

liche: un rivestimento così attuato viene quindi a costare assai più di uno realizzato mediante piastre di legno di gesso o simili. Vi sono però casi nei quali l'impiego di piastre metalliche può essere una necessità: allorché, ad esempio, nell'ambiente nel quale si desidera o conviene impiegare un simile rivestimento, siano gas a temperatura elevata, oppure quando si ricorra a questo metodo per l'assorbimento dei rumori sui veicoli: in tal caso adoperando per esempio sottili lastre di alluminio.

È inoltre frequentissimo l'impiego di sottili lastre forate sopra cuscini di materiale poroso: fibre di legno lana di vetro e simili. In rivestimenti così fatti l'assorbimento del suono per porosità si com-

bina con l'assorbimento per risonanza: la cavità del risuonatore venendo ad essere riempita di materiale poroso. Interessante quindi ed anzi necessaria una buona conoscenza delle proprietà dei risuonatori semplici, come quelli qui considerati.

Per questi vari motivi di carattere scientifico e pratico appare interessante condurre ricerche su questo tipo di rivestimento assorbente: i risultati presentati in questa nota hanno soltanto un valore di primo orientamento di una ricerca in corso.

Antonio Gigli

Torino - Società Torinese Esercizi Telefonici.

a Giancarlo Vallauri

Ottica e microonde

L'ottica delle oscillazioni elettriche, iniziata dal Righi alla fine del secolo scorso, ha avuto larghi sviluppi in questi ultimi anni con l'avvento dei nuovi tubi e dei nuovi metodi per la generazione e la rivelazione delle onde centimetriche. Non solo è possibile oggi ripetere agevolmente con microonde le esperienze del Righi, ma anche eseguirne molte altre, non riproducibili con i metodi ottici ordinari. Di alcune ricerche compiute in questo campo — ricerche su mezzi dispersivi metallici, su onde evanescenti, su azioni meccaniche delle onde elettromagnetiche, sulla propagazione di onde in strutture periodiche, sulla relatività nella propagazione in guide d'onda — si rende conto succintamente nel presente lavoro.

1. - Premessa

Nel 1897 A. Righi esponeva nel volume « Ottica delle oscillazioni elettriche » una numerosa serie di esperienze rivolte a dimostrare l'analogia fra i fenomeni dipendenti dalle oscillazioni elettriche e quelli dell'ottica. Le conoscenze, già allora molto approfondite nel campo dell'ottica, servirono così per la prima volta, da guida per esplorare uno nuovo e vastissimo, quello delle onde elettromagnetiche.

In seguito all'enorme sviluppo raggiunto attualmente dalla tecnica delle onde elettromagnetiche centimetriche o microonde, è possibile non solo ripetere agevolmente le esperienze del Righi, ma anche eseguirne molte altre, che, pur prevedibili nell'ottica non sarebbero riproducibili con i metodi ottici ordinari.

In linea generale possiamo dunque affermare che l'ottica ha indicato molti studi fecondi da eseguire nel campo delle onde centimetriche. In questa nota ricorderemo quelli dedicati ai mezzi dispersivi metallici alle onde evanescenti, alle azioni meccaniche delle onde polarizzate ellitticamente, alla propagazione in strutture periodiche, alla relatività nella propagazione in guide d'onda.

Una speciale menzione merita la spettroscopia molecolare con microonde, che ha già fornito risultati di grande interesse nello studio della struttura della materia.

2. - Mezzi dispersivi metallici.

È noto ⁽¹⁾ che fra due superfici piane, parallele perfettamente conduttrici, il campo elettroma-

gnético può propagarsi in infiniti modi appartenenti a due tipi: *TE* (trasversali elettrici), quando il campo elettrico \vec{E} ha direzione invariabile, parallela alle superficie conduttrici; *TM*, quando ciò accade per il campo magnetico \vec{H} . Nel primo caso, il campo e. m. si propaga in direzione (z) normale ad \vec{E} ; nel secondo si propaga in direzione normale ad \vec{H} .

La velocità di fase secondo z per i modi *TE* è:

$$(1) \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{2b}\right)^2}},$$

ove ϵ , μ sono le costanti dielettrica e magnetica del mezzo interposto fra le superficie, che supponiamo perfetto (conduttività $\sigma = 0$), b è la distanza fra le due superficie conduttrici; X la lunghezza d'onda, che il campo e. m. assumerebbe nel dielettrico illimitato, ove si propagherebbe con velocità $c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$; n un intero qualunque. Vi sono dunque infiniti modi *TE*, che si indicano col simbolo TE_{on} . Ciascun modo è caratterizzato dall'esistenza di una lunghezza d'onda critica, per la quale $\sqrt{1 - (n\lambda/2b)^2} = 0$, cioè:

$$(2) \quad \lambda_c = \frac{2b}{n},$$

cui corrisponde una frequenza critica o di taglio:

$$(3) \quad f_c = \frac{v}{\lambda_c}.$$

Per $\lambda < \lambda_c$, cioè $f > f_c$, il campo e. m. si propaga fra le superficie conduttrici con velocità v sempre maggiore di c_0 . Per $\lambda \rightarrow \lambda_c$ ($f \rightarrow f_c$), la velocità v

tende all'infinito. Per $\lambda > \lambda_c$ ($f < f_c$), la velocità è immaginaria, cioè il campo non si propaga, è stazionario, e si attenua al crescere della z: si tratta allora di onde evanescenti. È possibile definire l'impedenza caratteristica della disposizione considerata (superficie conduttrici-dielettrico):

$$(4) \quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{2b}\right)^2}};$$

si osserva che tale impedenza è, per ciascun modo, proporzionale alla velocità di fase.

Si presenta anche spontaneamente la definizione di indice di rifrazione del sistema:

$$n = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}v} = \sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{2b}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}.$$

Analoghe conclusioni valgono per i modi *TM*, distinguibili l'uno dall'altro per un numero intero n ; modi TM_{on} . Notevole il fatto che, per il modo TM_{00} , la propagazione avviene come nel dielettrico illimitato.

Limitandosi a considerare la propagazione secondo modi TE_{on} , la possibilità di definire un indice di rifrazione suggerisce che un fascio di superficie conduttrici parallele, con equidistanza b , costituisce un « mezzo » dispersivo per onde polarizzate rettilineamente col vettore elettrico parallelo alla comune giacitura delle superficie stesse. Per ogni modo l'indice sarà reale e sempre minore dell'unità, se $\lambda < \lambda_c$. Con mezzi siffatti, si potranno attuare lenti, prismi e così via, suscettibili di essere calcolati con i metodi dell'ottica ordinaria ⁽²⁾. Il Centro di studio per la Fisica delle Microonde ha compiuto lunghe accurate ricerche in questo campo ⁽³⁾.

Consideriamo ad esempio il caso di una lamina a facce parallele, attuata con un fascio di strisce metalliche parallele fra loro e normali alle facce della lamina (fig. 1: a , a' sono le facce della lamina, s_1 , s_2 ,... le strisce metalliche); supponiamo inoltre che la lamina sia situata nel vuoto, e vuoto sia anche lo spazio fra le strisce metalliche. Un fascio di onde elettromagnetiche piane, polarizzate rettilineamente, col vettore elettrico parallelo ad una qualunque intersezione fra le strisce e le facce della lamina, incida sulla faccia a con angolo di incidenza ϑ_1 . Nel caso della figura, il vettore elettrico è normale al piano di incidenza. Il fascio di onde incidenti dà luogo ad un fascio di onde riflesse e ad un fascio di onde rifratte. Valgono ovviamente tutte le leggi di Snell e di Fresnel, per cui l'angolo di riflessione è eguale all'angolo di incidenza e l'angolo di rifrazione ϑ_2 deve soddisfare alla condizione:

$$(6) \quad n = \frac{\text{sen } \vartheta_1}{\text{sen } \vartheta_2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}.$$

⁽²⁾ E. KOCK, *Metal Lens Antennas*, Proc. I.R.E., 1946, XXXIV, p. 828.

⁽³⁾ M. SCHAFFNER, *Lenti metalliche per microonde*, A. F., 1948, XVII, p. 147.

Se $\lambda < \lambda_c$, l'indice di rifrazione è reale, minore sempre dell'unità. In tal caso esiste un angolo limite $\bar{\vartheta}_1$, per il quale $\text{sen } \bar{\vartheta}_1 = \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}$; allora, per angoli di incidenza minori dell'angolo limite, si avranno nel « mezzo metallico » onde ordinarie; in caso contrario si avranno onde evanescenti. Analoghe considerazioni valgono per la seconda faccia a' della lamina.

Sono naturalmente vevoli le note espressioni per il coefficiente di riflessione R e per il coefficiente T di trasmissione: poichè \vec{E} è perpendicolare al piano di incidenza si ha, com'è noto:

$$(7) \quad R = \frac{\text{sen } (\vartheta_2 - \vartheta_1)}{\text{sen } (\vartheta_2 + \vartheta_1)},$$

$$T = 1 - R = \frac{2 \text{sen } \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{\text{sen } (\vartheta_1 + \vartheta_2)}.$$

Anche queste espressioni hanno trovato eccellente conferma in una serie di esperienze compiute presso il Centro.

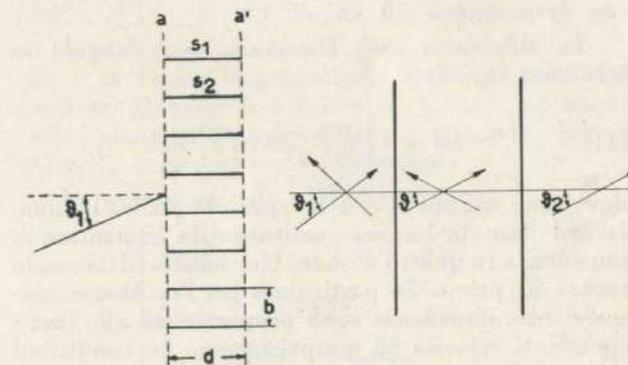


Fig. 1.

Fig. 2.

Queste esperienze suggeriscono lo studio di disposizioni antiriflettenti per le ottiche a microonde, analoghe a quelle delle ottiche trattate ordinarie.

Nel caso di un'onda che incide nel modo indicato sulla superficie di separazione a (fig. 1), con angolo di incidenza ϑ_1 , si può definire ⁽⁴⁾ l'impedenza intrinseca del primo mezzo, legata all'angolo di incidenza, per l'onda incidente:

$$(8) \quad Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sec \vartheta_1.$$

Analogamente le impedenze intrinseche per le onde riflesse e trasmesse sono:

$$(9) \quad Z = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sec \vartheta_1,$$

$$Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \sec \vartheta_2.$$

⁽⁴⁾ H. G. BOOKER, *The Elements of Wave Propagation Using Impedance Concept*, J.I.E.E., 1947, III, p. 171.

Per diminuire la riflessione sulla superficie di incidenza a si può interporre fra il primo e il secondo mezzo una lamina a facce parallele, costituita come la precedente, ma con equidistanza diversa fra le strisce, cioè con diverso indice di rifrazione. Con riferimento alla fig. 2 e con notazioni ovvie, si ha:

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sec \vartheta_1,$$

$$(10) \quad Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \sec \vartheta,$$

$$Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{2c}}\right)^2}} \sec \vartheta_2;$$

inoltre devono essere soddisfatte le condizioni:

$$\frac{\sin \vartheta_1}{c} = \frac{\sin \vartheta}{v} = \frac{\sin \vartheta_2}{v_2},$$

che determinano gli angoli.

La riflessione sarà eliminata, per l'angolo di incidenza ϑ_1 , se:

$$(11) \quad kd = \frac{1}{2}\pi, \quad Z = \sqrt{Z_1 Z_2},$$

dove $k = \omega/v \cos \vartheta$ e d lo spessore della lamina. In tal caso la lamina costituisce un adattatore di impedenza in quarto d'onda, che adatta il secondo mezzo al primo. In particolare per l'incidenza normale le tre impedenze sono proporzionali alle corrispondenti velocità di propagazione. Le condizioni (11) corrispondono dunque esattamente a quelle dell'ottica trattata ordinaria:

$$(12) \quad kd = \frac{1}{2}\pi, \quad n = \sqrt{n_1 n_2}.$$

L'attuazione pratica della disposizione antiriflettente potrebbe essere del tipo riportato in fig. 3; la equidistanza b_1 fra le strisce della lamina, diversa da quella b_2 delle strisce del secondo mezzo, consegue al diverso spessore delle strisce.

Numerose esperienze hanno ottimamente confermato le previsioni suggerite dall'ottica ordinaria, e le ottiche trattate per microonde si sono dimostrate particolarmente vantaggiose.

3. - Onde evanescenti.

La presenza di onde elettromagnetiche evanescenti nei fenomeni di riflessione totale della luce è nota da molto tempo e ha formato oggetto di numerosi studi teorici e sperimentali ⁽⁵⁾.

Se si considerano, ad esempio, due mezzi dielettrici perfetti, omogenei e isotropi, separati da

⁽⁵⁾ Per una analisi approfondita con bibliografia: H. ARZELIÉS, *Ann. d. Phys.*, 1946, I, p. 5; *Rev. d'Optique*, 1948, XXVII, p. 205.

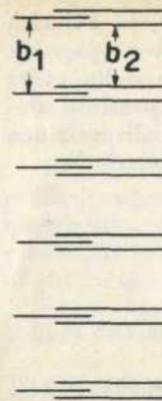


Fig. 3.

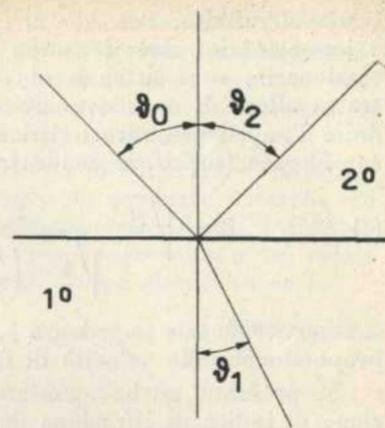


Fig. 4.

una superficie piana S , e un'onda $e. m.$ piana che, provenendo dal mezzo 1 verso il mezzo 2 incida con angolo di incidenza ϑ_1 , valgono le leggi di Snell e di Fresnel già ricordate. Nel caso in cui il vettore elettrico \bar{E}_1 dell'onda incidente sia normale al piano di incidenza, si ha:

$$(13) \quad \vartheta' = \vartheta_1, \quad \sin \vartheta_1 = n \sin \vartheta_2, \quad n = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}},$$

dove ϑ_1 , ϑ' , ϑ_2 sono rispettivamente gli angoli di incidenza, di riflessione, di rifrazione.

Inoltre è:

$$(14) \quad \bar{E}' = \frac{2 \cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_1 + n \cos \vartheta_2} \bar{E}_1,$$

$$\bar{E}_2 = \frac{\cos \vartheta_1 - n \cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_1 + n \cos \vartheta_2} \bar{E}_1;$$

esse forniscono in modulo e fase i vettori \bar{E}_2 , E' delle onde trasmessa e riflessa in funzione del campo dell'onda incidente e degli angoli ϑ_1 , ϑ_2 .

Le considerazioni formali, che conducono alle relazioni precedenti, valgono anche quando gli angoli siano complessi, ciò che può avvenire per opportuni valori di n .

Per esempio se $n < 1$, esiste un angolo di incidenza reale $\bar{\vartheta}_1$ per il quale $\sin \vartheta_2 = 1$; allora per $\vartheta_1 > \bar{\vartheta}_1$ è $\sin \vartheta_2 > 1$, quindi ϑ_2 risulta complesso e $\cos \vartheta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_2}$ immaginario. Dalle (14) discende allora che le onde riflessa e trasmessa non sono in fase con l'onda incidente e che l'energia incidente viene totalmente riflessa. Tuttavia il secondo mezzo è sede di un campo elettromagnetico: tale campo ha i piani equiampiezza paralleli alla superficie di separazione e quelli equifase perpendicolari. È il caso della riflessione totale con onde trasmesse evanescenti o inomogenee. Il vettore elettrico delle onde evanescenti trasmesse può scriversi:

$$(15) \quad \bar{E}_t = E_2 e^{ax + j(\beta z - \omega t)},$$

dove l'asse x è secondo la normale, diretto verso il primo mezzo, e quello z parallelo alla superficie

di separazione S , nel piano d'incidenza (l'origine degli assi è nel punto di incidenza),

$$\beta = \frac{\omega}{v} \sin \vartheta_1, \quad a = \frac{\omega}{v_1} \sqrt{\sin^2 \vartheta_1 - n^2}.$$

Non vi è dunque alcun flusso di energia dal primo al secondo mezzo. L'intensità del campo in quest'ultimo non è però nulla; vi è un flusso medio di energia parallelo ad S , ma il campo è fortemente attenuato nel verso delle x decrescenti ($\alpha > 0$).

La verifica sperimentale di queste leggi, nel campo ottico, non può essere che qualitativa: il campo trasmesso nel secondo mezzo si attenua così rapidamente, entro poche lunghezze d'onda, che non sono possibili misure quantitative.

Nel campo delle onde centimetriche, la regione occupata dalle onde evanescenti è accessibile agli strumenti di misura e le verifiche sperimentali diventano possibili, ed hanno pienamente confermato le previsioni teoriche. Ma si può andar oltre, passando a studiare la riflessione e la rifrazione delle onde evanescenti.

Con riferimento alla fig. 4, se si suppone che l'indice di rifrazione $n = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}$ sia maggior d'uno, è $\sin \vartheta_0 = 1$ se $\sin \vartheta_1 = \frac{1}{n} < 1$.

Per angoli, che chiameremo ancora di rifrazione, tali che $\frac{\pi}{2} > \vartheta_1 \geq \bar{\vartheta}_1$ (ove $\bar{\vartheta}_1$ è l'angolo limite), è $\sin \vartheta_0 > 1$ cioè l'angolo di incidenza è complesso e tale è anche l'angolo di riflessione.

Possiamo interpretare questi risultati, pensando che le onde incidenti e riflesse siano evanescenti e quella trasmessa sia del tipo ordinario.

Per le tre onde, trasmessa, riflessa e incidente, si trovano le seguenti espressioni:

$$(16) \quad \bar{E}_i = \bar{E}_0 e^{ax + j(\beta z - \omega t)},$$

$$E_r = -e^{j\delta} E_i,$$

$$E_t = (1 - e^{j\delta}) E_i,$$

con:

$$(17) \quad \alpha = \frac{\omega}{v_2} \sqrt{n^2 \sin^2 \vartheta_0 - 1}, \quad \beta = \frac{\omega}{v_2} \sin \vartheta_0,$$

$$(18) \quad e^{-j\delta} = \frac{a - jb}{a + jb}, \quad a = n \cos \vartheta_1, \quad b = -j \cos \vartheta_0.$$

Queste relazioni e altre relative alle energie hanno trovato piena conferma sperimentale ⁽⁶⁾.

È possibile anche studiare la riflessione metallica delle onde evanescenti. Un'accurata ricerca teorica e sperimentale è stata compiuta da S. Gibellato ⁽⁷⁾.

Particolarmente interessante è la verifica sperimentale della presenza di onde evanescenti nella

⁽⁶⁾ N. CARRARA, *A. F.*, 1950, XIX, p. 164.

⁽⁷⁾ S. GIBELLATO, *N. C.*, 1949, VI, p. 345.

diffrazione ⁽⁸⁾, operando con onde centimetriche e con reticoli piani, costituiti da strisce metalliche riflettenti, alternate con intervalli liberi.

Riferendosi a una terna di assi cartesiani ortogonali, il reticolo giaccia nel piano y, z ed abbia le strisce metalliche orientate parallelamente all'asse z ; l'asse x , normale al reticolo, sarà orientato nella direzione di propagazione dell'onda piana incidente. Se il vettore elettrico di questa ultima, polarizzata rettilineamente, è orientato come l'asse y e quindi normale ai tratti del reticolo, le componenti non nulle del campo elettromagnetico diffratto sono:

$$(19) \quad Z_0 H_z = A_n e^{jk(\alpha_n x + \beta_n y)}, \quad E_x = -\beta_n Z_0 H_z,$$

$$E_y = \alpha_n Z_0 H_z,$$

dove $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ sono i coseni direttori della normale all' n -esima onda piana diffratta, $k = 2\pi/\lambda$ è la costante di propagazione, Z_0 l'impedenza dello spazio vuoto, A_n un fattore complesso che caratterizza l'intensità e la fase dell'onda diffratta.

Indicando con a il periodo del reticolo è:

$$(20) \quad \beta_n = \frac{n\lambda}{a},$$

che è la forma fondamentale dei reticoli di diffrazione. Quando n è tale che $|\beta_n| < 1$, si hanno onde piane diffratte ordinarie; quando invece $|\beta_n| > 1$, si hanno onde evanescenti.

In questo caso le (19) diventano:

$$(21) \quad \begin{cases} Z_0 H_z = A_n e^{-k\sqrt{\beta_n^2 - 1}x} e^{jk\beta_n y}, \\ E_x = -\beta_n Z_0 H_z, \\ E_y = j\sqrt{\beta_n^2 - 1} Z_0 H_z. \end{cases}$$

Poichè E_y, H_z sono in quadratura, non si ha trasporto di energia in direzione normale al reticolo e le onde sono attenuate lungo l'asse x . La costante di attenuazione dell'ampiezza è $k\sqrt{\beta_n^2 - 1}$; la costante di attenuazione d della potenza è:

$$(22) \quad \delta = 2k\sqrt{\beta_n^2 - 1}.$$

È appunto questa costante che si presta a una verifica sperimentale.

Le onde diffratte evanescenti, dietro il reticolo, vengono riprese da un prisma di paraffina, che ha una delle facce parallela al reticolo.

Se $|\beta_n| < n$ (n è l'indice di rifrazione della paraffina), l'onda evanescente darà luogo, dentro al prisma, ad un'onda rifratta piana ordinaria, che potrà emergere da una delle rimanenti facce del prisma, ed essere sottoposta a misura.

Variando la distanza del prisma dal reticolo può determinarsi sperimentalmente δ . Con i valori $\lambda = 32$ mm, $\alpha = 30$ mm, $\beta = \lambda/\alpha = 1,066$, è $\delta = 0,147$ mm⁻¹.

Lo studio delle onde evanescenti interessa particolarmente le antenne a iperguadagno.

⁽⁸⁾ M. SCHAFFNER e G. TORALDO DI FRANCA, *N. C.*, 1949, VI, p. 125.

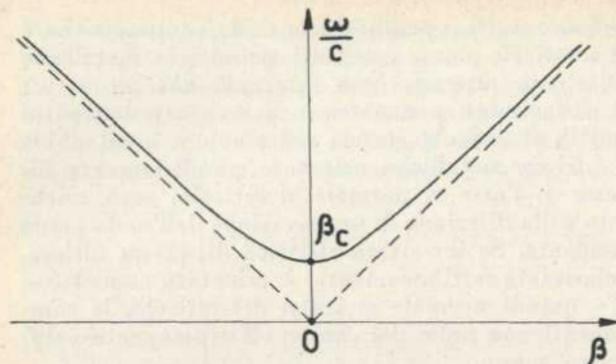


Fig. 5.

4. - Azioni meccaniche delle microonde.

Così come per la luce, è possibile provare sperimentalmente la pressione di radiazione, che un fascio di microonde esercita su uno schermo riflettente o assorbente. Tale pressione, com'è noto, vale, rispettivamente, se l'incidenza è normale e la propagazione avviene nel vuoto:

$$(23) \quad p = \frac{2S}{c}, \quad p = \frac{S}{c},$$

ove S è il vettore di Poynting e c la velocità della luce. È possibile pervenire alle espressioni (23) sia secondo l'elettrodinamica classica, sia attribuendo ai fotoni la quantità di moto hf/c (h = costante di Planck). Infatti se con Windichiamo l'energia contenuta nel fascio incidente per unità di volume, il numero dei fotoni che incidono normalmente nell'unità di tempo di superficie dello schermo è:

$$\frac{Wc}{hf}; \text{ e la quantità di moto corrispondente è: } \frac{Wc}{hf} \cdot \frac{hf}{c} = W = \frac{S}{c}, \text{ da cui discendono subito le (23).}$$

Non è facile eseguire determinazioni di pressione di radiazione con microonde⁽⁹⁾, perchè pressioni apprezzabili si manifestano solo per elevati valori di S , a cui corrispondono campi elettrici molto elevati per le onde centimetriche, che danno facilmente luogo a scariche sul bordo degli schermi per effetto corona. Inoltre si manifesta, come sempre, un cospicuo effetto radiometrico. Superate queste difficoltà, si presentano possibili interessanti esperienze entro guide d'onda, ove la velocità dell'energia, che coincide con la velocità di gruppo, è sempre minore di c , e dipende dalla sezione della guida.

In conseguenza di ciò, quando l'energia passa da uno spessore di guida ad un altro, ove la velocità dell'energia è diversa, perchè diversa è la sezione, si possono prevedere azioni meccaniche in conseguenza della variazione della quantità di moto dei fotoni.

Assai più agevole che non la verifica sperimentale della pressione di radiazione è, con onde cen-

timetriche, la verifica dell'esistenza di una coppia di radiazione. A. Sadowski⁽¹⁰⁾, P. S. Epstein⁽¹¹⁾, J. H. Poynting⁽¹²⁾ prevedero che, quando onde luminose piane, polarizzate circolarmente, incidono normalmente sopra una lamina birifrangente e la attraversano, esercitano sulla lamina stessa una coppia meccanica. Il valore della coppia agente sull'unità di superficie di una lamina in quarto d'onda, che converte luce polarizzata circolarmente in luce polarizzata rettilineamente, risulta:

$$(24) \quad C = \frac{S}{\omega},$$

dove $\omega = 2\pi f$ è la pulsazione.

La (24) può essere dimostrata in base all'elettrodinamica classica, ma la dimostrazione è molto più agevole se si tien conto dello spin dei fotoni, $\pm h/2\pi$. Infatti un'onda polarizzata ellitticamente può essere risolta in due componenti:

$$x = X_0 \cos \omega t, \quad y = Y_0 \sin \omega t,$$

ove X_0 , Y_0 sono le componenti secondo gli assi x , y , normali alla direzione di propagazione, dell'ampiezza del vettore elettrico.

La componente x può considerarsi dovuta alla sovrapposizione di due vettori L_1 , R_1 , ciascuno di ampiezza $X_0/2$, di cui il primo ruota a sinistra, il secondo a destra con velocità angolare ω . Similmente la componente y può decomporre in due vettori rotanti L_2 , R_2 .

Se si pone $L = L_1 + L_2$, $R = R_1 + R_2$, l'onda polarizzata ellitticamente può pensarsi costituita dalla sovrapposizione di due onde polarizzate, circolarmente a sinistra e a destra, i cui corrispondenti vettori di Poynting sono:

$$(25) \quad S_L = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} L^2, \quad S_R = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} R^2,$$

così che il momento angolare attraverso l'unità di superficie (nell'unità del tempo) perpendicolare all'onda polarizzata ellitticamente risulta:

$$\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{L^2 - R^2}{hf} \frac{h}{2\pi} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} X_0 Y_0.$$

Se ora supponiamo che un'onda polarizzata rettilineamente, di cui E sia il vettore elettrico, orientato secondo l'angolo φ rispetto all'asse x incida su una lamina birefrangente, per l'onda polarizzata ellitticamente che emerge dalla lamina è:

$$X_0 = E \cos \varphi, \quad Y_0 = E \sin \varphi,$$

⁽¹⁰⁾ A. SADOWSKI, *Acta et Commentationes Imp. Un. Jureviensis*, 1899, n. 1-3.

⁽¹¹⁾ P. EPSTEIN, *Ann. d. Phys.*, 1914, XLIV, p. 593.

⁽¹²⁾ J. H. POYNTING, *Proc. Roy. Soc.*, 1909, XXII, p. 560.

onde il momento angolare risulta:

$$(26) \quad \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{E^2}{2} \sin^2 \varphi.$$

Per $\varphi = \pm \pi/4$, il momento risulta dunque $\pm S/\omega$ (onda polarizzata circolarmente).

Così anche, se un'onda polarizzata circolarmente è assorbita da uno schermo o è trasformata in un'onda polarizzata rettilineamente, il momento angolare svanisce e lo schermo deve risultare sottoposto a una coppia per unità di superficie:

$$C = \pm \frac{S}{\omega}.$$

È estremamente difficile rilevare sperimentalmente tale coppia con le onde luminose, perchè la loro frequenza è necessariamente elevata⁽¹³⁾; per contro l'esperienza può essere eseguita con successo con onde centimetriche⁽¹⁴⁾.

5. - Propagazione di onde in strutture periodiche.

Abbiamo già avuto occasione di rilevare che la velocità di fase, con cui un'onda si propaga in una guida continua a pareti perfettamente conduttrici entro cui sia il vuoto, è sempre maggiore della velocità della luce, qualunque sia il modo di propagazione, e che, per ogni modo, vi è una frequenza critica o di taglio, determinata dalla sezione retta della guida. Per ogni modo, la guida continua si presenta dunque come un filtro passa-alto. Indicando con β la costante di propagazione per un generico modo e con ω/c una grandezza avente le medesime dimensioni di β e proporzionale alla frequenza, è:

$$(27) \quad \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = \beta^2 + \beta_c^2$$

(ove $\lambda = 2\pi/\beta$ è la lunghezza d'onda nello spazio libero illimitato corrispondente alla frequenza $f = \frac{\omega}{2\pi}$), così che la rappresentazione grafica di

ω/c , in funzione di β , è un'iperbole (fig. 5). Per $\frac{\omega}{c} < \beta_c$ (cioè per $\lambda > \lambda_c$), la curva mostra che non vi è alcun valore reale di β , cioè la propagazione non è possibile, λ è immaginaria, cioè il campo entro la guida è attenuato. Per frequenze più elevate l'iperbole tende asintoticamente verso le linee a 45°, mostrando che la velocità di fase, sempre maggiore di c , tende a c per $\lambda \rightarrow \infty$.

Ma in molti problemi, interessano guide d'onda particolari, in cui il campo si propaghi con velocità di fase minore di c , come per esempio nel caso del magnetron, dell'amplificatore ad onda viag-

⁽¹³⁾ R. A. BETH, *Phys. Rev.*, 1936, L, p. 115.

⁽¹⁴⁾ N. CARRARA, *Nature*, 1949, CLXIV, p. 882.

giante, dell'acceleratore lineare. In tutti questi casi il campo interagisce con un fascio di particelle elementari cariche, generalmente elettroni, la cui velocità, sempre minore di c , deve eguagliare quella del campo.

Guide d'onda del genere possono essere attuate con l'inserzione di iridi, cavità risonanti e simili, periodicamente spaziate.

È interessante rilevare che lo studio di tali guide può essere effettuato con gli stessi procedimenti elaborati per la propagazione di onde acustiche od ottiche in strutture periodiche, procedimenti che già furono utilizzati verso la fine del secolo scorso per la telegrafia per cavo.

La prima ricerca in questo campo risale a Newton⁽¹⁵⁾, che, supponendo che il suono si propagasse nell'aria come un'onda elastica in un reticolo di punti dotati di massa, tentò il calcolo della velocità di propagazione. Successivamente si occuparono dell'argomento Bernoulli (1727), Eulero (1748), Lagrange (1759), Cauchy (1830), che tentò di derivarne le leggi della dispersione ottica, Kelvin (1881), Born (1912). Una completa esposizione dell'argomento è stata recentemente elaborata da Brillouin⁽¹⁶⁾.

La proprietà più cospicua di una guida d'onda caricata è che essa si comporta come un filtro passa-banda, con infinite bande passanti; per frequenze fuori da tali bande il campo non si propaga ed è attenuato; per ogni frequenza, compresa in una banda, la velocità del campo assume infiniti valori diversi.

In conseguenza del carattere periodico del campo, esso può essere sviluppato in serie di Fourier; ognuno dei termini dello sviluppo viaggia con velocità diversa da quella degli altri, velocità che peraltro non è univocamente determinata. I termini più elevati, con lunghezze d'onda sempre più piccole, ma corrispondenti alla stessa frequenza, si propagano con velocità decrescenti, così che sono reperibili termini con velocità bastantemente piccola per le applicazioni precedentemente indicate.

Il fondamento della teoria della propagazione nelle strutture periodiche è il seguente (teorema di Floquet): in un dato modo di oscillazione della struttura, ad una data frequenza, il campo $e. m.$ viene moltiplicato per una costante, generalmente complessa, se si avanza lungo la struttura di un periodo. Infatti con tale avanzamento la struttura ritorna su se stessa, cosicché la nuova funzione differirà dalla precedente per il fattore costante indicato. Scriveremo tale fattore sotto la forma $e^{-\gamma L}$, dove L è il periodo e γ la costante. Una funzione che gode di tale proprietà è ovviamente la funzione $e^{-\gamma z}$, se z è l'asse della struttura, e la funzione più generale si ottiene moltiplicando per $e^{-\gamma z}$ una qualunque funzione periodica della struttura, che non cambia se z cresce di L . Questa funzione periodica può essere sviluppata in serie di Fourier,

⁽¹⁵⁾ J. NEWTON, *Principia*, II, 1686.

⁽¹⁶⁾ L. BRILLOUIN, *Wave Propagation in Periodic Structures*, McGraw-Hill, 1946.

con termini del tipo $A_n e^{-j\frac{2\pi}{L}nz}$, dove n è intero positivo o negativo e A_n è un appropriato coefficiente; cosicchè anche la funzione più generale, sviluppata in serie, sarà costituita da termini del tipo $A_n e^{-j(\gamma + \frac{2\pi}{L}n)z}$. Si può ora dimostrare che, se la struttura non dissipa energia, γ è reale o è immaginario; nel primo caso ogni termine decresce esponenzialmente, nel secondo, posto $\gamma = j\beta_0$, $\beta_n = \beta_0 + \frac{2\pi n}{L}$, ogni termine diventa, tenendo conto anche del tempo, del tipo $A_n e^{-j(\omega t - \beta_n z)}$, e quindi rappresenta un'onda progressiva, di frequenza $f = 2\pi/\omega$, lunghezza d'onda $\lambda_n = 2\pi/\beta_n$, velocità di propagazione $v_n = \omega/\beta_n$.

È molto interessante studiare il modo di variare di ω al variare di β_0 . È ovvio che, aumentando β_0 di $2\pi/L$, ogni β_n , si trasforma nel successivo β_{n+1} ; e quindi l'intera serie dei fattori esponenziali $e^{-j(\omega t - \beta_n z)}$ rimane invariata. Pertanto, se ad ogni esponenziale attribuiamo ancora il coefficiente A_n , che compete al suo proprio indice n , la funzione d'onda,

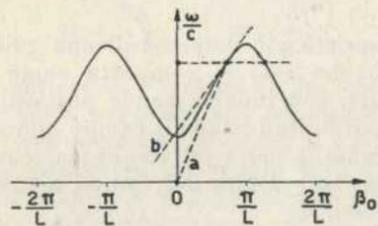


Fig. 6.

nonostante il cambiamento effettuato in β_0 , rimane inalterata. Perciò la situazione fisica nella struttura non cambia, e quindi al medesimo ω corrisponde non il solo valore β_0 , ma corrispondono anche tutti i valori $\beta_0 + \frac{2\pi m}{L}$ con m intero qualunque positivo o negativo. E dunque la pulsazione ω deve essere una funzione periodica di β_0 , con periodo $2\pi/L$. Questa funzione deve anche essere pari: infatti, cambiando segno a tutti i β_n , ogni termine della funzione d'onda si propaga in senso contrario, ma la funzione, per la medesima frequenza, non cambia forma, ed essendo il senso della propagazione indifferente in una struttura periodica, ne risulta che: $\omega(\beta_0) = \omega(-\beta_0)$, cioè la parità di ω .

L'andamento di ω/c in funzione di β_0 può dunque essere rappresentato come in fig. 6. È evidente che la velocità di fase $v_f = \omega/\beta$ è rappresentata dalla pendenza di una retta come *a*, e la velocità di gruppo è rappresentata dalla pendenza di una retta come *b*. Al crescere di β_0 la velocità di fase varia periodicamente tendendo a zero, la velocità di gruppo $v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$ è nulla per le frequenze che corrispondono a $\beta_0 = 0, \frac{\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}, \dots$

Poichè la velocità di gruppo coincide con la velocità dell'energia, il flusso di energia è nullo nella struttura per le frequenze indicate.

Per poter proseguire, sia pure qualitativamente, in questa indagine, consideriamo una guida d'onda in cui siano disposte periodicamente iridi con un foro tanto largo, da rappresentare, ciascuna, una piccola suscettanza. La presenza di tali iridi, cioè delle loro suscettanze uniformemente distribuite lungo la guida, a causa della periodicità di cui abbiamo parlato, produce un cambiamento nel legame fra ω e β_0 , che in loro assenza sarebbe quello rappresentato in fig. 5. La differenza fra i valori, che la frequenza, corrispondente a un certo β_0 , assume quando le iridi sono presenti o assenti, è però generalmente piccola, salvo per i valori di β_0 che si avvicinano a un multiplo intero $\frac{2\pi m}{L}$

di $\frac{2\pi}{L}$. Infatti, quando ciò accada, l'onda, di lunghezza $\lambda_0 = 2\pi/\beta_0$, che si propaga lungo la guida e subisce riflessioni multiple sulle iridi, dà luogo a onde riflesse in fase fra loro. L'onda riflessa risultante, sovrapponendosi all'onda incidente dà luogo ad onde stazionarie e ciò significa che allora vi potrà non essere propagazione di energia, e pertanto la velocità di gruppo potrà essere nulla. La curva di fig. 6 che rappresenta il legame fra ω e β_0 si spezza così in tanti tratti, che per la periodicità del legame fra ω e β_0 si prolungano in curve periodiche, rappresentate in fig. 7, nella quale i tratti indicati sono disegnati con linee grosse. Dall'esame della figura si rileva che l'intera gamma di frequenze si divide in infinite bande passanti, separate da intervalli corrispondenti a frequenze che vengono invece tagliate.

Entro ogni banda, ad ogni valore della frequenza, corrisponde una varietà di velocità di fase, decrescenti al crescere di β_0 (al decrescere di λ). Esistono cioè componenti nello sviluppo di Fourier, la cui velocità è $< c$. Però le sole componenti di ampiezza rilevante e perciò praticamente utilizzabili sono quelle che corrispondono alle lunghezze d'onda relative ai tratti grossi delle curve della fig. 7, e queste non differiscono molto, finchè le iridi hanno piccola suscettanza, da quelle della guida non caricata. Ma, via via che la suscettanza delle iridi cresce (cioè il loro foro diminuisce), le curve di fig. 7 risultano sempre più tesate; al limite, per un foro piccolissimo, ogni sezione della guida determinata da due iridi costituisce una cavità risonante, e $\beta_0 L$ viene a significare la differenza di fase fra cavità e cavità. La frequenza risulta indipendente da tale differenza di fase, così che le curve diventano altrettante rette, e le bande passanti tendono a zero.

Fuori di questo limite e per valori della suscettanza convenientemente elevati, si riconosce facilmente dalle curve che per le bande passanti alte, corrispondentemente ai tratti grossi delle curve stesse, che corrispondono come si è detto ai termini di maggior ampiezza, la velocità di fase può diventare minore di c , rendendo così la guida caricata utilizzabile per le importanti applicazioni di cui è fatto cenno in principio.

Ricordando che il campo e. m. può propagarsi in una guida non caricata in infiniti modi TE_{mn} , TM_{mn} , a ciascuno dei quali corrisponde un diverso valore della frequenza critica e di β_c , tutto quanto è stato finora detto va ripetuto per ogni modo. Ne deriva una sovrapposizione fra le bande passanti corrispondenti ai vari modi e quindi una situazione molto complessa, che esige uno studio particolare per la separazione delle varie bande.

6. - Relatività e microonde.

La propagazione di un campo elettromagnetico in una guida d'onda perfetta, continua, vuota ha interessanti caratteristiche. Come abbiamo detto, la propagazione può avvenire in infiniti modi TE_{mn} , TM_{mn} : ad ogni modo compete una diversa frequenza critica. La velocità di fase v_f , per onde con frequenza superiore alla critica, è sempre maggiore di c . La velocità di gruppo v_g è sempre inferiore. Vale la relazione:

$$(28) \quad v_f v_g = c^2.$$

Frequenza critica, velocità di fase, velocità di gruppo dipendono dalle dimensioni geometriche della guida. È di notevole interesse lo studio del campo elettromagnetico, che si propaga in una guida, quale si presenta in un sistema di riferimento mobile parallelamente all'asse della guida stessa con velocità v (sempre minore di c).

Tale studio può essere limitato al caso semplice di guide d'onda rettangolari⁽¹⁷⁾. Si potrebbe considerare, come taluno ha ritenuto opportuno di fare, la propagazione dell'onda più generale⁽¹⁸⁾, ma, com'è ovvio, non si otterranno con ciò altri risultati.

Disponendo una terna di assi cartesiani di riferimento, x, y, z con l'asse x lungo l'asse della guida, e con gli assi y, z secondo gli spigoli della sezione retta, le ampiezze delle componenti non nulle dei campi elettrico e magnetico sono legate dalle relazioni:

$$(29) \quad E_y = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{v_t}{c} H_z, \quad E_z = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{v_t}{c} H_y,$$

ove:

$$(30) \quad v_f = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{2a}\right)^2 - \left(\frac{m\lambda}{2b}\right)^2}}$$

è la velocità di fase, A la lunghezza d'onda nello spazio libero, a, b sono le lunghezze degli spigoli della sezione della guida, n, m i due interi che caratterizzano il modo. Inoltre la frequenza critica è data da:

$$(31) \quad f_c = c \sqrt{\left(\frac{n}{2a}\right)^2 + \left(\frac{m}{2b}\right)^2}$$

⁽¹⁷⁾ N. CARRARA, N. C., 1948, V, p. 249.

⁽¹⁸⁾ C. M. GARELLI e R. MALVANO, N. C., 1949, VI, p. 201.

e la densità del flusso di energia lungo x da:

$$(32) \quad S_x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{c}{v_f} (E_y^2 + E_z^2).$$

Consideriamo il caso in cui la frequenza del campo è maggiore di f_c .

Le componenti del campo in un sistema di riferimento mobile x_0, y_0, z_0 , che al tempo $t = 0$ coincide con il sistema fisso x, y, z , e che si muove nella direzione x con moto traslatorio uniforme rettilineo con velocità $v < c$ concorre con v_f , si trovano applicando le note trasformazioni di Lorentz:

$$(33) \quad \begin{cases} E_{x0} = E_x, & H_{x0} = H_x, \\ E_{y0} = \frac{E_y - v\mu H_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & H_{y0} = \frac{H_y + v\epsilon E_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ E_{z0} = \frac{E_z + v\mu H_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & H_{z0} = \frac{H_z - v\epsilon E_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{cases} \quad \beta = v/c.$$

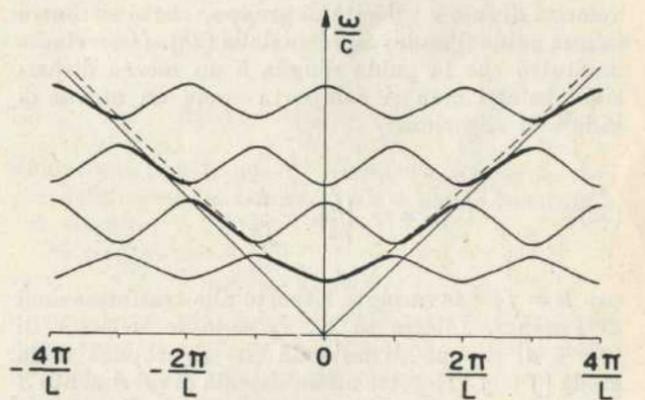


Fig. 7.

Il risultato è:

$$(34) \quad \begin{cases} E_{x0} = E_x = 0, & \begin{cases} H_{x0} = H_x, \\ H_{y0} = \xi H_y, \\ H_{z0} = \xi H_z, \end{cases} \\ E_{y0} = \eta E_y, \\ E_{z0} = \eta E_z, \end{cases}$$

ove:

$$(35) \quad \eta = \frac{1 - \frac{v}{v_f}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \xi = \frac{1 - \frac{v v_f}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Inoltre, ricordando che la fase non varia cambiando sistema di riferimento, è anche:

$$(36) \quad f_0 = \eta f, \quad \lambda_g = \xi \lambda_{0g}, \quad v_{0f} = \frac{\eta}{\xi} v_f,$$

ove λ_{0g}, λ_g indicano la lunghezza d'onda nella guida, apprezzata nei due sistemi.

Dalle (36) risulta:

a) Il modo non cambia, cambiando sistema di riferimento; però la frequenza valutata nel sistema mobile dipende da v ed è minima per:

$$(37) \quad v = v_g = \frac{c^2}{v_f},$$

poi torna ad aumentare.

b) L'energia viaggia nella guida con velocità (apprezzata nel sistema fisso) v_g , cioè con la velocità di gruppo.

c) La velocità di fase e la lunghezza d'onda nel sistema mobile tendono all'infinito positivo per $v \rightarrow v_g$ a destra; sono negative e tendono all'infinito negativo per $v \rightarrow v_g$ a sinistra.

d) In un sistema mobile con velocità v_g il campo appare stazionario.

e) In tale sistema, la frequenza appare sempre la stessa qualunque sia la frequenza nel sistema fisso e coincide con f_c .

Particolare considerazione merita il legame fra velocità di fase e velocità di gruppo, che si riscontra in una guida d'onda, espresso dalla (28). Osserviamo anzitutto che la guida d'onda è un mezzo dispersivo. Infatti essa si comporta come un mezzo di indice di rifrazione:

$$(38) \quad n = \sqrt{1 - \frac{k}{f^2}},$$

ove $k = f_c^2$ è invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Inoltre se v_f , v_g sono le velocità di fase e di gruppo di un'onda che si propaga nella guida ($f > f_c$) rispetto ad un sistema di riferimento S fisso, e v_{of} , v_{og} le analoghe velocità rispetto a un sistema S_o mobile, è anche:

$$(39) \quad \begin{cases} n_0 = \sqrt{1 - \frac{k}{f_0^2}}, & v_{of} = \frac{c}{n_0}, & v_{og} = cn_0, \\ v_{of} v_{og} = v_f v_g = c^2, \end{cases}$$

ove f_0 è la frequenza dell'onda apprezzata in S_o ed n_0 il corrispondente indice di rifrazione.

Se ne deduce che il modo di variare delle velocità e dell'indice di rifrazione è il medesimo in funzione della frequenza, tanto in S quanto in S_o , e si conclude⁽¹⁹⁾ che le onde irradiate nella guida, o comunque in un mezzo con indice di rifrazione espresso dalla (38) con k invariante, da una sorgente fissa in un dato sistema di riferimento, presentano in quel sistema eguale velocità nei due versi, qualunque sia la velocità di traslazione del

sistema stesso, il che equivale a dire che è impossibile riconoscere, con determinazioni del genere, se il sistema sia fisso al mezzo oppure no.

In particolare gli esperimenti di Michelson e Morley, e di Fizeau e Fresnel (trascinamento parziale) debbono in tal caso dare risultato nullo. Non si può allora riconoscere alcun sistema che possa dirsi fisso rispetto al mezzo, cosicché il mezzo non costituisce un sistema di riferimento privilegiato.

Che il risultato dell'esperienza di Fizeau e Fresnel debba essere nullo lo si può dedurre anche dalla formula di Zeeman, che dà il trascinamento parziale:

$$(40) \quad \Delta v = v \left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{f}{n} \frac{dn}{df} \right).$$

Infatti è agevole provare che, se n soddisfa la (38), è

$$n = \frac{1}{n + f \frac{dn}{df}}, \text{ e quindi } \Delta v = 0.$$

7. - Spettroscopia con microonde.

La spettroscopia con microonde ha suscitato uno straordinario interesse, giustificato dal confronto che si può fare con la spettroscopia ottica. Tanto la spettroscopia con microonde, quanto quella ottica permettono la determinazione degli scambi energetici che avvengono negli atomi e nelle molecole, ma le tecniche e gli strumenti sono diversi, e diversa è la regione dello spettro esplorato.

Nella spettroscopia con microonde non si fa uso di strumenti dispersivi, ma di sorgenti elettroniche di radiazioni praticamente monocromatiche e di rivelatori accordati; in conseguenza la sensibilità risulta molto elevata e il potere risolutivo superiore a quello dei migliori spettrografi nell'infrarosso.

Poiché le regioni dello spettro esplorabili non si sovrappongono, la spettroscopia con microonde e la spettroscopia ottica si completano vicendevolmente: la spettroscopia con microonde si presta in modo particolare per lo studio della struttura delle molecole, per rilevare effetti dovuti allo spin e al momento quadrupolare del nucleo.

8. - Conclusioni.

Lo studio delle microonde è stato grandemente agevolato dalle approfondite cognizioni teoriche e sperimentali nel campo dell'ottica. Teorie già elaborate per l'ottica hanno potuto essere utilizzate nel campo delle microonde; esperienze classiche ottiche hanno potuto essere ripetute con le microonde; con le quali è stato peraltro possibile compiere ricerche sperimentali inattuabili in ottica. Questo processo di collaborazione fra ottica e microonde è tuttora in fecondo sviluppo.

Nello Carrara

Firenze - Centro di studio per la Fisica delle Microonde.

⁽¹⁹⁾ N. CARRARA, N. C., 1951, VIII, p. 569.

La proprietà indicata fu dimostrata da R. W. Ditchburn (*Revue d'Optique*, 1948, XXVII, p. 4), limitatamente però al caso in cui $v \ll c$.