Tenute presenti le condizioni M = 0 ed N = 0 per $x = \pm L/2$, dalle (5) si ricava facilmente:

$$M = \frac{3}{4} \cdot \frac{pb^3}{h} \cdot \frac{R}{8R+1}\left(1 - \frac{ch(x/\beta)}{ch(L/2\beta)}\right)$$

$$N = N_0 - \frac{6\,M}{b\,(8R+1)}$$

Quindi in mezzeria si avrà:

$$N(0) = N_0\,(0)\left[1 - \frac{6}{8R+1}\left(\frac{b}{L}\right)^2\left(1 - \frac{1}{ch(L/2\beta)}\right)\right]$$

cioè una compressione risultante un po' minore di quanto darebbero le solite formule della sezione complessiva del T tutta piana.

Ma la sollecitazione non è più $\sigma_o = N_o(0)/bs$ ripartita uniformemente lungo il lembo superiore dell'ala ed è invece massima vicino alla costola dove vale:

$$\sigma_{max} = \frac{N(0)}{bs} + \frac{6\,M(0)}{sb^2} =$$

$$= \sigma_0\left[1 + \frac{48\,R}{8R+1}\left(\frac{b}{L}\right)^2\left(1 - \frac{1}{ch(L/2\beta)}\right)\right] = \sigma_0\varphi$$

ed è quindi sempre maggiore di σ_0.

In pratica, L è molto maggiore di β e si può trascurare il termine iperbolico.

Il fattore φ, che si ritrova uguale considerando la costola invece della mezza ala, dà — per R = l, $\frac{b}{L} = \frac{1}{7}$ — un aumento di σ_{max} rispetto a σ_0 dell'11 % circa e darebbe il 30 % nel caso di trave perfettamente incastrata, per cui occorre sostituire ad L la distanza $L/\sqrt{3}$ tra i punti di momento nullo.

Agli estremi dell'ala si ottiene per la sollecitazione minima:

$$\sigma_{min} = \sigma_0\left[1 - \frac{48.R+12}{8R+1}\left(\frac{b}{L}\right)^2\left(1 - \frac{1}{ch(L/2\beta)}\right)\right] = \sigma_0\psi$$

e siccome l'annullarsi di questa fornisce evidentemente un limite per eccesso alla applicabilità delle formule ora ricavate, si potrebbe determinare la larghezza efficace *2b* massima per l'intera ala, trovando per la trave incastrata:

$$(2b)_{eff.} \simeq 0{,}26\,L \tag{6}$$

Questo corrisponde certo ad una esagerata estrapolazione dell'ipotesi di « ala snella » ed è quindi abbastanza notevole che sia ancora limitato l'errore rispetto a quanto si deduce nella teoria esatta dell'ala indefinita dovuta al von Karman (5).

Il segno dell'errore poteva prevedersi: esso è sostanzialmente dovuto all'aver supposto che i carichi orizzontali applicati alla mezza ala ne influenzassero *immediatamente tutta* la sezione, e se nella (6) si sostituisse L—$(2b)_{eff.}$ ad L si troverebbe sensibilmente il risultato esatto.

Così si può definire la trave a T « nel senso ordinario » come quella per cui i fattori φ, ψ si discostano poco dall'unità, e da questa seconda approssimazione si vede la fortunatamente larga applicabilità delle nostre solite formule di prima approssimazione derivate dal principio di De Saint-Venant.

Tuttavia in altri casi di calcolo, ancora elementare ma più laborioso, che si potrebbero fare per esempio studiando la flessione deviata e mettendo in conto le rigidezze torsionali delle varie parti, risulterebbero fattori correttivi notevolmente maggiori e tali quindi da giustificare bene il ricorso al metodo qui proposto.

Livio Norzi

(5) TH. v. KARMAN, *Festschrift August Föppl's*, p. 114 (1923).

a Giuseppe Albenga

Sopra i teoremi di reciprocità della Scienza delle Costruzioni

Mediante il teorena dei lavori virtuali si deducono elementarmente i principi di reciprocità del Betti e del Colonnelli. Si delinea anche storicamente il problema ponendolo in relazione con analoghi problemi dell'elettrotecnica, dell'idraulica e della termotecnica.

1. - È notissimo per la fecondità delle applicazioni il teorema di reciprocità fra forze e spostamenti elastici che Enrico BETTI diede nel 1872 (1), in sostanza trasportando nel campo energetico il teorema elementare del quadrato della somma di due numeri, esteso poi da Luigi DONATI nel 1899 alle reti di conduttori elettrici (2), poi da Umberto PUPPINI nel 1911 allo studio delle falde artesiane (3) e nel 1916 al movimento del calore (4) e infine da Marcello LELLI nel 1923 alle falde freatiche (5).

Notissimo è pure ormai il cosiddetto *teorema di Land* o principio di reciprocità fra sollecitazioni e spostamenti che, esposto nel 1887 da Roberto LAND per la trave continua (6) e dimostrato in generale da Giuseppe ALBENGA (7), che per primo ne fece poi sistematica applicazione allo studio delle linee d'influenza, apparve in seguito come caso particolare

(1) E. BETTI, *Teoria dell'elasticità*, Nuovo Cimento, 1872.

(2) L. DONATI, *Relazione generale fra le correnti in una rete di fili conduttori*, Rendiconti delle Sessioni della R. Accademia dell'Istituto di Bologna, 1899-1900.

(3) U. PUPPINI, *Principio di reciprocità nei moti regolari dell'acqua*, Il Monitore Tecnico, 1911.

(4) U. PUPPINI, *Principio di reciprocità fra temperature e flussi di calore*, Il Monitore Tecnico, 1916.

(5) M. LELLI, *Il principio di reciprocità per le falde freatiche*, Il Monitore Tecnico, 1923.

(6) R. LAND, *Die Gegenseitigkeit elastischer Formänderung als Grundlage einer allgemeinen Darstellung der Einflusslinien aller Trägerarten*, Wochenblatt für Baukunde, 1887.

(7) G. ALBENGA, *Sul teorema di reciprocità di Land*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1915.

del secondo principio di reciprocità, o *principio di Colonnetti*, che Gustavo COLONNETTI enunciò nei 1912 (8).

Noto è anche, pure nel campo dell'elasticità il principio di reciprocità di VOLTERRA fra caratteristiche di una distorsione e sforzi da essa generati (9), assai vicino a quello di COLONNETTI ma meno adatto alle applicazioni.

Note sono pure una formola generale (10) comprendente i principi di BETTI, COLONNETTI e VOLTERRA ed una acuta discussione generale sintetica, di tutti i principi di reciprocità dovuta a M. LELLI (11).

Lo scopo, molto modesto, di questa nota è di mostrare come i principi di BETTI e di LAND possano dedursi in via del tutto elementare con una semplice applicazione del teorema dei lavori virtuali.

2. - Consideriamo un solido elastico V semplicemente connesso, limitato da una superficie di contorno C e diviso in due parti da una superficie S; gli indici 1 e 2 indicheranno rispettivamente gli enti relativi alle due parti.

Consideriamo poi due diversi sistemi di forze X, Y,... di tensioni in superficie p_x, p_y, ... e di tensioni interne σ_x, σ_y, e X', Y' ... p_x', p_y', ... σ_x', Σ, ... equilibrati ed i conseguenti spostamenti ξ, 7), ... e deformazioni ε_x, ε_y, ... e ξ', η', ... ε_x', ε_y', ...; siano poi ρ_x, ρ_y, ρ_z e ρ_x', ρ_y', p_z' le componenti della forza ρ agente sull'unità di superficie S nei due casi; e i due stati di deformazione siano entrambi congruenti in V, ma gli spostamenti possano non essere continui nel passaggio attraverso la superficie S.

Scriviamo l'equazione dei lavori virtuali prendendo le forze dal primo sistema e gli spostamenti dal secondo sistema prima per lo spazio V_1, indicando con ρ_x, ρ_y ρ_z le componenti osservando che le ρ_x, ρ_y, ρ_z agenti sulla superficie S sono da considerarsi come tensioni in superficie,

$$\begin{aligned}(1)\quad &\int_{V_1}(X\xi'+Y\eta'+Z\zeta')dV_1+\int_{C_1}(p_x\xi'+p_y\eta'+p_z\zeta')dC_1+\\ &+\int_S \rho_x\xi's_1+\rho_y\eta's_1+\rho_z\zeta's_1)dS=\\ &=\int_{V_2}(\sigma_x\varepsilon_x'+\sigma_y\varepsilon_y'+\sigma_z\varepsilon_z'+\ldots)dV_1 \ \text{(12)}\end{aligned}$$

poi per lo spazio V_2, osservando che in S ρ_x, ρ_y, ρ_z hanno necessariamente per V_2 segno opposto a quello posseduto per V_1

$$\begin{aligned}(2)\quad &\int_{V_2}(X\xi'+Y\eta'+Z\zeta')dV_2+\int_{C_2}(p_x\xi'+p_y\eta'+p_z\zeta')dC_2-\\ &-\int_S(\rho_x\xi's_2+\rho_y\eta's_1+\rho_z\zeta's_2)dS=\\ &=\int_{V_2}(\sigma_x\varepsilon_x'+\sigma_y\varepsilon_y'+\sigma_z\varepsilon_z'+\ldots)dV_2;\end{aligned}$$

poi scriviamo l'equazione dei lavori virtuali traendo le forze dal secondo sistema e gli spostamenti dal primo, ancora per lo spazio V_1 prima

$$\begin{aligned}(3)\quad &\int_{V_1}(X'\xi+Y'\eta+Z'\zeta)dV_1+\int_{C_1}(p_x'\xi+p_y'\eta+p_z'\zeta)dC_1+\\ &+\int_S(\rho_x'\xi s_2+\rho_y'\eta s_2+\rho_z'\zeta s_2)dS=\\ &=\int_{V_1}(\sigma_x'\varepsilon_x+\sigma_y'\varepsilon_y+\sigma_z'\varepsilon_z+\ldots)dV_1.\end{aligned}$$

poi per lo spazio V_2

$$\begin{aligned}(4)\quad &\int_{V_2}(X'\eta+Y'\eta+Z'\zeta)dV_2+\int_{C_2}(p_x'\xi+p_x'\eta+p_z'\zeta)dC_2-\\ &-\int_S(\rho_x'\xi s_2+\rho_y'\eta s_2+\rho_z'\zeta s_2)dS=\\ &=\int_{V_2}\sigma_x'\varepsilon_x+\sigma_y'\varepsilon_y+\sigma_z'\varepsilon_z+\ldots)dV_2.\end{aligned}$$

Sommando membro a membro le (1), (2), (3) e (4) $\left[V_1+V_2=V,\ C_1+C_2=C,\ \int_{V_1}+\int_{V_2}=\int_V\right]$ si ha

$$\begin{aligned}(5)\quad &\int_V(X\xi'+Y\eta'+Z\zeta')dV+\int_V(X'\xi+Y'\eta+Z'\zeta)dV+\\ &+\int_C(p_x\xi'+p_x\eta'+p_z\zeta')dC+\int_C(p_x'\xi+p_x'\eta+p_z'\zeta)dC+\\ &+\int_S[\rho_x(\xi's_1-\xi's_2)+\rho_y(\eta's_1-\eta's_2)+\rho_z(\zeta's_1-\zeta's_2)]dS+\\ &+\int_S[\rho_y'(\xi s_1-\xi s_2)+\rho_y'(\eta s_1-\eta s_2)+\rho_z'(\zeta s_1-\zeta s_2)]dS=\\ &=\int_V(\sigma_x\varepsilon_x'+\sigma_y\varepsilon_y'+\sigma_z\varepsilon_z'+\ldots)dV+\\ &+\int_V(\sigma_x'\varepsilon_x+\sigma_y'\varepsilon_y+\sigma_z'\varepsilon_z+\ldots)dV.\end{aligned}$$

Dalla (5) si hanno subito i principi di Betti e di Colonnetti.

3. - Supponiamo che entrambi i sistemi di spostamenti ξ, η, ..., ξ', η', ... siano continui e regolari in tutto lo spazio V e sulla superficie S; allora

$$\begin{aligned}(6)\quad &\xi s_1=\xi s_2,\quad \eta s_1=\eta s_2,\quad \zeta s_1=\zeta s_2,\\ &\xi's_1=\xi's_2,\quad \eta's_1=\eta's_2,\quad \zeta's_1=\zeta's_2,\end{aligned}$$

e si annullano il quinto ed il sesto integrale del primo membro della (5).

Ma per la legge di Hooke generalizzata

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l}\sigma_x = a_{11}\varepsilon_x + a_{12}\varepsilon_y + a_{13}\varepsilon_z + \ldots\\ \sigma_x = a_{21}\varepsilon_x + a_{22}\varepsilon_y + a_{23}\varepsilon_z + \ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$$

(8) G. COLONNETTI, *La statica delle costruzioni*, Torino, U.T.E.T., 1928, prefazione e memorie ivi citate.

(9) V. VOLTERRA, *Sur l'equilibre des corps solides multiplement connexes*, Paris, Gauthiers-Villars, 1907.

(10) D. BONVICINI, *Sopra una formula comprendente tutti i teoremi di reciprocità della statica dei solidi elastici*, Bollettino del Sindacato Provinciale Fascista Ingegneri di Bologna, 1931.

(11) M. LELLI, *1l principio di reciprocità nella fisica*, Il Monitore Tecnico 1925 e Annali di Matematica pura e applicata, 1925-1926.

(12) Si omettono ovviamente gli indici 1 e 2 per X, Y,... ξ', η',... ecc. nei due primi integrali del primo membro della (1) e della (2).

risulta costituita di elementi

(6) $\quad 1,\ r\ \cos\theta,\ r \operatorname{sen} \theta \ldots r^p \operatorname{sen} p\theta$

che sono tra loro ortogonali; se però, pur rimanendo sul cerchio, l'origine non è più il centro, allora la ortogonalità tra gli elementi della w_1 non sussiste più. Peggio accade, in generale, se si considera un contorno S diverso dalla circonferenza: in questo caso, quasi sempre l'ortogonalità non sussiste rispetto all'origine scelta. È però chiaro che, dato il contorno S di un campo C, possiamo sempre costruire con gli elementi della successione (6) riferiti a una origine fissata ad arbitrio dei polinomi che risultino ortogonali su S.

Avendo infatti la successione di funzioni (6) costruiamo la successione:

$$1, \psi_2, \psi_3 \ldots\ldots \psi_{2p+1}$$

determinando $\psi_2 \ldots\ldots \psi_{2p+1}$ con le condizioni:

$$\psi_2 = c_1 + c_2\, r \cos\theta$$
$$c_1 l + c_2 \int_e r \cos\theta\, ds = 0$$

(l lunghezza del contorno)

$$\psi_3 = c'_1 + c'_2 \psi_2 + c'_3\, r \operatorname{sen}\theta$$
$$c_1' l + c'_3 \int_e r \operatorname{sen}\theta ds = 0$$

$$c'_2 \int_e (c_1 + c_2\, r\cos\theta)^2\, ds + c'_3 \int_e r \operatorname{sen}\theta\, (c_1 + c_2\, r\cos\theta)\, ds = 0$$

etc. ... secondo il noto procedimento di ortogonalizzazione. Costruita la successione $1, \psi_2 \ldots \psi_{2p+1}$ allora le condizioni date al contorno permettono di scrivere la funzione w_1 nella forma

(7) $\quad w_1 = A_1 + A_2\psi_2 + \ldots A_{2p+1}\, \psi_{2p+1};$

la determinazione di w_1 è ora facilitata dal fatto che ciascun coefficiente $A_1\ A_2 \ldots$ è determinato indipendentemente dagli altri; il valore di w_1 nell'origine non dipende però dalla sola A_1 ma anche dai coefficienti successivi in quanto pur avendo ristabilito la ortogonalità $\psi_2 \ldots \psi_{2p+1}$ non sono nulle nell'origine.

In generale dunque il procedimento dà luogo soltanto al vantaggio che le approssimazioni successive sono indipendenti dai computi già eseguiti e che la valutazione di $\psi_2 \ldots \psi_{2p+1}$ non è troppo complicata.

Queste affermazioni meritano un breve chiarimento.

Intanto è evidente che data sul contorno la w_1 i coefficienti risultano determinati col procedimento di ortogonalizzazione ora dato e sono gli stessi di quelli che si possono ottenere per altra via; ma il fatto è che la w_1 non è nota sul contorno, dove invece è nota la w e che il procedimento proposto ha lo scopo di determinare la w_1 Ora la determinazione dei coefficienti delle ψ in base alla w porterà ad un procedimento che non si arresta al coefficiente di ψ_{2p+1} ma darà luogo ad una serie infinita: resta quindi da provare la convergenza dello sviluppo (7) per p tendente all'infinito ciò che però, con limitazioni assai poco restrittive relative al carattere della w su S, è stato dimostrato da vari autori ([1]).

([1]) Cfr., per es., *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale,* Parte II. GIOVANNI SANSONE, *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali,* Bologna 1946 (3ª ed. 1952).

In secondo luogo, in alcuni campi simmetrici, una scelta conveniente dell'origine lascia invariate le prime funzioni ortogonali (6). Quando questo si verifichi allora w è nota con sufficiente approssimazione nell'origine appena sia determinata A_1 (perché le altre ψ dello sviluppo (6) contengono r a fattore) e può essere che la conoscenza del solo A_1 sia sufficiente a risolvere il problema almeno dal punto di vista *tecnico.*

6\. - Merita precisare questo punto di vista con un esempio. Sia data una membrana quadrata di lato 2 a soggetta a un carico uniforme q per unità di superficie fermata a livello ai lati del quadrato, soggetta su questi alla tensione *to* per unità di contorno.

Si domanda la inflessione massima al centro. Si ha:

$$w_o = -\frac{x^2+y^2}{4}\, q/t_0\ ,\quad w_c - w_o = w = \frac{a^2}{4\cos^2\theta}\, q/t_o$$

sul contorno

La successione $1,\ r\ \cos\theta,\ r \operatorname{sen} \theta \ldots$ si trasforma sul quadrato in

$$\frac{1}{8a},\ \frac{1}{\sqrt{8a^3}}\, r\cos\theta,\ \frac{1}{\sqrt{8a^3}}\, r \operatorname{sen}\theta,\ \psi_4, \psi_5 \ldots$$

Sviluppando la w data sul contorno secondo queste funzioni si trova come primo coefficiente

$$A_1 = \frac{a^2 q}{3t_o}$$

poichè le altre funzioni hanno r a fattore (per lo meno fino a ψ_7 inclusa) così un primo valore di w nel centro del quadrato è dato da

$$w = \frac{a^2 q}{3t_o}$$

e, se si ritiene che questo valore sia sufficientemente approssimato, il problema *tecnico* è risolto perché si conosce l'inflessione *massima* delle membrane.

Un confronto con la soluzione che, nel quadrato soddisfa esattamente alle condizioni ai limiti (e che si deduce facilmente da soluzioni note per la *torsione)* porta a scrivere sul centro del quadrato

$$w = \frac{a^2 q}{2t_o} - \frac{16a^2 q}{\pi^3 t_o} \left\{ \frac{1}{\cosh\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3^3\cdot\cosh\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{5^3\cdot\cosh\frac{5\pi}{2}} \ldots \right\}$$

cioè $w = 0{,}295\, \dfrac{a^2 q}{t_o}$.

La differenza si giustifica col fatto che la funzione $r^4 \cos 4\theta$ non è ortogonale nel quadrato neppure a $1/8a$ e quindi ψ_8 contiene un termine costante.

SISTEMI PIANI

7\. - Non vi è ora difficoltà a considerare i sistemi elastici piani, ma per essi accenneremo soltanto, alle linee generali del procedimento. Per poter esporre l'argomento basta ricordare:

1\) che, date P_x e P_y sul contorno, la soluzione del problema piano dipende dalla determinazione di una funzione biarmonica F che soddisfi alle condizioni.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int p_x\, ds \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -\int p_y\, ds$$

(e si sa che nei campi semplicemente connessi $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ sono a un sol valore. Cfr. Almansi. Sulla integrazione della equazione differenziale $\Delta^{2n} = 0$ - Annali di Matematica - Tomo II della Serie III - 1898);

2\) che alle condizioni al contorno si può soddisfare con una

$$F = a_o r^2 + \sum_{n=1}^{p} r^{n+2}\, (a_n \cos n\theta + b \operatorname{sen} n\theta) + \sum_{n=1}^{p} r^n\, (c_n \cos n\theta + d_n \operatorname{sen} n\theta)$$

scegliendo i coefficienti in modo da soddisfare alle condizioni poste in $2p + 1$ punti od anche utilizzando le funzioni

$$1,\ a_1 r^3 \cos\theta + c_1 r\cos\theta,\ b_1 r^3 \operatorname{sen}\theta + d_1 r \operatorname{sen}\theta, \ldots.$$

e costruendo con esse una successione ortogonale. (Si procede poi alla determinazione della F in modo analogo a quello indicato per le membrane);

3\) che l'errore commesso con la approssimazione scelta può essere valutato in base ad alcuni teoremi sulle funzioni biarmoniche; per il loro studio rimandiamo ad una ricerca più estesa.

LASTRE SOTTILI

8\. - Passiamo allo studio delle lastre sottili per le quali il procedimento, sarà esposto in modo un po' meno sommario che nei sistemi piani.

Data una lastra sottile, la soluzione del problema elastico in essa soddisfa alle seguenti condizioni:

1\) Se si indica con w l'abbassamento della superficie media della lastra rispetto al piano medio nella posizione indisturbata (cioè se w rappresenta, come si dice, l'inflessione della lastra), se q è il carico per unità di superficie ed N un coefficiente costante $\left(N = \dfrac{2Em^2a^3}{3(m^2-1)}\right.$ con E modulo di elasticità, $\dfrac{1}{m}$ coefficiente di Poisson e $2a$ spessore della lastra) allora si ha in tutto il campo

(1) $$\Delta\Delta w = q/N \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

2\) Se con t si indica la tangente ad un punto generico del contorno, con n la normale, (positiva verso l'interno) con M_t e M_n i momenti che hanno per asse rispettivamente t ed n, con P_z le forze verticali (per unità di sviluppo del contorno) si hanno su S le relazioni

(2) $$\left\{ \begin{array}{l} -N\dfrac{\partial w}{\partial n} = P_z \quad -N\dfrac{m-1}{m}\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial n\, \partial t} = M_n \\ -N\dfrac{m-1}{m}\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N\Delta w = M_t \end{array} \right.$$

Come si sa si possono assegnare ad arbitrio soltanto due di queste condizioni; si dimostra facilmente, considerando il lavoro di deformazione della lastra, che Quando sono date le forze esse sono rappresentate da

(3) $$M_t \ \text{e}\ P_z - \frac{\partial M_n}{\partial s}.$$

9\. - Nel campo limitato da una circonferenza, supposto $q = 0$ (una soluzione particolare per $q = 0$ può essere trovata facilmente) si ha:

(4) $$w = a_o r^2 + b_o + \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+2}(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\, (c_n \cos n\theta + d_n \operatorname{sen} n\theta)$$

Segue

(5) $$\Delta w = 4\left[a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) r^n\right] (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)$$

Le sollecitazioni (2) divengono in coordinate polari

(2') $$\left\{ \begin{array}{l} -N\dfrac{\partial \Delta w}{\partial r} = P_z \quad -N\dfrac{m-1}{m}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta}\right) = M_n \\ -N\dfrac{m-1}{m}\left\{\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}\right\} + N\Delta w = M_\theta \end{array} \right.$$

Sostituendo in queste le (4) e (5) e tenendo conto delle (3) si ottiene:

(6) $$\left\{ \begin{array}{l} M_\theta = 2N\dfrac{m-1}{m} a_o + N \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Bigg((n^2+3n+2 - \\ \quad - \dfrac{n^2-n-2}{m}\Bigg)\, r^n\, (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) + \\ \quad + \dfrac{m-1}{m}\, n\, (n-1)\, r^{n-2}\, (c_n \cos n\theta + d_n \operatorname{sen} n\theta) \\ P_z - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial M_n}{\partial \theta} = -N \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Bigg\{ \Bigg[n\, (n+1)\, (n+4) - \\ \quad - \dfrac{n^2(n+1)}{m} \Bigg]\, r^{n-1}\, (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) + \\ \quad + \dfrac{m-1}{m}\, n^2(n-1)\, r^{n-3}\, (c_n \cos n\theta + d_n \operatorname{sen} n\theta) \Bigg\} \end{array} \right.$$

Si osservi che queste espressioni rappresentano le risultanti sul contorno (e in tal caso nelle (6) si deve porre $r = R$) *e* rappresentano anche (per $r = r_0 \neq R$) le risultanti sulla circonferenza di raggio $r_o (< R)$. Perciò ha senso considerare le (6) anche con r variabile.

Data ora la (4) con i coefficienti, in generale, diversi da zero quale è l'andamento della sollecitazione al diminuire di r?

È chiaro che per $n > 2$ ed r tendente a zero le sollecitazioni (P_z, M_n, M_θ) tendono a zero perchè tutti i coefficienti sono moltiplicati almeno per $r^{n=2}$. Per $n \leqslant 2$ e r tendente a zero si ha invece

(7) $$\left\{ \begin{array}{l} M_\theta = 2N\dfrac{m-1}{m} a_o + 2N\dfrac{m-1}{m}\, (c_2 \cos 2\theta + \\ \quad + d_2 \operatorname{sen} 2\theta) \\ P_z = -8N(a_1 \cos\theta + b_1 \operatorname{sen}\theta) \\ M_r = 2N\dfrac{m-1}{m}\, (c_2 \operatorname{sen} 2\theta - d_2 \cos 2\theta) \end{array} \right.$$

10\. - I coefficienti a_n, b_n; c_n, d_n dipendono dalle forze date sul contorno. Ed infatti dare le forze equivale, come si è detto, a dare, sulla circonferenza M_q e $P_z - \frac{1}{R}\frac{\partial M_r}{\partial \theta}$. Sviluppando queste funzioni in serie di Fourier (con variabile q) avremo

$$(8)\quad \begin{cases} M_\theta = A_0 + A_1 \cos\theta + B_1 \operatorname{sen}\theta + \ldots \\ P_z - \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial M_r}{\partial \theta} = C_1 \cos\theta + D_1 \operatorname{sen}\theta + \ldots \end{cases}$$

Nella seconda di queste manca il termine C_o perchè dallo sviluppo di Fourier si ricava la relazione $C_0 = R/2\pi \int_0^{2\pi} (P_z - \frac{1}{R}\frac{\partial M_r}{\partial \theta})\, d\theta$ e si sa che è $\int P_z\, d\theta = 0$ per l'equilibrio e $\int \frac{\partial M_r}{\partial \theta} d\theta = 0$ perchè M_r è un sol valore.

Uguagliando ora i termini omologhi in $\cos nq$, $\operatorname{sen} nq$ delle (6) e delle (8) si ricava:

per $n = 0$ $A_0 = 2N\frac{m+1}{m} a_0$

per $n = 1$ $A_1 = N\frac{6m+2}{m} a_1 R_1$ $B_1 = N\frac{6m+2}{m} b_1 R$

(contemporaneamente si ha qui $C_1 = -N\frac{10m-2}{m} a_1$, $D_1 = -N\frac{10m-2}{m} b_1$, ma le due condizioni sono compatibili perchè per l'equilibrio è

$$\int_0^{2\pi} (M_\theta \cos\theta + M_r \operatorname{sen}\theta + RP_z \cos\theta)\, d\theta = 0$$
$$\int_0^{2\pi} (M_\theta \operatorname{sen}\theta - M_r \cos\theta + RP_z \operatorname{sen}\theta)\, d\theta = 0)$$

per n = 2 : $A_2 = 12\, N a_2 R^2 + 2N\frac{m-1}{m} c_2$

$$C_2 = -12\, N\frac{3m-1}{m} a_2 R + 4N\frac{m-1}{m} c_2/R$$

mentre equazioni uguali valgono per B_2 e D_2.

Segue $2A_2 - C_2 R = 12\, N\frac{5m-1}{m} R^2 a_2, \frac{3m-1}{m} A_2 +$

$$+ C_2 R = 2N\frac{(5m-1)(m-1)}{m^2} C_2$$

11. - Al n. 9 si è visto che la sollecitazione al centro del cerchio è data soltanto dai valori dei coefficienti a_0, a_1, b_1, c_2, d_2; avendo ora espresso questi coefficienti in funzione degli sviluppi di Fourier relativi alle forze esterne possiamo scrivere al centro del cerchio:

$$(9)\quad \begin{cases} M_\theta = A_0 + \dfrac{(3m-1)A_2 + mRC_2}{5m-1} \cos 2\theta + \\ \quad + \dfrac{(3m-1)B_2 + mRD_2}{5m-1} \operatorname{sen} 2\theta \\ M_r = \dfrac{(3m-1)A_2 + mRC_2}{5m-1} \operatorname{sen} 2\theta - \\ \quad - \dfrac{(3m-1)B_2 + mRD_2}{5m-1} \cos 2\theta \\ P_z = -\dfrac{8m}{6m+2}\left(\dfrac{A_1}{R}\cos\theta + \dfrac{B_1}{R}\operatorname{sen}\theta\right), \end{cases}$$

constatando così che la sollecitazione in quel punto *non* dipende da tutte le forze date ma soltanto dai sette integrali che servono a determinare i coefficienti A_o, A_1, A_2 ; B_1, B_2 ; C_2 ; D_2.

12. - Vediamo cosa si può dire per lo spostamento w nel centro 0 del cerchio (sempre nell'ipotesi che siano date le forze sul contorno). Lo spostamento di 0 sarà definito quando sia noto, per esempio, lo spostamento w_1 del punto di coordinate $r = R$ e $q = 0$; quelle del punto di coordinate $r = Req = p$ e la tangente nel primo punto cioè $\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)_{\substack{r = R \\ \theta = 0}}$. Si osserva subito che è:

$$[w]_{\substack{r = R \\ \theta = 0}} = a_0 R^2 + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n R^{n+2} + C_n R^n)$$
$$[w]_{\substack{r = R \\ \theta = \pi}} = a_0 R^2 + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (a_n R^{n+2} + C_n R^n)$$
$$\left[\frac{\partial w}{\partial \theta}\right]_{\substack{r = R \\ \theta = 0}} = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n R^{n+2} + d_n R^n).$$

Tutti i coefficienti a_n, b_n, c_n, d_n, sono determinati quando sono date le forze esterne, se si eccettuano b_0, c_1 e d_1. Nella espressione di $\frac{\partial w}{\partial \theta}$ compare solo d_1: esso è determinato appunto dalla conoscenza di questa derivata. Per isolare b_0 sommiamo le prime due equazioni; si ha:

$$w_1 + w_2 = 2\left[a_0 R^2 + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{2n} R^{2n+2} + C_{2n} R^{2n}\right)\right]$$

e quindi

$$b_0 = \frac{w_1 + w_2}{2}\left[- a_0 R^2 + \sum_{n-1}^{\infty} \left((a_{2^n} R^{2n+2} + C_{2n} R^{2n}\right)\right]$$

Noto b_0 è noto l'abbassamento di 0. Esso dipende da *tutti* i coefficienti a_{2n} e c_{2n}: ma si ottiene una buona approssimazione osservando che la serie $P_z - \frac{1}{R}\frac{\partial M_n}{\partial \theta}$ converge sul *contorno*, sia pure di convergenza semplice: essa proviene dalla serie (4) che rappresenta w e ne contiene, in sostanza, la derivata terza. Se i termini della serie $P_z - 1/R \frac{\partial M_n}{\partial \theta}$, convergono vuoi dire che l'ordine di grandezza del termine ennesimo è di $\frac{M}{n}$ al più: per i coefficienti della (4) (e quindi anche della (10)) l'ordine di grandezza sarà dunque $\frac{M}{n^4}$ (M numero fisso opportunamente scelto).

Se pertanto trascuriamo i termini a_4, c_4 (a_3, c_3 non compaiono nella (10)) commettiamo un errore dell'ordine di grandezza di $\frac{M}{256}$, cioè del 4 ‰ al più. In tal caso sono sufficienti i coefficienti già calcolati cioè si. può scrivere

$$b_0 = \frac{w_1 + w_2}{2} - .(a_0 R^2 + a_2 R^4 + c_2 R^2)$$

essendo a_0, a_2; c_2 già conosciuti in funzione delle forze esterne.

13. - Se in luogo delle forze, sono dati gli *spostamenti sul contorno*, cioè w e $\frac{\partial w}{\partial r}$, si ha, dalla soluzione elastica nella lastra circolare che w è espresso dalla (4) mentre $\frac{\partial w}{\partial r}$ vale:

$$(4')\quad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial w}{\partial r}\right]_{r=R} = 2a_0 R + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n+2) R^{n+1} (a_n \cos n\theta + \\ \quad + b_n \operatorname{sen} n\theta) + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nR^{n-1}(c_n \cos n\theta + d_n \operatorname{sen} n\theta) \end{cases}$$

I valori di $(W)_R$ e $\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_R$ sono dati del problema e possono essere sviluppati in serie di Fourier con variabile q; avremo allora

$$(11)\quad \begin{cases} (w)_R = H_0 + H_1 \cos\theta + K_1 \operatorname{sen}\theta + \ldots \\ \left(\dfrac{\partial w}{\partial r}\right)_R = L_0 + L_1 \cos\theta + M_1 \operatorname{sen}\theta + \ldots \end{cases}$$

e quindi eguagliando i termini omologhi nelle (4), (4') con le (11) avremo i valori dei coefficienti in funzione dei dati del problema.

Basta conoscere a_0, a_1 ; b_0, b_1 ; c_2, d_2 per conoscere la freccia e la sollecitazione al centro 0. Si ha infatti

$$(12)\quad \begin{cases} w_0 = b_0 = H_0 - \dfrac{L_0 R}{2},\ P_z = \\ \quad = 4N\left(\dfrac{N_1 - L_1 R}{R^3}\cos\theta + \dfrac{K_1 - M_1 R}{R^3}\operatorname{sen}\theta\right) \\ M_r = N\dfrac{m-1}{m}\left(\dfrac{4H_2 - L_2 R}{R^2}\operatorname{sen} 2\theta - \right. \\ \qquad \left. - \dfrac{4K_2 - M_2 R}{R^2}\cos 2\theta\right) \\ M_\theta = N\dfrac{m+1}{m} L_0/R + N\dfrac{m-1}{m} \\ \quad \left(\dfrac{4H_2 - L_2 R}{R^2}\cos 2\theta + \dfrac{4K_2 - M_2 R}{R^2}\operatorname{sen} 2\theta\right) \end{cases}$$

14. - Si potrebbe ora cercare l'espressione della sollecitazione nel centro del cerchio quando sul contorno sono date w e M_q. Ma su questo non ci fermeremo, bastando rilevare come le ricerche eseguite per la lastra circolare mostrino che si può conoscere la freccia e la sollecitazione al centro del cerchio in funzione di alcuni fra i dati nel contorno. Ma anche se tale punto di vista risulta, per quanto so, in ordine di idee diverso dall'usuale, esso non meriterebbe di essere esposto se non si potesse estendere i campi diversi dal cerchio. A questo scopo dobbiamo premettere alcune osservazioni:

1) Sia dato un cerchio C di centro O ed, entro C, un contorno S semplicemente connesso che abbia 0 al suo interno. In un punto A di S indichiamo con M_t, M_n e P_{zn} le sollecitazioni relative ad S e con M_q, M_r, P_{zr} le sollecitazioni relative al cerchio di centro 0 e passante per A. Avremo:

$$(13)\quad \begin{cases} M_t = M_\theta \cos(\widehat{r_1 n}) + M_r \operatorname{sen}(\widehat{n_1 r}) \\ M_n = - M_\theta \operatorname{sen}(\widehat{n_1 r}) + M_r \cos(\widehat{n_1 r}) \\ P_{zn} = - N\dfrac{\partial \Delta w}{\partial n} \end{cases}$$

ed inversamente

$$(14)\quad \begin{cases} M_\theta = M_t \cos(\widehat{r_1 n}) - M_n \operatorname{sen}(\widehat{r_1 n}) \\ M_r = M_t \operatorname{sen}(\widehat{r_1 n}) + M_n \cos(\widehat{r_1 n}) \\ P_{zr} = - N\dfrac{\partial \Delta w}{\partial r} \end{cases}$$

2) Sia nota la w in C. Quali sono le condizioni ai limiti su S? Se w è rappresentata dalla (4) allora si deducono subito M_e, M_r, P_{zr}. Applicando le (13) avremo M_t, M_n e P_{zn}. Il valore di w è dato dalla (4) stessa, mentre sarà:

$$(15)\quad \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial r}\cos(\widehat{r_1 n}) + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\operatorname{sen}(\widehat{r_1 n})$$

3) Se inversamente sono date le condizioni ai limiti su S come si fa a risalire alla w?

Per fissare le idee siano note, su S, w e $\frac{\partial w}{\partial n}$; w può essere rappresentata dalla (4), $\frac{\partial w}{\partial n}$ dalla (15). Limitandoci a considerare i primi $4p + 2$ termini si ha:

$$(16)\quad \begin{cases} w = a_0 r^2 + b_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{p} r^{n+2} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) + \\ \qquad + r_n (c_n \cos n\theta + d_n \operatorname{sen} n\theta) \\ \dfrac{\partial w}{\partial n} = 2a_0 r \cos(r,n) + \displaystyle\sum_{n=1}^{p} r^{n+1} \{ (n+2) \cos(\widehat{r_1 n}) \\ (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) - n \operatorname{sen}(\widehat{r,n})(a_n \operatorname{sen} n\theta - \\ - b_n \cos n\theta) + \displaystyle\sum_{n=1}^{p} r^{n-1} \{ n \cos(\widehat{r,n})(c_n \cos n\theta + \\ + d_n \operatorname{sen} n\theta) - n \operatorname{sen}(\widehat{r,n})(c_n \operatorname{sen} n\theta) - d_n \cos n\theta). \end{cases}$$

Cioè w e $\frac{\partial w}{\partial n}$ sono espressi per mezzo di $4p + 2$ coefficienti. Se quindi si fissano su S $2p+1$ punti e su questi i valori di w e $\frac{\partial w}{\partial n}$ si ha un sistema di $4p + 2$ equazioni che determinano i coefficienti stessi.

Il procedimento è legittimo perchè il determinante di queste equazioni è certamente diverso da zero, e porta quindi a determinare w con l'approssimazione desiderata (se p è sufficientemente grande).

In modo analogo si ragiona se su S si ricordano i valori delle forze (ci si serve allora delle (6) e delle (13) e si hanno $4p-1$ equazioni perchè è determinata la deformazione ma non lo spostamento di corpo rigido).

Se non si vuole risolvere il sistema di $4p + 2$ equazioni si può cercare di ortogonalizzare i sistemi 1, $(a_1 r^3 + c_1 r)\cos q$, $(b_1 r^3 + d_1 r)\operatorname{sen} q$, $(a_2 r + c_2 r^2)\cos 2q$ ... (con riferimento al contorno dato).

In tal caso però, non è più possibile, in generale, per conoscere la sollecitazione nell'origine, limitarsi a considerare i primi coefficienti, ma è necessario considerare i termini indipendenti da r di tutte le p funzioni ortogonali considerate (in modo analogo a quello che si è osservato per la membrana).

Qualche volta, peraltro, la ortogonalizzazione non modifica sensibilmente le funzioni date; ciò sarà mostrato su esempi pratici nella preannunciata esposizione completa che ci proponiamo di pubblicare tra breve.

Giulio Supino

Università di Bologna - Istituto di costruzioni idrauliche.