Reactions hyperstatiques différées dans les solides visco-élastiques (*)

Dans un solide élastique si l'on introduit une liaison V supplémentaire après que les charges extérieures sont entrées en action on ne modifie évidemment en aucune manière l'état d'équilibre du système. Il n'en est plus de même si le corps est formé par un matériau visco-élastique, c'est-à-dire s'il est susceptible de donner lieu à un effet de fluage. Dans ce dernier cas en effet la déformation élastique est suivie par une déformation de fluage qui fait entrer en action toute liaison qui tendrait a fixer la position atteinte par les points du corps immédiatement après l'application des charges.

Proposons nous alors d'étudier la loi de variation dans le temps de la réaction X d'une liaison V, introduite après les charges, ayant pour effet d'empêcher le déplacement d'un point dans une direction donnée.

Soit δ_o le déplacement subi par un point P dans une direction p pendant la déformation élastique instantanée, X la valeur de la réaction hyperstatiqne qui aurait pris naissance en P au moment de l'entrée en action des forces si le déplacement de ce point dans la direction p avait été empêché par la présence de la liaison V, E le module élastique du matériau. Supposons d'autre part que le corps donne lieu à fluage linéaire (c'est-à-dire que la déformation de fluage en un point quelconque soit à chaque instant fonction linéaire de l'intensité des contraintes).

Evaluons alors le déplacement que le point P, supposé libéré de la liaison V, aurait subi à un instant t, sous l'effet des charges permanentes et de la réaction X, dans la direction p.

Si l'on désigne par $\varepsilon_o(t)$ la loi de variation du fluage spécifique en fonction du temps, le déplacement δ_1 provoqué par l'action des charges s'écrit:

$$\delta_1 = \delta_o(1 + E\varepsilon_o)$$

Quant à l'effet de la réaction X il comprendrait: *a*) une fraction élastique

$$\delta_a = -X\frac{\delta_o}{X_o}$$

b) une fraction visco-élastique qui peut s'écrire:

$$\delta_b = -\int_0^t X\frac{\delta_o}{X_o}E\frac{d\varepsilon_o}{dt}dt$$

En égalant à zéro la somme algébrique de ces déplacements, ce qui exprime la condition imposée au point P par la liaison V, on obtient l'équation du phénomène sous la forme:

$$\delta_o(1 + E\varepsilon_o) - X_o\frac{\delta_o}{X_o} - \int_0^t X\frac{\delta_o}{X_o}E\frac{d\varepsilon_o}{dt}dt = 0$$

Soit, en dérivant par rapport a t et en ordonnant les termes:

$$\frac{dX}{dt} + XE\varepsilon'_o - X_oE\varepsilon'_o = 0$$

Pour pouvoir préciser la condition limite qui accompagne cette équation il nous faut alors fixer l'origine des temps adoptée pour la loi de variation du fluage spécifique. Pour simplifier, nous supposerons de faire coincider cette origine avec le moment où la liaison supplémentaire V est appliquée au corps. Ce faisant nous ne restreignons en effet en aucune manière la portée de notre étude.

Avec cette hypothèse la condition limite s'écrit:

$$\mathbf{t = 0\ (\varepsilon_o = 0) \qquad X = 0}$$

En intégrant l'équation *a*) on aboutit alors, pour la loi de variation de X, à l'expression très simple:

$$X = X_o(1 - e^{-E\varepsilon_o}) \qquad a)$$

Il suffit d'introduire dans cette formule les données numériques qui caractérisent le fluage du béton pour se rendre compte de l'importance considérable que peut prendre le phénomène qui nous occupe. On trouve en effet que, pour un béton de qualité ordinaire, pour lequel on peut poser:

$$E = 200.000 \ \text{Kg/cm}^2$$

$$\varepsilon_o \ (\text{pour } t = +\infty) = \frac{1}{100.000}$$

la valeur finale de la réaction différée prend la valeur:

$$X\infty = 0{,}8\, X_o$$

Bien entendu ces résultats numériques supposent que la liaison V soit parfaitement rigide. S'il n'en est pas ainsi, autrement dit si V présente également un comportement visco-élastique, la valeur finale de X résultera moins élevée. Pour l'évaluer il suffira de reprendre les raisonnements qui précèdent en introduisant dans l'équation *a)* un terme supplémentaire qui tienne compte du tassement de V.

Il ne serait pas difficile de démontrer que la loi de variation de la réaction X reste inchangée si l'on suppose d'introduire simultanément plusieurs liaisons différées.

Franco Levi

Observations sur l'application du calcul des probabilités au dimensionnement du béton précontraint (*)

Pour vérifier les conditions d'équilibre des constructions on s'est pendant longtemps contenté de comparer les valeurs des contraintes provoquées par les charges prévues avec les contraintes admissibles; ces dernières se déduisant des contraintes de rupture correspondantes par l'application de marges de sécurité qui s'efforçaient de tenir compte de toutes les incertitudes du problème.

Plus récemment on a soutenu, non sans raison, qu'il était plus logique d'essayer de suivre le comportement de la construction, supposée soumise à des charges croissantes, jusqu'à la fin de la résistance. Ceci afin d'évaluer les marges de sécurité réellement disponibles, eu égard aux lois efforts-déformations des matériaux mis en oeuvre.

Dans un cas comme dans l'autre les marges de sécurité que l'on se fixe sont établies en fonction de l'imprécision avec laquelle on connait toutes les données du problème. Ce qui signifie par exemple qu'un projeteur qui calcule « à la rupture » ne considère la multiplication de la charge de service par la marge de sécurité à la rupture que comme un artifice de calcul destiné à faire entrer en ligne de compte, en plus de l'augmentation que la charge peut effectivement subir, les diminutions éventuelles des résistance, les imprécisions des formules employées etc.

C'est en partant de ces dernières considérations que certains calculateurs se sont demandés s'il ne serait pas plus logique, et en même temps plus précis, d'éviter toute fiction en recourant purement et simplement à l'application systématique du calcul des probabilités.

En principe le procédé auquel on est conduit est alors très simple: à partir des lois de dispersion des variables on calcule la probabilité de rupture de la section donnée et on la compare avec la limite que l'on considère acceptable sur la base des conditions de sécurité requises.

Mais ce schéma si séduisant se complique considérablement quand on examine en détail les opérations qu'il comporte. C'est ce que nous allons nous efforcer de montrer à présent.

La fixation de la limite admissible de la probabilité de rupture ne constitue pas une difficulté insurmontable. Des études très intéressantes ont été conduites sur ce point parmi lesquelles je citerai celle de M. Torroja qui propose de s'inspirer à des principes analogues à ceux que l'on adopte dans le domaine des assurances.

Beaucoup plus malaisée par contre l'étude des lois de dispersion des données du problème.

Il est tout d'abord évident que pour établir la loi de dispersion des propriétés mécaniques des matériaux il faudra necessairement procéder à un très grand nombre d'essais. Ne pouvant recommencer l'étude statistique à propos de chaque cas particulier, on sera donc conduit à se servir des résultats obtenus dans des conditions plus ou moins comparables. On entrevoit immédiatement le danger de telles généralisations, surtout si l'on songe qu'il suffit de quelques petits changements dans les conditions opératoires: un perfectionnement technique, la pénurie d'une matière première, un manque de main d'oeuvre spécialisée par exemple pour modifier profondément l'allure des phénomènes étudiés.

A plus forte raison ces observations peuvent elles s'appliquer à l'établissement des lois de dispersion des charges extérieures à propos desquelles on peut même se demander s'il existe des bases rationnelles pour une étude statistique.

Pour d'autres facteurs d'incertitude

(*) Comunicazione presentata al 1° Congresso Intern. del Cemento armalo precompresso.

qui interviennent dans le problème qui nous occupe l'impossibilité d'une étude statistique ne fait d'ailleurs aucun doute. Malfaçons, erreurs accidentelles, etc., devront toujours être classées parmi les impondérables. Pour s'en prémunir il faudra donc se ménager une certaine marge de sécurité quand bien même on serait arrivé à faire entrer dans le calcul des probabilités les principales causes de fluctuation. Ceci semblerait exclure la possibilité de s'affranchir entièrement de la notion de marge de sécurité et ferait apparaître la nouvelle méthode comme un remède seulement partiel aux inconvénients de l'ancienne. En outre des risques sérieux paraissent pouvoir résulter de la difficulté d'établir une nette distinction entre les deux parties du calcul, celle qui serait redevable des méthodes statistiques et celle qui resterait attachée à la notion de marge de sécurité.

Toute une autre série d'obstacles que l'on doit surmonter quand on veut appliquer le calcul des probabilités à l'étude des constructions provient de la complexité même du problème mathématique auquel on se heurte.

Si l'on n'a affaire qu'à deux variables: charge de rupture, contrainte de rupture d'un matériau la question semble au premier abord assez facile. En fait, pour pouvoir effectuer un rapprochement direct entre les deux facteurs, il faut savoir passer de la connaissance de la charge extérieure à celle de la contrainte induite. On ne peut en effet songer à établir directement la loi de dispersion de cette dernière. Dès lors le problème posé n'étant pas linéaire (parce qu'on est au voisinage de la rupture) le calcul se complique, surtout si l'on essaye de tenir compte non seulement des phénomènes plastiques locaux mais aussi des phénomènes d'adaptation qui prennent naissance dans l'ensemble de la construction. Evidemment tout cela peut se simplifier par des approximations, mais alors il faut augmenter la marge de sécurité adoptée par ailleurs.

Cependant le cas de deux variables n'est encore que très particulier. Tout au plus s'applique-t-il aux constructions en acier. Dans le béton armé, et mieux encore dans le béton précontraint, la prise en compte de deux variables seulement ne peut se faire qu'au prix de simplifications discutables. On peut par exemple négliger l'effet des variations de résistance de l'acier; ce qui revient pratiquement à admettre que les sections se rompent toujours par écrasement du béton. Mais comment pourrait-on fonder sur une telle restriction une méthode générale de dimensionnement? Ne risquerait-on pas, pour faciliter le calcul, d'écarter les solutions les plus intéressantes au point de vue économique?

En fait, dans le calcul du béton précontraint, il semble bien que l'on doive tenir compte de trois facteurs au moins: charge, résistance de l'acier, résistance du béton; et rien n'autorise à penser que l'on puisse étudier séparément l'effet de l'un quelconque des trois. Dès lors le calcul de la probabilité de rupture se complique considérablement. On pourra, par exemple, tracer une « surface de rupture » rapportée à trois axes sur lesquels on porte les valeurs des trois variables, attribuer aux éléments de volume un poids spécifique fonction des probabilités qui correspondent à leurs coordonnés et faire le rapport des volumes situés de part et d'autre de la surface de rupture. Restera alors à comparer la probabilité de rupture ainsi calculée à la probabilité de rupture considerée acceptable, compte tenu de la marge de sécurité dont nous avons parlé.

Cette méthode, remarquons-le, n'est qu'un procédé de vérification. Etant donnée sa complexité nous ne voyons pas comment on pourrait la transformer d'une façon simple et plausible en procédé de dimensionnement.

* * *

Les observations sur l'application du calcul des probabilités au dimensionnement des constructions, et plus particulièrement du béton précontraint, que nous venons d'exposer très brièvement sont essentiellement négatives. Faut-il en déduire qu'à notre avis le constructeur n'ait rien à tirer des études qui ont été faites dans cette direction? Ce n'est pas du tout ce que nous voulons dire. Nous croyons en effet que l'introduction des méthodes statistiques, bien qu'elle ne puisse servir comme base exclusive des procédés de dimensionnement, est seule capable de donner un sens précis à la notion de marge de sécurité et d'éviter les erreurs nuisibles auxquelles on peut être facilement conduit quand on généralise sans discernement les artifices de calcul que comportent les méthodes usuelles.

Franco Levi

Sur la mise en compte du fluage dans les constructions hyperstatiques précontraintes (*)

Dans une note présentée par ailleurs M. Levi a mis en évidence une propriété caractéristique des solides visco-élastiques, c'est à dire des corps constitués par un matériau susceptible de fluage: à savoir la capacité que possède un corps de cette nature, lorsqu'il supporte l'action d'un système de charges permanentes, de donner lieu à l'apparition de nouvelles réactions si on le soumet, après que les charges sont déjà entrées en action, à des liaisons supplémentaires.

Le phénomène s'explique très simplement si l'on observe que le fluage tend à faire augmenter graduellement la déformation du corps soumis à l'action des charges. Si de nouvelles liaisons interviennent, la déformation due au fluage, qui par hypothèse est semblable à la déformation élastique préexistante, ne peut pas avoir lieu librement; d'où l'apparition des réactions supplémentaires.

M. Levi a montré que ces réactions, à effet retardé, sont semblables à celles qui prendraient naissance si l'on introduisait les liaisons avant l'entrée en action des charges et que, dans les constructions en béton, le rapport de similitude est extreèmement élevé; autrement dit que l'entrée en action retardée des liaisons ne se traduit pas forcément par une forte réduction des réactions correspondantes.

Nous voulons attirer ici l'attention sur l'importance que la prise en compte de ce phénomène peut avoir dans l'étude d'un grand nombre de constructions précontraintes.

Il est en effet tout à fait courant qu'une construction précontrainte soit réalisée par l'assemblage d'éléments fabriqués isolément, lesquels supportent déjà une partie importante de la charge permanente au moment de la mise en tension des câbles de solidarisation. C'est le cas par exemple des structures formées par l'assemblage de poutres à câble. Celles-ci en effet ne sont avantageuses au point de vue économique que si, au moment où elles sont mises séparément en état de précontrainte, elles supportent déjà une fraction importante du poids mort.

Imaginons alors qu'une poutre continue soit formée par une série de travées dont la mise en précontrainte a été réalisée quand chacune d'elle fonctionnait comme une poutre sur appuis simples, travées que l'on solidarise après coup par la mise en tension de câbles chevalets passant sur les appuis. Au début, avant le blocage des appuis, l'action des charges permanentes agissant sur les poutres doit être calculée en régime isostatique. Il en est de même de l'effet du câble. Après la solidarisation le fluage fera naître des moments sur appuis semblables à ceux qui seraient apparus si la charge permanente et la précontrainte étaient intervenues sur la poutre continue. A la lonque, le fait d'avoir réalisé la continuité avec un certain retard n'aura qu'un effet très réduit sur le régime des efforts. Il me semble que c'est là une circonstance très favorable qu'il serait regrettable de négliger.

Un autre exemple très caractéristique est celui d'un portique à deux rotules dans lequel on introduit deux rotules provisoires aux extrémités de la traverse afin que la mise en précontrainte de celle-ci ne puisse donner lieu à l'apparition d'une poussée négative importante provoquée par le raccourcissement axial. On a souvent recours à cet artifice quand la traverse comprend un grand nombre de joints entre claveaux qui se tassent lors de la mise en tension des câbles. Dans une construction de ce genre, et en régime purement élastique, la poussée hyperstatique due à la charge permanente qui agit sur la traverse avant la suppression des rotules provisoires serait entièrement perdue. Il en serait de même pour la poussée hyperstatique provoquée par la précontrainte. En régime visco-élastique les rotules devront réagir pour contenir le déplacement que les appuis tendront à

(*) Comunicazione presentata al 1° Congresso Intern. del Cemento armato precompresso.