Modo di eseguire alcune delle operazioni che debbono precedere l'esecuzione degli sterri.

. Memoria letta ed approvata per la stampa megli Atti della Società, nelle Adunanze 17 dicembre 1872 e 11 febbraio 1873.

1. Nei progetti che si fanno per opere di sterro e d'interro, è importante, sia per il regolare procedere e per l'economia del lavori, sia per poter determinare con sufficiente approssimazione il costo dell'opera, che il volume dello sterro si divida in un certo numero di parti uguali o disuguali ma abbastanza piccole, e l'interro in un ugual numero di parti ad una ad una uguali a quelle dello sterro : è necessario inoltre trovare il centro di gravita di ciascuno dei solidi, in cui sono stati divisi sia lo sterro sia l'interro.

Le ragioni per cui occorrono queste operazioni di tavolo e l'uso che si deve fare dei risultati ottenuti trovansi esposti minutamente nei migliori trattati di costruzione e particolarmente in quello del prof. Curioni : io mi propongo soltanto di esporre un nuovo metodo, che mi pare più semplice, più spedito e non meno rigoroso di quelli già noti.

2. *Ricerca del volume dei solidi in cui sono stati divisi lo sterro e l'interro.* — Per fare i piani dell'opera da eseguirsi sono stati necessari dei rilevamenti topografici, coi risultati dei quali, si possono trovare le aree di parecchie sezioni sia dello sterro sia dell'interro. Or bene, conducansi due assi ortogonali $0X$, $0Y$ e suppongasi sviluppato sull'asse OX l'asse dello sterro in quella scala, che si troverà più conveniente: siano $0, A_1, A_2 \ldots$ i punti corrispondenti alle sezioni di cui si è trovato l'area: in questi punti si elevino le perpendicolari all'asse OX, e su di esse si prendano le lunghezze OB_0 A_1B_1, $A_2B_2 \ldots$ tali che ciascuna di esse

contenga tante unità della scala quante sono le unità di area contenute nelle sezioni corrispondenti ai punti O, A_1, A_2,...

L'area y di una sezione qualunque M_1 perpendicolare all'asse dello sterro, è una funzione della distanza $OM=x$, cosicchè si ha:

$$y=f(x):$$

se la forma della funzione $f(x)$ fosse nota, si potrebbe descrivere la curva riferita agli assi OX, OY, le cui ordinate rappresenterebbero le aree delle sezioni fatte alle estremità delle ascisse corrispondenti: invece la funzione $f(x)$ non è mai nota; ma se le operazioni topografiche sono state fatte con cura, i punti B_0, B_1, B_2,... si troveranno sempre abbastanza vicini, perchè la curva $y=f(x)$ la quale deve passare per essi, si possa descrivere con discreta approssimazione.

Descritta questa curva si può aver l'area di una sezione retta qualunque dello sterro, misurando l'ordinata corrispondente a questa sezione. Inoltre se l'asse dello sterro è rettilineo, il volume contenuto tra le due sezioni rette infinitamente vicine M_1, M_2 si ottiene moltiplicando l'area di una di esse per la loro distanza $M_1 M_2$ ed è perciò rappresentato dall'area del trapezio infinitesimo $M_1 N_1 N_2 M_2$: ciò non è più rigorosamente vero, se l'asse dello sterro non è rettilineo, tranne nel caso che l'asse passi pel centro di gravità di tutte le sezioni rette; tuttavia per la pratica si può riguardare come vero in tutti i casi che l'area del trapezio infinitesimo $M_1 N_1 N_2 M_2$ rappresenti il volume dello sterro contenuto tra le sezioni M_1, M_2.

Dunque il volume contenuto tra due sezioni qualunque, per esempio, tra le sezioni A_2, A_3 è rappresentato dall'area $A_2 B_2 B_3 A_3$, la quale si può rapidamente trovare colle regole di Bezout o di Simpson, e più rapidamente ancora col planimetro polare.

Si cerchino in tal modo i volumi contenuti tra certe se-

zioni determinate, per es., tra le sezioni O, A_1; $A_1 A_2$; A_2, A_3;... poscia presi due nuovi assi ortogonali OD, OV, si portino di nuovo sull'asse OD a partire dall'origine le lunghezze OA_1, OA_2, OA_3,.., misurate nella figura precedente, si elevino nei punti A_1, A_2,... le perpendicolari all'asse OD, e si prendano su di esse le lunghezze $A_1 C_1$, $A_2 C_2$,..., che contengono tante unità della scala quante sono le unità di volume contenute nei tronchi dello sterro OA_1, OA_2, OA_3...

Si consideri ora la sezione M posta alla distanza x dall'origine: il volume contenuto tra le sezioni O, M è una funzione di x, che, se fosse conosciuta, permetterebbe di descrivere la curva, le cui ordinate rappresentano i volumi contenuti tra la sezione O e le sezioni corrispondenti alle ordinate stesse, la quale passa pei punti O, C_1, C_2, C_3... Ora, se questi punti sono alquanto vicini, essi bastano a determinare quella curva con sufficiente approssimazione: perciò io la supporrò descritta.

Tutte le precedenti operazioni relative allo sterro, si devono ripetere per l'interro.

3. *Ricerca dei solidi dell'interro corrispondenti a quelli dello sterro.* — Rappresenti OS la curva dei volumi dello sterro riferita agli assi OD, OV, ed $O'I$, la curva dei volumi dell'interro riferita agli assi OD', OV', le quali curve abbiam veduto nel numero precedente come si descrivano. Le ordinate estreme $A_6 B_6$, $a_6 b_6$ sono uguali, se, come supponiamo, il volume dello sterro è uguale a quello dell'interro.

Siano OA_1, $A_1 A_2$, $A_2 A_3$,... le parti in cui è stato diviso lo sterro: prendansi le lunghezze delle ordinate $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, si portino in $O'c_1$, $O'c_2$, $O'c_3$,... sull'asse $O'V'$, e dai punti c_1, c_2, c_3,... si tirino le rette $c_1 b_1$, $c_2 b_2$, $c_3 b_3$,... parallele all'asse OD': poi dai punti b_1, b_2, b_3,... si tirino le ordinate $b_1 a_1$, $b_2 a_2$, $b_3 a_3$...: saranno $O'a_1$, $a_1 a_2$, $a_2 a_3$,... le parti dell'interro rispettivamente uguali alle parti OA_1, $A_1 A_2$, $A_2 A_3$,... dello sterro.

4. *Determinazione del centro di gravità di ciascuna delle parti in cui sono stati divisi lo sterro e l'interro.* — Consideriamo, per es., la parte $A_1 A_2$ dello sterro e cominciamo a cercare in quale sezione retta cade il suo centro di gravità. Prendiamo sull'arco $B_1 B_2$ i due punti N_1 N_2 infinitamente vicini e conduciamo le ordinate $N_1 M_1$, $N_2 M_2$, le quali rappresentano i volumi dello sterro dalla sezione O sino alla sezione M_1 e dalla sezione O sino alla sezione M_2: la loro differenza $N_2 n$ rappresenta il volume infinitesimo dello sterro contenuto tra le sezioni M_1, M_2, e il momento di questo volume rispetto all'ordinata $B_2 A_2$ è uguale ad $\overline{N_2 n} \times \overline{N_2 P_2}$, ossia è rappresentato dall'area del trapezio $P_1 N_1 N_2 P_2$: dunque il momento rispetto all'ordinata $B_2 A_2$ del volume di tutto il solido contenuto tra le sezioni A_1, A_2, il qual volume è dato da $B_2 D$, ed è rappresentato dall'area del triangolo mistillineo $B_1 N_1 B_2 D$; perciò dividendo quest'area per $D B_2$ si ottiene la distanza del centro di gravità cercato dalla sezione A_2, e resta così determinata la sezion retta in cui cade il centro di gravità del solido $A_1 A_2$.

Ci resta ancora a determinare il punto di quella sezione in cui cade questo centro: il più delle volte si potrà ritenere senz'altro che esso coincida col centro di gravità della sezione. Questo punto poi si trova così: si cerchi il centro di gravità delle sezioni rilevate sul terreno e si rappresentino nei disegni relativi allo sterro le proiezioni orizzontali e verticali di questi punti, poi per tutte le proiezioni orizzontali si descriva una curva continua, e lo stesso facciasi per le proiezioni verticali: queste due curve si possono riguardare come le proiezioni del luogo geometrico dei centri di gravità delle sezioni perpendicolari all'asse dello sterro. L'intersezione di questa linea colla sezione in cui cade il centro di gravità del solido $A_1 A_2$ ci dà il centro di gravità di quella sezione e per noi anche di questo solido.

Procedendo in questo modo io credo che si possa nella maggior parte dei casi ottenere con poche e semplici operazioni un'approssimazione sufficiente nella pratica. Esporrò tuttavia ancora un modo assai semplice, col quale si può con maggior rigore trovare la posizione del centro di gravità di uno qualunque dei solidi componenti lo sterro e l'interro, per es., del solido $A_1 A_2$.

Per mezzo delle proiezioni già ottenute del luogo geometrico dei centri di gravità delle sezioni rette dello sterro si possono facilmente misurare le distanze del centro di gravità di una qualunque di queste sezioni da due piani ortogonali l'uno orizzontale e l'altro verticale scelti ad arbitrio: or bene, da diversi punti della curva dei volumi $O S$ relativa allo sterro, per es., dai punti $O, B_1, B_2, B_3, \ldots$ abbasso le perpendicolari, $O C_0$, $B_1 C_1$, $B_2 C_2$, $B_3 C_3, \ldots$ sulla retta $C_0 H$ parallela all'asse $O V$, e su di esse prendo le lunghezze $C_0 D_0$, $C_1 D_1$, $C_2 D_2$, $C_3 D_3, \ldots$ rispettivamente uguali alle distanze dei centri di gravità delle sezioni O, A_1, $A_2, \ldots$ dal piano orizzontale di proiezione: se i punti D_0, $D_1, D_2, \ldots$ non sono molto distanti l'uno dall'altro, essi determinano abbastanza bene la curva la quale ha per ascissa presa sull'asse $C_0 H$ il volume del solido contenuto tra la sezione O e un'altra sezione qualunque; e per ordinata parallela all'asse $O D$ la distanza del centro di gravità di quest'ultima sezione dal piano orizzontale di proiezione.

Prendiamo sulla curva dei volumi i due punti N_1, N_2 infinitamente vicini, e conduciamo nella curva $D_0, D_1, D_2 \ldots$ le ordinate corrispondenti $Q_1 R_1$, $Q_2 R_2$: l'elemento di volume contenuto tra le sezioni M_1, M_2 è rappresentato da $N_2 n = Q_1 Q_2$ e il suo centro di gravità trovasi alla distanza $R_1 Q_1$ dal piano orizzontale; onde il suo momento rispetto a questo piano è uguale a $\overline{Q_1 Q_2} \times \overline{Q_1 R_1}$, ossia è rappresentato dall'area del trapezio infinitesimo $Q_1 R_1 R_2 Q_2$. Dunque il momento del solido $A_1 A_2$ rispetto al piano orizzontale di proiezione è rappresentato dall'area $C_1 D_1 R_1 D_2 C_2$; cosicchè dividendo quest'area per $C_1 C_2$, che rappresenta il volume del solido considerato, si ottiene la distanza del centro di gravità di questo solido dal piano orizzontale di proiezione.

Sia ancora $E_0\, E_1\, E_2 ...$ la curva descritta prendendo le stesse ascisse come per la curva $D_0\, D_1\, D_2 ...$ e per ordinate le distanze dei centri di gravità delle sezioni $O, A_1, A_2, ...$ dal piano verticale di proiezione: dividendo l'area $C_1\, E_1\, S_1\, E_2\, C_2$ per $C_1\, C_2$ si ottiene la distanza del centro di gravità del solido $A_1\, A_2$ dal piano verticale di proiezione.

5. *Relazioni geometriche tra le curve dei volumi e quelli delle aree delle sezioni.* — Se si rappresenta con

$$y = f(x)$$

l'equazione della curva delle aree delle sezioni (fig. 1), l'area contenuta tra questa curva, gli assi delle x e delle y e l'ordinata corrispondente all'ascissa x è:

$$\int_o^x f(x)\, d\, x,$$

onde l'equazione della curva dei volumi (fig. 2) è:

$$y = \int_o^x f(x)\, d\, x.$$

Differenziando questa equazione si ottiene:

$$\frac{d\, y}{d\, x} = f(x) \qquad \frac{d^2\, y}{d\, x^2} = f'(x).$$

Dall'espressione di $\frac{d\, y}{d\, x}$ si deduce in un modo facilissimo per condurre la tangente alla curva dei volumi in un punto qualunque. Vogliasi, per es., condurre la tangente nel punto B_2: conducasi per questo punto la retta $B_2\, U$ parallela all'asse $O\, D$ ed uguale ad un'unità della scala, dal punto U si innalzi la perpendicolare alla retta $B_2\, U$ e prendasi $U\, T$ uguale all'ordinata $A_2\, B_2$ della curva delle aree (fig. 1): la retta $B_2\, T$ è la tangente alla curva dei volumi nel punto B_2. Conducendo allo stesso modo le tangenti alla curva dei volumi in diversi punti, si può descrivere questa curva con grande approssimazione.

Dall'espressione di $\frac{d^2\, y}{d\, x^2}$ si vede che nei tratti in cui l'ordinata della curva delle aree è crescente, la curva dei volumi è convessa verso l'asse $O\, D$, poichè la derivata $f'(x)$ è positiva: nei tratti in cui l'ordinata della curva delle aree è decrescente, la curva dei volumi è concava verso l'asse $O\, D$: infine ai punti di massima o minima ordinata nella curva delle aree delle sezioni, pei quali si ha $f'(x) = o$, corrispondono nella curva dei volumi i punti d'inflessione.

Torino, 12 dicembre 1872.

CASTIGLIANO ALBERTO.

Figura 1ª

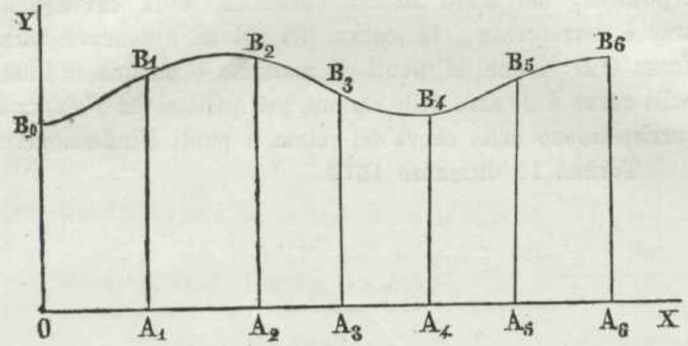


Figura 2ª

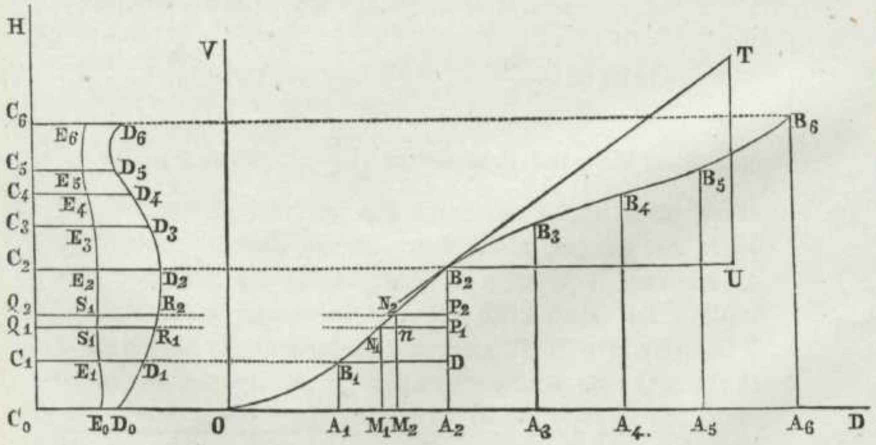
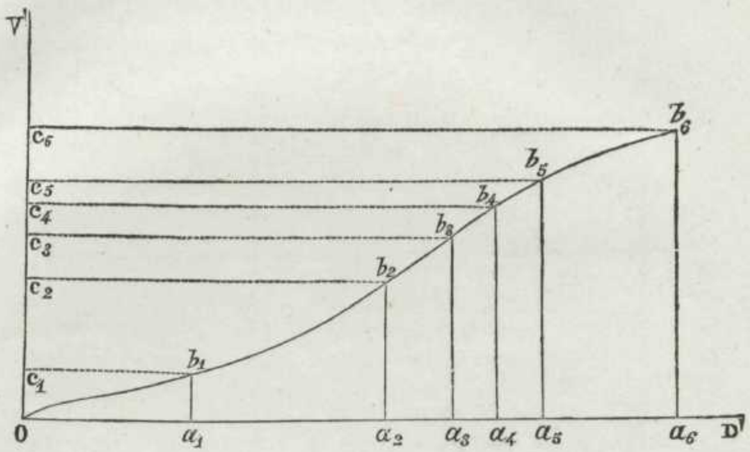


Figura 3ª



INDICE DELLE MATERIE

contenute nei due fascicoli dell'anno 1872

INDICE DELLE TAVOLE

Le Tavole pubblicate si riferiscono alle seguenti Memorie:

1. Sulla rottura degli assi dei veicoli ferroviarii — Considerazioni e calcoli del prof. Giovanni Sacheri (Tav. I).
2. Estensione del principio di elasticità del generale Menabrea ad un qualsiasi sistema articolato complesso, e non equilibrato, con applicazione al calcolo di stabilità delle centine della tettoia della stazione di Arezzo — Memoria del prof. Giovanni Sacheri (Tav. II).
3. Intorno ad alcuni nuovi strumenti idrometrici — Memoria dell'ingegnere Giuseppe Tonta (Tav. IV).
4. Sugli sforzi provocati nelle centine poligonali come quelle della grande tettoia di Arezzo, e sulla loro stabilità — Memoria del cav. ing. Curioni (Tav. III e V),