo luogo, che anche se il solido resistente a compressione avesse forma regolarissima, e l'asse geometrico fosse perfettamente rettilineo, non si potrebbe concludere per questo che il luogo geometrico dei centri di gravità delle varie sezioni debba necessariamente essere esso pure rettilineo e coincidere coll'asse di figura, perchè in pratica non esiste la perfetta omogeneità ed isotropia della materia. La conseguenza immediata di questo fatto è, che anche nel caso della sollecitazione perfettamente assiale, si deve ritenere come molto probabile e quasi certo, che lo sforzo attivo C ha una determinata eccentricità e_1 , rispetto alla linea dei centri di gravità delle varie sezioni. In secondo luogo, non bisogna dimenticare che è una cosa estremamente difficile realizzare in pratica una sollecitazione perfettamente assiale ed un'esattezza tale di costruzione che l'asse del solido reale coincida con quello immaginato dall'ingegnere e generato dal movimento della figura generatrice tipo. Gli sforzi esterni sono trasmessi alla travatura resistente pel contatto con altri corpi, oppure anche per mezzo di speciali collegamenti (chiarvarde, chiodi ribaditi, ecc.), e ciò particolarmente quando trattasi di membrature formanti parti di una costruzione complessa o composta. La lavorazione per la fabbricazione di una trave, può dare un'esattezza corrispondente al limite delle quantità ritenute usualmente apprezzabili nei lavori di disegno, misura, taglio e messa in opera; non si potrà in generale oltrepassare questo limite senza cure speciali, che si tradurranno in un aumento sensibile di spesa. In ogni caso poi, non si può mai escludere l'esistenza di piccoli errori o meglio inesattezze, che per importanza il più delle volte sono comparabili alle deformazioni elastiche. Da queste considerazioni risulta che nei solidi soggetti a compressione sotto l'azione di forze assiali l'ingegnere deve ammettere

la probabilità, anzi la quasi certezza dell'esistenza d'una leggera eccentricità ($e_2 + e_3$) nello sforzo sollecitante, rispetto al centro di gravità delle varie sezioni.

Tale eccentricità è dovuta in parte (e_2) alla difficoltà di applicare le forze esterne alla travatura, in modo che la sollecitazione avvenga secondo l'asse teorico di figura, ed in parte (e_3) alle inevitabili piccolissime inesattezze costruttive inferiori al limite delle quantità, che per comune consenso, in pratica, si ritengono come apprezzabili. In esperienze di gabinetto, il valore delle eccentricità $e_2 + e_3$, può certamente essere notevolmente ridotto, e potrà anche in certi casi discendere fin quasi allo zero od a una quantità comparabile ad esso, cioè trascurabile rispetto ai valori limiti delle quantità ritenute apprezzabili nei lavori correnti; ma non si può sperare ragionevolmente che questo risultato possa essere raggiunto in via ordinaria nell'esercizio dell'arte dell'ingegnere. A queste cause di probabile eccentricità degli sforzi, rispetto al centro di gravità delle sezioni nella sollecitazione a compressione, le quali di loro natura hanno carattere di generalità e permanenza, bisogna aggiungerne altre affatto accidentali, che però si verificano frequentemente e possono essere causa che incominci la flessione laterale. Fra queste si possono annoverare le deviazioni dell'asse, prodotte da un incurvamento iniziale per urto durante il trasporto e la messa in opera, l'azione di carichi secondari agenti normalmente all'asse, quali potrebbero essere l'azione del vento, oppure le scosse e le vibrazioni prodotte dal movimento dei carichi accidentali. Finalmente una certa influenza deve pure essere concessa anche alle deformazioni secondarie, delle quali si suole tener poco o nessun conto nello studio dei problemi costruttivi, le dilatazioni trasversali, lo scorrimento degli elementi materiali a contatto, ecc., non avranno grande importanza rispetto alla resistenza complessiva della costruzione, ma possono senza alcun dubbio avere influenza locale modificando le deformazioni e quindi gli sforzi molecolari in punti determinati. Solo in casi affatto eccezionali l'eccentricità e , somma delle varie eccentricità provenienti dalle cause superiormente enumerate, potrà essere costantemente nulla; ciò avverrà quando fra le variazioni di forma ed omogeneità, e fra la inesattezza della esecuzione materiale della travatura, esistano tali compensi, che il centro di gravità reale viene a coincidere col punto, nel quale la risultante delle forze esterne alla sezione considerata incontra la sezione stessa, ossia col centro di pressione.

Dalle cose esposte risulta che nella sollecitazione prodotta da sforzi assiali agenti sopra solidi ad asse rettilineo, oltre allo sforzo

normale X , bisogna tener presente anche la esistenza eventuale probabilissima e quasi certa di un momento M di flessione, dato dal prodotto della forza X per l'eccentricità $e = e_1 + e_2 + e_3$, avvertendo che il braccio di leva e ha una lunghezza comparabile come importanza a quella delle deformazioni elastiche e quindi queste possono modificarne sensibilmente il valore. Nei problemi riflettenti la sollecitazione a flessione retta per l'azione di forze normali all'asse della travatura, i bracci di leva prima e dopo la deformazione, si suppongono uguali per le varie forze. Ciò può farsi ordinariamente in quel caso, perchè le deformazioni elastiche, per ipotesi, sono infinitamente piccole rispetto alle dimensioni del corpo resistente, e quindi lo sono anche rispetto ai bracci di leva delle forze, le quali in generale hanno valori comparabili a quelle. Operando in questo modo si commette un errore, però è già stato notato nella *Teoria generale della resistenza dei materiali*, che tale errore è trascurabile per la ragione anzidetta e che non può avere importanza apprezzabile sui risultati del calcolo. Infatti esso potrebbe modificarsi soltanto in una proporzione piccolissima, influenzando sulle ultime cifre dei numeri, che rappresentano le deformazioni e gli sforzi unitari, mentre notoriamente l'esattezza richiesta dall'ingegnere s'arresta alle prime cifre dei numeri stessi. Questo procedimento non è più permesso quando si considera la sollecitazione prodotta da sforzi assiali; in tal caso il braccio di leva della forza sollecitante è uguale all'eccentricità e , che di sua natura è comparabile alle deformazioni elastiche e quindi non è più permesso trascurare l'effetto di queste ultime, senza esporsi al pericolo di cadere in errori notevoli. Nel caso della sollecitazione a tensione il momento di eccentricità ha ordinariamente segno diverso dal raggio di curvatura del luogo geometrico dei centri di gravità delle sezioni, ed in generale tende ad aumentarlo; in ogni caso poi, esso ha per effetto di produrre una deformazione tale, che avvicina il centro di tensione al centro di gravità, quindi diminuisce l'eccentricità e per conseguenza il valore del momento flettente. Il momento della tensione T , ordinariamente molto piccolo in origine, per effetto della deformazione elastica diventa sempre più piccolo, ed in questo caso, se l'eccentricità non aveva inizialmente un valore notevole, si può essere sicuri di non commettere alcun errore sensibile non tenendo alcun conto del momento d'eccentricità. Nel caso della compressione si arriva ad un risultato affatto opposto; il momento $M = Ce$ ha ordinariamente lo stesso segno del raggio di curvatura della linea, luogo geometrico dei centri di gravità delle sezioni trasversali,

e tende a diminuirlo; in ogni caso poi esso ha per effetto di produrre una deformazione elastica, che aumenta la distanza esistente inizialmente fra il centro di pressione ed il centro di gravità di ogni sezione. Per questo fatto, l'eccentricità aumenta producendo un aumento corrispondente nel momento d'inflessione, il quale, alla sua volta, ha per conseguenza immediata un incremento nella deformazione, e quindi anche nell'eccentricità e . Il solido soggetto a compressione si trova in queste condizioni se così è lecito esprimerci, in una specie di equilibrio instabile, la deformazione elastica è causata d'incremento sensibile nel valore della caratteristica di sollecitazione a flessione, e se anche inizialmente il momento di eccentricità non ha valore notevole, non è lecito trascurarlo, poichè esso può assumere importanza durante la deformazione; il non tenerne conto, esporrebbe facilmente a gravi errori. Quanto al valore iniziale del momento di eccentricità, mancano criterî sufficienti per poterlo assegnare, dipendendo esso dalla natura del materiale e dalle condizioni di fabbricazione e messa in opera del medesimo. Solo in via ipotetica sembra che si possa asserire che il valore dell'eccentricità presumibilmente aumenti e sia in relazione colla maggior lunghezza della travatura soggetta a compressione. Essa poi può anche dipendere dalla maggiore complicazione od indeterminatezza degli sforzi trasmessi al solido per mezzo dei collegamenti che lo riuniscono alle altre parti della costruzione. Finalmente si può asserire che l'importanza della freccia di deformazione è tanto più grande quanto maggiore è la lunghezza relativa, ossia quanto più grande è il valore del rapporto θ corrispondente al corpo che si considera.

Lo studio dei solidi soggetti a compressione richiede dunque due trattazioni diverse, una fatta nell'ipotesi della compressione semplice, l'altra in quella che la compressione sia accompagnata da inflessione laterale. La prima si verifica sempre nei solidi di lunghezza molto piccola, la seconda invece può verificarsi appena la lunghezza diventa notevole rispetto alla minima dimensione della sezione trasversale più piccola. L'incurvamento prodotto dalla pressoflessione è un fenomeno complesso e non riescirebbe facile istituire sul medesimo un'analisi razionale partendo da ipotesi speciali sul valore delle cause che lo producono, perchè regna troppa incertezza sulle medesime e sul loro valore probabile. Sembra più naturale ammettere la possibilità non solo, ma anche la certezza della pressoflessione appena il rapporto $\theta = \frac{l}{\delta}$ abbia valore notevole come una verità di ordine fisico, sperimentalmente dimostrata, e cercare le leggi che la governano. Ciò è quanto dire che am-

messo che per una causa qualunque si sia verificato un incurvamento nel solido si cerca quale è il valor limite della forza che può mantenere inflessa la trave, valore al disotto del quale l'asse del solido si mantiene rettilineo ed anche incurvato artificialmente riprende la posizione primitiva, la natura della curva secondo la quale si dispone l'asse longitudinale del solido, quali aumenti producono nella freccia di inflessione determinati incrementi della forza sollecitante e finalmente quali siano le condizioni da soddisfare in pratica per avere solidi compressi perfettamente stabili. Si è già avvertito che la pressoflessione aumenta d'importanza col valore del rapporto $\theta = \frac{l}{\delta}$; mentre è trascurabile per piccoli valori

di θ , $\theta < 5$ pei metalli, $\theta < 8$ pei legnami e $\theta < 12$ per le mura-
ture e pietre, quindi l'ingegnere nei calcoli di resistenza pei soli-
di soggetti a compressione non dovrà mai dimenticare la forma
complessa del fenomeno, e volta per volta dovrà esaminare accu-
ratamente se sia il caso di tener conto soltanto della compressione
semplice, oppure delle leggi che regolano la compressione accom-
pagnata da flessione laterale.

26. Solidi soggetti a compressione semplice. — Lo studio della compres-
sione semplice per la natura della forza sollecitante e della defor-
mazione, che si riduce ad un avvicinamento delle varie sezioni con
movimento diretto secondo l'asse e rimanendo parallele a se stesse,
non differisce e non può differire da quello della tensione semplice
altro che pel fatto che lo sforzo assiale X invece che essere positivo,
cioè diretto esternamente alla sezione (*Fig. 125^a, tav. XXV*) è nega-
tivo e quindi diretto contro la sezione stessa (*Fig. 126^a, tav. XXV*)
e che la deformazione, invece che una dilatazione nel senso del-
l'asse, è una condensazione od accorciamento secondo la stessa dire-
zione. Conveniamo di indicare con C lo sforzo assiale X quando esso
produce compressione, e conserviamo per la deformazione unitaria,
pel modulo di elasticità e pei coefficienti di stabilità e di rottura
gli stessi simboli usati studiando la sollecitazione a tensione sem-
plice avvertendo che quando interesserà di mettere in evidenza che
tali simboli si riferiscono più specialmente alla sollecitazione a com-
pressione li scriveremo aggiungendovi due apici in guisa che sarà
 i'' la condensazione od accorciamento unitario secondo l'asse
del solido misurato in un punto qualsiasi del medesimo

R'' lo sforzo normale unitario in un punto qualsiasi della
sezione resistente

R_n'' lo sforzo normale ammissibile come limite massimo perchè
non sia compromessa la stabilità ossia, come suol dirsi, il limite
dei carichi permanenti

R_e'' lo sforzo normale unitario corrispondente al limite di elasticità

R_s'' lo sforzo normale unitario corrispondente alla rottura del solido sotto l'azione di un carico morto, cioè senza azioni ripetute

E'' il modulo di elasticità alla compressione

$\frac{1}{n}$ e n rispettivamente il coefficiente di sicurezza e l'indice di stabilità. Gli stessi simboli saranno invece adoperati con un apice solo quando si vuol mettere in evidenza che si riferiscono alla sollecitazione a tensione, e senza alcun apice quando non si vuole fare alcuna particolare specializzazione intorno al modo di sollecitazione.

Esaminando i risultati delle esperienze fatte sulla resistenza dei vari materiali agli sforzi esterni ed alla rottura si vede che i coefficienti R ed E corrispondenti al caso della sollecitazione a compressione non sono uguali a quelli che si ottengono per la tensione. Le tavole riportate nel capitolo VII della Parte I (*Teoria generale della resistenza dei materiali*) danno pei vari materiali i valori di E e di R (*) tanto nel caso della resistenza a tensione, come in quello della resistenza a compressione. In via generale si può asserire che pel ferro la resistenza per unità superficiale alla rottura per compressione (R_s'') è inferiore a quella per tensione (R_s') di circa $\frac{1}{6}$ od $\frac{1}{7}$ in media del 15 %, e per l'acciaio dolce (ferro omogeneo, *flusseisen*) in media si può ritenere $\frac{R_s''}{R_s'} = \frac{9}{10}$, mentre invece per la ghisa R_s'' oscilla fra 5 e 7 volte R_s' , ed R_s' può ritenersi variabile fra 12 e 15 chilogrammi per millimetro quadrato, E'' differisce pochissimo dal valore di E corrispondente alla tensione E' . Pel legno non si possono dare rapporti medi generali perchè i vari coefficienti variano da essenza ad essenza, collo stato di secchezza, ecc., e lo stesso deve dirsi delle pietre naturali ed artificiali e delle murature, per le quali la resistenza a compressione varia colla natura e composizione del materiale non solo, ma anche da cava a cava, ed a seconda del modo di preparazione e messa in opera.

Malgrado queste differenze è invalsa l'abitudine fra gli ingegneri di non fare differenza fra R_s'' ed R_s' altrochè per quei ma-

(*) Vedi CLAUDEL, *Formules, tables et renseignements usuels*, 1892; — KIRKALDY DAVID, *Results of an experimental inquiry, ecc.*; — ed in generale tutti gli autori che trattano di resistenza dei materiali, ed i *Manuali* ad uso degli ingegneri costruttori.

teriali pei quali l'esperienza ha dato valori notevolmente diversi. Ciò introduce nei calcoli una ulteriore semplificazione ma anche una causa di errore; questa però non ha grande influenza in relazione al grado di esattezza, che si può sperare di raggiungere nell'assumere il valore del limite dei carichi permanenti, il quale non può essere che un valor medio. Pel ferro omogeneo e pel ferro saldato i costruttori sogliono ritenere $R_a'' = R_a' = R_a$ mentre invece per la ghisa abitualmente ritengono $R_a'' = \frac{5}{2} R_a'$ prendendo in generale R_a'' uguale a chilogrammi 5,00 per millimetro quadrato, ossia circa $\frac{1}{12}$ del carico di rottura, valore che corrisponde ad $\frac{1}{3}$ od $\frac{1}{2}$ dello sforzo R_e'' (*).

Pel legno come pel ferro si suole tenere $R_a'' = R_a' = R_a$ assegnando ad R_a il valore che corrisponde alla media dei risultati ottenuti sperimentalmente per l'essenza che si considera. Per le pietre poi la resistenza a compressione è molto diversa da quella a tensione ed è necessario tener distinto R_a'' da R_a' ; ciò però non introduce alcuna complicazione nei calcoli poichè è ben raro il caso che si debbano considerare pietre o murature resistenti a tensione.

Premesse queste considerazioni le formole pel calcolo del lavoro di deformazione e quelle di elasticità e resistenza, per quanto è stato detto in principio del numero, sono quelle che corrispondono al caso della sollecitazione assiale, nelle quali ai simboli generali bisognerà sostituire quelli corrispondenti al caso speciale della compressione. Esse quindi saranno

$$L = \int_0^l \frac{E'' A i''^2}{2} ds = \frac{1}{2} \sum E'' A i''^2 \Delta s$$

$$\Gamma = \int_0^l \frac{C^2}{2 E'' A} ds = \frac{1}{2} \sum \frac{C^2}{2 E'' A} \Delta s$$

$$\Lambda = \int_0^l \frac{C i''}{2} ds = \frac{1}{2} \sum C i'' \Delta s$$

(*) Il *Polizeipräsidium*, di Berlino accetta per la ghisa un coefficiente di resistenza a tensione uguale alla metà di quello ammesso per la compressione.

$$C = E'' A i''$$

$$C = R'' A$$

$$\lambda_k'' = \int_0^l \frac{C(C^k)}{E'' A} ds = \sum \frac{C(C^k)}{E'' A} \Delta s.$$

Queste formole permettono di risolvere tutti i problemi relativi alla sollecitazione a compressione semplice che si possono presentare al costruttore cioè la determinazione della sezione resistente, delle deformazioni e del lavoro elastico di deformazione. Come esempio risolveremo i problemi seguenti scelti fra quelli che maggiormente interessano all'ingegnere.

PROBLEMA 1°. — *Calcolo di un solido ad asse rettilineo sollecitato a compressione da forze agenti alle due estremità.*

Quando le forze esterne sono applicate alle estremità di una travatura ad asse rettilineo soggetta a compressione essa prende il nome di *colonna* se è disposta verticalmente, di *puntello* se ha direzione inclinata resistendo ad uno sforzo obliquo all'orizzonte e finalmente di *contraffisso* od anche semplicemente di barra compressa quando essa costituisce una delle membrature componenti una struttura composta. In generale i solidi che si trovano in queste condizioni hanno una lunghezza tale che non si può fare astrazione del pericolo della flessione laterale e bisogna assolutamente tenerne conto per calcolare la sezione resistente. Tuttavia sia che il corpo abbia realmente una lunghezza molto limitata rispetto alla minima dimensione della sezione trasversale più piccola, sia per prendere in esame isolatamente uno dei due modi di deformazioni, a cui può andar soggetto un solido compresso, si presenta spesso all'ingegnere di risolvere il problema enunciato.

Se si prescinde dal peso proprio lo sforzo C è costante lungo l'asse del solido, quindi dalla formola $C = R'' A$ si ricava $A = \frac{C}{R''}$,

cioè che l'area resistente deve avere un valore costante e così pure è costante l'accorciamento unitario i'' ; infatti esso è espresso da

$$i'' = \frac{C}{E'' A} \text{ in cui } C, E'', A \text{ esprimono quantità, che nel caso pre-$$

sente hanno tutte un valore costante per tutte le sezioni. Detto λ'' l'accorciamento totale subito dal solido ed l la sua lunghezza, dalle formole di elasticità e resistenza si ottengono i risultati

seguenti

$$\lambda'' = \int_0^l i'' ds = \int_0^l \frac{C}{E'' A} ds = \frac{C}{E'' A} \int_0^l ds = \frac{Cl}{E'' A}$$

e quindi

$$\frac{\lambda''}{l} = \frac{C}{E'' A} = i''$$

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l E'' A i''^2 ds = \frac{E'' A i''^2}{2} \int_0^l ds = \frac{E'' A \lambda''^2}{2 l^2} \int_0^l ds = \frac{1}{2} E'' A \frac{\lambda''^2}{l}$$

$$\Gamma = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{C^2}{E'' A} ds = \frac{C^2}{2 E'' A} \int_0^l ds = \frac{C^2 l}{2 E'' A}$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} \int_0^l C i'' ds = \frac{1}{2} C i'' \int_0^l ds = \frac{1}{2} C i'' l = \frac{1}{2} C \lambda''$$

$$\lambda'' = \int \frac{C(C')}{E'' A} ds = \frac{C}{EA} \int_0^l ds = \frac{Cl}{EA} = \frac{d\Gamma}{dC}$$

$$C = E'' A i'' = E'' A \frac{\lambda''}{l} = \frac{dL}{d\lambda''}$$

Dall'esame di queste formole risulta che nei contraffissi a sezione costante l'accorciamento unitario ha un valore costante ed eguale al rapporto fra l'accorciamento totale λ'' e la lunghezza primitiva l del solido, e che il lavoro di deformazione è la metà del lavoro esterno di sollecitazione $C\lambda''$ calcolato nell'ipotesi che C abbia intensità costante durante la deformazione stessa. Questi risultati sono affatto analoghi a quelli ottenuti al numero 21, studiando l'equilibrio di un tirante; se si considera quindi un contraffisso od una colonna soggetta ad uno sforzo C costante ed agente istantaneamente, la deformazione λ_1'' sarà doppia di quella cor-

rispondente allo stato di equilibrio λ_0'' . Infatti perchè si arresti il movimento di deformazione dovrà essere

$$C\lambda_1'' - \frac{1}{2}E''A \frac{\lambda_1''^2}{l} = 0$$

e poichè l'equazione d'equilibrio allo stato statico fornisce la relazione $C = EA \frac{\lambda_0''}{l}$ così dall'espressione precedente, sostituendo a C il suo valore, si ricava

$$\lambda_1'' = 2\lambda_0''.$$

La posizione nella quale si arresta il solido non corrispondendo a quella di equilibrio il corpo incomincerà immediatamente dopo a muoversi in senso inverso ripassando per le posizioni prima occupate, ed oscillerà intorno alla posizione d'equilibrio finchè sia stata trasformata od assorbita dalle forze passive tutta la sua energia dando luogo al fenomeno delle vibrazioni.

PROBLEMA 2°. — *Determinare lo spessore da assegnare ad un tubo cilindrico che ha per sezione una corona circolare ed è soggetto all'azione di due pressioni uniformemente distribuite agenti l'una sulla superficie interna e l'altra sulla superficie esterna del medesimo, quest'ultima essendo prevalente.*

Questo problema corrisponde a quello trattato al numero 21 studiando l'effetto della sollecitazione a tensione, soltanto in questo caso la pressione esterna essendo più forte, se si fa una sezione con un piano passante per l'asse del tubo, le due parti premono l'una sull'altra e non manifestano alcuna tendenza a staccarsi. La formola che dà esattamente il valore dello sforzo trasversale p_{yy} (Vedi Parte I, num. 87) è stata determinata studiando l'equilibrio delle superficie ed è stata anche riportata al numero 21 (*) dove si è osservato che quando lo spessore s è molto piccolo, specialmente se il raggio medio del tubo è grande e la differenza fra le due pressioni non è grandissima si può ritenere per p_{yy} un valore costante medio senza commettere errore notevole.

In questa ipotesi se, come al numero 21, rappresentano

p_1 e p_2 le pressioni unitarie per metro quadrato agenti all'interno ed all'esterno del tubo e $p = p_1 - p_2$ la loro differenza

$$(*) \quad p_{yy} = A + \frac{B}{r^2} = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + (p_1 - p_2) \left| \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2} \right|.$$

s lo spessore costante del cilindro

$d_1 = 2r_1$, $d_2 = 2r_2 = d_1 + 2s = 2(r_1 + s)$ i diametri ed i raggi interni ed esterni del tubo

e si considera una lunghezza di tubo uguale all'unità, cosa permessa in causa della simmetria di forma e di carico della superficie resistente, nel caso della tensione, ossia quando $p_1 > p_2$, in base all'ipotesi ricordata ed usando la formola di resistenza a tensione semplice, si è trovato

$$s = \frac{d_1 (p_1 - p_2)}{2(R - p_2)} = \frac{p d_1}{2(R - p_2)}.$$

Nel caso della compressione, cioè quando $p_1 < p_2$, partendo dalla stessa ipotesi si può arrivare ad una formola analoga, ma questa non può essere impiegata per assegnare lo spessore conveniente ad un tubo soggetto a compressione, poichè essa non dà e non può dare alcuna garanzia per la resistenza del medesimo. Infatti nel caso in cui $p_1 > p_2$ la forma circolare della sezione rappresenta una posizione di equilibrio stabile e le forze agenti nel tubo tendono ad annullare l'effetto di una irregolarità di forma o di sollecitazione prodotta da vizio di fabbricazione od eterogeneità del materiale od anche da una causa accidentale in modo analogo a quello ampiamente discusso nel numero precedente studiando la pressoflessione. Per ogni sezione fatta con un piano passante per l'asse la forza che sollecita una parte del tubo rispetto all'altra è proporzionale al diametro; una leggera eccentricità rende maggiore l'azione in una direzione rispetto ad un'altra, ma contemporaneamente la deformazione tende a distruggere questo effetto ed a ricondurre il solido alla sua forma normale d'equilibrio. Avviene qualche cosa d'analogo a quello che si è detto nel numero precedente pei solidi soggetti a tensione; quando esiste inizialmente una leggera eccentricità comparabile per importanza alle deformazioni elastiche che il solido può subire, la deformazione tende a distruggerne l'effetto, e nel calcolo della sezione resistente l'ingegnere può prescindere dalla medesima senza pericolo di commettere un errore notevole. Se tale eccentricità avesse anche inizialmente un valore piccolissimo sì, ma apprezzabile, avvenuta la deformazione, essa è ridotta a zero o per lo meno è trascurabile e quindi non può avere influenza sugli sforzi che si sviluppano nell'interno del materiale, che sono funzioni lineari delle deformazioni. Quando invece $p_1 < p_2$ e le due parti di cilindro separate da una sezione passante per l'asse sono spinte l'una verso l'altra

non si può più ritenere che il tubo sia in condizioni di equilibrio perfettamente stabile e si manifesta uno stato di cose che ha analogia con quello che si verifica nel caso della pressoflessione, studiato esso pure nel numero antecedente. Un'eccentricità per quanto leggera, rende maggiore lo sforzo che agisce in una direzione rispetto a quello che agisce in direzione normale, e la deformazione elastica corrispondente influisce su questo stato di cose tendendo ad aumentarlo in modo notevole, poichè l'eccentricità proveniente da vizi di forma e fabbricazione non può essere, in generale, che piccolissima e comparabile alle deformazioni elastiche. L'effetto quindi di un'eccentricità, per quanto leggera, è quello di produrre, in causa della deformazione elastica, un aumento nell'eccentricità stessa. Inoltre una deviazione, per quanto piccola, dalla forma circolare ha per effetto di produrre una sollecitazione a flessione perchè la curva delle pressioni non coincide più colla linea media della corona circolare sezione del tubo, e quindi di dare origine ad una ripartizione degli sforzi molecolari essenzialmente diversa da quella supposta, e di esigere infine uno spessore maggiore per resistere convenientemente agli sforzi che agiscono sul cilindro.

Volendo trattare esattamente la questione bisognerebbe cercare quale sia l'effetto dell'eccentricità rispetto alla ripartizione degli sforzi, che si sviluppano nelle pareti del tubo. Ciò sarà fatto studiando esattamente le condizioni di equilibrio delle superficie, per ora è sufficiente aver messo in evidenza come i tubi a piccolo spessore soggetti a pressione esterna sono in una specie di equilibrio instabile, che le deformazioni elastiche, dovendo in generale tener conto di un'eventuale eterogeneità del materiale, oppure di una probabile irregolarità od eccentricità di forma, tendono ad allontanare il solido dalla posizione naturale nel senso di produrne lo schiacciamento per avvicinamento delle pareti del tubo fra loro, cosa che, a meno di circostanze straordinarie, avverrà sempre quando si aumenti sufficientemente la pressione esterna. L'esperienza conferma completamente questo modo di vedere: FAIRBAIRN ha fatto molte prove introducendo dei tubi L chiusi alle estremità entro un robusto cilindro D (*Fig. 127^a, tav. XXVI*) contenente un liquido, nel quale per mezzo di una pompa M si poteva produrre una forte pressione da regolare con una valvola di sicurezza N opportunamente caricata (*). Se si indica con P la pressione in chilogrammi per centimetro quadrato, con l la lunghezza del tubo, con d_1 il diametro interno e con α una

(*) *Philosophical Transactions*, 1858.

costante, il cui valore dipende dalla natura del metallo, del quale i tubi sono formati, le esperienze di FAIRBAIRN conducono come risultato medio alla seguente formola

$$P = \alpha \frac{s^2}{l d_1}$$

nella quale però l'influenza della variazione dei diametri non sembra sia stata determinata sufficientemente. Sarebbe necessario un maggior numero di esperienze per poter arrivare ad un risultato più preciso; in attesa che si possano conseguire ulteriori dati sperimentali la formola superiore potrà essere accettata, almeno come espressione di prima approssimazione, per valutare la resistenza dei tubi allo schiacciamento per effetto di una pressione esterna. Dalle stesse esperienze e collo scopo di ottenere maggior concordanza fra i risultati sperimentali e quelli ottenuti coll'uso di una formola empirica si sono dedotti le due espressioni seguenti valevoli pei tubi in ferro

$$P = \alpha_1 \frac{s_1^2}{l^{0,564} d_1^{0,880}} = 40\,470 \frac{s_1^{2,081}}{l^{0,564} d_1^{0,880}}$$

oppure

$$P = 376\,729 \frac{s^2}{l d_1} + 1\,160 \frac{s^2}{d_1} - 93 \frac{s}{d_1}$$

FAIRBAIRN osserva che si può aumentare assai la resistenza dei tubi rinforzandoli con anelli formati di ferri a T semplice collocati nell'interno dei medesimi. In tal caso si può calcolare la resistenza dei tubi, ancora colla formola

$$P = \alpha \frac{s^2}{l d_1}$$

soltanto l non esprimerà più la lunghezza del tubo, ma bensì la distanza fra anello ed anello. MANÈS e MARY (*) hanno pure fatto esperienze sulla resistenza dei tubi ad una pressione esterna per determinare gli spessori convenienti ai tubi delle caldaie tubolari.

(*) *Annales des ponts et chaussées*, vol. XIII, serie II, pag. 332 e segg.

Confrontando i risultati delle esperienze colla formola FAIRBAIRN risolta rispetto ad α

$$\alpha = \frac{P l d_1}{s^2}$$

sembra che si possano assegnare al coefficiente sperimentale i seguenti valori medi

$$\text{Ferro} \dots \alpha = 400\,000$$

$$\text{Rame} \dots \alpha = \text{da } 500\,000 \text{ ad } 800\,000.$$

Qui però bisogna fare un'osservazione la quale aiuterà a rendere ragione della differenza esistente fra i risultati ottenuti. Se un tubo è composto di lamiere riunite con chiodatura, il breve tratto in cui le due lamiere si sovrappongono costituisce una specie di anello di rinforzo, comparabile, sebbene lontanamente, agli anelli di rinforzo proposti da FAIRBAIRN, e deve concorrere indubbiamente ad aumentare la resistenza del tubo. In Francia una circolare ministeriale, in data 17 dicembre 1848, imponeva che lo spessore della lamiera nei tubi delle caldaie soggetti a forte pressione esterna fosse doppio di quello determinato colla formola ministeriale (Decreto Reale 22 maggio 1843) per le rimanenti parti della caldaia. Pei focolari interni e pei tubi del fumo dai costruttori di caldaie a vapore si consiglia attualmente la formola

$$s = 0,0014 k d_1 + 0,003 + 0,0006 l$$

nella quale k esprime la pressione in atmosfere ed l la lunghezza del tubo.

La resistenza dei cilindri e tubi a pressioni uniformi agenti normalmente alla loro superficie costituisce un caso particolare dell'equilibrio delle superficie elastiche resistenti e sarà trattato nel capitolo relativo a questo argomento. Studiando l'effetto della sollecitazione a compressione semplice è sembrato conveniente accennare incidentalmente alla natura del problema, mostrare come anche nel caso di tubi a piccolo spessore non si possa usare una formola analoga a quella semplicissima

$$s = \frac{p d_1}{2(R - p_2)}$$

trovata pel caso della tensione, cioè quando $p_1 > p_2$, partendo dall'ipotesi che lo sforzo unitario in una sezione piana diametrale abbia valore costante e finalmente far menzione di alcune delle formole determinate sperimentalmente proposte pel calcolo

dei tubi quando $p_1 < p_2$ per mettere in evidenza la differenza esistente fra questo caso e quello in cui sia $p_1 > p_2$. Le formole razionali ed empiriche pel calcolo dello spessore dei tubi e delle sfere cave e la loro discussione saranno riportate insieme ad alcuni esempi trattando dell'equilibrio delle superficie elastiche resistenti.

PROBLEMA 3°. — *Determinare la massima altezza a cui può essere elevato un muro od un pilastro perchè sotto l'azione del proprio peso e tenendo conto soltanto dell'azione di semplice compressione, esso sia in buone condizioni di resistenza.*

Sia ρ la densità del materiale, s lo spessore del muro, h la sua altezza. Per una zona di muro di lunghezza unitaria lo sforzo di compressione massimo si verifica nella sezione più bassa, che deve sopportare il peso di tutto il muro; esso è dato da

$$C = s \rho h$$

l'area resistente A è uguale ad $s \times 1 = s$, quindi dalla formola di resistenza si ricava

$$s \rho h = R_a'' s$$

da cui

$$h = \frac{R_a''}{\rho}$$

cioè la massima altezza a cui può essere elevato il muro, avendo riguardo alla sola resistenza alla semplice compressione, è indipendente dallo spessore del muro e dipende soltanto dal limite dei carichi permanenti e dalla densità. Per la muratura ordinaria in mattoni, può ritenersi $R_a'' = 60\,000 \text{ kg.}$ per metro quadrato e $\rho = 1\,900 \text{ kg.}$ (variabile da Kg. 1 700 a Kg. 2 300) quindi

$$h = \frac{R_a''}{\rho} = \frac{60\,000}{1\,900} = 31^{\text{m}},57$$

per altezze superiori il muro a spessore costante cessa di essere in buone condizioni di resistenza e stabilità. Ciò non vuol dire però che in tali condizioni la costruzione sia prossima a rottura

per schiacciamento. $R_a'' = \frac{R_n''}{n}$ e per le murature ordinariamente

$n = 10$ quindi il muro dovrebbe avere un'altezza dieci volte più grande perchè avvenisse la rottura per schiacciamento. Dicendo che il muro non è in buone condizioni di stabilità si vuole soltanto accennare al fatto che lo sforzo unitario subito dal materiale

è superiore al limite che la prudenza consiglia ai costruttori per essere garantita esuberantemente da tutte le eventualità che possono influire sulla resistenza di un'opera determinata.

27. Calcolo dei rulli e delle sfere usati come supporti. Perni e giunti sferici. — Un corpo cilindrico frapposto a due superficie pure cilindriche ed a contatto colle medesime prende il nome di *rullo* o *curro* secondochè esso è guidato nel suo movimento, oppure è interposto soltanto temporaneamente od occasionalmente per l'esecuzione di speciali manovre. Nello studiare le condizioni di equilibrio dei rulli è conveniente incominciare dal considerarli collocati fra due superficie piane; da questo caso poi si può passare facilmente all'altro più generale che essi siano interposti fra due superficie cilindriche a direttrice qualsiasi. Siano VW e $V'W'$ le linee che rappresentano le sezioni delle due superficie piane (*Fig. 128^a, tav. XXVI*) $C, C, C, \dots$ i centri dei circoli che rappresentano le sezioni dei rulli, ed indichiamo separatamente un rullo ed un tratto delle due superficie VW $V'W'$ in $aba'b'$ e $vw, v'w'$ (*Fig. 129^a, tav. XXVI*). L'esperienza dimostra che se per mezzo delle superficie vw $v'w'$ si comprime il cilindro nella direzione del diametro NF facendo agire sul medesimo uno sforzo P , in corrispondenza delle generatrici di contatto si formano due cunei abc $a'b'c'$ colle facce ac e cb , $a'c'$ e $c'b'$ ad angolo retto, e gli spigoli passanti per c e c' paralleli all'asse del cilindro, e che la distanza cc' è circa $\frac{2}{3}$ del diametro del rullo, la rottura avviene

nel momento in cui si manifesta la decomposizione accennata, i due cunei s'avvicinano e fendono il resto del cilindro secondo cc' proiettandone lateralmente le parti.

Se si immagina un prisma a base quadrata circoscritto al cilindro colle facce rispettivamente normali e parallele ai piani VW e $V'W'$ l'esperienza dimostra che la resistenza del corpo cilindrico allo schiacciamento è proporzionale a quella del prisma circoscritto, cioè che essa è proporzionale al prodotto del diametro del rullo per la lunghezza del suo asse. Basandosi sopra alcune esperienze fatte aumentando la pressione fino alla rottura del rullo alcuni autori avrebbero stabilito che la resistenza di questo sia circa un terzo di quella del prisma circoscritto, più precisamente il loro rapporto sarebbe espresso da 0,316. Bisogna però osservare che il modo di rottura dei rulli non è comparabile a quello che si verifica nei solidi prismatici, così pure le deformazioni, quindi per essere garantiti sulle condizioni di stabilità del materiale bisognerà ricorrere al criterio generale che la deformazione massima sia inferiore a quella corrispondente al limite

di elasticità (*) e non limitarsi a stabilire un rapporto costante fra la resistenza alla rottura di un rullo e quella del prisma circoscritto.

In un rullo soggetto a compressione non si può applicare il principio della conservazione delle sezioni piane alla determinazione degli sforzi in ciascuno di esse perchè la dimensione secondo la quale agiscono le forze non è mai predominante sulle altre due, anzi in generale, è minore della lunghezza dell'asse del cilindro. Tuttavia è noto che le forze applicate in un punto di un corpo elastico producono deformazioni e reazioni molecolari che, rispetto a piani normali alla direzione della forza e successivamente più lontani dal suo punto d'applicazione, tendono a diventare uniformi. Questo fatto risulta dalle considerazioni teoriche svolte nella *Teoria generale della resistenza dei materiali* ed è stato anche dimostrato sperimentalmente da WERTHEIM, FRESNEL e LEGER studiando le modificazioni che avvengono nel vetro rispetto alle sue proprietà rifrangenti (**). Inoltre nei rulli l'area resistente aumenta rapidamente partendo dal punto ove sono applicate le forze e venendo verso l'asse, finchè diventa massima in corrispondenza del diametro parallelo alle superficie VW e $V'W'$. Tenendo conto di questi due fatti si può asserire che le deformazioni e reazioni elastiche massime sui rulli si verificheranno in quella parte che viene in contatto colle superficie VW e $V'W'$. Quindi saranno garantite le buone condizioni di stabilità del rullo tutte le volte che le sue dimensioni siano determinate in modo che la massima deformazione del medesimo nelle superficie di contatto sia inferiore a quella corrispondente al limite di elasticità R_e'' : sebbene non sappiamo come si distribuiscono le forze elastiche nell'interno del medesimo, siamo però

(*) Per evitare deformazioni permanenti e lo snervamento del materiale.

(**) WERTHEIM ha constatato che assoggettando una barra di vetro ricotto omogeneo e quasi perfettamente isotropo all'azione di forze esterne la materia diviene birifrangente e questa proprietà aumenta in ragione dell'ampiezza delle deformazioni elementari a cui le azioni elastiche sono correlative. Se si fa attraversare il vetro da un raggio luminoso e si riceve il fascio polarizzato sopra un diaframma si otterrà un'immagine colorata, la cui tinta in ogni punto corrisponderà al lavoro elastico sviluppato nella parte del corpo attraversato dal raggio luminoso. WERTHEIM ha costruito un apparecchio, da lui chiamato dinamometro-cromatico, fondato sopra questa proprietà e che ha servito anche per le ricerche di FRESNEL e LEGER per studiare la legge di distribuzione delle azioni molecolari in una barra di vetro soggetta a sforzi determinati. Oltre la legge citata, questi sperimentatori hanno potuto verificare l'esattezza pratica delle formole della resistenza dei materiali e la influenza dei cambiamenti bruschi di sezione.

sicuri che esse saranno sempre inferiori a quelle che hanno luogo lungo le superficie di contatto.

Un rullo compresso contro un piano ha comune con esso una piccola estensione superficiale rappresentata in AFB (*Fig. 130^a, tav. XXVI*) in causa della deformazione elastica prodotta dallo sforzo di pressione P . Avvenuta la deformazione la superficie piana e quella cilindrica del rullo in corrispondenza della corda AB si saranno modificate assumendo entrambe il profilo $AF'B$ invece dei due profili originari ADB ed AFB . Sia DB l'asse delle x , DF quello delle y e rappresentiamo con y ed y' le ordinate delle curve AFB ed $AF'B$, con f ed f' le frecce DF e DF' . In causa dell'uguaglianza degli sforzi da un lato e dall'altro della superficie $AF'B$ si potrà ammettere e sarà accettabile con sufficiente approssimazione che le deformazioni y' subite dal piano siano uguali alle deformazioni $y - y'$ subite dal rullo e che l'area del seguente $AF'B$ possa ritenersi uguale a quella di un segmento parabolico di ugual corda ed uguale freccia. La quantità $DF = f$ essendo molto piccola rispetto al diametro $d = 2r$ del rullo si potrà ritenere

$$f = \frac{\overline{AB}^2}{8r} \quad \text{e quindi} \quad f' = \frac{\overline{AB}^2}{16r}$$

rappresenta la massima deformazione subita dal rullo; per la stabilità, in base a quanto è stato detto superiormente, dovrà essere

$$v'' = \frac{f'}{r} = \frac{R_a''}{E} \quad \text{ossia} \quad \frac{\overline{AB}^2}{16r^2} = \frac{R_a''}{E}$$

da cui si ricava

$$AB = 4r \sqrt{\frac{R_a''}{E}}.$$

Considerando una lunghezza unitaria di rullo, cosa che può sempre esser fatta in causa della simmetria di forma e di sollecitazione, che permette di introdurre nelle formole la detta lunghezza moltiplicandole per l , oppure dividendo per l il peso P sopportato dal rullo, lo sforzo resistente opposto da ogni elemento d'area è dato da $R'' = E \frac{y'}{r}$ e quindi per l'equilibrio sarà

$$P = \int_{-\frac{AB}{2}}^{+\frac{AB}{2}} \frac{E}{r} y' dx = \frac{E}{r} \cdot \frac{2}{3} AB \cdot DF' = \frac{2}{3} \frac{E}{r} AB f' = \frac{1}{24r^2} E \cdot \overline{AB}^3$$

e ricordando il valore di AB

$$P = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{R_a''}{E}} R_a'' \cdot 2r = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{R_a''}{E}} R_a'' d = \alpha R_a'' d$$

in cui α rappresenta il fattore costante $\frac{4}{3} \sqrt{\frac{R_a''}{E}}$.

Da questa formola risulta che lo sforzo P che può sopportare permanentemente un rullo è proporzionale al prodotto del suo diametro per la lunghezza del suo asse precisamente come era stato provato sperimentalmente da VICAT. Inoltre lo sforzo che può sopportare un rullo è uguale a quello che potrebbe sopportare un prisma a base quadrata circoscritto al medesimo e con due facce disposte parallelamente alla direzione della forza sollecitante

P , moltiplicato per un coefficiente di riduzione $\alpha = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{R_a''}{E}}$.

Quanto più grande è il valore del modulo di elasticità tanto più piccolo sarà il coefficiente di riduzione, quindi indipendentemente da altri motivi che possono consigliare una soluzione diversa, per questa ragione la ghisa converrebbe più del ferro e dell'acciaio nella costruzione dei rulli perchè pei tre materiali il valore di R_a'' è sensibilmente uguale, mentre che per la ghisa E'' è notevolmente minore. L'acciaio però è preferibile alla ghisa nella fabbricazione dei rulli per la sua maggiore resistenza agli urti e la sua più grande omogeneità. È appunto per la proprietà dimostrata che il *caoutchouc*, materia poco resistente ma molto deformabile, quindi E'' molto piccolo, può formare la corona di ruote sopportanti pesi considerevoli e rendere un buon servizio: i corpi troppo duri non si deformano sufficientemente e lo spigolo di contatto viene deteriorato con facilità.

Dalle cose esposte risulta che la formola di resistenza pel calcolo dei rulli ha una forma analoga a quella di resistenza a compressione semplice, soltanto varia il valore dello sforzo unitario ammissibile R_a'' qualora si consideri la sezione diametrale come sezione resistente. Infatti lo sforzo C è rappresentato da P , l'area resistente da $A = dl$; in luogo poi di R_a'' entra nella formola $\alpha R_a''$. Se si conviene di rappresentare con (R_a'') lo sforzo unitario ideale riferito alla sezione diametrale la corrispondenza fra le due formole è completa, soltanto bisogna ricordare che (R_a'') è uguale al limite ammissibile per i carichi permanenti corrispondente al materiale che si considera moltiplicato per un coef-

ficiente di correzione, che varia a seconda della materia impiegata dipendentemente dal valore del modulo di elasticità e del limite ammissibile dei carichi permanenti $R_a'' < R_e''$, che ad essa corrisponde.

Per rendere più facile l'uso della formola

$$\frac{P}{dl} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{R_a''}{E}} \cdot R_a''.$$

Riportiamo la seguente tabella nella quale sono già calcolati pei varî materiali i valori di $(R_a'')_i$.

MATERIALE	Limite di elasticità alla compressione R_e''	Coefficiente di elasticità longitudinale E''	Pressione per unità di superficie sopra la sezione diametrale del rullo	
			Limite oltre al quale si avrebbero deformazioni permanenti $(R_e'')_i$ espresso in Kg. per mmq.	Limite pratico da adottare nelle applicazioni pel calcolo dei rulli $(R_a'')_i$ espresso in Kg. per mmq.
Ferro . . .	15×10^6	2×10^{10}	0,55	0,25
Acciaio . .	20×10^6	225×10^8	0,80	0,35
Ghisa . . .	25×10^6	90×10^8	1,30	0,40
Quercia . .	2×10^6	11×10^8	0,11	0,06

RÉSAL nel suo libro sui ponti metallici (*) consiglia di usare pel calcolo dei rulli per gli apparecchi di dilatazione i valori seguenti

Ferro valore di $(R_a'')_i$ per millimetro quadrato Kg. 0,20
 Acciaio » » » » » 0,40
 Ghisa » » » » » 0,30

(*) RÉSAL, *Ponts métalliques*, vol. II, pag. 246. In questi rulli, specialmente per le opere importanti, l'uso dell'acciaio è preferibile a quello della ghisa perchè il primo materiale è più omogeneo e resiste meglio agli urti.

Se invece di un rullo si deve calcolare un solido prismatico avente per sezione retta un settore, o come anche suol dirsi un semirullo (*Fig. 131^a, tav. XXVI*), il procedimento da seguire è il medesimo ed (R_a'') deve sempre essere riferito alla sezione diametrale, poichè la formola di resistenza è stata determinata in base al massimo accorciamento ammissibile, il quale appunto risulta espresso in funzione del diametro e dei coefficienti di elasticità e resistenza. In modo più generale può dirsi che il valore di

$r = \frac{d}{2}$ da introdurre nelle formole superiori deve essere quello che misura la curvatura della superficie del rullo prima della deformazione nella zona in cui essa viene a contatto colla superficie piana del supporto.

Se il rullo, invece che su un piano, riposa sopra una superficie cilindrica convessa (*Fig. 132^a, tav. XXVI*) oppure concava (*Fig. 133^a, tav. XXVI*) la cui sezione retta ha, prima della deformazione, un raggio di curvatura $r_1 = \frac{d_1}{2}$ nella zona di contatto, allora le espressioni di f ed f' si modificano in quanto che sono la somma ovvero la differenza di due frecce prese rispetto alla corda comune AB (*Fig. 134^a, tav. XXVI*) quindi

$$f = \frac{AB^2}{8r} \pm \frac{AB^2}{8r_1} \quad \text{ed} \quad f' = \frac{1}{2} AB^2 \left\{ \frac{1}{8r} \pm \frac{1}{8r_1} \right\}$$

da cui ricordando che

$$\frac{Ef'}{r} = R_a''$$

si ricava

$$AB = 4r \sqrt{\frac{R_a''}{E}} \sqrt{\frac{r_1}{r_1 \pm r}}$$

nella quale si dovrà prendere il segno + od il segno — secondo che la superficie di raggio r_1 rispetto al rullo è convessa o concava. Detta y_1' la deformazione subita dal rullo, per l'equilibrio dovrà essere come precedentemente

$$P = \frac{E}{r} \int_{-\frac{AB}{2}}^{+\frac{AB}{2}} y_1' dx = \frac{E}{r} \cdot \frac{2}{3} AB f' = \frac{2}{3} \cdot \frac{E}{r} \frac{AB^3 r \pm r_1}{16r r_1} = \frac{8}{3} r \sqrt{\frac{R_a''}{E}} \sqrt{\frac{r_1}{r_1 \pm r}} R_a''$$

od anche introducendo nella formola la lunghezza l del rullo

$$\frac{P}{ld} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{R_a''}{E}} \sqrt{\frac{r_1}{r_1 \pm r}} \cdot R_a'' = \alpha_1 R_a''.$$

Naturalmente il rapporto $\frac{P}{ld}$ non dovrà mai essere superiore ad R_a'' , quindi per tutti quei casi, nei quali il raggio r deve essere sottratto da r_1 e la formola superiore dà per α_1 valori superiori all'unità, essa cade in difetto e non può essere usata. Per $r_1 = r$ nel caso che la superficie del supporto sia concava sarebbe $\alpha_1 = \infty$; il valor limite del rapporto $\frac{r_1}{r}$ entro al quale la formola può servire è dato dalla relazione

$$\sqrt{\frac{r_1 - r}{r}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{R_a''}{E}}:$$

quando r_1 ed r vanno sommati la formola non cade mai in difetto.

Se si fa $\frac{r_1}{r} = \frac{d_1}{d} = \frac{401}{400}$ allora $\sqrt{\frac{r_1}{r_1 - r}} = 20$ e quindi per l'acciaio

$$\frac{4}{3} \sqrt{\frac{R''}{E}} \sqrt{\frac{r_1}{r_1 - r}} R_a'' = 20 (R_a'')_1 = 20 \times 0,35 = 7,00,$$

cioè quando la differenza dei diametri oscilla fra $\frac{1}{400}$ ed $\frac{1}{500}$ il limite pratico dei carichi per la sezione diametrale del rullo $(R_a'')_1$ ha lo stesso valore che avrebbe se si dovesse calcolare un solido prismatico, ed il coefficiente di riduzione α_1 è uguale o vicinissimo all'unità. Come conseguenza si deduce immediatamente che le sale delle ruote, le caviglie, gli assi di rotazione ed in generale i perni racchiusi entro supporti cilindrici aventi diametro uguale o pressochè uguale possono essere calcolati in base all'area della sezione diametrale assegnando come limite dei carichi permanenti il valore usuale ricavato facendo esperienze sovra i solidi prismatici.

Se il supporto è formato da due superficie piane fra le quali sono frapposte delle sfere, il calcolo della resistenza delle medesime si conduce nello stesso modo di quello usato pei cilindri basandosi sugli stessi principi. Conservando ad f ed f' , ed y' gli

stessi significati che avevano nel caso precedente, cioè intendendo espresse con questi simboli le ordinate massime e quelle di un punto qualsiasi prese rispetto al piano AB prima e dopo la deformazione dalla figura risulta (*Fig. 135^a, tav. XXVI*).

$$f = \frac{\overline{AB}^2}{8r} \quad f' = \frac{f}{2} = \frac{\overline{AB}^2}{16r}$$

e quindi

$$E \frac{f'}{r} = E \frac{\overline{AB}^2}{16r^2} = R_a''$$

da cui

$$AB = 4r \sqrt{\frac{R_a''}{E}}.$$

Per l'equilibrio, detta P la forza alla quale resiste la sfera, dovrà essere

$$\begin{aligned} P &= \frac{E}{r} \int y' dx dz = \frac{E}{r} \cdot \frac{1}{2} \pi \frac{\overline{AB}^2}{4} f' = \frac{\pi E}{128 r^2} \overline{AB}^4 = \\ &= \frac{256}{128} \frac{\pi E}{r^2} r^4 \left(\frac{R_a''}{E} \right)^2 = 2 \cdot \pi r^2 \cdot \frac{R_a''}{E} R_a'' \end{aligned}$$

od anche

$$\frac{P}{\left(\frac{\pi d^2}{4} \right)} = 2 \frac{R_a''}{E} \cdot R_a'' = \alpha' R_a''.$$

Se la superficie sopra la quale riposa la sfera fosse essa pure una superficie sferica di raggio $r_1 = \frac{d_1}{2}$, seguendo un processo analogo a quello usato studiando l'equilibrio dei rulli sulle superficie cilindriche si otterrebbe

$$\frac{P}{\left(\frac{\pi d^2}{4} \right)} = 2 \frac{R''}{E} \cdot \frac{r_1}{r_1 \pm r} \cdot R_a'' = \alpha'_1 R_a''.$$

Cioè nei supporti fatti con sfere racchiuse fra due superficie piane il calcolo delle dimensioni si fa come se invece di sfere si avessero dei solidi prismatici la cui area trasversale fosse uguale alla

sezione diametrale della sfera considerata, avendo cura di prendere come limite dei carichi ammissibili un numero ideale $(R_a'')_i'$ uguale a quello che si impiega ordinariamente nel calcolo delle dimensioni dei solidi prismatici moltiplicato per un coefficiente di riduzione α' dipendente dalla resistenza del materiale e dal suo modulo di elasticità longitudinale E'' .

Il valore di $(R_e'')_i'$ e di $(R_a'')_i'$ per i materiali usati più comunemente è dato dalla seguente tabella calcolata da RÉSAL

NATURA del materiale	Pressione ideale sopra ogni unità superficiale della sezione diametrale di una sfera soggetta a compressione e riposante sopra una superficie piana.	
	Compatibile col limite di elasticità $(R_e'')_i'$ per millimetro quadrato	Da ammettere in pratica $(R_e'')_i'$ per millimetro quadrato
Ferro	0,023	0,012
Acciaio	0,035	0,018
Ghisa	0,139	0,070
Quercia	0,007	0,004

Appare da questi numeri che i supporti sferici sono in generale poco consigliabili, a meno che siano imposti dalle necessità costruttive o da altre considerazioni: naturalmente se invece di una sfera si ha una semplice calotta sferica, il calcolo dello sforzo P , che essa può sopportare, va fatto riferendosi sempre alla sezione diametrale (analogamente a quanto è stato osservato pei semirulli).

Se una sfera è posta entro un'altra sfera (*Fig. 135^a, tav. XXVI*) la formola che dà il peso P che essa può sopportare è affatto analoga a quella trovata pei cilindri, cioè

$$\frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} = 2 \frac{R_a''}{E} \cdot \frac{r_1}{r_1 - r} \cdot R_a''$$

colla condizione che sia

$$\frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq R_a''.$$

Quest'ultima condizione limite si verifica quando $\alpha_1' = 1$, cioè quando

$$2 \frac{R_a''}{E} = \frac{r_1 - r}{r_1}$$

allora il carico unitario ideale conveniente alla superficie diametrale della sfera è uguale al limite ordinario dei carichi permanenti: questa condizione si verifica assai prossimamente nelle articolazioni sferiche dette *a ginocchio*, le quali possono appunto essere calcolate in base alla loro sezione diametrale ed al limite ordinario dei carichi ammissibili R_a'' .

Esattamente perchè α_1' sia uguale all'unità dovrà essere per l'acciaio

$$\frac{r_1 - r}{r_1} = 2 \frac{10\,000\,000}{22\,500\,000\,000} = \frac{2}{2250} = \frac{1}{1125} = 0,0009$$

per la ghisa

$$\frac{r_1 - r}{r_1} = 2 \frac{10 \times 10^6}{90 \times 10^8} = \frac{2}{900} = \frac{1}{450} = 0,0022.$$

28. Solidi di uniforme resistenza soggetti a compressione semplice. —

Un solido soggetto a compressione semplice dicesi di uniforme resistenza quando in tutte le sue sezioni trasversali lo sforzo unitario R'' ha un valore costante. Se lo sforzo sollecitante C ha un valore costante, anche la sezione resistente A è costante, se invece C è variabile da sezione a sezione, anche A dovrà variare con legge proporzionale, poichè per l'equazione di resistenza deve essere costantemente $C = R A$. Il far variare con legge di continuità la sezione resistente presenta spesso difficoltà d'ordine costruttivo, per cui gli ingegneri al profilo teorico di uniforme resistenza con variazione continua delle dimensioni trasversali sogliono sostituire il profilo pratico a variazione discreta o saltuaria. Come si è già avvertito parlando della sollecitazione a tensione semplice essi dividono il solido in tanti tronchi, più o meno lunghi a seconda delle circostanze inerenti al problema che si vuol risolvere, e per ciascuno di questi adottano una sezione costante determinata ponendo nell'equazione di resistenza per C il valore del massimo sforzo di compressione, che si verifica nel tronco considerato, ed assegnando ad R'' il valore che non si vuole che sia superato nella costruzione, e che nella soluzione teorica del profilo di uniforme resistenza sarebbe comune a tutte le sezioni.

Da queste considerazioni risulta che il calcolo di un solido di uniforme resistenza importa le seguenti operazioni:

a) La rappresentazione analitica o grafica della legge di variazione dello sforzo sollecitante C ;

b) La rappresentazione analitica o grafica della legge di variazione della sezione resistente, che si ottiene immediatamente dalla legge precedente in causa della equazione caratteristica di tutte le sezioni trasversali di un solido di uniforme resistenza

$$C = R_a'' A, \quad A = \frac{1}{R_a''} C;$$

c) La divisione del solido in tanti tronchi a sezione costante ed uguale alla massima trovata pel tronco stesso riferendosi alle esigenze costruttive, cioè facilità ed economia nella preparazione del materiale, nella messa in opera e nelle eventuali riparazioni, con riguardo alle condizioni estetiche ed a quelle che possono essere imposte dal fatto che il solido costituisca una parte di una costruzione più complessa, colla quale esso debba collegarsi.

Il problema quindi della uniforme resistenza a compressione semplice, corrisponde esattamente come metodo di risoluzione a quello studiato considerando l'uniforme resistenza a tensione, le considerazioni fatte al numero 23 si possono estendere facilmente anche al caso presente e sembra inutile fermarsi ulteriormente sopra considerazioni di ordine generale. Solo avvertiremo che nella costruzione pratica del profilo di uniforme resistenza, le sezioni nelle quali avviene un cambiamento brusco di forma sono da considerarsi come sezioni singolari, per le quali bisogna tener conto delle considerazioni fatte al numero 23, sperimentalmente dimostrate vere dalle ricerche di LEGER, e quindi bisognerà sempre evitare la variazione brusca di forma usando un opportuno congedo tutte le volte che si abbia a fare con un materiale omogeneo, elastico e perfettamente aderente. Questa necessità non si può più dire che esista nel caso delle murature usuali ed il profilo a risega può essere impiegato senza inconveniente, poichè l'aderenza limitata dei vari elementi componenti la muratura e la plasticità delle malte, specialmente al momento della messa in opera, permettono uno speciale adattamento delle varie parti. Questa circostanza attenua molto, se non elimina completamente, l'importanza del passaggio fra una superficie compressa ed una libera lungo la linea che limita l'area resistente più piccola in quelle sezioni, nelle quali hanno luogo i bruschi cambiamenti di dimensione più volte menzionati. In altri termini, la natura speciale delle murature permette di distribuire le forze molecolari nelle sezioni di passaggio da un tronco ad un altro con legge

continua, o quasi, o per lo meno riduce a piccole proporzioni la discontinuità, quindi toglie importanza alla singolarità di forma proveniente dal brusco cambiamento che ha luogo nella sezione resistente e non è più necessario il *congedo* (*).

Proponiamo di risolvere il seguente problema:

Determinare il profilo che deve avere una torre di uniforme resistenza a sezione orizzontale quadrata con pozzo interno a sezione quadrata ed a pareti verticali, nell'ipotesi che essa debba sopportare, oltre al proprio peso, un carico P agente secondo il suo asse e risultante di un carico p uniformemente distribuito alla sua sommità.

Rappresentino (*Fig. 136^a, tav. XXVI*) $AA' BB', CC' DD'$ la base della torre $A_1'' A_r'' A_n''$, $B_1'' B_r'' B_n''$, $C_1'' C_r'' C_n''$ e $D_1'' D_r'' D_n''$ le linee intersezioni del profilo della torre, con un piano verticale passante per l'asse $O_1'' O_r'' O_n''$ proiettantesi in O e parallelo a lato AB della base. Prendiamo ($O O_1''$) come origine degli assi coordinati intendendo che l'asse delle x coincida coll'asse $O_1'' O_r'' O_n''$ della torre e sia diretto dall'alto al basso e che gli assi delle y e delle z abbiano direzioni normali e tali da proiettarsi secondo le rette oy ed oz . Lo sforzo di compressione agente in una sezione della torre sarà espresso dalla somma del carico P e del peso proprio della porzione di torre sovrastante, se si indica con $2a$ il lato AB , con $2y$ il lato qualsiasi $C_r D_r$ e con ρ la densità del materiale componente la torre, l'area A di una sezione qualsiasi sarà data da $4(y^2 - a^2)$, quindi sarà

$$C = P + 4\rho \int_0^{x_r} (y^2 - a^2) dx$$

e per soddisfare alla condizione di uniforme resistenza dovrà essere verificata in ogni sezione la relazione

$$P + 4\rho \int_0^{x_r} (y^2 - a^2) dx = 4R_a'' (y_r^2 - a^2).$$

Differenziando e dividendo per quattro, qualora si trascuri l'indice generico r , si ottiene

$$\rho (y^2 - a^2) dx = R_a'' d(y^2 - a^2)$$

(*) La pratica seguita costantemente dagli ingegneri e dai costruttori corrisponde esattamente a questo concetto.

od anche separando le variabili

$$d\alpha = \frac{R_a''}{\rho} \frac{d(y^2 - a^2)}{y^2 - a^2}$$

da cui si ricava

$$\alpha = \frac{R_a''}{\rho} \log(y^2 - a^2) + C$$

Per $\alpha = 0$ $y = \frac{CD}{2} = b_0$ quindi

$$0 = \frac{R_a''}{\rho} \log(b_0^2 - a^2) + C$$

sottraendo

$$\alpha = \frac{R_a''}{\rho} \log \frac{y^2 - a^2}{b_0^2 - a^2}$$

e passando dai logaritmi ai numeri

$$y^2 = a^2 + (b_0^2 - a^2) e^{\frac{\rho \alpha}{R_a''}}$$

nella quale b_0 è determinato dalla condizione che nella sezione iniziale deve essere

$$P = 4 R_a'' (b_0^2 - a^2) \quad \text{ossia} \quad b_0^2 = a^2 + \frac{P}{4 R_a''}.$$

Il lato $C_n D_n = 2b_n$ della base della torre si ottiene risolvendo l'equazione numerica che risulta ponendo nell'equazione della curva, che corrisponde al profilo di uniforme resistenza, $\alpha = l$; eseguendo tale operazione risulta

$$b_n^2 = a^2 + (b_0^2 - a^2) e^{\frac{\rho l}{R_a''}}.$$

Anche in questo caso vale l'osservazione fatta al numero 23, ρ ed α sono ordinariamente piccoli rispetto ad R_a'' , quindi $\frac{\rho \alpha}{R_a''}$ può, in generale, essere considerata come una quantità molto piccola. In tal caso si può sviluppare in serie $e^{\frac{\rho \alpha}{R_a''}}$ tenendo conto

soltanto dei primi termini della serie e così calcolare più facilmente e con sufficiente approssimazione i valori di y . Applicando questo criterio si ottiene

$$y^2 = a^2 + (b_0^2 - a^2) \left\{ 1 + \frac{\rho \omega}{R_a''} + \frac{\rho^2 \omega^2}{2 R_a''^2} \right\}.$$

Dalla equazione superiore risulta che le quattro facce esterne della torre sono formate da superficie cilindriche a generatrice orizzontale, che hanno per direttrice una curva trascendente. In pratica sarebbe dispendioso e difficile ottenere esattamente le dette superficie quindi si trova più conveniente sostituire alla soluzione esatta a profilo continuo la costruzione pratica a variazione brusca di sezione trasversale od a *riseghe*. Nel caso delle murature l'importanza della risega viene fissata in base alle esigenze costruttive, ordinariamente nella muratura in laterizi la risega corrisponde alla dimensione trasversale o testa del mattone, oppure ad un multiplo esatto della medesima, mentre invece nella muratura fatta con materiale naturale l'ingegnere, in generale, si regola riferendosi piuttosto alle esigenze del taglio delle pietre.

Come pel caso della tensione anche in quello della sollecitazione a compressione semplice, se i tronchi in cui è stato diviso l'asse della torre sono tutti uguali, è facile determinare una formola semplice per calcolare le sezioni resistenti convenienti ai medesimi.

Siano $2b_1, 2b_2, 2b_3, \dots, 2b_n$ le lunghezze dei lati dei successivi tronchi e λ la lunghezza dell'asse di ciascuno di essi: per la base del primo tronco l'equazione di resistenza $C = R_a'' A$ dà

$$4(b_1^2 - a^2) R_a'' = 4(b_1^2 - a^2) \rho \lambda + P = 4(b_1^2 - a^2) \rho \lambda + 4(b_0^2 - a^2) R_a''$$

e pei tronchi successivi

$$\begin{aligned} 4(b_2^2 - a^2) R_a'' &= 4(b_2^2 - a^2) \rho \lambda + 4(b_1^2 - a^2) \rho \lambda + P = \\ &= 4(b_2^2 - a^2) \rho \lambda + 4(b_1^2 - a^2) R_a'' \end{aligned}$$

$$4(b_3^2 - a^2) R_a'' = 4(b_3^2 - a^2) \rho \lambda + 4(b_2^2 - a^2) R_a''$$

$$\dots\dots\dots$$

$$4(b_n^2 - a^2) R_a'' = 4(b_n^2 - a^2) \rho \lambda + 4(b_{n-1}^2 - a^2) R_a''$$

da cui si ricava

$$b_1^2 - a^2 = \frac{P}{4(R_a'' - \rho \lambda)} = \frac{b_0^2 - a^2}{R_a'' - \rho \lambda} R_a'' \quad b_1 = \sqrt{a^2 + \frac{b_0^2 - a^2}{R_a'' - \rho \lambda} R_a''}$$

$$b_2^2 - a^2 = \frac{b_1^2 - a^2}{R - \rho\lambda} R_a'' \quad b_2 = \sqrt{a^2 + \frac{b_1^2 - a^2}{R - \rho\lambda} R_a''}$$

$$b_3^2 - a^2 = \frac{b_2^2 - a^2}{R - \rho\lambda} R_a'' \quad b_3 = \sqrt{a^2 + \frac{b_2^2 - a^2}{R - \rho\lambda} R_a''}$$

.....

$$b_n^2 - a^2 = \frac{b_{n-1}^2 - a^2}{R - \rho\lambda} R_a'' \quad b_n = \sqrt{a^2 + \frac{b_{n-1}^2 - a^2}{R - \rho\lambda} R_a''}$$

Se invece che essere dato a è dato la lunghezza $2b_0$ del lato superiore della torre si può ricavare il valore di $AB=2a$ dall'equazione di resistenza corrispondente alla prima sezione superiore della torre o del pilastro che si considera

$$P = 4(b_0^2 - a^2) R_a'' \quad \text{da cui} \quad a = \sqrt{b_0^2 - \frac{P}{4R_a''}}$$

Coll'aiuto di queste formole possono essere determinati i lati delle sezioni trasversali di ciascun tronco della torre e quindi anche le successive riseghe per passare in seguito alla costruzione della medesima.

Sembra superfluo risolvere altri problemi relativi alla costruzione di solidi di uniforme resistenza sollecitati a compressione semplice; il metodo rimane sempre lo stesso e soltanto varieranno le espressioni di C e di A dipendentemente dalla distribuzione dei carichi rispetto all'asse e dalla forma geometrica della sezione resistente.

29. Travature ad asse rettilineo soggette a compressione accompagnata da flessione laterale. — Rappresenti AB (*Fig. 137^a, tav. XXVII*) la posizione che aveva prima della deformazione l'asse rettilineo di una travatura, la cui lunghezza l sia notevolmente più grande della minima dimensione d della sezione trasversale più piccola, e riteniamo che BA coincida coll'asse x , B coll'origine delle coordinate e che il punto A possa bensì muoversi lungo Bx , ma che sia vincolato a rimanere sempre sull'asse delle x . Supponiamo che in A agisca una forza P con direzione assiale producendo compressione e che contemporaneamente l'asse del solido si sia incurvato disponendosi secondo BQA senza fare alcuna ipotesi speciale sulla causa dell'incurvamento, come è stato detto al numero 26.

In causa della deformazione che si suppone avvenuta nella travatura, se si indica con α l'angolo che la tangente all'asse deformato in un punto qualsiasi fa coll'asse delle x , in ogni sezione agiranno una componente normale $X = P \cos \alpha$, una componente radente o tangenziale $F = P \sin \alpha$ e finalmente un momento flettente $M = -P y$. Nella scienza delle costruzioni per ipotesi fondamentale non si prendono in esame che deformazioni molto piccole, quindi dovremo considerare soltanto valori piccolissimi di α e per conseguenza senza errore sensibile, in relazione alle ipotesi ammesse, può ritenersi

$$X = P \cos \alpha = P \qquad F = P \sin \alpha = 0.$$

Il solido AB , che si suppone inflesso, dovrà soddisfare alle leggi generali della deformazione per flessione, che nel caso delle travature ad asse rettilineo sono rappresentate dall'equazione (Vedi Parte I, num. 69, pag. 203, form. 154)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}.$$

Sostituendo ad M il suo valore, si ottiene

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P}{EI} y$$

equazione differenziale, che può essere integrata facilmente qualora si supponga costante la sezione trasversale della trave AB e quindi anche il momento di inerzia I . Essa infatti contiene la proprietà, caratteristica dei seni e coseni di un arco, che la derivata seconda della funzione è uguale e di segno contrario alla funzione primitiva. Se si pone

$$y = C \cos m x + D \sin m x$$

si ottiene derivando

$$\frac{d y}{d x} = -m C \sin m x + m D \cos m x$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -m^2 C \cos m x - m^2 D \sin m x = -m^2 y$$

equazione che coincide con quella di elasticità alla flessione qualora si faccia $m = \sqrt{\frac{P}{EI}}$. L'integrale quindi dell'equazione differenziale

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P}{EI} y$$

sarà

$$y = C \cos x \sqrt{\frac{P}{EI}} + D \sin x \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (84)$$

in cui debbono essere determinate le costanti C e D in base ai dati del problema. Per $x=0$ deve essere per ipotesi $y=0$ quindi sarà necessariamente $C=0$ perchè $\cos 0=1$; per $x=l$, y deve pure essere zero, cioè deve essere verificata la relazione

$$D \sin l \sqrt{\frac{P}{EI}} = 0.$$

Ciò non può avvenire se non è soddisfatta una delle due condizioni

$$D = 0 \quad l \sqrt{\frac{P}{EI}} = (n-1) \pi$$

in cui n esprime il numero dei punti dell'asse deformato della trave nei quali è verificata la condizione $y=0$. Nei contraffissi e nelle colonne delle costruzioni usuali non sono, in genere, vincolati a rimanere nella direzione primitiva dell'asse, altrochè gli estremi A e B quindi $n=2$; in altre costruzioni più complesse possono esservi lungo l'asse varî punti vincolati mediante speciali collegamenti in modo che essi non si possono spostare lateralmente, tali punti sono detti *punti fissi* o *nodi*.

La prima condizione porta come conseguenza che y sia costantemente nullo, ciò che non si accorda colla supposizione fatta che l'asse sia incurvato; la seconda, che lo sforzo sollecitante abbia il valore dato da

$$P = E \pi^2 \frac{I}{l^2} (n-1)^2.$$

Interpretando questo risultato appare che l'asse di un solido soggetto a compressione non può rimanere incurvato lateralmente se lo sforzo di compressione C non ha un certo valore determinato

$$P_{(n-1)} = E \pi^2 \frac{I}{l^2} (n-1)^2 \quad (85)$$

espresso nel caso che non esistano altri vincoli oltre quelli che agiscono agli estremi della trave da

$$P_1 = E \pi^2 \frac{I}{l^2}.$$

Per un valore di $P < E \pi^2 \frac{I}{l^2}$ l'equazione (84) dà costantemente $y = 0$, ossia non può esistere allo stato d'equilibrio alcuna inflessione laterale, e se questa si produce accidentalmente il solido tende a ritornare alla posizione naturale di equilibrio: (naturalmente questo si afferma facendo astrazione dalle sollecitazioni che vengono prodotte pel fatto della deformazione accennata o di eventuali possibili eccentricità di sollecitazione). Quando invece

$P \geq E \pi^2 \frac{I}{l^2}$ allora può essere $D \sin l \sqrt{\frac{P}{EI}} = 0$ senza che sia $D = 0$,

y può avere valori determinati diversi dallo zero ed il solido può rimanere incurvato. L'equazione (84) mostra che la curva secondo la quale si dispone l'asse è una sinusoide, ma non essendo possibile determinare il valore della costante D per la mancanza di altre condizioni, a cui la deformazione debba essere soggetta, rimane indeterminata l'importanza della curvatura e la freccia di deformazione. Si dovrebbe quindi ritenere che la colonna è in equilibrio indifferente oppure che l'analisi fatta, a partire dal momento in cui incomincia la possibilità della inflessione laterale, cessa di essere rigorosa per aver trascurato qualche elemento influente nella questione. Se si tien conto dei risultati delle esperienze, che escludono la possibilità dell'equilibrio indifferente e delle osservazioni fatte al numero 26, quest'ultima supposizione acquista il grado di certezza e quindi lo studio delle deformazioni e delle relazioni che passano fra queste e la forza sollecitante nella pressoflessione deve essere fatta usando un processo d'analisi più rigoroso. La formola usata superiormente come equazione differenziale della curva elastica è dedotta in via

approssimata dalla formola esatta

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

e può essere impiegata nelle travature ad asse rettilineo nella risoluzione dei problemi usuali, nei quali le deformazioni elastiche non influiscono in modo sensibile sul valore delle caratteristiche di sollecitazione. Se si vuole però essere rigorosamente esatti, entro i limiti delle ipotesi accettate relativamente alla conservazione delle sezioni piane, bisogna tener conto delle variazioni che per effetto della deformazione elastica della trave avvengano nel momento flettente e nelle azioni molecolari che gli fanno equilibrio. Quando possono insorgere dubbi sul valore dell'approssimazione introdotta nel calcolo, ed in generale quando si voglia procedere con rigore matematico è necessario scrivere per ogni problema le equazioni fondamentali in modo esatto, e prima di trascurare un termine od un fattore bisogna premettere una discussione razionale, la quale provi come la sua influenza sui risultati sia insignificante, ossia non possa alterarne il valore oltre quel limite, che nel problema speciale può essere considerato come apprezzabile. Partendo dalla relazione

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{P}{EI} y$$

invece che dalla formola

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{P}{EI} \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}$$

abbiamo tenuto conto della variazione che avviene nel momento flettente per effetto delle deformazioni elastiche soltanto parzialmente perchè è stato trascurato il valore di $\frac{dy}{dx}$. In questo caso nel momento in cui incomincia la deformazione per pressoflessione lo spostamento trasversale dell'asse ed il momento flettente sono nulli e le quantità y , $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2 y}{dx^2}$ crescono insieme partendo tutte dal valor zero. Finchè si considera la deformazione compresa

entro i limiti di elasticità, niente autorizza *a priori* a trascurare $\frac{dy}{dx}$ rispetto ad y e a $\frac{d^2y}{dx^2}$ e nulla prova che la prima quantità sia infinitamente piccola rispetto alle altre due, quindi nella trattazione del problema bisogna partire dall'equazione esatta

$$-Py = \frac{EI}{\rho} = EI \frac{d\alpha}{ds}.$$

e non si deve essere meravigliati se coll'uso della formola

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

si arriva ad un risultato parzialmente indeterminato e che non si accorda totalmente colla pratica.

Per effetto della compressione un tronco ds della trave subirà un accorciamento, in guisachè esso prenderà la lunghezza

$$ds' = ds \left(1 - \frac{X}{EA} \right) = ds \cdot \left(1 - \frac{P \cos \alpha}{EA} \right).$$

In causa di questo accorciamento e dello scorrimento prodotto dallo sforzo di taglio, sarà

$$dy = ds' \sin \alpha - \frac{P \sin \alpha}{GA}.$$

Confrontati coll'unità i due fattori $\frac{\cos \alpha}{1}$ e $\frac{\sin \alpha}{1}$ possono rispettivamente ritenersi uguali, il primo all'unità, il secondo allo zero o molto prossimo ad esso perchè, per ipotesi, le deformazioni elastiche si suppongono piccolissime. Inoltre si può osservare che nel maggior numero dei casi pratici $\frac{P}{EA}$ è una quantità piccolissima rispetto all'unità: pel ferro $E = 18\,000\,000\,000$ quindi in via ordinaria il fattore $\left(1 - \frac{P}{EA} \right)$ non potrà nei prodotti far sentire la sua influenza che sulla quarta o quinta cifra, perciò nei calcoli usuali potrà essere trascurata senza pericolo alcuno di incorrere in errori apprezzabili in pratica, e lo stesso deve dirsi

di $\frac{P \operatorname{sen} \alpha}{GA}$ il quale diventa trascurabile, sia pel piccolo valore di $\operatorname{sen} \alpha$, sia per il grande valore che ordinariamente ha il coefficiente G . In ogni caso poi $\left(1 - \frac{P}{EA}\right)$ potrà sempre essere introdotto facilmente nelle formole finali considerandolo come fattore costante di ds . Le due formole precedenti potranno quindi essere scritte in via approssimata nel modo seguente

$$ds' = ds \left(1 - \frac{P}{EA}\right) = ds$$

$$dy = ds' \operatorname{sen} \alpha = ds \operatorname{sen} \alpha$$

e l'equazione differenziale esatta della curva elastica derivata tenendo conto di queste relazioni, diventa

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \alpha}{ds^2} &= -\frac{P}{EI} \frac{dy}{ds} = -\frac{P}{EI} \left(1 - \frac{P}{EA}\right) \operatorname{sen} \alpha = \\ &= -\frac{P}{EI} \operatorname{sen} \alpha = -m^2 \operatorname{sen} \alpha \end{aligned}$$

e l'equazione da integrare risulta

$$\frac{d^2 \alpha}{ds^2} = -m^2 \operatorname{sen} \alpha$$

nella quale m^2 rappresenta il fattore $\frac{P}{EI} \left(1 - \frac{P}{EA}\right)$, e con più larga approssimazione il fattore $\frac{P}{EI}$.

Moltiplicando i due membri di questa equazione per $2d\alpha$ ed integrando fra α_0 corrispondente al punto B ed α corrispondente ad un punto qualsiasi V dell'asse s'ottiene

$$\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 = 2m^2 (\cos \alpha - \cos \alpha_0)$$

poichè nel punto B è necessariamente $y=0$, quindi è nullo il momento $M = -Py$, e per conseguenza è anche $\left(\frac{d\alpha}{ds}\right) = -\frac{Py}{EI} = 0$.
 $\alpha = \alpha_0$

Abbiamo visto che l'equazione della curva elastica è data da

$$\frac{d\alpha}{ds} = -m^2 y$$

quindi, sostituendo nella formola superiore a $\frac{d\alpha}{ds}$ il suo valore, risulta

$$y^2 = \frac{2}{m^2} (\cos \alpha - \cos \alpha_0)$$

che dà per y il valor massimo f quando $\alpha = 0$, cosa che appare anche dalla figura in causa della simmetria che presenta la curva dell'asse deformato della travatura. Ponendo $\alpha = 0$ si ricava

$$f^2 = \frac{2}{m^2} (1 - \cos \alpha_0) = \frac{2}{P} E I (1 - \cos \alpha_0)$$

e ricordando che per piccoli valori di α_0 si può con sufficiente approssimazione porre $(1 - \cos \alpha_0) = \frac{\alpha_0^2}{2}$ si ottiene finalmente

$$f^2 = \frac{\alpha_0^2}{m^2}$$

$$f = \sqrt{\frac{E I}{P}} \sqrt{2(1 - \cos \alpha_0)} = \alpha_0 \sqrt{\frac{E I}{P} \left(1 - \frac{P}{E A}\right)} = \alpha_0 \sqrt{\frac{E I}{P}} = \frac{\alpha_0}{m}.$$

Se nell'equazione

$$\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 = 2m^2 (\cos \alpha - \cos \alpha_0)$$

si separano le variabili si ha

$$m ds = \frac{d\alpha}{\sqrt{(2 \cos \alpha - \cos \alpha_0)}}$$

equazione il cui integrale esteso fra i limiti $s=0$ ed $s=l$ è facilmente determinabile. Il primo membro dà

$$m l = \sqrt{\frac{P}{E I}} l \quad \text{oppure più esattamente } l \sqrt{\frac{P}{E I} \left(1 - \frac{P}{E A}\right)},$$

pel secondo membro basta osservare che questo integrale è conosciuto, poichè coincide con quello che si incontra nella teoria del pendolo semplice. Detto $(n-1)$ il numero di volte che α si annulla l'integrale definito fra i limiti $+\alpha_0$ e $-\alpha_0$ è dato da

$$(n-1)\pi \left(1 + \frac{\alpha_0^2}{16} + \frac{11\alpha_0^4}{3072} + \dots \right)$$

quindi l'equazione superiore integrata dà

$$l m = l \sqrt{\frac{P}{EI}} = (n-1)\pi \left(1 + \frac{1}{16}\alpha_0^2 + \frac{11}{3072}\alpha_0^4 + \dots \right)$$

e nel caso che α si annulli una volta sola, ossia che esistano nella trave solo due nodi

$$l \sqrt{\frac{P}{EI}} = \pi \left(1 + \frac{1}{16}\alpha_0^2 + \frac{11}{3072}\alpha_0^4 + \dots \right) (*)$$

α_0 per ipotesi è piccolissimo, quindi si possono trascurare le sue potenze superiori e scrivere

$$\begin{aligned} \alpha_0^2 &= 16 \left[\frac{l}{(n-1)\pi} \sqrt{\frac{P}{EI}} - 1 \right] = \\ &= \frac{16l}{(n-1)\pi \sqrt{EI}} \left[\sqrt{P} - \frac{(n-1)\pi \sqrt{EI}}{l} \right] = \\ &= \frac{16l}{(n-1)\pi \sqrt{EI}} \left[\sqrt{P} - \sqrt{P_0} \right]. \end{aligned}$$

(*) Vedi BRESSE, Opera citata. — LEBER et BRICKA, *Calculs des ponts métalliques*.

Il primo termine di questa espressione s'ottiene immediatamente osservando che α ed α_0 essendo angoli piccolissimi si può scrivere con sufficiente approssimazione

$$\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{2(\cos \alpha - \cos \alpha_0)}} = \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}} = \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \frac{\left(d\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2}} = \text{arsen} \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right) \Bigg|_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} = \pi$$

Superiormente si è trovato

$$\alpha_0^2 = m^2 f^2 = \frac{P f^2}{EI}$$

quindi eliminando α_0

$$\frac{P}{EI} f^2 = 16 \left(\frac{l}{(n-1)\pi} \sqrt{\frac{P}{EI} - 1} \right)$$

$$f = 4 \sqrt{\frac{EI}{P}} \sqrt{\frac{l}{(n-1)\pi} \sqrt{\frac{P}{EI} - 1}}.$$

Perchè la flessione sia possibile bisogna che la freccia f abbia un valore superiore allo zero, quindi dovrà essere

$$\frac{l}{(n-1)\pi} \sqrt{\frac{P}{EI} - 1} > 0$$

ossia

$$P > E \pi^2 \frac{I}{l^2} (n-1)^2 \geq P_0$$

risultato che coincide con quello ottenuto mediante il processo d'analisi usato precedentemente e che è indicato ordinariamente col nome di formola di EULERO. Ciò si poteva facilmente prevedere, poichè quel procedimento appunto cessa di essere rigoroso quando incomincia a presentarsi la flessione laterale.

Se si fosse tenuto conto dell'accorciamento prodotto dalla compressione semplice allora

$$m^2 = \frac{P}{EI} \left(1 - \frac{P}{EA} \right)$$

e la formola che dà il valor limite dello sforzo che può produrre la flessione sarebbe

$$P_0' = E \pi^2 \frac{I}{l^2} (n-1)^2 \left(\frac{EA}{EA - P} \right) = P_0 \frac{EA}{EA - P} = P_0 \frac{1}{1 - \frac{P}{EA}}$$

cioè in questo caso si ha per P un valore alquanto maggiore.

Appena il valor limite P_0 è sorpassato incomincia la flessione laterale e la freccia f cresce rapidamente al crescere di P poichè

$$\frac{16 EI}{P} \left[\frac{l}{(n-1)\pi} \sqrt{\frac{P}{EI}} - 1 \right] = \frac{16 l \sqrt{EI}}{(n-1)\pi P} (\sqrt{P} - \sqrt{P_0})$$

rappresenta una quantità di valore sensibile in causa dell'importanza del primo fattore $\frac{16 EI}{P}$, oppure $\frac{16 l \sqrt{EI}}{(n-1)\pi P}$, anche quando il secondo fattore abbia un valore molto piccolo. In queste condizioni la deformazione esce dal campo di quelle che per ipotesi fondamentale si considerano unicamente nella scienza delle costruzioni ed il solido si può trovare presto in condizioni tali da dover temere la rottura. La conseguenza di questa proprietà è che le travi soggette a pressoflessione (se pur è lecito esprimersi in tal modo) sono in una specie di equilibrio instabile, in guisachè aumenti non molto forti nello sforzo di compressione possono condurre alla rottura.

Per le applicazioni di questa teoria al calcolo dei solidi soggetti a compressione interessa dare alla espressione della freccia un'altra forma, nella quale sia messa in evidenza la differenza ΔP_0 fra lo sforzo P agente sulla trave e lo sforzo limite P_0 . Abbiamo visto come, ricordando che $\frac{l}{(n-1)\pi} \sqrt{\frac{P_0}{EI}} = 1$, l'espressione della freccia si trasformi nel modo seguente

$$\begin{aligned} f^2 &= 16 \frac{EI}{P} \left[\frac{l}{(n-1)\pi} \sqrt{\frac{P}{EI}} - 1 \right] = \\ &= 16 \frac{EI}{P} \left[\frac{l}{(n-1)\pi \sqrt{EI}} (\sqrt{P} - \sqrt{P_0}) \right]. \end{aligned}$$

Se si suppone che $P - P_0 = \Delta P_0$ non sia molto grande, per una ricerca di prima approssimazione si potrà considerare $(\sqrt{P} - \sqrt{P_0})$ come il differenziale di $\sqrt{P_0}$, e quindi senza commettere un grave errore si potrà porre

$$\sqrt{P} - \sqrt{P_0} = d\sqrt{P_0} = \frac{\Delta P_0}{2\sqrt{P_0}} = \frac{\Delta P_0}{2\sqrt{EI}} \frac{l}{(n-1)\pi}.$$

Sostituendo questo valore nella formola precedente, avvertendo che

P è, per ipotesi, poco diverso da P_0 e quindi in via approssimata può essere sostituito col valore limite $E \pi^2 \frac{I}{l^2} (n-1)^2$, si ottiene

$$f^2 = \frac{16 EI}{P} \frac{l^2}{2 (n-1)^2 \pi^2 EI} \Delta P_0 = \frac{8 l^4 \Delta P_0}{(n-1)^4 \pi^4 EI} = \frac{8 l^4 \Delta P_0}{(n-1)^4 \pi^4 EA r^2}$$

nella quale r rappresenta il raggio di girazione della sezione resistente. Finalmente passando dall'eguaglianza fra i quadrati a quella fra le radici

$$f = \pm \frac{1}{(n-1)^2 \pi^2} \sqrt{\frac{8 \Delta P_0}{EA} \frac{l^2}{r}} \quad (87)$$

che dà per la freccia f un valore abbastanza prossimo al vero tutte le volte che si debbano considerare sforzi di compressione P superiori di poco al valor limite P_0 .

L'integrazione della equazione

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = - \frac{P}{EI} y \quad (88)$$

può essere fatta ponendo $\frac{dy}{dx} = p$ (*) e quindi

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{p dp}{dy}$$

(*) COLLIGNON E., *Cours de mécanique appliquée aux constructions. Résistance des matériaux*. — COLLIGNON tratta estesamente questa questione in una memoria pubblicata negli *Annales des ponts et chaussées*, 1889, 1° semestre, pag. 98. La curva elastica è studiata completamente riportandola all'arco di *Yvon de Villarceau* od arco idrostatico; essa infatti ha per equazione $\frac{EI}{\rho} = M = -Py$, da cui si ricava $\rho y = -\frac{EI}{P}$, dove $\frac{EI}{P}$ ha un valore costante.

Veggasi lo studio dell'arco idrostatico anche nel *Trattato di meccanica applicata* di RANKINE.

che sostituito nella (88) dà

$$\frac{p \, d p}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = - \frac{P}{E I} y \, d y.$$

Se si indica con C una costante, l'equazione precedente integrata dà

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{P}{2 E I} y^2 - C$$

l'integrazione poi di questa ultima equazione è in relazione colla teoria degli integrali ellittici. Questa ricerca non sembra presentare interesse notevole per l'ingegnere, avendo essa piuttosto carattere di un utile esercizio d'analisi che di uno studio di proprietà interessanti nella pratica. Si è già dimostrato che i solidi compressi, quando si è manifestata la flessione laterale, sono in uno stato d'equilibrio poco stabile e che dall'ingegnere deve sempre essere evitato se si vuole arrivare a costruzioni corrispondenti ai caratteri generali di resistenza e stabilità. Inoltre si è avvertito che la flessione laterale nei solidi compressi aumenta rapidamente all'aumentare degli sforzi, quindi ben presto esce dalla cerchia delle deformazioni molto piccole rispetto alle dimensioni del corpo, che sono le sole che siano prese in esame dalle formole della resistenza dei materiali.

Riassumendo le cose dette superiormente relativamente alle travi a sezione trasversale costante soggette a compressione prodotta da forze agenti secondo l'asse delle medesime e la cui lunghezza è notevole rispetto alla minima dimensione trasversale si possono enunciare le conclusioni seguenti:

a) Quando in un solido prismatico si verifica la flessione laterale (pressoflessione) l'analisi del fenomeno fatta mediante la formola approssimata $E I \frac{d^2 y}{d x^2} = M$ può bensì servire a fissare con sufficiente approssimazione lo sforzo limite P_* , sotto l'azione del quale incomincia a prodursi la flessione laterale, ma non può dare alcuna indicazione sull'importanza della flessione al crescere dello sforzo di compressione, perchè in questo caso particolare, avvenendo la flessione, non sono più realizzate le condizioni presupposte dalla formola stessa; ciò è quanto dire che la predetta formola cade in difetto;

b) Se si prende in esame il fenomeno della pressoflessione assoggettandolo ad un'analisi più rigorosa mediante la formola

$\frac{EI}{\rho} = M$, esatta entro i limiti dell'ipotesi ammessa sulla conservazione delle sezioni piane, si arriva facilmente a determinare l'espressione della freccia elastica di deformazione f ed il valore dello sforzo limite P_0 capace di dare origine a pressoflessione, quest'ultimo risulta sensibilmente uguale a quello trovato col metodo precedente;

c) Il valore dello sforzo limite P_0 sotto l'azione del quale è possibile un incurvamento laterale della trave compressa è dato dalla formola

$$P_0 = P_{(n-1)} = E \pi^2 \frac{I}{l^2} (n-1)^2 = E \pi^2 A \left(\frac{r}{l} \right)^2 (n-1)^2.$$

Se si volesse tener conto della condensazione od accorciamento prodotto dallo sforzo di compressione il valore di P_0 riescirebbe alquanto maggiore (non molto) poichè andrebbe moltiplicato pel fattore $\frac{1}{\left(1 - \frac{P}{EA}\right)}$ il cui valore è vicinissimo all'unità; ordi-

nariamente tale fattore suole essere trascurato perchè non può portare nel valore di P_0 una differenza, che abbia valore apprezzabile per la pratica. P_0 cresce rapidamente coll'aumentare del numero n dei nodi, e precisamente colla legge dei quadrati di questo numero diminuito di un'unità, ossia col quadrato del numero di tronchi limitati dai nodi, in guisa che per le colonne semplici fissate soltanto agli estremi e libere di ruotare intorno ai medesimi

$$P_0 = P_1 = E \pi^2 \frac{I}{l^2} = E \pi^2 A \left(\frac{r}{l} \right)^2$$

e per le colonne a più nodi o punti vincolati (n nodi)

$$P_0 = P_2 = 4 E \pi^2 \frac{I}{l^2} = 4 E \pi^2 A \left(\frac{r}{l} \right)^2$$

$$P_0 = P_3 = 9 E \pi^2 \frac{I}{l^2} = 9 E \pi^2 A \left(\frac{r}{l} \right)^2$$

.....

$$P_0 = P_{(n-1)} = (n-1)^2 E \pi^2 \frac{I}{l^2} = (n-1)^2 E \pi^2 A \left(\frac{r}{l} \right)^2;$$

d) A partire dal valore limite P_0 che può produrre la flessione laterale piccoli aumenti ΔP_0 nello sforzo di compressione danno luogo ad incrementi sensibili nella freccia di inflessione, in guisachè la freccia stessa esce presto dal campo delle deformazioni molto piccole, le sole che si considerano nella ordinaria teoria della resistenza dei materiali, il solido si trova in condizioni sfavorevoli di resistenza e prossimo alla rottura, finalmente le formole di elasticità e resistenza non possono dare risultati attendibili se non sono applicate con avvertenze speciali (*);

e) Appena lo sforzo di compressione P supera lo sforzo limite P_0 capace di produrre la flessione laterale, questa si verifica e per piccoli aumenti ΔP_0 dello sforzo P_0 si può ritenere che la freccia f sia proporzionale al quadrato della lunghezza l del solido divisa pel quadrato del numero dei nodi diminuito di un' unità, alla radice quadrata dell'incremento ΔP_0 della forza P_0 ed inversamente proporzionale alla radice quadrata del momento d'inerzia o d'inflessibilità della trave

$$f = \frac{1}{(n-1)^2 \pi^2} \sqrt{\frac{8 \Delta P_0 l^2}{E A r}};$$

f) Un solido prismatico ad asse rettilineo soggetto a pressoflessione sotto l'azione di sforzi P superiori al valor limite P_0 capace di produrre la flessione laterale si trova in uno stato di equilibrio che in certo qual modo può paragonarsi in via largamente approssimata ad una specie di equilibrio instabile, perchè aumenti eventuali non molto forti del carico agente sulla trave possono far aumentare considerevolmente le deformazioni della medesima e mettere il solido in condizioni assai prossime alla rottura ed anche produrla effettivamente;

g) La resistenza alla flessione laterale in un solido prismatico soggetto a compressione a parità di area resistente può essere accresciuta in due modi diversi, disponendo della forma della sezione resistente in modo che il minimo momento d'inerzia I riesca maggiore, oppure aumentando il numero dei nodi: infatti

$$P_0 = P_{(n-1)} = (n-1)^2 E \pi^2 \frac{I}{l^2} = (n-1)^2 E \pi^2 A \left(\frac{r}{l} \right)^2.$$

(*) In un numero speciale di questo capitolo saranno discusse le formole in uso fra gli ingegneri pel calcolo dei solidi soggetti a sforzi assiali di compressione (Vedi num. 31).

Naturalmente a questo aumento della resistenza alla flessione laterale esiste un limite, il quale viene imposto dal fatto che per quanto resistente alla deformazione per flessione il solido deve altresì poter resistere alla compressione semplice. In altri termini la trave deve resistere ad una doppia sollecitazione e quindi soddisfare contemporaneamente a due condizioni o formole, una di resistenza e l'altra dedotta dalla teoria delle deformazioni dei solidi ad asse rettilineo soggetti a compressione

$$C = R A$$

$$C < P_0 = (n-1)^2 E \pi^* \frac{I}{l^2} = (n-1)^2 E \pi^* A \left(\frac{r}{l} \right)^2$$

la prima garantisce che il solido non si romperà per schiacciamento semplice, la seconda che esso non sarà soggetto a flessione laterale. Se sopra due assi Ox ed Oy (Fig. 138^a, tav. XXVII)

si portano come ascisse i valori $\frac{l}{n-1}$ e come ordinate gli sforzi

C , la prima formola sarà rappresentata da una retta parallela ad Ox , perchè C è indipendente dalla lunghezza, la seconda invece da una serie di punti posti sopra una curva assintotica rispetto agli assi, poichè lo sforzo di compressione $C = P_0$ varia in ragione

inversa di $\left(\frac{l}{n-1} \right)^2$ quando I ed A si suppongano costanti. Al

punto a in cui i due diagrammi si intersecano corrisponde il valore di $\left(\frac{l}{n-1} \right)$ che a parità di area resistente e di momento di

inerzia è ugualmente favorevole per la resistenza alla compressione ed alla pressoflessione. Se si volesse tener conto anche della variazione del momento d'inerzia I per una data estensione A di superficie resistente, allora occorrerebbe tracciare un sistema di curve, arrivando ad una tavola grafica analoga a quelle studiate al numero 16 (Parte II). Non sembra necessario costruire esattamente una tale tavola per le varie sezioni resistenti più comunemente usate, potendo bastare avere indicato il modo di comporla:

intanto osserviamo che determinando il segmento $Ob = \frac{l}{n-1}$

ascissa del punto a si otterrebbe il numero di punti fissi più convenienti per avere una resistenza uguale ai due modi di sollecitazione; n deve necessariamente in pratica essere un numero intero; qualora si ottenesse per esso un numero frazionario si

prenderà il numero intero immediatamente superiore od inferiore come soluzione della questione, oppure, se è possibile, si cercherà di variare convenientemente il valore di A e di I . Lo stesso risultato si può ottenere uguagliando i due valori di C

$$R A = E \pi^2 \frac{I}{l^2} (n-1)^2 = E \pi^2 \frac{A r^2}{l^2} (n-1)^2$$

e risolvendo rispetto ad

$$\frac{\left(\frac{l}{n-1} \right)}{r}$$

si avrà il limite della lunghezza libera $\left(\frac{l}{n-1} \right)$ al disotto della quale la rottura avverrebbe prima per compressione che per flessione laterale

$$\frac{\left(\frac{l}{n-1} \right)}{r} = \pi \sqrt{\frac{E}{R}} \quad (*)$$

(*) BRESSE con un'analisi più rigorosa, cioè tenendo conto del fattore $\left(1 - \frac{P}{EA} \right)$, ottiene

$$\frac{\left(\frac{l}{n-1} \right)}{r} = \pi \sqrt{1 + \frac{E}{R}}$$

I valori di E e di R risultano dalle medie di coefficienti determinati sperimentalmente, per cui l'aggiunta di un'unità al quoziente $\frac{E}{R}$, di sua natura molto grande pei materiali usuali, non può influenzare sensibilmente il risultato, quindi si è giudicato opportuno non togliere nulla alla semplicità dell'esposizione per arrivare ad un risultato che non differisce, e non può differire sensibilmente da quello ottenuto. Esso può ricavarsi facilmente nello stesso modo introducendo il fattore costante $\left(1 - \frac{P}{EA} \right)$ ed osservando che se si può ritenere $P = RA$, e quindi $1 - \frac{P}{EA} = \frac{E-R}{E}$,

$$\frac{\frac{l}{n-1}}{r} = \pi \sqrt{\frac{E}{R} \left(\frac{E}{E-R} \right)} = \pi \sqrt{\frac{E}{R} \left(1 + \frac{R}{E-R} \right)}$$

Pei materiali che si impiegano ordinariamente nelle costruzioni usando i valori medî dati dai Manuali (Vedi *Manuale* della Società HÜTTE, pag. 236) $\pi \sqrt{\frac{E}{R}}$ prende i valori seguenti

$$\text{Ferro} \quad \pi \sqrt{\frac{E}{R}} = 3,15 \sqrt{\frac{16\,000\,000\,000}{36\,000\,000}} = 66,20$$

$$\text{Acciaio} \quad \pi \sqrt{\frac{E}{R}} = 3,14 \sqrt{\frac{22\,000\,000\,000}{42\,000\,000}} = 71,80$$

$$\text{Ghisa} \quad \pi \sqrt{\frac{E}{R}} = 3,14 \sqrt{\frac{10\,000\,000\,000}{75\,000\,000}} = 36,28$$

$$\text{Quercia} \quad \pi \sqrt{\frac{E}{R}} = 3,14 \sqrt{\frac{1\,170\,000\,000}{6\,600\,000}} = 41,80 \text{ (*)};$$

ed approssimatamente

$$\frac{\frac{l}{n-1}}{r} = \pi \sqrt{1 + \frac{E}{R}}$$

perchè R è in generale molto piccolo rispetto ad E . Vedi BRESSE, Opera citata, Seconda edizione, pag. 219.

(*) Nell'ultima edizione tedesca del *Manuale* della Società HÜTTE (15^a ediz., pag. 307) in base a ricerche recenti e più accurate (Vedi CONSIDÈRE, *L'emploi du fer et de l'acier dans les constructions - Annales des ponts et chaussées*, 1885) si fa distinzione fra il carico di resistenza R_s a tensione e compressione e quello a flessione.

Per la resistenza del ferro a tensione e compressione per metro quadrato

$$R_s = 38\,000\,000 \qquad E = 20\,000\,000\,000$$

$$\pi \sqrt{\frac{E}{R_s}} = 3,14 \sqrt{\frac{20\,000\,000\,000}{38\,000\,000}} = 72,00.$$

Per l'acciaio, metallo omogeneo ottenuto col processo BESSEMER, THOMAS oppure MARTIN e SIEMMENS, non è indicato un numero speciale per resistenza a compressione. Ritenendo per metro quadrato

$$R_s = 55\,000\,000 \qquad E = 22\,000\,000\,000$$

$$\pi \sqrt{\frac{E}{R_s}} = 3,14 \sqrt{\frac{22\,000\,000\,000}{55\,000\,000}} = 62,80.$$

Moltiplicando questi rapporti per la radice quadrata dell'indice di stabilità $\frac{R_s''}{R_a''}$, pei metalli

$$\sqrt{\frac{R_s''}{R_a''}} = \sqrt{6} = 2,4495$$

si ottengono i valori di $\frac{\left(\frac{l}{n-1}\right)}{\gamma'}$ quando invece del carico di rottura R_s'' si introduca nelle formole il limite dei carichi permanenti ammissibile R_a'' corrispondente al materiale che si considera (*), cioè il limite pel quale può incominciare la flessione senza che il solido si rompa per compressione semplice.

h) Nelle costruzioni aventi carattere di stabilità lo sforzo di compressione, a cui può essere soggetto un solido prismatico ad asse rettilineo sollecitato da forze dirette secondo il suo asse, deve sempre essere una frazione abbastanza piccola, oltrecchè del carico di rottura per semplice compressione, anche dello sforzo limite di pressoflessione $P_0 = (n-1)^2 E \pi^2 \frac{I}{l^2}$. Ordinariamente il rapporto fra il carico ammissibile ed il carico che produce la rottura si suol fissare pei metalli $\frac{1}{6}$, da $\frac{1}{7}$ ad $\frac{1}{8}$ pei legnami ed $\frac{1}{10}$ per le murature. Lo sforzo limite P_0 nei solidi sufficientemente lunghi non è precisamente uguale al carico di rottura, per altro abbiamo visto che non ne è molto lontano, e che in ogni caso un solido compresso ed inflesso lateralmente si trova in condizioni particolari di semi instabilità, che è opportuno siano sempre evitate in una costruzione. In base a queste considera-

(*) BRESSE ottiene

$$\text{pel ferro} \quad \pi \sqrt{1 + \frac{E}{R_a}} = 90$$

$$\text{per la ghisa} \quad \pi \sqrt{1 + \frac{E}{R_a}} = 40$$

$$\text{quercia} \quad \pi \sqrt{1 + \frac{E}{R_a}} = 50.$$

La differenza dipende dai valori assunti per il modulo di elasticità e per il limite dei carichi permanenti. Vedi BRESSE, Opera citata, Seconda edizione, Parte prima, pag. 219.

zioni ed avuto riguardo a possibili eccessi straordinari nel carico ed all'effetto di probabili sollecitazioni dinamiche sarà opportuno di fissare il carico ammissibile P_a una frazione del carico P_o che non si scosti troppo dall'ordinario coefficiente di sicurezza tutte le volte che il solido abbia una lunghezza sufficiente per inflettersi lateralmente prima di rompersi per compressione semplice. Si porrà quindi

$$P_a = \frac{1}{n'} P_o$$

facendo $\frac{1}{n'}$ uguale ad $\frac{1}{5}$ pel ferro, $\frac{1}{6}$ per la ghisa ed $\frac{1}{10}$ pei legnami. Qualcuno consiglia di porre $\frac{1}{n'} = \frac{2}{5}$ (*), tale coefficiente di sicurezza però sembra esagerato ($n' = \frac{5}{2}$ troppo piccolo) e la maggioranza degli scrittori ed ingegneri adotta per coefficiente di sicurezza numeri poco diversi da quelli riportati superiormente.

30. Solidi prismatici ad asse rettilineo soggetti a compressione diversamente vincolati ai loro estremi. — Rappresenti AB (Fig. 139*, lav. XXVII) l'asse rettilineo di un solido prismatico sollecitato al suo estremo A da uno sforzo assiale di compressione P , da una forza F_1 diretta normalmente all'asse e da un momento M_1 , e proponiamoci di determinare le condizioni di resistenza del medesimo alla compressione ed alla flessione laterale. Interessando la determinazione dello sforzo limite P_o capace di produrre la flessione laterale, per quanto è stato detto al numero precedente, la

(*) CASTIGLIANO, *Équilibre des systèmes élastiques*, Torino, A. F. Negro. COLLIGNON nella Memoria citata alla pagina 236 consiglia di prendere

$$\frac{P}{A} < \frac{R_s}{7} \qquad \frac{P}{A} < \frac{E\pi^2}{3} \frac{r^2}{l^2}.$$

Se si tien conto delle inesattezze sovente inevitabili in pratica nei calcoli usuali in causa di sollecitazioni dinamiche, di eccentricità di messa in opera, di sforzi secondari, trasversali, ecc., e della piccola differenza che spesso passa fra lo sforzo capace di produrre la flessione laterale e quello capace di rompere il solido per pressoflessione sembra che per la formola $P = E\pi^2 \frac{Ar^2}{l^2}$ che assicura la resistenza alla flessione laterale sia consigliabile un indice di stabilità superiore al 3, come è indicato nel testo.

Pei legnami si suole fissare $n' = 10$, superiore cioè al valore in uso per gli altri modi di sollecitazione, in causa della loro natura fibrosa e della debole aderenza laterale delle fibre.

ricerca può essere fatta col mezzo della formola $E I \frac{d^3 y}{dx^3} = M$, poichè questa nella determinazione di P_0 permette di raggiungere sensibilmente lo stesso grado di esattezza che si può ottenere colla formola più esatta

$$\frac{d^2}{ds} = \frac{M}{E I}.$$

Nel caso che ci occupa le caratteristiche di sollecitazione, tenendo conto di una possibile inflessione laterale y della trave e di una eccentricità b nell'azione della forza P , sono le seguenti

$$C = P$$

$$F = F_1$$

$$M = M_1 + P(b - y) + F_1(l - x)$$

e quindi l'equazione della curva elastica, tenendo conto soltanto dell'effetto prodotto dal momento flettente, è

$$E I \frac{d^2 y}{dx^2} = M_1 + P(b - y) + F_1(l - x) \quad (89).$$

Volendo prendere in considerazione anche l'effetto prodotto dallo sforzo di taglio F l'equazione sarebbe invece

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_1 + P(b - y) + F_1(l - x)}{E I} + \frac{d \left(\frac{F}{G A} \right)}{dx}.$$

Poniamo

$$y' = \frac{M_1 + P(b - y) + F_1(l - x)}{M_1 + P b}$$

e deriviamo due volte rispetto ad x

$$\frac{dy'}{dx} = - \frac{P \frac{dy}{dx} + F_1}{M_1 + P b}$$

$$\frac{d^2 y'}{dx^2} = - \frac{P}{M_1 + P b} \frac{d^2 y}{dx^2}$$

(*) Se si volesse prendere in considerazione anche il coefficiente V di correzione, di cui si è parlato nella Parte I, num. 57, pag. 167, la formola sarebbe invece

$$E I \frac{d^2 y}{dx^2} = M_1 + P(b - y) + F_1(l - x) + \frac{d \left(\frac{V F}{G A} \right)}{dx}.$$

e quindi

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M_1 + P b}{P} \frac{d^2 y'}{dx^2}$$

Sostituendo questi valori nella (89) si ricava

$$\frac{d^2 y'}{dx^2} = - \frac{P}{EI} y'$$

equazione analoga a quella trovata studiando l'equilibrio di un solido prismatico soggetto a compressione per l'effetto di un unico sforzo P agente secondo l'asse (Vedi Parte II, pag. 227), e che si integra nello stesso modo dando per risultato (Vedi form. 84)

$$y' = C \cos x \sqrt{\frac{P}{EI}} + D \sin x \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

e se si sostituisce ad y' il suo valore si ha

$$\frac{M_1 + P(b-y) + F'(l-x)}{M_1 + P b} = C \cos x \sqrt{\frac{P}{EI}} + D \sin x \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

in cui debbono essere determinate le due costanti C e D in base ai dati della questione.

Osserviamo che per $x=0$ y è zero, e che

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \int_0^x \frac{M dx}{EI} + \frac{F_1}{GA}$$

diventa uguale a $\frac{F_1}{GA}$, od anche $\frac{VF_1}{GA}$ se si vuol tener conto del coefficiente di correzione corrispondente allo sforzo di taglio (Vedi Parte I, num. 57, pag. 167); si hanno quindi le due relazioni

$$C = \frac{M_1 + P b + S_1 l}{M_1 + P b}$$

$$\frac{-P \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} - F_1}{M_1 + P b} = D \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

$-P \left(\frac{d y}{d x} \right)_{x=0} = -P \frac{F_1}{G A}$ è in generale una quantità molto piccola pei materiali usuali in causa del grandissimo valore del coefficiente di elasticità trasversale G , quindi in generale si potrà ritenere con sufficiente approssimazione

$$C = \frac{M_1 + P b + F_1 l}{M_1 + P b}$$

$$D = -\frac{F_1}{M_1 + P b} \sqrt{\frac{E I}{P}}$$

e l'equazione integrata della curva elastica diventa

$$M_1 + P (b - y) + F_1 (l - x) =$$

$$= (M_1 + P b + F_1 l) \cos x \sqrt{\frac{P}{E I}} - F_1 \sqrt{\frac{E I}{P}} \sin x \sqrt{\frac{P}{E I}} \quad (90).$$

a) Supponiamo che la trave (colonna) sia disposta verticalmente infissa nel suolo in B ed incastrata con esso, e che sia sollecitata all'estremo libero A da una sola forza P diretta secondo l'asse (*Fig. 140^a, tav. XXVII*). In questo caso $M_1 = 0$ $F_1 = 0$ e l'equazione (90), togliendo il fattor comune P , diventa

$$b - y = b \cos x \sqrt{\frac{P}{E I}} \quad (91).$$

Per $x = l$ deve essere $y = b$, quindi deve essere verificata una delle due condizioni seguenti:

α) $b = 0$, ossia y è costantemente nullo e non avviene alcuna flessione, che è quanto dire, che la colonna resiste per semplice compressione.

$$\beta) \cos \sqrt{\frac{P}{E I}} l = 0 \text{ ossia } P = \frac{E \pi^2}{4} \frac{I}{l^2} (2n + 1)^2 \quad (92)$$

in cui n è un numero intero qualsiasi. Il più piccolo valore P è dato da

$$P_0 = \frac{E \pi^2}{4} \frac{I}{l^2} (2n + 1)^2 \text{ quando } n = 0 \text{ cioè da } P_0' = \frac{E \pi^2}{4} \frac{I}{l^2} \quad (93)$$

e rappresenta la forza capace di mantenere incurvato il solido. Se $P < P_0'$ allora la colonna non subisce alcuna flessione laterale ed incurvata riprenderà la sua posizione normale appena cesseranno d'agire le cause che la mantenevano deformata. Se $P > P_0'$ allora la colonna s'infilette sotto l'azione del carico che la sollecita dando luogo all'incurvamento laterale già studiato al numero precedente. Anche in questo caso la freccia b rimane indeterminata e la causa di questa indeterminazione deve essere riconosciuta nella formola usata per lo studio del problema, la quale di sua natura, nel caso della pressoflessione, non presenta un'approssimazione sufficiente per la ricerca delle deformazioni elastiche; per arrivare ad un risultato bisogna ricorrere ad una analisi più rigorosa uniformandosi al metodo usato nel numero precedente.

La formola (93) poteva essere preveduta ed ottenuta facilmente osservando che in causa della simmetria di forma e di carico la curva AB rappresenta (*Fig. 140^a, tav. XXVII*) un mezz'arco della senoide, che si avrebbe qualora la colonna fosse libera di ruotare nelle sue sezioni estreme, sopportasse lo stesso carico ed avesse una lunghezza doppia AA_1 . Lo sforzo limite P_0 capace di produrre la flessione laterale è dato, in questo caso, da $P_0 = E \pi^2 \frac{I}{l^2}$, in cui $l_1 = AA_1$ è uguale a $2l$, quindi nel caso di cui ora ci occupiamo dovrà essere

$$P_0 = \frac{E \pi^2 I}{4 l^2}.$$

La formola (92) dà per P_0 diversi valori a seconda del valore di n , conducendo a conclusioni analoghe a quelle trovate nel numero precedente intorno alla molteplicità delle curve compatibili collo stato d'equilibrio. Infatti se nell'equazione (91) si sostituisce a P il valore P_0 si ottiene

$$y = b \left(1 - \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \right)$$

che rappresenta una senoide, la quale ha come linea media una retta parallela all'asse delle x e distante b da esso (*Fig. 141^a, tav. XXVII*). Per assicurarsi di questo basta considerare che

$$\cos \frac{2n+1}{2l} \pi x = \cos \frac{x}{\left(\frac{l}{2n+1} \right)} \frac{\pi}{2}$$

passa per valori successivamente uguali a 1, 0, -1, 0, . . . mentre x passa pei valori $0, \left(\frac{l}{2n+1}\right), 2\left(\frac{l}{2n+1}\right), 3\left(\frac{l}{2n+1}\right)$, come è rappresentato nella figura 141* (Tav. XXVII) per un'asta nella quale si è supposto $n=3$, $(n+1)$ corrisponde al numero di punti di flesso della curva, pei quali il momento flettente è uguale allo zero e che nel numero precedente abbiamo indicato col nome di *nodi* o *punti fissi*: la leggera differenza fra questa formola e quella determinata nel caso precedente dipende unicamente dal fatto che i nodi non dividono la lunghezza totale del solido in un numero esatto di parti uguali: se $n=1$

$$P_0 = \frac{9}{4} E \pi^2 \frac{I}{l^2};$$

b) Supponiamo che le estremità della trave siano incastrate orizzontalmente e libere di muoversi nel senso dell'asse delle x , ma non parallelamente a quello delle y (Fig. 143*, tav. XXVII), e che il solido sia sollecitato da una forza P agente secondo l'asse. In questo caso

$$F_1 = 0 \qquad b = 0$$

e l'equazione (90) diventa

$$y = \frac{M_1}{P} \left(1 - \cos x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) \quad (94)$$

e quindi

$$\frac{dy}{dx} = \alpha = \frac{M_1}{P} \sqrt{\frac{P}{EI}} \sin x \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (95)$$

nelle quali deve essere

$$\text{per } x=0 \qquad y=0 \qquad \text{ed} \qquad \alpha=0$$

$$\text{per } x=l \qquad y=0 \qquad \text{ed} \qquad \alpha=0$$

ciò importa che sia

$$\cos l \sqrt{\frac{P}{EI}} = 1 \qquad \sin l \sqrt{\frac{P}{EI}} = 0$$

ossia

$$P = 4 (m-1)^2 E \pi^2 \frac{I}{l^2} \quad (96)$$

in cui m è un numero intero, che rappresenta quante volte $\cos x \sqrt{\frac{P}{EI}}$ passa pel valore 1, ossia quanti punti dell'asse conservano un'ordinata nulla e rimangono fissi sulla sua direzione primitiva soddisfacendo contemporaneamente alla condizione che la sezione trasversale passante pei medesimi non subisca rotazione alcuna. Se si fa $m=2$ ed $x=\frac{l}{2}$ l'equazione (95) mostra che a questo punto corrisponde un massimo f dell'ordinata y perchè $\frac{dy}{dx}=0$, e le equazioni (96) e (94) danno

$$P_0 = 4 EI \pi^2 \frac{I}{l^2}$$

$$Pf = M_1 \left(1 - \cos \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) = M_1 (1 - \cos \pi) = 2 M_1$$

ossia a parità di lunghezza l un solido colle estremità incastrate ha una resistenza quadrupla di quella che avrebbe se le sezioni estreme fossero libere di ruotare ed il momento di incastro è uguale ad $\frac{1}{2} Pf$.

Anche qui, come nei casi precedenti, la freccia di inflessione f rimane indeterminata: per le ragioni più volte esposte sarebbe necessario ricorrere ad un'analisi più rigorosa partendo dalla formola $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{M}{EI}$ per evitare questa indeterminazione.

È interessante osservare che in causa della simmetria di forma e di sollecitazione l'espressione dello sforzo limite P_0 capace di mantenere inflessa la trave poteva essere dedotta per analogia dal caso trattato nel numero precedente. Infatti sia P_0' la forza limite capace di mantenere incurvato un solido prismatico le cui estremità sono libere di ruotare: sotto l'azione della forza P_0' la trave si deforma nel modo indicato schematicamente nella figura 142^a (Tav. XXVII). Se con n si indica il numero di nodi, la lunghezza $\frac{l}{n-1}$ corrispondente ai tronchi $A C_1, C_1 C_2, C_2 C_3, \dots$, è esattamente la metà delle distanze $D_1 D_2, D_2 D_3, \dots S_1 S_2, \dots$, comprese fra le sezioni che non subiscono alcuna rotazione e nelle quali l'ordinata della curva elastica presa dall'asse della trave dopo la deformazione diviene massima o minima. Se nella formola di EULERO si pone

$\frac{l}{n-1} = \frac{l}{2(m-1)}$ per lo stesso valore di l si ricava $(n-1) = 2(m-1)$ e quindi lo sforzo capace di mantenere incurvato secondo la linea $D_1 C_1 S_1 C_2 D_2 C_3 S_2 C_4 D_3$ l'asse della trave è data da

$$P_0 = 4(m-1) E \pi^2 \frac{I}{l^2} \quad (96)$$

in cui m rappresenta il numero dei massimi positivi, oppure dei massimi negativi dell'ordinata y . Come appare dalla figura il numero dei nodi o punti fissi diminuito di un'unità è in intima relazione col numero di massimi dello stesso segno essendo uguale al doppio del numero dei medesimi, oppure al doppio del loro numero accresciuto di un'unità. Il momento poi, che mantiene

orizzontali le sezioni in $D_1 D_2 D_3 S_1 S_2$, è dato da $\pm \frac{P f}{2}$ come risulta

dalla figura. Se si considerano i tronchi $D_3 C_4$ e $D_3 C_4 S_2 C_3$, essi sono analoghi a quelli studiati considerando una colonna incastrata ad un estremo e libera all'altro, coll'avvertenza che la loro lunghezza l_1 è rappresentata rispettivamente da $\frac{1}{4} \frac{l}{(m-1)}$ e da $\frac{3}{4} \frac{l}{m-1}$

colla condizione che sia $m=2$, quindi per analogia si ottengono ancora nei due casi le formole

$$P_0 = \frac{E \pi^2 I}{4 l^2} \quad P_0 = \frac{9}{4} E \pi^2 \frac{I}{l^2}.$$

I punti di momento nullo si determinano ponendo la derivata seconda della deformazione uguale allo zero, essi sono quindi dati dalla relazione

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_1}{P} \frac{P}{E I} \cos x \sqrt{\frac{P}{E I}} = 0$$

ossia da

$$x = (2k+1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E I}{P}} = (2k+1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E I}{E \pi^2 \frac{I}{l^2} 4(m-1)^2}} = \frac{(2k+1)}{4(m-1)} l$$

colla condizione che sia $2k+1 \leq 2(m-1)$ ed hanno per ordinata

$$y = \frac{M_1}{P} = \frac{P f}{2 P} = \frac{f}{2};$$

c) Supponiamo che il solido AB (*Fig. 144^a, tav. XXVIII*) sia libero di ruotare alle estremità e che sia sollecitato dalla forza P e da un'altra F_1 parallela all'asse delle y applicata nel punto A , alla quale supporremo attribuito un valor tale, che essa sia capace di mantenere il punto A sull'asse delle x . In questo caso $M_1 = 0$ e l'equazione (90) diventa

$$P(b - y) + F_1(l - x) = (Pb + F_1l) \cos\left(x\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) - F_1\sqrt{\frac{EI}{P}} \sin\left(x\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) \quad (97)$$

nella quale b può essere determinato osservando che per $x = l$ $y = b$ e quindi

$$b = F_1 \left[\sqrt{\frac{EI}{P}} \sin l \sqrt{\frac{P}{EI}} - l \cos l \sqrt{\frac{P}{EI}} \right] \frac{1}{P \cos l \sqrt{\frac{P}{EI}}}$$

Se si introduce la condizione che lo spostamento b dell'estremo A dell'asse nel senso delle y sia uguale allo zero si ottiene l'equazione

$$l \cos l \sqrt{\frac{P}{EI}} = \sqrt{\frac{EI}{P}} \sin l \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

perchè $\cos l \sqrt{\frac{P}{EI}}$ non può prendere un valore infinito. Da questa ultima relazione si ricava

$$l \sqrt{\frac{P}{EI}} = \tan\left(l \sqrt{\frac{P}{EI}}\right)$$

equazione trascendente della forma $\phi = \tan \phi$ (*) che ammette un'infinità di soluzioni rappresentate tutte dalla formola

$$(2n + 1)\pi + \psi$$

nella quale n è un numero intero e ψ una quantità che varia per ogni radice, ma che si conserva sempre inferiore a $\frac{\pi}{2}$. La radice

(*) S'intende che l'arco deve essere espresso in lunghezza supponendo il raggio del circolo uguale all'unità.

più piccola corrisponde ad $n = 0$ ed allora $\psi = 77^\circ, 27', 12''$, quindi con sufficiente approssimazione $(2n + 1)\pi + \psi = \frac{258}{180}\pi = 4,50$

$$l \sqrt{\frac{P_0}{EI}} = 4,50 \quad (*)$$

e finalmente

$$P_0 = 20,25 \frac{EI}{l} = 2,05 \cdot \pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad (**)$$

che dà il più piccolo valore dello sforzo di compressione capace di mantenere inflesso lateralmente il solido.

Se questo valore di P si sostituisce nell'equazione (97), in cui si sia fatto $b = 0$, si ottiene

$$-Py = F_1 \left\{ (x - l) + l \cos x \sqrt{\frac{P}{EI}} - \sqrt{\frac{EI}{P}} \sin x \sqrt{\frac{P}{EI}} \right\}$$

dalla quale possiamo ricavare il rapporto $\frac{y}{F_1}$, ma rimangono indeterminati i valori di y e di F_1 , i quali possono variare in un modo qualsiasi purchè rimangano piccolissimi e conservino fra loro un rapporto determinato. Questo risultato è analogo a quello trovato studiando l'equilibrio di una trave sollecitata a pressoflessione colle estremità impedito di ruotare e l'indeterminazione è da attribuirsi al modo speciale col quale è condotta l'analisi, la quale, per essere rigorosa, dovrebbe essere fatta collo stesso metodo usato nel numero precedente.

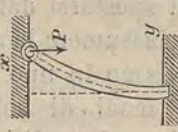
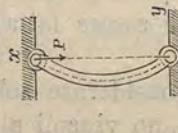
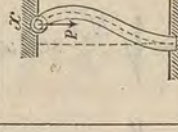
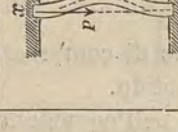
In generale in pratica si debbono considerare solidi soggetti a sforzi di compressione e che non hanno vincoli altrochè nelle sezioni estreme: in qualche caso però esiste lungo l'asse un certo numero di nodi o punti fissi impediti di spostarsi dalla direzione primitiva del medesimo. Allo scopo di riassumere le cose dette in questo e nel numero precedente riportiamo in uno specchio la rappresentazione schematica dei varî modi di sollecitazione, rappresentando con cerchi i punti dell'asse impediti di spostarsi trasversalmente al medesimo e per cui passano sezioni libere di ruotare, e con una barra tratteggiata le sezioni incastrate, cioè impedito di ruotare.

(*) Esattamente, ritenendo $\psi = 77^\circ, 27', 12''$, si ottiene $\pi + \psi = 4,4934$.

(**) Esattamente $P_0 = 20,19 \frac{EI}{l^2} = 2,046 \pi^2 \frac{EI}{l^2}$.

SOLIDI PRISMATICI AD ASSE RETTILINEO SOLLECITATI A PRESSOFLESSIONE

Casi più importanti da considerarsi in pratica

NUMERAZIONE	I	II	III	IV	V	VI
Indicazione schematica del modo di sollecitazione a pressoflessione e dei vincoli a cui il solido è soggetto.						
Descrizione dei vincoli ai quali è soggetto il solido.	Prisma incastrato orizzontalmente nella base B e libero di ruotare e di spostarsi orizzontalmente all'altro estremo.	Prisma colle estremità libere di avvicinarsi nel senso dell'asse delle x e di ruotare, ma non di spostarsi parallelamente all'asse delle y.	Prisma colle estremità libere di avvicinarsi nel senso dell'asse delle x e di ruotare, ma non di spostarsi parallelamente all'asse delle y e con n nodi (nella figura schematica n=3).	Prisma incastrato alla base inferiore, libero all'altra estremità di ruotare, con un nodo ad un terzo della sua lunghezza.	Prisma incastrato ad ambedue le estremità. Le sezioni incastrate possono avvicinarsi nel senso dell'asse delle x, e rimanendo sempre parallele a quello delle y.	Prisma incastrato alla base inferiore e coll'altro estremo libero di ruotare e di spostarsi nel senso dell'asse delle x, e mantenuto da una forza F', parallela all'asse delle y.
Valore dello sforzo limite P_0 capace di produrre la flessione e mantenere il prisma inflesso lateralmente.	$P_0^I = \frac{E\pi^2}{4} \frac{I}{l^2}$	$P_0^{II} = E\pi^2 \frac{I}{l^2}$	$P_0^{III} = E\pi^2 \frac{I}{l^2} (n-1)^2$	$P_0^{IV} = \frac{9}{4} E\pi^2 \frac{I}{l^2}$	$P_0^V = 4 E\pi^2 \frac{I}{l^2}$	$P_0^{VI} = 2,05 E\pi^2 \frac{I}{l^2}$
Rapporto degli sforzi limiti P_0 corrispondenti ai vari casi con quello corrispondente al caso secondo.	$\frac{P_0^I}{P_0^{II}} = \frac{1}{4}$	$\frac{P_0^{II}}{P_0^{III}} = 1$	$\frac{P_0^{III}}{P_0^{IV}} = \frac{9}{4} = 2,25$	$\frac{P_0^{IV}}{P_0^V} = 4$	$\frac{P_0^V}{P_0^{VI}} = 2,05$	

Se come termine di confronto si prende lo sforzo che può sopportare una colonna cogli estremi liberi di ruotare, ma non di spostarsi trasversalmente all'asse, i carichi, che la stessa colonna può sopportare quando varino i vincoli imposti ed il modo di sollecitazione come è indicato nel quadro precedente, stanno ordinatamente fra loro come i numeri

$$\frac{1}{4}, 1, (n-1)^2, \frac{9}{4}, 4, 2,05.$$

Gli sforzi poi sopportati in ogni caso a parità di lunghezza l sono proporzionali al momento d'inerzia I , in guisachè nel calcolo delle colonne, quando vi è timore che possa verificarsi la flessione laterale, più che l'area resistente interessa il valore del momento d'inerzia della sezione trasversale, ed a parità di area della sezione resistente una trave risulta tanto più rigida quanto maggiore è il momento d'inerzia più piccolo della sezione stessa. In causa di questa proprietà gli ingegneri sogliono distinguere in tre categorie le varie forme, che possono essere assegnate alla sezione trasversale di una colonna:

a) *Sezioni piene*. In queste sezioni la materia è avvicinata quanto è possibile al centro di gravità, non si verifica alcun vuoto interno od angolo rientrante, e quindi a parità di area il momento d'inerzia è molto piccolo, esse sono dette anche *sezioni poco rigide* od a *piccola rigidità*. Molti ingegneri distinguono anche le sezioni a *piccolissima rigidità* praticamente dette anche *sezioni senza rigidità* o *flessibili*, e sono quelle nelle quali la materia resistente è disposta in modo che il momento d'inerzia intorno ad un asse almeno sia molto piccolo, oppure quelle composte di elementi staccati, per ciascuno dei quali il momento di inerzia va calcolato rispetto ad un asse passante pel proprio centro di gravità e non pel centro di gravità di tutta la sezione resistente, perchè le aree corrispondenti alle sezioni delle varie parti non sono rese solidali con opportuni collegamenti. Le sezioni rettangolari con un lato molto allungato, i fasci di barre o di fili non resi solidali mediante chiodature o legature appartengono a questa categoria.

b) *Sezioni a nervature* nelle quali la materia resistente è allontanata dal centro di gravità per effetto della salienza delle nervature e quindi si ha un momento d'inerzia maggiore di quello che si avrebbe con una sezione piena ottenuta ripiegando le varie nervature in modo da aderire tutte fra loro e col nucleo centrale. Tali sezioni sogliono essere indicate anche col nome di

sezioni mediamente rigide od a media rigidità, e quelle più comunemente usate sono le seguenti:

FORMA geome- trica (schema)								
Nome speciale ad ogni sezione	ad angolo	a T semplice	a doppio T	a C	a Z	ad U	a croce greca	zorès

c) *Sezioni cave*. Sono quelle nelle quali la materia resistente è allontanata tanto quanto è costruttivamente possibile dal centro di gravità della figura, ottenendo così il maggior momento d'inerzia praticamente possibile a parità di area. Tali sezioni sono dette a *grande rigidità* od anche *molto rigide* e più particolarmente sono le seguenti ed altre di forma analoga:

FORMA geometrica della sezione resistente (schema)				
Nome speciale ad ogni sezione	tubulari	a cassone	cellulari	Phoenix e forme analoghe

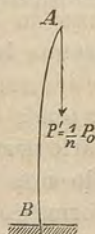
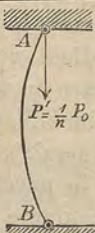
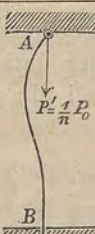
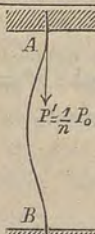
Tutte queste forme di sezione resistente diconsi *semplici* se sono ottenute in un sol pezzo al laminatoio o per fusione e *composte* invece se risultano dall'insieme di varie parti ottenute al laminatoio o per fusione rese solidali mediante chiodi, caviglie o legamenti in genere.

Pel calcolo di una colonna si deve determinare l'area resistente per mezzo della formola $P = R''A$ ed in seguito l'area trovata dovrà essere distribuita in una sezione che abbia tale momento d'inerzia da soddisfare alla formola d'EULERO. MÜLLER-BRESLAU (*), risolvendo la formola d'EULERO rispetto ad I e ponendo per R'' il valore corrispondente al materiale impiegato, cioè:

pel ferro	2 000 000	per centimetro quadrato
per la ghisa	1 000 000	» »
pel legno	110 000	» »

(*) *Resultate für Berechnung eiserner Träger und Stützen.*

e pel coefficiente di sicurezza $\frac{1}{n}$, pel ferro $\frac{1}{5}$, per la ghisa $\frac{1}{6}$, e pel legno $\frac{1}{10}$, ha composto il quadro seguente

Numero	Modo di sollecitazione	OSSERVAZIONI	MOMENTI D'INERZIA che debbono avere le sezioni resistenti in		
			ferro fucinato	ghisa	legno
I		L'estremo inferiore B è incastrato verticalmente e l'estremo superiore A è libero di spostarsi.	$I = \frac{P' l^2}{1000000}$	$I = \frac{12 P' l^2}{5000000}$	$I = \frac{2 P' l^2}{55000}$
II		Entrambi gli estremi sono liberi di ruotare e di avvicinarsi, ma non di spostarsi trasversalmente all'asse primitivo del solido.	$I = \frac{P' l^2}{4050000}$	$I = \frac{6 P' l^2}{10000000}$	$I = \frac{P' l^2}{110000}$
III		L'estremo inferiore B è incastrato verticalmente e l'estremo superiore A è libero di ruotare e di avvicinarsi a B, ma non di spostarsi trasversalmente all'asse primitivo del solido.	$I = \frac{P' l^2}{8000000}$	$I = \frac{3 P' l^2}{10000000}$	$I = \frac{P' l^2}{220000}$
IV		Entrambi gli estremi sono incastrati verticalmente in A ed in B nella direzione dell'asse del solido prima della deformazione.	$I = \frac{P' l^2}{16000000}$	$I = \frac{3 P' l^2}{20000000}$	$I = \frac{P' l^2}{440000}$

Questo quadro è accettato per l'uso corrente dall'ufficio tecnico di Berlino (*Berliner Baupolizei*) colla prescrizione che nei casi ordinari l'ufficio si attenga alle formole corrispondenti al caso II. Determinato il momento d'inerzia che deve avere la sezione resistente, questa si compone in modo che essa abbia possibilmente un'area uguale oppure non molto superiore ad $A = \frac{P}{R_a''}$ ed il momento d'inerzia trovato. Molte volte si può arrivare a questo risultato colle sezioni piene, circolari o rettangolari; spesso bisogna ricorrere alle sezioni a nervature od anche alle sezioni cave. Qualunque sia la soluzione che sarà scelta, bisogna che le varie pareti e le nervature salienti abbiano spessori tali, che possano essere costruite facilmente coi mezzi disponibili, e che ciascuna isolatamente presenti una rigidità sufficiente per resistere alle deformazioni per flessione ed agli incurvamenti che la pressione tende a produrre. In altri termini bisogna che la salienza delle varie nervature e la larghezza delle varie pareti sia un multiplo non molto grande dello spessore, e per avere una guida nella formazione dei profili potranno servire i numeri che si suppongono pel quadro che trovasi alla pagina 274. Per le nervature la sporgenza dipendentemente dal materiale potrà variare da cinque a dieci volte lo spessore per la ghisa, mentre pel ferro può arrivare a venti e trenta volte lo spessore stesso. Quando esistono vincoli speciali o cause di irrigidimento (aumento del momento d'inerzia) questi limiti possono essere notevolmente sorpassati; per le pareti vincolate alle linee estreme si potranno usare larghezze doppie, triple ed anche più di quelle indicate per le nervature.

È facile determinare fino a quali lunghezze possano convenire le sezioni piene di forma rettangolare aventi per lati a e b ($a < b$), e quelle circolari di diametro d pei materiali più comunemente usati. Dalla formola

$$\frac{l}{\frac{n-1}{r}} = \pi \sqrt{\frac{E}{R}}$$

osservando che per le colonne ordinarie $n=2$, e che $r^2 = \frac{I}{A}$ si ricava:

Per la sezione rettangolare

$$\left(\frac{l}{a}\right) = \pi \sqrt{\frac{E}{12R}}.$$

Per la sezione circolare

$$\frac{l}{d} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{E}{R}} = 0,8 \sqrt{\frac{E}{R}}.$$

Naturalmente i valori dei rapporti $\frac{l}{a}$ ed $\frac{l}{d}$ variano a seconda dei numeri che si assumono per E e per R ; ordinariamente si ritengono i valori medî, pei quali risulta

INDICAZIONI		GHISA	FERRO	LEGNO
Valore limite di l per il	rettangolo	$11 \frac{1}{2} a$	$28 a$	$13 \frac{1}{2} a$
	circolo	$10 d$	$24 d$	$11 \frac{1}{2} d$

Se la colonna invece che essere libera di ruotare ai suoi estremi è vincolata in uno dei modi indicati nel quadro della pagina 254 allora i numeri inscritti nella precedente tabella vanno moltiplicati per la radice quadrata del coefficiente di proporzionalità corrispondente inscritto nell'ultima linea del quadro citato.

Dai dati riportati superiormente risulta che le colonne di ghisa piene s'inflextono per un rapporto $\frac{l}{d}$ molto minore che non per il ferro, ciò spiega l'uso invalso fra gli ingegneri di impiegare colonne di ghisa vuote, tanto più che la natura del materiale, che si ottiene per fusione, si presta mirabilmente per ottenere sezioni cave e colonne di forma tubulare.

31. Risultati sperimentali relativi alla resistenza delle colonne - Formole empiriche pel calcolo delle medesime. — La formola di EULERO determina lo sforzo limite, oltre al quale all'accorciamento prodotto dalla compressione semplice viene ad aggiungersi, nella trave compressa, anche la deformazione per inflessione laterale. Le condizioni in cui la formola viene determinata ed i risultati ai quali essa conduce non hanno analogia diretta con quelli che si

ottengono studiando gli altri modi di sollecitazione, nei quali non avviene mai che la deformazione cambi di natura pel semplice fatto che le forze sollecitanti aumentano d'intensità proporzionalmente. Aggiungasi che l'eccentricità probabile e piccolissima, che ordinariamente si verifica nella sollecitazione a compressione, non può essere preveduta o valutata con semplici considerazioni razionali, ma viene determinata dalle condizioni di costruzione e messa in opera, e non si può sperare di assegnarle un valore altrochè in base ad osservazioni ed esperienze. Per queste ragioni specialmente la resistenza alla compressione delle colonne e dei contraffissi è stata molto studiata mediante esperienze ripetute in condizioni diverse, e vari sperimentatori hanno anche cercato di riassumere i risultati a cui sono giunti mediante formole e coefficienti empirici, in modo da rendere facile e spedito il calcolo delle colonne. In questo numero ci limiteremo a riassumere brevemente i lavori degli sperimentatori più noti e le formole empiriche più usate dagli ingegneri, rinviando alle opere e memorie speciali (*) chi desidera fare uno studio ampio ed approfondito della questione.

RONDELET ha fatto esperienze sulla resistenza delle colonne in legname soggette a sforzi di compressione diretti secondo l'asse ed ha trovato che il carico P , sotto l'azione del quale la colonna si schiaccia, non può essere rappresentato dalla formola $P = R''A$ quando si attribuisca ad R'' un valore costante ed indipendente affatto dalla lunghezza della colonna. Lo sforzo unitario R_s'' corrispondente alla rottura rimane costante oppure varia poco finchè la lunghezza l non supera otto volte la minima dimensione trasversale della sezione della colonna, oppure è compresa fra otto e dodici volte questa stessa dimensione: al crescere del rapporto $\frac{l}{a}$ il carico unitario corrispondente alla rottura diminuisce rapidamente. RONDELET ha sperimentato sopra solidi a sezione rettangolare, i cui lati rappresenteremo con a e b ($a < b$) ed a sezione quadrata ($a = b$); per una colonna di quercia a sezione quadrata RONDELET ha ottenuto i risultati seguenti:

(*) RONDELET, MORIN, HODGKINSON, LOVE, ecc., i cui lavori saranno citati particolareggiatamente nel corso di questo studio. — Vedi anche CLAUDEL, *Formules, tables et renseignements utiles, etc.* Parigi, 1892, pag. 437 e segg. — BACH C., *Elasticität und Festigkeit*. Berlino, 1890. — TETMAYER, *Die Baumechanik*. Zurigo, 1889. — COLLIGNON E., Opera citata. — BRESSE, Opera citata, ecc.

Valore del rapporto $\theta = \frac{l}{a}$	1	12	24	36	48	60	72
Carico unitario limite corrispondente alla rottura R_s'' per cen- timetro quadrato	420	350	210	140	70	35	$17 \frac{1}{2}$
Limite pratico R_a'' del carico unitario per una colonna di quer- cia in buone condi- zioni di stabilità per centimetro quadrato	60	50	30	20	10	5	2,5
Resistenza proporzio- nale	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

MORIN ha ripreso le esperienze di RONDELET (*) e ne ha rap-
presentato i risultati graficamente portando sopra due assi coor-
dinati ortogonali i valori dei rapporti $\theta = \frac{l}{a}$ come ascisse e come
ordinate i carichi di rottura riferiti al centimetro quadrato. Riu-
nendo i punti così determinati col mezzo di curve ha potuto rap-
presentare approssimativamente la legge di RONDELET (*Fig. 145^a,
tav. XXVIII*) e ne ha dedotte le cifre seguenti :

Valore del rapporto $\theta = \frac{l}{a}$	1	12	14	16	18	20	22	24	28	32	36	40	48	60	72
Carico di rottura in chilogrammi per centimetro quadrato di se- zione verticale.	420	310	292	276	258	243	227	212	183	156	132	108	72	33	17,5

Da queste considerazioni risulta che pel calcolo delle colonne in
legno si può usare la formola di resistenza per la compressione
semplice purchè si convenga di prendere $R = \frac{R_a''}{k}$, in cui k è
un coefficiente di correzione funzione del rapporto $\frac{l}{a}$, del quale sarà

(*) A. MORIN, Opera citata.

sufficiente determinare un certo numero di valori corrispondentemente a valori particolari di $\theta = \frac{l}{a}$, ritenendo che pei bisogni della pratica sia abbastanza approssimato pei valori intermedi di $\frac{l}{a}$ interpolare per parti proporzionali. Sebbene la curva di MORIN abbia un andamento che ricorda un arco d'iperbola, tuttavia per un tronco abbastanza corto si potrà sempre sostituire all'arco di curva la sua corda senza commettere un errore sensibile in pratica. Invece della curva di MORIN si può usare il quadro seguente che dà i valori di k per valori di θ , che differiscono successivamente di cinque unità:

Valori di $\left\{ \begin{array}{l} \theta = \frac{l}{a} \\ k \end{array} \right.$	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
	1	1,2	1,5	1,9	2,4	3,1	4	5	6,8	9	12

Questa tabella mostra come in realtà si possa prescindere dalla flessione laterale tutte le volte che la lunghezza non supera 10 o 12 volte la minima dimensione della base, ma che ciò non è possibile quando $\frac{l}{a}$ prende valori sensibilmente superiori, e finalmente che l'errore sarebbe tanto più grande quanto più grande è il valore di θ (Vedi numero precedente).

HODGKINSON ha eseguito numerose esperienze sulla resistenza delle colonne in legno a sezione rettangolare aventi per lato a e b ($a < b$) ed a sezione quadrata ($a = b$), e sopra quella delle colonne in metallo a sezione circolare piena ed a sezione circolare cava in forma di corona. Partendo dalla proprietà contenuta nella formola di EULERO, riconosciuta pure da NAVIER e DULEAU, che lo sforzo limite capace di produrre la pressoflessione è proporzionale al momento d'inerzia ed inversamente proporzionale al quadrato della lunghezza, e che tale sforzo, se pure non è il carico di rottura, rappresenta già uno stato d'equilibrio poco stabile, per cui si può supporre con sufficiente approssimazione che anche lo sforzo necessario alla rottura sia proporzionale a queste quantità od almeno che si scosti poco da questa legge, HODGKINSON si è proposto di determinare sperimentalmente la costante di proporzionalità. Per le sezioni rettangolari e quadrate la formola di EULERO dà

$$P_0 = E \pi^2 \frac{I}{l^2} = \frac{E \pi^2}{12} \frac{b a^3}{l^2} = \alpha \frac{b a^3}{l^2}$$

$$P_o = E \pi^2 \frac{I}{l^2} = \frac{E \pi^2 a^4}{12 l^2} = \alpha \left(\frac{a}{l} \right)^2 a^2.$$

HODGKINSON ha assoggettato all'esperienza colonne la cui lunghezza variava fra 30 e 45 volte il valore di a , ed ha trovato che i risultati sperimentali sono rappresentati con sufficiente approssimazione dalle due formole superiori, nelle quali α varia naturalmente da materiale a materiale. Per uno stesso materiale si ottengono per questo coefficiente valori abbastanza vicini per considerare come sufficientemente esatto assumere per α la media dei medesimi, precisamente come per E si prende il valor medio corrispondente ai risultati di una serie di esperienze.

HODGKINSON dà per α i valori seguenti (*):

Quercia forte	$\alpha = 2565$
Quercia debole	$\alpha = 1800$
Abete forte e pino resinoso	$\alpha = 2142$
Abete bianco debole e pino giallo	$\alpha = 1660$

e consiglia di prendere come coefficiente di sicurezza $\frac{1}{n} = \frac{1}{10}$, per cui le formole da usare nella pratica pel calcolo del peso P_a che può sopportare una colonna in legno, secondo HODGKINSON sono

$$P_a = \frac{P_o}{n} = \frac{\alpha}{n} \frac{b a^3}{l^2}$$

$$P_a = \frac{P_o}{n} = \frac{\alpha}{n} \left(\frac{a}{l} \right)^2 a^2.$$

Per valori di $\frac{l}{a} < 10$ queste formole danno valori eccessivi, ciò è naturale poichè si è già accennato più volte che nella resistenza alla compressione bisogna aver presente due formole

$$P = R A \quad \text{e} \quad P = E \pi^2 \frac{I}{l^2}$$

e che esiste sempre un valor limite (Vedi num. 30)

$$\frac{l}{r} = \pi \sqrt{\frac{E}{R}}$$

(*) CLAUDEL, Opera citata.

oltre il quale, prendendo in considerazione la sola formola di EULERO, vi sarebbe bensì la resistenza alla flessione laterale, ma il materiale si schiaccerebbe per effetto della semplice compressione.

Nelle esperienze sulla resistenza delle colonne metalliche piene e vuote HODGKINSON ha voluto partire da formole analoghe a quelle usate per le colonne in legno, cioè per le colonne piene di diametro d

$$P_e = E \pi^2 \frac{I}{l^2} = \frac{E \pi^2}{64} \frac{d^4}{l^2} = \alpha \frac{d^4}{l^2}$$

per le colonne vuote aventi per diametro esterno d_1 e per diametro interno d_2

$$P_o = E \pi^2 \frac{I}{l^2} = \frac{E \pi^2}{64} \frac{d_1^4 - d_2^4}{l^2} = \alpha \frac{d_1^4 - d_2^4}{l^2}$$

ma si è accorto che in tal modo si ottenevano per α valori variabili fra limiti piuttosto estesi. Per poter assegnare ad α un valore costante, media di valori compresi fra limiti estremi abbastanza vicini, è necessario variare alquanto gli esponenti di d e di l . Questo risultato non può sorprendere qualora si ponga mente che la formola di EULERO corrisponde al limite al quale incomincia la flessione e non al carico di rottura, che è bensì prossimo, ma essenzialmente diverso, e che esistono differenze di composizione fra i vari materiali da costruzione in genere, e nel caso speciale delle esperienze di HODGKINSON fra il legno ed il ferro ovvero la ghisa. Inoltre non bisogna dimenticare ciò che è stato osservato più volte, cioè che le formole della resistenza dei materiali sono accettabili entro i limiti di elasticità, ma che esse non corrispondono ugualmente in vicinanza della rottura, e che si segue un procedimento ardito, rischiando di commettere gravi errori, quando si vogliono calcolare i carichi di rottura coll'uso delle formole stesse senza l'aiuto di considerazioni e criteri speciali forniti dall'esperienza (*).

HODGKINSON ha assoggettato alla compressione assiale spinta fino alla rottura delle piccole colonne in ferro ed in ghisa piene e vuote, ad estremità arrotondate e piane e normali all'asse, a forma perfettamente cilindrica oppure ingrossate verso il mezzo. Dalle sue esperienze esso ha dedotto le seguenti conclusioni:

(*) Vedi CONSIDÈRE, Memoria citata. *Annales des ponts et chaussées*, aprile 1885.

1° La resistenza alla rottura è sensibilmente costante nei solidi, la cui lunghezza è compresa fra una e cinque volte la dimensione più piccola della sezione trasversale. Pei valori di θ inferiori la resistenza aumenta, pei valori invece di θ superiori essa diminuisce rapidamente al crescere del rapporto $\theta = \frac{l}{a} = \frac{l}{d}$.

Se $1 < \frac{l}{a} < 5$ la rottura avviene per semplice compressione.

Se $5 < \frac{l}{a} < 25$ la rottura avviene contemporaneamente per schiacciamento e per flessione laterale.

Se $25 < \frac{l}{a} < 120$ la flessione laterale diviene predominante e la compressione semplice riesce trascurabile nel fenomeno della rottura.

2° A parità di materia impiegata resistono meglio le colonne vuote che le colonne piene. Bisogna però avere speciali precauzioni nell'usarle, poichè se lo stampo si deforma durante la colata il vuoto interno non riesce più concentrico colla periferia della sezione, e quindi la linea dei centri di gravità si scosta notevolmente dall'asse della colonna, cosa che produrrebbe una notevole diminuzione nella sua resistenza.

3° La resistenza aumenta debolmente per effetto di un ingrossamento verso il mezzo; tale aumento può essere valutato in media ad $\frac{1}{7}$ od $\frac{1}{8}$ della resistenza primitiva.

4° La resistenza delle colonne colle estremità piane è maggiore di quella delle colonne uguali, ma che hanno però le estremità arrotondate; essa è prossimamente il triplo di quella presentata da queste ultime. Questo risultato viene a confermare l'analisi fatta nei paragrafi precedenti; vi è infatti dimostrato che la resistenza di una colonna incastrata è quattro volte quella presentata da una colonna uguale, ma semplicemente appoggiata e colle estremità libere di ruotare; è evidente che l'estremità piatta equivale ad un incastro, che non è completo solo in causa dell'elasticità del materiale, sul quale la colonna appoggia.

5° Una colonna colle estremità solidamente fissate con dischi, basi od in qualsiasi altro modo presenta la stessa resistenza alla rottura per compressione di una colonna della medesima sezione, colle estremità arrotondate e di lunghezza l metà della precedente. Anche questa conclusione come la precedente è in relazione diretta coi risultati dell'analisi citata.

6° Per colonne, per le quali $25 < \frac{l}{d} < 120$, la resistenza alla

rottura per compressione dedotta dalle esperienze fatte risulta espressa per le colonne piene da

$$P_0 = \alpha \frac{d^{3,6}}{l^{1,7}} = 10\,676 \frac{d^{3,6}}{l^{1,7}}$$

e per le colonne vuote

$$P_0 = \alpha \frac{d_1^{3,6} - d_2^{3,6}}{l^{1,7}} = 10\,676 \frac{d_1^{3,6} - d_2^{3,6}}{l^{1,7}}$$

nelle quali d , d_1 e d_2 sono espressi in centimetri, l è espresso in decimetri, ed è fatta astrazione dalla piccola differenza fra il valore del coefficiente α corrispondente ai due casi perchè trascurabile.

7° In pratica non si dovranno mai fare sopportare alle colonne carichi superiori ad un sesto di quello corrispondente alla rottura, per cui le formole da usare pel calcolo delle colonne, ritenendo d , d_1 , d_2 espressi in centimetri ed l in decimetri, sono le seguenti:

$$\text{Colonne piene a basi piate } P_a = 1780 \frac{d^{3,6}}{l^{1,7}};$$

$$\text{» vuote » } P_a = 1780 \frac{d_1^{3,6} - d_2^{3,6}}{l^{1,7}}.$$

Se si tiene presente l'osservazione fatta prima di riportare i risultati ottenuti da HODGKINSON si vede come questi concordino sufficientemente con quanto è preveduto dalla teoria. Le differenze che si riscontrano sono dovute alla non esatta realizzazione delle ipotesi ammesse od al fatto di considerare il carico di rottura invece di quello limite capace di produrre la flessione laterale non solo, ma anche deformazioni prossime alla rottura, e quindi fuori del campo, entro il quale le formole della resistenza dei materiali sono sufficientemente approssimate.

Il calcolo delle colonne col mezzo della formola di HODGKINSON presenta in pratica una certa difficoltà in causa degli esponenti fratti che vi entrano. L'Ingegnere ED. PIREL (*) per rendere più facile l'uso di queste formole ha composto due tavole, in cui sono date calcolate le potenze 3,6 dei diametri e quelle 1,7 delle lunghezze di colonne, che più comunemente si incontrano in pratica; crediamo sia utile riportarle come complemento delle conclusioni ricavate dai pregevoli lavori di HODGKINSON sulla resistenza delle colonne.

(*) *Annales des ponts et chaussées*, 1855.

TAVOLA I. — *Potenze dei diametri (*)*.

d	$d^{3,6}$	d	$d^{3,6}$	d	$d^{3,6}$	d	$d^{3,6}$
1,00	1,0000	3,70	111,05	5,70	526,20	7,70	1553,7
1,25	2,2329	3,75	116,55	5,75	543,01	7,75	1590,3
1,50	4,3045	3,80	122,24	5,80	560,20	7,80	1627,6
1,75	7,4978	3,90	134,23	5,90	595,75	7,90	1704,0
2,00	12,125	4,00	147,03	6,00	632,91	8,00	1782,9
2,10	14,454	4,10	160,70	6,10	671,72	8,25	1991,7
2,20	17,089	4,20	175,26	6,20	712,22	8,50	2217,4
2,25	18,529	4,25	182,89	6,25	733,11	8,75	2461,7
2,30	20,055	4,30	190,76	6,30	754,44	9,00	2724,4
2,40	23,3755	4,40	207,22	6,40	798,45	9,25	3006,8
2,50	27,076	4,50	224,68	6,50	844,28	9,50	3309,8
2,60	31,182	4,60	243,18	6,60	891,99	9,75	3634,3
2,70	35,720	4,70	262,76	6,70	941,61	10,00	3981,1
2,75	38,159	4,75	272,96	6,75	967,15	10,25	4351,2
2,80	40,716	4,80	283,44	6,80	993,19	10,50	4745,5
2,90	46,199	4,90	305,28	6,90	1046,8	10,75	5165,0
3,00	52,193	5,00	328,32	7,00	1102,4	11,00	5610,7
3,10	58,736	5,10	352,58	7,10	1160,2	11,25	6083,4
3,20	65,848	5,20	378,10	7,20	1220,1	11,50	6584,3
3,25	69,628	5,25	391,36	7,25	1250,9	11,75	7114,4
3,30	73,561	5,30	404,94	7,30	1282,2	12,00	7674,5
3,40	81,908	5,40	433,13	7,40	1346,0		
3,50	90,917	5,50	462,71	7,50	1413,3		
3,60	100,62	5,60	493,72	7,60	1482,3		

TAVOLA II. — *Potenze delle lunghezze (*)*.

l	$l^{1,7}$	l	$l^{1,7}$	l	$l^{1,7}$
1	1,0000	9	41,900	17	123,53
2	3,2490	10	50,119	18	136,13
3	6,4730	11	58,934	19	149,24
4	10,5560	12	68,329	20	162,84
5	15,4260	13	78,289	21	176,92
6	21,0310	14	88,801	22	191,48
7	27,3320	15	99,851	23	206,51
8	34,2970	16	111,430	24	222,00

(*) Estratte dalla Memoria dell'Ingegnere Ed. PIREI *Annales des ponts et chaussées*, 1855.

Allo scopo di dare pel calcolo delle colonne formole più semplici e senza esponenti frazionari l'Ingegnere francese LOVE (*) ha fatto uno studio minuzioso dei risultati di HODGKINSON, ed è arrivato a determinare le relazioni seguenti:

$$\text{Per le colonne in ghisa } P = \frac{R''A}{1,45 + 0,00337 \left(\frac{l}{d}\right)^2};$$

$$\text{„ „ ferro } P = \frac{R''A}{1,55 + 0,0005 \left(\frac{l}{d}\right)^2};$$

nelle quali l e d sono riferite alla stessa unità. Queste formole servono per valori di $\frac{l}{d}$ compresi fra 30 e 180 (**) per valori poi compresi fra 5 e 30 oppure 25, pei quali la rottura è dovuta alla concomitanza delle due deformazioni per compressione semplice e per flessione, LOVE consiglia le formole seguenti:

$$\text{Per le colonne in ferro } P = \frac{R''A}{0,85 + 0,04 \frac{l}{d}};$$

$$\text{„ „ ghisa } P = \frac{R''A}{0,68 + 0,1000 \frac{l}{d}}.$$

Altri hanno studiato la stessa questione dando formole analoghe a quelle di LOVE ed attribuendo ai coefficienti valori alquanto diversi; fra questi citiamo M. L. A. BAME (***), BELANGER, M. P. PLANAT, ma la differenza fra queste formole non è tale da avere importanza nelle applicazioni, quindi quasi tutti gli ingegneri sogliono riferirsi ai risultati di HODGKINSON e più particolarmente alle formole di LOVE. Queste ultime servono per le colonne piene; per le colonne vuote, conformemente ai risultati di HODGKINSON, si può ammettere che la resistenza totale sia uguale a quella della colonna considerata come piena diminuita della resistenza di una colonna piena avente una sezione trasversale uguale a quella del

(*) G. H. LOVE, *Mémoire sur la résistance du fer et de la fonte et l'emploi de ces métaux dans les constructions basé principalement sur les recherches expérimentales les plus récentes faites en Angleterre*, Parigi. V. DALMONT, 1852.

(**) MAX DE LEBER, *Calculs des ponts métalliques*.

(***) *Semaine des constructeurs*, num. 7, vol. V, e num. 34, vol. XIV. Vedi anche CLAUDEL, Opera citata.

vuoto interno, per cui sarebbe

$$P = \frac{\frac{\pi d_1^2}{4} R''}{1,45 + 0,00337 \left(\frac{l}{d_1}\right)^2} - \frac{\frac{\pi d_2^2}{2} R''}{1,45 + 0,00337 \left(\frac{l}{d_2}\right)^2}$$

in luogo di R'' si metterà

Per la ghisa

$$R_s'' = 7500 \text{ per centimetro quadrato}$$

$$R_a'' = 1250 \quad \text{,} \quad \text{,}$$

Per il ferro

$$R_s'' = 3600 \text{ per centimetro quadrato}$$

$$R_a'' = 600 \quad \text{,} \quad \text{,}$$

Quando $l > 30d$ le colonne in ferro sono più convenienti di quelle in ghisa, malgrado che lo sforzo unitario di compressione che può sopportare questo materiale sia molto maggiore.

L'uso delle formole di HODGKINSON e di LOVE non presenta alcuna difficoltà per le colonne piene, dove non vi è che una sola incognita d : per le colonne vuote invece vi sono due incognite d_1 e d_2 , ed il problema non può essere determinato se non si stabilisce un'altra condizione. In via ordinaria si suole fissare il diametro esterno in relazione a questioni estetiche oppure il minimo spessore della corona circolare, che dovrà essere tale che sia possibile e facile l'esecuzione. A questo scopo può essere utile consultare la seguente tabella, nella quale sono registrati i minimi spessori, corrispondenti ad una determinata lunghezza di una colonna in ghisa, compatibili in condizioni ordinarie con una buona fusione.

Per colonne della lunghezza variabile		Il minimo spessore compatibile con una buona fusione in condizioni ordinarie è di mm.
da metri	a metri	
2,00	3,00	12
3,00	4,00	15
4,00	6,00	20
6,00	8,00	25

Le formole di HODGKINSON e di LOVE corrispondono pel caso delle colonne a sezione circolare a quelle più generali e conve-

nienti a sezioni di forma qualsiasi del MÜLLER-BRESLAU, e servono bene quando $\frac{l}{d}$ ha un valore notevole; quando invece $\frac{l}{d} < 5$ allora siamo nel caso della compressione semplice e le formole anzidette, come è già stato osservato più volte, debbono dare, e dànno effettivamente, valori esagerati. Nell'intervallo poi $5 < \frac{l}{d} < 25$ la rot-

tura avviene un poco per flessione ed un poco per schiacciamento e l'esperienza dimostra che i due fenomeni si compongono. Se invece del ferro si considerano altri materiali si verificano gli stessi fenomeni e solo variano i limiti, pei quali essi si producono.

Lo studio razionale delle condizioni di equilibrio e l'esperienza sono d'accordo nell'accennare all'esistenza simultanea dei due modi di deformazione dovuti alla pressoflessione, non che ad una probabile eccentricità di sollecitazione. In generale in pratica

è raro che il rapporto $\frac{l}{a} = \theta$ sia superiore a 30, per cui nel maggior numero di casi che si presentano all'ingegnere si può ritenere che il problema sia compreso fra quei limiti, nei quali i due fenomeni hanno importanza variabile, senza però che uno sia trascurabile rispetto all'altro. Segue da ciò che volendo determinare una formola unica che possa servire all'ingegnere pel calcolo delle sezioni resistenti bisognerà che essa sia tale che lo sforzo unitario subito dal materiale non sia mai superiore ad R_a'' in alcuna sezione e quando l si accosta allo zero lo sforzo P , che può sopportare la colonna, s'avvicini, senza mai superarlo, ad $R_a'' A$, e che esso invece s'avvicini a $P_0 = E \pi^2 \frac{I}{l^2}$ al crescere di l . Basandosi sopra questo concetto alcuni autori, come HODGKINSON stesso, GRASHOF (*) ed altri consigliano di prendere per il calcolo delle colonne, pilastri e contraffissi la formola seguente

$$\left(1 + \frac{R_a'' A}{P_0}\right) P_a = R_a'' A$$

od anche

$$\left(1 + \frac{R_a'' A}{E \pi^2 \frac{I}{l^2}}\right) P_a = R_a'' A$$

(*) GRASHOF, *Theorie der Elasticität und Festigkeit*. Berlino, 1878.

ossia

$$P_a = \frac{R_a'' A}{1 + \frac{R_a'' A l^2}{E \pi^2 A r^2}} = \frac{R_a'' A}{1 + \frac{R_a'' l^2}{E \pi^2 r^2}} = \frac{R_a'' A}{1 + \alpha \left(\frac{l}{r} \right)^2}$$

HODGKINSON in base alle sue esperienze per valori di $\frac{l}{d} = \theta$ compresi fra 5 e 25 aveva proposta la formola

$$P_a = \frac{R_a'' A}{1 + \frac{3}{4} \frac{R_a''}{P_o}}$$

Non bisogna dimenticare che nel produrre la flessione laterale, specialmente nei primi istanti, ha importanza il prodotto della forza P per l'eccentricità probabile e , la quale essendo incognita, non si può sperare di arrivare ad un risultato attendibile che ricorrendo ad induzioni od ipotesi razionali suffragate dall'esperienza.

Se si ammette la coesistenza delle due deformazioni, cioè l'accorciamento assiale e la flessione laterale, lo sforzo unitario R'' nella fibra più affaticata deve essere calcolato colla formola della sollecitazione composta (Parte I, pag. 246, form. 195)

$$R = \frac{X}{A} + \frac{Mv'}{I} = \frac{P}{A} + \frac{P(e+f)v'}{A r^2} = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{e v'}{r^2} + \frac{f v'}{r^2} \right) \quad (98)$$

in cui f esprime la freccia d'inflessione laterale ed e l'eccentricità di sollecitazione, quando si voglia tener conto anche di essa, cosa che non è fatta in generale dalla maggioranza degli autori, che si occupano di questa questione, in causa della difficoltà di poterla apprezzare (e), anche in via approssimata.

La freccia di incurvamento f col mezzo della teoria ordinaria della pressoflessione rimane incognita, tuttavia essa sarà indubbiamente minore della freccia f' dell'arco di circolo osculatore nel punto di mezzo della colonna sotteso da una corda lunga quanto la colonna stessa. Quindi, detto ρ il raggio di curvatura nel punto di mezzo dell'arco deformato della colonna (*Fig. 146^a, tav. XXVIII*)

$$f < f' \quad \frac{l^2}{4} = (2\rho - f') f'$$

Il secondo termine della seconda formola è infinitamente piccolo rispetto al primo, perchè per ipotesi le deformazioni debbono essere infinitamente piccole rispetto alle dimensioni del corpo, quindi in via approssimata ed in condizioni favorevoli alla stabilità si potrà porre $f = \frac{l^2}{8\rho}$. Confrontando fra loro la formola di resistenza con quella di elasticità

$$\frac{EI}{\rho} = M = \frac{RI}{v'}$$

si ricava

$$\rho = \frac{E}{R} v'$$

e quindi

$$f = \frac{l^2}{8 \frac{E}{R} v'} = \frac{R}{8E} \frac{l^2}{v'} = \alpha \frac{l^2}{v'}$$

sostituendo questo valore nella formola superiore e trascurando il termine $\frac{e v'}{r^2}$, che rappresenta l'effetto dell'eccentricità di sollecitazione, si ottiene ancora

$$R = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{R}{8E} \frac{l^2}{r^2} \right) = \frac{P}{A} \left(1 + \alpha \left(\frac{l}{r} \right)^2 \right) = \frac{P}{A} \left(1 + \alpha \frac{A l^2}{I} \right) \quad (99).$$

Questa formola è stata ricavata considerando l'effetto simultaneo della compressione e della inflessione laterale; essa è molto usata dagli ingegneri ed è indicata per solito col nome di formola di RANKINE, sebbene alcuni scrittori la dicano anche formola di NAVIER, formola di SCHWARZ, ecc. Se si pone

$$k = 1 + \alpha \frac{l^2}{r^2} = 1 + \alpha \frac{A l^2}{I}$$

la formola di RANKINE può anche essere scritta nel modo seguente

$$P = \frac{R}{k} A = R_c A \qquad R_c = \frac{R}{k}$$

cioè le colonne soggette a compressione in condizioni da potersi

anche inflettere lateralmente per pressoflessione, si possono calcolare come se non si verificasse che quest'ultimo sforzo, soltanto è indispensabile prendere come limite dei carichi permanenti un valore ideale R_p , che è uguale allo sforzo unitario limite corrispondente al materiale che si considera, diviso per un coefficiente k di riduzione funzione della lunghezza del solido e del momento d'inerzia della sua sezione trasversale: questo risultato corrisponde con quanto era già stato trovato da RONDELET, MORIN ed altri. Il valore del coefficiente $\alpha = \frac{R}{8E}$ può essere calcolato in base ai valori di R'' ed E , oppure anche determinato direttamente mediante esperienze.

LAISSE e SCHÜBLER nel loro Trattato sul calcolo dei ponti metallici consigliano

pel ferro	$\alpha = 0,00008$
per la ghisa	$\alpha = 0,00025$
pei legnami	$\alpha = 0,00016$

nell'ipotesi che il solido sia incastrato alle estremità. Qualora poi esso abbia le estremità libere di ruotare, gli stessi autori consigliano di moltiplicare i coefficienti riportati per 3, ossia

pel ferro	$\alpha = 0,00024$
per la ghisa	$\alpha = 0,00075$
pei legnami	$\alpha = 0,00048$

Nel Manuale della HÜTTE-VEREIN (14^a edizione) ritenendo che pel ferro fucinato, la ghisa ed i legnami si possa ordinatamente assumere per centimetro quadrato

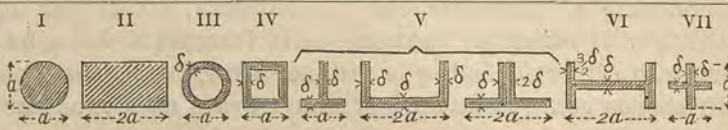
$$R_a'' = 750 \quad R_a'' = 1500 \quad R_a'' = 70$$

sono consigliati per α i valori seguenti

Ferro fucinato	$\alpha = 0,0001$
Ghisa e legnami	$\alpha = 0,0008.$

Allo scopo di rendere più facile il calcolo delle colonne e contraffissi nello stesso Manuale trovansi una tabella, nella quale è dato immediatamente il valore di k quando sia noto il rapporto θ fra la lunghezza e la minima dimensione della sezione trasversale per le sezioni che sono più comunemente usate in pratica. Crediamo fare cosa utile il riportarla avvertendo che riteniamo indicato con l la lunghezza della colonna, con a la dimensione

trasversale più piccola e con δ lo spessore delle nervature o delle pareti; inoltre per le sezioni indicate nel quadro si suppone che pel ferro fucinato sia $\alpha = 30 \delta$ e per la ghisa $\alpha = 10 \delta$.

Forma delle sezioni														
	FERRO FUCINATO							GHISA E LEGNO (Legno solo pei tipi I e II)						
	Indicazione dei tipi di sezione							Indicazione dei tipi di sezione						
	I	II	III	IV	V	VI		I	II	III	IV	V	VII	
Rapporto $\frac{l}{\alpha}$														
5	1,04	1,03	1,02	1,02	1,06	1,05		1,32	1,24	1,19	1,15	1,24	1,44	
10	1,16	1,12	1,09	1,06	1,25	1,18		2,38	1,96	1,78	1,58	1,95	2,77	
12	1,23	1,17	1,12	1,09	1,36	1,26		2,84	2,38	2,12	1,84	2,37	3,55	
14	1,31	1,24	1,17	1,13	1,49	1,36		3,51	2,88	2,53	2,15	2,86	4,48	
16	1,41	1,31	1,22	1,16	1,65	1,46		4,28	3,46	2,99	2,50	3,43	5,54	
18	1,52	1,39	1,28	1,21	1,82	1,59		5,15	4,11	3,53	2,90	4,07	6,75	
20	1,64	1,48	1,34	1,26	2,01	1,73		6,12	4,84	4,12	3,34	4,79	8,10	
22	1,77	1,58	1,41	1,31	2,22	1,89		7,19	5,65	4,78	3,83	5,59	9,59	
24	1,92	1,69	1,49	1,37	2,46	2,06		8,34	6,53	5,49	4,37	6,43	11,2	
26	2,08	1,81	1,58	1,43	2,71	2,24		9,65	7,49	6,27	4,96	7,41	13,0	
28	2,25	1,94	1,67	1,50	2,98	2,43		11,0	8,52	7,12	5,59	8,44	14,9	
30	2,44	2,08	1,77	1,58	3,28	2,65		12,5	9,64	8,02	6,26	9,54	17,0	
32	2,64	2,23	1,88	1,66	3,59	2,88		14,1	10,8	9,00	7,00	10,7	19,2	
34	2,85	2,39	1,99	1,74	3,92	3,12		15,8	12,1	10,0	7,77	12,0	21,5	
36	3,07	2,56	2,11	1,83	4,28	3,38		17,6	13,4	11,1	8,58	13,3	24,0	
38	3,31	2,73	2,23	1,93	4,65	3,65		19,5	14,9	12,3	9,45	14,7	26,6	
40	3,56	2,92	2,37	2,03	5,05	3,93		21,5	15,4	13,5	10,4	16,2	29,4	
42	3,82	3,12	2,51	2,13	5,46	4,24		23,6	17,9	14,8	11,3	17,7	32,3	
44	4,10	3,32	2,65	2,24	5,90	4,55		25,8	19,6	16,1	12,3	19,4	35,4	
46	4,38	3,53	2,81	2,36	6,35	4,88		28,1	21,3	17,5	13,4	21,1	38,6	
48	4,69	3,76	2,97	2,48	6,83	5,23		30,5	23,1	19,0	14,5	22,9	41,9	
50	5,00	4,00	3,14	2,60	7,32	5,59		33,0	25,0	20,5	15,6	24,7	45,4	
55	5,84	4,63	3,59	2,94	8,65	6,55		39,7	30,0	24,6	18,7	29,7	54,7	
60	6,76	5,32	4,08	2,31	10,1	7,70		47,1	35,6	29,1	22,1	35,2	64,9	
65	7,76	6,07	4,61	3,71	11,7	8,75		55,1	41,6	34,0	25,7	41,1	76,9	
70	8,84	6,88	5,19	4,14	13,4	9,99		60,4	48,0	39,3	29,7	47,5	88,0	
75	10,00	7,75	5,81	4,61	15,2	11,3		73,0	55,0	44,9	33,9	54,4	101	
80	11,20	8,68	6,47	5,10	17,2	12,7		82,9	62,4	50,9	38,5	61,7	115	
90	14,00	10,7	7,93	6,19	21,5	15,8		105	78,8	64,2	48,4	77,9	145	
100	17,00	13,0	9,55	7,41	26,3	19,3		129	97,0	79,0	59,5	95,9	178	

SCHAROWSKY nella sua pubblicazione sulla resistenza delle colonne metalliche (*) consiglia

$$\begin{array}{ll} \text{pel ferro fucinato} & \alpha = 0,0001 \\ \text{per la ghisa} & \alpha = 0,0002 \end{array}$$

se $\alpha \frac{A l^2}{I} > 3$ per le colonne in ghisa, secondo il citato autore

bisogna prendere $k = \left(-1 + \alpha \frac{A l^2}{I} \right)$ ritenendo R_a'' riferito al centimetro quadrato ed uguale a 250. MÜLLER (**) poi osserva che le colonne di ferro e ghisa possono far parte di fabbricati incendiabili, quindi consiglia in questo caso di porre per entrambi i materiali $\alpha = 0,0004$ (***).

KROHN esprimendo E ed R in chilogrammi riferito al centimetro quadrato per colonne che abbiano le sezioni estreme libere di ruotare, ma non di spostarsi in senso normale all'asse, consiglia pel ferro

$$E = 2\,000\,000 \quad R_a'' = 800 \quad \alpha = \frac{R_a''}{8E} = 0,00005$$

per la ghisa

$$E = 900\,000 \quad R_a'' = 800 \quad \alpha = \frac{R_a''}{8E} = 0,00011.$$

TETMAYER ha eseguito numerose esperienze sulla resistenza delle colonne alla flessione laterale ed alla compressione ed ha trovato che pel ferro di fusione e pel ferro saldato, la formola di EULERO

$$R'' = \frac{P_0}{A} = E \pi^2 \left(\frac{r}{l} \right)^2$$

esprime abbastanza bene la resistenza unitaria di una colonna

(*) Vedi SCHAROWSKY, *Musterbuch für Eisen-konstruktionen*. Berlino 1888, edizione OTTONE SPAWER.

(**) Vedi M. MÜLLER e LÜHMANN, *Ueber die Widerstandsfähigkeit*, ecc. Berlino, 1888.

(***) BAUSCHINGER, *Versuche über Elasticität und Festigkeit verschiedener Materialien*. — *Civilingenieur*, vol. XXVIII, fasc. 8 trova per le colonne vuote in ghisa α variabile da 0,09022 o 0,00060 a seconda della qualità e del modo di fusione.

o barra soggetta a compressione quando

$$\frac{l}{r} > 105,0 \text{ pel ferro di fusione (acciaio dolce)}$$

$$\frac{l}{r} > 112,5 \text{ pel ferro saldato.}$$

Per valori inferiori del rapporto $\frac{l}{r}$ (*lunghezza specifica*) i risultati sperimentali non concordano più con quelli forniti dalla formola di EULERO; la resistenza della barra aumenta presso a poco nella proporzione, secondo la quale $\frac{l}{r}$ diminuisce, e TETMAYER dà le seguenti formole pel calcolo della resistenza unitaria R'' per millimetro quadrato

$$\text{Ferro di fusione } R'' = 32,07 - 0,1157 \left(\frac{l}{r} \right)$$

$$\text{Ferro saldato } R'' = 30,03 - 0,1300 \left(\frac{l}{r} \right)$$

le quali valgono

$$\text{pel ferro di fusione quando } 20,4 < \frac{l}{r} < 105,0$$

$$\text{pel ferro saldato quando } 18,5 < \frac{l}{r} < 112,5$$

sebbene in vicinanza del valore limite inferiore di $\frac{l}{r}$ perdano il loro valore.

Se $\frac{l}{r}$ diminuisce ancora gli sforzi a cui resistono le barre diventano irregolari e qualche volta il limite ne è elevatissimo, spesso avvengono rigonfiamenti in senso trasversale senza che si verifichi lo schiacciamento o la rottura.

Secondo TETMAYER la formola di RANKINE e SCHWARZ non sarebbe accettabile pel ferro, che nei limiti pei quali il rapporto $\frac{l}{r}$ è compreso fra 20 e 105 circa, coll'avvertenza di prendere il valore di α variabile col variare di $\frac{l}{r}$. Nel suo Trattato sulla resistenza

dei materiali (*) basandosi sopra esperienze proprie ha creduto di poter assegnare ad α nella formola di RANKINE i seguenti valori

$$\text{pel ferro } \alpha = 0,0001 \sqrt{0,00867 \left(\frac{l}{r} \right) - 0,6936}$$

$$\text{pel legno } \alpha = 0,0001 \sqrt{0,05 \frac{l}{r} - 0,8}.$$

Queste formole di TETMAYER hanno la forma di quella di RANKINE, soltanto α è espresso in funzione del rapporto $\frac{l}{r}$, quindi esse possono adattarsi meglio ai risultati delle esperienze, debbono perciò essere riguardate come più prossime al vero e sono ora impiegate da molti ingegneri.

Per la ghisa e per valori di $\frac{l}{r}$ compresi fra 60 e 200 la media di 14 esperienze ha fornito a TETMAYER per $\alpha = 0,00063$; per valori di $\frac{l}{r}$ compresi fra 20 e 60 α deve, secondo lo stesso autore, essere determinato molto approssimativamente colla formola

$$\alpha = -0,000013 \frac{l}{r} + 0,00144.$$

TETMAYER riportandosi ai risultati delle proprie esperienze consiglia di usare pel ferro la formola di RANKINE introducendovi invece del carico di rottura R_s'' un altro valore R_p'' differente ed alquanto minore: pel ferro saldato $R_p'' = 28$ per millimetro quadrato, pel ferro di fusione $R_p'' = 30$ per millimetro quadrato. Richiamando l'osservazione fatta a pagina 271 che il momento flettente è uguale alla forza P moltiplicata per la freccia f più l'eccentricità e si può arrivare a spiegare razionalmente il risultato sperimentale ottenuto da TETMAYER. Infatti

$$R'' = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{e v'}{r^2} + \frac{f v'}{r^2} \right) = R_t'' \left(1 + \frac{e v'}{r^2} + \frac{R''}{8e} \left(\frac{l}{r} \right)^2 \right).$$

(*) TETMAYER, Opera citata, pag. 91 e segg. Alle pagine 93 e seguenti l'autore dà calcolati i valori del coefficiente di riduzione $k = 1 + \alpha \left(\frac{l}{r} \right)^2$ nei casi più comuni nella pratica pel legno, pel ferro e per la ghisa.

Se la flessione laterale può essere trascurata allora $f=0$, lo sforzo medio $R_r'' = \frac{P}{A}$ corrispondente al caso generale della pressoflessione si riduce al solo sforzo medio $R_p'' = \frac{P}{A}$ dovuto all'effetto della sola eccentricità e , $R_r'' = R_p''$ e la formola superiore dà

$$R'' = R_p'' \left(1 + \frac{e v'}{r^2} \right).$$

Se nella formola generale

$$R_r'' = \frac{R''}{1 + \frac{e v'}{r^2} + \frac{R'' l^2}{8E r^2}}$$

si sostituisce ad R'' il suo valore in funzione di R_p si ottiene una formola analoga a quella di RANKINE-TETMAYER, nella quale invece del carico di rottura R_s'' entra il coefficiente R_p'' sensibilmente diverso, e variabile colla eccentricità e di sollecitazione

$$R_r'' = \frac{R_p'' \left(1 + \frac{e v'}{r^2} \right)}{1 + \frac{e v'}{r^2} + \left(1 + \frac{e v'}{r^2} \right) \frac{R_p'' l^2}{8E r^2}} = \frac{R_p''}{1 + \frac{R_p'' l^2}{8E r^2}} \quad (100).$$

Secondo questa interpretazione lo sforzo $R_p'' = \frac{R_s''}{1 + \frac{e v'}{r^2}}$ che sa-

rebbe introdotto nella formola di RANKINE invece del carico di rottura R_s'' rappresenterebbe l'effetto dell'eccentricità e , la quale produce inevitabilmente un aumento nello sforzo R'' , che ha luogo nella fibra più lontana dell'asse di flessione, in confronto dello sforzo unitario medio R_p'' . Questa formola conduce alle stesse conseguenze alle quali è arrivato sperimentalmente TETMAYER e ne rende ragione, per cui sembra essere un'utile modificazione portata alla formola RANKINE-TETMAYER: per piccola che sia l'eccentricità essa deve sempre alterare la distribuzione uniforme dello sforzo di compressione nell'interno della sezione. In dipendenza delle cose dette sopra il valore di R_p'' sarebbe in relazione col modo d'applicazione degli sforzi alle estremità delle barre soggette a compressione e varierebbe con essi, non che colle altre cause che influiscono sull'eccentricità e , e sarebbe lecito dubitare

che i valori $R_p'' = 28$ ed $R_p'' = 30$ proposti da TETMAYER debbano essere riguardati sempre ed in ogni caso come numeri costanti (*).

(*) L'importanza delle esperienze fatte da TETMAYER, direttore del laboratorio sperimentale per la resistenza dei materiali annesso alla Scuola politecnica di Zurigo, e la stima che queste godono fra gli ingegneri ci fanno credere essere cosa opportuna riportare in nota le importanti conclusioni alle quali esso è arrivato togliendoli dalla pubblicazione: *Communications du laboratoire d'essais pour les matériaux de construction de l'École polytechnique fédérale*.

1° Qualche campione si è piegato prematuramente malgrado tutte le precauzioni e tutte le cure avute durante la preparazione e l'esperienza. Ciò che ha potuto nuocere in queste prove è stato ora una piccola imperfezione, per la quale l'asse non era perfettamente rettilineo, ora un qualche difetto del materiale, un'irregolarità nella sezione trasversale, o finalmente una messa in opera leggermente scorretta.

2° Qualche campione ha sopportato degli sforzi più grandi che quelli indicati dalle leggi di resistenza. In questi casi le differenze fra gli sforzi osservati e quelli dati dal calcolo debbono essere spiegati ricorrendo ad una delle cause seguenti:

a) Differenza nella qualità della materia.

b) Durezza più o meno grande dello strato superficiale dei campioni. Questa durezza dipende dalla temperatura del ferro durante la laminazione e dalla rapidità del raffreddamento.

c) Densità del materiale quando si tratta di ferro saldato (*ferro ottenuto colla pudellatura*).

3° È probabile che pel ferro malleabile la forma del campione di saggio abbia influenza sulla resistenza all'inflessione laterale: le prove fatte non hanno permesso di definire, nè di precisare questa influenza.

4° Le barre composte mediante chiodature si comportano assolutamente come le barre semplici quando sono soddisfatte le seguenti condizioni:

a) La distanza fra i buchi dei chiodi non deve essere superiore a millimetri 550.

b) I chiodi debbono riempire esattamente e completamente i fori corrispondenti.

c) L'indebolimento dovuto ai buchi dei chiodi non deve sorpassare 10 % della sezione trasversale completa della barra.

5° Il ferro di fusione (*flusseisen*) risente in modo più notevole l'effetto delle chiodature che non il ferro saldato (*schmiedeisen*), sopra tutto per l'indebolimento della sezione trasversale prodotto dai fori dei chiodi e dipendentemente dal posto che i fori stessi occupano nella sezione. Sarà quindi indicato di dedurre i fori dei chiodi appena questi raggiungono il 10 % della sezione completa tutte le volte che si vuole calcolare l'area resistente di una barra soggetta a compressione.

6° In generale le barre compresse, per le quali approssimativamente

$$\frac{l}{r} > 100$$

L'Ingegnere DE LEBER nel suo Trattato sul calcolo dei ponti metallici discute estesamente la questione del calcolo dei solidi

dove l è la lunghezza teorica della barra $l_1 = \left(\frac{l}{n-1}\right)$, r il suo raggio di girazione, si inflettono gradualmente; la deformazione invece ha luogo bruscamente nel maggior numero di casi, nei quali le barre danno approssimativamente un rapporto

$$\frac{l}{r} < 100.$$

Nelle varie esperienze la deformazione al limite di resistenza per le barre della prima categoria era regolare, graduale e piuttosto elastica, in quelle invece della seconda categoria era principalmente locale e permanente, e si verificava soprattutto verso il mezzo del solido.

7° Il senso di flessione di una barra corrisponde generalmente alla direzione del raggio di girazione minimo della sezione trasversale.

8° La resistenza alla flessione laterale per unità di sezione segue la legge di EULERO espressa dalla formola

$$R_t = \frac{P_o}{A} = E \pi^2 \left(\frac{r}{l}\right)^2$$

quando è verificata la condizione

$$\frac{l}{r} > 105,0 \text{ pel ferro di fusione}$$

$$\frac{l}{r} > 112,5 \text{ pel ferro saldato.}$$

La costante $E\pi^2$ determinata sperimentalmente per prodotti ricavati dalle officine di Hayange è riescita

$$\begin{array}{lll} \text{pel ferro di fusione } E\pi^2 = 22\,400 \times \pi^2 = 222\,080 & \text{per millimetro quadrato} \\ \text{» saldato } E\pi^2 = 20\,500 \times \pi^2 = 202\,340 & \text{» } \end{array}$$

9° La resistenza delle barre in ferro di fusione per le quali $\frac{l}{r} < 105,0$ e di quelle in ferro saldato in cui $\frac{l}{r} < 112,5$ non concorda coi valori forniti dalla formola di EULERO. Al disotto di questi limiti la resistenza aumenta presso a poco nella proporzione secondo la quale il rapporto $\frac{l}{r}$ diminuisce, essa potrebbe essere espressa dalle formole seguenti

$$R_t = \frac{P}{A} = 32,07 - 0,1157 \left(\frac{l}{r}\right) \text{ pel ferro di fusione}$$

$$R_t = \frac{P}{A} = 30,30 - 0,1300 \left(\frac{l}{r}\right) \text{ pel ferro saldato.}$$

ad asse rettilineo soggetti a sforzi di compressione agenti secondo il medesimo. Le sue conclusioni furono approvate dal Congresso

Queste formole sono applicabili entro i limiti delle esperienze fatte, cioè

$$20,4 < \frac{l}{r} < 105,0 \text{ pel ferro di fusione}$$

$$18,5 < \frac{l}{r} < 112,5 \text{ pel ferro saldato}$$

tuttavia esse perdono il loro valore in vicinanza del limite inferiore di $\frac{l}{r}$.

Quando il valore del rapporto $\frac{l}{r}$ diminuisce ancora gli sforzi, a cui resiste la barra compressa o contraffisso, divengono irregolari ed il limite qualche volta ne è elevatissimo. Il solido sovente soffre gli effetti di una compressione semplice allargandosi lateralmente (dei campioni cilindrici si sono rigonfiati verso il mezzo in forma di botti) senza che si verifichi lo schiacciamento o la rottura. Il Prof. TETMAYER opina che i limiti raggiunti in queste prove non siano caratteristici pel ferro, poichè essi sono dovuti unicamente a cause accidentali.

10° Da quello che precede si deve concludere che è impossibile esprimere con un'unica equazione la legge di resistenza alla flessione laterale del ferro malleabile.

Quanto alla formola, usata frequentemente, che si indica col nome di formola di RANKINE o di SCHWARZ

$$R_t'' = \frac{P}{A} = \frac{R''}{1 + \alpha \left(\frac{l}{r} \right)^2}$$

risulta che essa non può essere applicata alla determinazione degli sforzi che producono la flessione laterale altro che facendo variare il valore di α sulla scorta dei dati dell'esperienza. Questa formola ha qualche ragione di essere soltanto nei limiti caratterizzati dalla inflessione laterale accompagnata da deformazione permanente.

Basandosi sulla legge definita superiormente i valori di α e di R da introdurre nella formola di RANKINE determinati dietro le esperienze di TETMAYER sono

		Ferro di fusione	Ferro saldato
Valore di R	medio	$R = 29,7 \text{ Kg. per mmq.}$	$R = 27,9 \text{ Kg. per mmq.}$
	massimo	$= 30,5 \text{ " "}$	$= 28,6 \text{ " "}$
	minimo	$= 28,9 \text{ " "}$	$= 27,2 \text{ " "}$
Valore di α	medio	$\alpha = 0,000069$	$\alpha = 0,000060$
	massimo	$= 0,000081$	$= 0,000064$
	minimo	$= 0,000057$	$= 0,000057$

Dalle cose precedenti TETMAYER deduce anche le conclusioni seguenti:

a) Nella formola di SCHWARZ-RANKINE i valori di R e di α sono variabili anche entro i limiti del rapporto $\frac{l}{r}$ pei quali la deformazione è prevalentemente non elastica (*surtout non-élastique*).

ferroviario tenutosi a Parigi nel 1889, quindi acquistano particolare importanza e crediamo utile riportarle sommariamente.

b) Coll'impiego dei valori medi di R e di α indicati superiormente la formola di RANKINE dà approssimativamente i coefficienti limiti dello sforzo R_s'' : l'approssimazione così ottenuta è sufficiente pei bisogni della pratica.

c) Il coefficiente $\alpha = 0,0001$ che è spesso impiegato nei calcoli non è giustificato in modo alcuno.

d) Il modo usuale di impiegare la formola di RANKINE mettendo per R il valore limite dei carichi permanenti, non è corretto, ciò diminuisce il grado di stabilità dei solidi compressi. Infatti secondo i dati riportati superiormente deve essere:

pel ferro saldato $R = 27,9$ Kg. per mmq. (28 in cifra rotonda) e non R_s''
pel ferro di fusione $R = 29,7$ " " (30 " ") e non R_s'' .

Secondo le notazioni usate $R_a = \frac{R_s}{n}$, ciò che per un dato indice di stabilità n condurrebbe ad un valore di R_s'' alquanto superiore. Questo inconveniente resta alquanto attenuato prendendo $\alpha = 0,0001$ superiore al valore medio di α riportato superiormente.

TETMAYER ha fatto anche numerose esperienze sulla resistenza delle colonne in legno ed in ghisa; esso è giunto alle conclusioni seguenti:

1° La resistenza alla compressione delle colonne in legno varia più o meno saltuariamente colla loro lunghezza.

2° Il pericolo della inflessione laterale incomincia quando la lunghezza del prisma è dalle cinque alle dieci volte (in media otto) la minima dimensione della sezione trasversale.

3° La resistenza alla compressione delle colonne in legno aventi una lunghezza variabile fra dieci e venti volte la minima dimensione trasversale diminuisce in modo poco rilevante, però quasi sempre in modo continuo in guisa che la variazione del coefficiente $1 + \alpha \left(\frac{l}{r} \right)^2$ della formola di RANKINE potrebbe essere rappresentato con sufficiente approssimazione con una retta.

4° Nella resistenza delle colonne in legno hanno influenza grandissima i nodi legnosi, vicino ai quali di solito avviene la rottura.

5° Nella formola di RANKINE è inammissibile per α un valore costante.

6° Le vere e proprie flessioni laterali si producono allorchè la massima resistenza unitaria R è inferiore al limite di elasticità.

7° Per le colonne in ghisa colate orizzontalmente, per le quali può ritenersi $E = 11\ 850$ per millimetro quadrato, $\frac{l}{r} > 100$, $\alpha = 0,00063$ i valori dati dalla formola di EULERO corrispondono quasi esattamente con quelli dati dalla formola di RANKINE.

8° Per valori di $\frac{l}{r} < 100$ la formola di EULERO dà valori notevolmente superiori a quelli verificati sperimentalmente.

Se si indica con R_0 il rapporto $\frac{P_0}{A}$ esprimente il carico unitario subito dal materiale nell'ipotesi che si consideri soltanto l'azione della compressione semplice, la formola esprimente l'azione contemporanea della compressione semplice e della flessione laterale prende la forma (*)

$$\frac{R_0}{R_f} = k = 1 + \frac{fv'}{r^2}$$

dove f esprime la freccia d'incurvamento dovuta alla flessione laterale, r il raggio di girazione della sezione rispetto all'asse neutro e v' la distanza da questo asse della fibra più lontana dal medesimo. Nella discussione fatta al numero 29 abbiamo trovato che nel caso della flessione laterale si può ritenere con molta approssimazione che al principio dell'inflessione laterale sia

$$f = \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{8 \Delta P_0}{EA}} \frac{l^2}{r}$$

quindi senza attribuire a questa formola un'importanza assoluta sembra giustificato di poter ammettere che per solidi ugualmente costituiti, della stessa forma e compressi nello stesso modo $\left(\frac{\Delta P_0}{A} \text{ costante} \right)$ le frecce d'incurvamento dovute all'inflessione laterale siano proporzionali al rapporto $\frac{l^2}{r}$. Segue da ciò che in tutti quei casi, nei quali nel braccio del momento flettente la freccia d'inflessione laterale ha azione predominante, cioè quando

$$25 < \frac{l}{a} < 120$$

si potrà scrivere in generale

$$\frac{R_0}{R_f} = k = B_1 + B_2 \frac{v'}{r} \left(\frac{l}{r} \right)^2.$$

Nei casi invece nei quali l'inflessione laterale ha importanza molto piccola o tutt'al più comparabile all'eccentricità di solle-

(*) Trascurando (o non mettendo in evidenza) l'effetto dell'eccentricità e (Vedi pag. 272, form. 98).

citazione, cioè quando

$$5 < \frac{l}{a} < 25$$

allora quest'ultima, in mancanza di una più esatta e migliore determinazione, può per quanto è stato detto precedentemente (Vedi num. 25) essere considerata come proporzionale alla lunghezza l , e quindi la formola superiore diventa

$$\frac{R_c}{R_f} = k = B_1' + B_2' \frac{v}{r} \frac{l}{r}.$$

Si comprende facilmente come non sia possibile fissare in modo assoluto un limite fra l'una e l'altra formola trattandosi di quantità, la cui importanza cresce gradualmente ed è variabile colle condizioni di costruzione e messa in opera. Tuttavia tanto la espressione della freccia d'inflessione che quella dell'eccentricità sono attendibili, di forma diversa ma non contraddittoria poichè $\frac{lv}{r^2}$ ed $\frac{l^2v}{r^3}$ crescono e diminuiscono insieme. Si potrà quindi, secondo

DE LEBER, ritenere questo modo di rappresentare l'effetto della pressoflessione abbastanza esatto se i risultati generali delle esperienze lo confermano e finchè non si trovi col mezzo di ulteriori osservazioni ed esperienze una formola migliore. Per la determinazione poi del valore dei coefficienti B_1 B_2 B_1' e B_2' basterà confrontare le espressioni superiori colle formole di LOVE ed identificarle colle medesime sostituendo ad A , I , v' ed r le loro espressioni in funzione del diametro d della colonna.

Abbiamo visto che le formole di LOVE pel calcolo delle colonne a sezione circolare soggette a compressione sono le seguenti

$$\text{per } 5 < \frac{l}{d} < 30 \left\{ \begin{array}{l} \text{ferro } \frac{P_c}{P} = 0,85 + 0,040 \left(\frac{l}{d} \right) \\ \text{ghisa } \frac{P_c}{P} = 0,68 + 0,100 \left(\frac{l}{d} \right) \end{array} \right\} \quad (101)$$

$$\text{per } 30 < \frac{l}{d} < 120 \left\{ \begin{array}{l} \text{ferro } \frac{P_c}{P} = 1,55 + 0,0005 \left(\frac{l}{d} \right)^2 \\ \text{ghisa } \frac{P_c}{P} = 1,45 + 0,00337 \left(\frac{l}{d} \right)^2 \end{array} \right\} \quad (102)$$

nelle quali P_c esprime lo sforzo che la colonna può sopportare dipendentemente dalla sola deformazione per compressione semplice, l la lunghezza e d il diametro della colonna. Per una sezione circolare

$$v' = \frac{d}{2} \quad r = \frac{d}{4} \quad A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \quad \frac{1}{8} \frac{v'}{r} \left(\frac{l}{r} \right) = \frac{l}{d} \quad \frac{1}{32} \frac{v'}{r} \left(\frac{l}{r} \right)^2 = \frac{l^2}{d^2}$$

ed ammettendo inoltre che sia

$$\frac{P}{P_c} = \frac{R_f}{R_c}$$

si ricava per confronto e sostituzione dalle (101) e (102)

$$\text{per } 5 < \frac{l}{d} < 30 \left\{ \begin{array}{l} \text{ferro } \frac{R_c}{R_f} = 0,8 + 0,0050 \frac{v'}{r} \frac{l}{r} = 0,8 + 0,0050 \frac{v' l}{\left(\frac{I}{A} \right)} = \\ \quad = 0,8 + 0,0050 \frac{A l}{\left(\frac{I}{v'} \right)} \\ \text{ghisa } \frac{R_c}{R_f} = 0,7 + 0,0125 \frac{v'}{r} \frac{l}{r} = 0,7 + 0,0125 \frac{v' l}{\left(\frac{I}{A} \right)} = \\ \quad = 0,7 + 0,0125 \frac{A l}{\left(\frac{I}{v'} \right)} \end{array} \right.$$

$$\text{per } 30 < \frac{l}{d} < 180 \text{ per ferro } \frac{R_c}{R_f} = 1,6 + 0,000016 \frac{v'}{r} \left(\frac{l}{r} \right)^2 =$$

$$= 1,6 + 0,000016 \frac{v' l^2}{\left(\frac{I}{A} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{per } 30 < \frac{l}{d} < 120 \text{ per la ghisa } \frac{R_c}{R_f} = 1,5 + 0,000105 \frac{v'}{r} \left(\frac{l}{r} \right)^2 =$$

$$= 1,5 + 0,000105 \frac{v' l^2}{\left(\frac{I}{A} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

il valore di l che entra in queste formole corrisponde al caso di una trave incastrata alle due estremità $\left(l_1 = \frac{l}{n-1} = \frac{l}{2(m-1)}\right)$.

Le formole di LEBER non sono quindi altro che le formole di LOVE generalizzate, poichè mentre queste non convengono che alle colonne a sezione circolare, quelle possono essere applicate a qualunque contraffisso avente una sezione qualsiasi. Le formole di LOVE sono una lineare e l'altra parabolica; confrontandole fra di loro si ricava

$$1,55 + 0,00055 \frac{l^2}{d^2} = 0,85 + 0,040 \frac{l}{d}$$

da cui

$$\frac{l}{d} = 40 \pm \sqrt{200} = \begin{cases} = 25,8578 & \text{ed } \frac{R_c}{R_f} = 1,8843 \\ = 54,1421 & \text{ed } \frac{R_c}{R_f} = 3,0157 \end{cases}$$

ossia la retta corrispondente alla prima formola taglia la parabola rappresentata dalla seconda in due punti corrispondenti prossimamente ad $\frac{l}{d} = 25$ e ad $\frac{l}{d} = 54$ e quindi per questi valori si hanno da

entrambe le formole gli stessi risultati. Per i valori intermedi la formola lineare dà valori che sorpassano quelli dati dalla formola parabolica meno del 4%, come appare dall'esame della formola stessa e come può essere reso evidente tracciando i diagrammi corrispondenti alle medesime (Vedi *fig. 147^a, tav. XXVIII*). Dalle cose esposte, secondo l'Ingegnere DE LEBER, si può concludere che l'effetto della compressione accompagnata da flessione laterale in un solido ad asse rettilineo può essere rappresentato mediante due formole, una lineare conveniente finchè $\frac{R_c}{R_f} < 1,9$ ed una parabolica che con-

viene invece pei valori superiori di $\frac{R_c}{R_f}$. Tuttavia finchè $\frac{R_c}{R_f} < 4$ si può ancora accettare la formola lineare, ed anzi per i valori $2 < \frac{R_c}{R_f} < 3$ essa dà un leggero eccesso di resistenza, che in vista dell'incertezza che regna intorno a questo argomento non può essere che desiderabile. L'Ingegnere DE LEBER osserva che nelle costruzioni in generale, ed in particolare nella costruzione dei ponti, il caso comune è che $\frac{R_c}{R_f}$ sia inferiore a 3, anzi questo

valore non dovrebbe mai essere sorpassato, quindi esso termina le sue ricerche consigliando l'uso della formola lineare in confronto di quella parabolica in tutti i casi usuali delle costruzioni (*). A complemento poi delle sue osservazioni DE LEBER porta un quadro, in cui sono iscritti i risultati ottenuti da BAUSCHINGER nel laboratorio sperimentale di resistenza dei materiali di Monaco e quelli che si hanno usando le due formole, che esso propone, e la formola di RANKINE riportata superiormente. Ritenendo che tale quadro possa dare utili indicazioni sull'importanza ed esattezza relativa delle varie formole lo riproduciamo nella pagina seguente togliendolo dall'opera già citata del DE LEBER pagina 105 (**).

(*) DE LEBER ha calcolato il valore di k colla formola di RANKINE

$$\left(k = 1 + 0,00008 \left(\frac{l}{r} \right)^2 \right)$$

e colle due che esso propone per un ferro a T corrispondente alle dimensioni $100 \times 77:11$, nel quale i momenti d'inerzia I_1 e I_2 rispetto ai due assi principali baricentrici sono pressochè uguali. Riferendo le misure al centimetro come unità

$$\begin{array}{llllll} \perp & A = 18,26 & I_1 = 92,34 & v' = 5,62 & r^2 = 5,057 & r = 2,25 \\ \vdash & A = 18,26 & I_2 = 92,40 & v' = 5,00 & r^2 = 5,060 & r = 2,25 \end{array}$$

Lun- ghezza l c.m.	$1 + 0,0008 \left(\frac{l}{r} \right)^2$	$1,6 + 0,000016 \frac{v'}{r} \left(\frac{l}{r} \right)^2$		$0,8 + 0,005 \frac{v'}{r} \frac{l}{r}$	
	Posizione	Posizione		Posizione	
	$\perp$ e $\vdash$	$\perp$	$\vdash$	$\perp$	$\vdash$
200	1,632	1,916	1,881	1,911	1,783
300	2,423	2,312	2,232	2,467	2,282
400	3,530	2,865	2,725	3,022	2,776
500	4,952	3,577	3,357	3,578	3,270

(**) MAYER in un articolo pubblicato nella *Gazzetta degli ingegneri ed architetti austriaci* (23 giugno 1893) confronta i risultati ottenuti colle formole di DE LEBER con 20 risultati tolti dalle esperienze di BAUSCHINGER e TETMAYER e rileva che esiste un notevole disaccordo. Questa differenza potrebbe essere spiegata facilmente considerando che DE LEBER ha determinato i coefficienti delle sue formole unicamente in base a quelli delle formole di LOVE convenienti specialmente alle colonne a sezioni circolari, probabilmente essa diminuirebbe assai se i predetti coefficienti venissero determinati in base ai risultati di esperienze fatte su colonne e contraffissi aventi sezioni di altre forme, precisando i limiti entro i quali le formole possono essere applicate, poichè la forma della funzione corrisponde a quella delle formole date da altri sperimentatori. Le formole di DE LEBER sono assai usate in Austria nel calcolo delle costruzioni metalliche e fino ad ora non sembra che abbiano dato luogo ad inconvenienti.

DESIGNAZIONE dei solidi assoggettati all'esperienza		LUNGHEZZA			Valori misurati		Rapporti $P_c : P_f = R_c : R_f$ secondo		
Unità di misura: centimetro e chilogramma		colle estremità arrotondate in centimetri	colle e- stremità piatte in centim.	lunghezza l corrispon- dente per l'uso della formola in centimetri	di P in tonnell.	l'osser- vazione	la formola $1 + 0,00008 \left(\frac{l}{r}\right)^2$	la formola $1,6 + 0,000016 \frac{v}{r} \left(\frac{l}{r}\right)^2$	la formola $0,8 \times 0,005 \frac{v}{r^2}$
1 ^a (lab. 2692 a)		per barre corte			60,3	1,00	—	—	—
H	$9,89 \times 4,80$	—	42,0	42,0	40,5	1,49	1,09	—	1,13
	$A = 12,30$	—	82,9	82,9	35,0	1,72	1,36	—	1,46
	$R_c = 4900$	—	137,5	137,5	28,5	2,11	1,99	1,99	1,89
2 ^a (lab. 2696 a)		per barre corte			99,3	1,00	—	—	—
T	$11,77 \times 7,91$	—	107,4	107,4	55,5	1,79	1,26	1,77	1,70
	$A = 19,10$	—	149,5	149,5	52,0	1,91	1,51	1,92	2,05
	$R_c = 5200$	—	221,8	221,8	47,0	2,11	2,13	2,30	2,65
3 ^a (lab. 2695 a)		per barre corte			88,0	1,00	—	—	—
L	$7,70 \times 5,28$	63,4	—	126,8	42,0	2,09	1,79	2,01	2,09
	$A = 16,45$	97,9	—	395,8	40,0	2,20	2,87	2,57	2,79
	$R_c = 5350$	155,2	—	110,4	30,0	2,93	5,72	4,04	3,96
4 ^a (lab. 2690 a)		per barre corte			82,4	1,00	—	—	—
H	$12,40 \times 7,20$	89,0	—	178,0	61,0	1,35	2,22	2,21	2,34
	$A = 18,30$	151,0	—	302,0	30,2	2,72	4,51	3,36	3,42
	$R_c = 4500$	223,0	—	446,0	17,2	4,78	8,32	5,25	4,67
5 ^a (lab. 2691 a)		per barre corte			83,9	1,00	—	—	—
L	—	160,0	—	160,0	46,0	1,82	2,07	2,25	2,55
	93,4	—	186,8	40,0	2,10	2,46	2,48	2,84	
	—	314,5	314,5	29,5	2,84	5,12	4,10	4,24	
	243,5	—	487,0	17,7	4,74	10,49	7,60	6,12	
	328,5	—	657,0	9,7	8,65	19,40	12,51	—	

Devesi osservare che nelle formole di DE LEBER il solido è supposto incastrato alle sue estremità, quindi l dovrà essere moltiplicato per due quando si considerano solidi colle estremità libere di ruotare per avere dalla formola risultati attendibili.

Alle formole riferite superiormente pel calcolo dei solidi ad asse rettilineo sollecitati da sforzi di compressioni agenti secondo l'asse stesso se ne potrebbero aggiungere altre; non crediamo opportuno di farlo perchè le formole riportate sono quelle che sole sono usate comunemente dagli ingegneri. Chi desiderasse fare uno studio particolare sopra questo argomento potrà consultare le opere speciali e le memorie originali delle persone, le quali si sono occupate della resistenza dei solidi ad asse rettilineo soggetti a compressione, che in gran parte abbiamo citate nel corso di questo studio.

Non è facile esprimere un giudizio sulla convenienza di impiegare una delle formole discusse a preferenza delle altre: il Professore BAUSCHINGER, notissimo sperimentatore sulla resistenza dei materiali, dichiara la sua convinzione della impossibilità di trar partito degli studi fatti sui valori crescenti delle frecce per misurare l'importanza dell'inflessione laterale nei solidi assoggettati ad esperienza in causa dell'incertezza relativa alla costituzione omogenea dei materiali, e della difficoltà di centrare i campioni in modo che lo sforzo di compressione sia perfettamente assiale. Esso riferisce che per le colonne colle estremità libere di ruotare la formola di EULERO dà risultati che concordano con quelli ottenuti sperimentalmente, mentre invece la formola di RANKINE condurrebbe a risultati più concordanti con quelli forniti dall'esperienza nel caso di colonne colle estremità piate e quindi impedito di ruotare. Questo fatto è indubbiamente importante ed applicando un opportuno coefficiente di sicurezza mostra che la formola è conveniente per determinare la sezione resistente del solido soggetto a compressione entro i limiti già più volte accennati. Non si può però concludere per questo che la formola di RANKINE dia sempre esattamente il valore R dello sforzo unitario, che si sviluppa nel materiale, poichè si è già osservato più volte che le formole della resistenza dei materiali convengono entro i limiti di elasticità finchè le deformazioni sono molto piccole, ma cadono in difetto in vicinanza della rottura. Quindi l'essere la formola più prossima al vero al momento della rottura non autorizza a ritenere che essa lo sia anche dentro i limiti di elasticità, poichè fino ad ora nulla prova che le ipotesi fondamentali siano verificate nel caso speciale della pressofles-

sione anche in vicinanza della rottura (*); bisognerebbe premettere la dimostrazione sperimentale di questo fatto, od almeno di criteri atti a servire di guida nell'interpretazione di ciò che si verifica durante l'inflessione laterale che precede la rottura.

In via generale le formole a coefficienti sperimentali conven-
gono entro i limiti e nelle condizioni nelle quali i coefficienti
stessi vennero determinati. Per colonne e supporti in legno po-
tranno quindi convenire, nei casi usuali della pratica, le formole
di RONDELET, MORIN ed HODGKINSON, per le colonne a sezione cir-
colare saranno utilissime le formole di HODGKINSON e LOVE, per i
solidi soggetti a compressione aventi sezioni di altra forma, sezioni
ad angolo, a T semplice e doppio, a croce greca, a C, ecc., fino
ad ora gli ingegneri usano ordinariamente la formola detta di
RANKINE, di SCHWARZ, ecc., oppure quelle di MÜLLER-BRESLAU,
tenendo conto per tutte delle osservazioni fatte superiormente in-
torno ai limiti, entro i quali sono applicabili, oppure entro i quali
furono determinati i coefficienti, che entrano nelle medesime. Le
formole di DE LEBER sono state proposte da troppo poco tempo
perchè possano essere entrate nell'uso comune, esse però sono già
molto usate in Austria ed entro i limiti indicati sembrano soddisfare
molto bene e concordare sufficientemente coi risultati sperimentali
e con quelli forniti dalle altre formole quando si tenga presente
l'incertezza che regna intorno a questo argomento: la loro forma
corrisponde a quella delle formole di LOVE, di cui sono in certo
qual modo una generalizzazione, e solo si potrebbe desiderare che
i coefficienti empirici, oltre che sulle esperienze di HODGKINSON,
fossero stati determinati anche in base ai risultati di altri espe-
rimentatori più recenti. Finalmente quando si voglia spingere
l'esattezza del calcolo fino al limite estremo permesso dagli studi
e dalle ricerche sperimentali fatte fino ad oggi, allora, tenendo
conto delle osservazioni e dei calcoli fatti in questo e nei numeri
precedenti, si potranno usare le formole proposte o modificate da
TETMAYER avendo presente i limiti entro i quali esse hanno va-
lore e la loro convenienza relativa. Queste formole sono molto
apprezzate e godono attualmente grande favore fra gli ingegneri;
l'uso della formola di RANKINE dando ad α un valore variabile

col rapporto $\frac{l}{r}$ può far ritenere razionalmente che la formola stessa
si adatti meglio e si accordi maggiormente coi risultati ottenuti
da quell'accurato e valente sperimentatore. L'introduzione poi
del coefficiente R_p invece del carico di rottura R_s , oppure del

(*) Vedi CONSIDÈRE, Memoria citata.

limite dei carichi permanenti $R_a'' = \frac{R_s''}{n}$ quando si ponga in evidenza il coefficiente di sicurezza $\frac{1}{n}$, fatta nel modo e dietro le considerazioni esposte superiormente, permetterebbe anche di incominciare a valutare l'influenza variabile dell'eccentricità e in modo razionale ed in concordanza colle esperienze dello stesso TETMAYER. Per mancanza di dati sperimentali ciò non potrebbe per ora esser fatto che entro limiti molto larghi e soltanto pel ferro di fusione ed il ferro saldato, ma nuove ricerche potrebbero servire a determinare l'influenza dell'eccentricità anche per altri materiali ed in diverse condizioni di messa in opera. Per queste ragioni riteniamo che la formula

$$R_t'' = \frac{R_p''}{1 + \frac{R_p'' l^2}{8 E r^2}} \quad \text{oppure} \quad R_{ta}'' = \frac{1}{n} \frac{R_p''}{1 + \frac{R_p'' l^2}{8 E r^2}} \quad (100)$$

proposta superiormente, possa essere utilmente impiegata entro i limiti nei quali si è detto che nè la compressione semplice, nè la flessione laterale, sono trascurabili una rispetto all'altra.

Un'ultima osservazione relativa alla resistenza delle colonne è che avviene spesso che esse non risultino di un unico pezzo, ma di varie parti sovrapposte le une alle altre. Ciò si verifica specialmente per le colonne e pilastri in muratura, i quali risultano dall'insieme di piccoli pezzi (laterizi) oppure di conci (blocchi di pietra naturale) sovrapposti regolarmente colle facce normali e parallele alla direzione dello sforzo di compressione, resi il più delle volte solidali mediante cementi, malte od altro materiale aderente ai medesimi. Pochissime esperienze sono state fatte a questo proposito: RONDELET avendo sovrapposti tre cubi di gesso del lato di centimetri 5,00 trovò che la resistenza era $\frac{2}{3}$ di quella presentata da un monolite di dimensioni uguali a quelle del solido formato dall'insieme dei tre cubi sovrapposti. Secondo VICAT la grande diminuzione di resistenza osservata da RONDELET dipenderebbe dall'imperfetto pareggiamento delle facce a contatto, dalla mancanza di malta o dalla sua qualità non buona. VICAT ha fatto varie esperienze con prismi in gesso e da esse ha dedotto che rappresentando coll'unità la resistenza di un prisma monolitico alto h , quella dello stesso prisma formato di più pezzi è esprimibile mediante le seguenti frazioni:

0,930	per 2 pezzi con altezza totale	h
0,851	» 4 » » »	$2 h$
0,834	» 8 » » »	$4 h$

inoltre esso avrebbe trovato che i giunti paralleli all'asse non avrebbero influenza sensibile sulla resistenza della colonna. Queste esperienze sono state eseguite su piccoli campioni e non si può concludere se i numeri trovati converrebbero ugualmente per pilastri e colonne di grandi dimensioni. In ogni caso però esse mostrano che in una colonna composta di più pezzi sovrapposti la resistenza agli sforzi di compressione è inferiore a quella di una colonna monolitica di uguali dimensioni, che questa diminuzione sarebbe inferiore a quella annunciata da RONDELET cioè al 33 %, però essa è sempre apprezzabile e può anche essere notevole variando dal 7 al 17 % anche pei piccoli campioni preparati nei gabinetti sperimentali.

32. Equilibrio interno delle ruote dei vagoni e delle locomotive. — In una ruota per vagone o per locomotiva si distinguono due parti, la *ruota* propriamente detta ed il *cerchione*. Quest'ultimo ha un diametro interno leggermente più piccolo di quello della ruota in guisa che per adattarlo sulla medesima è necessario riscaldarlo; avvenendo in seguito il suo raffreddamento esso preme uniformemente sulla periferia della ruota dando origine a sforzi nell'interno della medesima e vi aderisce fortemente. Nel corpo della ruota si distinguono la *corona* o parte periferica, il *nucleo centrale* o *mozzo* e finalmente i *raggi* o *bracci* che riuniscono le due parti. Il mozzo è perforato nel centro con un vano leggermente conico ed in questo si introduce sotto forte pressione l'estremità dell'albero in guisa che esso preme contro la superficie interna del mozzo, vi aderisca fortemente e provochi nel medesimo sforzi di tensione. In causa dell'azione del cerchiione sulla corona e dell'asse nell'interno del mozzo avvengono nelle varie parti della ruota particolari deformazioni e perchè essa sia in buone condizioni di resistenza è necessario che in tutti i suoi punti sia verificata l'equazione di coesione. Come applicazione delle formole trovate relative alla sollecitazione a tensione ed a compressione ci proponiamo di determinare le equazioni di condizione, le quali assicurano che una ruota si trova in equilibrio ed in buone condizioni di resistenza (*).

Siano (*Fig. 148^a, tav. XXVIII*)

p la pressione per unità di superficie fra il cerchiione e la corona

Ω l'area della sezione del cerchiione

(*) CONTAMIN, *Cours de résistance appliquée*, pag. 462 e segg. — MASTAING, *Cours de mécanique appliquée à la résistance des matériaux*, pag. 62.

ω l'area della sezione della corona
 α l'area della sezione di un braccio
 A l'area della sezione del mozzo
 b la larghezza della corona
 r il raggio esterno della corona prima della messa in opera del cerchione

$\frac{s}{2r}$ la differenza unitaria fra il diametro interno del cerchione ed il diametro esterno della ruota
 l la lunghezza dei bracci
 2α l'angolo compreso fra gli assi di due bracci successivi
 ρ il raggio esterno del mozzo
 d_1 il diametro medio della parte dell'asse introdotto nel mozzo
 q la pressione unitaria agente fra l'asse ed il mozzo
 L la lunghezza del mozzo
 R la tensione unitaria nel cerchione
 R' la compressione unitaria nella corona
 R'' la compressione unitaria nei bracci
 R''' la tensione unitaria nel mozzo
 E il coefficiente di elasticità corrispondente al cerchione
 E' il coefficiente di elasticità corrispondente alla corona
 E'' il coefficiente di elasticità corrispondente al braccio
 E''' il coefficiente di elasticità corrispondente al mozzo
 i l'allungamento unitario nel cerchione
 i' l'accorciamento unitario nella corona
 i'' l'accorciamento unitario nel braccio
 i''' l'allungamento unitario nel mozzo
 f il coefficiente d'attrito fra il mozzo e l'asse
 Q la pressione necessaria per introdurre l'asse nel mozzo.

Se si trascura l'effetto della leggera inclinazione sull'asse della superficie interna del mozzo, cosa che può essere fatta senza errore apprezzabile in causa della piccolezza dell'angolo al vertice della superficie conica del vano, cioè se si suppone che q sia diretta normalmente all'asse, perchè quest'ultimo abbia potuto penetrare nel mozzo è necessario che sia verificata la relazione

$$Q \geq f \pi d_1 L q$$

e trascurando il segno $>$ per prendere in esame soltanto le condizioni di equilibrio si ricava

$$q = \frac{Q}{f \pi d_1 L}.$$

Il cerchione della ruota deve resistere all'effetto di uno sforzo radiale uniformemente distribuito p , quindi, per quanto è stato detto al numero 22 problema IV (Parte II), dovrà essere

$$R \Omega = T = p b r .$$

La corona deve resistere all'azione uniforme della pressione radiale p ed all'effetto prodotto dai bracci. Considerando la porzione di ruota compresa fra i piani MN ed SV , passanti per l'asse e bisettori degli angoli compresi fra tre bracci successivi, è evidente che per l'equilibrio della porzione di corona $MmsS$ deve essere verificata l'equazione

$$a R'' + 2 R' \omega \sin \alpha = 2 p b r \sin \alpha .$$

Analogamente per l'equilibrio della porzione $Nn v V$ di mozzo deve essere verificata l'equazione

$$a R'' + 2 R''' A \sin \alpha = q L d_1 \sin \alpha .$$

L'equazione di elasticità pei solidi soggetti a tensione o compressione fornisce le seguenti relazioni

$$R = E i$$

$$R' = E' i'$$

$$R'' = E'' i''$$

$$R''' = E''' i''' .$$

Finalmente la condizione d'aderenza fra le diverse parti della ruota si traduce nelle due relazioni

$$\frac{s}{2r} = i + i' \qquad i'' l = i' r + i''' \rho .$$

Quindi fra le 28 quantità prese in considerazione nell'esame dell'equilibrio della ruota esistono dieci equazioni e nove di tali quantità, cioè

$$r, s, d_1, E, E', E'', E''', f, Q$$

costituiscono i dati del problema, oppure sono coefficienti sperimentali dipendenti dalla natura del materiale impiegato. Restano adunque nove quantità arbitrarie e la soluzione diretta della questione è impossibile; bisogna, per confronto con altri esempi costruiti, assegnare il loro valore e le dieci equazioni trovate superiormente potranno allora servire a determinare se la ruota si

trova in buone condizioni di resistenza. Se si assumono in questo modo tutte le dimensioni della ruota allora i dati del problema sono

$\Omega, \omega, a, A, b, r, s, l, 2\alpha, \rho, d, L, E', E'', E''', E, f, Q$,
cioè 18 e le dieci equazioni superiori sono in numero sufficiente per verificare le condizioni di resistenza.

Se tutte le parti della ruota sono formate dello stesso materiale, cosa facile a verificarsi in pratica pei veicoli ferroviari, allora

$$i''' = \frac{\frac{Q}{\pi f E} \left[2(\Omega + \omega) \sin \alpha + \frac{r}{l} a \right] - \frac{s}{l} \Omega a}{2 \left[\left(2A \sin \alpha + \frac{\rho}{l} a \right) (\Omega + \omega) + \frac{r}{l} a A \right]}$$

$$i = \left[\frac{\frac{Q}{\pi f E} + \frac{s}{2r} (2\omega)}{2(\omega + \Omega)} \right] - \frac{A}{\omega + \Omega} i'''$$

e poichè

$$i' = \left(\frac{s}{2r} - i \right)$$

$$i'' = \left(\frac{s}{2r} - i \right) \frac{r}{l} + i''' \frac{\rho}{l}.$$

Si vede che calcolato i''' si deducono immediatamente i valori di i, i', i'' , quindi le tensioni e compressioni unitarie R, R', R'', R''' .

Nello stabilire il significato dei vari simboli si è ammesso *a priori* che R ed R''' rappresentino tensioni ed R'' ed R' compressioni, se i''' risultasse negativo vorrebbe dire che nel mozzo si verificano sforzi di compressione. Una buona condizione di stabilità è che nel mozzo le fibre non siano nè tese nè compresse, quindi in pratica sarà opportuno avvicinarsi quanto è possibile alla condizione $i''' = 0$, cioè bisognerà cercare che sia

$$Q = \frac{s a \Omega \pi f}{2(\Omega + \omega) l \sin \alpha + r a} E \quad (103).$$

Se si suppone

$$\Omega = 0^{\text{mq}},0064 \quad \omega = 0^{\text{mq}},0026 \quad a = 0^{\text{mq}},0026 \quad A = 0^{\text{mq}},014$$

$$\sin \alpha = 0,26, \quad E = 20 \times 10^9, \quad s = 0,001 (2r)$$

$$2r = 1^{\text{m}},20, \quad l = 0^{\text{m}},41, \quad b = 0^{\text{m}},100, \quad d = 0^{\text{m}},16, \quad \rho = 0^{\text{m}},165$$

$$L = 0^{\text{m}},17 \quad f = 0,20$$

si trova

$$Q = 74\,666\text{kg},00$$

valore molto prossimo a quello che si usa nelle officine per montare le ruote sul loro asse; ordinariamente tale operazione viene fatta sotto l'azione di uno sforzo di Kg. 70 000,00 ottenuto mediante un torchio idraulico. In queste condizioni, cioè $i''' = 0$, le relazioni precedenti danno immediatamente

$$R = \frac{s}{2r} \left[\frac{2\omega l \sin \alpha + r a}{2(\Omega + \omega) l \sin \alpha + r a} \right] E$$

$$R' = \frac{s}{2r} \left[\frac{2\Omega l \sin \alpha}{2(\Omega + \omega) l \sin \alpha + r a} \right] E$$

$$R'' = R' \frac{r}{l}.$$

Da queste formole risulta

a) Che la tensione nel cerchione e la compressione nella corona sono proporzionali al restringimento $\frac{s}{2r}$, quindi questo in pratica non dovrà essere superiore ad un certo limite dipendente dalla natura e tenacità del materiale; ordinariamente si fissa pel ferro $\frac{s}{2r} \leq 0,001$.

b) che la tensione nel cerchione aumenta col diminuire dell'area Ω della sua sezione trasversale. Ciò spiega perchè nelle ferrovie sia imposto di ritirare e cambiare i cerchioni nelle ruote quando, in causa dell'uso, il consumo del materiale è arrivato ad un certo limite determinato.

c) che la compressione R'' nei bracci è sempre superiore a quella che si verifica nella corona quando $i''' = 0$ poichè $\frac{r}{l}$ è sempre maggiore dell'unità.

Se $i''' > 0$ allora la compressione R'' aumenta ancora, quindi in pratica sarà sempre opportuno che lo sforzo Q non si scosti molto dal valore corrispondente all'ipotesi $i''' = 0$ determinato dalla formola (103) per non aumentare troppo lo sforzo di compressione R'' agente nei bracci, che è già relativamente molto forte nell'ipotesi favorevole che sia $i''' = 0$.

CAPITOLO III.

Travature ad asse rettilineo

sollecitate da forze agenti in un piano passante per l'asse
e con direzione normale al medesimo - Sforzo di taglio -
Collegamenti.

33. Sforzo di taglio. Casi particolari, nei quali ha importanza predominante nello stabilire le condizioni di resistenza. — Quando un solido ad asse rettilineo è soggetto a sforzi diretti normalmente all'asse agenti in un piano passante pel medesimo le caratteristiche meccaniche di sollecitazione nelle varie sezioni si riducono al momento flettente M ed allo sforzo radente F , detto anche *sforzo di taglio* o di *rescissione*.

Trasportando infatti al centro di gravità di ogni sezione trasversale del solido le forze esterne alle medesime, la componente normale X è necessariamente nulla, perchè le dette forze sono perpendicolari all'asse (asse delle x) ed il momento di torsione si annulla pure, perchè tutte le forze esterne incontrano l'asse stesso. Nei casi usuali lo sforzo di taglio non agirà mai solo sopra una trave, ma avrà luogo contemporaneamente un momento di flessione, rispetto al quale, come è già stato avvertito nella parte I, numero 58 pagina 168, esso non avrà in generale influenza preponderante. Qualche volta però anche il momento flettente si annulla o per lo meno diventa trascurabile rispetto allo sforzo di taglio: ciò può avvenire quando il solido sia molto corto, oppure quando sopra il medesimo agiscano forze a due a due uguali e contrarie ed applicate in sezioni vicinissime fra loro, o finalmente in vicinanza delle sezioni, nelle quali s'annulla (nella supposizione che sia una funzione continua) l'espressione del momento flettente, poichè in tutti questi casi, riducendo le forze esterne ai centri di gravità delle singole sezioni, i bracci delle coppie risultano piccolissimi. Queste particolari condizioni si incontrano in pratica specialmente quando si debbono collegare fra loro due o più pezzi, nei quali si esercitano degli sforzi assiali o trasversali, ed in corrispondenza degli appoggi liberi delle travi, oppure delle sezioni di momento nullo nelle travature continue sopra più di due appoggi od incastrate alle estremità.

Dalle cose esposte risulta che lo studio delle travature ad asse rettilineo sollecitato nel modo indicato deve essere diviso in due

parti: nella prima si considererà lo sforzo di taglio solo, ritenendo nullo o trascurabile il momento flettente, nella seconda invece il momento flettente e lo sforzo di taglio saranno considerati simultaneamente ed in certo qual modo come concomitanti. In questo capitolo ci occuperemo soltanto del primo caso richiamando le formole generali e svolgendo la teoria dei collegamenti a freddo ed a caldo; il secondo caso sarà trattato nel capitolo seguente insieme alle applicazioni della teoria delle travature soggette a flessione.

Se il momento flettente è nullo o può essere considerato come trascurabile rispetto allo sforzo di taglio, più particolarmente se $\frac{M^2}{2EI}$ è trascurabile rispetto ad $\frac{F^2}{2GA}$ (Vedi Parte I, num. 58) allora le caratteristiche di sollecitazione si riducono alla forza F e le formole di elasticità e resistenza (Vedi Parte I, num. 64 e 65) corrispondenti sono

$$F = GA g$$

$$F = SA$$

nelle quali i coefficienti G ed S per i corpi isotropi sono esprimibili in funzione del modulo di elasticità E , dell'indice di contrattibilità laterale m e della resistenza a tensione e compressione R mediante le relazioni

$$G = \frac{m}{2(m+1)} E \quad (*)$$

$$S = \frac{m}{m+1} R \quad (**).$$

Le quantità E ed R sono più facili ad essere determinate sperimentalmente che non G ed S , e sono note per vari materiali (Vedi Parte I, cap. VII). Quanto al valore di m abbiamo visto nella teoria generale della resistenza dei materiali che per corpi isotropi deve ritenersi uguale a 4, per cui sarebbe

$$G = \frac{2}{5} E \qquad S = \frac{4}{5} R.$$

(*) Parte I, numero 44, formola 78.

(**) Parte I, numero 74, formola 203.

Alcuni ingegneri, specialmente gli Americani, pongono $S = \frac{3}{4} R$ basandosi sul fatto che non vi sono in natura corpi isotropi adoperabili nelle costruzioni, in ogni caso poi potrebbero cessare di esserlo pel solo fatto che su essi si esercitano sforzi in un sol senso, e che le esperienze fatte da WERTHEIM, REGNAULT, KIRCHHOFF, ecc. (*) per determinare con misure dirette il valore $\frac{1}{m}$ hanno dato risultati compresi fra $\frac{1}{3}$ ed $\frac{1}{4}$. La conclusione a cui sono arrivati con accurata analisi COUCHY, LAMÉ, KIRCHHOFF, che debba essere necessariamente verificata la disuguaglianza $\frac{1}{2} > \frac{1}{m} > 0$ (**) e la determinazione teorica di $m = 4$, fatta da NAVIER POISSON, CLAPAYRON, BARRE DE SAINT-VENANT, dimostrata in due modi diversi ed affatto indipendenti al numero 44 della parte I (Vedi l'osservazione, form. 79) congiunte ai risultati sperimentali citati ed a quelli più recentemente ottenuti da WÖHLER e da BAUSCHINGER (***) provano che $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$ sono due limiti estremi

(*) WÜLNER, *Experimental physik*, 1874, vol. I, paragrafi 51-54. — Vedi anche parte I, capitolo VII.

(**) Per un elemento di $l = \Delta L$ di barra cilindrica di diametro d e lun-

ghezza L , detto v il suo volume e $m = \frac{\frac{\Delta l}{l}}{\frac{\Delta d}{d}}$ il coefficiente di contrazione

laterale, in seguito ad una deformazione infinitamente piccola ha luogo la relazione

$$\begin{aligned} \frac{v + \Delta v}{v} &= 1 + \frac{\Delta v}{v} = \frac{(d + \Delta d)^2 (l + \Delta l)}{d^2 l} = \\ &= \frac{\left(d - \frac{d}{m} \frac{\Delta l}{l}\right) (l + \Delta l)}{d^2 l} = 1 + \frac{\left(-2 \frac{d^2}{m} \frac{\Delta l}{l} + \frac{d^2}{m^2} \frac{\Delta l^2}{l^2}\right) (l + \Delta l)}{d^2 l} \end{aligned}$$

trascurando gli infinitesimi di ordine superiore e riducendo $\frac{\Delta v}{v} = -\frac{2}{m} \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta l}{l}$ da cui

$$m = \frac{2 \frac{\Delta l}{l}}{\frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta v}{v}} \quad \text{ossia} \quad \frac{1}{2} > \frac{1}{m} > 0.$$

(***) WÖHLER, *Die Festigkeitsversuche mit Eisen und Stahl*, 1870, pag. 5.
— SPANNGEBERG, *Ueber das Verhalten der metalle*, 1875, pag. 20. —

entro i quali oscilla il valore del rapporto $\frac{m}{m+1}$ pei materiali comunemente usati. Più il corpo ha composizione uniforme in tutti i sensi più il valore del rapporto $\frac{m}{m+1}$ deve accostarsi, e si accosta realmente, a $\frac{4}{5}$ e quello di m a 4; meno si accentua questo carattere, meno si accordano i risultati sperimentali coi valori teorici: per prodotti ferrosi ottenuti col forno a *pudler*, e meglio per quelli ricavati per via di fusione, si è più vicini al vero ritenendo $m=4$, come è dato dalla teoria, che $m=3$. Quando si debbono considerare corpi fibrosi oppure con costituzione a falde, come potrebbero essere certe lamiere, $\frac{m}{m+1}$ non può più avere un valor costante in tutte le direzioni secondo le quali le fibre e le falde si uniscono, la resistenza allo sforzo di taglio non può più essere rappresentato da $\frac{4}{5} R$ e neppure da $\frac{3}{4} R$, ma può diventare nei metalli anche $\frac{1}{2}$ e qualche volta perfino $\frac{1}{3}$ di R (*), mentre invece in senso normale alle fibre qualche volta la resistenza al taglio riesce uguale a quella che il materiale presenta alla trazione (**): nei legnami questo fatto si accentua in grado molto maggiore.

BAUSCHINGER, *Comunicazioni del Laboratorio tecnico-meccanico della Regia Scuola politecnica di Monaco* (*Gazzetta della Società degli ingegneri ed architetti Bavaresi*, 1873).

WÖHLER ha trovato

$$\begin{array}{ll} \text{pel ferro da alberi dell'officina PHÖNIX} & \frac{S}{R} = \frac{350}{445} \\ \text{per la lamiera d'acciaio fuso di KRUPP} & \frac{S}{R} = \frac{550}{738} \\ \text{ed esperimentando per torsione} & \frac{G}{E} = \frac{1,95}{5,00} \end{array}$$

BAUSCHINGER, in una serie di esperienze fatte con ferro omogeneo BESSEMER, ha ottenuto ancora lo stesso valore $\frac{G}{E} = \frac{1,95}{5,00}$. Tali risultati equivalgono per questi metalli ad un valore di $m=4$ o molto prossimo ad esso.

(*) WEYRAUCH, *Stabilità delle costruzioni in ferro ed in acciaio*.

(**) BAUSCHINGER (loco citato) isolando nella lamiera un parallelepipedo coi lati paralleli o normali alle falde e quindi anche al senso della lami-
natura distingue sei direzioni (*Fig. 149^a, tav. XXVIII*). Le direzioni I, III,

Nella discussione che seguirà relativamente alla resistenza dei collegamenti si lascerà il più delle volte indicato il rapporto $\frac{S}{R}$ col simbolo $\frac{m}{m+1}$, ritenendo di assegnare ad m il valore più conveniente nel caso particolare che si tratta: pei metalli in condizioni usuali il più delle volte si porrà $m=4$, come è stato adattato da MOLINOS, PRONIER, REULEAUX, GERBER, WEYRAUCH, CONSIDÈRE, LEBASTEUR, ecc., ciò non recherà alcun danno se in uno o più sensi la resistenza al taglio viene aumentata in causa della struttura fibrosa.

Nei casi in cui lo sforzo di taglio tende a staccare lateralmente una dall'altra le fibre o le falde della laminazione si potrà tener conto della minor resistenza introducendo un opportuno coefficiente di riduzione, oppure prendendo i numeri di resistenza unitaria direttamente forniti dai risultati di esperienze speciali: cessando le condizioni che permettono di considerare l'isotropia come forma limite della composizione del corpo il coefficiente $\frac{m}{m+1}$ non ha più valore ed il rapporto fra il modulo di elasticità in un senso ed il coefficiente di elasticità trasversale ha una forma molto più complessa che quella conveniente ai corpi isotropi (*).

Per le chiodature in genere e per le unioni con bulloni, chiodavarde e bolzoni, si usa materiale scelto, ferro di prima qualità, acciaio dolcissimo (ferro di fusione, *flusseisen*) (**), quindi il valore $\frac{m}{m+1} = \frac{4}{5}$ sarà il valore più conveniente, tanto più che in questo caso la sollecitazione agisce ordinariamente in senso

IV sono le più importanti e la resistenza al taglio S è pressochè uguale a quello di trazione R , nella direzione II S è già differente da R in modo sensibile e finalmente nelle direzioni V e VI, S risultò in media uguale ad $\frac{1}{2} R$ diminuendo fino ad $\frac{1}{3} R$.

(*) Vedi parte I capitolo IV. — Vedi GRASHOF. Opera citata, paragrafi 15-20.

(**) Per chiodature si sogliono prescrivere materiali che soddisfino a condizioni analoghe alle seguenti

Ferro	Carico unitario di rottura per millimetro quadrato	Kg. 36
	Allungamento proporzionale di rottura	16 ‰
Acciaio dolce (ferro omogeneo, <i>flusseisen</i>)		
	Carico unitario di rottura per millimetro quadrato	Kg. 38
	Allungamento proporzionale di rottura	28 ‰

normale alla direzione di laminazione. Quando invece si debbono considerare scorrimenti paralleli alle fibre in corpi a struttura fibrosa, allora può essere il caso di variare il valore di m o di tener conto della differenza di resistenza nel modo ed entro i limiti indicati superiormente (*), come si usa effettivamente fare col legno, pel quale la differenza di resistenza allo sforzo radente nel senso normale alle fibre ed in quello parallelo alle medesime è molto notevole, in media si può ritenere approssimativamente che il loro rapporto corrisponda a quello delle rispettive resistenze a tensione nei due sensi, cioè che in via generale e secondo le essenze vari fra $\frac{1}{8}$ ed $\frac{1}{12}$ (Vedi Parte I, cap. VII).

Quando tutte le caratteristiche meccaniche di sollecitazione in un solido ad asse rettilineo sono nulle ad eccezione del solo sforzo di taglio F , l'energia potenziale elastica o lavoro di deformazione, indicandola rispettivamente con L , Λ , Γ secondochè è espressa in funzione delle sole deformazioni, delle forze esterne e delle deformazioni, ovvero delle sole forze esterne, è rappresentata (Vedi Parte I, num. 64, pag. 182) da

$$L = \int_0^1 dL = \frac{1}{2} \int_0^1 G A g^2 ds$$

(**) BAUSCHINGER ha trovato sperimentalmente che il rapporto $\frac{S}{R} = \frac{m}{m+1}$ diminuisce per l'acciaio (ferro omogeneo, *flusseisen*) al crescere della quantità di carbonio che esso contiene.

Tenore in carbonio per 010	Resistenza R alla trazione in Kg. per mmq.	Resistenza S allo sforzo di taglio in Kg. per mmq.	Valore del rapporto $\frac{S}{R} = \frac{m}{m+1}$
0,14	44,30	34,10	0,77
0,19	47,85	37,10	0,77
0,46	53,30	35,85	0,67
0,55	56,50	40,00	0,71
0,66	62,95	42,80	0,66
0,80	72,30	48,20	0,67
0,96	83,05	58,20	0,70

$$\Lambda = \int_0^1 d\Lambda = \frac{1}{2} \int_0^1 F g \, ds$$

$$\Gamma = \int_0^1 d\Gamma = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{F^2}{G A} \, ds$$

le formole di correlazione (Parte I, num. 73 e nella nota A) e di reciprocità si riducono a

$$\sum P'' \delta' = \sum_0^n \frac{F' F''}{G A} \Delta s = \int_0^1 \frac{F' F''}{G A} \, ds = \sum P' \delta''$$

$$\delta_k' = \sum_0^n \frac{F' (F^k)}{G A} \Delta s = \int_0^1 \frac{F' (F^k)}{G A} \, ds = \sum P' (\delta_k).$$

Le espressioni del lavoro di deformazione e le formole di resistenza ed elasticità sono ricavate nell'ipotesi che lo scorrimento g sia costante in tutta la sezione, mentre invece le formole esatte al limite (sezione trasversale infinitamente piccola) darebbero (Vedi Parte I, num. 57)

$$p_{xy} = G g_{xy} = G \left(\frac{d u_1}{d y} - z \theta_x \right)$$

$$p_{xz} = G g_{xz} = G \left(\frac{d u_1}{d z} + y \theta_x \right).$$

La sostituzione delle funzioni $\frac{d u_1}{d y}$ e $\frac{d u_1}{d z}$ con una costante rappresentante il loro valore in corrispondenza del baricentro della sezione introduce una causa ulteriore d'inesattezza, che non può essere tolta altrochè usando un particolare coefficiente di correzione V , come è stato indicato nella parte I, numero 57 (pag. 167) in via generale, ed al numero 75 studiando il caso particolare di una trave soggetta contemporaneamente a flessione e sforzo tagliante. Nel caso particolare che ora ci occupa, in cui

lo sforzo tagliente agisce solo nella sezione resistente, od almeno è predominante, non sembra opportuno introdurre la considerazione del coefficiente di correzione V . In primo luogo la sua determinazione non appare sempre facile perchè spesso è nulla o molto piccola la componente normale p_{xx} ed è difficile apprezzare esattamente come varia da una sezione ad un'altra vicina; inoltre sarebbe necessario introdurre qualche ipotesi particolare intorno al modo col quale le forze esterne sono distribuite alla superficie limite del corpo. In secondo luogo bisogna osservare che il caso in cui il momento flettente è nullo o trascurabile rispetto allo sforzo di taglio corrisponde in generale a solidi resistenti molto corti od a tronchi singolari della travatura e si è già osservato più volte (Vedi Parte I, num. 59, pag. 171) che le formole della resistenza dei materiali in queste condizioni danno soltanto risultati largamente approssimati. Queste formole vanno considerate in tali circostanze come ricerche di prima e larga approssimazione e debbono essere studiate colla scorta dei risultati ottenuti sperimentalmente in condizioni analoghe e confrontate con essi, deducendone la convenienza o meno di usare un coefficiente di correzione o, cosa equivalente, di assumere un valore ridotto per il massimo sforzo unitario ammissibile. L'introduzione quindi del coefficiente di correzione V non può in queste condizioni particolari avere alcun vantaggio nè offrire garanzie di maggior approssimazione: la formola usuale della resistenza dei materiali è indubbiamente preferibile per i bisogni dell'ingegnere costruttore e col confronto dei risultati sperimentali in condizioni comparabili acquista il carattere di legge sicura.

34. Collegamenti in genere e loro classificazione. Criteri generali pel calcolo dei medesimi. — Si è osservato superiormente che le condizioni per le quali il momento flettente è nullo o trascurabile rispetto allo sforzo trasversale F si verificano in modo speciale quando si debbono unire fra loro due o più solidi, che si trasmettono sforzi determinati. Gli sforzi di taglio, che soli restano a prendere in considerazione pei calcoli di stabilità, si sviluppano nelle parti che impediscono i movimenti relativi delle membrature che si vogliono riunire. Più particolarmente essi agiscono sopra quelle parti o sopra quei pezzi intermediari che stabiliscono la solidarietà nelle *sezioni di taglio*, cioè in quelle sezioni, senza la rottura delle quali per scorrimento trasversale, il collegamento non può sciogliersi nel senso in cui è sollecitato dalle forze esterne. Le disposizioni che si adoperano in pratica per ottenere l'unione fra vari solidi o membrature resistenti, si indicano in genere col nome di *collegamenti*, e *teoria dei collegamenti* si dice il com-

plesso di calcoli, di ipotesi e norme pratiche, in base alle quali si determinano le dimensioni delle diverse parti.

Gli ingegneri distinguono due specie di collegamenti: quelli nei quali i vari pezzi convenientemente preparati vengono messi in opera e riuniti alla temperatura ordinaria dell'ambiente, e quelli nei quali una o più parti costituenti del collegamento al momento della messa in opera sono riscaldate ad una temperatura molto elevata. I primi si dicono *collegamenti a freddo* e possono essere usati con tutti i materiali resistenti, i secondi sono chiamati *collegamenti a caldo* e non possono servire che per quei corpi, che non subiscono alterazioni profonde e dannose alla loro resistenza quando si assoggettano ad un calore molto intenso. Questi ultimi non si adoperano correntemente nelle costruzioni che per prodotti ferrosi e precisamente per ferro comune, per ferro omogeneo e per l'acciaio. Il restringimento che si verifica nei collegamenti a caldo in causa del raffreddamento dà origine a sforzi particolari, diversi da quelli importati dalle semplici condizioni d'equilibrio e solidarietà delle parti, indipendenti in gran parte dalla forma e dimensioni delle parti unite e dai cambiamenti che possono avvenire nell'intensità e direzione delle forze agenti nelle medesime, quindi le considerazioni da farsi intorno a queste unioni sono diverse da quelle che convengono per collegamenti a freddo.

I collegamenti dipendentemente dalla loro forma si distinguono in *collegamenti immediati* e sono quelli che si ottengono foggando in modo speciale i punti o tronchi d'unione delle membrature da congiungere in guisa che risulti impedito il movimento relativo delle medesime nel senso, nel quale le forze esterne tenderebbero a farlo avvenire, senza che sia necessaria l'aggiunta di alcun altro pezzo, ed in *collegamenti mediati* nei quali la solidarietà fra le parti è ottenuta per mezzo di uno o più pezzi a parte, affatto distinti dalle membrature o solidi che si vogliono riunire. Fra i primi trovano posto le unioni ad incastro, a vite, ecc., fra i secondi le unioni cilindriche od a cerniera, le unioni sferiche, e quelle che si ottengono mediante biette, chiodi, bolloni o chiavarde e spesso anche coll'uso di pezzi speciali detti coprigiunti. I collegamenti a caldo, che quasi unicamente si usano fra membrature metalliche ottenute colla lavorazione al laminatoio e si eseguono con chiodi portati ad elevata temperatura e ribaditi sui pezzi da unire, appartengono a quest'ultima categoria. Per brevità e chiarezza di esposizione riassumiamo nel quadro seguente l'indicazione dei collegamenti più in uso nelle costruzioni.

Collegamenti immediati	ad incaastro	{	a maschio e femmina
			a coda di rondine
Collegamenti immediati	ad incaastro	{	a dente laterale
			a croce
Collegamenti immediati	ad incaastro	{	
			
Collegamenti immediati	a vite	{	a vite e madre vite
			a manicotto od a vite con eliche opposte.
Collegamenti mediati	cilindrici od a cerniera	{	a cunei, a biette o chiavette
			semplice o di due sole membrature
Collegamenti mediati	cilindrici od a cerniera	{	a briglie
			multipli o di più membrature
Collegamenti mediati	sferici	{	per sovrapposizione semplice
			diretta a bordo saliente
Collegamenti mediati	con chiavard e o bolloni (collegamenti a freddo)	{	a semplice piastra di ricoprimento
			od a coprigiunto semplice
Collegamenti mediati	con chiavard e o bolloni (collegamenti a freddo)	{	a doppia piastra di ricoprimento
			od a coprigiunto doppio
Collegamenti mediati	con chiodi ribaditi (col- legamenti a caldo)	{	di due mem- brature ola- miere
			per sovrapposizione semplice
Collegamenti mediati	con chiodi ribaditi (col- legamenti a caldo)	{	a semplice piastra di ricoprimento
			od a coprigiunto semplice
Collegamenti mediati	con chiodi ribaditi (col- legamenti a caldo)	{	a doppia piastra di ricoprimento
			od a coprigiunto doppio
Collegamenti mediati	con chiodi ribaditi (col- legamenti a caldo)	{	di più membrature
			o lamiere solidali
Collegamenti mediati	con chiodi ribaditi (col- legamenti a caldo)	{	a collegamenti successivi
			con collegamento in gra- dinata.

La descrizione particolareggiata dei vari modi di unione appartiene più ad un corso di tecnologia che ad uno studio relativo alla statica delle costruzioni, quindi non ci fermeremo a fare descrizioni e riportare disegni che si possono sempre trovare facilmente nelle opere speciali (*) tanto più che il nome attribuito

(*) MAZZOCCHI, *Trattato su le costruzioni in legno*. — REULEAUX, *Le constructeur*. — CONTAMIN, Opera citata. — MASTAING, Opera citata. — BRANDT-HEUSINGER VON WALDEGG, *Handbuch der Ingenieurwissenschaften*. — WINKLER, *Die Brückenbau*. — WEYRAUCH, Opera citata. — MORIN, Opera citata. — BREYMAN, *Trattato generale di costruzioni civili*, Vol. III.

ai varî modi di collegamento ne indica già in modo generico sufficientemente la forma.

Le unioni ad incastro si impiegano più specialmente nelle costruzioni in legno, qualche volta nelle opere in ghisa, e si ottengono foggando i tronchi o punti d'attacco in modo che le parti non si possano muovere nel senso della sollecitazione senza asportazione di materia, mentre possono essere staccati o messi in opera con movimenti in altre direzioni. Il calcolo di resistenza per tali collegamenti si fa coll'uso della formola

$$F = SA = \frac{m}{m+1} RA$$

nella quale per F si mette la forza risultante trasmessa dall'incastro e per A la somma delle aree delle sezioni che sarebbero rotte ed asportate per scorrimento (*sezioni di taglio*), qualora avesse luogo un movimento relativo delle parti nel senso della sollecitazione. Nell'eseguire questi calcoli però non bisogna mai dimenticare le osservazioni fatte al numero precedente ed in modo speciale che le unioni costituiscono sezioni e tronchi singolari delle travi ed in genere dei solidi resistenti, quindi le formole della resistenza dei materiali vanno impiegate colle cautele indicate nel paragrafo precedente ed ai numeri 59 e 63 della parte I. Pel legno poi, ed in generale pei corpi marcatamente fibrosi, bisogna sempre esaminare se la resistenza si sviluppa nel senso delle fibre e delle falde di laminazione od in senso normale e mettere nella formola di resistenza per S il valore che corrisponde al modo particolare di sollecitazione. Nell'incastro rappresentato nella figura 150* (*Tav. XXIX*), nell'ipotesi che lungo l'asse della trave in legno AB agisca uno sforzo di tensione T , $F = T$, $A = aa' \times bb'$ oppure $A = a_1 a_1' \times b_1 b_1'$, e la formola di resistenza dà

$$T = S \cdot aa' \times bb'.$$

La sollecitazione in questo caso avvenendo nel senso parallelo alle fibre non si porrà $\frac{m}{m+1} R$ invece di S , ma il valore della resistenza allo scorrimento nel senso delle fibre che conviene alla natura del legno componente la trave: la formola $F = \frac{m}{m+1} RA$ non potrebbe essere impiegata altorchè introducendo un coefficiente α di correzione, che soddisfi alla relazione $\alpha = \frac{m+1}{m} \frac{S}{R}$.

In modo analogo si eseguirebbe il calcolo di resistenza per un incastro a viera od a baionetta, nel quale la stabilità dipende dalla sezione trasversale del dado o bottone d'arresto, ed in generale per tutte le varie forme di unioni ad incastro a coda di rondine, a dente terminale, ecc.

L'unione a vite e madre vite è in realtà una specie d'incastro che si ottiene foggando l'estremità di un pezzo a vite e l'altro a campana con madre vite interna, entrambe ad eliche cilindriche adattabili (*Fig. 151^a, tav. XXIX*). Avvicinando le due parti ed imprimendo ad una di esse o ad entrambe un movimento di rotazione intorno all'asse delle eliche, queste si compenetrano e non possono staccarsi per semplice traslazione assiale senza rotazione che asportando le spire della vite, oppure quelle della madre vite. Qualche volta i due pezzi da unire si terminano entrambi a vite avendo cura che le due eliche abbiano senso opposto e passo uguale, le due madre vite corrispondenti si ricavano in un unico pezzo, che porta il nome di *manicotto a vite* od anche semplicemente di *manicotto*; girando quest'ultimo in un senso si stabilisce l'unione delle due parti avvicinandone sempre più le estremità, girandolo in senso opposto si allenta l'unione, e continuando nel movimento si scioglie anche completamente. Il manicotto a vite può quindi essere considerato non solo come pezzo di un collegamento, ma anche come un apparecchio per regolare la tensione e la lunghezza delle parti da riunire e come tale si vede applicato spesso nelle costruzioni (*). Affinchè il manicotto possa adattarsi meglio a questo ufficio di regolatore invece di farlo massiccio si suole intagliare nel medesimo due aperture, attraverso le quali sia possibile vedere le estremità dei pezzi da congiungere e misurare la loro distanza, impiegando forme varie bensì, ma tutte comparabili a quella rappresentata nella figura 152^a (*Tav. XXIX*).

Il distacco di due membrature (barre, aste, tiranti) riunite fra loro a vite e madre vite oppure a manicotto (la soluzione del collegamento) non può avvenire che in uno dei modi seguenti:

a) Che per effetto dello sforzo di tensione (o compressione) T agente nelle membrature si rompa il nucleo della vite oppure il cilindro cavo corrispondente alla madre vite.

b) Che sotto l'azione dello sforzo T , il quale rispetto alle spire della vite e della madre vite rappresenta una sollecitazione

(*) Nei tiranti delle incavallature alla POLONCEAU, nelle barre tese delle travature reticolari del sistema HOWE, ecc.

al taglio, queste siano staccate ed asportate tangenzialmente al nucleo della vite oppure al cilindro interno della madre vite.

c) Che per insufficienza d'attrito fra le spire della vite e della madre vite una delle due parti od entrambe si svolgano per effetto della forza T ruotando intorno al loro asse.

Sia d il diametro dell'asta, alla quale si adatta il collegamento, $d_1 = \alpha d$ quello del nucleo della vite (del cilindro cui aderiscono le spire) d_2 quello del cilindro cui sono attaccate le spire della madre vite e finalmente d' il diametro esterno del pezzo che porta la madre vite; se questo ultimo avesse la forma di prisma per d' si intenderà il diametro del circolo inscritto nella sua sezione retta. Indichiamo con T lo sforzo assiale trasmesso da uno all'altro dei due solidi riuniti e con h_1 ed h_2 le lunghezze nel senso dell'asse delle superficie d'attacco delle spire della vite e della madre vite rispettivamente utilizzate nel collegamento; se il pane della vite è rettangolare h_1 ed h_2 rappresentano la metà della penetrazione h della vite nella madre vite.

Il primo modo di rottura non potrà mai avvenire quando siano verificate le equazioni

$$T = R_a A = R_a \pi \frac{d_1^2}{4} = R_a \pi \frac{\alpha^2 d^2}{4}$$

$$T = R_a A = R_a \pi \frac{d'^2 - d_2^2}{4}.$$

Ordinariamente d_1 è più piccolo di d , sebbene qualche volta per tiranti molto importanti si lavorino le estremità dei medesimi in modo speciale affinchè il diametro d_1 del nucleo della vite non sia inferiore, almeno in modo sensibile, al diametro d del tirante (*Fig. 153^a, tav. XXIX*), tuttavia nel maggior numero di casi $d_1 < d$, $\alpha < 1$. Pei bulloni e le chiavarde, ed in genere pei tiranti aventi diametri comparabili si consigliano i criteri seguenti:

$$d_1 = \alpha d = 0,80 d \quad \text{quando} \quad d < 0^m,015$$

$$d_1 = \alpha d = 0,84 d \quad \text{»} \quad d > 0^m,015.$$

Il collegamento non si potrà rompere per asportazione delle spire tutte le volte che sia soddisfatta l'equazione di resistenza allo sforzo di taglio $F = SA$. In questo caso $F = T$, $A = \pi d_1 h_1$ per la vite, ed $A = \pi d_2 h_2$ per la madre vite, quindi dovrà essere

$$T = \pi d_1 h_1 S = \frac{m}{m+1} \pi R_a d_1 h_1$$

$$T = \pi d_2 h_2 S = \frac{m}{m+1} \pi R_a d_2 h_2.$$

Se la vite e la madre vite sono formate collo stesso materiale allora, uguagliando i due valori di T , si ottiene

$$d_1 h_1 = d_2 h_2 \quad \frac{d_1}{d_2} = \frac{h_2}{h_1}$$

cioè h_2 è sempre minore di h_1 perchè necessariamente $d_1 < d_2$, quindi per la stabilità del collegamento basterà calcolare la penetrazione h della vite nella madre vite, questo garantirà esuberantemente anche la resistenza delle spire della madre vite: dalle equazioni superiori si ricava

$$d_1 = 2 \sqrt{\frac{T}{\pi R_a}} \quad d = \frac{d_1}{\alpha} \quad h_1 = \frac{T}{\pi S d_1}$$

ed eliminando d_1

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{T}{2\pi S} \sqrt{\frac{\pi R_a}{T}} = \frac{m+1}{2m} \frac{T}{\pi R_a} \sqrt{\frac{\pi R_a}{T}} = \frac{m+1}{2m} \sqrt{\frac{T}{\pi R_a}} = \\ &= \frac{m+1}{4m} d_1 = \frac{m+1}{4m} \alpha d. \end{aligned}$$

Questo valore di h_1 va riguardato come un limite inferiore: ordinariamente si tiene per h_1 un valore molto maggiore (quattro o cinque volte maggiore, cioè $h_1 = 1,20d$ od $h_1 = 1,50d$) cosa che equivale a ridurre in proporzione il limite S degli sforzi tangenziali e a diminuire la pressione che si esercita fra le spire della vite e madre vite. Ciò si fa perchè il metallo nella lavorazione del verme della vite subisce spesso azioni, che possono produrre un incrudimento od un'alterazione nella sua struttura, in guisa che esso può non essere più adatto a sopportare sforzi tangenziali tanto forti quanto quelli cui può resistere in condizioni ordinarie (Vedi nota alla pag. 312), e per diminuire la resistenza che l'attrito oppone al movimento di una parte del collegamento rispetto all'altra.

Finalmente il collegamento a vite e madre vite può sciogliersi per svolgimento di una delle due parti sull'altra sotto l'azione della forza T in causa della mancanza di sufficiente attrito fra

le spire. Questo movimento non potrà mai avvenire quando si scelga l'inclinazione β della tangente all'elica rispetto ad un piano normale al suo asse in modo che la componente parallela all'elica della forza agente fra le spire sia notevolmente inferiore alla resistenza d'attrito, cioè alla componente normale moltiplicata pel coefficiente f d'attrito. Invece dell'angolo β qualche volta si fissa il passo s della vite, ossia la distanza in senso parallelo all'asse di due punti di una stessa elica, $s = \pi d, \tan \beta$. La risoluzione di questa questione riflette piuttosto l'equilibrio delle macchine semplici che la resistenza dei materiali, quindi non sembra opportuno entrare in un esame particolareggiato della medesima. Ci limiteremo soltanto ad osservare che il coefficiente d'attrito f va scelto in relazione allo stato delle superficie a contatto non che del lubrificante, che si vuol impiegare per agevolare il movimento delle parti del collegamento, e che pei bolloni a vite e per valori di α indicati ($\alpha = 0,80$ $\alpha = 0,84$) β varia fra due e tre gradi ed s fra $s = 0,015d$ ed $s = 0,165d$ a seconda che si adoperano viti a pane rettangolare oppure triangolare con angoli arrotondati colle regole date da WHITWORTH, oppure smussati secondo il tipo americano SELLERS (*).

Lo studio dei collegamenti a vite conduce naturalmente all'esame dell'equilibrio e delle formole che servono a determinare le dimensioni dei bolloni a vite, che si impiegano nelle unioni di due o più membrature. Essi constano di tre parti (*Fig. 154^a, tav. XXIX*) la testa, il corpo del bollone o gambo, e la vite e si mettono in opera introducendoli entro fori appositamente preparati nelle parti da congiungere e vi si fissano mediante una madrevite, che si avvolge sulla vite e si stringe fortemente contro le membrature riunite. Allo scopo di impedire in modo assoluto sbalzi e qualsiasi movimento relativo fra le parti riunite, oltre a particolari espedienti che saranno indicati in seguito, si stringe la madrevite in modo che si sviluppi una tensione T nel gambo di ciascun bollone ed una eguale compressione fra le parti riunite per la quale fra le medesime nasca un'aderenza $k Q$ (se k è il numero dei bolloni) capace di resistere da sola agli sforzi, che tendano a far muovere un pezzo rispetto all'altro, senza che il gambo dei bolloni o chiavarde sia sollecitato in modo alcuno da sforzo tagliante. Se con f si indica il coefficiente d'attrito fra le membrature e con Q la resistenza che deve opporre ogni bollone $T = \frac{Q}{f}$

(*) Vedi REULEAUX, Opera citata. -- *Prontuario dell'Ingegnere* (Società Hütte).

e la vite del bullone dovrà avere il diametro d_1 del nucleo quale risulta dalla formola

$$T = \pi \frac{d_1^2}{4} R_a = \pi \frac{\alpha^2 d^2}{4} R_a \quad (*).$$

Per impedire poi che sia espulso il corpo lubrificante, che si introduce fra le spire della vite e madrevite, e rendere più facili le manovre di messa in opera e smontamento del collegamento si suole fissare la condizione che in nessun punto del bullone la pressione unitaria sia superiore ad un limite determinato N . Partendo da questi dati è facile determinare le dimensioni delle varie parti: il diametro d è determinato dal valore di α , si è già detto che si suole assumere $\alpha = 0,80$ se $d < 0,015$ ed $\alpha = 0,84$ se $d > 0,015$ quindi $d = \frac{d_1}{\alpha}$ od anche

$$d = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{T}{\pi R_a}}$$

Se $\alpha = 0,80$

$$d = 1,41 \sqrt{\frac{T}{R_a}}$$

se $\alpha = 0,84$

$$d = 1,34 \sqrt{\frac{T}{R_a}} \quad (**).$$

(*) Il valore R_a del carico unitario ammissibile deve naturalmente variare colla qualità del metallo ed il modo col quale è ottenuta la vite. Se questa è ottenuta coll'uso della trafilatura le molecole vengono orientate nel senso delle eliche dando origine ad una specie di fibrosità elicoidale; col ferro di qualità scadente le fibre superficiali sono rotte ed è quindi diminuita la sezione realmente utilizzabile del nucleo, col ferro di buona qualità questo inconveniente si fa sentir meno. Se invece la vite è fabbricata al tornio, come si fa per i bulloni che si impiegano nelle macchine, le fibre del nucleo non sono alterate menomamente in modo sensibile e quindi il limite ammissibile R_a può essere molto maggiore in relazione anche alla qualità del materiale. CONTAMIN in base a questi criteri propone come valore di R_a per metro quadrato

Per i bulloni per fabbriche ed armature in ferro di qualità

ordinaria	$R_a = 3 \times 10^6$
» per fabbriche fatti con cura o bulloni per macchine ordinarie	$R_a = 4 \times 10^6$
» da macchine in ferro di buonissima qualità	$R_a = 6 \times 10^6$
» da macchine in acciaio (ferro omogeneo) dolcissimo	$R_a = 8 \times 10^6$

(**) CONTAMIN dà il quadro seguente per il calcolo dei bulloni:

Lo spessore w della testa è fissato dalla condizione di resistere allo sforzo di taglio, che si esercita nella corona d'attacco col gambo del bullone in causa della tensione agente nel medesimo, esso deve soddisfare alla relazione

$$\pi d w S \geq \frac{\pi \alpha^2 d^2}{4} R_a.$$

In causa della singolarità di forma e di sollecitazione si dovrà prendere per S un valore molto piccolo: pel ferro CONTAMIN consiglia di assumere $S=1\ 000\ 000$ di chilogrammi per metro quadrato.

L'eccesso $d' - d$ del diametro d' della testa rispetto al diametro d del bullone si determina facilmente in base alla condizione che la pressione unitaria non superi quella ammessa pel gambo. Ordinariamente si tolgono gli spigoli vivi del foro con un congedo per le ragioni esposte al numero 23 (Parte II), e spesso esiste anche un piccolissimo giuoco, in guisa che va perduta un'area corrispondente ad una corona circolare, la cui larghezza può valutarsi a $0,15d$ e l'equazione che dà d' è

$$\frac{\pi}{4} [d'^2 - (1,15d)^2] > \frac{\pi \alpha^2 d^2}{4}$$

INDICAZIONE della qualità del materiale a cui deve servire il bullone	BOLLONI NEI QUALI	
	$d < 0^m,015$ $\alpha = 0,80$ $d = 1,41 \sqrt{\frac{T}{R_a}}$	$d > 0^m,015$ $\alpha = 0,84$ $d = 1,34 \sqrt{\frac{T}{R_a}}$
Bulloni di qualità ordinaria per fabbricati ed armature $R_a = 3 \times 10^6$	$d = 0,000\ 814 \sqrt{T}$	$d = 0,000\ 773 \sqrt{T}$
Bulloni di qualità buona per macchine ordinarie, fabbricati ed armature $R_a = 4 \times 10^6$	$d = 0,000\ 705 \sqrt{T}$	$d = 0,000\ 670 \sqrt{T}$
Bulloni in ferro di qualità superiore per macchine $R_a = 6 \times 10^6$	$d = 0,000\ 576 \sqrt{T}$	$d = 0,000\ 547 \sqrt{T}$
Bulloni in acciaio dolce $R_a = 8 \times 10^6$	$d = 0,000\ 498 \sqrt{T}$	$d = 0,000\ 473 \sqrt{T}$

da cui si ricava

$$d' = \sqrt{(1,15)^2 + \alpha^2} \cdot d = \begin{cases} 1,40 d & \text{se } \alpha = 0,84 \\ 1,42 d & \text{se } \alpha = 0,80 \end{cases}$$

In pratica d' si tiene fra $1,5d$ e $2d$; se la testa ha forma quadrata o poligonale per d' s'intende il diametro del circolo inscritto: non bisogna per altro eccedere nel valore di d' altrimenti la testa potrebbe cedere per flessione. Indichiamo con $\frac{\varepsilon d}{2}$ la distanza dall'asse della risultante delle reazioni esercitate da ogni settore della *portata* contro la testa del bollone e sia $\varepsilon' = \varepsilon - 1$; dalla formola di resistenza alla flessione $M = \frac{R I}{v'}$ (Vedi Parte I, num. 64) si ricava pel caso che si considera

$$R_a = \frac{v}{I} M = \frac{w}{2I} \frac{\pi \alpha^2 d^2}{4} R_a \frac{\varepsilon' d}{2} = \frac{3}{4} \frac{\varepsilon' \alpha^2 d^2}{w^2} R_a$$

ponendo $d' = 2d$ ed $\varepsilon' = \frac{1}{2}$ risulta

$$w = 0,866 \alpha d = \begin{cases} 0,7 d & \text{per } \alpha = 0,80 \\ 0,73 d & \text{per } \alpha = 0,84 \end{cases}$$

Pei bulloni, a vite, ed in generale per quei collegamenti che debbono o possono essere smontati e rimessi in opera, è necessario far osservare che la penetrazione h della vite nella madre vite, oltrechè dalle leggi della resistenza dei materiali, è regolata dal criterio che la pressione normale in ogni punto delle spire non superi la pressione limite N .

Sia $n = \frac{h}{s}$ il numero delle spire, γ l'angolo che la normale fa coll'asse del bollone, β l'angolo d'inclinazione delle spire, f il coefficiente d'attrito e $d\omega$ l'elemento d'area: perchè la condizione sia verificata dovrà essere

$$\begin{aligned} \frac{\pi \alpha^2 d^2}{4} R_a &= N \{ \Sigma d\omega \cos \gamma - f \Sigma d\omega \sin \beta \} = \\ &= N \Sigma d\omega \cos \gamma \left\{ 1 - \frac{f \sin \beta}{\cos \gamma} \right\} = N n \frac{\pi d^2}{4} (1 - \alpha^2) \left\{ 1 - \frac{f \sin \beta}{\cos \gamma} \right\} \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$n = \frac{\alpha^2}{(1 - \alpha^2) \left[1 - \frac{f \operatorname{sen} \beta}{\cos \gamma} \right]} \times \frac{R_a}{N}$$

od anche trascurando $\frac{f \operatorname{sen} \beta}{\cos \gamma}$ in confronto dell'unità

$$n = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} \times \frac{R_a}{N} = \begin{cases} 1,77 \frac{R_a}{N} & \text{se } \alpha = 0,80 \\ 2,39 \frac{R_a}{N} & \text{se } \alpha = 0,84 \end{cases} \quad (*)$$

La madre vite deve avere uno spessore uguale o superiore a quello della testa e contemporaneamente deve contenere tante spire quante sono importate dalla equazione di resistenza e dalla formula precedente. In generale quest'ultima condizione è quella che dà lo spessore maggiore e per conseguenza serve a determinarlo: quanto poi alla forma esterna della madre vite essa suole essere foggata a prisma con base quadrata od esagona per poterla abbracciare con una chiave e regolarne il movimento. Fra

(*) CONTAMIN dà il seguente quadro per il calcolo della penetrazione $h = ns$

DESIGNAZIONE DEI BOLLONI	n = numero delle spire da introdurre nella madre vite		
	PANE TRIANGOLARE		PANE rettangolare
	$\alpha = 0,80$	$\alpha = 0,84$	$\alpha = 0,84$
Bolloni per fabbricati ed armature pei quali $R_a = 3 \times 10^6$ ed $N = 0,75 \times 10^6$	$n = 7,08$ (otto spire)	$n = 9,56$ (dieci spire)	$n = 9,56$ (dieci spire)
Bolloni per fabbricati speciali o macchine comuni pei quali $R_a = 4 \times 10^6$ ed $N = 0,80 \times 10^6$	$n = 8,85$ (nove spire)	$n = 11,95$ (dodici spire)	$n = 11,95$ (dodici spire)
Bolloni per macchine ordinarie in ferro per le quali $R_a = 6 \times 10^6$ ed $N = 0,90 \times 10^6$	$n = 11,78$ (dodici spire)	$n = 15,91$ (sedici spire)	$n = 15,91$ (sedici spire)

la madrevite e le membrature collegate si suole interporre una piastrina metallica in forma di corona circolare, detta *rosetta*, (*Fig. 155^a, tav. XXIX*) con diametro superiore di poco a quello del circolo circoscritto alla base del prisma formato dalla madrevite, allo scopo di distribuire meglio la pressione non solo, ma più particolarmente per regolare la resistenza d'attrito al movimento della madrevite disponendo opportunamente della natura e della qualità delle superficie a contatto. Sia d' il diametro del circolo inscritto nel quadrato o nell'esagono base della madrevite (*Fig. 156^a, tav. XXIX*), d'' quello del circolo circoscritto, e riteniamo che il giuoco del bollone nel foro possa essere rappresentato da $0,05 d$. Perchè non sia superata la pressione unitaria limite N dovrà essere

$$\text{pel quadrato } \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{2}{4} d''^2 - (1,05 d)^2 \right\} N = T = \frac{\pi \alpha^2 d^2}{4} R_a$$

$$\text{per l'esagono } \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{3}{4} d''^2 - (1,05 d)^2 \right\} N = T = \frac{\pi \alpha^2 d^2}{4} R_a.$$

Se $\alpha = 0,80$ e se $d < 0^m,015$

$$\text{pel quadrato } d'' = 2 \sqrt{\frac{0,55 N + 0,320 R_a}{N}} \times d$$

$$\text{per l'esagono } d'' = 2 \sqrt{\frac{0,368 N + 0,213 R_a}{N}} \times d.$$

Se $\alpha = 0,84$ e $d > 0^m,015$

$$\text{pel quadrato } d'' = 2 \sqrt{\frac{0,55 N + 0,353 R_a}{N}} \times d$$

$$\text{per l'esagono } d'' = 2 \sqrt{\frac{0,368 N + 0,235 R_a}{N}} \times d (*).$$

La tensione T in un bollone si regola stringendo più o meno la madrevite col mezzo d'una chiave, come è indicato nella figura 157^a (*Tav. XXIX*).

(*) CONTAMIN dà calcolati i valori di d'' per bulloni nei quali sia $d > 0^m,015$ e li raccoglie nel quadro seguente, nel quale C esprime il lato dell'esagono o del quadrato base della madrevite:

Siano

- P la forza applicata all'estremità della chiave
 r il suo braccio di leva
 γd il raggio medio delle superficie elicoidali a contatto
 f' il coefficiente d'attrito nelle spire
 f il coefficiente d'attrito fra la madrevite e la rosetta
 ρ la distanza dall'asse delle pressioni, che si esercitano fra la madrevite e la rosetta, e ρ_m il suo valor medio
 $d\omega$ l'elemento d'area,
 per l'equilibrio del sistema si dovrà verificare (*)

$$Pr = \int f N \rho d\omega + \gamma d T \frac{\tan \beta + f'}{1 - f' \tan \beta}$$

nella quale

$$\int f N \rho d\omega = f T \rho_m = \frac{2}{3} \pi \left\{ \left(\frac{d'}{2} \right)^3 - \left(1,05 \frac{d}{2} \right)^3 \right\} f N.$$

Se si indica con θ l'angolo d'inclinazione della superficie del pane della vite

$$f' = f \cos \beta \sqrt{1 + \tan^2 \beta + \tan^2 \theta}$$

VALORI di R_s e di N per le varie qualità di ferro	MADREVITE a base ottagonata			MADREVITE a base quadrata		
	d''	d'	$C = \frac{d''}{2}$	d''	d'	$C = 0,707d'$
Ferri { comuni { $R = 3 \times 10^6$ $N = 0,75 \times 10^6$	2,287 d	1,98 d	1,143 d	2,846 d	1,98 d	1,98 d
Ferri { ordinari { $R = 4 \times 10^6$ $N = 0,80 \times 10^6$	2,484 d	2,153 d	1,242 d	3,00 d	2,153 d	2,153 d
Ferri { superiori { $R = 6 \times 10^6$ $N = 0,90 \times 10^6$	2,78 d	2,407 d	1,39 d	3,41 d	2,407 d	2,407 d
Acciaio { { $R = 8 \times 10^6$ $N = 1 \times 10^6$	2,998 d	2,596 d	1,499 d	3,678 d	2,596 d	2,596 d

(*) Quest'equazione corrisponde all'equilibrio dinamico del sistema e viene dimostrata studiando l'equilibrio delle macchine semplici. — Vedi anche CLAUDEL, Opera citata.

quindi ritenendo

$$\gamma = 0,46, \quad d' = 2d, \quad f = 0,15$$

per la vite a pane triangolare, nella quale sia

$$\beta = 2^{\circ}, 16' \quad \theta = 30^{\circ} \quad \text{e per conseguenza } f' = 0,173,$$

si ottiene

$$Pr = (0,118 + 0,099) d T = 0,217 d \cdot T.$$

Per la vite a pane rettangolare, nella quale sia

$$\tan \beta = 0,057 \quad \theta = 0 \quad \text{e quindi } f' = f = 0,15$$

la formola superiore dà

$$Pr = (0,118 + 0,097) d T = 0,215 d \cdot T.$$

La differenza fra questi risultati essendo piccolissima si conclude che la stessa chiave può servire tanto pei bulloni a vite triangolare che per quelli a vite rettangolare (*).

Sotto l'azione del momento (Pr) il nucleo della vite è sollecitato a torsione e lo sforzo unitario è dato dalla formola (Parte I, num. 65, pag. 183)

$$S = \frac{M_x r}{I_x} = \frac{(Pr) \frac{d_1}{2}}{\frac{\pi d_1^4}{32}} = \frac{5,095 (Pr)}{(0,84d)^3} = 8,6 \frac{(Pr)}{d^3}$$

se in luogo di (Pr) (momento di torsione) si mette il valore della porzione del momento (Pr) che agisce sulla vite, cioè

$$\gamma T d \left(\frac{f' + \tan \beta}{1 - f \tan \beta} \right) = 0,46 T d \frac{0,173 + \tan 2^{\circ}, 16'}{1 - 0,15 \tan 2^{\circ}, 16'} = 0,099 T d$$

si ottiene

$$S = 8,6 \frac{0,099 T d}{d^3} = 0,85 \frac{T}{d^2} \quad \text{e} \quad d = 0,922 \sqrt{\frac{T}{S}}.$$

(*) Crediamo interessante riportare come nota il seguente quadro calcolato da CONTAMIN per venti casi diversi: in esso si trovano indicati gli sforzi assiali T , il diametro corrispondente per il bullone e la madrevite, la sua

Confrontando questa formola con quella che ne dà il diametro in funzione della tensione longitudinale T

$$d = 1,34 \sqrt{\frac{T}{R_a'}}$$

si vede che in condizioni normali, cioè quando le superficie a contatto sono sufficientemente lisce e lubrificate, il diametro necessario per resistere alla torsione è molto minore di quello occorrente per resistere alla tensione ed il rapporto fra gli sforzi unitari prodotti nel materiale dai due modi di sollecitazione è

altezza e gli elementi del momento di torsione necessari a stringere convenientemente il bullone.

Bulloni ordinari a vite con pane triangolare e madrevite esagonale $R=3 \times 10^6$ $N=0,75 \times 10^6$				
Sforzo di tensione Kg.	Diametro del gambo del bullone $d=0,000773 \sqrt{T}$ m.	Altezza della madrevite $h=1,1 d$ m.	Diametro esterno della madrevite $d^*=2,287 d$ m.	Lunghezza r della chiave supponendo lo sforzo $P=15$ kg. ed il momento $P r=0,217 d T$
400	0,0154	0,0169	0,035	Sulla chiave agisce un solo uomo
500	0,0172	0,0189	0,039	»
600	0,0189	0,0207	0,043	»
700	0,0204	0,0224	0,046	$r=0^m,206$
800	0,0218	0,0239	0,049	»
900	0,0231	0,0254	0,053	»
1 000	0,0244	0,0268	0,056	$r=0^m,353$
1 100	0,0256	0,0281	0,058	»
1 200	0,0267	0,0293	0,061	»
1 300	0,0278	0,0306	0,063	$r=0^m,523$
1 400	0,0289	0,0317	0,066	»
1 500	0,0299	0,0328	0,068	»
1 600	0,0309	0,0339	0,070	$r=0^m,713$
1 700	0,0318	0,0349	0,073	Sulla chiave agiscono due uomini
1 800	0,0327	0,0359	0,075	»
1 900	0,0337	0,0370	0,077	$r=0^m,463$
2 000	0,0345	0,0379	0,079	»
2 200	0,0362	0,0398	0,082	$r=0^m,576$
2 400	0,0379	0,0416	0,086	»
2 600	0,0394	0,0433	0,090	$r=0^m,741$

dato da

$$\frac{S}{R} = \frac{0,85 \frac{T}{d^2}}{\frac{\pi \alpha^2 d^3}{4}} = 0,212 \pi \alpha^2 = 0,472$$

quindi è inutile complicare le formole proponendosi di tener conto anche del momento di torsione nei calcoli di resistenza od almeno una tale ricerca non è necessaria in modo assoluto. Ciò non può più dirsi quando il coefficiente d'attrito aumenta in causa di non sufficiente preparazione delle superficie a contatto, o per mancata lubrificazione, in tal caso lo sforzo unitario prodotto dal momento di torsione può uguagliare quello prodotto dalla tensione assiale ed anche superarlo, ed essere causa di rottura: di qui la necessità di mantenere in buono stato e ben lubrificate le viti e le madreviti dei bulloni. Se interessasse conoscere lo sforzo unitario subito dal materiale, sarebbe necessario ricorrere alla formola corrispondente al caso della sollecitazione composta (Parte I, num. 74, pag. 244)

$$\sigma_1 = \frac{p_{xx}^2}{2} \pm \sqrt{\frac{p_{xx}^2}{4} + (p_{xy}^2 + d_{xz}^2)}.$$

Per impedire poi maggiormente lo scorrimento di una delle membrature o pezzi collegati rispetto agli altri si usano spesso anche indentature ad incastro, cunei o biette, che si oppongono a qualsiasi movimento relativo per scorrimento delle parti mantenute a contatto e fortemente aderenti dai bulloni.

Il calcolo dei bulloni come è stato esposto superiormente è condotto in base alle leggi della resistenza dei materiali e permette di rendersi conto delle condizioni di resistenza delle singole parti. Non sempre i trattatisti fanno una ricerca così minuta, e spesso si limitano a dare delle formole totalmente o parzialmente empiriche in base alle quali determinare le dimensioni del bullone. REULEAUX (*) consiglia l'uso della madrevite esagonale conside-

(*) REULEAUX. Opera citata, Terza edizione. — Il diametro dei bulloni si determina spessissimo a senso per una forza T agente nella direzione dell'asse della vite (MORIN)

$$T = 2,2 d_1^2 \quad \text{chilogrammi}$$

$$d = 0,67 \sqrt{T} \quad \text{millimetri}$$

rando la forma quadrata come eccezione e dà le formole seguenti, nelle quali T è espresso in chilogrammi e d in millimetri,

$$T = 2 d_1^2 \quad d_1 = 0,7 \sqrt{T}$$

per le madreviti lavorate $d'' = 5 + 1,4 d$

per le madreviti che debbono restar brute $d'' = 7 + 1,45 d$
e l'altezza della madre vite deve essere uguale a d_1 affinchè la pressione nelle spire sia compresa fra chilogrammi 0,500 ed 1,000 per millimetro quadrato.

Nella IV edizione tedesca REULEAUX porta come tipo il bollone rappresentato nella figura 158^a (Tav. XXIX) nella quale

$$d' = 1 + d + 5 s$$

$$d'' = d' + 3 = 4 + d + 5 s$$

$$s = 0,4 + 0,1 d$$

$$u \sim \frac{5}{4} s$$

$$U = d + 10 s$$

$$h = 0,7 d.$$

La Società francese delle ferrovie del Nord usava nelle sue officine la formola

$$d = \sqrt{\frac{1}{0,16 \pi R_n}} \sqrt{T} = k \sqrt{T}$$

assumendo per k i valori seguenti

Bolloni per fabbriche in ferro di qualità ordinaria $k = 0,70$

» in buon ferro 0,60

» in ferro extra di seconda lavorazione 0,50

» in acciaio cementato 0,45

» in acciaio fuso e temperato 0,40

Le formole empiriche di ARMENGAUT e REDTENBACHER riproducono prossimamente i tipi del costruttore inglese WHITWORTH e sono le seguenti

$$d = 0^m,0011 \sqrt{T}$$

$$s = 0^m,08 d + 0^m,001$$

$$\frac{d - d_1}{2} = \frac{19}{30} s$$

$$d' = 1,46 d + 0^m,005$$

$$d'' = 1,61 d + 0^m,00575.$$

Applicando le formole dedotte dalla resistenza dei materiali ad un bollone, le cui dimensioni siano state determinate con queste leggi, lo sforzo unitario massimo subito dal metallo risulta fra chilogrammi 1,00 e chilogrammi 1,50 per millimetro quadrato. Questo grado di sicurezza in condizioni normali sembra eccessivo, come pure non è razionale trascurare affatto la differenza di resistenza derivante dalla qualità del materiale e dal modo di lavorazione, quindi non è consigliabile un tale processo di calcolo. Senza entrare in una discussione sul valore da assegnare ad R_a nei vari casi, che qui sarebbe evidentemente fuori di luogo, crediamo che i numeri indicati da CONTAMIN e riportati in nota possano servire di utile criterio pel costruttore. Se poi le condizioni di messa in opera ed esercizio sono tali da non offrire garanzie sufficienti relativamente alla natura del materiale, allo stato delle superficie a contatto ed alla loro conveniente lubrificazione, se si teme la formazione della ruggine, che aumenta il valore del momento di torsione, od altro, allora un prudente eccesso di sicurezza non può che essere commendevole e le formole indicate possono riescire utilissime.

35. Collegamenti mediati. Unione a cerniera. — Fra i collegamenti mediati abbiamo accennato in primo luogo all'unione a cuneo, o bietta o chiavetta, esso si adopera per impedire lo scorrimento di due solidi l'uno sull'altro in modo analogo a quello rappresentato nella figura 159^a (*Tav. XXIX*). Si usa spesso nelle unioni dei legnami, specialmente nella formazione delle travi composte per evitare lo scorrimento longitudinale (*Fig. 160^a, tav. XXIX*) ed anche come mezzo per garantire ulteriormente una costruzione dallo scorrimento relativo delle sue parti riunite mediante bulloni o fasciature. Nulla di particolare vi è da osservare riguardo a questa specie di collegamento, il calcolo delle dimensioni nel senso del movimento impedito dalla chiavetta o dal cuneo, semplice o doppio per adattarlo meglio e stringerlo maggiormente nel vano corrispondente, deve essere fatto colla formola di resistenza

$$F = S A = \frac{m}{m+1} R_a A$$

avendo cura di non dimenticare le avvertenze più volte ricordate relative al valore dei coefficienti ed all'approssimazione che si può avere dalla formola. Quanto all'importanza delle dimensioni minime assegnabili ai solidi da collegare in vicinanza al vano, in cui è collocato il cuneo o la chiavetta, valgono, in gran parte, gli stessi criteri che esporremo parlando dei giunti a cerniera, pei quali più spesso in pratica si presenta il caso di applicarli.

Se le estremità di due o più barre si foggiano in modo da presentare un foro e si sovrappongono in guisa che questi ultimi si corrispondano, se nei fori si introduce un cilindro, detto anche *perno* o *caviglia*, che li riempia esattamente, od almeno sia da essi abbracciato per un'intera semicirconferenza, talchè le varie parti possano bensì ruotare le une rispetto alle altre, ma non spostarsi per traslazione parallela, si ottiene quell'unione speciale che dicesi collegamento cilindrico od a cerniera. Per quanto è stato detto al numero 27 considerando i rulli come supporti il coefficiente α_1 di riduzione del limite R_a'' ammissibile per i carichi unitari può ritenersi uguale all'unità se il contatto avviene effettivamente sopra una semicirconferenza, come si è supposto. Se si indica con s la lunghezza utile di contatto fra ciascuna barra ed il perno nel senso dell'asse di quest'ultimo, con d il diametro del perno, e con T lo sforzo trasmesso dalle barre alla caviglia, per la stabilità dovranno essere verificate le due condizioni seguenti:

a) Il perno e la materia che lo circonda non debbono rompersi per schiacciamento (Vedi Parte II, num. 57, pag. 217)

$$T = d s R_a''.$$

b) Il perno non deve rompersi per taglio in causa degli sforzi agenti in senso contrario che gli sono trasmessi dalle barre collegate: se esso presenta n sezioni di taglio dovrà essere

$$T = n \frac{\pi d^2}{4} S = n \frac{m}{m+1} \frac{\pi d^2}{4} R_a'.$$

Se nell'occhio il contatto col perno avviene soltanto sopra una porzione della semicirconferenza, allora nella prima formola invece di R_a'' bisogna mettere $\alpha_1 R_a'' = (R_a'')_1$ come è stato indicato al numero 27 (Parte II, pag. 217).

Se il collegamento a cerniera si fa fra due sole barre (*Fig. 161^a, tav. XXIX*) allora gli sforzi trasmessi nei due solidi riescono eccentrici e nasce un momento che tende a contorcerlo, come è

indicato nella figura stessa. Per evitare questo inconveniente e rendere simmetrica la sollecitazione il più delle volte una delle due membrature si termina a *forchetta* in modo che possa abbracciare l'estremità dell'altra (*Fig. 162^a, tav. XXIX*) o si adopera l'unione a briglie come mostra la figura 163^a (*Tav. XXIX*).

Se invece si deve eseguire un collegamento multiplo, ossia di più di due barre o membrature qualsiasi, in generale non è necessario ricorrere a particolari espedienti per evitare azioni eccentriche, basta disporre le parti opportunamente lungo il perno affinché la sollecitazione riesca simmetrica e sia evitato, od almeno ridotto al minimo, ogni sforzo secondario, che tenda a contorcere o ad affaticare il collegamento. Per solito gli sforzi trasmessi al perno ordinatamente lungo l'asse del medesimo dalle varie membrature collegate agiscono successivamente in senso contrario.

Le due formole

$$T = s d R_a'' \qquad T = n \frac{m}{m+1} \frac{\pi d^2}{4} R_a''$$

permettono di eliminare T e ricavare una relazione fra il diametro della caviglia e lo spessore s della membratura in contatto con essa

$$\frac{s}{n} = \frac{m}{m+1} \frac{\pi d}{4} \frac{R_a'}{R_a''} = 0,6 d \frac{R_a'}{R_a''};$$

se il contatto avvenisse nell'occhio solo su una porzione della semicirconferenza allora

$$\frac{s}{n} = \frac{m}{m+1} \frac{\pi}{4} d \frac{R_a'}{\alpha R_a''} = 0,6 d \frac{R_a'}{\alpha R_a''}.$$

Tenendo conto che per la sollecitazione allo sforzo di taglio si

prende come limite dei carichi permanenti $S = \frac{m}{m+1} R_a'$ molto

basso, che nell'occhio il materiale si trova in buone condizioni per resistere alla compressione, per cui si può prendere R_a'' abbastanza elevato (*), e dell'approssimazione data in queste condizioni dalle formole della resistenza dei materiali, il risultato precedente

(*) L'Ordinanza austriaca del Ministero del commercio in data 15 settembre 1887 sulle condizioni di stabilità delle opere metalliche prescrive per le pareti dei fori dei chiodi, misurate in proiezione sulla sezione diametrale, che non debbono sopportare uno sforzo superiore per centimetro quadrato ad $R_a'' = 1400$ chilogrammi.

giustifica pienamente la regola empirica usata comunemente, che il diametro di un bollone o chiodo che lavori o possa lavorare per taglio deve essere compreso fra 1,50s e 2,50s od al più 3,00s.

La caviglia distribuisce entro l'occhio le pressioni p_1 in senso radiale e come prima e larga approssimazione è lecito supporre che la legge di distribuzione sia tale da non differire molto da una ripartizione uniforme, $p_1 = \frac{T}{sd}$. In tale ipotesi la sollecitazione

corrisponderebbe a quella studiata al numero 22, problema IV (pag. 155), soltanto non si verificano le condizioni che permettevano di considerare la parete resistente come parete sottile, quindi si sarebbe assai lontano dal vero ritenendo lo sforzo unitario d'anello p_{yy} come costante ed uguale allo sforzo medio p_m : tale supposizione non potrebbe essere fatta che in via di prima ricerca qualora si avesse la precauzione di introdurre nella formola di resistenza un coefficiente di correzione. Rappresenti la figura 164^a (Tav. XXIX) l'occhio della cerniera di raggio $oa = r_1$ e supponiamo, per ora, la barra di spessore costante e limitata da una superficie cilindrica gbh concentrica a quella del perno; detto T lo sforzo trasmesso, r_2 la distanza ob e ponendo $x = r_2 - r_1$, lo sforzo medio p_m d'anello sarebbe dato da

$$p_m = \frac{T}{2(r_2 - r_1)s} = \frac{T}{2xs}$$

e la formola ordinaria di resistenza darebbe

$$xsR_a = s(r_2 - r_1)p_m = \frac{T}{2} = \frac{m}{m+1} \frac{\pi d^2}{4} \frac{R}{2} = p_1 r_1$$

e se il materiale è il medesimo per le barre e la caviglia.

$$x = 0,4 \times \frac{4}{5} \frac{d}{s} d$$

ritenendo in media $\frac{d}{s} = 2$ risulterebbe $x = 0,64 d$.

Ricorrendo invece alla formola esatta (283) della parte I (Num. 87, pag. 338) la tensione p_{yy} negli anelli è data da

$$p_{yy} = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + (p_1 - p_2) \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{s^2}$$

e quindi nel caso presente, essendo $p_2 = 0$, si ottiene il massimo

valore $p_{\max}$ della tensione d'anello ponendo $z=r_1$,

$$p_{\max} = \frac{p_1 (r_2^2 + r_1^2)}{r_2^2 - r_1^2}$$

ed il rapporto χ fra la tensione massima e la media è data da

$$\chi = \frac{p_{\max}}{p_m} = \frac{p_1 (r_2^2 + r_1^2) (r_2 - r_1)}{(r_2^2 - r_1^2) p_1 r_1} = \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_1 (r_2 + r_1)}$$

$$\text{Se } r_2 = \varepsilon r_1 \quad \chi = \frac{p_{\max}}{p_m} = \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon + 1}$$

$$\text{per } \varepsilon = 1 \quad \chi = 1$$

$$\text{„ } \varepsilon = 2 \quad \chi = \frac{5}{3}$$

$$\text{„ } \varepsilon = 3 \quad \chi = \frac{10}{4}$$

$$\text{„ } \varepsilon = 4 \quad \chi = \frac{17}{5}.$$

Questa discussione mostra che mentre la formola usuale della resistenza dei materiali per un dato limite R_a dei carichi ammissibili in condizioni medie dà $x = r_2 - r_1 = 0,64 d$, la formola più esatta, dedotta tenendo conto della variazione delle forze molecolari intorno all'occhio, fa vedere che in tali condizioni lo sforzo unitario raggiunge un valor massimo in prossimità del perno, che per $\varepsilon = 2$

è uguale a $\frac{5}{3}$ del limite R_a . È interessante osservare come questo

risultato corrisponda ai dati empirici che si seguono nella pratica: nelle unioni delle lamiere si suole prescrivere di tenere il centro del chiodo distante dal bordo di una lunghezza δ variabile fra $1,5d$ ed $1,7d$, infatti colla legge esposta in condizioni medie

$$\delta = \frac{d}{2} + \begin{cases} 1,0 d \\ 1,2 d \end{cases} = \begin{cases} 1,50 d \\ 1,70 d \end{cases}.$$

In altri termini il calcolo dell'area resistente $xs = (r_2 - r_1)s$ si può fare colla formola usuale della resistenza dei materiali purchè

si abbia l'avvertenza di prendere come carico ammissibile limite circa la metà di quello usato comunemente, ossia moltiplicare R_a' per un coefficiente di correzione uguale a 0,50 o poco più.

Se si prende in considerazione una sezione $gcfh$ passante per l'asse del perno, e normale alla direzione della forza agente nell'asta collegata, la resistenza della membratura nella sezione stessa, in causa del foro, riesce indebolita se non si prendono speciali precauzioni per aumentare l'area resistente. Oltre a questo indebolimento bisogna tener conto di quello prodotto dal modo particolare di distribuzione delle tensioni lungo le linee gc ed fh ; se non può dirsi che sia il medesimo di quello che si verifica in ab , deve per altro avere col medesimo un'intima relazione, poichè la legge di continuità non permette di passare bruscamente da una distribuzione variabile degli sforzi molecolari a quella uniforme, che ha luogo correntemente nella barra. Quindi se non si vuole che il collegamento corrisponda ad un punto debole della costruzione bisogna aumentare l'area resistente della sezione $gcfh$ rispetto a quella del tirante di un tanto per cento, dal 30 al 40 %, ossia moltiplicare il limite dei carichi ammissibili R_a per un coefficiente di correzione in media uguale a 0,70 ed anche minore. Determinata l'area resistente in queste due sezioni, in omaggio alla legge di continuità si farà variare la forma della barra in modo di passare da una all'altra ed alla sezione normale della barra con opportuni *congedi*. Nelle barre piatte o rotonde lavorate alla fucina alle loro estremità queste condizioni si raggiungono facilmente, la cosa è affatto diversa per le membrature che si ottengono soltanto per laminazione, quindi per queste si usa rinforzarle agli estremi prolungandole convenientemente e mediante piastre o lamiere d'imbottitura, come è indicato nella figura 168^a (Tav. XXIX).

Finalmente l'occhio non deve potersi rompere per asportazione mediante taglio della porzione $cqft$ tanto nel tirante quanto nella forchetta, quindi dovranno essere verificate le seguenti condizioni

$$\text{nel tirante} \quad 2x s \frac{m}{m+1} R = 2\pi \frac{d^2}{4} \frac{m}{m+1} R$$

$$\text{per la forchetta} \quad 4x s_1 \frac{m}{m+1} R = 2\pi \frac{d^2}{4} \frac{m}{m+1} R$$

osservando che in media si può ritenere $d = 2s$ $s = 2s_1$ dalle

due equazioni superiori si ricava la relazione

$$x = \frac{\pi}{4} \frac{d}{s} d = 0,8 d$$

valore inferiore a quello ottenuto colle considerazioni precedenti, per cui questo modo speciale di rottura non è da temere ed è ampiamente garantito dalle dimensioni necessarie per resistere agli altri modi di sollecitazione.

Dalle cose esposte risulta che nel collegamento a cerniera:

a) La caviglia può essere calcolata colla formola ordinaria della resistenza al taglio computando tutte le sezioni di taglio utili se il momento flettente è realmente trascurabile, cioè le membrature sono sottili ed a contatto fra loro. Bisogna però in condizioni normali tenere l'indice di stabilità alquanto più forte che per la tensione, in causa dell'approssimazione più lata che vien data dalla formola della resistenza trasversale: pel ferro si consiglia $n = \begin{cases} 7 \\ 8 \end{cases}$ ed $R_a' = \frac{1}{n} R_s'$.

b) Le varie parti dell'occhio possono essere calcolate colle formole usuali della resistenza dei materiali convenienti alle traviature purchè si prenda come limite dei carichi ammissibili R_a uno sforzo inferiore a quello usuale e precisamente uguale alla metà nella sezione diametrale parallela alla direzione degli sforzi e circa due terzi nella sezione diametrale normale: la natura della questione non ammette una precisione maggiore di esposizione e soltanto permette di prescrivere che il passaggio da una dimensione ad un'altra sia fatto in modo lento con linee di congedo.

c) Se le varie parti sono formate collo stesso materiale, più particolarmente con ferro comune e ferro omogeneo, allora le formole di resistenza permettono di esprimere le dimensioni che convengono al collegamento in funzione del diametro d della caviglia-perno. Queste formole coincidono sensibilmente colle regole empiriche dedotte dall'osservazione delle opere ben eseguite e sanzionate dall'esperienza, ciò che è una nuova prova dell'utilità del metodo induttivo razionalmente applicato.

d) Nei collegamenti a cerniera semplici o multipli, a forchetta od a briglie in vicinanza dell'occhio la sezione resistente deve essere aumentata in confronto di quella normale corrispondente alle membrature riunite sia con una speciale lavorazione alla fucina, sia con piastre o lamiere d'imbattitura. Pei tiranti a sezione circolare, poligonale o rettangolare appiattiti in vicinanza dell'occhio con passaggi a congedo da una forma all'altra, la

teoria giustifica e la pratica sanziona le dimensioni stabilite dai rapporti seguenti

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{2} c + \frac{2}{3} d \\ b &= \frac{1}{2} c + \frac{1}{3} d \end{aligned} \right\} \text{(Fig. 166^a, tav. XXIX)}$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{5}{6} d \\ b &= \frac{2}{3} d \end{aligned} \right\} \text{(Fig. 165^a, tav. XXIX)}$$

Nelle membrature ottenute per semplice laminazione il rinforzo in prossimità dell'occhio si può ottenere tagliando convenientemente il pezzo, se ciò è possibile, ed in generale, e più facilmente inchiodandovi sopra o sotto un pezzo di lamiera convenientemente, preparato come è indicato nella figura 168^a (Tav. XXIX) in guisa che l'area resistente venga aumentata nella proporzione richiesta. Se la membratura riunita a cerniera è soggetta unicamente a compressione allora non è più necessario il rinforzo indicato in *C* e solo bisognerà preoccuparsi che la pressione nell'interno dell'occhio non superi il limite ammesso pei carichi permanenti rinforzando, occorrendo, la sezione resistente nei modi indicati (Fig. 165^a e 168^a, tav. XXIX). Naturalmente i criteri esposti vanno applicati nei casi particolari tenendo sempre conto delle soggezioni e delle convenienze costruttive.

Se il collegamento a cerniera, invece che fra due sole barre, si fa per un numero maggiore, esso dicesi *collegamento multiplo*, e, come risulta dalla trattazione precedente, valgono tutte le leggi esposte, qualora si ritenga come sforzo *T* in una delle membrature lo sforzo totale diviso pel numero delle medesime, se tutte hanno uguale area resistente; oppure ciò che si ottiene dividendo lo sforzo totale proporzionalmente alle sezioni resistenti delle varie membrature, se queste hanno area diversa e sopportano ciascuna sforzi diversi: la sezione del perno però dovrà essere sempre calcolata in base al massimo valore di *T*.

Per ragioni di simmetria e per evitare bracci di leva troppo forti per ciascuna delle forze trasmesse alla caviglia dalle varie barre, queste si dispongono ordinariamente in modo che gli sforzi agiscano alternativamente in senso contrario. Il numero delle

sezioni di taglio è uguale a quello delle barre congiunte meno una, tuttavia spesso si suole considerare soltanto la metà di questo numero per compensare in certo qual modo l'errore che si commette trascurando i momenti flettenti agenti nella caviglia prodotti dagli sforzi, che alternativamente in senso contrario gli trasmettono le barre unite. Questo procedimento può essere accettato finchè le membrature congiunte siano aderenti le une alle altre ed abbiano piccolo spessore, ma se esse hanno spessore notevole, superiore a qualche centimetro, a più forte ragione se sono poste ad una certa distanza le une dalle altre, il momento flettente non può più essere trascurato e neppure valutato soltanto in via approssimata computando un minor numero di sezione di taglio. In questo caso è necessario tracciare i diagrammi di sollecitazione relativi al momento flettente ed allo sforzo di taglio, oppure scrivere le formole analitiche equivalenti od i quadri numerici corrispondenti, e fare il calcolo della sezione resistente in base alla sollecitazione composta a flessione ed a sforzo di taglio usando la formola (Parte I, num. 74)

$$R_a = \frac{m-1}{2m} \frac{Mv}{I} + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\left(\frac{Mv}{I}\right)^2 + 4 \frac{F^2}{A^2}}$$

e seguendo il metodo generale per il caso della sollecitazione complessa quale è stato indicato sommariamente nella teoria generale della resistenza dei materiali e come verrà svolto più ampiamente nel capitolo seguente.

Il collegamento sferico non è usato nelle costruzioni civili altro che come punto d'appoggio e per questo caso valgono le formole date al numero 27 (Parte II) quindi non ci tratteremo ad esaminare particolareggiatamente il suo modo di resistere. Qualora però occorresse fare una tale analisi il metodo da seguire sarebbe in tutto analogo a quello tenuto studiando il collegamento a cerniera, soltanto bisognerebbe riferirsi alle formole relative all'equilibrio delle sfere vuote invece di quelle convenienti ai cilindri cavi.

36. Collegamenti con chiodi o chivarde. Esecuzione e calcolo. — Allorchè si debbono riunire due o più lamiere, membrature laminate, piastre metalliche od anche travi o tavole in legname e non sia necessario conservare loro una mobilità relativa, a più forte ragione se interessa avere un'unione rigida, il collegamento si fa con più chivarde, bulloni o chiodi invece di una sola caviglia come nell'attacco a cerniera. Le unioni possono essere messe in opera a

freddo stringendo fortemente le chiavarde colla madre vite, oppure a caldo ribadendo i chiodi in guisa che nel raffreddarsi, non potendo restringersi, come sarebbe conseguenza naturale della perdita di calore, abbiano a produrre una forte compressione ed aderenza fra le parti congiunte: il collegamento a caldo è proprio dei metalli e più specialmente del ferro comune e del ferro omogeneo (*flusseisen*).

L'unione di due o più pezzi col mezzo di chiodi, chiavarde o bulloni può essere fatta nei modi seguenti:

a) Collegamento per *sovrapposizione semplice* quando i due solidi da riunire si sovrappongono per un breve tratto, nel quale si trovano i fori in cui vengono in seguito fissati i chiodi (*Fig. 169^a, tav. XXX*). Qualche volta le due parti da congiungere terminano con un risvolto ad angolo retto semplice o doppio, ed in questo sono forati i buchi per i bulloni (*Fig. 170^a, tav. XXX*), in tal caso il collegamento dicesi per sovrapposizione con *bordo ortogonale* o *saliente* oppure con *nervatura*.

b) Collegamento a *coprigiunto semplice* quando i due solidi e più specialmente le due lamiere si portano a contatto terminale ed il breve tratto in cui sono forati i buchi per i chiodi necessari al collegamento è ricoperto da un sol lato con un altro pezzo, detto coprigiunto, di forma uguale o quasi uguale a quella dei solidi da congiungere, ed in ogni caso di forma tale che possa facilmente adattarsi sui medesimi, forato esso pure in corrispondenza dei buchi fatti sui primi (*Fig. 171^a, tav. XXX*). Il collegamento si ottiene unendo per sovrapposizione semplice con bulloni la lamiera o barra *A* col coprigiunto *C* e questo nello stesso modo colla barra *B*.

c) Collegamento a *coprigiunto doppio* quando le lamiere od in genere le membrature forate e portate a contatto come precedentemente sono abbracciate e ricoperte da due lati opposti da due pezzi analoghi per forma e preparazione al coprigiunto considerato nella disposizione precedente (*Fig. 172^a, tav. XXX*). I chiodi o le chiavarde uniscono la lamiera *A* ai due pezzi *C* che costituiscono il coprigiunto doppio, e questi stessi pezzi alla lamiera *B*, presentando ciascuno due sezioni di taglio.

Di questi tre collegamenti quello a doppio coprigiunto è evidentemente preferibile perchè i chiodi sono meglio utilizzati, presentando ciascuno due sezioni di taglio, e più particolarmente perchè la sollecitazione è simmetrica, mentre negli altri due gli sforzi trasmessi dal collegamento sono eccentrici in guisa che nasce un momento secondario di flessione, che tende a contorcere l'unione come è indicato nella figura 173^a (*Tav. XXX*).

d) Collegamento *multiplo* con chiodi o chiavarde quando si debba considerare un fascio di lamiere, ed in genere di membrature solidali, che bisogna mantenere tali malgrado le interruzioni imposte dalle necessità costruttive. È raro che l'unione dei due pezzi, che costituiscono la membratura interrotta, si faccia a sovrapposizione semplice, perchè ciò condurrebbe a ripiegare le due parti l'una sull'altra, od a ridurre la loro sezione trasversale (*Fig. 174^a, tav. XXX*), più comunemente si ricorre al collegamento per coprighiunto semplice o doppio, come è indicato per un fascio di lamiere nelle figure 175^a e 176^a (*Tav. XXX*). Se nel comporre la costruzione si ha cura di disporre le cose in modo che le interruzioni delle varie parti siano vicine e si seguano con ordine in guisa da poter formare coi vari coprighiunti corrispondenti ad ogni membratura un unico coprighiunto semplice o doppio, allora si ha quel collegamento o giunto speciale, che gli ingegneri chiamano a *gradinata*: esso è rappresentato per un fascio di lamiere nella figura 177^a (*Tav. XXX*).

Queste disposizioni sono state descritte in forma generica ed in realtà possono essere ottenute con tutti i materiali che si usano nelle costruzioni; quando però si parla di esse si suole riferirsi quasi esclusivamente alle costruzioni metalliche e più particolarmente ai prodotti ferrosi ottenuti al laminatoio, come le lamiere propriamente dette, le barre piatte ed i ferri sagomati in genere.

Un collegamento a chiodi o chiavarde, già progettato e disegnato in scala conveniente od al vero, per essere eseguito richiede le operazioni seguenti:

- a) Perforazione dei buchi.
- b) Preparazione dei chiodi o chiavarde.
- c) Messa in opera delle varie parti.

Non è mestieri dire come si preparino i fori nel legno, e nei pezzi ottenuti per fusione (ghisa), i fori possono essere lasciati all'atto della colata e regolati, oppure fatti completamente dopo la colata coll'uso del trapano secondo le convenienze, dimensioni e la maggiore o minore complicazione del pezzo fuso e la natura del materiale. Nelle lamiere ed in genere nei prodotti ottenuti al laminatoio i fori non possono essere fatti altrochè a lavorazione completa. Come pegli altri materiali si riportano dal disegno sul metallo i centri dei buchi indicandoli con una crocetta, e nei lavori, nei quali si richiede molta esattezza, si segna anche il circolo corrispondente al foro sul pezzo tinto con biacca e si individuano due diametri con quattro punti marcati sul metallo ai loro estremi, indi si passa alla perforazione coll'uso del punzone ovvero del trapano. Senza fermarci a descrizioni particolareggiate, che qui

non avrebbero grande interesse, una punzonatrice si compone di un meccanismo, il quale sotto l'azione di un motore è adatto ad imprimere un movimento di va e vieni, ordinariamente dall'alto al basso, ad un maschio cilindrico in acciaio fortemente temperato, il cui diametro è uguale a quello dei fori che si vogliono fare. Si porta la lamiera sotto al cilindro perforatore in modo che la crocetta ivi segnata corrisponda al centro del maschio, indicato di solito da una piccola protuberanza a punta, e si lascia agire la macchina. Il punzone abbassandosi preme dapprima sulla lamiera, poi perfora il metallo asportandone per strappamento tangenziale un cilindro corrispondente al diametro del maschio perforatore, e quindi anche al vano del foro che si vuol fare. Perchè tale operazione possa essere effettuata senza che il punzone sia alterato, detto R_a'' il carico unitario ammissibile per il cilindro perforatore, $S_s = \frac{m}{m+1} R_s$ il carico di rottura in senso tangenziale della lamiera da perforare, s il suo spessore, d il diametro del foro, bisogna che sia verificata la relazione

$$\frac{\pi d^2}{4} R_a'' \geq S_s \pi d s \geq \pi \frac{m}{m+1} R_s' d s$$

da cui si ricava

$$d \geq \frac{4m}{m+1} \frac{R_s'}{R_a''} s.$$

Si può ritenere pel ferro $R_s' = 35$ chilogrammi per millimetro quadrato, pel punzone poi di acciaio temperato il carico R_a'' può essere molto elevato ed in genere si potrà ritenere $R_a'' = 70,00$ chilogrammi per millimetro quadrato, quindi risulta

$$d \geq \frac{4 \cdot 4}{4+1} \frac{35}{70} s = 1,60 s.$$

Quando si abbiano presenti le osservazioni fatte sul valore della resistenza allo sforzo di taglio si vede che il risultato precedente concorda assai bene con quanto è stato detto relativamente alla convenienza di prendere il diametro delle caviglie, bulloni, chiodi, ecc., prossimamente uguale al doppio dello spessore della parete nella quale è fatto il foro: ordinariamente si prescrive che il diametro d sia compreso fra 1,5 s e 3.

Questo metodo di lavorazione permette una grande rapidità di esecuzione ed è conveniente dal lato economico, esso però ha un gravissimo inconveniente messo in luce da vari sperimentatori e più specialmente da BARBA e da CONSIDÈRE (*), cioè che a partire dalla superficie cilindrica di taglio su zone concentriche il metallo presenta un'alterazione, tanto più profonda quanto più si avvicina alla sezione di taglio, dovuta all'azione violenta di snervamento e strappamento trasversale prodotta dal punzone. Il metallo ha subito un incrudimento, per cui presenta una maggior resistenza unitaria in confronto di una deformabilità notevolmente minore, cosa che può produrre e produce effettivamente oltre un certo limite una ripartizione non uniforme degli sforzi nella sezione, analogamente a ciò che avverrebbe se si avessero due materiali diversi; esso inoltre conserva allo stato latente delle azioni meccaniche mal definibili, ma che si possono rendere manifeste con opportune disposizioni, prodotte dall'azione del punzone, ed in tale stato il materiale resiste assai male agli urti (**).

La perforazione delle lamiere ed in genere dei prodotti ottenuti al laminatoio può farsi anche per mezzo del trapano. Qualunque sia la forma del meccanismo e la natura del motore, l'azione del trapano si estrinseca per mezzo di uno scalpello animato da un lento movimento d'avanzamento secondo il suo asse e da un moto rotatorio interno all'asse stesso. Il pezzo da perforare si presenta, adattandolo convenientemente, all'utensile perforatore, per l'azione del quale la materia viene asportata a piccolissime porzioni con

(*) BARBA. *Étude sur l'emploi de l'acier dans les constructions*. — CONSIDÈRE, Opera citata. — *Annales des ponts et chaussées*, 1885.

(**) CONSIDÈRE ha sottoposto delle barre riunite a doppio coprigiunto alla azione di urti successivi prodotti da un peso di chilogrammi 300 cadente da altezze variabili. I risultati ottenuti sono riassunti nella tabella unita

Resistenza normale alla rottura del metallo per trazione lenta al mmq. in Kg.	DIAMETRO dei buchi dei chiodi in mm.	ALTEZZA CUMULATIVA in metri degli urti sopportati prima della rottura i fori dei chiodi essendo		
		punzonati	punzonati e ricotti	forati al trapano
52,00	23	0,25	5,00	2,75
51,50	18	—	—	2,90
60,70	18	1,10	—	2,90

azione lenta e continua senza che vengano esercitati sforzi violenti atti ad incrudire il metallo. Questo modo di perforazione è quindi indubbiamente migliore del primo, ma è anche notevolmente più costoso (*) e più lungo, per cui i costruttori hanno diretto le loro indagini alla ricerca del modo di usare la perforazione col punzone senza averne gli inconvenienti. Le soluzioni trovate sono due:

a) Far scomparire gli effetti dell'incrudimento del metallo mediante la ricottura del materiale (**).

b) Forare col punzone i buchi con un diametro minore del richiesto, ed allargarli successivamente coll'uso del trapano finchè abbiano le dimensioni volute, asportando in questa operazione la zona di metallo, che ha subito l'incrudimento.

Gli ingegneri in condizioni ordinarie preferiscono la seconda soluzione come quella che è più conveniente sotto tutti i rapporti, più semplice, facilmente applicabile e meno costosa (**).

L'incrudimento che si incontra nella perforazione al punzone si manifesta colle stesse modalità anche lungo i tagli delle lamiere fatti colle cesoie per una zona di piccola larghezza, un millimetro e mezzo, due o poco più, variabile collo spessore della lamiera (***). Se si vogliono evitare le conseguenze pericolose di questo fatto, bisogna far scomparire l'incrudimento sia con una ricottura, sia asportando la zona incrudita col mezzo di una piallatrice; questo ultimo metodo è preferibile, per le stesse ragioni per cui è preferibile l'allargamento col trapano dei fori fatti al

(*) BARBA, calcola il costo di ogni foro eseguito al trapano a lire 0,05. CONSIDÈRE pensa che questa spesa possa essere notevolmente ridotta, tuttavia la lavorazione col trapano è sempre più costosa della perforazione col punzone, anche quando si proceda ad un allargamento successivo del foro col mezzo del trapano.

(**) Sull'incrudimento e l'effetto della ricottura, veggansi le belle ricerche di OSMOND e WERTH (*Annales des mines*, 1885. — *Mémorial de l'artillerie de marine*, Volume XV, serie 2), i lavori di MARION HOWE egregiamente riassunti da RÉSAL nel suo libro. *Constructions métalliques, élasticité et résistance des matériaux*. — *Fonte, fer et acier*.

(***) CONSIDÈRE valuta la spesa a circa lire 0,0034 per ogni foro. Da circa vent'anni negli arsenali i fori dei chiodi nelle lamiere di acciaio (*flusseisen*) sono fatti colla punzonatrice ed in seguito allargati col trapano. Questa lunga esperienza ha dimostrato che l'operazione è facile e non presenta alcun inconveniente; da qualche tempo essa è entrata anche nella pratica corrente delle costruzioni civili e tende sempre più ad estendersi.

(****) La larghezza della zona incrudita aumentata collo spessore della lamiera.

punzone alla ricottura dei pezzi, ed è quello che si usa in pratica perchè più conveniente.

I risultati delle esperienze eseguite relativamente all'effetto della perforazione col punzone in confronto di quello ottenuto col trapano e del taglio delle lamiere colle cesoie si possono riassumere nel modo seguente (*):

a) Il lavoro col punzone altera gravemente il ferro saldato e più ancora il ferro di fusione (acciaio dolce, *flusseisen*); questa alterazione è caratterizzata dall'aumento del limite di elasticità e da una diminuzione molto più forte dell'allungamento. Questa specie di incrudimento si estende a tre o quattro millimetri attorno al buco, e diminuisce rapidamente di intensità a partire dal primo millimetro; lo stesso fatto si osserva colle stesse modalità lungo i tagli delle lamiere fatti colle cesoie.

b) Oltre l'incrudimento, l'azione del punzone produce delle tensioni intermolecolari intensissime nel metallo vicino al buco (**).

c) Il metallo punzonato si rompe per una flessione od un allungamento molto minore (perchè incrudito) che il metallo forato al trapano; la sua rottura conduce a quella di tutta la sezione resistente come conseguenza naturale.

d) La resistenza media di una sezione punzonata al momento in cui avviene la sua rottura totale in causa della rottura del metallo incrudito è variabile a seconda della distanza dei fori. Essa è superiore del 15 % alla resistenza normale del metallo per una lamiera di ferro omogeneo dello spessore di millimetri 10,00, quando la distanza fra le circonferenze dei buchi è di qualche millimetro (***), e gli diventa invece uguale, quando questa distanza si avvicina a millimetri 15,00. La detta resistenza media continua a diminuire quando la distanza fra le circonferenze limite dei fori aumenta, e raggiunge il valor minimo quando la distanza diventa uguale o superiore a 40 od a 50 millimetri, ciò che nel caso considerato, corrisponderebbe ad una distanza da

(*) CONSIDÈRE, Opera citata.

(**) Se si asporta l'anello di materiale incrudito e si fa un'incisione nel medesimo, le due parti si allontanano e si produce una notevole deformazione, cosa che non avviene, se si eseguisce un'operazione analoga per un foro fatto col trapano.

(***) Cosa che resta spiegata facilmente dall'osservazione che allora il metallo resistente è tutto incrudito e quindi resiste in condizioni uniformi di deformazione, mentre invece negli altri casi, in cui le due zone incrudite sono separate da un materiale che non è stato alterato, la resistenza in realtà dipende dall'insieme delle resistenze di due materiali aventi proprietà diverse, specialmente per ciò che riguarda il coefficiente di deformazione.

asse ad asse di circa tre diametri. In queste condizioni, la perdita di resistenza

Pel ferro	è circa il	20 %
» omogeneo dolcissimo	»	20 %
» » dolce	»	25 %
» » duro	»	35 %.

e) La ricottura preventiva aumenta la perdita di resistenza dovuta alla punzonatura, mentre l'incrudimento o la tempera la diminuiscono.

f) La ricottura dopo la punzonatura, oppure l'asportazione col trapano di una zona da uno a due millimetri, o poco più (con spessori medi di lamiera, millimetri 1,50) intorno al foro dei chiodi, o colla piallatrice lungo i tagli fatti colle cesoie, è sufficiente per rendere al metallo la sua resistenza normale.

g) L'allargamento al trapano ed il lavoro alla piallatrice, sono i mezzi più economici e più pratici per far scomparire l'alterazione prodotta dall'azione violenta del taglio trasversale.

h) Se si considera una costruzione inchiodata per sovrapposizione o per coprighiunto semplice, l'influenza della punzonatura raggiunge un valore ben più grande di quello indicato superiormente in causa delle deformazioni prodotte dalla eccentricità esistente nella trasmissione degli sforzi attraverso il collegamento, eccentricità dannosissima rispetto al materiale incrudito.

i) La punzonatura diminuisce moltissimo la resistenza agli urti delle costruzioni inchiodate.

Per ciò che si riferisce alla preparazione dei bulloni, conviene distinguere il caso delle chiavarde messe in opera a freddo, da quello delle chiodature fatte a caldo. Le chiavarde si ricavano ordinariamente da barre cilindriche; ad un estremo esse vengono lavorate a caldo, sia a mano, sia con uno stampo speciale, per farle terminare con una parte saliente, detta testa, in forma di cilindro o di prisma a base quadrata od esagonale, col diametro o col lato del quadrato circa doppio del diametro d della chiavarda, ed alto da $\frac{2}{3}$ a $\frac{3}{4}$ del diametro stesso (*Fig. 154^a e 158^a, tav. XXIX*). L'altro estremo della chiavarda è terminato a vite col diametro d_1 del nucleo uguale circa ad $\frac{8}{10}$ di d , e sopra di essa s'avvolge una madre vite di forma quadrata od esagona, calcolata come si è indicato al numero precedente, coll'avvertenza di interporre fra essa ed il corpo da collegare un disco metallico, detto *rosetta*, in forma di corona circolare, allo scopo di distribuire meglio la pressione e di ridurre a proporzioni determinate e volute a priori, la resistenza d'attrito, che si incontra a far muovere la madre vite, per

creare nel gambo un dato sforzo di tensione, e quindi una determinata aderenza fra le parti del collegamento.

Se il collegamento invece deve essere fatto a caldo, i chiodi vengono ancora ricavati da aste cilindriche e ad una estremità dei medesimi si foggia una testa, assegnandole a seconda dei casi una delle forme indicate nella figura 178^a (*Tav. XXX*). Quando si devono mettere in opera i chiodi, questi vengono riscaldati al color rosso chiaro, introdotti nei fori corrispondenti e ribaditi all'altra estremità, in guisa che essendo impedito il restringimento, che si produrrebbe naturalmente per la perdita di calore, nasce uno sforzo di tensione nel gambo del chiodo, che si traduce in una forte compressione e corrispondente adesione delle parti inchiodate.

Per evitare gli sbattimenti nei giunti fatti con chiavarde, oltre alle precauzioni ordinarie di creare dei risalti nei pezzi da riunire, di introdurre cunei o chiavette d'arresto (*Fig. 159^a, tav. XXIX*), si sogliono stringere le madreviti in modo che fra i corpi a contatto nasca un'aderenza capace di resistere allo sforzo trasmesso, senza che le chiavarde siano menomamente sollecitate da alcun sforzo di taglio. Se T è lo sforzo che si esercita nel collegamento, la tensione Q complessiva nelle chiavarde sarà espressa da

$$Q = \frac{T}{f}$$

in cui f esprime il coefficiente d'attrito fra le varie membrature (*).

(*) COLOMBO nel suo Manuale dà i numeri seguenti:

NATURA dei CORPI	STATO DELLE SUPERFICIE supposte lisce	COEFFICIENTE D'ATTRITO f		
		massimo	medio	minimo
metallo sopra metallo	secche	0,30	0,20	0,15
	bagnate	—	0,30	—
	unte	0,16	0,16	0,10
	lubrificate regolarmente.	0,10	0,07	0,05
legno sopra legno	secche	0,50	0,36	0,25
	bagnate	—	0,25	—
	spalmate con grasso . .	0,16	0,11	0,06
metallo sopra legno	secche	0,60	0,40	0,20
	bagnate	—	0,24	—
	spalmate o lubrificate .	0,16	0,10	0,06

Se con n si indica il numero di bulloni che entrano nel collegamento e con V lo sforzo di tensione agente in ciascuno di essi

$$V = \frac{Q}{n} = \frac{T}{nf}.$$

Indichiamo con N lo sforzo limite di pressione, che non si vuole sia superato nelle spire della vite e nella superficie d'appoggio della madrevite contro la rosetta, affinchè non sia espulsa la materia lubrificante introdotta per diminuire il coefficiente d'attrito o per un'altra ragione qualsiasi. Abbiamo visto al numero precedente che la formola che serve a dare la forza P da applicare all'estremo del braccio della chiave di manovra, che si impiega per stringere il bullone, è

$$Pr = \int f N r d\omega + \gamma dT \frac{\tan \beta + f'}{1 - f' \tan \beta}$$

la quale, in condizioni medie, si riduce a (Vedi a pag. 318)

$$Pr = 0,217 d T.$$

Coll'uso di questa formola l'ingegnere potrà sempre in ogni caso calcolare la lunghezza del braccio della chiave e lo sforzo da applicare all'estremità della medesima. L'impiego poi del quadro riportato in nota alla pagina 319, nel maggior numero di casi renderà facile assai l'uso dei criteri razionali esposti nel numero precedente per la messa in opera dei bulloni nei collegamenti.

Per le chiodature a caldo si procede nel modo seguente: si portano a contatto le lamiere, ed in generale le membrature da inchiodare, avendo cura che i fori si corrispondano perfettamente; in pratica si suole ammettere una tolleranza di un millimetro al massimo di eccentricità fra i fori corrispondenti delle varie lamiere (*). Quando l'eccentricità riesce maggiore, vuol dire che la lavorazione ed il tracciamento furono fatti con poca precisione; in pratica i costruttori cercano rimediarvi introducendo una spina nei fori, e, facendo leva in un senso e nell'altro, condurre le su-

(*) Qualche volta si trovano delle differenze di 2 millimetri, e perfino di 3 millimetri; ciò avviene specialmente quando i buchi furono ottenuti col mezzo del punzone; un tal modo di lavorazione non dovrebbe essere ammesso in alcuna guisa.

perficie interne a corrispondersi. Questo processo è evidentemente difettoso e dovrebbe essere escluso, non tanto per l'alterazione e snervamento che la spina produce nel metallo delle pareti del foro, sebbene essa abbia pure un valore, quanto più specialmente per le tensioni permanenti che il suo effetto sviluppa nelle parti riunite, e che vengono ad aggiungersi alle tensioni principali corrispondenti agli sforzi esterni. In questi casi si dovrebbe con un piccolo trapano mobile a mano asportare il materiale eccedente allargando il foro, e servirsi in seguito di chiodi aventi un diametro superiore a quello usato per gli altri, e convenienti al buco fatto. I chiodi con una testa preparata in precedenza, come si è già avvertito e col gambo cilindrico lungo quanto lo spessore da inchiodare, più una lunghezza di gambo avente un volume uguale o di poco superiore a quello che dovrà avere la testa da formare mediante ribaditura, sono introdotti in appositi forni, spesso fissi nelle officine, e sempre mobili o portatili nei cantieri provvisori di messa in opera e montatura, e riscaldati alla temperatura ciliegia chiaro ben definita (circa 1050 gradi). Ordinariamente la forma che si assegna alle teste è scelta fra quelle rappresentate nella figura 178^a (*Tav. XXX*) per alcune delle quali il volume di metallo, necessario a formarle, corrisponde ad una lunghezza di gambo uguale ad un diametro e mezzo (1,5 *d*); si suole eccedere la detta lunghezza di circa un millimetro perchè la testa riesca ben nutrita e vi sia piuttosto un eccesso, favorevole ad una buona compressione nel metallo, che un difetto di materia. I chiodi convenientemente riscaldati sono afferrati mediante tenaglie e rapidamente messi in posto e quindi ribaditi a mano, oppure a macchina con chiodatrici idrauliche. Per la ribaditura a mano, dopo qualche colpo di martello, un operaio posa sul gambo del chiodo sporgente dalle lamiere lo *stampo* (*bouterolle*), ferro che porta incavata la forma della testa del chiodo (*Fig. 179^a, tav. XXX*), mentre altri vi batte sopra a colpi raddoppiati, con una mazza del peso variabile da 6 ad 8 Kg. circa (*); dalla parte opposta poi delle lamiere da inchiodare si tien ferma la testa del chiodo con una mazza, affinchè questo non abbia ad uscire dal foro.

La ribaditura a macchina vien fatta con apparecchi di forme diverse; in via generica essi risultano composti di due stampi metallici, portanti incavate le forme delle teste dei chiodi, disposti in modo che possono abbracciare le lamiere da inchiodare e comandati da un meccanismo, mosso ordinariamente mediante pres-

(*) Per più ampie indicazioni vedi le Opere di tecnologia. — Vedi anche HERM. HAEDER, *Bau und Betrieb der Dampfkessel*.

sione idraulica, capace di farli avvicinare e premere fortemente sulle parti da unire. È consigliabile di calcolare il meccanismo in modo, che la pressione totale che si esercita sul chiodo, corrisponda ad uno sforzo variabile fra 90 e 105 chilogrammi per millimetro quadrato della sezione del gambo del chiodo da ribadire. Qualche volta la chiodatrice meccanica, oltre gli stampi, porta anche uno strettoio formato con branche o bracci terminati da placche o corone circolari, destinate a far pressione sulle membrane da inchiodare e mantenerle fortemente avvicinate in modo da impedire qualsiasi cedimento sotto la pressione generata dal chiodo durante il suo raffreddamento, e rendere più efficace e maggiore l'aderenza, che nasce fra le varie parti.

Una chiodatura dicesi ben fatta quando il metallo riempie esattamente il foro adattandosi anche nei vani, provenienti da non esatta corrispondenza dei buchi nelle varie parti riunite, e vi è penetrato con sufficiente pressione per non staccarsi dalle pareti del foro in causa del restringimento che si produce nel gambo del chiodo durante il suo raffreddamento. Inoltre le teste debbono apparire come formate regolarmente sotto forte pressione in guisa che il materiale, sotto l'azione dello stampo, lo abbia riempito completamente e sia anche rifluito, producendo una forte pressione nel gambo ed una sbavatura uniforme tutto intorno alla linea limite della testa del chiodo (una specie di cordone), come è indicato nella figura 180^a (*Tav. XXX*) senza peli, screpolature, scheggie, ecc. Se la testa del chiodo presenta scarsezze, oppure la forma della figura 181^a (*Tav. XXX*), ed a più forte ragione se si vedono screpolature od indizi di snervamento, allora il chiodo non ha ricevuto una conveniente pressione, od è stato messo in opera ad una temperatura troppo bassa, perchè il materiale abbia potuto adattarsi bene allo stampo, e scorrere ed essere plasmato sotto l'azione del medesimo. Sarà anche opportuno osservare che la messa in opera di un chiodo a temperatura molto elevata, può avere un'influenza benefica in quei casi in cui il metallo tutto intorno al buco ha subito un incrudimento in causa della perforazione col punzone; infatti l'elevata temperatura si comunica alla parete del vano producendovi una specie di parziale ricottura.

La ribaditura a macchina si è introdotta nell'uso da poco tempo e come lavoro corrente dà un risultato più perfetto di quello che si ottenga colla ribaditura a mano; le ragioni si trovano nei fatti seguenti:

a) La pressione agisce con lentezza e continuità, per cui la materia plastica del chiodo incandescente può adattarsi meglio

alla forma che deve prendere e riempire meglio il foro del chiodo, anche se nel medesimo vi è qualche irregolarità proveniente da non perfetta corrispondenza dei buchi.

Nella chiodatura a mano invece la pressione agisce a colpi e saltuariamente e se il gambo del chiodo è lungo relativamente al suo diametro, cioè se supera il triplo, ed a più forte ragione il quadruplo del diametro, essa non si fa sentire lungo tutto il medesimo, ma solo in vicinanza della testa del chiodo, od almeno non si fa sentire con sufficiente energia.

b) La ribaditura di un chiodo a macchina si eseguisce più rapidamente che a mano, per cui la differenza di temperatura fra il principio e la fine dell'operazione riesce molto minore. Questa circostanza è molto importante poichè si è certi che il metallo acquista la forma voluta finchè è ancora plastico ed entro i limiti di temperatura più favorevoli, cioè al color rosso scuro, mentre a mano ogni colpo di martello porta una nuova deformazione: la testa martellata al disopra del rosso^c ciliegia ha debole limite di elasticità e non produce il massimo d'aderenza e di resistenza, se invece ciò avviene al disotto del rosso scomparso, il metallo incrudisce fortemente e manca di duttilità. Se lo schiacciamento è stato continuato fino alla temperatura critica di 360° od in vicinanza di essa e se il ferro contiene impurità (*) è molto probabile che si producano piccoli inizi di fenditure, che possano far saltare la testa in causa di un primo sforzo, od anche per semplice effetto del restringimento per diminuzione di temperatura. Da certe esperienze sembrerebbe risultare che tutti i prodotti ferrosi ottenuti per fusione avrebbero una tendenza a rompersi a 360° come i ferri impuri, ma questo fatto secondo CONSIDÈRE non sarebbe stato finora sufficientemente provato (**).

c) Si può regolare la pressione e mantenerla costante per tutti i chiodi, cosa impossibile nella lavorazione a mano, e si è anche meglio garantiti in una lavorazione corrente dai difetti provenienti da stanchezza, mancanza d'abilità e mancanza di sorveglianza. Ordinariamente si regolano le cose in modo che la pressione stia fra Kg. 90,00 e Kg. 100,00 per millimetro quadrato di sezione di chiodo, l'esperienza avendo dimostrato che in queste condizioni si ha sempre un buon risultato anche quando la tem-

(*) CONSIDÈRE, Memoria citata, paragrafo 81.

(**) RÉSAL, Opera citata, capitolo III.

Sulle condizioni nelle quali si trova il metallo fra 550° e 360° si potranno consultare i lavori già citati di OSMUND e WERTH, e l'Opera pure citata di RÉSAL, pag. 331. — Vedi anche KNAB, *L'acier*, pag. 78.

peratura discende al rosso molto scuro. Con una pressione minore, per esempio Kg. 70,00 per millimetro quadrato, si ottiene già una debole aderenza, se il metallo non è molto caldo al momento dell'operazione. Non è noto se esista una pressione unitaria capace di produrre un effetto d'aderenza massima fra quelli, che si possono ottenere con pressioni unitarie maggiori o minori.

d) La chiodatura a macchina è tanto più preferibile quanto più grande è il diametro dei chiodi e quanto più è forte lo spessore dei pezzi da riunire e l'imperfezione dei fori. Ciò risulta senza bisogno di altra dimostrazione dalle considerazioni precedenti.

Vari sperimentatori si sono occupati di determinare l'aderenza che si sviluppa fra due o più lamiere per effetto della tensione, che agisce nel gambo del chiodo, riunendo le parti con fori allungati e misurando lo sforzo necessario a farle scorrere le une rispetto alle altre. CLARK per un collegamento fatto con doppio coprigiunto (due sezioni di scorrimento) fra lamiere dello spessore di millimetri 16 e con un chiodo del diametro di 22^{mm},3 (Fig. 182^a, tav. XXX) ha trovato che lo sforzo medio necessario

per produrre lo scorrimento era Kg. 5670, cioè $\frac{14^{kg},30}{2} = 7^{kg},15$ per millimetro quadrato. GONIN e LAVALLEY (*) avrebbero trovato una aderenza di Kg. 6,90 per millimetro quadrato, LEBASTEUR (**) avrebbe trovato per ogni millimetro quadrato di sezione di chiodo unendo due lamiere Kg. 22,3, unendo tre lamiere Kg. 13,90, unendo due lamiere con chiodi ribaditi a macchina Kg. 34,07. FAIRBAIRN (***) ha fatte numerose esperienze, esso ha trovato che le chiodature fatte con fori eseguiti col punzone sono più resistenti alla rottura di quelle fatte col trapano, e che arrotondando i bordi dei fori la resistenza aumenta del 2 $\frac{3}{4}$ % nel primo caso e di 12 % nel secondo.

Una differenza così forte fra i risultati ottenuti dai vari sperimentatori non permetteva di arrivare a nessuna conclusione precisa e lasciava supporre che fossero state trascurate circostanze importanti nella produzione o nella valutazione dell'aderenza. CONSIDÈRE ha ritenuto conveniente riprendere il problema ed eseguire più serie ordinate di esperienze in varie condizioni con chiodature ribadite a mano od a macchina, e con fori ottenuti col punzone e col trapano, tenendo conto anche della temperatura, a cui la chiodatura è stata fatta. Quanto all'importanza dell'ar-

(*) MORANDIÈRE, *Construction des ponts en fer*.

(**) LEBASTEUR, *Les métaux à l'Exposition universelle de 1878*.

(***) *Resoconto della Società reale degli ingegneri inglesi 1873*.

rotondamento degli spigoli essa viene facilmente spiegata dal riflusso della materia nei vani corrispondenti (*), ma non può avere importanza sulla tensione che si sviluppa nel chiodo e quindi sull'aderenza. L'arrotondamento degli orli dei fori diminuisce anche l'importanza della sezione singolare, in cui la testa si unisce al gambo del chiodo creando una specie di congedo, quindi deve essere favorevole alla resistenza del chiodo alla tensione secondo il suo asse. La maggior resistenza delle chiodature fatte con fori ottenuti al punzone si spiega pure facilmente tenendo conto che l'istrumento perforatore lascia gli spigoli leggermente arrotondati dal lato, pel quale esso penetra nella lamiera, mentre nella parte opposta, ove trovasi la matrice, si forma un piccolo rialzo tagliente in forma di sbavatura, che non può a meno di essere favorevole all'attrito.

Le esperienze fatte da *CONSIDÈRE* sono descritte diffusamente nella Memoria sull'uso del ferro e dell'acciaio nelle costruzioni (**), esse conducono ai risultati seguenti :

a) L'aderenza prodotta dai chiodi corrisponde prossimamente a Kg. 10,00 per millimetro quadrato di sezione effettiva del chiodo quando la ribaditura è fatta fra 1000° ed 800°, essa aumenta quando la temperatura di ribaditura diminuisce e raggiunge il massimo di circa Kg. 14,00 per la temperatura di 600° (rosso scuro). Diminuendo ancora la temperatura l'aderenza diminuisce finchè si riduce ad un valore non ben determinato e costante, ma certamente inferiore a Kg. 5,11 per le ribaditure fatte a freddo ed a Kg. 7,39 per quelle fatte a 400° e Kg. 9,67 per quelle fatte a 500°. Per lo stesso metallo, che dava una resistenza unitaria allo sforzo di taglio di Kg. 30,11 per millimetro quadrato sperimentando con caviglie messe a freddo, senza creare alcuna aderenza, la resistenza alla rottura dei chiodi è stata Kg. 30,11 per quelli ribaditi fra 1000° e 900°, diminuendo la temperatura di ribaditura la resistenza unitaria si è innalzata progressivamente a Kg. 31,25 ad 800°; Kg. 36,92 a 650°; Kg. 38,06 a 550° e raggiunge il massimo di 41,25 per la temperatura di 500°. Diminuendo ancora la temperatura, la resistenza diminuisce nuovamente e si riduce a Kg. 32,38 pel chiodo ribadito a freddo.

b) Ripetendo le stesse esperienze con chiodature fatte a macchina si sono ottenuti risultati in tutto analoghi, e le leggere diffe-

(*) Il riflusso aumenta la sezione resistente allo scorrimento, ciò avviene però d'ordinario solo quando lo spessore da inchiodare non è molto forte, oppure quando si prendono precauzioni speciali per una buona lavorazione.

(**) *Annales des ponts et chaussées*, 1885-1886.

renze sono facilmente spiegabili colle diversità esistenti fra la qualità del metallo e della superficie a contatto.

c) Nelle chiodature ribadite a macchina, quando la pressione varia fra Kg. 90 e 105 per millimetro quadrato, la resistenza, e soprattutto l'aderenza, aumentano quando la temperatura diminuisce fino a 600°. Al contrario, quando la pressione per millimetro quadrato era compreso fra Kg. 66 e 70, si otteneva l'aderenza normale di Kg. 10,00 circa per millimetro quadrato quando la ribaditura era fatta a temperatura molto elevata (circa 1000°), essa diminuiva rapidamente colla temperatura fino a ridursi a meno di Kg. 6,00 per millimetro quadrato quando lo schiacciamento del metallo avveniva al color ciliegia nascente (verso 800°). I risultati opposti ottenuti sono spiegabilissimi coll'osservazione che la plasticità e semifluidità del materiale aumenta colla temperatura, per cui lo schiacciamento ed il riflusso del metallo nell'interno del foro può aversi ugualmente con pressioni diverse, mentre ciò non avviene più quando esso per la diminuita temperatura oppone maggior resistenza; la figura 180^a (Tav. XXX) mostra la forma che prende la testa del chiodo convenientemente ribadito e sotto pressione sufficiente al suo riflusso, la figura 181^a (Tav. XXX) dà la forma che esso prende quando lo schiacciamento è stato insufficiente. Non si hanno esperienze che facciano vedere se con pressioni unitarie superiori a Kg. 100,00 per millimetro quadrato si possano ottenere aderenze crescenti a determinate temperature, nè se esiste una pressione capace di produrre un massimo di aderenza.

d) La rapidità della ribaditura è un gran vantaggio perchè si può cominciare alla temperatura più conveniente del rosso scuro; lavorando a macchina ciò può essere ottenuto facilmente, mentre a mano sarebbe cosa imprudente, poichè si rischierebbe di finire l'operazione in prossimità della temperatura pericolosa di 360°, alla quale il metallo è molto fragile.

Riassumendo quanto è stato detto sulle chiodature a caldo ed i risultati ottenuti da vari sperimentatori si può concludere (*):

a) Nei collegamenti, nei quali le parti non hanno subito alcun strisciamento relativo, i chiodi lavorano unicamente per tensione longitudinale. L'aderenza che questa tensione fa nascere fra le lamiere a contatto resiste da sola agli sforzi, ai quali i collegamenti sono sottoposti.

b) Qualsiasi sforzo superiore all'aderenza, esercitato alternativamente sopra un chiodo in sensi opposti, lo disloca e lo fa sbattere rapidamente.

(*) Vedi *CONSIDÈRE*, Memoria citata, capitolo XI.

c) Nelle costruzioni calcolate secondo i metodi usuali, nei quali le lamiere, fatta deduzione dei fori dei chiodi, sopportano uno sforzo di circa Kg. 8,00 per millimetro quadrato, mentre i chiodi sono calcolati in base ad uno sforzo unitario di Kg. 5,00 per millimetro quadrato, questi ultimi non sono mai assoggettati a sforzi superiori al 60 od al 70 % di quelli che possono sopportare senza rompersi, anche quando gli sforzi esterni fossero per cause impreviste ed imprevedibili abbastanza energici per rompere le lamiere nelle sezioni pericolose del collegamento. Infatti sia pel costo poco elevato come per l'aumento di sicurezza che si ha rinforzando le chiodature, i costruttori fanno lavorare i chiodi per millimetro quadrato a Kg. 4 oppure Kg. 5, mentre le barre o le lamiere corrispondenti, dedotti i vani, lavorano a Kg. 8 ed anche più se si tien conto dell'effetto d'incrudimento prodotto dal punzone, dalle percussioni od altro.

d) L'aderenza dei chiodi ha maggior importanza che la loro resistenza alla rottura: se le lamiere furono forate mediante punzone l'aderenza è maggiore che quando sono state perforate col trapano.

e) La temperatura di ribaditura esercita un'influenza importante nelle chiodature. L'aderenza aumenta dal 40 al 50 % quando questa temperatura s'abbassa dal rosso vivo al rosso scuro (fra 600° e 700° gradi). Contemporaneamente la resistenza aumenta dal 20 al 30 %, ma non raggiunge il suo massimo che quando la temperatura s'abbassa al punto che il rosso sparisca. (Questa proprietà è probabilmente dovuta ad un parziale incrudimento che aumenta il limite di elasticità, e permette di conservare una pressione più forte fra le parti, essa peraltro diminuisce la duttilità e la resistenza alle azioni dinamiche; se ciò non ha grande importanza è dovuto al fatto (vedi sopra) che i chiodi lavorano in genere al massimo al 60 % del loro carico di rottura).

f) La pressione di ribaditura necessaria a dare ai chiodi la massima solidità è tanto più forte quanto meno caldo è il chiodo stesso. Una pressione variabile fra 90 e 100 Kg. per millimetro quadrato di sezione di chiodo dà buoni risultati anche alle temperature più basse (rosso scuro) che possono essere ammesse praticamente.

g) Nelle chiodature fatte con ferri forati al trapano eseguite nelle condizioni ordinarie si può contare in media sopra un'aderenza variabile fra 8 e 10 Kg. per millimetro quadrato di sezione di chiodo. Si può ottenere un risultato maggiore quando le lamiere sono state forate col punzone, oppure quando la ribaditura è stata fatta sotto pressione conveniente a temperatura bassa (rosso molto scuro).

h) Le chiodature a macchina danno risultati analoghi a quelli delle chiodature a mano fatte bene, quando si abbiano piccoli

spessori e fori che si corrispondono esattamente. La ribaditura a macchina però si deve riguardare come preferibile alla chiodatura a mano, perchè in pratica elimina i difetti provenienti da mancanza di abilità o sorveglianza e da stanchezza, da imperfezione nella perforazione dei fori, ed è assolutamente più conveniente quando si abbiano chiodi con diametri forti, oppure spessori molto grandi di lamiera da riunire. Questi vantaggi sono sufficienti per prescrivere le chiodature a macchina ogni qualvolta sono possibili.

i) I chiodi in acciaio (ferro omogeneo, *flusseisen*) (*) debbono essere ribaditi fra limiti di temperatura più ristretti che quelli in ferro. Ciò si può ottenere molto facilmente colle chiodatrici meccaniche, mentre invece si presentano serie difficoltà nella lavorazione a mano.

j) È razionale e conveniente aumentare il diametro dei chiodi non solo in proporzione della grossezza di ogni singola lamiera, ma anche tenendo calcolo dello spessore totale da inchiodare. Ribadendo a mano può avvenire che sia impossibile aver riguardo a questa considerazione, poichè l'operaio non può sviluppare che un determinato sforzo di pressione, mentre invece ribadendo a macchina ciò può sempre essere fatto.

k) Lo stiramento delle lamiere colla spina non diminuisce la resistenza del metallo come potrebbe credersi, ma fa nascere però delle tensioni anormali nelle costruzioni. Vi sono ragioni sufficienti per preferire l'allargamento col trapano a mano dei fori che non si corrispondono, malgrado l'obbligo di scegliere diametri diversi pei chiodi, e più grandi di quelli ammessi normalmente nel progetto, cosa imbarazzante specialmente quando la chiodatura è fatta a mano.

l) L'esattezza nella perforazione dei buchi dei chiodi è una delle prime qualità di una buona costruzione metallica, essa può essere ottenuta più facilmente colla perforazione al trapano, che con quella fatta mediante il punzone.

Quando si debbono riunire due o più membrature, e più particolarmente due o più lamiere, col mezzo di chiodi o di chivarde, i fori corrispondenti producono in esse un indebolimento. Sia ω , l'area della sezione assiale di un chiodo, n il numero di essi esistente in una sezione trasversale delle membrature da collegare,

(*) Il metallo deve essere dolcissimo, in media si prescrive:

limite di rottura alla trazione per millimetro quadrato Kg. 38

allungamento di rottura sopra millimetri 200 28 %

ω l'area della sezione totale della membratura stessa, l'indebolimento prodotto dalla chiodatura è misurato da

$$\frac{\omega - n \omega_1}{\omega} = \varepsilon$$

ed ε vien detto coefficiente di indebolimento. Nel caso delle lamiere, detta b la larghezza ed s lo spessore delle medesime, e d il diametro dei chiodi

$$\varepsilon = \frac{b - n d}{b}.$$

L'indebolimento della sezione resistente importa naturalmente un aumento nello sforzo unitario subito dal materiale, quindi è importante fissare i limiti entro i quali può essere scelto il coefficiente ε . Se si prende in considerazione una chiodatura ben fatta, la tensione del gambo del chiodo fa nascere fra le lamiere una tale aderenza che il chiodo non è sollecitato ad alcun sforzo tagliente, finchè lo sforzo unitario del metallo soggetto a tensione o compressione non supera almeno Kg. 10,00 per millimetro quadrato. In generale questo limite in condizioni normali nelle costruzioni non è mai superato, quindi in una chiodatura ben fatta e finchè si rimane in condizioni normali le lamiere resistono come se venissero dalla fusione o fossero state saldate insieme. La trasmissione dello sforzo da una ad un'altra non avviene bruscamente nel punto, nel quale è fissato il chiodo, ma con legge di continuità lungo tutto il tratto dove si verifica l'aderenza, poichè una parte non può deformarsi se non trascina con sè l'altra.

Non si può certamente stabilire quale sia la legge di trasmissione dello sforzo e mancano esperienze fatte a questo scopo, ma in via di prima approssimazione e per fissare le idee si può accettare una rappresentazione lineare come è indicato nella figura 183* (*Tav. XXX*). In realtà l'aderenza diminuisce tutt'intorno al chiodo allontanandosi da esso dipendentemente anche dallo spessore delle lamiere con una legge non definita sperimentalmente, ma che deve essere in relazione colla deformazione per flessione delle lamiere ed esprimibile prossimamente con una legge rappresentabile con una superficie di rivoluzione avente l'asse coincidente con quello del chiodo e per generatrice una parabola d'ordine superiore. Nelle condizioni ordinarie nelle quali il diametro del chiodo è doppio dello spessore delle lamiere, si può ritenere che la pressione e quindi l'aderenza sia notevole alla distanza di circa due diametri e vada diminuendo rapidamente per annullarsi quasi, o diventar molto piccola, oltre i tre diametri e

mezzo o quattro diametri: se le lamiere sono unite da vari chiodi, la sfera d'azione di ciascuno di essi si estende maggiormente in causa dei molti vincoli, cui le due lamiere sono soggette. In base a questo criterio la sezione resistente lungo il collegamento verrebbe notevolmente aumentata, non si può dire duplicata perchè l'aderenza decresce rapidamente intorno al chiodo, quindi anche che venga asportata una parte dell'area resistente, questo non deve, in condizioni ordinarie, produrre che un indebolimento apparente, poichè se diminuisce la larghezza della lamiera per effetto dei fori dei chiodi, cresce lo spessore resistente in causa dell'aderenza fra le parti. Se la saldatura fosse perfetta potrebbe astrattamente ritenersi soltanto apparente l'indebolimento finchè sta fra $\varepsilon = 0,50$ ed $\varepsilon = 1,00$; in realtà dall'osservazione appare che in condizioni favorevoli l'indebolimento apparente si verifica soltanto quando ε sta fra $\varepsilon = 0,60$ ed $\varepsilon = 1,00$ dipendentemente dal modo e dalle condizioni nelle quali le chiodature sono fatte. Nelle costruzioni delle caldaie ove s'impiegano materiali ed operai scelti che lavorano in officine nelle migliori condizioni per un'eccellente produzione si tengono i chiodi lontani fra centro e centro di una lunghezza γ variabile fra $\gamma = 2,5d$ e $\gamma = 3,5d$, in media $\gamma = 3d$. Nelle costruzioni marittime, ove si lavora ancora in buone condizioni, ma con minor soggezione rispetto all'aderenza $\gamma = 3,5d$ e $\gamma = 4,5d$, in media $\gamma = 4d$. Finalmente nelle costruzioni civili, ponti, solai, tettoie, ecc., dove non si hanno speciali esigenze per l'aderenza, la lavorazione si fa in cantieri provvisori e spesso con operai non molto esercitati, γ varia d'ordinario fra $\gamma = 4,5d$ e $\gamma = 6d$, in media $\gamma = 5d$: se per condizioni speciali si debbono mettere i chiodi più vicini è regola di prudenza aver cure particolari perchè la chiodatura riesca perfetta.

L'osservazione e l'esperienza hanno dimostrato che in queste condizioni non si manifesta nelle lamiere da unire una tendenza speciale a rompersi od a deformarsi lungo le linee di giunto, più che in altre parti, quindi si può ritenere che il coefficiente di indebolimento, deve essere compreso fra 0,60 e 0,85, avendo cura di limitarlo, a meno di ragioni speciali, fra 0,65 e 0,70 per le costruzioni fatte in eccellenti condizioni, fra 0,70 e 0,75 in condizioni superiori alle comuni e con esigenza di media aderenza e finalmente a 0,80 ed anche più, nelle costruzioni civili ordinarie, tanto più che spesso in questo caso bisogna tener conto anche dell'indebolimento che proviene dalla lavorazione al punzone, quando non si prendano le opportune precauzioni per farlo scomparire. Questi criterî relativi all'importanza del coefficiente di

indebolimento sono esatti e corrispondono alla realtà finchè il collegamento resiste per aderenza, ma se i chiodi per circostanze qualsiasi debbono resistere parzialmente od anche completamente come caviglie messe in opera a freddo senza speciale aderenza fra le parti collegate, allora non reggono più. Oltre al pericolo che il chiodo non aderendo completamente nel foro la costruzione abbia a sbattere sotto l'azione degli sforzi ripetuti e a deperire rapidamente, il coefficiente d'indebolimento riprende tutta la sua importanza e lo sforzo unitario del materiale nelle chiodature aumenta indubbiamente in ragione inversa del coefficiente stesso. Di qui la convenienza di calcolare nelle costruzioni civili la sezione resistente delle membrature deducendo l'area corrispondente ai fori dei chiodi, oppure, cosa equivalente, di stabilire il valore del coefficiente ϵ di indebolimento in modo che nelle sezioni indebolite lo sforzo unitario non superi lo sforzo unitario minimo medio ammesso di più di una determinata frazione, come è stato fatto e si fa ancora da molti costruttori, sebbene tale pratica non appaia consigliabile.

Nelle costruzioni civili ordinarie le condizioni di lavoro sono tali, che permettono e consigliano una distanza fra i chiodi piuttosto forte, non essendovi soggezioni d'aderenza; inoltre le chiodature vengono eseguite in cantieri provvisori, per cui si hanno meno garanzie di esattezza di lavoro che non in officina. Le azioni dinamiche, i carichi straordinari possono produrre sforzi locali molto superiori ai medi ammessi, ed alterare o modificare le condizioni di elasticità e resistenza, l'azione degli agenti atmosferici può diminuire col tempo lo spessore delle lamiere per cui, o al momento della messa in opera, oppure in seguito dopo un esercizio più o meno lungo si può ragionevolmente temere che l'aderenza, se non totalmente scomparsa, sia molto ridotta. In queste condizioni non è possibile per una data costruzione asserire in modo sicuro come resista un collegamento fatto a caldo, sopra tutto dopo un certo tempo dalla messa in opera, quindi per essere ben sicuro della stabilità del medesimo bisogna che, tenute presenti tutte le condizioni e prescrizioni esposte superiormente, esso soddisfi anche alle relazioni che assicurano che è *ugualmente stabile rispetto a tutti i modi possibili di rottura*. Questa condizione si scinde naturalmente in due:

a) Un chiodo deve essere foggiato in modo che esso sia ugualmente stabile rispetto ai vari modi nei quali può rompersi o staccarsi dalla lamiera.

b) Che l'insieme dei chiodi presenti tanta stabilità quanto le sezioni maggiormente indebolite; in altri termini, che l'insieme

del collegamento soddisfi pure alla condizione di essere ugualmente stabile rispetto a tutti i modi di rottura.

Prendiamo in esame un collegamento fra due membrature, e più particolarmente fra due lamiere, fatto con una o più file di chiodi (*Fig. 184^a e 185^a, tav. XXX*) e conveniamo di indicare con:

b e b' le larghezze delle due lamiere

s ed s' gli spessori delle medesime

d il diametro di un chiodo

k il numero di sezioni di taglio presentate da ogni chiodo

N il numero totale di chiodi necessario a stabilire il collegamento

$n(n_1, n_2, \dots n_r, \dots n_m)$ il numero di chiodi posti in una stessa fila trasversale, segnando un indice al piede quando possa interessare di distinguere le varie file

ν il numero delle file trasversali di chiodi che entrano nel collegamento: se n è costante per tutte le file trasversali $\nu = \frac{N}{n}$

e la distanza fra chiodo e chiodo contata fra gli assi dei medesimi

δ la distanza di un foro per chiodo dall'estremo della lamiera

x la distanza dell'asse del chiodo dallo stesso estremo $x = \frac{d}{2} + \delta$

β la distanza di un foro per chiodo dal limite laterale della lamiera

z la distanza fra lo stesso limite e l'asse del chiodo $z = \frac{d}{2} + \beta$

y l'altezza della testa del chiodo in corrispondenza della parete del foro

$\epsilon = \frac{\omega - \omega'}{\omega} = \frac{b - nd}{b}$ il coefficiente di indebolimento

λ la lunghezza di ricoprimento necessaria per mettere in opera in condizioni opportune il numero di chiodi richiesto per la stabilità e resistenza dell'unione.

La prima condizione importa che il chiodo sia ugualmente stabile rispetto a tutti i modi nei quali può rompersi, ora la funzione di un chiodo in un collegamento può cessare (*Fig. 184^a, tav. XXX*):

per strappamento del gambo $\left(\frac{\pi d^2}{4} R \right)$

per asportazione della testa mediante taglio in corrispondenza delle pareti del foro $\left(y \pi d \frac{m}{m+1} R \right)$

per asportazione per taglio della porzione di lamiera compresa fra l'estremo ed il vano del chiodo $\left(2\delta s \frac{m}{m+1} R\right)$

per taglio del gambo del chiodo $\left(\frac{\pi d^2}{4} \frac{m}{m+1} R\right)$

per strappamento della lamiera nella sezione trasversale indebolita dal foro (nel caso di una sola fila di chiodi $2\beta s R$, per n file longitudinali $2n\beta s R$ se la larghezza corrispondente a ciascuna fila è uguale a $2\beta + d$)

per strappamento della lamiera fra il foro e la sua estremità $\delta s \alpha R$ in seguito alla pressione radiale che il gambo del chiodo può produrre entro il foro.

Quindi dovranno essere verificate le relazioni seguenti

$$\frac{\pi d^2}{4} R = \frac{m}{m+1} y \pi d R$$

$$\frac{\pi d^2}{4} \frac{m}{m+1} R = 2\delta s \frac{m}{m+1} R = 2\beta s R.$$

Dalla prima si ricava

$$y = \frac{m+1}{4m} d = \frac{5}{16} d = 0,313$$

e poichè evidentemente la resistenza del metallo si esercita in un punto singolare, sarà prudente, secondo quanto è stato detto più volte, aumentare il risultato almeno nella proporzione del 30 al 40 %, quindi in pratica ordinariamente si fissa almeno

$$y = \begin{cases} 0,45 d \\ 0,50 d \end{cases}$$

Le altre due equazioni danno

$$2\beta s R = \frac{\pi d^2}{4} \frac{m}{m+1} R \quad \beta = \frac{\pi}{8} \frac{m}{m+1} \frac{d}{s} d = \frac{\pi}{10} \frac{d}{s} d$$

$$2\delta s R \frac{m}{m+1} = \frac{\pi d^2}{4} \frac{m}{m+1} R \quad \delta = \frac{\pi}{8} \frac{d}{s} d$$

e poichè in media si può ritenere che sia $\frac{d}{s} = 2$ si ottengono le

due relazioni

$$\beta = \frac{\pi}{5} d = 0,63 d \qquad \delta = \frac{\pi}{4} d = 0,79 d \qquad (\delta = 0,8 d)$$

che convengono in media ai collegamenti ordinari fra lamiere o ferri laminati.

Queste due formole mostrano che ogni chiodo deve essere circondato da una specie di nastro di materia resistente, come è rappresentato nella figura 186^a (*Tav. XXX*), le cui dimensioni β e δ , qualora lo spessore sia costante, sono rispettivamente $\beta = \frac{\pi d^3}{10 s}$

e $\delta = \frac{\pi d^2}{8 s}$, e che converremo di chiamare *nastro di resistenza* del chiodo. Questo risultato può ammettersi nell'interno del collegamento, ma non si può accettare per quei chiodi che sono disposti in vicinanza dell'estremo o dei lati della lamiera, sia per la singolarità di forma e sollecitazione della sezione resistente, sia per l'effetto che può produrre la pressione radiale eventualmente trasmessa dal gambo del bullone. È dunque necessario aumentare la sezione resistente, ossia il valore di δ (poichè s nelle lamiere è costante), e l'effetto dell'ultima causa accennata non può essere valutato che con un'analisi analoga a quella fatta nel numero 35, pagina 325 per la stabilità dei collegamenti a cerniera. Si è visto che l'azione radiale del chiodo entro il vano del foro dà origine a tensioni d'anello, il cui valore massimo può raggiungere molto prossimamente il doppio del valor medio della tensione stessa nel senso della sollecitazione del collegamento, ed accostarsi assai a questo valore in senso normale, e che la formola usuale della resistenza dei materiali non può essere impiegata con speranza di avere un risultato attendibile altrochè moltiplicando il limite dei carichi ammissibile R_a per un coefficiente α di riduzione, che con sufficiente approssimazione deve ritenersi uguale a 0,50 nel primo caso, ed a 0,66 nel secondo. Tenendo conto di queste osservazioni pei chiodi posti in vicinanza dei lati della lamiera, le due formole superiori debbono essere scritte nel modo seguente

$$2 \beta s \cdot \alpha R = \frac{\pi d^2}{4} \frac{m}{m+1} R \qquad \beta = \frac{\pi}{10} \frac{d}{s} \frac{d}{\alpha}$$

$$\delta s \cdot \alpha R = \frac{1}{2} \frac{\pi d^2}{4} \frac{m}{m+1} R \qquad \delta = \frac{\pi}{10} \frac{d}{s} \frac{d}{\alpha}.$$

Riferendoci al caso medio in cui $\frac{d}{s} = 2$ (in cifre tonde)

$$\beta = 0,63 \frac{d}{\alpha} = \frac{0,63}{0,66} d = 1,00 d \quad \delta = \frac{0,63}{\alpha} d = \frac{0,63}{0,50} d = 1,25 d$$

formole che corrispondono esattamente colle regole empiriche date dai costruttori per la messa in opera dei chiodi $x = 1,75 d$, $z = 1,50 d$, infatti

$$x = \frac{d}{2} + \delta = 0,50 d + 1,25 d = 1,75 d$$

$$z = \frac{d}{2} + \beta = 0,50 d + 1,00 d = 1,50 d.$$

L'azione di un chiodo in un collegamento può essere, se non distrutta, per lo meno alterata profondamente quando lungo le pareti del foro la materia subisca uno sforzo eccessivo capace di alterarla e produrvi deformazioni permanenti. Perchè ciò non avvenga dovrà essere soddisfatta la condizione (Vedi Parte II, num. 27, pag. 211)

$$\frac{\pi d^2}{4} \frac{m}{m+1} R_{a_1} = s d R_{a_2} \quad \text{ossia} \quad s = \frac{\pi m}{4(m+1)} \frac{R_{a_1}}{R_{a_2}} d = 0,8 \frac{R_{a_1}}{R_{a_2}} d.$$

Si è già visto che per R_{a_2} si può assumere un valore più forte di R_{a_1} : il Governo austriaco nella circolare relativa alla stabilità delle opere metalliche prescrive $R_{a_2} < 14^{\text{kg}},00$ per millimetro quadrato, quindi la relazione superiore condurrebbe alla conseguenza che il diametro del chiodo dovrebbe essere circa il doppio dello spessore della lamiera o poco più, ed in ogni caso non dovrebbe mai essere superiore al triplo dello spessore anzidetto; ossia condurrebbe alla formola $2s < d < 3s$.

Finalmente si consiglia, ed è cosa razionale, che la perdita di resistenza della lamiera nella sezione indebolita dai fori di una fila di chiodi ($n d s R$) sia uguale o minore della resistenza normale $\left(n \frac{\pi d^2}{4} \frac{m}{m+1} R \right)$ che la predetta fila di chiodi può sviluppare e trasmettere, quindi, uguagliando le due espressioni, si ottiene

$$n d s R < n \frac{\pi d^2}{4} \frac{m}{m+1} R$$

ossia

$$d > \frac{4(m+1)}{m\pi} s = \frac{5}{\pi} s = 1,6 s$$

formola che approssimativamente conduce ancora al rapporto pratico già più volte accennato $1,5 s < d < 2,5 s$.

Come appare da quanto è stato detto fino ad ora, la prima condizione di equilibrio conduce a regole e prescrizioni riguardanti la forma dei chiodi e la loro distribuzione lungo il collegamento; il numero totale N dei chiodi e quindi, tenuto calcolo dei risultati precedenti, le dimensioni effettive del collegamento si ottengono mediante la seconda condizione.

Un collegamento può rompersi

per strappamento delle lamiere nella sezione indebolita

$$T = (b - n d) s R = \varepsilon b s R \quad T = (b' - n d) s' R = \varepsilon b' s' R$$

per taglio di tutte le sezioni di chiodi

$$T = N k \frac{\pi d^2}{4} \frac{m}{m+1} R = n \nu k \frac{\pi d^2}{4} \frac{m}{m+1} R.$$

Tanto in questa, come nelle formole che seguiranno, non si può sostituire N con $n \nu$ e ν con $\frac{N}{n}$ se il numero dei chiodi in ogni fila trasversale non è costante.

Uguagliando le tre espressioni che danno la resistenza nei tre modi di rottura possibile si ottiene

$$T = N k \frac{\pi d^2}{4} \frac{m}{m+1} R = (b - n d) s R = (b' - n d) s' R.$$

Ordinariamente $b = b'$ quindi deve essere in tutti questi casi $s = s'$ e pel calcolo del collegamento rimangono le due equazioni

$$N = \frac{4(m+1)}{m\pi} \frac{T}{k R d^2} = \frac{5}{\pi} \frac{(b - n d) s}{k d^2} = 1,6 \frac{(b - n d) s}{k d^2} \quad (104)$$

$$T = (b - n d) s R = \varepsilon b s R \quad (105).$$

La lunghezza di sovrapposizione delle due lamiere, o pezzi laminati, si ottiene sommando le distanze fra le diverse file trasversali di chiodi ed aggiungendo le distanze δ della prima e dell'ultima fila di chiodi dagli estremi delle lamiere collegate, quindi

$$\lambda = \left(\frac{N}{n} - 1 \right) e + 2\delta + d = (\nu - 1) e + 2\alpha \quad (106)$$

nella quale in condizioni ordinarie e varia fra $3d$ e $6d$, e si può

ritenere che sia in media $\delta = 1,25d$ (e quindi $x = 1,75d$) o poco diverso (non più del 20 %) per maggior garanzia e per tener conto di tutte le eventualità (x varia in media fra $1,5d$ e $2d$).

Nei collegamenti a caldo i chiodi si dispongono in file parallele alla direzione dell'asse delle membrature collegate in modo che essi formino pure un determinato numero ν di file normali all'asse stesso: il numero n poi di chiodi per ogni fila trasversale viene fissato in base al coefficiente ε di indebolimento ammesso,

$$n = \frac{b(1 - \varepsilon)}{d}.$$

Il numero ν delle file trasversali deve sempre essere un numero intero, e se $\frac{N}{n}$ risulta una frazione, si prende come valore il numero intero immediatamente superiore. Colla distribuzione ordinaria per file parallele e normali all'asse delle membrature unite la distanza fra le file trasversali dei chiodi è uguale alla distanza e fra chiodo e chiodo, che, come si è già osservato, varia circa fra $3d$ e $6d$, con maggiore precisione nelle costruzioni civili fra $4d$ e $6d$, e si tiene ordinariamente uguale, o poco diverso da $5d$. Allo scopo di ridurre la lunghezza λ di sovrapposizione delle lamiera, e quindi anche il peso del metallo impiegato, spesso si ricorre alla distribuzione dei chiodi in file disposte a quinconce (*Fig. 187^a, tav. XXXI*), in questo modo la distanza fra fila e fila risulta uguale ad $e' = \frac{e}{\sqrt{2}}$, e quindi

$$\lambda = (\nu - 1) \frac{e}{\sqrt{2}} + 2x = (\nu - 1)e' + 2x \quad (107).$$

SCHWEDLER ha immaginato una specie di diagramma, che può servire assai bene per progettare un collegamento a caldo o verificarne la stabilità. Abbiamo visto (Pag. 353) che ogni chiodo equivale ad un nastro di resistenza, che impegna una porzione delle lamiera congiunte; a parte le osservazioni speciali fatte pei chiodi posti in vicinanza dei lati, che limitano la membratura, un collegamento è quindi stabile se è possibile tracciare nell'interno del medesimo tutti i nastri di resistenza relativi ai singoli chiodi oltre alle liste corrispondenti agli indebolimenti prodotti dai chiodi della prima fila. Se il collegamento è fatto con coprighiunto allora bisogna poter tracciare tutti i nastri di resistenza nel coprighiunto, e fra il coprighiunto e le lamiera, come è indicato nelle figure 188^a, 189^a e 190^a (*Tav. XXXI*).

Quando non si voglia o non si debba tener conto dell'effetto dell'aderenza fra le membrature unite, la disposizione dei chiodi astrattamente più razionale e conveniente è quella rappresentata nelle figure 188^a e 189^a (*Tav. XXXI*) colla quale il numero dei chiodi nelle successive file trasversali va crescendo colla serie dei numeri naturali. Infatti lo sforzo nelle lamiere diminuisce di fila in fila in guisa che l'indebolimento reale rispetto allo sforzo trasmesso corrisponde sempre a quello minimo prodotto da un sol chiodo (*). Questo particolare modo di disporre i chiodi lungo il collegamento si presenta certamente come molto razionale, ed è stato seguito in molte costruzioni, specialmente in Germania ed in Olanda; esso però ha gravi inconvenienti in pratica:

a) Non è sempre realizzabile, sia perchè la disposizione in file di ugual numero di chiodi è imposta da altre condizioni, sia perchè non si dispone di uno spazio sufficiente per allungare in forma di rombo il collegamento.

b) Non è applicabile che per l'unione di due lamiere e cade in difetto od almeno è poco pratico quando si debbono unire lamiere formanti pacchetto.

c) Aumenta il peso della costruzione, e s'aggiungono le difficoltà di taglio e messa in opera ed il consumo di materiale.

In un gran numero di casi questa disposizione dei chiodi non si presta ad un uso facile; non sembra quindi necessario ricorrervi sempre quando è possibile, tanto più che l'unione fatta con chiodi disposti in file trasversali di un ugual numero ciascuna (ortogonali od a quinconce) fino ad ora è sufficientemente giustificata dall'esperienza, ed anche dal ragionamento, quando si tenga conto dell'aderenza prodotta dai chiodi stessi. Si trovano sovente in pratica esempi, nei quali il criterio suesposto è applicato parzialmente facendo crescere successivamente il numero dei chiodi di fila in fila di due, oppure di tre o di quattro.

(*) Nella prima fila trasversale di chiodi lo sforzo nella lamiera è T

$$\text{nella seconda.} \quad T - \frac{\pi d^2}{4} \frac{m}{m+1} R = T - \frac{T}{N} = T \left(1 - \frac{1}{N}\right)$$

$$\text{nella terza.} \quad T - 3 \frac{\pi d^2}{4} \frac{m}{m+1} R = T - 3 \frac{T}{N} = T \left(1 - \frac{3}{N}\right)$$

.....

L'area resistente nella prima fila è $(b-d)s$

" " seconda " $(b-2d)s$

" " terza " $(b-3d)s$

.....

In principio di questo numero abbiamo classificato e descritto i diversi modi, coi quali possono essere unite con chiodi o bulloni varie membrature, più particolarmente membrature ottenute al laminatoio e lamiere, propriamente dette. Le formole superiori permettono di determinare immediatamente il numero di chiodi necessario e la lunghezza λ in cui le parti si debbono sovrapporre, oppure quella l che debbono avere i coprighiunti:

a) *Collegamento di una lamiera per semplice sovrapposizione* (Fig. 169^a, tav. XXX)

$$k = 1, \quad \varepsilon = \frac{b - n d}{b}, \quad b = b' \quad \text{ed} \quad s = s'$$

quindi

$$N = 1,6 \frac{(b - n d) s}{d^2} \quad (108)$$

$$\lambda = 2 \delta + d + \left(\frac{N}{n} - 1 \right) e = (\nu - 1) e + 2 x \quad (109).$$

Se la disposizione dei chiodi si fa a quinconce tanto in questa formola, come nelle seguenti analoghe, invece di e si dovrà porre

$$e' = \frac{e}{\sqrt{2}}, \quad \text{ed invece di } \lambda \text{ e di } l, \lambda' \text{ ed } l'$$

$$\lambda' = \left(\frac{N}{n} - 1 \right) e' + 2 x = (\nu - 1) e' + 2 x \quad (110).$$

b) *Collegamento di una lamiera per coprighiunto semplice* (Fig. 171^a, tav. XXX). Siano b'' ed s'' la larghezza e lo spessore della lamiera, che serve da coprighiunto, ed l la sua lunghezza: per la natura del collegamento $k = 1$, e supponendo dato $\varepsilon = \frac{(b - n d)}{b}$ e $b = b' = b''$, allora $s = s' = s''$

$$N = 1,6 \frac{(b - n d) s}{d^2} \quad (111)$$

$$l = 2 \lambda = 2 \{ (\nu - 1) e + 2 x \} \quad (112)$$

$$l' = 2 \lambda' = 2 \{ (\nu - 1) e' + 2 x \} \quad (113).$$

c) *Collegamento di una lamiera con coprighiunto doppio*. Detta l la lunghezza del coprighiunto, b'' ed s'' rispettivamente la sua larghezza ed il suo spessore, per la natura stessa del collegamento (Fig. 172^a, tav. XXX) $k = 2$, e supponendo, come avviene quasi

sempre in pratica, $b = b' = b''$ e noto il valore di $\varepsilon = \frac{b - n d}{b}$, le formole generali danno

$$s'' = \frac{s}{2} \quad (114)$$

$$N = 0,8 \frac{(b - n d) s}{d^2} \quad (115)$$

$$l = 2\lambda = 2 \{ (\nu - 1) e + 2 \alpha \} \quad (116)$$

$$l' = 2\lambda' = 2 \{ (\nu - 1) e' + 2 \alpha \} \quad (117).$$

d) *Collegamento di una lamiera in un pacchetto o fascio formato di più lamiere.*

Quando si ha un pacco di pezzi laminati, in causa dell'impossibilità pratica di fare lamiere di lunghezza superiore ad un certo limite, è necessario stabilire fra essi dei collegamenti. L'unione per semplice sovrapposizione in questo caso non può essere impiegata utilmente perchè obbligherebbe a ripiegare le lamiere, creando un punto singolare di difficile esecuzione, quindi si ricorre ordinariamente all'unione con coprighiunto semplice o doppio. È importante osservare che in un pacco di lamiere l'effetto dell'eccentricità prodotta dal coprighiunto semplice, che è tanto dannosa nell'unione di due lamiere, si fa sentire molto meno, e si può dire che spesso è quasi completamente eliminato. Inoltre i pacchi di lamiere costituiscono in genere le piattabande o nuclei resistenti delle grandi travi, quindi da un lato esiste quasi sempre una linea d'attacco con altre membrature. Per queste ragioni il coprighiunto semplice è molto usato nei collegamenti fra le lamiere riunite in fascio; qualche volta si usa mettere un secondo coprighiunto in corrispondenza dell'unione della sola lamiera estrema, ma più che assicurare la resistenza, già garantita dal primo, esso ha lo scopo di coprire il giunto di quest'ultima e ripararlo dalle azioni degradatrici esterne: naturalmente esso concorre anche ad impedire o ridurre l'azione dell'eccentricità. Le equazioni, che assicurano la stabilità del collegamento, si ottengono come per l'unione di due sole lamiere scrivendo le condizioni perchè esso sia ugualmente stabile rispetto a tutti i modi di rottura possibile, cioè:

Rottura per strappamento di tutte le lamiere nella sezione indebolita;

Rottura di tutte le lamiere meno una e del coprighiunto (o dei coprighiunti) nella sezione indebolita;

Rottura per taglio di tutti i chiodi.

Il numero k delle sezioni di taglio dei chiodi nel collegamento multiplo per coprighiunto semplice è $k=2$ (*Fig. 176^a, tav. XXX*), se invece il coprighiunto è doppio $k=3$, supponendo il modo di rottura indicato nella figura 191^a (*Tav. XXXI*). Ma poichè la rottura può avvenire anche nell'altra maniera segnata nella stessa figura, in cui ogni chiodo presenta due sole sezioni di taglio, così sarà opportuno tenere per entrambi i modi di collegamento $k=2$.

Sia t il numero delle lamiere unite in fascio o pacchetto, e supponiamo che abbiano tutte ugual larghezza b ed uguale spessore s , supponiamo inoltre che il coprighiunto, semplice o doppio che sia, abbia la stessa larghezza b e lo spessore s' . La condizione di uguale resistenza rispetto ai tre modi di rottura sopra indicati conduce alle equazioni seguenti:

Pel collegamento a coprighiunto semplice

$$\begin{aligned} t(b - nd)s &= (t - 1)(b - nd)s + (b - nd)s' = \\ &= (t - 1)(b - nd)s + kN \frac{\pi d^2}{4} \frac{m}{m+1} \end{aligned}$$

pel collegamento a doppio coprighiunto

$$\begin{aligned} t(b - nd)s &= (t - 1)(b - nd)s + 2(b - nd)s' = \\ &= (t - 1)(b - nd)s + kN \frac{\pi d^2}{4} \frac{m}{m+1}. \end{aligned}$$

Se si toglie da queste due serie di equazioni il termine comune $(t - 1)(b - nd)s$ si ottiene:

Nel primo caso

$$(b - nd)s = (b - nd)s' = kN \frac{\pi d^2}{4} \frac{m}{m+1}$$

nel secondo caso

$$(b - nd)s = 2(b - nd)s' = kN \frac{\pi d^2}{4} \frac{m}{m+1}.$$

Quindi se si fa nei due casi $k=2$ e si fissa il valore del coefficiente di indebolimento $\varepsilon = \frac{b - nd}{b}$ a seconda delle circostanze e dei dati della questione:

Pel collegamento a coprighiunto semplice

$$s = s' \quad (118)$$

$$N = 4 \frac{m+1}{k m \pi} \frac{(b-n d) s}{d^2} = 0,8 \frac{(b-n d) s}{d^2} = 0,8 \frac{\varepsilon b s}{d^2} \quad (119).$$

pel collegamento a doppio coprighiunto

$$s' = \frac{s}{2} \quad (120)$$

$$N = 4 \frac{m+1}{k m \pi} \frac{(b-n d) s}{d^2} = 0,8 \frac{(b-n d) s}{d^2} = 0,8 \frac{\varepsilon b s}{d^2} \quad (121).$$

Per comodità di esecuzione e per risparmio di metallo le unioni delle lamiere si dispongono ordinariamente in serie a gradinata, in tal modo N chiodi possono servire tanto per assicurare il giunto di sinistra come quello di destra, e la lunghezza complessiva del coprighiunto riesce ridotta di molto, cioè di tante volte il valore di λ quante sono le lamiere formanti il pacchetto, meno una. Se con l si indica la lunghezza totale del coprighiunto e con t il numero delle lamiere, se si fanno le unioni indipendenti si hanno tanti coprighiunti separati quante sono le lamiere per ciascuno dei quali

$$\frac{l}{t} = 2 \{ (\nu - 1) e + 2 x \}$$

se invece il collegamento è fatto a gradinata

$$l = (t + 1) \{ (\nu - 1) e + 2 x \} \quad (122)$$

per la distribuzione a quinconce in luogo di e bisognerebbe mettere

$$e' = e \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$l' = (t + 1) \{ (\nu - 1) e' + 2 x \} \quad (123).$$

Il numero ν di file di chiodi, e le altre parti tutte del collegamento son calcolate od assunte in base alle stesse formole ed agli stessi criteri indicati parlando delle unioni fra due sole lamiere.

37. Travature metalliche composte e collegamenti nelle medesime. — Nella Parte I al numero 65 abbiamo discusso il modo di distribuzione della materia resistente più opportuno per le sezioni tras-

versali di una travatura soggetta a flessione, e nel numero 75 abbiamo fatto vedere la convenienza di dare alle dette sezioni trasversali la forma di due nuclei o corde resistenti ω ed ω' rese solidali mediante una parete continua, oppure con un sistema di barre formanti una parete discontinua, reticolata od a graticcio. Ad eccezione delle piccole travi di uso corrente nella costruzione di solai, tettoie, ecc., che si ottengono in un sol pezzo al laminatoio, i due nuclei ω ed ω' , nelle travi resistenti a flessione composte di ferri laminati, per ragioni costruttive sono formati in genere da lamiere sovrapposte direttamente e riunite solidamente fra loro, più raramente da pezzi laminati aventi forme speciali (ferri ad angolo, a C, a T, a doppio T, ecc.) resi solidali mediante chiodature opportunamente disposte. L'uso prevalente delle lamiere nella formazione dei nuclei proviene dal fatto che esse si prestano meglio dei ferri speciali (ferri sagomati) al lavoro di preparazione, taglio e messa in opera: i nuclei ω quando sono composti con lamiere si dicono anche *piattabande*. Per estensione lo stesso nome s'impiega spesso anche quando gli elementi componenti hanno la sezione di ferri ad angolo, a T, ecc., qualche volta le anzidette membrature sono indicate anche col nome di *briglie* o di *nervature di contorno*. La parete verticale di collegamento, quando è continua, è formata da una lamiera riunita ai nuclei mediante ferri ad angolo nel modo indicato nella figura 192^a

Tav. XXXI) oppure per sovrapposizione diretta se le due corde presentano una linea o nervatura corrente d'attacco (Fig. 193^a, tav. XXXI). Quando invece la parete verticale è discontinua, ed è questo il caso generale nelle travi di media e grande altezza, essa è composta di sistemi di barre inclinate in senso diverso colle estremità fissate alle due piattabande. Qualche volta nelle piccole travi le barre sono inchiodate ad una linea corrente d'attacco, più spesso sono intercluse fra le ali dei due ferri ad angolo correnti, e ciò avviene quando un sol chiodo è sufficiente a stabilire l'unione; ma nelle travi di media e grande altezza per l'attacco delle barre inclinate occorre usualmente più di un chiodo, ed in questo caso si suole intercludere fra i due ferri ad angolo una lamiera, detta *anima verticale*, abbastanza sporgente perchè alla medesima possano essere attaccate, per sovrapposizione semplice, le barre di collegamento (Fig. 194^a, tav. XXXI). Se le membrature, che compongono la parete verticale, hanno gli estremi successivamente sovrapposti od adiacenti la parete dicesi *reticolata* aggiungendo la qualifica di *semplice*, *doppia*, *tripla*, ecc., a seconda del numero di punti, in cui una barra è intersecata da quelle aventi inclinazione diversa. Questo numero è necessariamente uguale al

doppio del numero n massimo di punti d'incontro di due barre diversamente inclinate o *nodi*, che si possono trovare sopra una stessa verticale, avendo l'avvertenza di considerare come mezzi nodi i punti d'incontro, che cadono sopra le linee d'attacco corrente colle piattabande. Gli spazi compresi fra le barre si dicono *maglie*, per cui si distinguono i reticolati a grandi e piccole maglie: se il reticolato è molto fitto allora prende comunemente il nome di *graticcio*, e $2n$ dicesi il numero di molteplicità del reticolato o del graticcio.

Se le membrature interne, che costituiscono le pareti di collegamento, sono tutte inclinate all'asse della trave, questa dicesi *triangolata* (*Fig. 195^a, tav. XXXI*) aggiungendo la qualifica di *semplice*, *doppia*, *tripla*, ecc., a seconda del grado di molteplicità, oppure di *simmetrica* o *dissimmetrica* secondo che i due sistemi di barre hanno (rispetto all'asse e nei due sensi) uguale inclinazione oppure inclinazione diversa. Se invece uno dei sistemi di barre è normale all'asse della trave (*Fig. 196^a, tav. XXXI*) questa dicesi *quadrangolata*, le barre verticali prendono il nome di *montanti* e si riserva quello di *saette* od anche di *diagonali* per le barre inclinate. Se nello spazio quadrangolato compreso fra due montanti esiste una sola saetta la trave prende anche il nome di *quadrangolata dissimmetrica*, od a *diagonale unica*, se invece esistono due saette dirette secondo le diagonali del quadrangolo la trave quadrangolata si dice a *croce* oppure a *doppia diagonale* (*) od anche *à contro diagonale* dipendentemente dall'attitudine delle medesime a resistere tanto a tensione quanto a compressione (sezione a media o grande rigidità, Parte II, pag. 255) oppure alla sola tensione (sezione a piccola rigidità). La parete di collegamento formata da sistemi triangolati multipli prende il nome di *traliccio* o di *parete a traliccio*, più particolarmente con questa parola si indicano i sistemi formati con barre disposte simmetricamente rispetto all'asse e rispetto ad una verticale passante per un nodo; quando questa condizione non si verifica il traliccio dicesi dissimmetrico. In base a questa definizione un traliccio semplice o di prim'ordine corrisponde ad un sistema triangolato doppio, un traliccio doppio o di second'ordine (*Fig. 197^a, tav. XXXI*) ad un sistema triangolato quadruplo, ecc., e così di seguito in guisa che il grado di molteplicità del sistema è sempre uguale al doppio del numero d'ordine del traliccio: infatti un traliccio semplice non è altro che un sistema triangolato doppio coi nodi disposti

(*) I due generi di travatura si distinguono anche coi nomi *monoquadrangolata* (a diagonale unica), *biquadrangolata* (a doppia diagonale).

in modo simmetrico, rispetto all'asse longitudinale della trave. Se nella parete di collegamento oltre alle barre inclinate si riscontrano anche delle membrature normali all'asse della travatura allora dicesi che la parete è a *traliccio con montanti*. Un sistema quadrangolato multiplo assomiglia spesso nella sua forma generale ad un traliccio con montanti, ma non coincide sempre con esso; nel primo il numero delle membrature normali all'asse della trave è sempre uguale a quello delle barre (diagonali) inclinate in un determinato senso, mentre invece questa circostanza non si verifica, o può non verificarsi, nel secondo (*Fig. 198^a, tav. XXXI*). Infine a caratterizzare completamente il sistema formante la parete di collegamento fra i due nuclei resistenti ω ed ω_1 , si aggiunge il grado di molteplicità del reticolato, oppure il numero d'ordine del traliccio. In causa delle cose esposte e per la natura delle definizioni date è evidente che gli schemi geometrici delle travature a parete reticolata possono sempre essere riguardati come figure generate sovrapponendo l'uno all'altro gli schemi geometrici di tante travature triangolate semplici (*Fig. 197^a e 198^a, tav. XXXI*) quanto è il grado di molteplicità del sistema, limitate tutte dallo stesso contorno e coi nodi disposti diversamente in ciascuna figura elementare.

Le condizioni di produzione del ferro saldato e di fusione (*).

(*) Ad indicare lo stesso prodotto ferroso non sempre si usa attualmente dagli scrittori e dai tecnici la medesima parola in causa dei cambiamenti che i processi metallurgici moderni hanno portato nella fabbricazione del ferro. Dopo la scoperta dei metodi di BESSEMER e di MARTIN e SIEMENS, JORDAN propose di chiamare acciaio qualsiasi prodotto ferroso ottenuto per via di fusione. Il congresso metallurgico di Filadelfia (1876) esaminando la convenienza di avere una nomenclatura uniforme per esprimere i vari prodotti siderurgici malleabili propose di indicare col nome di ferro il metallo incapace di prendere sensibilmente la tempra, sia che esso sia stato ottenuto per agglutinazione di masse pastose (forno a *pudler*), oppure che sia stato prodotto mediante fusione (processo BESSEMER, MARTIN e SIEMENS) e col nome d'acciaio il metallo capace di prendere la tempra, qualunque sia il modo col quale esso possa essere stato ottenuto; i due diversi mezzi di produzione, ossia l'origine del metallo dovevano essere specificati ordinatamente coll'aggiunta delle parole *saldato* oppure *fuso* — ferro saldato (*Schweiseseisen*), ferro di fusione (*Flusseisen*), acciaio saldato (*Schweisstahl*), acciaio di fusione (*Flussstahl*). — Questa classificazione ha un punto debole, che si manifesta nella parola *sensibilmente*, cioè essa manca di un carattere ben definito e preciso per distinguere fra loro i prodotti siderurgici; conviene poi aggiungere che ricerche moderne sembrerebbero dimostrare che tutti i prodotti ferrosi in condizioni favorevoli, cioè per effetto di un salto rapido ed abbastanza notevole di temperatura possono prendere la tempra, ed i lavori di OSMOND e WERTH, di MARION HOWE, ecc., mettono in chiaro, in modo plausibile, la ragione teorica

(ferro omogeneo, acciaio dolce, *Flusseisen*) non permettono che le lamiere ed i ferri laminati, che entrano nella composizione di una trave di medie o grandi dimensioni, siano tutti formati di un sol pezzo venuto dal laminatoio. Il peso del pacchetto o del

di questo fatto. Il signor WERTH, capo del Laboratorio d'assaggio degli acciai al Creusot, immergendo delle barre scaldate al color rosso ciliegia nell'acqua ghiacciata mantenuta a C. — 15 ha ottenuto i risultati seguenti:

TEMPERATURA AL GHIACCIO DEI METALLI							OSSERVAZIONI	
INDICAZIONI	COMPOSIZIONE					limite di rottura alla tensione	allungamento di rottura 0/0	STRUTTURA nervosa
	C	Si	Mn	S	Ph			
Ferro di fusione (acciaio dolce)	0,16	0,09	0,38	0,02	0,05	45	30	stato naturale
						117	10,5	temperato
Ferro saldato	0,12	0,06	0,09	0,015	0,02	44	27	stato naturale
						98,5	4	temperato

Sebbene molti scrittori abbiano seguito la nomenclatura stabilita a Filadelfia, tuttavia un gran numero di costruttori preferisce attenersi alla proposta del JORDAN e chiamare acciaio il ferro dolce ottenuto per via di fusione, e questo stesso criterio è molto seguito nella letteratura tecnica francese; per distinguere poi le varie qualità di acciaio (metallo ottenuto per via di fusione) si aggiungono le parole: dolce, semidolce, semiduro, duro, ecc. Nelle costruzioni si impiegano sempre prodotti siderurgici dolci, quindi nell'uso le due parole ferro ed acciaio servono assai bene per indicare l'origine del prodotto, cioè se è stato ottenuto al forno a *pudler*... oppure coi processi BESSEMER, THOMAS, MARTIN... e si comprende facilmente che in tale senso siano impiegate dai costruttori. Non è il caso di entrare qui nel merito della questione, per l'esame della quale ci riportiamo alle opere speciali (KNAB, *Metallurgia*, RÉSAL, Opera citata, MARION HOWE, *Metallurgia dell'acciaio*, ecc.), interessava soltanto richiamarla per dar ragione della doppia annotazione usata nel testo e per avere presente che attualmente nelle applicazioni della scienza delle costruzioni le parole: ferro di fusione, ferro omogeneo, acciaio dolce od anche semplicemente acciaio, sono impiegate per indicare uno stesso prodotto, cioè un metallo dolce ottenuto per via di fusione: al congresso ferroviario del 1889 fu proposto di usare pel ferro di fusione l'indicazione *fer fondu* aggiungendo fra parentesi il nome tedesco *Flusseisen*. Certamente sarebbe desiderabile, tanto pei metallurgisti che pei costruttori, una nomenclatura più precisa, ma probabilmente ciò non potrà avvenire finchè non sia esattamente conosciuta la natura dei prodotti ferrosi e l'importanza delle sostanze estranee, che vi entrano mescolate o combinate; intanto si supplisce accennando al grado di dolcezza e precisando il coefficiente di resistenza alla rottura, l'allungamento

massello da riscaldare al forno ed in seguito da laminare è limitato dalle esigenze di manovra e di lavorazione. Si possono ottenere

proporzionale, la strizione, il coefficiente di qualità, e varie prove che garantiscono la malleabilità e perfetta saldabilità.

Come appendice a quanto si è detto in questa nota riportiamo un quadro, che corrisponde alla produzione di una grande officina ed alle distinzioni che si fanno alla medesima, coll'indicazione dei nomi impiegati, e degli usi ai

SCALA di durezza	MODO di fabbricazione	COMPOSIZIONE ELEMENTARE					GRADO di tempera (all'olio)	STATO	LIMITE di elasticità in Kg. per mmq. di sezione	LIMITE di rottura in Kg. per mmq. di sezione	ALLUNGAMENTO di rottura per cento misurata sopra 0m,200	Rapporto di strizione $\frac{a'}{a} = \epsilon$ (a' area primitiva) (a' area ristretta)	I M P I E G O
		Carbonio	Silicio	Manganese	Zolfo	Fosforo							
Durissimo	MARTIN (acido)	0,60	0,30	0,70	0,030	0,055	Si tempera fortemente	Naturale Temperato	48 — 43 90 — 80	90 — 80 140 — 120	6 — 11 2 — 5	0,84 — 0,79 0,98 — 0,93	Molle, matrici, stampi per inchiodare, seghe, pezzi per filature, punzoni, lime, coltelli per bilancie, articoli di coltelleria.
Duro	—	0,50	0,25	0,60	0,030	0,055	Si tempera benissimo	Naturale Temperato	43 — 38 80 — 68	80 — 70 120 — 105	11 — 15 5 — 7	0,79 — 0,73 0,93 — 0,87	Molle, armi, cannoni, mazze, martelli, rotaie, cerchioni, zappe, magli, vomeri per aratro, stampi.
Semiduro	MARTIN (acido)	0,40	0,20	0,45	0,030	0,055	Si tempera bene	Naturale Temperato	38 — 35 68 — 60	70 — 60 105 — 90	15 — 19 7 — 11	0,73 — 0,62 0,87 — 0,72	Rotaie e stecche, armi, cannoni, pale, zappe, vanghe, foderi di sciabola, assi, guide a strisciamento, chiavette, pestelli.
Semidolce	—	0,35	0,15	0,35	0,030	0,055	Si tempera poco	Naturale Temperato	35 — 33 60 — 50	60 — 50 90 — 70	19 — 23 11 — 16	0,62 — 0,53 0,72 — 0,58	Pezzi per macchine e meccanismi, secchie per draghe, assi per vagoni, lamiera di chiusura, seghe a caldo, striglie, forche, viti, fusti per lenti, ecc.
Dolce	MARTIN (acido)	0,28	0,100	0,25	0,030	0,055	Non si tempera o solo appena	Naturale	33 — 29	50 — 45	23 — 25	0,53 — 0,46	Lamiere per costruzione di bastimenti e di ponti, ferri sagomati, affusti, bulloni, viti per corazze, costruzioni usuali d'ogni specie.
	MARTIN (basico) BESSEMER (basico) (THOMAS)	0,19 0,16	0,030 tracce	0,55 0,35	0,025 0,025	0,045 0,045		Temperato	50 — 40	70 — 55	16 — 19	0,58 — 0,50	
Dolcissimo	—	—	—	—	—	—	Non si tempera	Naturale	29 — 26	45 — 40	25 — 28	0,46 — 0,38	Lamiere e ferri sagomati per caldaie, chiodi per caldaie, tubi, pezzi cementati, astucci senza saldatura, lamiera per pezzi stirati al martello, obici a mitraglia, costruzioni metalliche, chiodature.
								Temperato	40 — 34	55 — 48	19 — 22	0,50 — 0,40	
Extra-dolce	MARTIN (basico) BESSEMER (basico) (THOMAS)	0,14 0,13	0,03 tracce	0,45 0,30	0,02 0,02	0,025 0,030	Non si tempera	Naturale	29 — 26	40 — 35	28 — 32	0,38 — 0,31	Serve per lamiere sottili e grosse da caldaie od altro di qualità superiore, per pezzi lavorati e stirati col martello. Sostituisce il ferro di Svezia, serve per chiodi da cavallo, per buone chiodature a caldo, ecc.
		Temperato	34 — 30	48 — 40	22 — 23	0,40 — 0,32							

dimensioni eccezionali mediante disposizioni speciali e non accordando molta importanza al fattore rendimento economico, quando

quali può essere destinato il materiale prodotto. Questo quadro è estratto dall'Opera *Constructions métalliques, élasticité et résistance des matériaux - Fonte, fer et acier*, par JEAN RÉSAL (Parigi, 1892). Veggasi anche KNAB, Opera citata, MARION HOWE, Opera citata.

si debbano raggiungere scopi particolari, ma una tale produzione non può fornire materia pel lavoro quotidiano di un ordinario stabilimento metallurgico. Gli ingegneri distinguono le lamiere ed i pezzi laminati secondo la qualità, e sovente nel linguaggio ordinario anche secondo lo spessore, la larghezza e le dimensioni in genere. La qualità del ferro (ferro saldato) è spesso indicata dai metallurgisti con numeri progressivi corrispondenti all'aumentare delle buone qualità del metallo rispetto alla lavorazione (*) od anche, ed è più particolarmente il caso del ferro di fusione (ferro

(*) Come esempio riportiamo il quadro seguente estratto dall'Opera citata di

QUALITÀ	COMPOSIZIONE ELEMENTARE					RESISTENZA ALLA TRAZIONE Lamiere: spessore medio da 5 a 20 millimetri			
	C	Si	Mn	S	Pb	SENSO	Limite di elasticità	Limite di rottura	Allungamento di rottura 0/0 misurato sopra 0 ^m ,200
Comune o N. 2 (**)	0,08	0,21	0,08	0,04	0,30	Longitudinale Trasversale	20 17	32 20	6 3,5
Ordinario o N. 3	0,08	0,20	0,09	0,026	0,22	Longitudinale Trasversale	21 18	33 30	9 5
Forte o N. 4	0,11	0,20	0,10	0,015	0,16	Longitudinale Trasversale	21,5 19	33,5 31	13 8
Superiore o N. 5	—	—	—	—	—	Longitudinale Trasversale	22 20	34 32	16 12
Fino o N. 6	0,12	0,14	0,09	0,012	0,105	Longitudinale Trasversale	3 21	35 32	18 14
Soprafino o N. 7	0,15	0,10	0,078	0,01	0,053	Longitudinale Trasversale	24 22	36 34	21 16

(**) Il numero 1 non esiste in commercio, esso corrisponderebbe al ferro di prima lavorazione (*ébauché*).

omogeneo, *Flusseisen*), aggiungendo le indicazioni extra-dolce, dolcissimo, dolce, semidolce, semiduro, ecc., dipendentemente dal fatto che il metallo si presti più o meno ad essere ripiegato a freddo, a saldarsi con se stesso ed è più o meno refrattario alla tempra (*). Quando si vuole precisare maggiormente la qualità del materiale, come avviene spesso per ragioni di costruzione, si aggiunge l'indicazione del valore del carico unitario di rottura e dell'allungamento proporzionale corrispondente misurato sopra un determinato campione tipo (in generale una barretta a sezione

JEAN RÉSAI, *Constructions* ecc. Veggasi KNAB e MARION HOWE, Opere citate.

DUTTILITÀ ferri piatti e sagomati a T, U, C, L, . . .		IMPIEGO
Limite di rottura	Allungamento di rottura per 0/0	
34	8	Le lamiere di questa qualità non debbono subire che una semplice fucinatura e sforzi statici. Serve per ferri comuni da fabbro, caldaie comuni del commercio, serbatoi, solai, tettoie, ponti, ferri sagomati, ecc.
35	12	Qualità buona, serve per ferri da cavallo, ferri sagomati, lavori da fabbro, ponti metallici, ecc., può sopportare un leggero stiramento al martello.
36	15	Qualità superiore; lavori da fabbro di qualità superiore, chiodi di buona qualità, lamiere per caldaie, ecc.
—	—	Lamiere per caldaie ad alta pressione, può essere stirata al martello.
—	—	Serve per macchine, aste per distribuzione, bielle, catene, chiodi per macchine, lamiere per locomotive, focolari, tubi, ecc.
—	—	Serve per bielle, tubi, aste di stantuffi, assi dritti ed a gomito, per pezzi stirati al martello, per pezzi tormentati da grandi sforzi, ecc.

(*) Veggasi come esempio il quadro che termina la nota alla pagina 364 relativa alla distinzione fra ferro ed acciaio.

circolare della lunghezza di metri 0,20 e del diametro di metri (0,025). Qualcuno propone anche di specificare l'allungamento di strizione ed il coefficiente di qualità, che secondo TETMAYER dovrebbe ritenersi espresso dal prodotto dello sforzo unitario per l'allungamento subito dal metallo (*).

Per distinguere le lamiere dipendentemente dalle loro dimensioni trasversali si impiegano spesso le parole piccole, mezzane e grandi, od altre equivalenti; per il loro uso però non si possono assegnare limiti precisi poichè il loro significato nel linguaggio ordinario si modifica secondo il genere e l'importanza della costruzione. In via di largo criterio si può ritenere che per travi a media o grande altezza, una lamiera sia detta sottile, mezzana o grossa, secondo che il suo spessore è inferiore a millimetri 8, compreso fra millimetri 8 e millimetri 12, oppure superiore a millimetri 12, e che essa sia ritenuta di piccola, media o grande larghezza secondo che questa dimensione sia inferiore a metri 0,40, compresa fra metri 0,40 e metri 0,70, o superiore a metri 0,70. Difficilmente si impiegano lamiere il cui spessore sia superiore a millimetri 15 a meno che non si tratti di membrature che abbiano una piccola larghezza, e così pure si usano difficilmente lamiere che eccedano in larghezza metri 1,200: in vicinanza dei limiti estremi si qualificano spesso le membrature laminate come molto grosse o molto sottili, ovvero molto larghe o molto strette. Per le costruzioni di minore importanza e per quelle, nelle quali

(*) In seguito a vari disastri accaduti ed allo scopo di garantire nelle costruzioni un determinato grado di sicurezza si è manifestato nelle varie nazioni un movimento diretto a fornire ufficialmente agli ingegneri ed ai costruttori prescrizioni precise relativamente alla qualità dei materiali da impiegare nelle costruzioni, alle garanzie ed all'indice di stabilità che debbono essere richiesti nei vari casi, ed alle prove che debbono subire i materiali da mettere in opera. In Italia abbiamo il Capitolato speciale di appalto per le travate metalliche occorrenti nella costruzione delle ferrovie complementari approvato con Decreto ministeriale in data 28 settembre 1888. Per altro tale Capitolato è stato riconosciuto incompleto, ed infatti nel principio del 1892 il Ministro dei lavori pubblici ha nominato una Commissione coll'incarico di formulare il nuovo Regolamento per le costruzioni metalliche; fino ad ora (dicembre 1894) la Commissione non ha ancora riferito. In Francia vigono le prescrizioni contenute nella Circolare 29 agosto 1891, in Austria-Ungheria quelle della Circolare ministeriale 15 settembre 1887, in Russia quelle della Circolare 18 luglio 1875. Finalmente in Germania si hanno le prescrizioni concordate tra l'Associazione di ingegneri ed architetti e l'Associazione degli industriali nel 1886, nelle Ferrovie badesi sono in vigore le istruzioni compilate dal Professore ENGESSER nel 1884.

non entrano che travi di piccola altezza (inferiori ad 1 metro circa), le stesse denominazioni nel linguaggio ordinario hanno comunemente un valore più ristretto, in guisa che i limiti corrispondenti alle singole distinzioni risulterebbero tutti alquanto abbassati; uno o due millimetri per gli spessori, uno o due decimetri per le larghezze; ma, come si è già avvertito, non è possibile, e, si può anche aggiungere, neppure utile fissare limiti precisi. Quanto alla lunghezza delle lamiere e pezzi laminati, non è possibile dare indicazioni molto precise, poichè essa dipende dalle condizioni di fabbricazione, di trasporto al cantiere di montatura e dai mezzi disponibili per la messa in opera, nonchè dalle loro dimensioni trasversali. Nell'intenzione che servano unicamente come criterî generali crediamo possa essere utile riportare le indicazioni seguenti. I ferri piatti della larghezza variabile fra metri 0,18 e metri 0,70 ordinariamente vengono forniti dai laminatoi con lunghezze di metri 8,00 a metri 10,00 senza aumento sul prezzo ordinario del metallo e sono anche adoperati entro questi limiti di lunghezza. Se però il trasporto a piè d'opera è difficile, oppure se nel cantiere di montatura non si dispone di mezzi sufficienti per il sollevamento dei pezzi pesanti, allora la lunghezza massima dei pezzi laminati può venir limitata, e si limita effettivamente a sette od a sei metri. Si può quindi dire, in via affatto generale, che la lunghezza delle lamiere aventi le larghezze sopracennate vengono determinate in ogni caso speciale tenendo conto dei criterî esposti e cercando, per quanto è possibile, di avvicinarsi a metri 8. Per le lamiere aventi una larghezza compresa fra metri 0,70 e metri 1,20 si usano lunghezze minori, ordinariamente conviene che essa sia limitata fra metri 6,00 e metri 7,00 secondo la potenza del laminatoio, poichè attualmente (1894) parecchi fra questi non possono o non vogliono laminare pezzi di peso superiore a Kg. 700 senza speciali compensi.

Per ciò che riguarda i chiodi, d'ordinario ogni officina stabilisce una serie di diametri normali differenti di circa due o tre millimetri affinchè essi possano essere facilmente distinti fra loro, ed in ogni costruzione l'officina stessa cerca di unificare il più che sia possibile i diametri dei chiodi e di ridurli a pochi tipi per facilità di lavorazione, e sopra tutto per evitare gli errori di foratura.

In una travatura composta nel modo indicato superiormente per assicurare la solidarietà delle varie parti occorrono molti collegamenti. Ordinariamente si distinguono quelli che sono imposti dal fatto che le dimensioni delle parti componenti non possono superare certi limiti determinati, e sono detti *collegamenti di*

interruzione, e quelli che stabiliscono l'unione fra le parti elementari componenti una membratura di una trave, *collegamenti d'aderenza* o *d'adesione*, oppure l'unione di una trave, o di una membratura di una trave, con un'altra, *collegamenti d'attacco*. Nella prima categoria di collegamenti si sogliono distinguere tre casi:

- a) Collegamenti per interruzione della parete verticale;
- b) Collegamenti per interruzione delle lamiere nelle piattabande, oppure nelle membrature della parete reticolata;
- c) Collegamenti per interruzione nei ferri ad angolo.

Il primo collegamento si fa d'ordinario a coprighiunto doppio (*Fig. 199^a, tav. XXXI*) perchè la lamiera interrotta è accessibile in genere dalle due parti, e perchè tale unione, come si è già visto, è più perfetta e ripara completamente il giunto. È raro il caso che si debba ricorrere al collegamento per semplice coprighiunto perchè la parete non sia libera dai due lati; l'unione poi per semplice sovrapposizione non potrebbe essere consigliata in causa della necessità, che si presenterebbe, di ripiegare la lamiera. Il numero N di chiodi necessario per stabilire l'unione dovrebbe essere calcolato colle formole (Vedi num. 36, pag. 358 e 359)

$$N = 0,8 \frac{(b - n d) s}{d^2} \quad \text{oppure} \quad N = 1,6 \frac{(b - n d) s}{d^2}$$

a seconda che si impiega un coprighiunto doppio o semplice; tuttavia in questo caso spesso si impiega un numero N_2 di chiodi molto minore. La parete verticale resiste prevalentemente allo sforzo di taglio F (Parte I, num. 75) e, detta h la sua altezza, si calcola colla formola $F = S h s$. Il più delle volte in causa della debole importanza di F il valore di s risulta piccolissimo (inferiore a due o tre millimetri) e per le necessità di costruzione e per evitare l'inflessione laterale (accasciamento della lamiera su se stessa) è necessario assumere al momento della costruzione uno spessore reale molto più forte ed uguale al triplo od al quadruplo dello spessore teorico ed anche più. Per altro astrattamente non vi è alcuna ragione per esigere che il collegamento abbia una resistenza superiore a quella necessaria per vincere e trasmettere lo sforzo di taglio, quindi in questa ipotesi, impiegando i simboli usati nei numeri precedenti, il numero minimo di chiodi N_1 si calcola colla formola

$$F = k N_1 \frac{\pi d^2}{4} \frac{m}{m + 1} R.$$

In generale N_1 è inferiore al numero di chiodi che colle disposizioni ordinarie entrano in una fila, per cui in questi casi la lun-

ghezza l dei coprigiunti viene fissata dalla relazione $l = 4x$ e lo spessore s' teoricamente deve essere uguale o superiore alla metà dello spessore s pel coprigiunto doppio, ed uguale ad s pel coprigiunto semplice; pel coprigiunto doppio s' spesso si suole tenere in pratica fra $\frac{2}{3}s$ e $\frac{4}{5}s$, ed il numero effettivo di chiodi, che si impiegano, è quello massimo N_2 , che colle disposizioni e distanze indicate precedentemente può entrare nel collegamento, disponendoli in un'unica fila per ogni lamiera riunita (nell'ipotesi che sia verificata la relazione $N_2 > N_1$).

Se non si verifica la condizione esposta e che lo spessore teorico corrisponda allo spessore reale della lamiera, allora, a seconda che si usa il coprigiunto doppio o semplice, le formole che servono a calcolare il collegamento sono ordinatamente (Vedi num. 36)

$$s' = \frac{s}{2}, \quad N = 0,8 \frac{(b - n d) s}{d^2}, \quad l = 2 \left((v - 1) e + 2x \right)$$

$$s' = s, \quad N = 1,6 \frac{(b - n d) s}{d^2}, \quad l = 2 \left((v - 1) e + 2x \right).$$

I chiodi poi si dispongono per linee ortogonali od a quince come è indicato nella figura 187^a (*Tav. XXXI*) e più raramente per file a numero decrescente come fu detto nel numero precedente, pagina 357 (*Fig. 189^a, tav. XXXI*). È importante osservare che molte volte allo scopo di creare una grande rigidità in senso trasversale ed impedire la flessione laterale della lamiera uno dei coprigiunti, od anche entrambi, invece di essere formati con barre piatte, si costituiscono con ferri a nervature (ferri ad angolo, a T, ecc.) semplici od anche composte, in guisa che il momento d'inerzia trasversale venga notevolmente aumentato. Questa ultima disposizione è poi oltremodo conveniente quando siano attaccate alla trave delle membrature, delle travi secondarie, ecc., le quali diano luogo a sforzi od a momenti, che tendano a contorcerla o piegarla lateralmente.

Il collegamento per interruzione di una lamiera nelle piattabande si fa ordinariamente per coprigiunto semplice, poichè in generale da un lato del pacchetto regnano su tutta la lunghezza due o quattro ferri ad angolo, i quali impediscono la messa in opera del doppio coprigiunto. Per le ragioni esposte nel numero precedente l'effetto dell'eccentricità nell'unione a semplice coprigiunto per un fascio di lamiere ha poca importanza, tuttavia in corrispondenza del giunto dell'ultima lamiera, e nella parte non ricoperta dal ferro ad angolo, si suol mettere un secondo coprigiunto. Ciò

però non si fa tanto per una ragione di resistenza quanto per mascherare il giunto e difenderlo dalle azioni esterne (Vedi pag. 359). Le unioni delle lamiere nelle piattabande si fanno ordinariamente colla disposizione che abbiamo chiamato collegamento multiplo a gradinata perchè più semplice, più economico e di più facile esecuzione, e per calcolarlo si usano le formole (118), (119), (122) trovate al numero precedente

$$s = s' \quad N = 0,8 \frac{(b - n d) s}{d^2}$$

$$\lambda = (\nu - 1) e + 2 x = \left(\frac{N}{n} - 1 \right) + 2 x.$$

$$l = (t + 1) \lambda = (t + 1) \left\{ (\nu - 1) e + 2 x \right\} = (t + 1) \left\{ \left(\frac{N}{n} - 1 \right) + 2 x \right\}.$$

Le stesse osservazioni valgono anche nei collegamenti per interruzione delle lamiere nelle barre del reticolato, soltanto il bisogno di tali unioni si presenta più raramente in causa della lunghezza relativamente piccola di queste membrature; si può osservare che nel caso delle barre piatte si usa spesso il coprigiunto doppio per evitare l'eccentricità di sollecitazione nel giunto, impiegando più frequentemente la chiodatura con file trasversali a numero di chiodi decrescente, poichè in questo caso lo spazio in genere non fa difetto, ed interessa ridurre al minimo il coefficiente d'indebolimento.

Il collegamento per interruzione nei ferri ad angolo si fa per coprigiunto semplice, non permettendo la disposizione dei medesimi l'uso del coprigiunto doppio. In questo caso la larghezza b delle formole generali è uguale alla somma delle larghezze γ_1 e γ_2 delle ali del ferro ad angolo diminuita del loro spessore s (*Fig. 201^a, tav. XXXII*). Se come coprigiunto si impiegasse un ferro ad angolo avente le stesse dimensioni, le ali di quest'ultimo sporgerebbero rispetto a quelle del primo, quindi bisogna servirsi di un ferro ad angolo ad ali più strette e di maggior spessore (*Fig. 202^a, tav. XXXII*) affinchè l'area resistente abbia ancora lo stesso valore, oppure adoperare bensì un ferro ad angolo più piccolo, ma aggiungendo dall'altro lato sull'ala dell'altro ferro ad angolo una lamiera suppletoria capace di compensare nella sezione indebolita la deficienza d'area del ferro ad angolo, che funziona da coprigiunto (*Fig. 203^a, tav. XXXII*). Spesso si usa anche pei ferri ad angolo una disposizione analoga al collegamento a gradinata delle piattabande, facendo cadere le due interruzioni una vicina all'altra. Addossando in forma di coprigiunto due ferri ad angolo alquanto più piccoli su tutta la lunghezza del collegamento; ciascuno di essi compensa la deficienza d'area resistente dell'altro nella sezione indebolita, funzionando rispetto

alla resistenza nello stesso modo della lamiera suppletoria poco anzi menzionata. Se ω è l'area del ferro ad angolo, ω' quella del ferro ad angolo che fa da coprigiunto e della lamiera suppletoria, deduzione fatta in entrambe dell'area occupata dai fori dei chiodi, in base a quanto è stato detto nel numero precedente intorno ai collegamenti a caldo dovrà essere

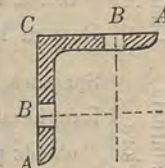
$$\omega = \omega' = Nk \frac{\pi d^2}{4} \frac{m}{m+1}$$

quindi

$$N = 1,6 \frac{\omega}{k d^2}$$

$$\lambda = \left(\frac{N}{n} - 1 \right) e + 2x \quad l = 3 \left[\left(\frac{N}{n} - 1 \right) e + 2x \right].$$

La scelta e disposizione dei chiodi nei ferri ad angolo di dimensioni medie, cioè vicine a $\frac{100 \times 100}{10}$, non presenta difficoltà alcuna quando si tenga presente ciò che è stato detto nel numero precedente; invece si può avere qualche incertezza quando si tratta di ferri di dimensioni molto piccole. Crediamo quindi opportuno riportare un quadro composto dall'Ingegnere JOLY da servire come guida per scegliere il diametro dei chiodi e la disposizione più conveniente per piccoli ferri e piccoli spessori.

DIAMETRO dei chiodi in mm.	SPESSORE da inchiodare in mm.	DISTANZA fra i chiodi in mm.	DISTANZA AC espressa in mm.	DISTANZA AB espressa in mm.	OSSERVAZIONI
8	6 - 12	50 - 60	35 - 35	19	Le due ultime colonne si rife- riscono più par- ticolarmente al ferro ad angolo della forma: 
10	10 - 12	60 - 70	40 - 40	22	
12	12 - 14	70 - 80	45 - 45	24	
14	14 - 16	80 - 90	50 - 50; 55 - 55	27 a 30	
16	16 - 20	90 - 100	60 - 65	33 a 36	
18	20 - 25	100 - 120	70 - 75	38 a 41	
20	25 - 35		80 - 85	43 a 46	
22	35 - 50		90 - 90	48	
25	50 - 70		100 - 109	56	

Come ulteriore criterio relativo alla scelta dei diametri dei chiodi nelle costruzioni metalliche, e più specialmente nell'esecuzione delle travature, avvertiremo che MORANDIÈRE nel suo Trattato sulla costruzione dei ponti consiglia i numeri inscritti

nelle tre prime colonne del quadro precedente anche nelle chiodature in genere, esistano o no ferri ad angolo, comprendendo quest'ultimo nella valutazione dello spessore da inchiodare. RÉSAL poi nel Trattato sulle costruzioni metalliche dà alcune norme generali, che possono essere molto utili per chi debba accingersi a progettare una travatura metallica.

Siano (*Fig. 204^a, tav. XXXII*)

d il diametro del chiodo

t lo spessore della testa

ρ il raggio della superficie delle teste

u la sporgenza della testa del chiodo rispetto al suo diametro

$D = 2u + d$ il diametro della base della testa del chiodo.

RÉSAL dà le seguenti formole per la loro determinazione

$$u = \frac{1}{3} d = 0,33 d, \quad D = 1,66 d, \quad t = 0,60 d, \quad \rho = 0,86 d$$

e quindi compone un quadro relativo ai chiodi con diametri di metri 0,018, 0,020, 0,022, 0,025, che sono i più usati nella costruzione delle travature da ponte

INDICAZIONI		UNITÀ di misura	NUMERI relativi ai chiodi di diverso diametro			
Diametro (d)		mm.	18	20	22	25
Sezione		mmq.	254	314	380	490
Spessore (t) delle teste		mm.	10,8	12	13,2	15
Diametro (D) della base delle teste		id.	30	33	36	41
Raggio (ρ)		id.	15,5	17,2	18,9	21,5
Limite abituale inferiore	Spessore da inchiodare .	id.	12	18	21	30
	Lunghezza totale del gambo del chiodo prima della messa in opera	id.	39	48	51	66
	Peso di 100 chiodi	Kg.	14,5	17	22,5	35
Limite abituale superiore	Spessore da inchiodare .	mm.	25	35	50	70
	Lunghezza del gambo del chiodo prima della messa in opera	mm.	52	65	83	115
	Peso di 100 chiodi	Kg.	15	23	32	55
	Peso di 100 teste di chiodi	id.	4	5,5	8	11,7

Le condizioni generali esposte per le chiodature si modificano secondo le esigenze costruttive: nelle grandi travi lo spessore delle membrature è variabile, specialmente nelle piattabande, ciò non ostante per facilità di costruzione, come è già stato avvertito, il diametro dei chiodi o è costante, o si riduce a pochi tipi stabiliti sul maggiore spessore delle parti, che essi servono a riunire. Parlando dell'equilibrio dei chiodi è stato detto come una lunghezza del gambo uguale a tre diametri deve essere riguardata in condizioni normali come un limite superiore: spessori maggiori non possono essere riuniti senza speciali precauzioni, per es. ribadendo a macchina ed a temperatura poco elevata (*). Questa osservazione fa comprendere come non sia mai opportuno avere spessori troppo forti da inchiodare e nella costruzione di ponti si dovrà sempre evitare d'assegnare ai chiodi una grande lunghezza, cioè possibilmente non superiore ai tre diametri, e non si dovrebbero mai sorpassare i quattro diametri.

I collegamenti che stabiliscono l'unione fra le parti elementari componenti le varie membrature di una travatura soggetta a flessione sono:

a) Il collegamento corrente per resistere allo sforzo di taglio longitudinale.

b) Il collegamento di semplice aderenza fra le parti formanti un'unica membratura.

Al numero 75 della parte I è stata determinata la formola, che dà lo sforzo di taglio longitudinale S' agente parallelamente alle fibre e distribuito sopra una striscia parallela all'asse di flessione distante v dal medesimo ed uguale alla larghezza b_v della sezione: si è trovato

$$S' = \frac{F}{I} (C_{v'} - C_v)$$

nella quale F ed I esprimono rispettivamente lo sforzo di taglio trasversale alla trave ed il momento d'inerzia, e $C_{v'}$ e C_v il momento statico della porzione di sezione resistente compresa fra l'asse di flessione e le parallele al medesimo aventi rispettivamente per ordinate v' e v .

Siano

F_1 lo sforzo di taglio longitudinale corrispondente alla striscia b_v per un tronco abbastanza corto Δx , sul quale F_1 possa sensibilmente ritenersi uniformemente distribuito

(*) Il grado conveniente di temperatura può essere ottenuto organizzando opportunamente il lavoro, oppure raffreddando il chiodo (Vedi RÉSAT, Opera citata alla pag. 613) col bagnarlo.

Δx la distanza fra due chiodi, o file di chiodi, misurata parallelamente all'asse della trave

d il diametro dei chiodi

k il numero delle sezioni di taglio per ciascun chiodo

n il numero di chiodi per ogni fila trasversale.

Per quanto è stato detto sopra

$$F_1 = S' \Delta x = \frac{F \Delta x}{I} (C_v - C_v'),$$

d'altra parte l'equazione di resistenza allo sforzo di taglio dà

$$F_1 = n k \frac{\pi d^2}{4} \frac{m}{m+1} R$$

quindi

$$\Delta x = \frac{I}{F (C_v - C_v')} n k \frac{\pi d^2}{4} \frac{m}{m+1} R \quad (124).$$

Nella parte I al numero 75 si è dimostrato che, detta h l'altezza della trave ed ω l'area resistente di uno dei due nuclei o piattabande, si può ritenere in via approssimativa per le grandi travi aventi la forma tipica più conveniente per la resistenza alla flessione

$$I = \frac{\omega h^3}{2} \quad C_v - C_v' = \omega \frac{h}{2}$$

quindi la formola superiore per le travature a media o grande altezza (h superiore ad un metro circa) può prendere la forma

$$\Delta x = \frac{h}{F} n k \frac{m}{m+1} \frac{\pi d^2}{4} R \quad (125)$$

approssimata bensì, ma perfettamente sufficiente pei bisogni della pratica. Fra le piattabande ed i ferri ad angolo si usano d'ordinario due o quattro chiodi per ogni fila trasversale, i quali presentano una sola sezione di taglio, invece fra i ferri ad angolo e la parete verticale, oppure l'anima verticale, s'impiegano rispettivamente in corrispondenza di ogni fila trasversale uno o due chiodi. Questi però hanno due sezioni di taglio per ciascuno, quindi il valore di $n k$ nei due casi rimane costante e la stessa formola vale per entrambi, purchè si abbia l'avvertenza di riferirsi al numero delle sezioni di taglio necessarie ad assicurare la stabilità della costruzione, e dedurne il numero di chiodi corrispondente. In questi calcoli si usa assumere il diametro d dei chiodi in

base ai criterî esposti nei numeri precedenti ed alle esigenze di costruzione e determinare colla formola trovata la distanza Δx fra i medesimi: difficilmente si fissa a priori la distanza Δx per dedurne poi il diametro d corrispondente. Come appare dalla formola (124) la distanza Δx è inversamente proporzionale allo sforzo di taglio F e riesce minima ove F è massimo, cioè in vicinanza degli appoggi, mentre avviene il contrario verso il mezzo della trave. Nella risoluzione di queste questioni possono presentarsi tre casi: Δx risulta minore della distanza minima $e = 2,5d$ ammissibile fra i chiodi ed allora bisogna variare, se la cosa è praticamente accettabile, il valore del diametro d , oppure modificare la disposizione e le dimensioni delle diverse parti in guisa che in un tronco di trave di lunghezza data si possa mettere un maggior numero di chiodi. Questo risultato può essere ottenuto usando una sezione con doppia nervatura d'attacco (T gemello) oppure ferri ad angolo a larghe ali, in ciascuna delle quali possano entrare due chiodi in file trasversali (caso rarissimo e quasi mai realizzato in pratica), oppure distribuendo i chiodi a quinconce (disposizione molto più comune). Il secondo caso si presenta quando Δx riesce compreso fra i limiti estremi dei valori usuali di e , nelle travature da $e = 3,5d$ ($e = 4d$) ad $e = 6d$. Allora non è necessario portare modificazione alcuna alla disposizione delle parti od al risultato ottenuto, soltanto, poichè Δx varia in modo continuo inversamente ad F , per semplicità di esecuzione si suole dividere la trave simmetricamente alle sezioni di momento massimo ($F = 0$) in tre o quattro tronchi, per ciascuno dei quali si assume per valore di e , distanza fra le file di chiodi, il minimo valore di Δx corrispondente al tronco stesso. Qualche volta e si tiene alquanto più piccolo di Δx allo scopo di prevedere il caso di qualche chiodo messo in posto in cattive condizioni di resistenza. Finalmente Δx può risultare superiore ad $e = 6d$, distanza fra i chiodi, oltre la quale l'adesione incomincia a perdere in parte la sua importanza. In tal caso, qualora necessità costruttive non vi si oppongano, cosa che in generale non potrà verificarsi che in qualche sezione singolare ed in costruzioni speciali, si suole fissare ancora Δx fra $4d$ e $6d$, ordinariamente $5d$, allo scopo di conservare fra le lamiere una forte aderenza, quasi come se formassero un unico pezzo proveniente dal laminatoio: in ogni caso poi non converrà che Δx superi $10d$; le esperienze di TETMAYER dimostrerebbero che in condizioni medie per una distanza e fra chiodo e chiodo superiore a $20d$ si perderebbero nella resistenza a compressione i vantaggi provenienti dalla solidarietà delle parti in causa della forte pressione a cui dà origine una chiodatura ben fatta.

Come esempio del calcolo della distanza Δx per una travatura metallica prendiamo in considerazione le due sezioni rappresentate nelle figure 205^a e 206^a (*Tav. XXXII*) sulle quali sono anche rappresentati i simboli algebrici corrispondenti alle varie dimensioni necessarie a determinarle. Pel ferro a doppio T

$$C_v = \frac{b-2d}{8}(h^2-h_1^2) + \frac{b_2-2d}{8}(h_1^2-h_2^2) + \frac{b_3}{8}(h_1^2-h_3^2) + \frac{b_4}{8}(h_1^2-h_4^2)$$

per la trave a cassone rappresentata nella figura 206^a (*Tav. XXXII*), trascurando la deduzione corrispondente ai fori dei chiodi,

$$C_v = \frac{b}{8}(h^2-h_1^2) + C_v = \frac{b}{8}(h^2-h_1^2) + \frac{b^2}{4}(h_1^2-h_2^2) + \frac{b_3}{4}(h_1^2-h_3^2) + \frac{b_4}{4}h_1^2$$

$$C_v = \frac{b_2}{4}(h_1^2-h_2^2) + \frac{b_3}{4}(h_1^2-h_3^2) + \frac{b_4}{4}h_1^2 = \frac{1}{4}\{(b_2+b_3)h_1^2 - b_2h_2^2 - b_3h_3^2 + b_4h_1^2\}$$

e nei due casi, se $nk=2$,

$$\Delta x = \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} R \pi d^2 \frac{I}{F(C_v - C_v)}$$

Per le grandi travi aventi la forma tipica per la resistenza a flessione, composte con due nuclei resistenti ω distanti h , si è visto che si può ritenere

$$I = \frac{\omega h^2}{2} \quad C_v - C_v = \frac{\omega h}{2}$$

quindi pel calcolo della chiodatura corrente nelle travi a grande e media altezza si potrà impiegare la formola di uso più semplice

$$\Delta x = nk \cdot \frac{m}{m+1} \frac{\pi}{4} d^2 \frac{h}{F} R$$

oppure

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x = \frac{3}{8} \pi d^2 \frac{h}{F} R \\ \Delta x = \frac{2}{5} \pi d^2 \frac{h}{F} R \end{array} \right. \quad \text{se } nk=2 \text{ ed } m = \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases}$$

la quale per le piccole travi darà risultati soltanto largamente approssimati.

Sotto il nome di collegamenti d'aderenza s'intendono, nelle travature in ferro, quelle chiodature, che hanno unicamente lo

scopo di mantenere le varie parti unite fra loro, quasi come fossero saldate e venute insieme dal laminatoio, per impedire l'azione degradatrice degli agenti esterni, gli sbattimenti e le leggere curvature e i distacchi che l'azione di sforzi eventuali o secondari potrebbero produrre, e finalmente per rendere solidali le parti e formare un'unica sezione avente sufficiente rigidità, e resistente in tutti quei casi, nei quali è utile o necessario che la sezione presenti un determinato momento di inerzia. Da quanto fu detto in generale sulle chiodature risulta che la distanza fra chiodo e chiodo può variare assai a seconda che si vuole raggiungere uno solo o più degli scopi sopra accennati. Nelle membrature soggette unicamente a tensione formate di più parti il collegamento d'aderenza non è indispensabile ed in molte costruzioni in buone condizioni di resistenza (nelle saette tese ed anche nella corda inferiore di molte travi per ponte) manca affatto, oppure è formato soltanto da qualche chiodo posto a grande distanza, allo scopo di vincolare le vibrazioni e di impedire forti sbattimenti. Per altro il rendere solidali vari pezzi ha il vantaggio di diminuire la superficie esposta alle vicende atmosferiche e di aumentare la rigidità della costruzione, cosa sempre utile, specialmente in causa delle azioni e degli sforzi eventuali e secondari. A raggiungere questo risultato non è necessario che l'aderenza abbia valore molto notevole, quindi i chiodi potranno essere posti a distanze molto superiori a quelle indicate come capaci di produrre una adesione fortissima; cioè e potrà variare da $10d$ a $20d$ e non potrebbe farsi un serio appunto anche se e fosse superiore, qualora però fosse ben accertato che nella membratura non agiscano mai e non possano agire altro che sforzi di tensione. Se la membratura è composta di più parti ed è soggetta a compressione, o può esserlo eventualmente, le chiodature di adesione sono indispensabili, poichè è necessario che la sezione formi un insieme ben connesso e che il momento d'inerzia raggiunga il valore importato dalla formola di resistenza a pressoflessione. Le esperienze di TETMAYER (*) proverebbero che la resistenza dei solidi compressi formati di varie membrature inchiodate non subisce variazione finchè la distanza fra i chiodi è inferiore a metri 0,50 e l'indebolimento è inferiore ad $\frac{1}{10}$, si può quindi concludere che nelle membrature compresse i chiodi d'aderenza debbono essere posti ad una distanza e variabile fra $e=6d$ ed $e=12d$ o tutt'al più $e=15d$ e che in ogni caso, anche quando si sia sicuri di una

(*) Vedi la nota alla pagina 279 (Parte II) in cui sono riferiti i risultati delle esperienze fatte dal Professore TETMAYER.

lavorazione perfetta e l'indebolimento sia piccolo, non si dovrà mai prendere $e \geq 20 d$. In quelle membrature poi nelle quali oltre a sforzi di tensione e compressione si debba temere anche uno scorrimento longitudinale, allora è necessario opporsi agli effetti di questo, calcolando il numero di chiodi necessario come è stato indicato, ed in ogni caso mettere sempre i chiodi abbastanza vicini per assicurare una sufficiente aderenza fra le parti.

Questa avvertenza è tanto più necessaria quanto più la membratura è importante e quanto più è soggetta all'azione di sforzi secondari od eventuali oltre quello importato dalle condizioni statiche d'equilibrio rispetto ai carichi esterni presi in esame nel calcolo della travatura. Quindi nelle piattabande si dispongono i chiodi in modo che l'aderenza sia molto forte, in via ordinaria la loro distanza è raramente e di poco superiore a $6 d$, in media si suole prescrivere $e = 5 d$ nelle file longitudinali che resistono allo sforzo di taglio, mentre in quelle, che non hanno altro scopo che assicurare l'aderenza fra le parti, la distanza può essere maggiore, tanto in senso longitudinale quanto in quello trasversale e per facilità di tracciamento può ritenersi doppia, anzi è consigliabile sia tale quando si adottano distanze diverse fra i chiodi; tuttavia fino ad ora in moltissime costruzioni non si è fatta differenza alcuna fra i due generi di chiodature. Le file estreme debbono però in ogni caso distare sempre dal limite delle lamiere non più di $x = 2,5 d$ (meglio $x = 2 d$) per impedire in modo assoluto che le parti si scostino e l'azione degradatrice degli agenti esterni. Questi limiti non si eccedono che quando ciò sia imposto da esigenze costruttive nei tronchi o nelle sezioni singolari: in ogni caso però sarà sempre una buona regola non superare di molto $e = 10 d$. Per diminuire l'importanza dell'indebolimento nelle sezioni trasversali è consigliabile la disposizione a quinconce e si usa impiegarela quasi sempre, spesso spostando in senso longitudinale di una lunghezza uguale ad $\frac{1}{2} e$ la metà dei chiodi di una stessa

fila trasversale scelti alternativamente ed in modo simmetrico rispetto al piano verticale passante per l'asse della travatura.

L'aderenza creata dalle chiodature stabilisce la solidarietà fra le parti, e per questa ragione aumenta la rigidità della costruzione e la sua resistenza a sforzi secondari ed eventuali non previsti, di qualunque natura essi siano. Quindi se le chiodature di adesione producono un indebolimento in causa dei vani dei fori ed un leggero consumo di metallo, esse sono anche causa di seri ed incontestabili vantaggi, che le considerazioni svolte permettono di apprezzare convenientemente.

Il collegamento fra travi che s'incontrano può farsi:

- a) Per sovrapposizione;
- b) Per sospensione;
- c) Per attacco laterale.

Il primo metodo consiste nel far riposare l'estremo di una trave sopra un'altra, interponendo qualche volta una piastra od una lamiera per distribuire meglio la pressione. Si assicura ordinariamente l'unione con un certo numero di chiodi, ma questi non resistono a sforzo di taglio propriamente detto, ed hanno per ufficio d'impedire i movimenti relativi, che potrebbero esser prodotti da vibrazioni, sforzi secondari od accidentali. Questo modo di unione fa perdere molto spazio in altezza, quindi non si adopera mai quando questa fa difetto: è rarissimo che venga usato nei solai in ferro (più comune nei solai in legno) qualche volta si impiega nelle tettoie e nei ponti, d'ordinario mai fra travi della stessa importanza, ma generalmente sono le piccole travi od i travicelli che riposano sopra travi notevolmente più grandi.

Osservazioni analoghe debbono essere fatte sull'attacco *per sospensione*, il quale viene impiegato rarissimamente e solo potrebbe convenire in qualche tipo speciale di costruzione, oppure per risolvere problemi particolari, per avere abbastanza spazio disponibile fra due travi collegate trasversalmente alla parte superiore ed inferiore, ecc., in esso infatti il chiodo resiste in modo affatto diverso dal normale, cioè a tensione. Questa si aggiunge a quella prodotta nel gambo del chiodo dalla messa in opera a caldo, per cui si consiglia (*) di prendere pel calcolo di resistenza alle forze esterne R_a uguale circa la metà del valore corrispondente ai casi ordinari di sollecitazione a tensione. Detto F' lo sforzo trasmesso, usando i soliti simboli, dovrà essere

$$F' = N \frac{\pi d^2}{4} R_a \quad \frac{\pi d^2}{4} = \frac{m}{m+1} \gamma \pi d.$$

Il collegamento per *attacco laterale* si usa più comunemente fra le travi in ferro ed anche fra le membrature di una stessa trave, specialmente nel caso di travature che si incontrano trasversalmente o ad angolo; questo collegamento ha il vantaggio di far perdere poco spazio in altezza, mantiene, per così dire, raccolta la costruzione e permette di portarne il centro di gravità molto in basso. Una delle due travi, ordinariamente la più piccola, se hanno importanza diversa, va a finire contro la parete dell'altra e l'attacco si fa:

a) Per *adattamento semplice* o con *coprigiunto semplice* o *doppio* se la trave, o membratura, principale porta una nervatura

(*) Il regolamento francese (29 agosto 1891) prescrive $R_a = 3^{ks} \cdot 00$ per mmq.

saliente a cui attaccare la trave, o membratura, secondaria (*Fig. 207^a, tav. XXXII*). Se tale nervatura non esiste naturalmente nella compagine della costruzione essa può essere ottenuta con un pezzo ausiliario con sezione trasversale ad angolo, od a T semplice o composto, od in forma di lamiera, attaccato od aggiunto alla parete; ciò rende facile l'unione ed aumenta la rigidità trasversale;

b) Per *coprighiunti a squadra* quando non esiste alcuna nervatura saliente. Si abbraccia la parete della trave secondaria coi lati di due squadre mentre gli altri due lati vengono ad adattarsi alla parete della trave principale, il tutto è reso stabile e ben aderente da un sufficiente numero di chiodi (*Fig. 208^a, tav. XXXII*). L'uso di ripiegare l'anima o la parete della trave secondaria contro quella della trave principale è assolutamente riprovevole se è fatto a freddo, perchè incrudisce il metallo, poco consigliabile anche fatto a caldo e con materiale buono per la difficoltà di avere una lavorazione perfetta e spazio sufficiente per disporvi il numero richiesto di chiodi;

c) A *mensola* disponendo un ferro a squadra, avente una membratura trasversale di rinforzo per mantenere il valore dell'angolo, con una faccia contro la parete della trave principale e lo spigolo dell'angolo diedro parallelo all'asse della medesima. La trave secondaria viene a riposare sull'altra faccia del ferro a squadra, e d'ordinario vi si assicura con chiodi, i quali hanno lo stesso ufficio di quelli che si usano nell'unione per sovrapposizione diretta: i chiodi che assicurano il collegamento sono quelli che servono ad attaccare la squadra alla travatura principale (*Fig. 209^a, tav. XXXII*). Questo modo d'attacco è poco usato; quando s'impiega serve spesso come rinforzo ulteriore ad un'unione fatta per sovrapposizione od a squadra, e raramente, e solo in casi di poca importanza, come unico organo di resistenza. In casi speciali esso può assumere un interesse particolare, come avviene nei ponti, nei quali si mettono i marciapiedi a sbalzo; ma allora la mensola, più che un organo d'attacco, deve essere riguardata come una trave incastrata alla travatura principale mediante coprighiunti semplici o con ferri a squadra, ed acquista il carattere di una membratura importante dello schema della costruzione. Se la trave è a parete reticolata od a grandi triangoli l'unione colle travi trasversali avviene spesso nei nodi, che formano già un punto singolare della costruzione, oppure colle membrature della trave, (comunemente coi montanti) impiegando disposizioni analoghe a quelle indicate superiormente, anzi sovente la sezione trasversale di queste membrature è scelta anche in relazione alle unioni, che debbono aver luogo colle medesime.

Attesa la natura di questo lavoro non sembra necessario entrare in maggiori particolari intorno alla forma di questi attacchi, soltanto avvertiremo che tanto i coprigiunti quanto le squadre molte volte sono assai più lunghi che non è alta la trave secondaria. Si asportano totalmente o parzialmente le ali della trave secondaria in vicinanza all'estremità che viene attaccata, oppure si ripiegano i ferri ad angolo e le squadre od i coprigiunti passano fra essi e si prolungano contro la trave principale, allo scopo di stabilire meglio l'attacco, disponendo dello spazio necessario ad un maggior numero di chiodi, e di creare una nervatura atta ad irrigidire la parete della trave principale, impedendone la flessione, facile a prodursi in causa del momento d'incastro e dello sforzo trasmesso. Tali attacchi sono detti a *coprigiunto* od a *squadra prolungata*, e per aumentare ancora la rigidità della parete spesso in corrispondenza dell'unione, e dalla parte opposta della parete della trave principale, si sogliono attaccare ferri a nervature atti a dare una sezione trasversale a grande momento d'inerzia. Qualche volta, come è già stato avvertito, gli attacchi per apposizione laterale, a coprigiunto od a squadra semplici o prolungati, si usano insieme ad una mensola, che funziona come membratura di rinforzo, dando luogo ad un attacco laterale misto. Se in un unico punto convergono più travi le disposizioni che si prendono sono ancora analoghe alle precedenti, soltanto la costruzione d'insieme diventa naturalmente più complessa e difficile nella sua esecuzione, poichè più gli angoli differiscono dall'angolo retto diventando sempre più acuti, più difficile diventa la messa in opera dei pezzi d'attacco e l'esecuzione delle chiodature in buone condizioni. Allo scopo di semplificare la formazione del collegamento si attaccano, o si possono attaccare, tutte le membrature ad un pezzo intermediario in forma di anello, in guisa che riesca possibile la ribaditura dei chiodi (*Fig. 211^a, tav. XXXII*). La figura 210^a (*Tav. XXXII*) mostra un esempio, nel quale le difficoltà di esecuzione delle varie parti, ed in modo speciale delle chiodature, risulta evidente.

Il numero N di chiodi necessario a stabilire il collegamento in modo da resistere permanentemente allo sforzo F' agente all'estremo della trave unita, parallelamente alla sezione d'attacco, è fornito dall'equazione di resistenza

$$F' = Nk \frac{\pi d^2}{4} \frac{m}{m+1} R \quad \text{da cui} \quad N = \frac{4}{\pi} \frac{m+1}{m} \frac{F'}{k R d^2} = 1,6 \frac{F'}{k R d^2}.$$

Il caso in cui si voglia o si debba tener conto dell'effetto di un momento d'incastro, o di uno sforzo di tensione, sarà esaminato nel

capitolo seguente studiando le travi soggette a flessione (lo sforzo unitario longitudinale prodotto dalle forze esterne nei gambi dei chiodi non dovrebbe superare Kg. 3,00 per mmq. come a pag. 383).

Avuto il numero di chiodi necessario, le dimensioni del collegamento, cioè la lunghezza di sovrapposizione, oppure la lunghezza e lo spessore dei coprighiunti o delle squadre, si determinano applicando le norme esposte superiormente relative alla disposizione dei chiodi. Sarà sempre regola di prudenza aumentare il numero N di chiodi in ragione variabile dal 30 al 10 % secondo che N è piccolo o grande, allo scopo di prevedere ed impedire i danni, che potrebbero provenire dal fatto che qualche chiodo possa essere messo in posto in condizioni sfavorevoli, ed in genere da un vizio di esecuzione. I coprighiunti si calcolano come nei collegamenti studiati nel numero precedente, soltanto bisogna ricordare che essi resistono in senso trasversale all'asse della trave secondaria, e che la sezione indebolita va considerata parallelamente al medesimo (normale alla direzione dello sforzo trasmesso).

La composizione delle travature metalliche dipende dalle dimensioni che possono avere in pratica le lamiere ed i ferri laminati, dalle condizioni imposte dalle formole di resistenza, avendo speciale riguardo all'azione degli sforzi di pressoflessione, ed è in intima relazione colle leggi, a cui sono soggette le chiodature. Nella forma tipica a due nuclei resistenti o piattabande (*Fig. 192^a e 194^a, tav. XXXI*) ω ed ω_1 riuniti da una parete di collegamento l'altezza h della trave viene fissata ordinariamente in relazione alla sua lunghezza l . La formola $M = R\omega h$ mostra che più alta è la trave, minore, a parità delle altre circostanze, è la quantità di metallo necessaria a comporre le piattabande, per contro al crescere di h aumenta il metallo da impiegare nella parete verticale, sia essa piana o reticolata, poichè si è già osservato che lo spessore delle varie parti ed il momento d'inerzia trasversale non possono essere inferiori ad un certo limite imposto dalle esigenze costruttive e dalle condizioni di resistenza alla flessione laterale. Ordinariamente per le grandi costruzioni, travature per ponti, passerelle, ecc., si consiglia in media $h = \frac{1}{10} l$, ed h suole variare fra $\frac{l}{8}$ ed $\frac{l}{12}$, sebbene qualche volta si eccedano in più od in meno questi limiti, specialmente se ragioni speciali lo consigliano. Nelle piccole costruzioni, travi per tettoie, per solai, ecc., soprattutto quando interessa risparmiare spazio in altezza, si tengono per h valori proporzionalmente più piccoli: si consiglia in media $h = \frac{l}{12}$, spesso

si usano rapporti $\frac{b}{h}$ poco diversi da $\frac{1}{15}$, e si arriva perfino ad $\frac{1}{20}$ quando è particolarmente indicato da circostanze speciali. La larghezza b da assegnare alle piattabande è in relazione coll'altezza e lunghezza della trave, colla rigidità da darsi alla medesima in senso trasversale e finalmente colla condizione di non avere spessori troppo forti da inchiodare. La larghezza delle piattabande dipende anche dalla natura speciale della costruzione da eseguire, dagli sforzi eventuali e secondari a cui può essere soggetta, quindi indicazioni precise su tale questione non possono trovare il loro posto altro che nelle opere speciali. In questo luogo ci limitiamo a pochi numeri d'ordine affatto generico da servire come primo criterio nella composizione della sezione trasversale di una trave. Per le grandi travature la larghezza b suole essere scelta fra $\frac{1}{6}$ ed $\frac{1}{10}$ dell'altezza, e questo rapporto cresce al diminuire di h , finchè nelle piccole travi per tettoie e solai b oscilla ordinariamente intorno ad $\frac{1}{3} h$, ed esistono esempi in cui $b=0,25h$ ed anche $b=0,20h$, come ne esistono in cui si arriva fino a $b=0,5h$. Per le travi a piccola altezza e doppia parete, che spesso occorrono nelle costruzioni civili per sopportare grandi pesi, muri, ecc., bisogna eccedere nella larghezza, per non avere spessori troppo forti nelle piattabande ed anche per poter eseguire le chiodature internamente alle pareti, quindi b si tiene fra $0,5h$ e $0,7h$ e qualche volta anche più.

Ragioni di indole tecnica, facilità di provvista e di esecuzione, consigliano di formare i nuclei ω ed ω_1 mediante lamiere sovrapposte in forma di piattabande. In relazione all'effetto dello sforzo principale (sforzo di flessione) una delle nervature di contorno della trave è compressa, quindi la sua sezione in generale dovrà essere a media od a grande rigidità, dipendentemente dall'intensità degli sforzi e dalla distanza dei punti d'attacco delle membrane formanti la parete reticolata, l'altra invece non avrebbe esigenze speciali. Per altro la convenienza che vi sia una linea corrente d'attacco per la parete verticale, la necessità di opporre una certa resistenza a sforzi eventuali o secondari ed alle azioni trasversali, i vantaggi provenienti dalla simmetria di forma relativamente alla facilità di costruzione consigliano nel maggior numero di casi la scelta di una sezione a media rigidità, simmetrica a quella della nervatura compressa, anche per la nervatura soggetta a tensione. La forma più comune che si usa per le travi soggette a flessione è quella di pacchi di lamiere sovrapposte con una o due nervature salienti, che ordinariamente funzionano anche

come linee d'attacco corrente, dando origine alla sezione a doppio T semplice o gemello, dette anche travi a T a semplice od a doppia parete (*Fig. 205^a e 213^a, tav. XXXII*). Quando poi è necessario impiegare pel nucleo resistente a compressione una sezione a grande rigidità, per l'altro nucleo si suole rinunciare ai vantaggi provenienti dalla simmetria della forma per procurarsi quelli dovuti alla maggiore facilità di esecuzione inerenti alla sezione a piccola e media rigidità. Per facilità di calcolo, preparazione e messa in opera le piattabande si fanno sempre in modo da riuscire simmetriche rispetto ad una retta passante pel baricentro della sezione parallela al piano di sollecitazione, e le file di chiodi costituenti il collegamento corrente e d'aderenza si dispongono in modo simmetrico rispetto alle linee d'attacco della parete o delle due pareti verticali di collegamento. Segue da ciò che il criterio più conveniente per determinare in modo preciso la larghezza b delle piattabande si desume portando la propria attenzione sulla distanza e fra fila e fila di chiodi, aggiungendo una quantità η costante per un dato tipo, corrispondente presso a poco allo spessore della parete o dell'anima verticale aumentato di quello delle ali verticali dei ferri ad angolo. Ritenendo i soliti simboli usati studiando le chiodature, ed indicando con n_1 , il numero delle file longitudinali di chiodi si può scrivere, quando le file sono equidistanti

$$b = \eta + (n_1 - 1) e + 2x \quad \text{oppure} \quad b = \eta + 2x + \sum_1^{n_1-1} e$$

se le file non sono equidistanti.

In via ordinaria η sta fra d e $2d$ (pel T gemello fra $2d$ e $4d$) ed x fra $1,5d$ ed $1,75d$ (non più di $2,5d$): quanto ad e conviene osservare che per facilità di costruzione è bene vi sia nelle misure la maggiore uniformità possibile, od almeno pochi tipi o facilmente determinabili; i chiodi per resistere a sforzi taglienti e per produrre una forte aderenza distano in genere da quattro ai sei diametri, ordinariamente cinque diametri (da $e=4d$ od $e=6d$), quelli invece a media o debole aderenza, messi solo per impedire lo scostarsi delle lamiera, possono essere naturalmente più distanti, da $e_1=6d$ ad $e_1=12d$: per una più facile lavorazione alla punzonatrice od al trapano si suole ritenere $e_1=2e$.

Niuna osservazione speciale deve farsi finchè $\omega = b\sigma$ (σ grossezza totale del pacchetto di lamiera) dà luogo a spessori σ facili ad essere inchiodati ed a larghezze b corrispondenti a due oppure a quattro file di chiodi. Aumentando il valore di ω per non avere spessori troppo forti bisogna aumentare b ; in generale sei file di

chiodi possono ancora convenire, intendendo per fila o lista di chiodi una larghezza uguale a circa cinque diametri ($e=5d$, e se si usano distanze diverse in genere $e=5d=\frac{e_1}{2}$); ma se è necessario aumentare ulteriormente la larghezza b , allora la sporgenza dell'ala comincia già ad essere notevole (Vedi pag. 274) e diventa ragionevole il preoccuparsi del pericolo dell'inflessione laterale nella membratura compressa, specialmente nei tronchi ove la piattabanda è formata con una o due sole lamiere, dove è più facile che sia superato il limite (variabile da 15δ a 30δ) che s'è visto (Pag. 258 e 274) non essere opportuno sorpassare nelle nervature salienti in ferro. Per evitare l'inconveniente accennato si possono inchiodare alle estremità delle ali dei ferri a nervatura saliente, detti *ferri di bordatura* (Fig. 212^a, tav. XXXII), oppure ricorrere alla sezione a doppio T gemello (Fig. 213^a, tav. XXXII). In generale quest'ultima soluzione è preferita dai costruttori perchè permette di dare maggiore rigidità alla trave ed un più facile attacco fra le piattabande e le barre a grande momento d'inerzia trasversale componenti la parete verticale discontinua di collegamento; il primo espediente è poco impiegato od almeno impiegato quasi soltanto a rinforzare le grandi nervature di piccolo spessore nelle travature reticolate a grandi maglie. È molto raro che colla disposizione a doppio T semplice o gemello non si possa trovare una soluzione $\omega=b\sigma$ conveniente, tuttavia qualora il calcolo conducesse a valori di b molto grandi, per es. $b=1^m,219$ come nel ponte di Charing-cross a Londra, allora oltre le due nervature d'attacco si possono aggiungere ferri a nervature salienti di rinforzo, come è indicato nella figura 214^a (Tav. XXXII), è difficile che ciò sia indispensabile, bisognerebbe che la distanza delle due nervature fosse superiore a 40 volte lo spessore delle piattabande (Pag. 258 e 274): quantunque nel ponte di Mezzanacorte sia $b=1^m,200$ non vi è stato messo alcun ferro d'irrigidimento. Sebbene le lamiere di una piattabanda possano presentare anche dei giunti longitudinali, tuttavia i numeri esposti superiormente possono essere riguardati come numeri limiti, che non è consigliabile superare senza che vi siano ragioni affatto speciali che lo impongano, anzi sarà sempre opportuno attenersi alle condizioni medie evitando le dimensioni limiti.

Se malgrado le larghezze accennate convenienti alle forme a doppio T semplice o gemello, il valore di $\omega=b\sigma$ è tale che risulti uno spessore σ da inchiodare superiore a tre volte il diametro dei chiodi, allora la ribaditura a mano non è più praticamente conveniente e diventa indispensabile per avere un lavoro fatto in buone condizioni ricorrere alle chiodatrici meccaniche, oppure è neces-

sario frazionare il pacchetto e ricorrere alla disposizione a piani sovrapposti indicata nella figura 215^a (*Tav. XXXII*). Fra un piano e l'altro occorre lasciare lo spazio necessario per poter eseguire la chiodatura in buone condizioni, circa metri 0,35 e non meno di metri 0,25; se le ali sono assai larghe esse possono essere irrigidite mediante ferri di bordatura, come è stato fatto nella trave maestra del ponte di Dirschau, rappresentato nella figura 216^a (*Tav. XXXII*). Se questo modo di costruzione si impiega nelle travature a doppia parete esso conduce alle sezioni resistenti di forma cellulare a grandissimo momento d'inerzia trasversale analoghe a quelle usate nel viadotto di Crumlin (*Fig. 217^a, tav. XXXIII*) ed in un ponte a Pittsburg (*Fig. 218^a, tav. XXXIII*).

Le condizioni in cui lo spessore σ delle lamiere sia molto forte si possono verificare, oltrechè nel caso accennato, anche perchè circostanze speciali, relative alla questione che si vuole risolvere, impongano o consiglino di non superare per b un valore relativamente piccolo, oppure medio. La scomposizione del pacchetto di lamiere in parti distinte collegate fra loro e l'aggiunta di membrature salienti e ferri di bordatura può essere consigliata non solo dalle condizioni esposte, ma anche dalla necessità di avere una sufficiente resistenza alla pressoflessione nelle membrature compresse. Questo caso si presenta specialmente nelle travature reticolale a grandi maglie, nelle quali la grande distanza fra i nodi obbliga ad usare sezioni resistenti tali, che il minimo momento d'inerzia trasversale abbia un valore notevole, od anche molto grande.

Sia per dare alle nervature di contorno un grande momento d'inerzia trasversale, e quindi una maggiore resistenza alla pressoflessione, sia anche per avere due linee correnti d'attacco per le membrature formanti la parete di collegamento, quando queste ultime hanno forme a grande rigidità, si sono spesso impiegate sezioni resistenti speciali che rappresentiamo nella tavola XXXIII ritenendo superfluo un'ulteriore descrizione. — Tipo a croce semplice o rinforzata (*Fig. 219^a, 220^a e 221^a*). — Tipo HARTMANN (*Fig. 222^a*). — Tipo SCHWEDLER (*Fig. 223^a*). — Tipo PAULI (*Fig. 224^a*). — Tipi composti di piccoli ferri a nervature (*Fig. 225^a e 226^a*).

Le forme indicate sono quelle, che si incontrano più comunemente nelle costruzioni, ed in particolar modo le più usate fra le medesime sono le forme a doppio T semplice o gemello più volte ricordate per la grande facilità che presentano, sia nel calcolo che nel taglio, tracciamento e messa in opera. Oltre i tipi di sezioni resistenti esposti superiormente sono stati impiegati in casi speciali anche forme affatto particolari, di cui rappresentiamo lo schema nella tavola XXXIII. — Tipo BRUNEL a piattabanda

incurvata (*Fig. 227^a*). — Tipo a celle triangolari (ponte di Windsor sul Tamigi) (*Fig. 228^a*). — Tipo tubulare usato nei ponti di Chepstow sulla Wye (*Fig. 229^a*) e nel ponte di Saltash (*Fig. 230^a*). — Finalmente il tipo lamellare od a trave tubiforme usato in un ponte presso Marienburg (*Fig. 231^a*).

In tutti questi casi, in cui la membratura compressa ha forme a grande momento d'inerzia trasversale, per la nervatura di contorno tesa si impiegano forme di facile costruzione a lamiere sovrapposte od adiacenti, come è indicato nelle figure 232^a e 233^a (*Tav. XXXIII*) e qualche volta anche dei veri e propri tiranti o catene come è stato fatto in diverse costruzioni importanti, per es. nel viadotto di Crumlin, nei ponti del tipo SCHIFKORN ed in varie costruzioni americane. Vedi anche la figura 231^a (*Tav. XXXIII*).

Quanto alla parete verticale di collegamento, se essa è continua l'unione colle piattabande è fatta col mezzo dei ferri ad angolo, se invece è reticolata od a graticcio l'attacco delle barre si fa ordinariamente coll'anima verticale. La forma della sezione delle barre dipende dallo sforzo che sopportano e dalla loro lunghezza; per le barre tese si impiegano sempre le forme a piccola rigidità (barre piatte, circolari...) per le barre soggette alternativamente a sforzi assiali di tensione e compressione a seconda dalla posizione del sovracarico, e più particolarmente per quelle che sono sempre ed in ogni caso soggette a compressione, si debbono usare sezioni con forme a media od a grande rigidità dipendentemente dalla minore o maggiore importanza dello sforzo di compressione, e della lunghezza libera fra i punti vincolati, in relazione a quanto è stato detto nel capitolo precedente. L'attacco poi colle membrature di contorno si fa per sovrapposizione all'anima, od alle due anime nella sezione delle piattabande a T gemello, ed in genere colle linee correnti d'attacco; solo nelle piccole travi tale attacco si fa per interclusione fra le ali dei ferri ad angolo, qualche volta esso viene anche fatto a coprigiunto semplice o doppio asportando alle estremità le nervature salienti, se imbarazzano, ricorrendo anche a lamiere ausiliarie quando manca lo spazio sufficiente per collocarvi il numero di chiodi necessario. Certamente è meglio disporre le cose in modo che nelle unioni non si abbiano a fare costruzioni od operazioni speciali di taglio od aggiungere pezzi parassiti rispetto alla resistenza generale della travatura, tuttavia le lamiere ausiliarie in qualche caso possono essere assai utili; ciò può avvenire particolarmente quando si verificano condizioni tali, che sia permesso evitare una nervatura corrente non richiesta da altro che dalla necessità dell'attacco (*Fig. 234^a, tav. XXXIII*). Per la piattabanda o pacchetto teso il caso può essere abbastanza fre-

quente, mentre è più raro per la piattabanda compressa ed in genere avviene solo nelle piccole travi, sulle quali si può risparmiare l'anima verticale, od in quelle a grandissime maglie, dove gli attacchi sono pochi e costituiscono veri punti singolari, pei quali l'aggiunta di qualche pezzo non può imbarazzare sensibilmente la costruzione e rimane maggiore libertà nella composizione della sezione resistente delle membrature.

Nelle sezioni o tronchi singolari di una travatura, cioè in quelle parti nelle quali sono applicati sforzi speciali, oppure sono attaccate una o più travi secondarie..., più particolarmente in corrispondenza degli appoggi, è necessario che la travatura abbia una grande resistenza alla flessione laterale ed aver cura che i particolari di costruzione siano di facile esecuzione. Inoltre non si dovranno mai trascurare le considerazioni di ordine generale relative al valore del limite dei carichi permanenti nei tronchi e nelle sezioni singolari per forma o per carico già più volte ricordate (Vedi Parte I, num. 59, pag. 171). Questo risultato si ottiene in genere collegando le due piattabande con barre verticali, dette *montanti*, formate con sezioni a media o grande rigidità, secondo l'importanza degli sforzi e la lunghezza libera fra i punti vincolati. Nelle travature reticolate od a graticcio qualche volta si modifica in corrispondenza degli appoggi la forma del reticolato in modo analogo a quello indicato nella figura 235^a (*Tav. XXXIII*) oppure si sostituisce la parete piena (*Fig. 236^a, tav. XXXIII*) allo scopo di aumentare la resistenza, e sopra tutto di rendere più facile la preparazione e messa in opera delle varie parti componenti quel tronco di travatura, ed in modo speciale i montanti a nervature salienti o, più generalmente, a grande momento d'inerzia trasversale. Per ciò che si riferisce alle travature da ponte è opportuno osservare come il rinforzo, che si fa nelle travature principali in corrispondenza agli appoggi nei ponti a contravventi superiori ed inferiori, agisca anche come rinforzo del collegamento trasversale superiore, rispetto al quale i *quadri di estremità*, cioè il sistema dei montanti sovrapposti agli appoggi e dei corrispondenti collegamenti trasversali, funzionano come punti di ritegno (*): in un calcolo rigoroso sarà bene tener conto anche di questa influenza valutando l'effetto delle forze trasversali (azione del vento).

(*) KOEHLIN M., *Application de la statique graphique*, Cap. III.

L'ARTE DI FABBRICARE

CORSO COMPLETO

DI ISTITUZIONI TEORICO-PRATICHE

per gl'Ingegneri, per gli Architetti, pei Periti in costruzioni, pei Periti misuratori,
per gl'Intraprenditori, pei Capomastri, e per quanti si trovano applicati o vogliono applicarsi
all'esecuzione ed alla sorveglianza di costruzioni civili, stradali ed idrauliche

CON TAVOLE ILLUSTRATIVE

MECCANICA APPLICATA ALLE COSTRUZIONI

PER L'INGEGNERE

SILVIO CANEVAZZI

Professore nella Regia Scuola d'applicazione per gli Ingegneri di Bologna.

Parte II - Dispensa 2^a

TAVOLE

TORINO

Presso AUGUSTO FEDERICO NEGRO, Editore

nella Galleria Nazionale

con Succursali in Roma, Napoli e Cagliari (per la Sardegna).

1894

La MECCANICA APPLICATA ALLE COSTRUZIONI
conterà di due parti coi rispettivi atlanti di Tavole. - L'associazione è obbligatoria per tutta l'opera
Prezzo di questa Dispensa (Testo e Tavole) Lire 8.

ALBUM degli INGEGNERI ed ARCHITETTI

SCELTA COLLEZIONE DI DISEGNI

di costruzioni moderne italiane e delle loro dipendenze ed accessori
col testo spiegativo in italiano e in francese

INDICE DELLE TAVOLE CONTENUTE NELLE DUE PRIME SERIE

SERIE 1^a

- Fascicolo 1°** — *Palazzina Salino in Torino.* — I. Facciata principale - II-III. Pianta del pianterreno, del primo piano e dei sotterranei. - IV. Sezione longitudinale. - V. Scuderia - Elevazione, fianco e sezioni. - VI-VII. Particolari.
- Fascicolo 2°** — *Chiesa di San Giovanni Evangelista in Torino.* — I. Facciata. - II. Fianco esterno. - III-VI. Pianta, sezioni e particolari.
- Fascicoli 3° e 4°** — *Palazzo della Prefettura di Cuneo.* — I-II Facciata principale. - III. Pianta del pianterreno, del primo e del secondo piano. - IV-V. Sezioni. - VI-X. Particolari.
- Fascicolo 5°** — *Scuderia Pisani de Lazzara in Padova.* — I. Facciata principale - Sezione longitudinale. - II. Pianta del pianterreno e del fienile. - III Fianco e sezione trasversale - Pianta di un box e di alcune poste. - IV. Particolari. — *Padiglione della Città di Torino.* — I. Facciata e sezione. - II. Particolari.
- Fascicolo 6°** — I. *Cancello in ferro battuto.* - Elevazione e sezione. — II. *Chiosco in legno.* Prospetto e sezione. — III. *Portone carrato.* - Elevazione e sezione. — IV. *Porta d'ingresso di un alloggio.* - Elevazione e sezione. — V. *Porta interna.* - Elevazione e sezione. — VI. *Porta-balcone con vasistas.* - Elevazione, sezioni e particolari.
- Fascicoli 7° e 8°** — *Acquedotto di Venezia.* — I. Derivazione - Planimetria - Sezioni. - II. Canale - Ponte - Sifone - Pianta e sezioni. - III-IV. Filtri - Bocche di derivazione - Fabbriato per le macchine elevatorie - Saracinesche - Prospetti e sezioni. - V-VI. Sezione geologica - Tubo e condotta sottolagunare - Pozzetti con saracinesca lungo la condotta. - VII. Pianta della palificazione di fondazione e dei muri del cisternone. - VIII-IX. Cisternone e fabbricato delle macchine e caldaie - Prospetti e sezioni. - X-XI. Sifone del Canal Grande e distribuzione ai pozzi pubblici e agli edifici - Tipo di saracinesca e di robinetto di scarico - Anello principale - XII. Planimetria generale dell'Acquedotto - Ponti - Cisterna veneziana.
- Fascicoli 9°, 10° e 11°.** — *Stazione di Palermo* — I. Piano generale della stazione. - II-III. Pianta del pianterreno e del primo piano. - IV-IX. Prospetto principale e prospetto laterale - Sezioni e particolari del prospetto e delle decorazioni. - X-XIII. Pianta, sezioni e particolari della scala principale, della sala di prima e seconda classe e della sala del caffè - XIV-XVIII. Tettoia metallica - Centina normale - Frontone - Mensole - Arcarecci - Sezioni e particolari.
- Fascicolo 12°** — *Casa e Scuole del Comune d'Inverio Inferiore.* — I-IV. Facciate, piante e sezioni. - V. Piano dimostrativo della località e pianta del piano superiore. - VI. Particolari di decorazione.

SERIE 2^a

- Fascicolo 1°** — *Palazzina Mazzuchetti.* — I-IV. Prospetti, piante e sezioni. - V-VI. Particolari di decorazione e soffitto del salone (in cromolitografia).
- Fascicolo 2°** — *Nuove Terme d'Acqui.* — I-II. Planimetria generale - Facciata principale - Fianco - Sezioni, piante e particolari. - III-IV. Distribuzione delle acque - Tinozza in marmo - Robinetto a quattro vie per bagni - Robinetto della miscela per le docce - Apparecchio per l'inalazione e per riscaldare la biancheria - Sezioni e particolari. - V-VI. Salone ottagonale (in cromolitografia).
- Fascicoli 3°, 5°, 7°, 9° e 12°** — *Ferrovie Sicule - Linea di Valletunga.* — I-II. Deviazione di acque - Ponti - Speroni - Briglia - Acquedotto. - III-VII. Galleria Magazzinazzo - Imbocco Palermo - Imbocco Catania - Pozzi e cunicoli - Nicchie - Attacco belga - Profilo longitudinale - Armatura dello scavo per la galleria artificiale - Deformazioni e ricostruzioni. - VIII-X. Verricello a mano e pompe a doppio ed a semplice effetto - Maneggio a cavalli e meccanismi a servizio dei pozzi delle gallerie. - XI. Pompa orizzontale a doppio effetto - Piccole locomotive - Vagoni da sterco. - XII. Ponte a travata metallica e deviazione del torrente Stretto. - XIII-XXII. Galleria Marianopoli - Testa Palermo e testa Catania - Attacco belga - Cunicoli - Tipi di rivestimenti - Impianto e meccanismi a servizio dei pozzi - Benna - Caldaie - Ventilatore - Riscaldatore. - XXIII-XXIV. Ponte obliquo di 22 metri di luce - Altro ponte di metri 14 - Piani. - XXV-XXVI. Deviazione del torrente Salito e del rivo Pescuzzo - Piani. - XXVII. Gallerie Praino e Kirbi. - XXVIII-XXIX. Profilo generale colle piante delle stazioni e fermate. (Le tavole sono corredate di profili, facciate, prospetti, piante, sezioni e particolari).
- Fascicolo 4°** — *Palazzina di Sambuy.* — I-II. Facciata a ponente e a nord e del padiglione per portieria e scuderia. - III-V. Planimetria generale - Pianta del pianterreno e del primo piano - Particolare della gabbia dello scalone e sezioni - VI-VII. Scuderia - Particolari del cancello d'ingresso e della cancellata.
- Fascicolo 6°** — *Acquedotto d'Ivrea.* — I-III. Planimetria - Profilo - Pozzetto di deposito - Imbocco della galleria - Casotto dei robinetti - Serbatoio - Prospetti, piante e sezioni — *Palazzina Sineo.* — I. Facciata principale e pianta del pianterreno. - II. Particolari della facciata.
- Fascicolo 8°** — *Palazzo Chiesa.* — I. Facciata principale. - II. Pianta del pianterreno e del primo piano. - III. Particolari di decorazione. — *Villino Lenzi a Montefosco (Spezia).* — I. Facciata principale. - II. Pianta delle fondazioni, del pianterreno, del piano superiore e del tetto. - III. Porta-persiana - Porta d'ingresso - Vetrate per la porta d'ingresso - Finestra - Cornicione d'incorniciamento - Cisterna - Pozzo nero.
- Fascicolo 10°** — *Chiesa di Sant'Antonio da Padova in Torino* — I-V. Facciata. - Fianco esterno - Pianta, sezioni e particolari.
- Fascicolo 11°** — *Acquedotto di Verona.* — I. Planimetria e tubazione in città. - II. Galleria di raccolta delle sorgenti sotterranee, e di aspirazione delle pompe. - III-V. Impianto meccanico pel sollevamento dell'acqua - Serbatoi - Pianta e sezioni. - VI. Profili della condotta.
- Fascicolo 12°** — *Cappella mortuaria nel cimitero monumentale di Milano.* — I-II. Facciata principale e laterale - Pianta, sezioni e particolari.

Ogni Serie consta di dodici fascicoli e per coloro che prendono le due Serie insieme il prezzo è di Lire 8 per fascicolo. Si vendono anche separatamente i fascicoli a Lire 10 caduno.

624(02)1824.07 CAN

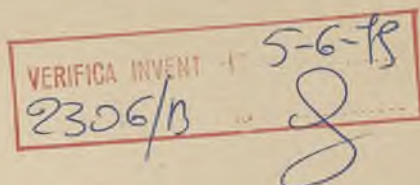


Fig.101.

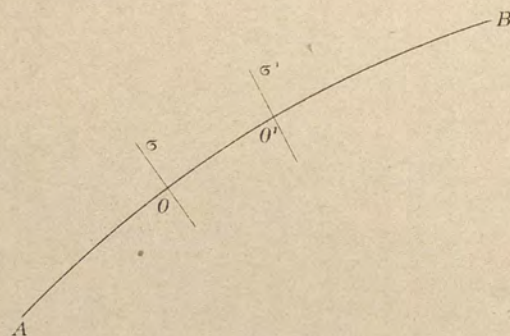


Fig.102.

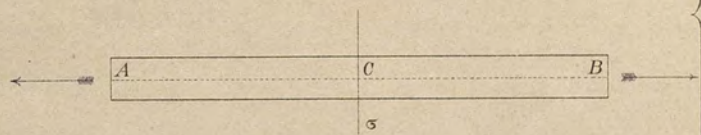


Fig.103.

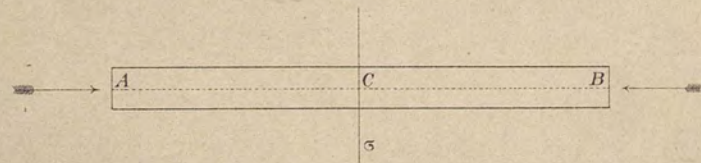


Fig.104.

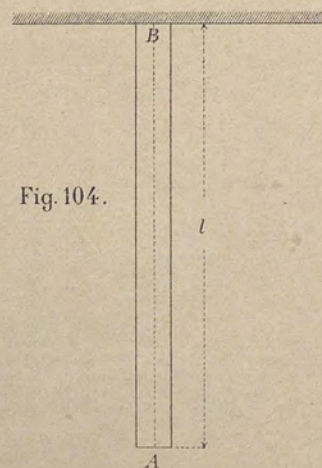


Fig.105.

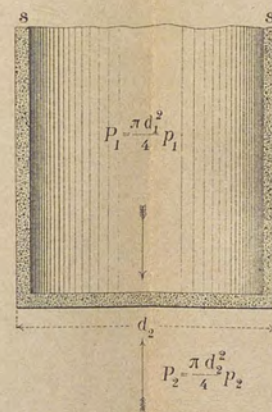
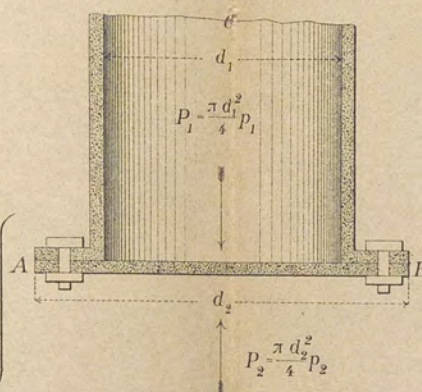


Fig. 106.

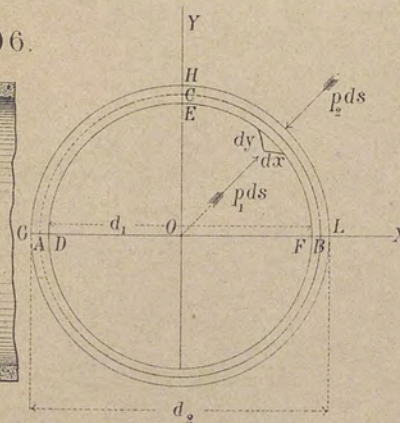


Fig.107.

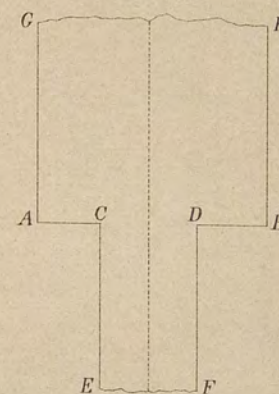


Fig.108.

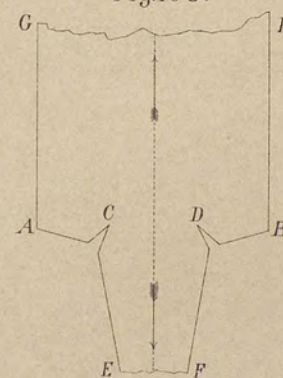


Fig.109.

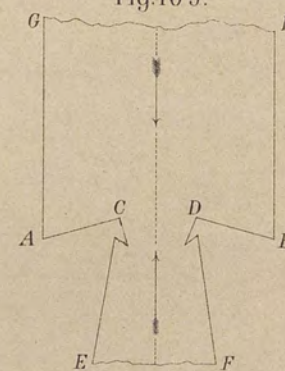


Fig.110.

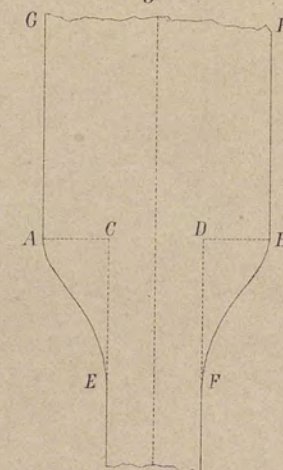




Fig. 111

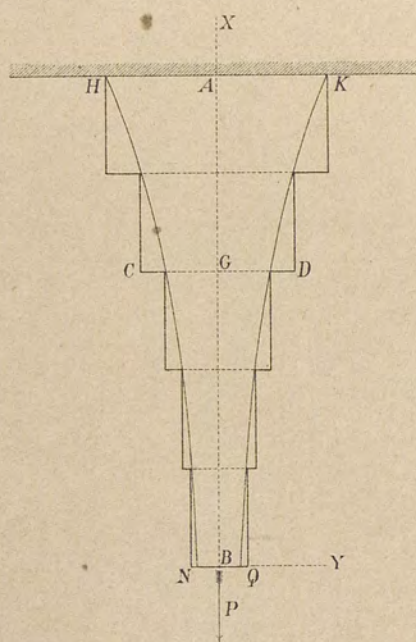


Fig. 112

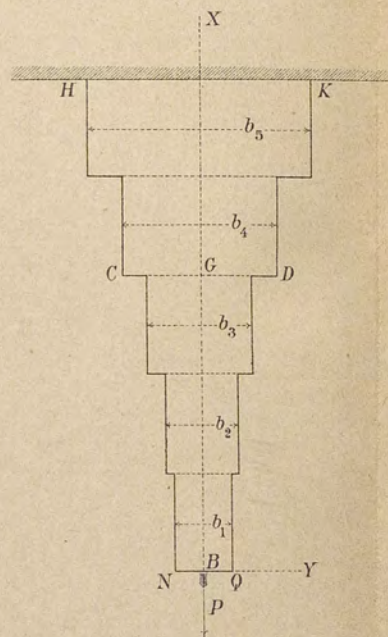


Fig. 113

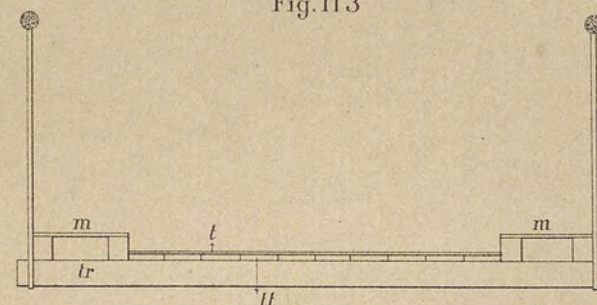


Fig. 114

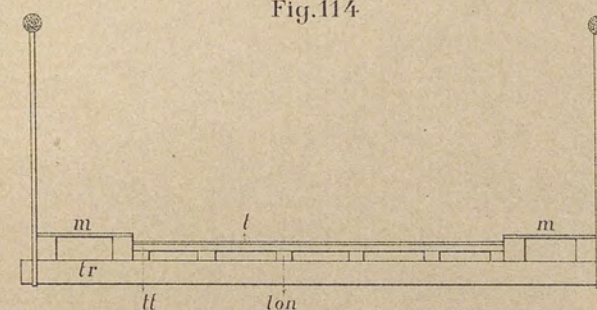


Fig. 115

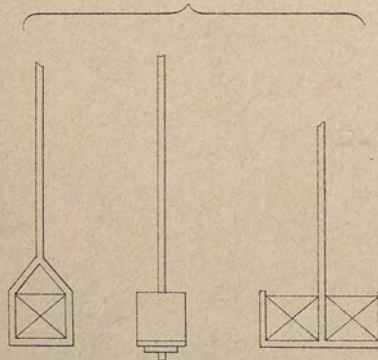


Fig. 116

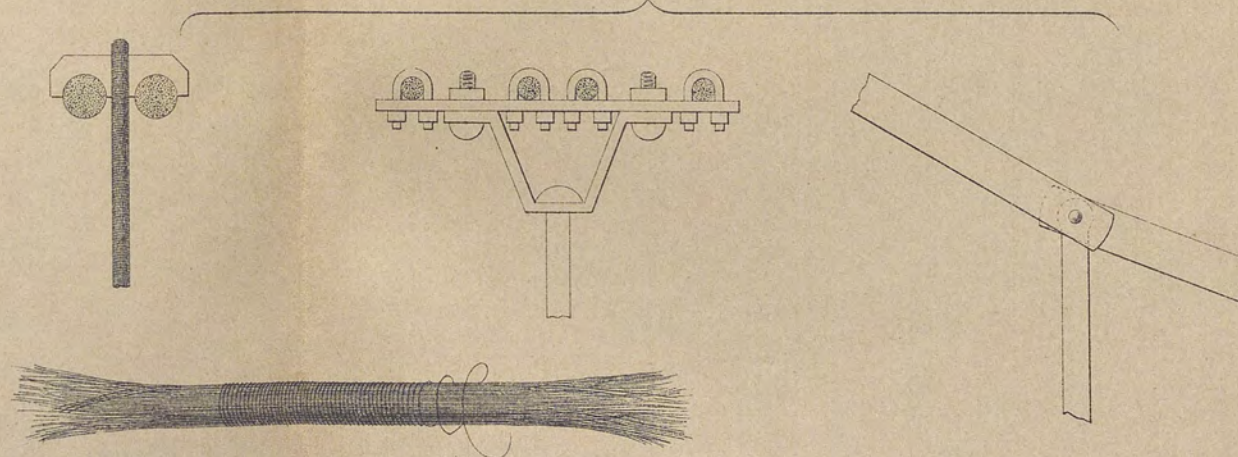




Fig. 117.

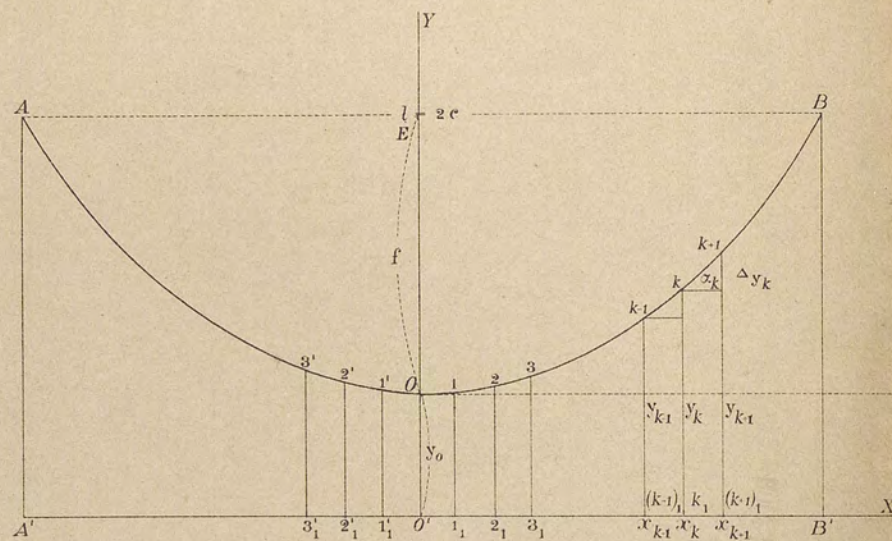


Fig. 118.

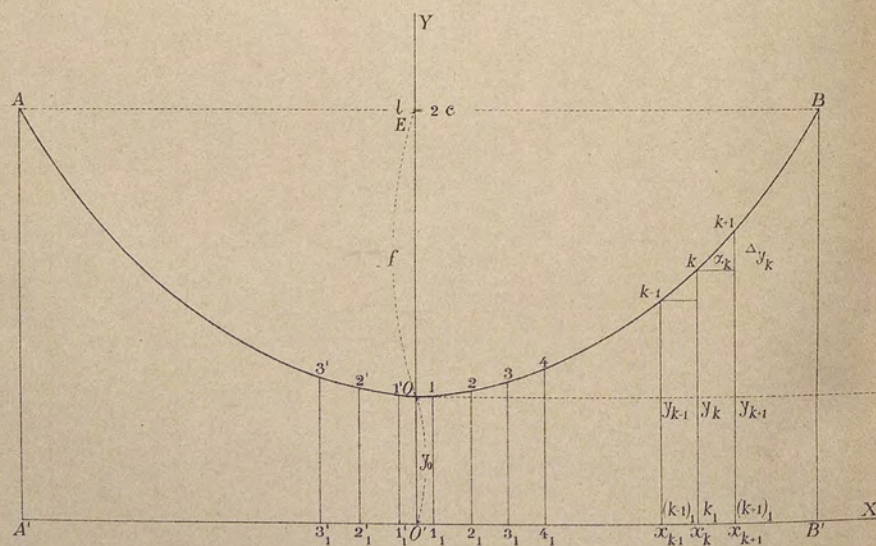


Fig. 119.

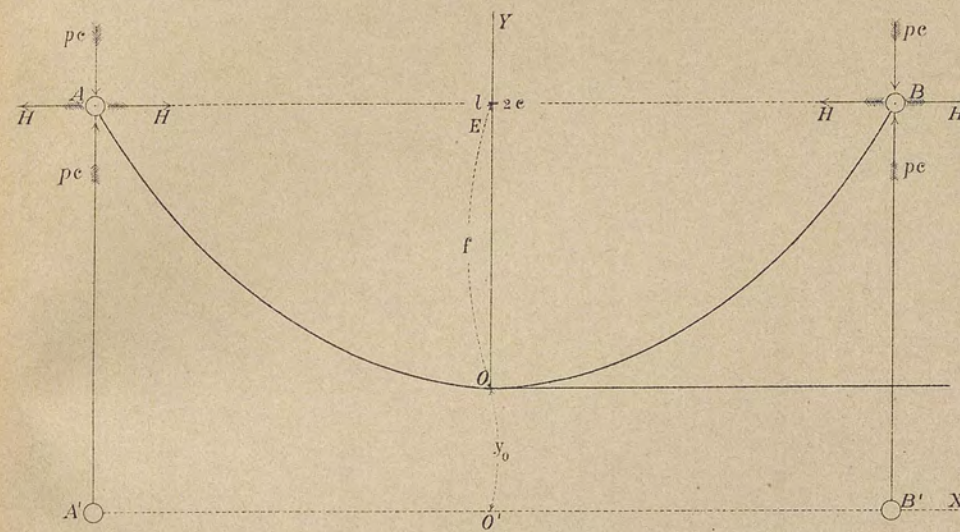


Fig. 120.

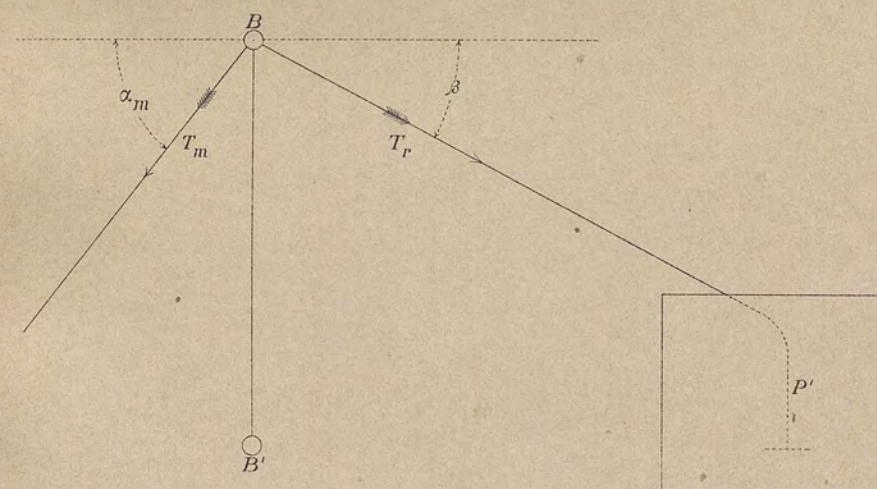




Fig.121

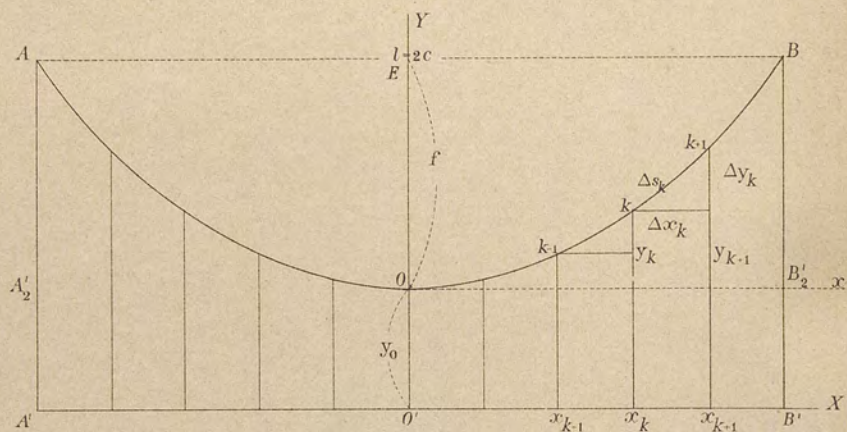


Fig.122

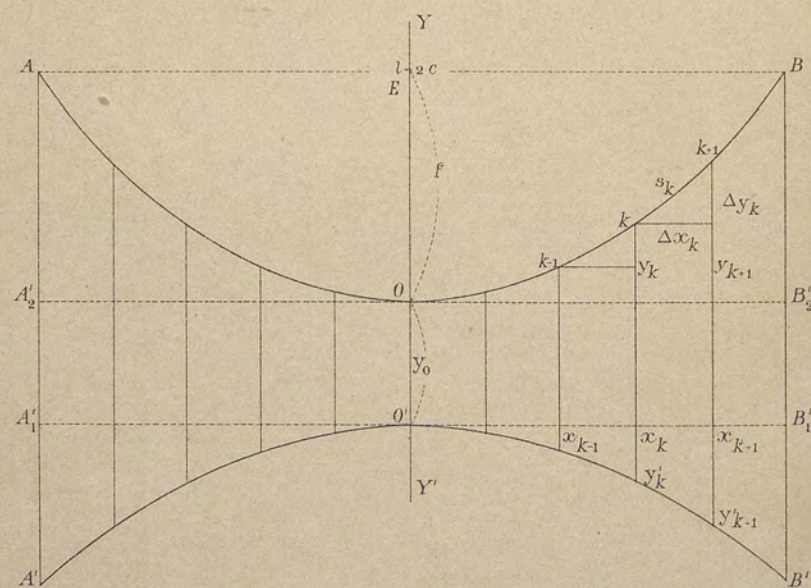


Fig.125

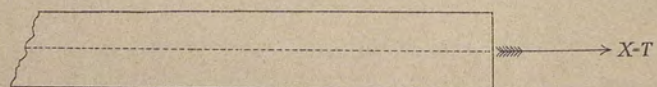


Fig.123

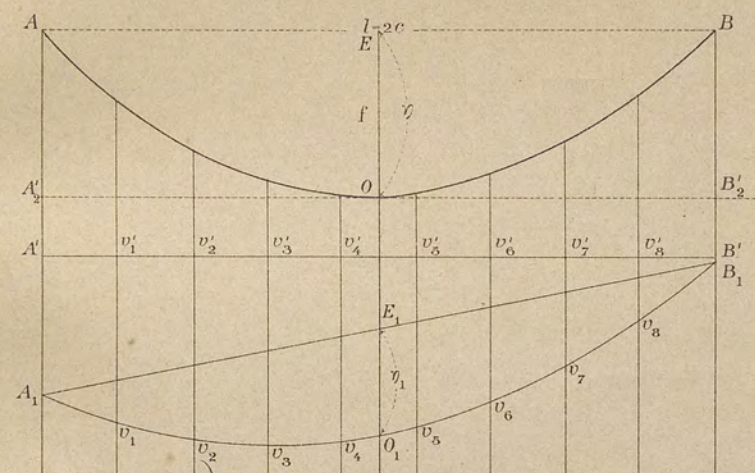


Fig.123

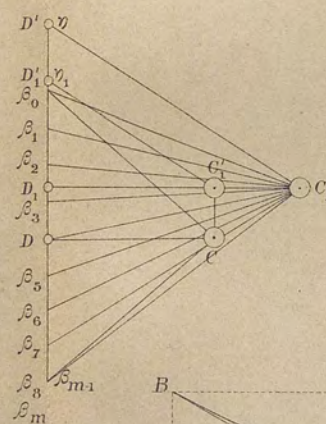


Fig.124

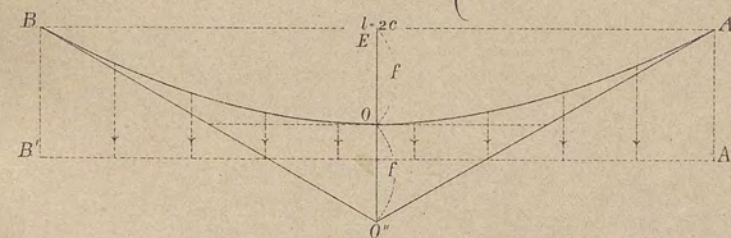


Fig.126

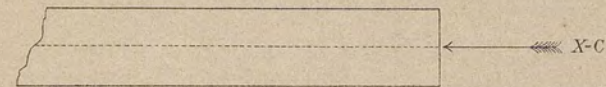




Fig.127

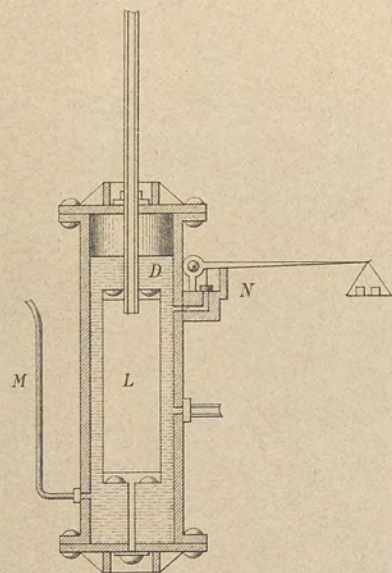


Fig.130

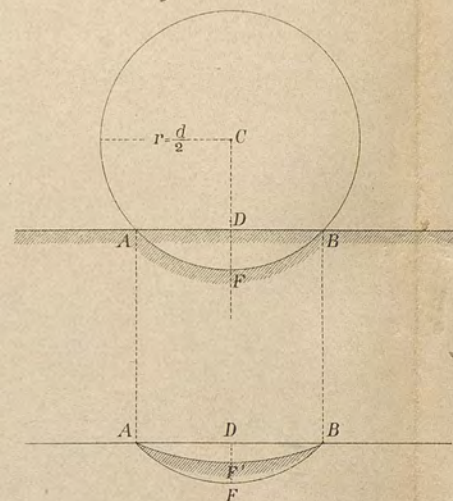


Fig.134

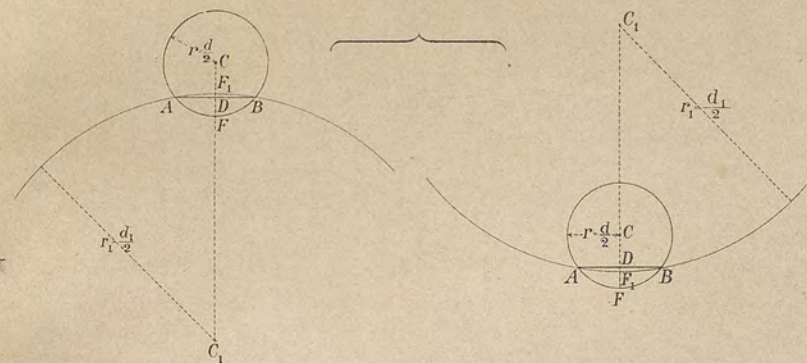


Fig.135

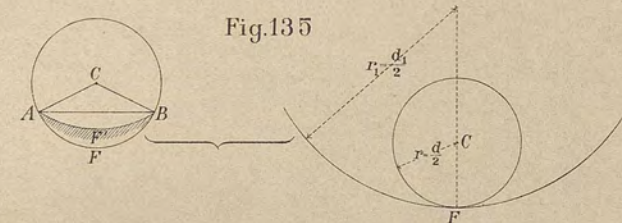


Fig.128

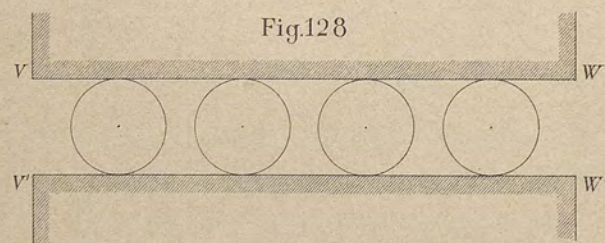


Fig.131

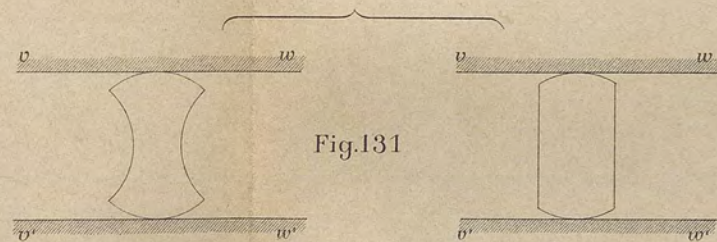


Fig.129

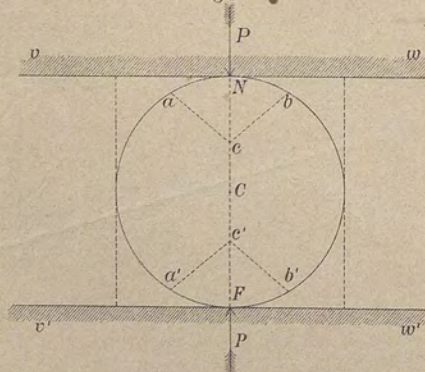


Fig.132

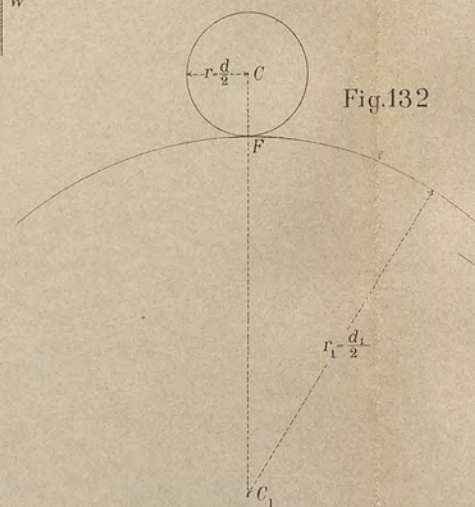


Fig.133

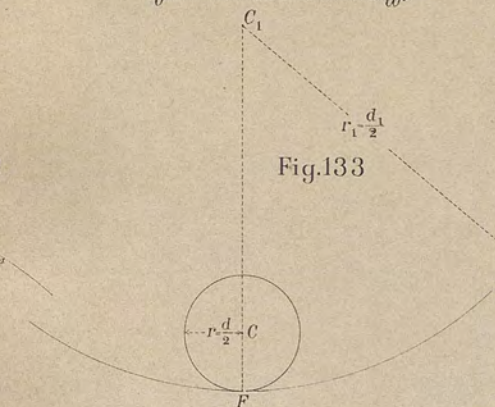
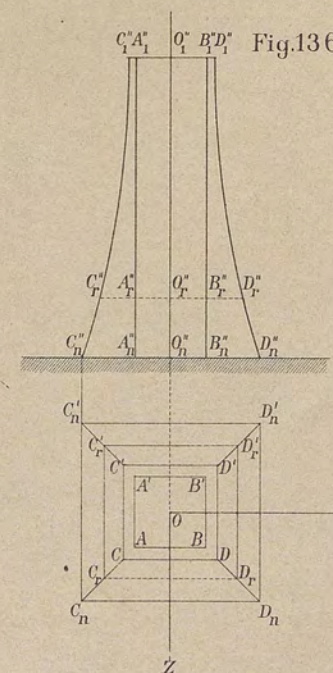


Fig.136





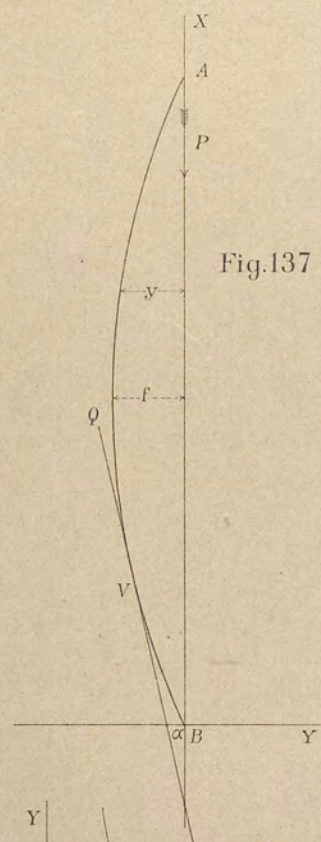


Fig. 137

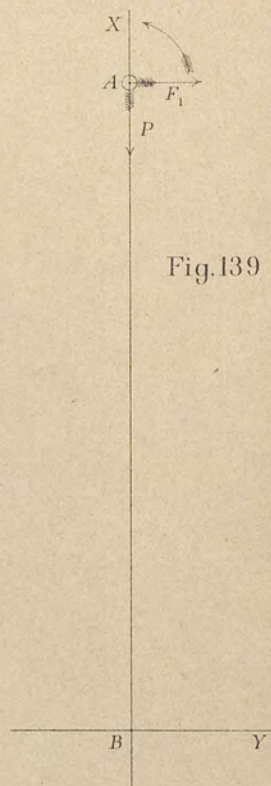


Fig. 139

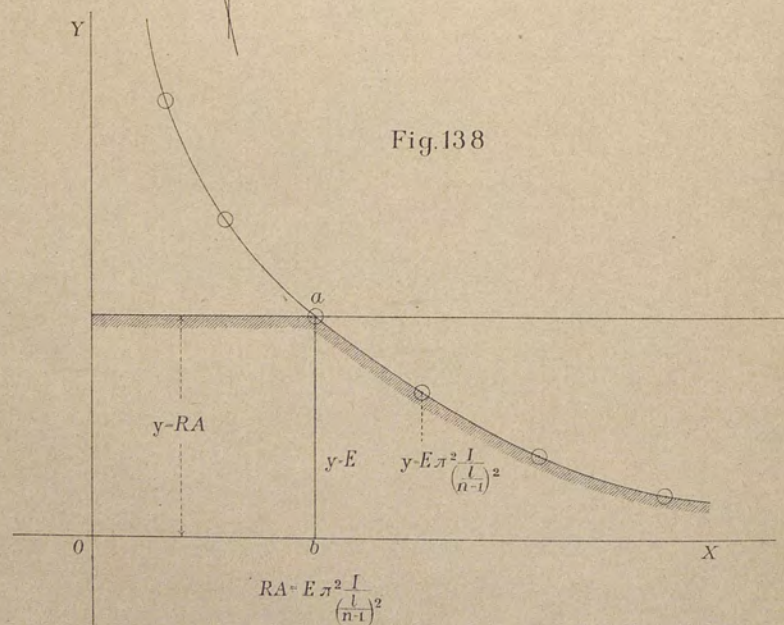


Fig. 138

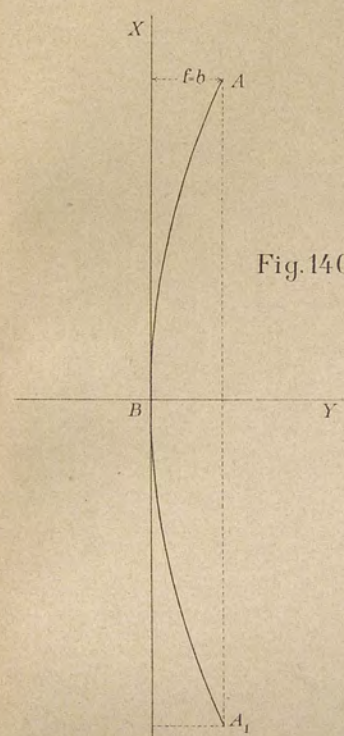


Fig. 140

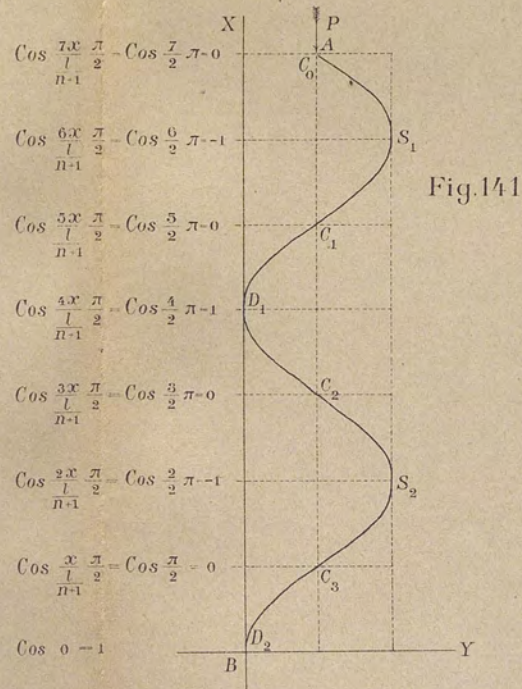


Fig. 141

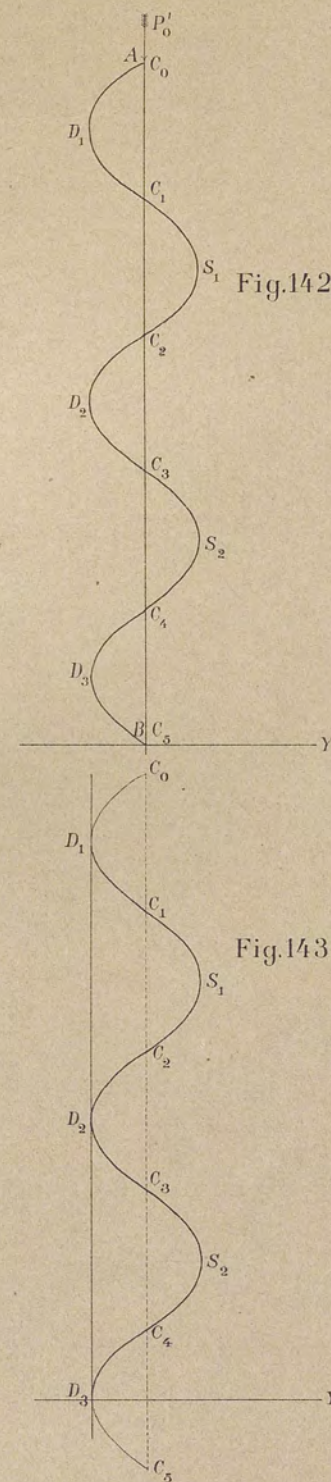


Fig. 142

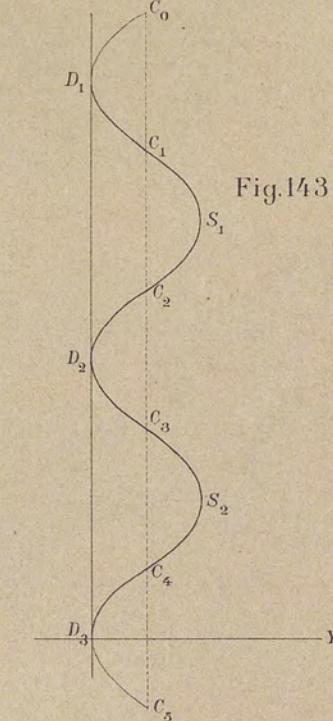


Fig. 143

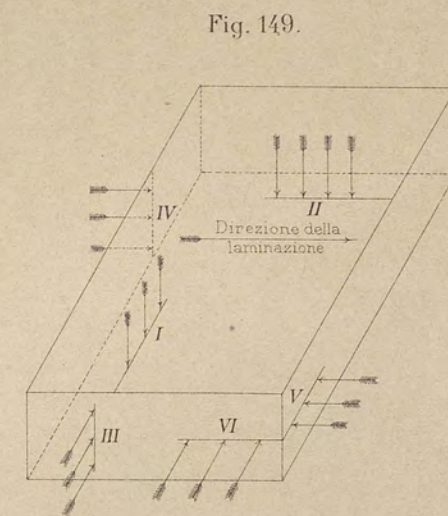
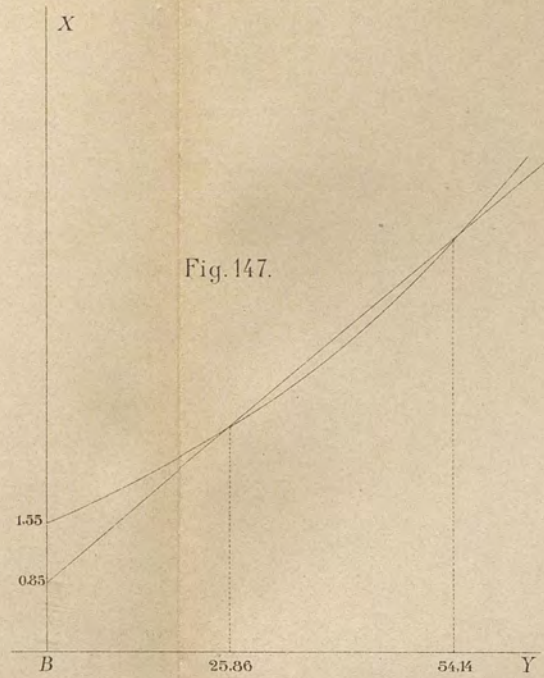
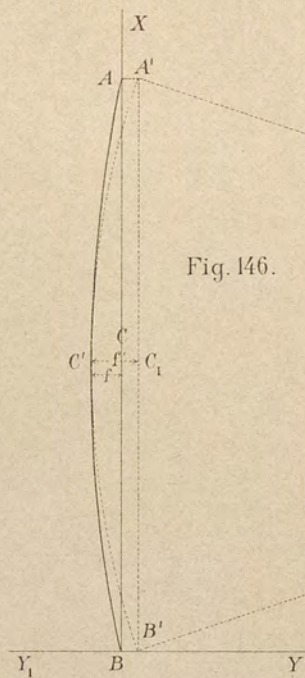
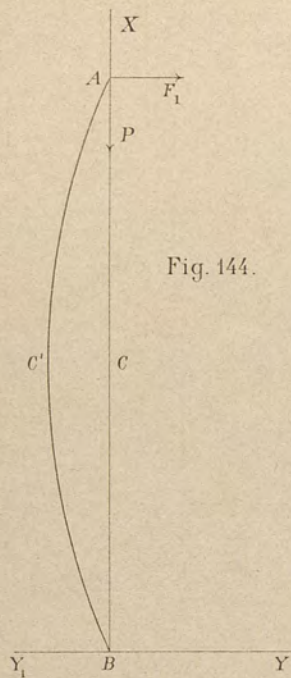


Fig. 145.

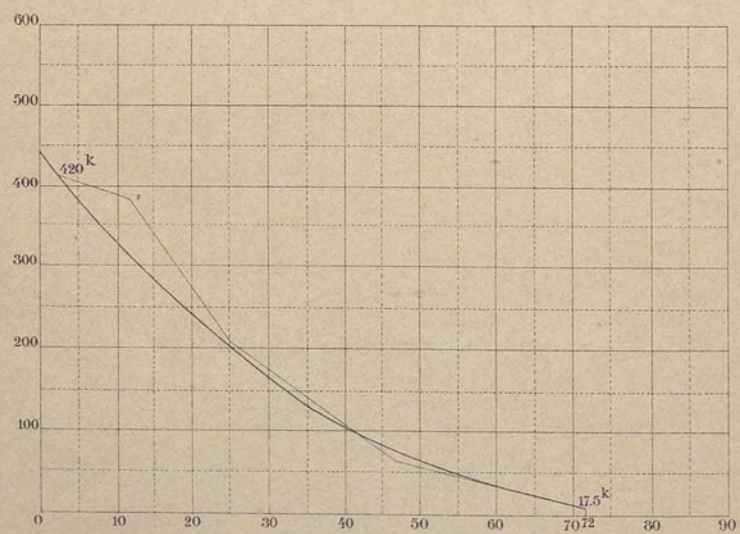


Fig. 148.

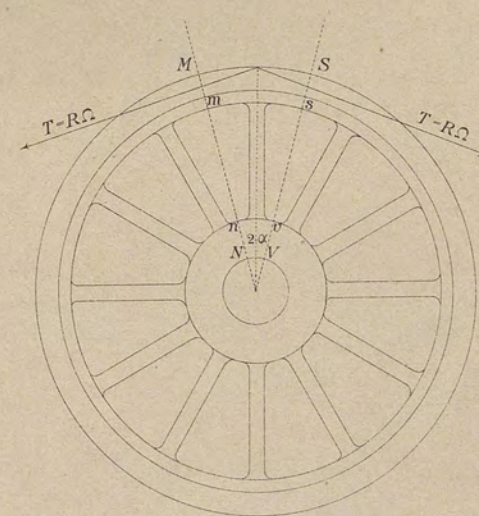
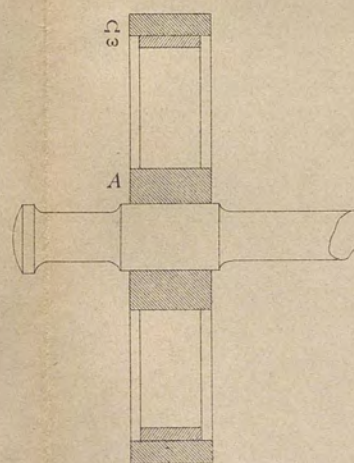


Fig. 150

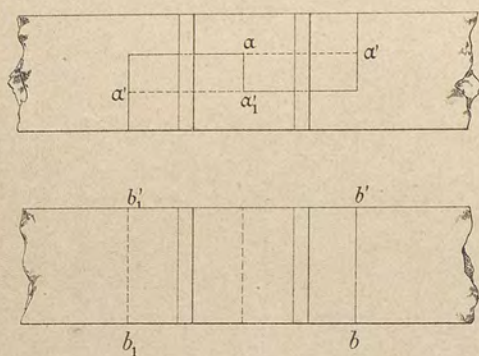


Fig. 156

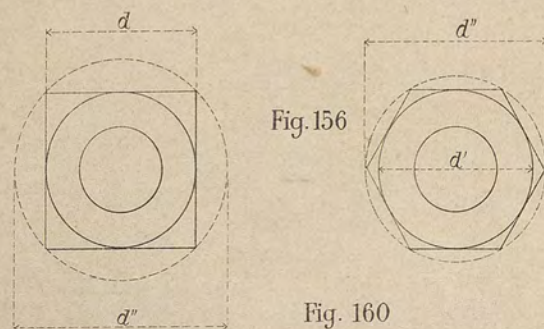


Fig. 160

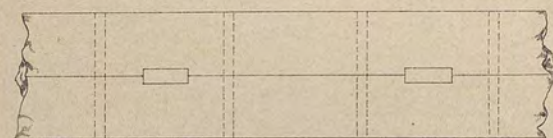


Fig. 164

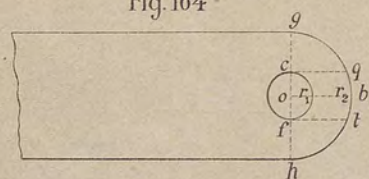


Fig. 166

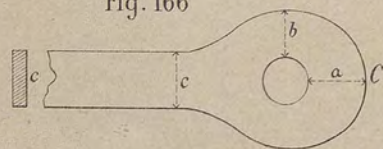


Fig. 151

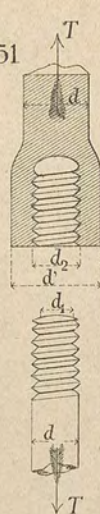


Fig. 152

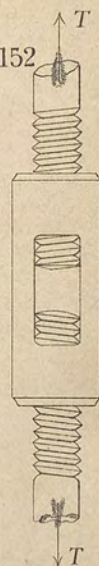


Fig. 153



Fig. 154

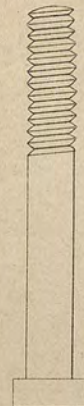


Fig. 158

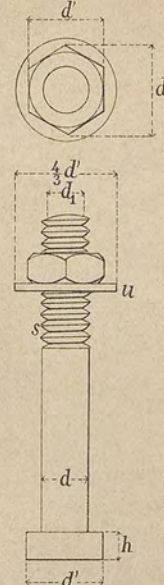


Fig. 155

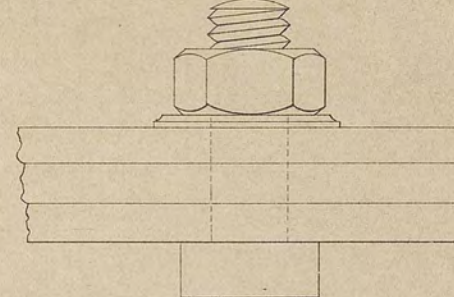


Fig. 157

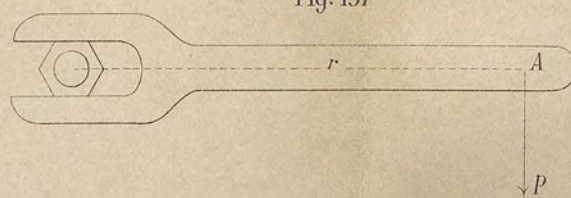


Fig. 159

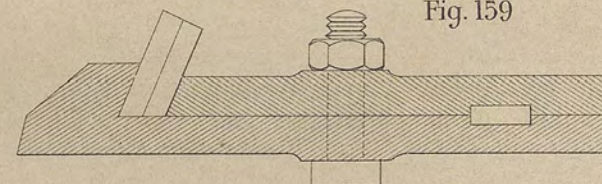


Fig. 162

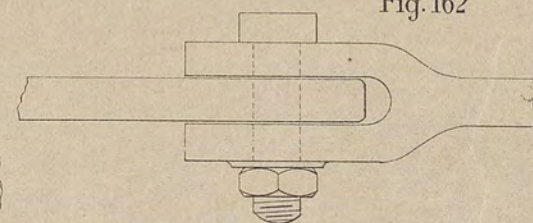


Fig. 165

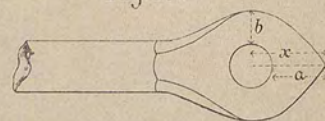


Fig. 168

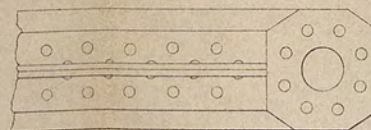


Fig. 167

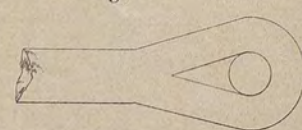
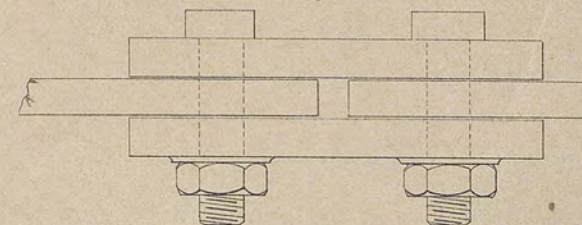


Fig. 163



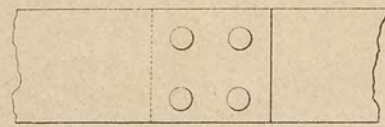


Fig. 169.



Fig. 174.



Fig. 170.

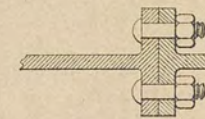


Fig. 175.

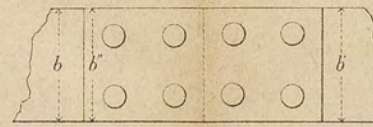


Fig. 171.

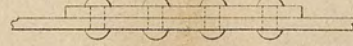


Fig. 176.



Fig. 172.

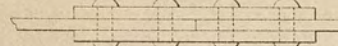


Fig. 177.



Fig. 173.

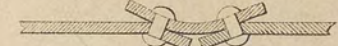


Fig. 182.

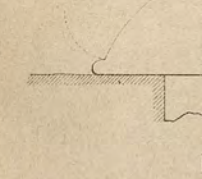
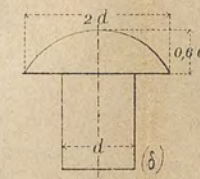
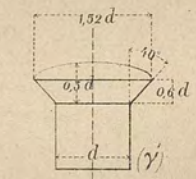
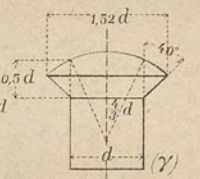
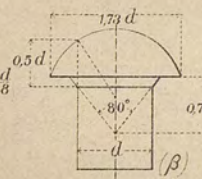
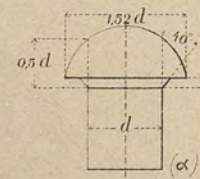


Fig. 180.

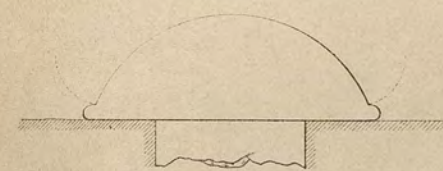


Fig. 181.

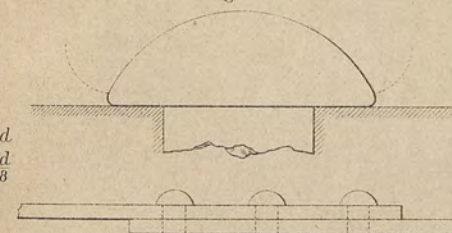


Fig. 185.

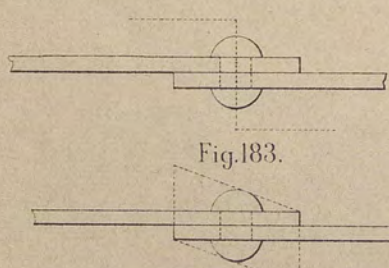
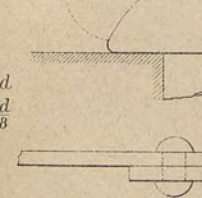
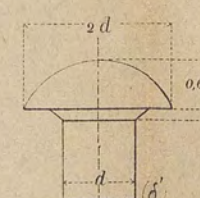
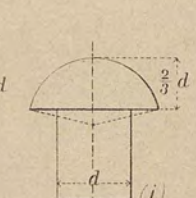
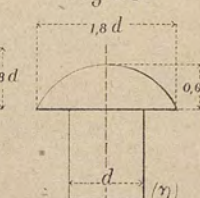
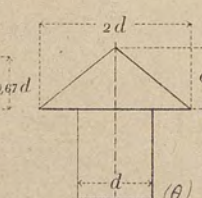
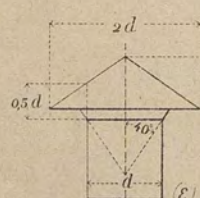


Fig. 183.

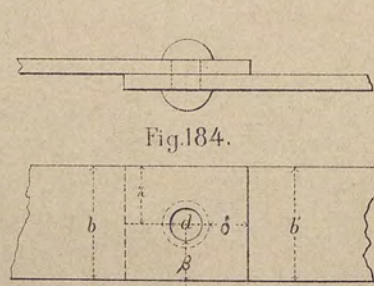


Fig. 184.



Fig. 179.

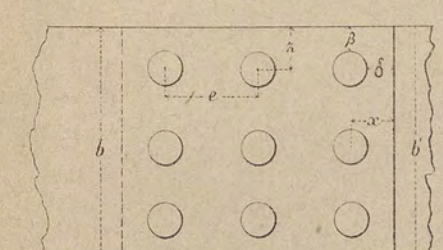
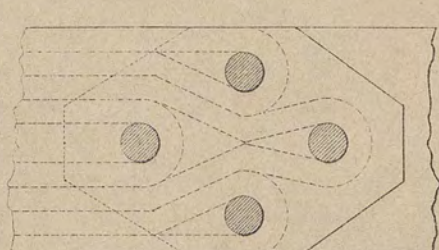


Fig. 186.



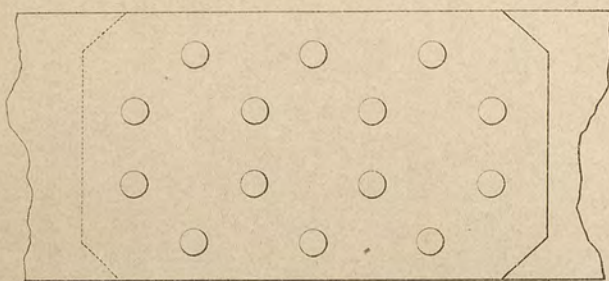


Fig. 187.



Fig. 189.

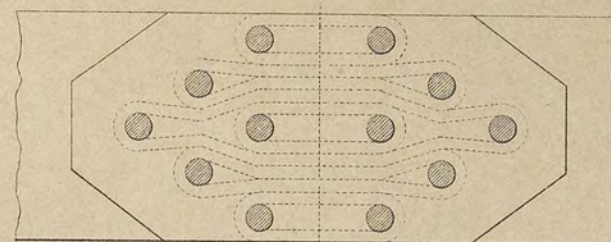


Fig. 190.

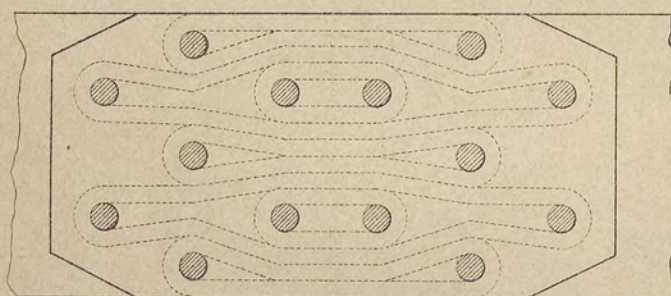
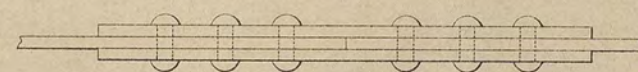
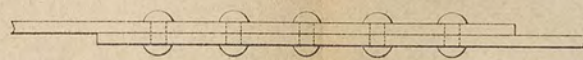


Fig. 188.

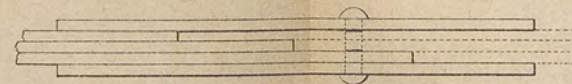
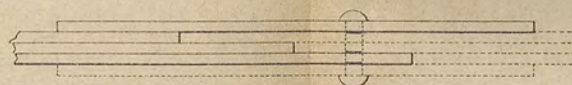
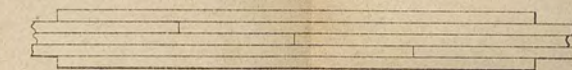


Fig. 192.

Fig. 193.

Fig. 194.

Fig. 191.

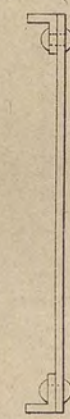
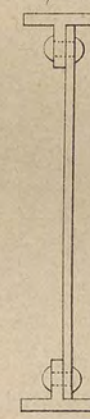
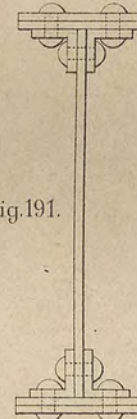


Fig. 195.

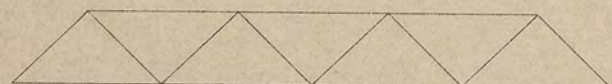


Fig. 197.

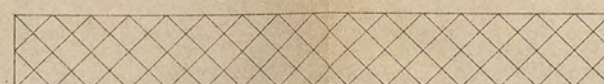


Fig. 196.

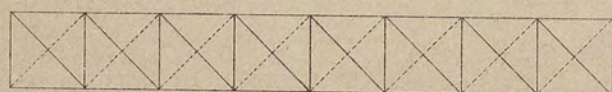
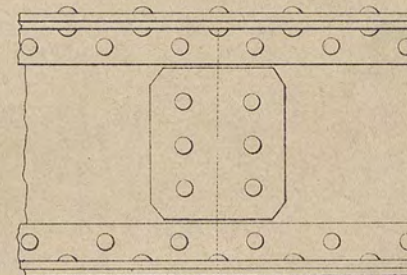
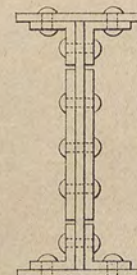


Fig. 198.



Fig. 199.





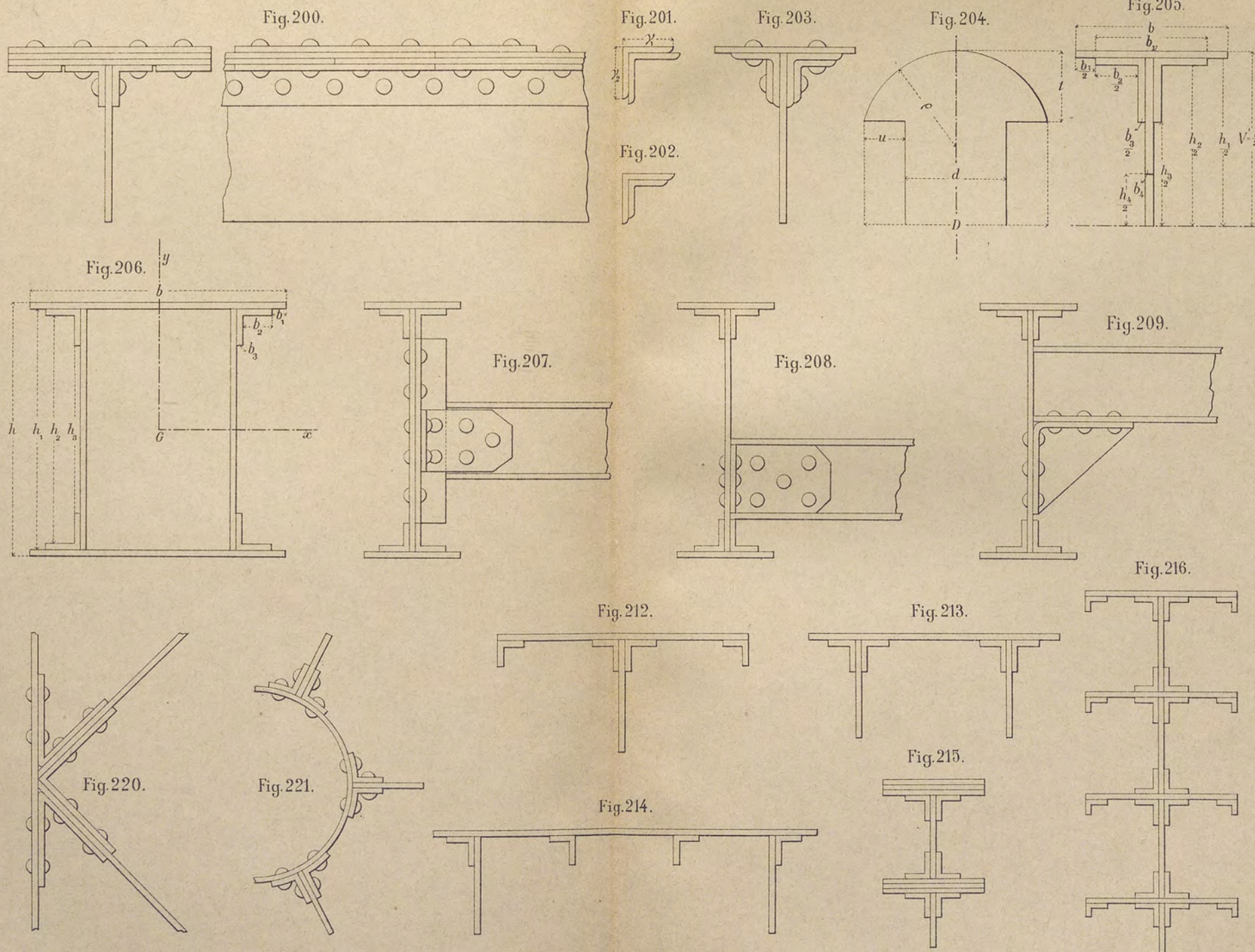


Fig. 217.

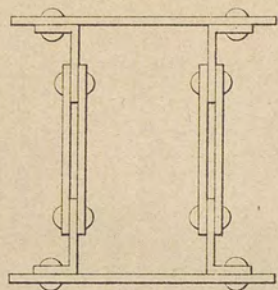


Fig. 218.

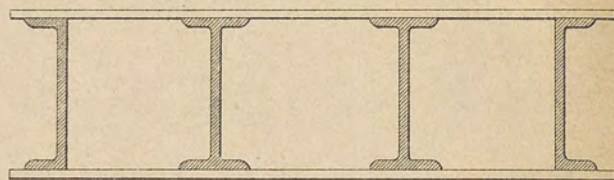


Fig. 219.

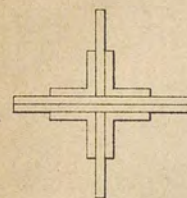


Fig. 220.

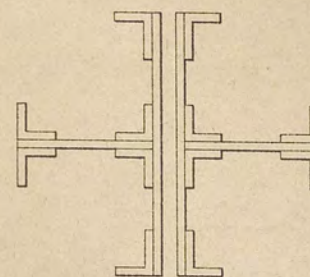


Fig. 221.

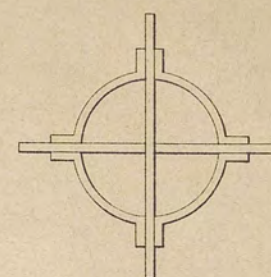


Fig. 222.

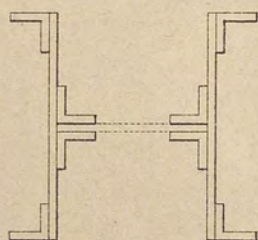


Fig. 223.

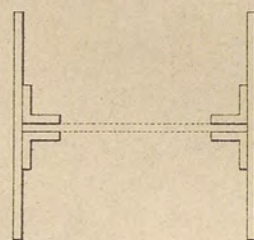


Fig. 224.

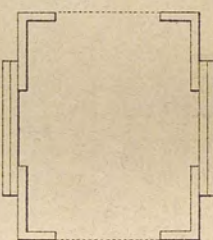


Fig. 225.

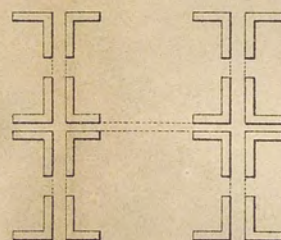


Fig. 226.

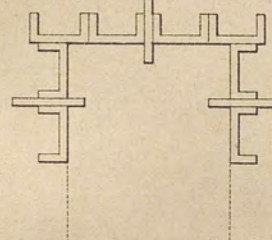


Fig. 227.

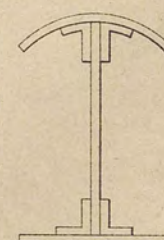


Fig. 228.

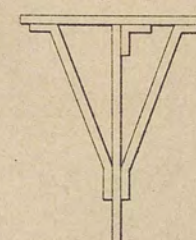


Fig. 229.

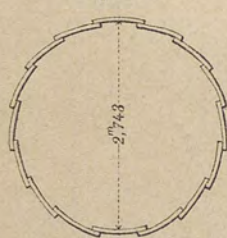


Fig. 230.

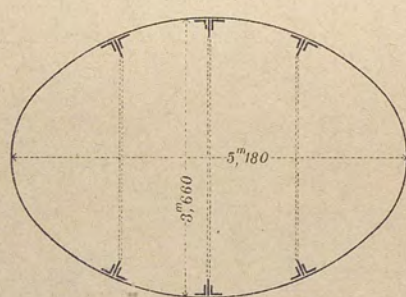


Fig. 232.

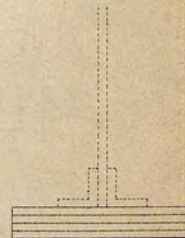


Fig. 233.

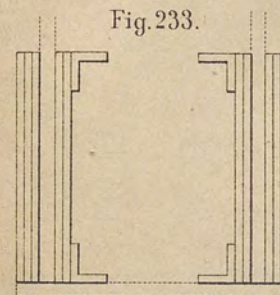


Fig. 235.

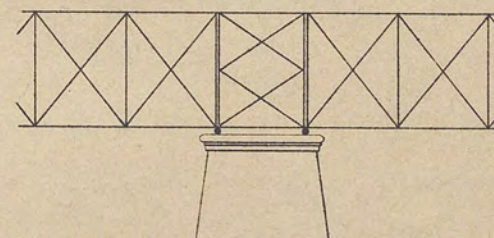


Fig. 231.

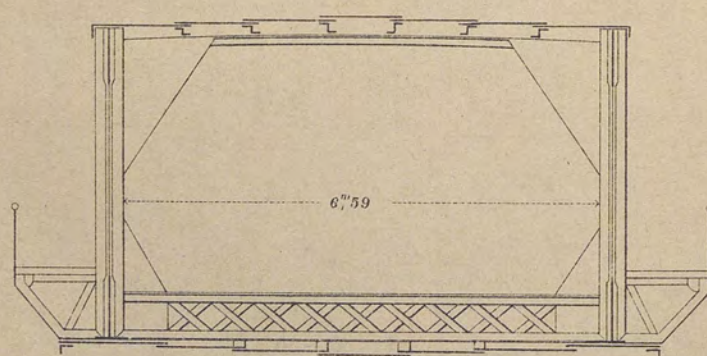


Fig. 234.

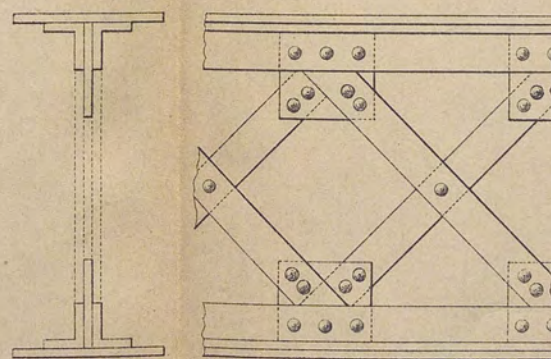


Fig. 236.

