GUIDE PRATIQUE

DE

TACHÉOMÉTRIE

PAR

Joseph PORRO (NEVEU)

Ingénieur civil

PARIS

CHEZ L'AUTEUR

ET CHEZ LES PRINCIPAUX LIBRAIRES

1861

LA TACHÉOMÉTRIE PRATIQUE

INTRODUCTION

De toutes les applications de l'art de lever les plans, la plus importante et la plus difficile est sans contredit celle qui a pour but la formation des plans terriers au point de vue de la constitution du titre de propriété et de sa mobilisation qui est devenue de nos jours le premier, le plus urgent, besoin de l'agriculture. Si aucun pays ne possède encore un travail agrimétrique complétement suffisant à ce haut point de vue d'économie publique, c'est que l'art y a longtemps fait défaut ; c'est qu'on manquait encore de moyens à la fois exacts et économiques pour le levé, c'est qu'on n'avait pas encore trouvé une expression *grammographique* simple, jouissant de la propriété d'être à la fois désignative eidognosique et ubicative, et qui, dérivée directement des mesures prises sur le terrain, permît, chose impossible pour les arts graphiques, de conserver intacte l'exactitude primitive de ces mêmes mesures, qui fût propre enfin à suivre avec clarté toutes les mutations si fréquentes et si compliquées de la propriété territoriale et à en conserver la trace à perpétuité.

Le nivellement général du pays, non moins indispensable aujourd'hui pour tous les services publics et privés, civils et militaires, que pour les progrès de l'agriculture elle-même, était un élément qu'on se bornait à désirer vivement de voir compris dans cette expression, sans oser le demander directement à l'art, qu'on croyait impuissant à le fournir sans une énorme dépense de temps et d'argent.

On verra néanmoins que les moyens d'obtenir cette expression existent surabondamment parmi les procédés connus depuis de longues années; il ne manquait peut-être que de les rapprocher et de les combiner dans un seul corps de doctrine, ainsi qu'on les trouve aujourd'hui dans la tachéométrie, dont la pratique simple et facile est le but du présent ouvrage.

De tous les problèmes de géodésie et de nivellement, le plus complet, c'est celui dont on vient d'esquisser l'ensemble; sa solution comprend la solution de tous les autres : c'est donc à ce point de vue général qu'il convient de traiter ici la tachéométrie pratique.

Tout le monde sait qu'un plan territorial n'a été jusqu'à ce jour autre chose qu'un dessin reproduisant en petit sur le papier tous les contours des parcelles de propriété qui composent le territoire donné. Mais un *plan*, quelque complet, quelque bien fait qu'il soit, ne donnera jamais à beaucoup près, à lui seul, la solution complète du grand problème qui nous occupe; car il faudrait pour cela, entre autres choses par exemple, qu'on en pût déduire *numériquement en mètres et décimètres*, sans échelle ni compas, instruments par trop infidèles, toutes les dimensions des parcelles, de manière à pouvoir, avec ces dimensions, non-seulement calculer leur contenance, mais encore reconstruire ces mêmes parcelles sur une autre feuille, à la même ou à tout autre échelle de grandeur, avec leur configura-

tion entière sans rien perdre de l'exactitude de l'opération primitive, et rétablir au besoin leur périmètre sur le terrain en son lieu réel et absolu, dans le cas où les signes de délimitation auraient disparu pour une cause quelconque.

Il faudrait encore que la désignation *ubicative* fût absolue non-seulement pour chaque parcelle de propriété, mais encore pour tous les points de son contour; il faudrait que cette désignation pût être clairement écrite par la main du notaire sans intervention des hommes de l'art, au moyen de dimensions numériques d'une signification certaine, dans les actes constitutifs ou translatifs de la propriété, de manière que chaque parcelle s'y trouvât intrinséquement définie en elle-même sans le concours des relations extrinsèques de tenants et aboutissants, relations variables et sujettes à de graves équivoques dans la suite des temps.

Il faudrait encore que le degré d'exactitude de ces dimensions fût en rapport avec la valeur de la propriété foncière et avec la nature des prescriptions légales qui régissent la conservation de leurs contours.

Il faudrait enfin que, séparément dessinées d'abord, puis rapprochées par leur contour, toutes les parcelles co-limitantes s'adaptassent exactement sans vide ni croisement aucun, non-seulement à la limite d'exactitude d'une construction graphique, mais avec toute la rigueur des chiffres exprimant les dimensions homologues, de manière que l'ensemble de toutes les parcelles dont se compose un grand territoire reproduisît constamment en tout temps à venir, après les mutations les plus compliquées, le *tout* invariable qui constitue la surface générale du pays.

Pour obtenir efficacement tous ces effets, il est indispensable avant tout de restreindre le plus possible le rapport de tolérance généralement accordée aux géomètres : il est nécessaire d'adopter une méthode telle que les opérations subséquentes ne se fassent pas au détriment de l'exactitude des précédentes.

Une opération agrimétrique faite à un point de vue si élevé doit nécessairement servir de base et de garantie solide à la **FOI PUBLIQUE** en matière de propriété foncière, tant en ce qui touche à la propriété directe, qu'en ce qui a rapport aux droits réels des tiers : il est donc indispensable que la méthode suivie dans les opérations soit telle qu'elle permette **UNE COMPROBATION GÉNÉRALE ET ABSOLUE INDÉPENDANTE DE LA VOLONTÉ DES HOMMES**, et dérivant radicalement de la combinaison géométrique des éléments de l'opération.

Satisfaire à toutes ces *postulata* est à la fois chose aujourd'hui indubitablement nécessaire au progrès et au mouvement de la richesse agricole, et chose littéralement impossible au moyen de plans, même cotés, quelque bien faits qu'ils soient.

Ainsi, pour ne parler que du degré d'exactitude, admettons par exemple une opération de levé où celle-ci a été poussée jusqu'à la limite d'un millième et au-delà, comme on peut l'obtenir couramment de nos jours, même dans les terrains topographiquement les plus compliqués ; dessinons là, par exemple, à l'échelle du double déci-millième, puis supposons que, de ce dessin, il soit question de déduire à l'échelle et au compas les dimensions nécessaires soit au calcul des contenances, soit à tous autres usages quelconques ; évidemment cela ne se pourrait pas sans de graves pertes d'exactitude, parce que, le demi-millimètre étant la limite pratique de l'exactitude des plans, des erreurs allant à deux ou trois mètres peuvent s'introduire dans cette opération de déduction, même pour de très-petites distances, erreurs absolument intolérables.

Force serait donc de dessiner les plans à une échelle extrêmement grande, échelle pour ainsi dire impossible quand il s'agit d'un grand territoire.

On a proposé, pour obvier à cet inconvénient ainsi qu'au retrait du papier, etc., de coter toutes les dimensions linéaires de toutes les lignes(1) sur les plans, mais ceci est tout aussi impraticable pour des territoires un peu minutieusement parcellés, à cause de la trop grande multitude de chiffres qui encombreraient le plan.

On a proposé aussi d'écrire ces dimensions numériquement dans des registres à part, avec des lettres de référence au plan ; c'était un progrès, mais cela n'a pas résisté non plus à l'épreuve de la pratique.

+ Le seul moyen vraiment clair, facile et praticable sous tous les rapports, moyen satisfaisant en même temps à toutes les conditions requises pour la constitution du titre de propriété et pour sa mobilisation, moyen qui donne la solution complète du grand problème, consiste dans l'emploi d'un système de coordonnées rectangulaires rapportées à la méridienne et à la perpendiculaire ; ce système, qui avait été adopté dans le cadastre français pour les opérations trigonométriques seulement, est applicable à tous les points d'un levé quelconque ; il répond à tous les besoins, tant administratifs et judiciaires que de tous services publics et privés quelconques ; c'est donc uniquement dans le système des coordonnées que sera traité ici le problème général du levé et du nivellement d'une étendue quelconque de pays.

(1) C'est-à-dire la longueur de tous les côtés périmétraux et celle de toutes les transversales nécessaires à la détermination complète de la figure.

rance généralement accordée aux géomètres : il est nécessaire d'adopter une méthode telle que les opérations subséquentes ne se fassent pas au détriment de l'exactitude des précédentes.

Une opération agrimétrique faite à un point de vue si élevé doit nécessairement servir de base et de garantie solide à la **FOI PUBLIQUE** en matière de propriété foncière, tant en ce qui touche à la propriété directe, qu'en ce qui a rapport aux droits réels des tiers : il est donc indispensable que la méthode suivie dans les opérations soit telle qu'elle permette **UNE COMPROBATION GÉNÉRALE ET ABSOLUE INDÉPENDANTE DE LA VOLONTÉ DES HOMMES**, et dérivant radicalement de la combinaison géométrique des éléments de l'opération.

Satisfaire à toutes ces *postulata* est à la fois chose aujourd'hui indubitablement nécessaire au progrès et au mouvement de la richesse agricole, et chose littéralement impossible au moyen de plans, même cotés, quelque bien faits qu'ils soient.

Ainsi, pour ne parler que du degré d'exactitude, admettons par exemple une opération de levé où celle-ci a été poussée jusqu'à la limite d'un millième et au-delà, comme on peut l'obtenir couramment de nos jours, même dans les terrains topographiquement les plus compliqués ; dessinons là, par exemple, à l'échelle du double déci-millième, puis supposons que, de ce dessin, il soit question de déduire à l'échelle et au compas les dimensions nécessaires soit au calcul des contenances, soit à tous autres usages quelconques ; évidemment cela ne se pourrait pas sans de graves pertes d'exactitude, parce que, le demi-millimètre étant la limite pratique de l'exactitude des plans, des erreurs allant à deux ou trois mètres peuvent s'introduire dans cette opération de déduction, même pour de très-petites distances, erreurs absolument intolérables.

Force serait donc de dessiner les plans à une échelle extrêmement grande, échelle pour ainsi dire impossible quand il s'agit d'un grand territoire.

On a proposé, pour obvier à cet inconvénient ainsi qu'au retrait du papier, etc., de coter toutes les dimensions linéaires de toutes les lignes(1) sur les plans, mais ceci est tout aussi impraticable pour des territoires un peu minutieusement parcellés, à cause de la trop grande multitude de chiffres qui encombreraient le plan.

On a proposé aussi d'écrire ces dimensions numériquement dans des registres à part, avec des lettres de référence au plan ; c'était un progrès, mais cela n'a pas résisté non plus à l'épreuve de la pratique.

Le seul moyen vraiment clair, facile et praticable sous tous les rapports, moyen satisfaisant en même temps à toutes les conditions requises pour la constitution du titre de propriété et pour sa mobilisation, moyen qui donne la solution complète du grand problème, consiste dans l'emploi d'un système de coordonnées rectangulaires rapportées à la méridienne et à la perpendiculaire ; ce système, qui avait été adopté dans le cadastre français pour les opérations trigonométriques seulement, est applicable à tous les points d'un levé quelconque ; il répond à tous les besoins, tant administratifs et judiciaires que de tous services publics et privés quelconques ; c'est donc uniquement dans le système des coordonnées que sera traité ici le problème général du levé et du nivellement d'une étendue quelconque de pays.

(1) C'est-à-dire la longueur de tous les côtés périmétraux et celle de toutes les transversales nécessaires à la détermination complète de la figure.

Comparons néanmoins encore une fois les plans cotés avec le système des coordonnées.

Pour quiconque a vu ce que c'est qu'un *plan coté*, il est de toute évidence que les dimensions qu'on y trouve, lesquelles sont nécessairement enchevêtrées entre elles d'une manière très-complexe, variant au gré de l'opérateur et selon les exigences de la difficulté du terrain, ne peuvent ni s'additionner de proche en proche, pour s'assurer que la réunion des parties reproduit constamment le tout, ni se prêter aux mutations compliquées de subdivision, d'agglomération et de *remembrement*, qui rendent continuellement variable la répartition de la propriété agricole, ni mettre en main du notaire une expression grammographique précise et telle qu'il puisse l'écrire lui-même sans le secours de l'homme de l'art dans les actes, et qui puisse servir à la constitution du titre.

Un plan par coordonnées n'est, d'autre part, autre chose qu'un véritable plan coté, mais dont toutes les dimensions linéaires étant prises dans deux directions constantes (la méridienne et sa perpendiculaire) se présentent à l'esprit dans l'ordre à la fois le plus simple et le plus admirable par sa clarté, et sont additionnables de proche en proche, d'une extrémité à l'autre du pays, pour se prêter à la comprobation la plus complète, la plus générale, la plus indépendante de la volonté des hommes et de leurs fallacieux jugements, celle qui établit de proche en proche d'une extrémité à l'autre du pays que la somme des parties reproduit constamment le tout, non seulement sur le plan primitif, mais encore, et à perpétuité, après chaque mutation quelle qu'en soit la nature.

S'il est impossible de faire un plan coté autrement qu'en écrivant des dimensions sur le plan même, qui doit alors être construit à une très-grande échelle pour pouvoir les admettre;

il est au contraire extrêmement facile d'accompagner le plan purement graphique, quelque petite qu'en soit l'échelle, d'un registre des coordonnées de tous les sommets angulaires de toutes les parcelles.

Ce système est si clair, si exact mathématiquement parlant, que M. de Robernier n'a pas craint d'avancer qu'avec les coordonnées on pouvait à la rigueur se passer complétement des plans, et a soulevé ainsi les colères les plus violentes de tous les graphicistiqueurs de l'époque. M. Robernier avait raison abstractivement, mais il reconnaissait qu'en pratique on est forcé d'admettre, à côté du registre des coordonnées, des plans *pour parler aux yeux*, pour présenter le tableau synoptique de telle ou telle partie du pays, pour mettre en évidence immédiate la forme des contours de chacune des parcelles, et c'est à tort qu'on a prêté à ce magistrat la pensée de ne plus vouloir des plans.

Mais ce que l'on gagne par la méthode des coordonnées en fait de plans, c'est d'être complétement dispensé d'employer de grandes échelles, et d'avoir à faire laborieusement des dessins d'autant plus promptement périssables par l'usage, que les feuilles sont plus grandes et plus difficiles à manier (1).

Un plan en miniature, tant petite qu'on voudra, fut-il inexact, quant à ses proportions, pourvu qu'il présente la parfaite *ressemblance* (ce qui ne veut pas dire la *similitude géométrique*), pourvu qu'il présente avec le vrai la ressemblance d'un bon croquis, cette ressemblance fût-elle de l'espèce connue dans un

(1) Il existe en Espagne un propriétaire qui possède d'un seul tenant une *parcelle* de onze mille hectares, dont le contour est très-minutieusement tourmenté; il serait curieux de voir comment avec un plan coté ou non et de l'échelle du millième, ou du duomillième, on donnerait à ce propriétaire une juste idée de la figure et de la grandeur de sa propriété.

autre genre sous le nom *caricature* (2), un tel plan remplirait tout de même complétement son but désormais unique, celui de présenter à l'œil le tableau synoptique du pays et la forme des contours des parcelles; les dimensions de toutes espèces et

(2) Ne fait-on pas, par exemple, des plans des grandes villes où la largeur des rues est exagérée? N'exagère-t-on pas en géographie la largeur des routes et des cours d'eau? Ne voyons-nous pas dans les gares des chemins de fer des cartes qui, par leurs proportions, sont de véritables caricatures? Mais à côté de ces cartes, qui parlent si éloquemment aux yeux du voyageur, qui lui infusent avec une rapidité électrique l'idée complète du voyage qu'il va entreprendre, se trouve l'affiche qui contient en nombres les distances kilométriques et les temps de parcours. Que peut-on imaginer de plus parfait? Viendra-t-il encore à l'idée de quelqu'un de tenter à l'échelle et au compas une mesuration sur la carte? Ne serait-on pas au contraire très-satisfait de ces inexactitudes caricaturales qui en augmentent l'expression?

Entre ces productions véritablement dictées par le bon sens populaire et par les besoins les plus sentis et nos plans territoriaux, simplement eidographiques mais accompagnés d'un registre de coordonnées, le rapprochement est facile.

Nos plans ne seront pas en caricature, ils seront d'une bonne exactitude graphique, ils seront même dessinés sur papier carrelé, mais ils seront à une échelle assez petite (le double déci-millième), pour leur permettre le rôle *sinairéographique* qui leur appartient, tout en présentant encore d'une manière *lisible* la véritable figure périmétrale des plus petites parcelles; ils seront dessinés en feuilles kilométriques, avec une lisière marginale, prise sur les feuilles confinantes, ce qui donne une grandeur très-commode et les rend susceptibles d'être reliés en atlas faciles à manier.

Les coordonnées des bornes publiques et autres points principaux se trouvent écrites en légende sur la feuille même.

La forme, les cohérances, l'ubication d'une parcelle, le chemin qui y conduit, les relations de voisinage plus ou moins proche, enfin tout ce qui intéresse le propriétaire ou l'acheteur, apparaîtra d'un seul coup-d'œil, les courbes de niveau en montreront le relief.

Pour toute autre donnée de distances et de grandeurs exactes, le registre général des coordonnées répondra avec la rigueur des chiffres.

pour tous usages doivent désormais se déduire toujours du registre des coordonnées.

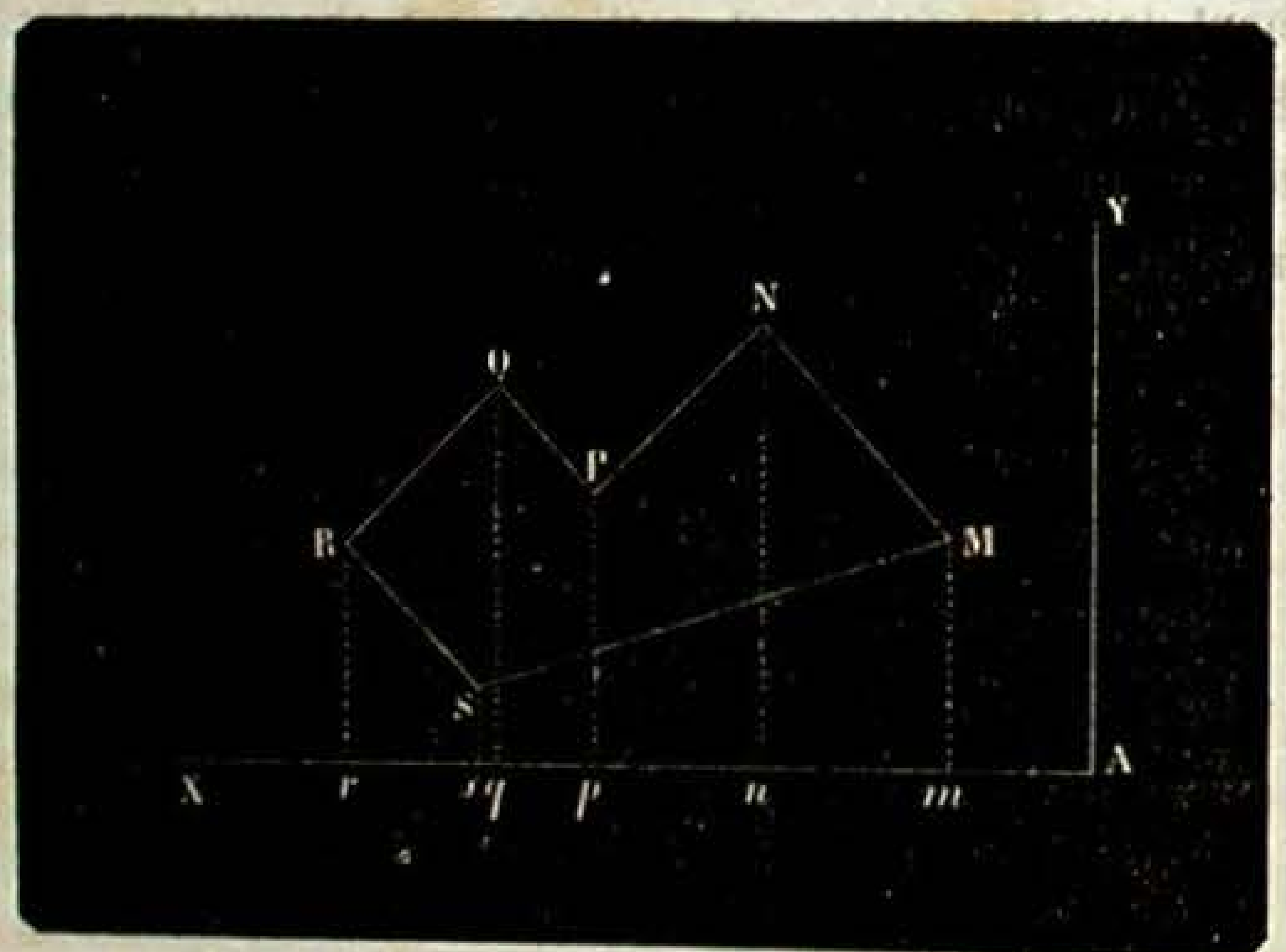
Complétement battus sur leur propre terrain, par la logique de la science, comme par la logique des faits, les partisans du graphicisme et ceux des plans cotés, forcés d'admettre la supériorité du système des coordonnées, se sont vu soutenir encore que l'art ne possède pas de moyens faciles pour y arriver; c'est pour cela qu'avant de décrire les procédés tachéométriques, qui n'ont encore qu'une quarantaine d'années de sanction publique, il est bon de montrer comment on peut au contraire avec le procédé le plus ancien et le plus simple de tous, celui de la chaîne et de l'équerre, obtenir facilement, couramment, de tels résultats, et de rappeler ici qu'un homme éminent dans la science, et pratiquement observateur parfait, M. Faye, a professé en France dans les écoles publiques officielles ces mêmes principes, et imaginé une méthode qui abrége et simplifie le travail.

LEVÉ A L'EQUERRE ET A LA CHAINE.

MÉTHODE DE M. FAYE.

Tout le monde connait le levé des plans à la chaîne et à l'équerre agrimétrique dite d'arpenteur (1) : on sait que ce système consiste dans le mesurage d'une base AX (fig. 1) sur laquelle

Fig. 1.



on abaisse des ordonnées de tous les points périmétraux de la parcelle à lever.

(1) L'ancienne mesure appelée *arpent* a fait place partout, dans les législations modernes, aux mesures centésimales ; les mots *arpenteur*, *arpentage*, doivent en conséquence disparaître de notre langage.

On part ensuite d'un point fixe A et on mesure à la chaîne les distances A*m*, A*n*, A*p*,..., qu'on appelle abscisses ; puis on mesure de même les perpendiculaires ou ordonnées correspondantes M*m*, N*n*, P*p*,... ; et la position de tous les points périmétraux de la parcelle par rapport à la base AX et au point de départ A se trouve complétement déterminée par un système de coordonnées rectangulaires.

On a des équerres agrimétriques sur lesquelles il y a une boussole ; et, si alors on a orienté la base AX dans la direction Est-Ouest, la ligne AY normale à AX sera une méridienne : les abscisses seront les distances à la méridienne qu'on désigne habituellement par x, et les ordonnées, qu'on désigne par y, seront des distances à la *perpendiculaire*, c'est-à-dire à un axe fixe perpendiculaire à la méridienne passant par le point fixe et inamovible A, qui a été choisi pour point de départ de toutes les mesures.

Le travail de campagne consistera donc en un petit cahier contenant les x et les y mesurés sur le terrain pour chaque point périmétral et en un croquis à vue de la propriété levée, sur lequel chaque point angulaire du périmètre sera désigné d'un numéro d'ordre correspondant au cahier des coordonnées. Ici, on le voit clairement, tout est simple et facile ; le système s'applique uniformément de proche en proche (en transportant la base parallèlement à elle-même) à toute l'étendue du pays ; c'est un progrès immense si on y met en regard cet enchevêtrement inextricable de lignes et de chiffres qu'on appelle *plans cotés*, dont on n'arrive jamais à constituer rigoureusement ni les périmètres partiels ni à beaucoup près leur ensemble.

Rien n'est plus facile maintenant que de calculer la contenance de toutes les parcelles ainsi levées, et on n'a pas besoin pour ça de dessiner le plan.

En effet, si on considère un trapèze quelconque NnpP (fig. 1), formé par un côté NP de la figure, par sa projection *np* sur l'axe AX et par les deux ordonnées correspondantes, on verra qu'on y connaît les deux côtés parallèles $Nn = y_n$, $Pp = y_p$ et le côté normal $pn = x_p - x_n$. On a donc les éléments nécessaires pour calculer l'aire de ce trapèze ainsi que de tous les autres reposant sur la base AX et formés par deux ordonnées aboutissant à un côté quelconque de la parcelle levée.

Or, il est facile de voir que la contenance de la parcelle est égale à la somme de tous les trapèzes qui la traversent, moins la somme de tous les trapèzes qui ne la traversent pas : on a en conséquence tous les éléments pour le calcul de la contenance demandée dans les nombres originaux du levé, sans que besoin soit de dessiner le plan, de diviser la figure en triangles, etc., etc.

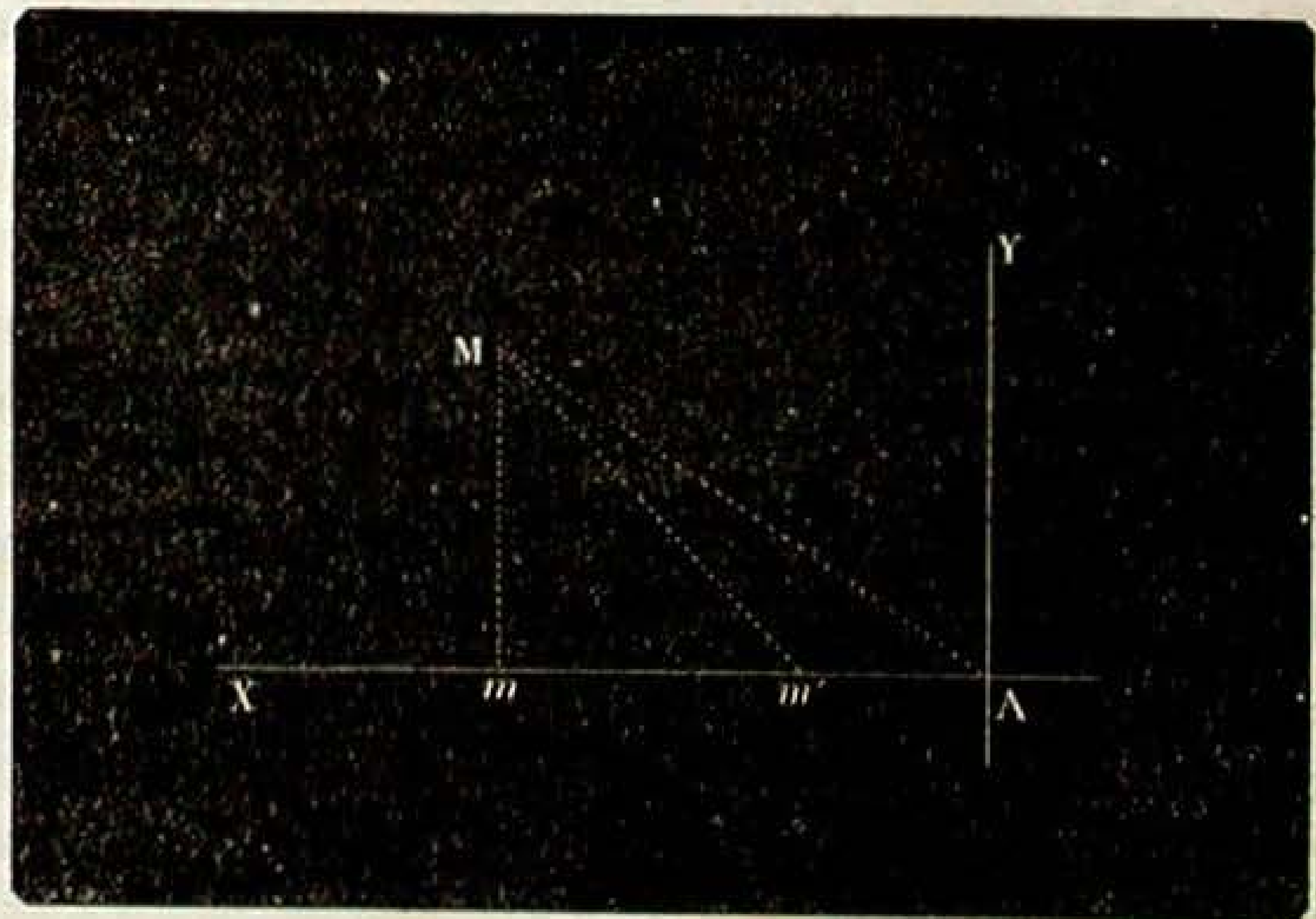
On voit aussi comment, à l'échelle et au compas, on peut dessiner exactement le plan levé ; et on comprendra que si le point fixe et inamovible est un point bien connu et de notoriété publique, tel, par exemple, qu'une borne plantée *ad hoc*, voire même le clocher du village voisin, la désignation de la parcelle par le moyen de ses coordonnées, que tout clerc de notaire peut copier manuellement dans un acte, sera complète tant sous le rapport *ubicatif* que sous le rapport de la contenance et de la figure exacte de son périmètre sans équivoque possible.

Il est enfin de toute évidence que, si, dans la suite des temps, des évènements quelconques avaient causé la destruction de toutes ou de partie des bornes périmétrales, il serait toujours facile de les replacer aux mêmes lieu et place, et de reconstituer sur le terrain le périmètre entier de la parcelle d'après le simple énoncé numérique contenu dans un acte.

M. Faye, astronome, membre de l'Institut de France, qui a professé dans le temps l'art de lever les plans, a cherché à rendre plus facile cette même opération en se dispensant de chaîner les ordonnées.

Son système consiste dans l'emploi d'une équerre donnant non-seulement l'angle droit, mais encore sa moitié, et à *battre* avec ces deux moyens, en parcourant la base, tous les jalons du contour à lever; chaînant alors d'une manière continue le long de AX, à partir du point A (fig. 2), et notant pour chaque jalon tel que M, les points m' et m correspondants à l'oblique et à la normale sur AX, on aura comme précédemment l'abcise $x_m = Am$ et l'ordonnée $y_m = Mm = mm' = Am - Am'$.

Fig. 2.



M. Faye a même imaginé, pour cet objet, une équerre à réflection spéciale, qui facilite beaucoup la pratique de ce mode de levé.

MOYENS DE TRANSITION

Ce premier pas fait dans l'emploi des obliques, un second pas très-considérable consistera à employer des obliquités variées suivant l'exigence des localités au moyen d'un instrument gradué portant une lunette, tel que boussole, graphomètre, théodolithe, etc. Alors en effet l'instrument pourra rester constamment placé en A durant toute l'opération et on n'aura qu'à mesurer pour chaque jalon l'angle YAM, angle qui, combiné avec l'abcisse A*m*, donnera l'ordonnée M*m* par voie trigonométrique.

Ceci nous amène à l'idée d'abandonner tout-à-fait l'équerre et de chainer le rayon recteur AM au lieu de l'abscisse A*m*, qu'on déduirait alors du calcul ainsi que l'ordonnée.

Cela serait bon en effet pour un seul ou pour un très-petit nombre de points, mais s'il s'agissait d'un levé sur une étendue considérable de pays, ce serait tout-à-fait impraticable à cause des longueurs dans lesquelles on serait entrainé.

En effet, dans l'opération du chainage le long d'une base, on n'a à tracer et à chainer qu'une seule ligne et à noter seulement en passant les abscisses correspondantes aux pieds des perpendiculaires et la rencontre des obliques sur la même ligne; au contraire en chainant les rayons vecteurs il faudrait les parcourir à la chaine tous, un à un, en entier, en partant toujours de l'origine A. Un simple coup d'œil sur les figures permet d'apercevoir dans quelle immense proportion le travail serait augmenté.

Le système des rayons vecteurs serait donc condamné sans retour, si une ressource nouvelle n'était pas venue le remettre en honneur: elle consiste dans l'évaluation des distances, non

plus par le mesurage matériel à la chaîne, aussi pénible que vicieux, mais au moyen du micromètre et de la mire parlante; ce moyen, pour ainsi dire instantané, doué aujourd'hui d'un haut degré d'exactitude, franchissant les obstacles matériels, arrivant d'un trait partout où la vue arrive, donne au système des rayons vecteurs une supériorité très-grande sur toutes les autres méthodes.

Dès-lors plus de jalons, plus de chainage du tout; avec l'instrument installé en A, on vise sur la mire parlante qu'un aide porte successivement sur tous les points et y maintient durant un temps très-court (moyennement une demi-minute): dans ce court intervalle de temps, l'observateur a *lu* sur la mire la distance, il l'a enregistrée sur son carnet et, durant le temps que l'aide emploie pour passer au point suivant, le géomètre enregistre son angle qu'il lit sur le cercle horizontal de l'instrument.

Mais les distances ainsi obtenues étant passibles d'une réduction qui dépend de l'inclinaison de la visuelle, inclinaison qui, en colline et en montagne, peut être très-considérable, il faut que l'instrument soit muni d'un cercle vertical qui permette d'observer et d'inscrire pour chaque point cette inclinaison, afin d'appliquer à la distance observée soit au moyen d'une table calculée, soit autrement, la réduction correspondante.

Mais qui ne voit déjà que, connaissant la distance et l'angle d'élévation, on obtient du même coup la cote de niveau, c'est-à-dire la hauteur du pied de la mire au-dessus du centre de l'instrument?

On pourra donc, pour ainsi dire sans qu'il en coûte, avoir, par ce mode de levé, le nivellement le plus général, le plus complet du pays et satisfaire ainsi, par avance, à tous les *desiderata* de l'*agriculture*, de l'*industrie*, des *travaux publics* en fait de drainage, d'irrigation, de desséchement, de régime des cours d'eau, d'étude des voies de grande et de petite communication, etc., et cela tout simplement en ajoutant au carnet deux colonnes, une pour l'angle d'élévation, l'autre pour la troisième coordonnée z.

Voilà toute la **TACHÉOMÈTRIE.**

On peut lever tachéométriquement avec la boussole éclimétrique ou avec tout autre instrument gradué portant un micromètre à sa lunette. Mais, pour rendre réellement pratique et efficace sur le terrain cette élégante méthode et pour lui donner toute la précision désirable, il fallait combiner une espèce de théodolithe *ad hoc*, dans lequel toutes les parties fussent en harmonie avec le degré d'exactitude à obtenir, et dans lequel rien ne fût de trop, rien ne manquât; il fallait que cet instrument fût peu volumineux, bien solide et peu susceptible de se déranger, d'un maniement facile à la portée de tout le monde : ce sont là les conditions auxquelles satisfait le TACHÉOMÈTRE.

Il fallait enfin se débarrasser de la masse considérable de calculs trigonométriques que cette méthode suppose, sans toutefois retomber dans les procédés graphiques aujourd'hui complétement insuffisants.

Cette autre condition a été remplie par une échelle logarithmique (règle à calcul) combinée exprès, au moyen de laquelle on obtient, en moins de deux minutes, la distance horizontale et les trois coordonnées x, y, z d'un point dont on connaît la distance *brute* lue sur la mire et les deux angles donnés par les deux cercles de l'instrument.

Appliquée depuis près de quarante ans en Italie (depuis 1823) sur la plus grande échelle et dans les localités les plus difficiles, dans les Alpes et dans les Apennins, la tachéométrie a toujours rempli toutes les conditions de rapidité, d'économie

et d'exactitude qu'il avait été permis d'en espérer d'après l'examen des conditions théoriques du système. Pareille en cela à tout ce qui est vraiment bon, la tachéométrie n'a pas donné lieu à des changements, ou à des perfectionnements remarquables : des détails d'ordre dans les registres numériques sont les seules variantes qui ont eu lieu dans cette longue période de temps.

S'il n'en est pas tout à fait de même du tachéomètre, il n'est pas moins vrai que le tachéomètre de 1829 a été le plus parfait et le plus pratique; tous les changements venus après, notamment en ce qui regarde les dimensions, ne se sont point soutenus, et on en est revenu, à quelques détails de construction près, au tachéomètre de 1829.

CHAPITRE PREMIER

DÉFINITION DE LA TACHÉOMÉTRIE, NOTIONS ÉLÉMENTAIRES, NOTATION

1. — La tachéométrie est l'art de lever les plans et de faire les nivellements avec une économie considérable de temps et un degré de précision supérieur à celui qu'on obtient par toutes les autres méthodes: le tachéomètre est l'instrument unique nécessaire pour la solution pratique de cet important problème; le tachéomètre s'applique avec les mêmes avantages à toute espèces de levés et de nivellements, aux travaux publics civils

et militaires, etc.: ces propriétés et la grande facilité avec laquelle on peut devenir en peu de temps habile opérateur *praticien*, même avec des connaissances théoriques très-bornées, en font un instrument qui ne laisse presque plus rien à désirer.

2. — Un ingénieur qui est pourvu d'un tachéomètre n'a besoin absolument d'aucun autre objet: plus de chaîne ni de perche, plus d'équerre, de graphomètre, de planchette, pas même de niveau, puisque le tachéomètre permet de résoudre, presqu'à vue d'œil, le problème complet de la détermination de tout point *dans l'espace* (c'est-à-dire aussi bien en *planimétrie* qu'en *altitude*) par rapport aux axes fixes adoptés.

3. — Le perfectionnement dans la partie optique de l'évaluation des distances par le micromètre, qui forme le principal élément du tachéomètre, consiste dans l'*anallatisme*, c'est-à-dire dans l'*invariabilité* de l'angle micrométrique rapporté au centre de l'instrument.

Cette propriété optique a donné à la diastimométrie micrométrique toute l'exactitude dont elle manquait, et l'a rendue supérieure à la chaîne et au double mètre en pays plat et facile; elle lui a donné une très-grande supériorité sur tous les moyens connus en montagne et en pays coupé et difficile.

Bien que fondée principalement sur la mesure directe de tous les rayons vecteurs, la tachéométrie n'exclut nullement les déterminations de points par intersection ni de stations par trisection. Bien au contraire, ces moyens convenablement appliqués sont d'un grand secours, le premier pour augmenter la rapidité des opérations, le second pour en assurer l'exactitude de l'assemblage.

4. — La lunette anallatique adaptée au tachéomètre, dont la composition et les fonctions de toutes les parties sont entre elles en rapport, tant pour l'exactitude que pour la promptitude

des observations, présente tous les avantages dont elle est susceptible, mais il n'en serait pas de même si on se bornait à faire l'application de ce moyen diastimométrique aux instruments connus, et à ne rien changer aux méthodes pratiques de conduite des opérations; pour obtenir tous les aavntages propres du tachéomètre, il faut apporter à ces méthodes des modifications profondes et radicales, il faut en venir franchement à la tachéométrie telle qu'elle a été définie plus haut. Il est évident, en effet, que, fondées en quelque sorte sur la privation sentie en tout temps d'un moyen diastimométrique prompt et exact, ces méthodes ont dû être combinées pour y suppléer par toutes les ressources de la géométrie, et pour épargner, autant que possible, le coûteux et pénible mesurage matériel des longueurs à la chaîne et au double mètre, tandis qu'en tachéométrie la prééminence est laissée à la mesure directe des rayons vecteurs.

5. — L'énoncé à la fois le plus simple et le plus général du problème que la géodésie générale a pour but de résoudre se réduit à ceci :

Déterminer la position d'un point dans l'espace par rapport à trois points connus, ou par rapport à trois axes donnés de position.

En haute géodésie, par les grandes triangulations qu'on rapporte à la méridienne, à la perpendiculaire et au niveau de la mer, on résout ce problème pour les très-grandes dimensions de pays; on place et détermine ainsi des signaux trigonométriques auxquels se relieront plus tard les opérations secondaires.

En topographie et en agrimétrie, ainsi que dans les levés et nivellement pour les grands travaux publics, on se rattache aux points trigonométriques, et on résout partiellement le même problème.

Le topographe se contente d'une planimétrie peu rigoureuse, et, en altimétrie, il donne plutôt de l'importance à l'expression pittoresque de la forme du sol qu'à la précision géométrique. En agrimétrie, on a négligé tout à fait, beaucoup trop, l'altimétrie, mais on s'est attaché à donner de l'exactitude à la planimétrie; de là, les nombreuses variétés d'instruments connus pour résoudre partiellement le problème général, surtout pour l'altimétrie seule, pour laquelle on fait, à grand frais, de longues et délicates opérations. L'ingénieur civil ou militaire, qui, presque toujours, a besoin de la solution complète du problème sur des étendues de pays assez grandes, revient, à plusieurs reprises, sur le même terrain avec des instruments différents. Avec le tachéomètre, au contraire, le terrain n'est *battu* qu'une seule fois. On y emploie moins de temps qu'il n'en faudrait pour une des solutions partielles qu'on demande ordinairement (la planimétrie seule, ou le relief seul), et on rentre au cabinet avec un plan et un relief complets des terrains, qui ne laissent rien à désirer.

6. — On exposera dans cet ouvrage la solution du problème suivant les trois axes, c'est-à-dire dans toute la généralité de son énoncé, pour tous les cas possibles et pour les besoins de tous les services, tels que grandes cartes agrimétriques, travaux publics civils et militaires, etc., etc. Chacun comprendra facilement quels éléments il pourra se dispenser de recueillir, quand, dans un but spécial, il ne voudra obtenir que la longueur de certaines lignes et la position de certains points, ou bien le nivellement seul. Quant à l'instrument dont l'élément le plus couteux est la lunette, il ne serait pas beaucoup simplifié, ni d'un prix beaucoup plus bas, si, pour le consacrer à un but spécial, on voulait supprimer quelques-uns des autres éléments dont il se compose. La fixation définitive

des hauteurs de niveau pour des travaux déjà tracés est le seul cas où, par la suppression de tous les moyens propres à la planimétrie, l'instrument peut se réduire alors à un niveau à bulle d'air et à lunette, qui présente plusieurs avantages sur les autres instruments de la même espèce employés jusqu'à ce jour, tout en conservant sa faculté diastimométrique.

7. — La remarquable propriété de cette méthode, toute basée qu'elle est sur les principes rigoureux de la science, et malgré les calculs nombreux auxquels son emploi semble conduire, celle d'être réduite à des pratiques matérielles assez faciles pour n'exiger chez les opérateurs que des connaissances fort restreintes, a été complétement prouvée par les travaux de la brigade topographique que le génie militaire du Piémont avait formée en 1833, en la composant de sous-officiers et de soldats des bataillons des sapeurs pris, sans faveur de choix, parmi les professions de maçons, serruriers, menuisiers et même de simples terrassiers, qui sont devenus, à leur grand étonnement, d'habiles géomètres après trois mois d'instruction.

8. — La simplicité pratique, la rapidité des opérations, la rareté des chances d'erreur, la facilité avec laquelle on obtient les résultats numériques, etc., ne dépendent pas seulement de la composition de l'instrument, la division centésimale du cercle y est aussi pour beaucoup.

9. — L'expérience a prouvé qu'un habile opérateur, également exercé à l'ancienne et à la nouvelle division, observant des angles avec un théodolithe ordinaire par séries de dix observations (vingt visées), peut faire soixante-dix séries dans une grande journée, si la division est centésimale; il n'en ferait que cinquante au plus, avec la division sexagésimale : l'expérience a prouvé aussi que les chances d'erreurs, dans la lecture

des verniers, sont quatre fois plus nombreuses avec l'ancienne qu'avec la nouvelle division : la cause est dans l'alternative des dénominateurs, neuf, six et dix dans l'une, en passant d'un chiffre à celui d'ordre suivant, tandis que l'autre présente invariablement le dénominateur dix.

10. — Il y a eu un second motif, non moins important, pour adopter la division centésimale pour le tachéomètre ; ce motif est que la méthode tachéométrique, qui a rendu déjà de si grands services, serait, pour ainsi dire, impraticable, si les calculs pour la transformation des nombres observés en coordonnées aux trois axes devaient se faire par les tables ; la haute exactitude du tachéomètre serait inutile si on devait passer aux coordonnées par des procédés graphiques; c'est l'échelle logarithmique qui doit être exclusivement employée; mais il faut que sa disposition et surtout son numérotage ne soient pas trop compliqués (1).

Or, par la division en 360 degrés, les fonctions circulaires égales et de signes différents doivent, pour les dizaines de degrés, porter sur l'échelle des chiffres différents pour les quatre cadrans, ce qui exige de deux choses l'une; ou bien une masse de chiffres qui ne trouverait pas place d'une manière claire sur les échelles, ou bien, à chaque opération, des contentions d'esprit que l'opérateur ne pourrait pas soutenir longtemps, et qui seraient la source d'erreurs nombreuses.

11. — Le petit nombre d'objections (il n'y en a du reste aucune de sérieuse) que la routine oppose encore contre la généralisation du système centésimal n'a aucune portée ici :

(1) L'échelle logarithmique, a-t-on dit, est elle-même un graphicisme. Non; pas plus que la lecture des verniers du théodolithe qui donne les éléments des calculs trigonométriques.

car ici, la division du cercle ne fait pour ainsi dire que *passer* dans les opérations *sans s'y arrêter ;* ce n'est ni plus ni moins qu'une ligne de crayon qu'on efface après que son point d'intersection avec une autre ligne est trouvé. S'il existait un nombre, autre que cent, plus avantageux pour la rapidité des opérations, il faudrait l'adopter, fût-il un nombre premier, n'eût-il aucune espèce de rapport avec aucune des tables calculées; qu'il soit dit, par conséquent, une fois pour toutes, que le cercle est pour nous divisé en 400 grades, et que les fractions des grades ne sont pas des minutes ni des secondes, mais des dixièmes, des centièmes, des millièmes de grades qui se désignent par le rang des chiffres qui suivent la virgule.

12. — Pour le peu de cas, au reste, de recoupements de lignes de grande longueur ou autres qui nécessiteraient le calcul trigonométrique par les tables, on a les tables de Borda, celles de Callet, qui sont entre les mains de tout le monde ; celles de Plausoles, en un petit volume aussi portatif que celles de Lalande et autres.

13. — En résumant, nous dirons que les propriétés du tachéomètre sont :

1° De donner par une seule observation, dans un temps très-court, les éléments de la position de tout point accessible rapportés à trois axes coordonnés ;

Ces éléments, qui sont enregistrés par l'opérateur dans le carnet de campagne, sont :

La distance *brute* donnée par la lecture des fils du micromètre ;

L'azimut donné par le cercle horizontal de l'instrument ;

L'apozénith donné par le cercle vertical ;

L'apozénith est à la fois un élément de la détermination de la distance *réduite* et du calcul de la différence de niveau ; le nivellement est donc une conséquence nécessaire du levé ;

2° L'instrument fournit ces éléments sous une forme telle, qu'on trouve dans chacun d'eux et dans leur combinaison des moyens de contrôle qui mettent l'opérateur à l'abri de toute erreur.

3° Le degré d'exactitude, tant sur les éléments que sur l'ensemble des opérations est au moins trois fois plus rigoureux que par les méthodes ordinaires.

4° Le temps nécessaire pour faire un levé avec nivellement complet, exprimant, dans tous ses détails, le *modelé* du terrain, est au moins trois fois moindre que par les méthodes communément en usage.

5° La facilité de se servir de cet instrument et de devenir en peu de temps habile opérateur est très-grande, et les connaissances exigées se bornent à l'arithmétique et aux premiers éléments de géométrie.

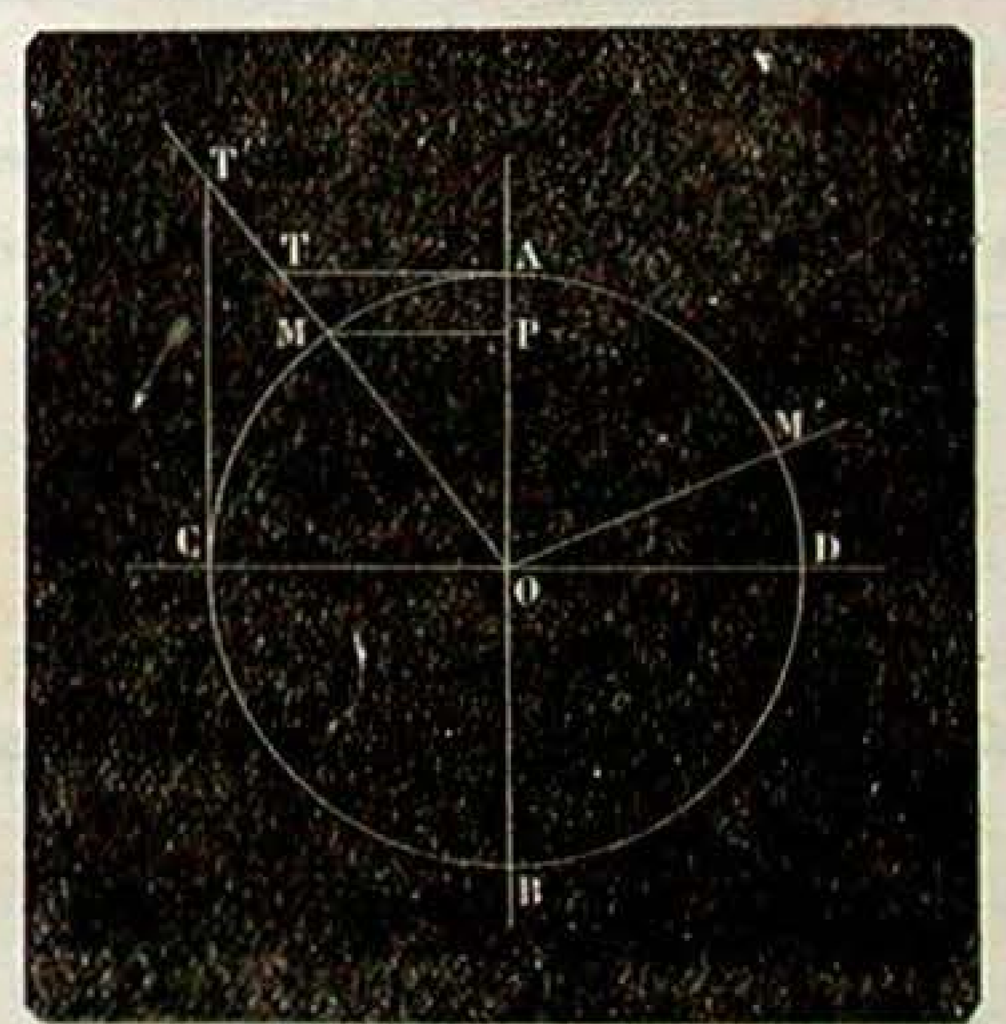
6° L'observation donne des quantités numériques qui peuvent être directement employées pour le calcul des surfaces agraires, du volume des terrassements, des distances entre les points les plus éloignés du plan, pour la recherche des éléments du tracé de la droite qui joint dans l'espace deux points donnés, ou d'une ligne quelconque assujétie à des conditions géométriques données (1), et tous ces résultats s'obtiennent sans opérations graphiques, ni mesures quelconques prises sur le plan à l'échelle et au compas. Le plan, proprement dit, n'a plus d'autre importance que celle d'un tableau synoptique, qui permet de saisir d'un seul coup d'œil l'ensemble, la figure, la position des détails qu'il représente.

(1) L'étude du tracé des routes, chemins et canaux, n'est pas autre chose que cela.

Les éléments de l'observation étant numériques se conservent indéfiniment sans altération possible, et mettent l'ingénieur à l'abri des erreurs qui pourraient provenir de la détérioration des plans et du retrait du papier.

14. La tachéométrie n'exigeant (§ 13) chez les opérateurs que des connaissances très-bornées en arithmétique et en géométrie, elle peut dans la pratique se réduire à des opérations tout-à-fait matérielles, exemptes de tout calcul ; mais pour éviter dans ce qui va suivre des longues périphrases et même des obscurités, nous donnerons ici la définition de quelques mots qu'on aura assez fréquemment à employer, ainsi que la notation algébrique adoptée : ce qui du reste n'exige pas plus que les premieres notions élémentaires qu'on suppose dans le personnel praticien auquel cet ouvrage est spécialement destiné.

Fig. 3.



Soient AB, CD (fig. 3) deux diamètres orthogonaux d'un cercle ; OA la direction initiale à partir de laquelle on commence à compter les angles ; AOM, un angle quelconque :

On appelle *sinus* de l'angle AOM la perpendiculaire MP abaissée de l'extrémité M de l'arc AM qui le mesure, sur le diamètre AB passant par l'autre extrémité de l'arc.

Cosinus, c'est la partie OP du rayon OA comprise entre le centre O et le pied de la perpendiculaire MP.

On appelle respectivement *tangente* et *cotangente* les parties AT, CT′ des deux tangentes au cercle dans les points A et C comprises entre les mêmes points et le rayon OM prolongé.

15. — Ces lignes qu'on appelle trigonométriques ou bien fonctions circulaires changent de signe, selon que les angles correspondants se trouvent dans l'un ou l'autre des cadrans du cercle : la loi de ce changement est donnée par le tableau suivant.

DÉSIGNATION	CADRANS I	II	III	IV
Sinus. . . . . . . (x)	+	+	—	—
Cosinus . . . . . (y)	+	—	—	+
Tangente.	+	—	+	—
Cotangente . . . (z)	+	—	+	—

16. — En supposant que le diamètre AB soit orienté nord-sud, l'angle AOM s'appelle l'*azimut* sous lequel un observateur placé en O apercevrait le point M : les azimuts se comptent à partir du nord en tournant par l'ouest jusqu'au tour entier ; il

n'y aura donc jamais à considerer des angles négatifs. Ainsi par exemple l'azimut du point M′ pour un observateur toujours placé en O est mesuré par l'arc AMBM′ et non pas par l'arc AM′ qui serait négatif, c'est-à-dire compté dans le sens contraire au sens adopté pour les azimuts.

17. — On désignera toujours les angles azimutaux par les simboles θ, θ',... Θ, Θ',... et les apozéniths par φ, φ',...

Le petit signe Δ mis en exposant indiquera que telle coordonnée, azimut, ou autre élément d'opération appartient à un point trigonométrique : ainsi X^{Δ} sera l'abscisse ou la distance d'un point trigonométrique à la méridienne.

Pareillement le signe $\square$ désignera un point levé tachéométriquement. Le même signe mis en exposant désignera les quantités qui appartiennent à ce point, c'est-à-dire les éléments de sa détermination.

Quand une soustraction entre deux angles n'est pas possible numériquement dans le sens indiqué, on ajoutera 400 grades à celui qui se trouve trop petit ; la soustraction devient alors possible. Ainsi, par exemple, si l'on avait à soustraire $63^{gr},50$ de $35^{gr},00$ on aurait par ce qui vient d'être dit

$$435^{gr},00 - 63^{gr},50 = 371^{gr},50.$$

On désignera les différences et les sommes des quantités angulaires et linéaires en faisant précéder ces quantités par les symboles Δ (delta) et Σ (sigma) : les expressions $\Delta'_{''}\theta$; $\Delta'_{'''}\theta$;....

$\Delta'_{''}X$; $\Delta'_{''}Y$; ... $\Sigma'_{''}X$; $\Sigma''_{'''}X$;... représenteront donc respectivement $\theta' - \theta''$; $\theta' - \theta'''$;... $X' - X''$; $Y'' - Y'''$;... $X' + X''$; $Y'' + Y'''$;...

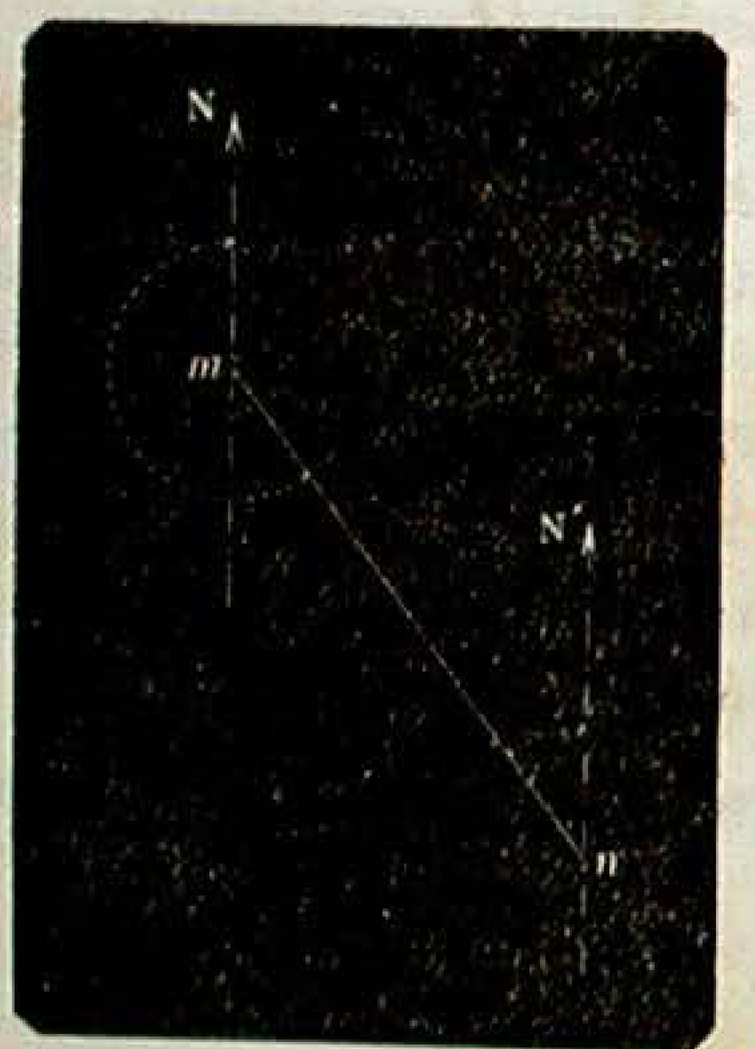
Quand on n'a à considérer qu'une seule différence entre des quantités qui se suivent ordinalement, on se dispense d'apposer des indices au signe Δ; alors ΔX sera pris pour $X' - X''$ et non pas pour $X'' - X'$.

La même observation d'ordre est applicable à toutes les autres opérations tant linéaires qu'angulaires.

L'azimut Nmn du point n vu du point m (fig. 4), c'est-à-dire l'azimut de la ligne qui les joint, pour un observateur placé en m, on le désignera par Θ^m_n. La notation Θ^n_m indique au contraire l'azimut du point m, l'observateur étant placé en n : ces angles sont liés entr'eux par la relation :

$$\Theta^m_n = \Theta^n_m \pm 200^{gr}$$

Fig. 4.



Cette formule doit avoir un terme de plus quand on doit

tenir compte de la courbure de la terre ; elle devient alors :

$$\Theta^m_n = \Theta^n_m \pm (200^{gr} + 0^{gr},00001\ \Delta^m_n\ x\ tang\ \lambda)$$

dans laquelle λ est la latitude moyenne du lieu, ou plus exactement la demi-somme des latitudes des points m n.

CHAPITRE II

DESCRIPTION SOMMAIRE (1) ET USAGE DU TACHÉOMÈTRE.

18. — Le tachéomètre se compose des mêmes éléments que les théodolithes magnétiques anglais, mais, au lieu d'une boussole sur le plateau mobile, il y a un appareil magnétique de Gauss modifié sous le plateau fixe ou limbe divisé.

Un trépied en bois supporte l'instrument qui s'y fixe invariablement avec un boulon à ailette.

Une pièce métallique sert de base à l'instrument et porte les vis à caler; celles-ci se terminent inférieurement en forme de bouton sphérique engagé dans une pièce métallique fixée à une planchette de bois : c'est cette planchette qui porte à son centre l'écrou dans lequel s'engage le boulon de retenue sur le pied.

Au-dessus de cette pièce se trouve l'appareil magnétique ou

(1) La description détaillée de l'instrument avec ses divers perfectionnements, qui ne sauraient trouver place ici, fera l'objet d'un mémoire spécial

orientateur qu'on peut faire tourner en azimut de manière à l'orienter. Sur l'appareil magnétique se trouve fixé le cercle azimutal disposé de manière qu'on peut *décliner l'instrument*, c'est-à-dire placer le cercle par rapport à l'orientateur dans une position qui élimine la déclinaison de l'aiguille aimantée (1).

Un plateau mobile recouvre l'appareil magnétique et le cercle azimutal. Ce plateau porte le ou les microscopes filaires à fils fixes servant au lieu de verniers pour lire les angles sur la division. Sur ce plateau s'élèvent les supports de la lunette comme dans les théodolithes ordinaires.

Le cercle vertical divisé est appliqué à une des extrémités de l'axe de la lunette : on y lit par microscope filaire les apozéniths ; et un niveau qu'on peut caler par un rappel spécial sans rien déranger à la position de l'instrument assure l'exactitude dans ce sens.

Pour constater l'horizontalité de l'instrument, il y a un niveau sphérique.

19. — La nature de cet ouvrage ne nous permet pas d'entrer ici dans les détails de la composition optique de la lunette qui sera expliquée dans le mémoire spécial annoncé plus haut ; nous ne décrirons ici que le fonctionnement de ses parties matérielles en rappelant seulement qu'elle est *anallatique* et qu'elle porte un oculaire multiple dit *argus*.

On peut amener les fils sous les oculaires au point qui convient à la vue de l'observateur au moyen d'un premier petit rappel ; on obtient par un second rappel à crémaillère le point de la vision distincte de la mire ou autre objet visé.

(1) Cette opération ne se fait qu'une fois pour toutes en réglant à la déclinaison moyenne de l'époque et du lieu.

20. — Ces indications générales suffisent pour faire comprendre la corrélation de toutes les parties de l'instrument ; mais il sera bon d'expliquer plus en détail les fonctions de quelques unes de ses parties.

21. — *Orientateur*. L'orientateur se compose d'une aiguille aimantée, disposée pour manifester catoptriquement ses *embardes* sans que les mouvements irréguliers de *roulis* et de *tangage* ne troublent en rien l'observation. Quand l'aiguille est orientée naturellement nord et que le fil de repère indique zéro sur la division, l'instrument est orienté.

On n'a pas besoin d'attendre que l'aiguille s'arrête complétement ; on tient pour bonne l'orientation quand l'aiguile exécute des demi-oscillations égales à droite et à gauche du zéro (1).

22. — *Lecture du cercle horizontal*. Les divisions sur le cercle horizontal se lisent au moyen de microscopes composés avec réticules à fils fixes.

23. — *Lecture du cercle vertical*. La lecture du cercle vertical se fait également par microscopes composés avec réticules à fils fixes, mais ici un niveau cylindrique spécial, qu'on peut caler sans déranger la fixité des autres parties de l'instrument, permet de s'assurer toujours de la rectitude de position des microscopes lecteurs.

24. — *Les divisions*. La division est centésimale : le grade est dans ces instruments divisé en dix ou même en vingt parties directement ; tous les grades sont numérotés. La lecture des plus petites fractions se fait en estimant le second et même le troisième chiffre aux fils du réticule.

(1) On verra dans la suite comment on se met à l'abri des variations diverses dues aux influences locales et en général de toutes les erreurs qui proviennent de la nature même de ce moyen d'orientation.

Fig. 5.

25. — *Micromètre*. Le micromètre dont est garnie la lunette de l'instrument est composé comme l'indiquent les fig. 5, 6 et 7 ; il porte dix-sept fils parallèles horizontaux et un seul vertical. La lunette porte plusieurs oculaires, au lieu d'un seul, disposés de manière à pouvoir amener devant les fils qu'on doit employer dans chaque cas.

Les intervalles sont tels que, en désignant par les mêmes lettres les lectures et les fils correspondants, on a pour la première position (fig. 5.),

$$a' - a = \mathrm{S}$$

$$b' - b = 0{,}1\ \mathrm{S}.$$

Pour la deuxième position (1), on a (fig. 6.)

$$(d' - d) + (c' - c) = \mathrm{S}$$

$$(d' - c') + (d - c) = 0{,}1\ \mathrm{S}.$$

(1) Cette position du micromètre est la plus fréquemment employée, d'abord parce qu'elle est la plus convenable et commode, même pour les distances au dessous de cent mètres, puis parce que la pratique a montré que la moyenne des distances dans une vaste opération est aux environs de 130 mètres, et par conséquent les distances comprises entre 100 et 20 mètres.

200

Fig. 6.

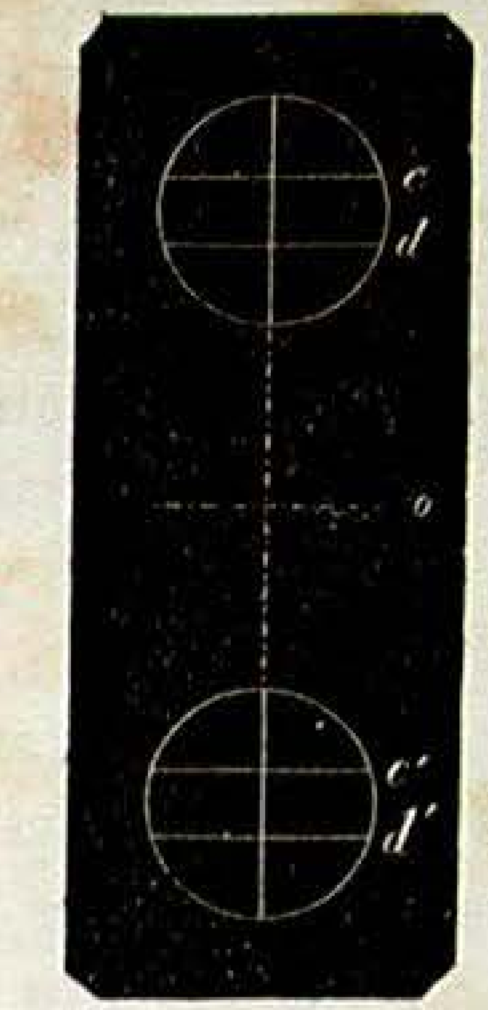
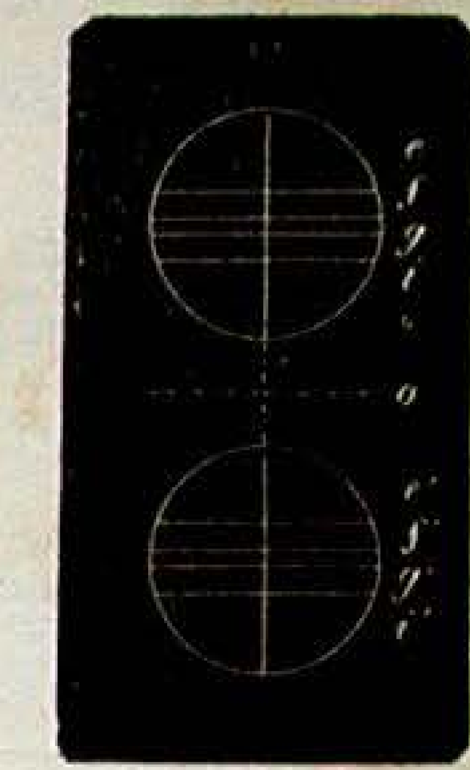


Fig. 7.



Et finalement, pour la troisième position des oculaires, on a (fig. 7.)

$$\left.\begin{array}{l}(i' - i) + (g' - g)\\ + (f' - f) + (e' - e)\end{array}\right\} = \mathrm{S}$$

$$\left.\begin{array}{l}(i' - g') + (g' - f') + (f' - e')\\ + (i - g) + (g - f) + (f - e)\end{array}\right\} = 0{,}1\ \mathrm{S}$$

S étant en parties de la mire la longueur interceptée sur celle-ci par l'angle micrométrique. Le nombre S représenterait en mètres la distance horizontale, si la lunette était elle-même horizontale, c'est-à-dire que la mire est divisée de manière qu'on a dans ce cas :

$$\mathrm{S}^{\text{Parties de la mire}} = \mathcal{D}^{\text{mètres}}$$

Pour une inclinaison quelconque de la lunette on obtient la distance horizontale en mètres en réduisant le nombre S *parties de la mire* dans le rapport de l'unité au sinus carré de l'apozénith (§ 30).

Les combinaisons qu'on peut faire entre les lectures du micromètre fournissent, comme on vient de le voir, des moyens précieux de vérification ; elles facilitent encore la lecture des grandes distances, pour lesquelles la longueur de la mire ne serait pas suffisante, et même des distances quelconques quand la mire se trouve en partie masquée par des obstacles.

26. *Mire parlante.* — La longueur de la mire parlante ou *stadia* est de cinq mètres : on en fait de plus longues pour certains cas exceptionnels, et de plus courtes pour les petits instruments destinés à l'enseignement, ainsi que pour les levés souterrains dans les mines.

La mire porte trois divisions en parties égales de $0^m,04$ représentant chacune un mètre sur la distance : pour la division la plus fortement marquée, celle qui doit servir aux grandes distances, chaque intervalle de $0^m,04$ est subdivisé par moitié par un trait plus court représentant le demi-mètre sur la distance : cette division règne sur une des faces de la mire ; sur l'autre face de la mire sont les deux autres divisions dans l'une desquelles l'intervalle de $0^m,04$ est subdivisé en cinq parties égales valant chacune vingt centimètres sur la distance ; dans l'autre, destinée aux distances n'excédant pas cent mètres, chaque intervalle de $0^m,04$ est subdivisé en dix parties valant chacune un décimètre sur la distance.

En admettant que, dans la lecture des fractions aux fils du micromètre, on estime facilement le dixième, chose que la pratique confirme, on obtiendra la distance à $0^m,05$ près quand on fait usage de la plus forte division, à $0^m,02$ près en employant

la seconde, et à $0^m,01$ près en employant la plus fine.

27. Disons tout de suite pourquoi on a adopté la quantité de $0^m,04$ plutôt que toute autre pour représenter sur la mire un mètre de distance.

On a vu que nous nous proposons d'obtenir, au moyen d'une seule observation, non seulement la distance horizontalement comprise entre les verticales de l'instrument et de la mire, mais encore la différence de niveau entre le centre de l'instrument et le pied de la mire ; il est indispensable en outre que le mode d'observation à suivre permette un contrôle prompt et facile de l'exactitude du résultat, contrôle qu'on obtient en lisant quatre fils au lieu de deux sur le micromètre ; et on doit toujours employer des fils symétriquement placés par rapport au fil du milieu, afin de conserver à l'angle φ sa signification.

Les apozéniths, et partant les différences de niveau, étant toujours rapportés à l'axe de la lunette marqué par le fil o, il est indispensable de connaitre la hauteur h en mètres du point correspondant sur la mire au fil o afin de pouvoir réduire à terre la différence de niveau sans être obligé à lire réellement chaque fois ce fil.

Si la mire était divisée simplement en centimètres, on aurait en lisant deux fils symétriques quelconques, par exemple, b et b' :

$$h = \frac{b + b'}{2}$$

et pour une lecture à quatre fils symétriques, tels par exemple que a, b, b', a', en les faisant intervenir tous les quatre pour plus d'exactitude dans l'estime des fractions ; on aurait

$$h = \frac{1}{4}(a + b + b' + a')$$

mais, la mire étant divisée en parties de quatre centimètres chacune, on a de suite numériquement

$$h^{\text{centimètres}} = a + b + b' + a' = \Sigma l^{\text{parties de la mire}} \text{ (1).}$$

Cette simplification paraît être bien peu de chose, mais, en admettant qu'elle n'épargne que six secondes par point, ce sera une économie d'environ 5 pour 0/0 sur le temps; car l'expérience a prouvé qu'on lève en moyenne un point par deux minutes; ce sera en outre une opération d'arithmétique et portant une cause d'erreurs de moins.

28. Il y a encore, pour l'adoption de notre mire, d'autres motifs, tout aussi futiles en apparence, mais substantiellement tout aussi importants en pratique.

Pour obtenir la plus grande exactitude possible, avec une lunette donnée, il faut disposer du plus grand angle micrométrique possible; quand néanmoins on éloigne trop les fils lecteurs du centre du champ, les aberrations optiques se font sentir, l'image des divisions de la mire manque de netteté, l'estime des fractions devient pénible; la limite que nous avons adoptée, à laquelle correspondent, pour les fils extrêmes a, a', un angle micrométrique $\omega = 2^s{,}54$ et un champ visible de trois grades environ, est la plus large que l'on puisse optiquement admettre.

Cette valeur de l'angle micrométrique permet d'arriver à 100^m ou 120^m de distance avec une mire de quatre à cinq mètres de longueur, que la pratique a démontré convenable tant sous le rapport du porté et du maniement, que pour permettre d'opérer malgré les obstacles qui masquent souvent une partie de la mire.

(1) Nous indiquons avec Σl la somme des lectures faites au micromètre.

Si une mire de cette longueur était divisée et numérotée en quatre ou cinq cents parties, il y aurait nécessairement trois chiffres à écrire sur la largeur de la mire, ce qui exigerait une largeur embarrassante au porté et donnant trop de prise au vent.

Les mires bariolées de différentes couleurs ou numérotées par des signes conventionnels quelconques ne soutiennent nullement en pratique la comparaison avec le modèle que nous avons adopté, ni par la sécurité, ni par la rapidité de l'observation.

En résumé la composition du micromètre et de la mire dont il est ici question est le résultat de longues expériences variées de toutes les manières; elle est sanctionnée aujourd'hui par la pratique continue d'un grand nombre d'années.

On peut ajouter que, de tous les changements qui ont été tentés par différents ingénieurs, aucun ne s'est soutenu; on est revenu tôt ou tard à notre mire.

29. *Lecture sur la mire.* — On peut obtenir la distance sur la mire parlante en n'employant que deux quelconques des fils du micromètre, mais on doit toujours en engager au moins quatre, afin d'obtenir non seulement la distance, mais un contrôle contre toute erreur matérielle et un *criterium* de la limite d'exactitude obtenue dans l'estime des fractions.

Tels qu'ils sont disposés, les fils du micromètre permettent de faire un assez grand nombre de combinaisons qui toutes remplissent le double but de donner la distance et son contrôle; parmi ces combinaisons les quatre suivantes sont les plus fréquemment et même les seules employées; elles donnent lieu à quatre cas différents, que nous allons successivement examiner.

I. Quand la distance est moindre que 100 mètres, on lit avec les fils b, a, a', b'; supposons pour donner un exemple que

les lectures correspondantes se soient trouvées comme suit :
a $b = 13,28$; $a = 45,77$; $a' = 52,99$ et $b' = 85,48$.

Ce qui est à faire, c'est d'inscrire d'abord ces lectures dans le carnet dans l'ordre que montre le tableau suivant :

DIMENSIONS LINÉAIRES

MICROMÈTRE						RÉSULTATS				
Fils supérieurs		diff.	Fils inférieurs		diff.					
13	28		85	48		72	20	S	72	20
45	77		52	99		7	22			
								$\mathscr{D}$		
								h	1	97

Aprés avoir enregistré dans les deux colonnes intitulées MICROMÈTRE les lectures, on effectue les calculs indiqués § 25 ; la différence entre les deux lectures extrêmes donne la valeur d'S ; on a dans le cas de l'exemple

$$a' - a = S \quad \text{ou} \quad 85,48 - 13,28 = 72,20 = S$$

qu'on écrit à sa place dans la colonne *résultats*.

La relation qui existe entre les deux lectures de l'oculaire central, fils a, a', nous fournit un moyen de vérification par lequel on voit que les lectures du micromètre sont bonnes : on a en effet :

$$b' - b = 0,1\ S \quad \text{ou} \quad 52,99 - 45,77 = 7,22 = 0,1\ S$$

exactement le dixième de la distance.

La quantité h en centimètres (somme de toutes les lectures du micromètre) est

$$h = 197^{\text{cent.}}$$

et en mètres

$$h = 1^{\text{m}},97$$

qu'on écrit à sa place.

II. Qand la distance est comprise entre 100 et 200 mètres, on lit avec les fils c, d, c', d'.

Soient par exemple $c = 12,66$; $d = 19,10$; $c' = 76,86$; $d' = 83,28$ les lectures correspondantes, qu'on inscrit dans le carnet comme dans le tableau suivant :

DIMENSIONS LINÉAIRES

MICROMÈTRE						RÉSULTATS				
Fils supérieurs		diff.	Fils inférieurs		diff.					
12	66	6.44	76	86	6.42	64	20	S	128	38
19	10		83	28		64	18			
								$\mathscr{D}$		
								h	1	92

Par le § 25, on a les relations

$$c' - c + d' - d =$$
$$d - c + d' - c' = 0{,}1\ \mathrm{S}$$

qui donnent pour les lectures ci-dessus

$$\mathrm{S} = 128{,}38$$
$$0{,}1\ \mathrm{S} = 12{,}86.$$

On enregistre dans le carnet la différence $c' - c$ à la colonne *résultats* sur la ligne des lectures correspondantes: on en fait de même pour $d' - d$. Leur somme doit être écrite à la colonne et à la ligne indiquée par la lettre S.

Comme contrôle de l'exactitude de cette observation, on trouve : 1° que les quantités $c' - c$; $d' - d$ sont, ainsi qu'elles doivent être simplement égales ; 2° que les quantités $d' - c$; $d - c$ sont sensiblement égales entre elles et au dixième des quantités précédentes, et que leur somme égale sensiblement 0,1 S.

Les différences $d - c$, $d' - c'$ trouvent place au tableau dans les colonnes respectives.

Quant à la quantité h, elle s'obtient ici de la même manière que précédemment, en faisant la somme de toutes les lectures et en divisant cette somme par 100 pour avoir des mètres au résultat: on trouve ainsi :

$$h = 1^{\mathrm{m}},92$$

qu'on inscrit à sa place.

III. Si la distance est comprise entre 200 et 400 mètres, on lit avec les huit fils des deux oculaires les plus rapprochés.

Soit, comme exemple

$$e = 11{,}08;\ f = 16{,}00;\ g = 18{,}43;\ i = 23{,}33$$
$$e' = 72{,}35;\ f' = 77{,}25;\ g' = 79{,}67;\ i' = 84{,}59$$

les lectures qu'on inscrit dans le carnet de la manière suivante:

DIMENSIONS LINÉAIRES											
MICROMÈTRE						RÉSULTATS					
Fils supérieurs		diff.	Fils inférieurs		diff.						
11	08	4.92	72	35	4.90	61	27	S	245	02
16	00	2.43	77	25	2.42	61	25			
18	43		79	67		61	24	D		
23	33	4.90	84	59	4.92	61	26	h	1	91

Entre ces lectures existent les relations :

$$(i' - i) + (g' - g) + (f' - f) + (e' - e) = \mathrm{S}$$

$$(i' - g') + (g' - f') + (f' - e') + (i - g) + (g - f) + (f - e) = 0{,}1\,\mathrm{S}$$

qui donnent dans notre cas

$$245{,}02 = \mathrm{S}$$
$$24{,}49 = 0{,}1\ \mathrm{S}$$

On enregistre toutes ces quantités comme dans le tableau ci-dessus.

La quantité h, on l'obtient en divisant par 200 la somme de toutes les lectures : elle est en centimètres

$$\frac{4\ \Sigma l}{8}$$

et en mètres :

$$h = 1^{m},91$$

IV. Quand enfin la distance est comprise entre 400 et 1,000 mètres, alors on doit lire avec les trois fils de l'oculaire central et on écrit deux fois la lecture du fil du milieu ; la distance est donnée dans ce cas par la relation

$$b' - b = 0,1\ \text{S}$$

Supposons que les trois lectures soient $b = 17,40$; $o = 46,15$; $b' = 74,90$ qu'on inscrit au carnet ainsi que les résultats du calcul comme dans le tableau suivant :

DIMENSIONS LINÉAIRES										
MICROMÈTRE						RÉSULTATS				
supérieures		diff.	inférieures		diff.					
17	40	28,75	74	90	28,75	57	50	S	575	00
46	15		46	15						
								$\mathscr{D}$		
								h	1	85

On sait qu'on doit décupler le résultat pour obtenir ici la valeur de S telle qu'elle eût été donnée par les fils normaux a, a', fig. 5 et une mire assez longue.

Cette valeur est donc S = 575.

Comme on a fait une lecture de plus que ce qui était nécessaire pour avoir la distance, on doit, en faisant les deux différences $b' - o$ et $o - b$, avoir pour chacune d'elles le 1/20 de S, ce qui se vérifie exactement dans l'exemple proposé.

La quantité h s'obtient encore en faisant la somme de toutes les lectures b, o, o, b', et divisant par 100, ce qui donne :

$$h = 1^{m},85$$

On voit ici pourquoi la lecture au fil du milieu o est écrite deux fois.

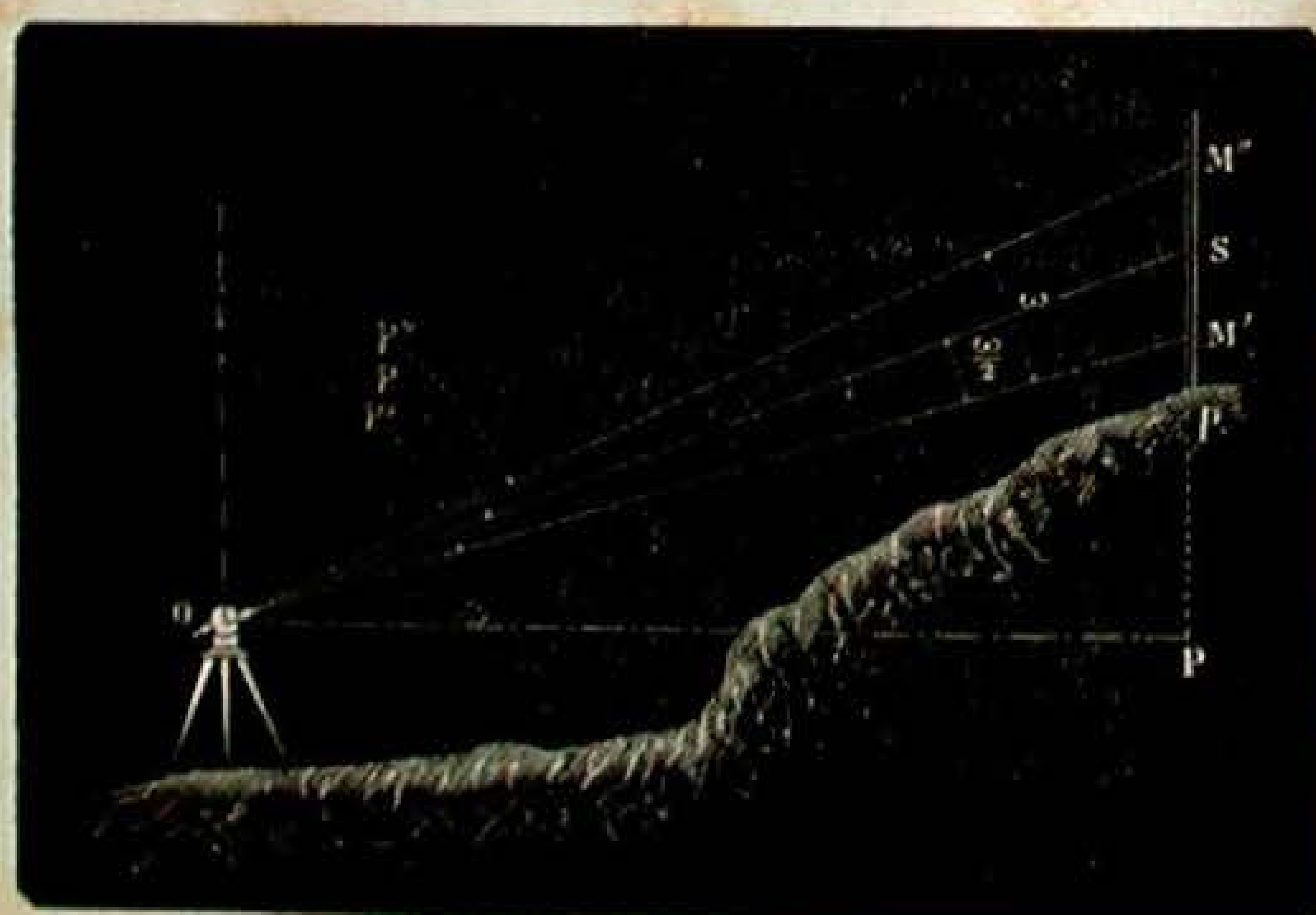
CHAPITRE III.

RÉDUCTION DE LA DISTANCE A L'HORIZON, ET RECHERCHE DES TROIS COORDONNÉES RECTANGULAIRES RAPPORTÉES AU CENTRE DE L'INSTRUMENT.

30. Le raisonnement indique et l'expérience a prouvé que même dans les pays de plaine générale, tels que les steppes de la Russie, il serait impossible de maintenir horizontal l'axe optique de la lunette; il y aura donc lieu d'appliquer aux distances une correction qu'on appelle réduction à l'horizon, correction qui sera fonction de l'apozénith donné par le cercle vertical de l'instrument.

Soit O (fig. 8) le centre de l'instrument, Os l'axe optique de

Fig. 8.



la lunette, M', M″ les points de la mire qui viennent se peindre sur les fils du micromètre, S la partie M'M″ de la mire interceptée dans l'angle micrométrique, ω cet angle, φ l'apozénith et $\mathscr{D}$ la distance horizontale cherchée OP; on aura :

$$\varphi' = \varphi + \frac{1}{2}\omega$$

$$\varphi'' = \varphi - \frac{1}{2}\omega$$

et par le triangle OM'M″ :

$$OM' = M'M'' \frac{\sin OM''M'}{\sin M'OM''}$$

D'où en substituant à OM″M' et M'OM″ les simboles φ'' et ω, et à M'M″ sa valeur S, il vient

$$OM' = S\frac{\sin \varphi''}{\sin \omega}$$

Par le triangle OPM' rectangle en P on a aussi

$$\mathscr{D} = OM' \sin \varphi'$$

dans laquelle expression, en mettant pour OM' sa valeur donnée par la relation précédente, on obtient :

$$\mathscr{D} = \frac{S}{\sin\omega} . \sin\varphi'' \sin\varphi' = \frac{S}{\sin\omega} \sin\left(\varphi + \frac{1}{2}\omega\right) \sin\left(\varphi - \frac{1}{2}\omega\right)$$

En développant et réduisant on trouve :

$$\mathscr{D} = \frac{S}{\sin\omega}\left(\sin^2\varphi - \sin^2\frac{1}{2}\omega\right)$$

dans laquelle expression on peut, vu la petitesse de l'angle ω, négliger $\sin^2 \frac{1}{2}\omega$; mais la mire est divisée en parties telles que chacune d'elles est égale à $1^{m} \times \sin \omega$ on aura donc simplement

$$\mathscr{D}^{\text{mètres}} = S^{\text{parties}} . \sin^2 \varphi \qquad (1)$$

pour la distance horizontalement comprise entre les verticales de la mire et du centre de l'instrument.

31. Les éléments qu'on a dû recueillir sur le terrain pour arriver à la détermination de la distance horizontale fourniront maintenant, avec la même facilité, la différence de niveau z entre le centre de l'instrument et le pied de la mire ; et la distance horizontale, combinée avec l'azimut donné par le cercle horizontal, donnera les deux autres coordonnées rectangulaires x et y rapportées à la même origine.

Soit O (fig. 8) le centre de l'instrument, p le pied de la mire, s le milieu de la portion M′ M″ interceptée sur la mire par les deux fils du micromètre, φ l'apozénith de la ligne Os et $\mathscr{D}$ la distance horizontale.

On aura par le triangle OPs rectangle en P

$$Ps = \mathscr{D} \cot \varphi$$

Si maintenant nous désignons comme précédemment par h mètres (§ 27), la portion ps de la mire comprise entre son pied et le point s, la différence de niveau Pp sera évidemment donnée par la formule :

$$z = \mathscr{D} \cot \varphi - h \qquad (2)$$

Le terme h n'existera pas, toutes les fois que le point dont on cherchera la cote de niveau z n'aura pas été levé au moyen de la mire ; ainsi, pour les points trigonométriques et pour les recoupements, on aura simplement :

$$z = \mathscr{D} \cot \varphi.$$

$\mathscr{D}$ étant alors déduit du calcul.

32. Les trois quantités S, θ et φ qu'on observe sur le terrain pour chaque point constituent des systèmes de coordonnées polaires rapportées au centre de l'instrument ; elles s'appelleront collectivement *système polaire*, on désignera avec l'appellatif de *nombres générateurs* les quantités S, θ, φ données directement par l'observation, et on verra plus loin que le θ et φ observés sont parfois passibles de certaines corrections avant d'être employés au calcul des coordonnées rectangulaires.

On appellera observation *complète* celle où les trois quantités S, θ, φ (nombres générateurs) auront été observés et enregistrés, et observation *incomplète* celle où l'une d'elles, la distance, manquera. Ce cas se présente pour les observations faites en vue de déterminer par recoupement des points inaccessibles, ou bien quand on observe des points déjà connus pour servir de vérification de l'orientation ou pour la détermination trisectionnelle des coordonnées de la station.

On appellera encore *système de coordonnées rectangulaires* ou simplement *système rectangulaire* l'ensemble des résultats enregistrés aux colonnes du carnet intitulées x, y, z, et x, y, z, X, Y, Z, dans le registre général, ligne grisée.

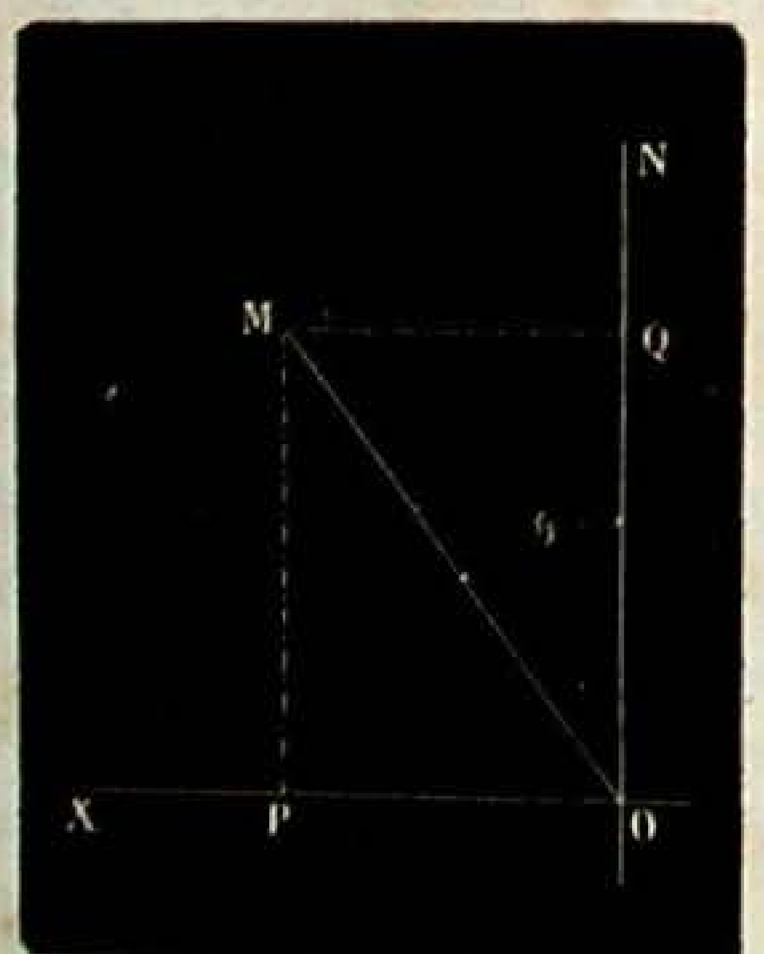
33. Le système des coordonnées polaires données directement par l'instrument suffirait à la rigueur pour le cas où le

levé serait fait tout entier d'une seule station, mais dès qu'il y a plusieurs stations le système polaire cesse de suffire ; les coordonnées polaires ne sont pas additionnables de proche en proche, ni même directement comparables de station à station ; ce système ne se prêterait donc pas sans de grandes difficultés et de longs calculs à la détermination des surfaces agraires, des distances, etc. : il faut donc recourir à une transformation qui, en les rendant comparables et additionnables sur toute l'étendue du levé, facilite le calcul immédiat des surfaces agraires, du cubage des terrassements, etc. ; et rende le travail conforme aux idées généralement adoptées ; c'est là le moyen d'introduire dans toutes les parties de l'opération l'uniformité et l'harmonie, par lesquelles seules on peut éviter toute espèce d'erreur ; le système rectangulaire jouit de toutes ces propriétés.

C'est donc en coordonnées rectangulaires qu'il convient de transformer les nombres générateurs donnés par l'observation.

34. Entre la distance horizontale $OM = \mathscr{D}$, l'angle azimutal $MON = \theta$ (fig. 9), et les coordonnées $MP = x$, $MQ = y$, on a les relations suivantes :

Fig. 9.



$$MP = x = \mathscr{D} \sin \theta \qquad (3)$$

$$MQ = y = \mathscr{D} \cos \theta \qquad (4)$$

Les signes algébriques de x et de y sont respectivement les mêmes que ceux du sinus et cosinus de θ ; le signe de la troisième coordonnée z est pareillement celui de $\cot \varphi$.

Voici, en le résumant, le cadre des formules à employer pour passer des nombres générateurs aux coordonnées rectangulaires :

$$\left.\begin{array}{l} \mathscr{D} = S \quad \varphi. \\ x = \mathscr{D} \sin \theta \\ y = \mathscr{D} \cos \theta \\ z = \mathscr{D} \cot \varphi - h \end{array}\right\} \qquad (5)$$

dans lesquelles la signification des lettres est la suivante :

Résultats immédiats de l'observation :
- S Portion de la mire interceptée par l'angle micrométrique exprimée en parties de la mire.
- h Hauteur au-dessus du sol, où l'axe optique de la lunette rencontre la mire.
- θ Angle azimutal } lus aux cercles respectifs de l'instrument.
- φ Angle vertical } lus aux cercles respectifs de l'instrument.

Inconnues à déterminer :
- $\mathscr{D}$ Distance horizontale.
- x, y, z Coordonnées rectangulaires rapportées à la méridienne, à la perpendiculaire et au plan horizontal passant par le centre de l'instrument.

35. Nous ajouterons à ce tableau les coordonnées rectangulaires rapportées à une origine unique, qui s'obtiennent en

additionnant de proche en proche les coordonnées x, y, z, à partir de l'origine, et qu'on indiquera par

$$X, \ Y, \ Z, \ (1).$$

En sorte que si les opérations avaient commencé juste au point fixe et inamovible réel ou fictif O d'où prennent origine toutes les coordonnées, et si elles étaient arrivées à un point quelconque M relié à l'origine par une ligne brisée composée d'une suite de lignes d'opérations aussi longue qu'on voudra et infléchie d'une manière quelconque, dont les sommets angulaires seraient alternativement des points levés et des centres de station, on aurait pour le point M :

$$X = \Sigma x$$
$$Y = \Sigma y$$
$$Z = \Sigma z.$$

Bien entendu que dans l'application il faut avoir égard aux signes des x, y, z, en suivant en cela la même règle que pour les nivellements ordinaires, c'est-à-dire en écrivant avec leur signe toutes les coordonnées des *coups d'avant* et avec le signe contraire toutes celles des *coups d'arrière*.

(1) En langage pratique, on a coutume de distinguer les deux systèmes rectangulaires en disant les petites et les grandes coordonnées.

CHAPITRE IV.

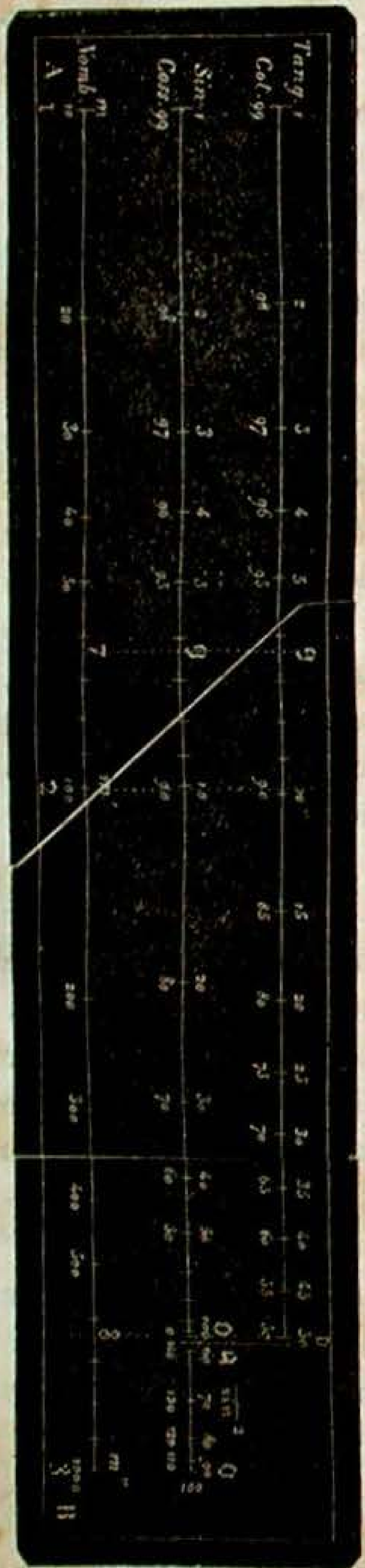
DESCRIPTION ET USAGE DES ÉCHELLES LOGARITHMIQUES.

36. Quelques modifications apportées dans la disposition des échelles logarithmiques communément en usage ont suffi pour les rendre propres aux exigences de la tachéométrie ; par ce moyen, des opérations, qui seraient longues et complexes en employant les méthodes de calcul logarithmique par les tables, même en se bornant à trois ou quatre décimales, deviennent d'une extrême simplicité ; l'usage de ces échelles est d'un secours continuel aussi bien sur le terrain que pour les travaux de cabinet.

Une longueur arbitraire mm' (fig. 10) étant prise pour unité sur la droite indéfinie AB, on peut imaginer qu'elle représente le logarithme de 10. Les logarithmes des nombres 1,2,3.... étant des fractions, on pourra les représenter en longueurs sur la même ligne, ce qui fournira une division décroissante, telle qu'on la voit sur la figure. On inscrit au-dessus des divisions principales de l'échelle les nombres correspondants aux longueurs logarithmiques comptées depuis l'origine m.

Si sur le prolongement de cette même droite AB on ajoute bout à bout plusieurs échelles semblables, les longueurs mm', $m'm''$... représenteront les logarithmes de 10, 100,... et les

Fig. 10.



longueurs intermédiaires des échelles, comptant toujours du point *m*, représenteront les logarithmes de 20,30,.... ou bien de 200, 300.... Ajoutées bout à bout dans l'autre sens, de pareilles longueurs mènent aux logarithmes de 0,1; 0,2..... ou 0,01; 0,02..... en suivant l'ordre de l'échelle à laquelle ils appartiennent.

37. Maintenant si l'on veut obtenir la longueur qui correspond à la somme de deux logarithmes, par exemple, du logarithme de 2 et du logarithme de 3, on n'aura qu'à prendre avec un compas l'ouverture *m* 2 et la porter ensuite *en avant* depuis le point 3. La pointe du compas ira tomber en un certain point de l'échelle correspondant linéairement à la somme des logarithmes de 2 et de 3 et numériquement au produit 6 de 2 par 3. Pareillement si on voulait trouver sur l'échelle le point qui correspond à la différence entre le logarithme de 8 et le logarithme de 2, on n'aura qu'à prendre cette différence avec un compas et la porter du point *m* en avant; le point où elle tombe (ce serait ici 4) correspond au quotient de $\frac{8}{2}$.

38. Les additions et les soustractions des logarithmes conduisent à la connaissance du logarithme du produit et du quotient des nombres correspondants: voilà pourquoi les points ainsi cherchés sur l'échelle ont coincidé, dans le premier exemple, sur le nombre 6 qui est le produit de 3 par 2, et dans le second sur le nombre 4 qui est le quotient de 8 par 2.

39. On voit donc que de telles échelles convenablement subdivisées et numérotées sont propres à résoudre les problèmes d'arithmétique par des portées de compas.

40. On se donnera maintenant une autre ligne droite AB' sur laquelle la même longueur *mm'* prise pour unité sera portée plusieurs fois de suite. Sur cette ligne on tracera une échelle de subdivisions du même genre, mais correspondant aux logarithmes des sinus et des cosinus de tous les arcs de cercle, vis-à-vis desquels on cotera le nombre des grades correspondants; et sur une troisième échelle on opérera de même pour les tangentes et les cotangentes.

41. Pour le cas d'une fonction spéciale revenant souvent dans les calculs, on peut ajouter une échelle qui la représente, c'est ce qu'on fait sur la quatrième échelle, désignée $sin^2\varphi$ qu'on emploie pour la réduction de la distance à l'horizon; cette échelle donne les logarithmes des sinus carrés de tous les angles compris entre 60 et 140 degrés, ce sont là les limites des valeurs que l'apozénith peut prendre en pratique.

Ces quatre échelles peuvent être tracées sur carton ou sur métal, et être employées avec un compas ou un *curseur* qui en tient lieu: c'est la forme la plus commode et la moins sujette à erreur.

42. Mais, avant d'entrer dans la description de ces échelles, il est bon de faire les observations suivantes :

1° Tous les logarithmes se comptent de gauche à droite sur les échelles, et c'est toujours des points $m, m', \ldots$ (fig. 10) qu'il faut partir. On retient de mémoire le nombre d'unités dont se compose la caractéristique du nombre que l'on veut employer, et l'on prend avec le compas la partie décimale. Ces points $m, m', \ldots$ sont marqués sur les échelles par des chiffres gothiques.

2°. Il convient parfois d'employer le complément arithmétique du logarithme, et on voit facilement que cela revient à prendre *en arrière* du point de départ sur l'échelle, au lieu de prendre *en avant*.

3° Ajouter un logarithme à un autre pour obtenir le produit de deux quantités, c'est porter *en avant* du point où se termine le logarithme de l'une des deux quantités l'ouverture de compas qui représente le logarithme de l'autre (on voit par la marche de la numération qu'*en avant* signifie de gauche à droite); retrancher, c'est l'opposé.

4° Ajouter un logarithme, c'est la même chose que retrancher son complément, et *vice versa* : mais on doit alors se rappeler de retrancher ou ajouter à la caractéristique du logarithme qui en résulte autant de fois 10 qu'on a ajouté ou retranché de compléments.

43. Examinons maintenant la disposition de l'échelle logarithmique, telle qu'on la construit pour cet usage spécial (1).

La première ligne de division au bas du cadre considérée dans sa numération inférieure présente tous les logarithmes des dizaines entières comprises entre 10 et 100 : la longueur x 2 est prise pour unité des longueurs logarithmiques. On a divisé

(1) Ces échelles sont dans le commerce avec le titre d'*échelles logarithmiques centésimales*, par J. Porro; les chiffres et les lettres du texte s'y rapportent.

en dixièmes d'unité entre 10 et 20, puis de 2 en 2 dixièmes entre 20 et 40, et en demi-unité entre 40 et 100. Si on avait divisé en dixièmes d'unité entre 10 et 100, les divisions auraient été trop rapprochées. Ces mêmes divisions répétées dans la région suivante ont produit les unités une à une entre 100 et 200; 2 à 2 entre 200 et 400; et 5 à 5 entre 400 et 1000.

44. La même longueur étant prise pour unité, on a gradué sur la seconde échelle les logarithmes sinus des angles compris entre 1 et 199 grades; c'est ce qui est indiqué par la numération supérieure. Remarquons de suite que les sinus de ces arcs sont positifs. On a suivi pour la gradation de la subdivision une progression analogue à celle qu'on a suivie pour l'échelle précédente. Les points marqués par des chiffres gothiques indiquent l'origine des parties décimales des logarithmes. Ces nombres sont des caractéristiques ainsi que leurs analogues sur les autres échelles. Elles ne sont là que pour rappeler à l'opérateur l'ordre qu'occupe le logarithme qu'il va employer.

Les mêmes divisions servent pour les cosinus, parce qu'on a :

$$sin.\ a = cos.\ (100 - a)$$

On a donc numéroté, d'après cette règle, à la partie inférieure la même échelle, et il en est résulté les logarithmes cosinus des arcs compris entre 0 et 99 grades et entre 301 et 400. Ce sont là les arcs inscriptibles sur cette échelle dont les cosinus sont positifs.

45. Les arcs que le numérotage ne permet pas de trouver sur les échelles peuvent, en les augmentant de 200 grades, y être ramenés : on opère alors comme précédemment, mais on se rappellera que la ligne trigonométrique correspondante est négative : on a en effet;

$$sin.\ a = - sin\ (200 + a)$$
$$cos.\ a = - cos(200 + a).$$

46. Il manque encore à ces échelles les arcs compris entre 0 et 1 grade et entre 199 et 200 grades pour les sinus, et leurs correspondants pour les cosinus. Mais on fait observer que, pour les petits arcs, les lignes trigonométriques peuvent être considérées comme proportionnelles aux arcs mêmes, ou, en d'autre termes, si on pose $m = \frac{sin.\ a}{a}$ on peut considérer m comme constant; et on a alors :

$$\log.\ sin\, a = \log.\ a + \log.\ m.$$

On pourra donc prendre sur l'échelle première le logarithme du nombre qui exprime en minutes l'arc dont on veut le logarithme du sinus et on l'augmentera du log. m. Mais cette opération se trouve toute faite sur l'échelle même, parce qu'on y a marqué le nombre correspondant; et, sur la numération supérieure, on a coté les caractérisques qui se rapportent à ces mêmes points; donc, pour prendre le logarithme sinus et le logarithme cosinus dont il s'agit, on n'aura qu'à partir de ces points, marqués sur l'échelle première (des nombres) par les caractérisques 7 et 8.

Un coup d'œil sur la numération supérieure de cette échelle suffit pour voir comment elle donne les logarithmes sinus qui manquent à la deuxième. On n'a pas apposé une troisième numération pour le cosinus, afin de ne pas trop embarasser l'échelle; mais, avec un peu d'exercice, tout opérateur pourra s'en passer.

47. Sur la troisième échelle, on a gradué de la même manière, et d'après les mêmes principes, les logarithmes des tangentes depuis 1 grade jusqu'à 50 grades (numération supérieure), et les cotangentes de 50 à 99 degrés (numération inférieure); cette échelle ne paraît pas complète, mais en observant que :

$$\text{tang. } a = \frac{1}{\text{cotang. } a}$$

d'où l'on tire

$$\log.\ \text{tang. } a = \text{comp. } \log.\ cot.\ a$$

il est évident qu'elle donne les logarithmes des tangentes et des cotangentes depuis 1 jusqu'à 99 grades.

Depuis 0 jusqu'à 1 grade et de 99 à 100 grades, l'échelle des nombres (numération supérieure) suffit d'après les mêmes considérations qu'au § 46.

48. Pour les autres cadrans, on n'a qu'à ajouter 100, 200 ou 300 grades à la numération de l'échelle, pour que tout arc donné s'y retrouve. Mais il faut se souvenir que si, pour trouver l'arc donné, on ajoute à la numération de l'échelle 100 ou 300 grades, la tangente et la cotangente cherchées sont négatives, tandis que si l'on ajoute 200 grades elles restent positives.

Pour faciliter aux opérateurs la règle des signes, on a tracé, sur la même planche que les échelles, deux figures qui l'indiquent tant pour les sinus et les cosinus que pour les tangentes et les cotangentes.

49. On peut encore donner à l'échelle logarithmique une autre disposition ; c'est la disposition circulaire. Son usage dans les opérations tachéométriques est très-commode ; cette forme

permet de prendre pour unité logarithmique la circonférence entière et on comprend que, rentrant pour ainsi dire en elle-même, cette disposition dispense de répéter deux ou plusieurs fois l'échelle des nombres. Une *Raquette* logarithmique de cette espèce sera l'objet d'un mémoire spécial par l'auteur.

50. Voici l'usage pratique de l'échelle logarithmique dans les opérations tachéométriques, pour passer des nombres générateurs aux coordonnées rectangulaires. On a vu, § 34, que les formules à employer pour arriver au résultat sont :

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{D} &= S \sin^2 \varphi \\ x &= \mathscr{D} \sin \theta \\ y &= \mathscr{D} \cos \theta \\ z &= \mathscr{D} \cot \varphi - h \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Soit, comme exemple numérique, un cas représenté par les nombres générateurs suivants:

POINT OBSERVÉ	S	θ	φ
M	156,30	38,55	85,36

Pour déterminer successivement $\mathscr{D}$, x, y, z, en employant l'échelle logarithmique on opérera ainsi qu'il suit. Sur l'échelle des sinus carrés on prendra, par une ouverture de compas, le complément du logarithme de $\sin^2$ 85,36 (1) ; c'est depuis

(1) Pour la réduction de la distance à l'horizon, c'est-à-dire lorsqu'on doit employer l'échelle des sinus carrés, on doit toujours opérer par complément.

l'extrémité à droite de l'échelle 4^{me} jusqu'à la division susdite. On portera cette ouverture de compas sur l'échelle des logarithmes des nombres depuis la division 156^m,30 *en arrière,* et on touvera pour la valeur de $\mathscr{D} = 148^m 18$.

L'échelle des sinus et cosinus, numération supérieure, donnera depuis son extrémité à droite jusqu'à la division correspondant à 38,55 une ouverture de compas qui correspondra au complément du log. sin. 38,55 ; cette ouverture de compas sera encore portée sur l'échelle des nombres en déduction de 148,18 l'opération indiquera 84,54 pour la valeur de x.

La même échelle des sinus et cosinus, en considérant la numération inférieure, fournira de même une ouverture de compas correspondant à 38,55 ; et ce sera le complément de log. cos. 38 55 ; ce sera encore en déduction de 148,18 qu'il faudra la porter sur l'échelle des nombres ce qui mènera à 121,85 pour la valeur de y.

Le log. cot φ pourra être pris sur l'échelle n° 4 soit par complément, soit par logarithme. Si c'est par complément qu'on opère, l'ouverture du compas sera prise depuis l'extrémité de l'échelle à droite jusqu'à la division 85,36 ; on portera alors cette ouverture en déduction de 148,18 sur l'échelle des nombres et on trouvera 34,69, pour $\mathscr{D} \cot \varphi$. La quantité h, d'après le § 27, est égale en centimètres à la somme des lectures ; elle sera donc 172 centimètres, savoir 1^m,72 qui, déduite de 34,69, donne $z = 32^m,97$.

Quant aux signes de ces quantités on n'a qu'à les régler d'après les figures relatives tracées sur l'échelle même.

CHAPITRE V.

PROBLÈMES DIVERS RELATIFS A LA TACHÉOMÉTRIE, LEUR SOLUTION PRATIQUE PAR L'ÉCHELLE LOGARITHMIQUE.

51. La solution des problèmes dont nous allons nous occuper constitue le travail de cabinet par lequel on arrive à la détermination des coordonnées de points sur lesquels la mire n'a pas été portée ; c'est, dans ce travail de campagne, les observations incomplètes faites en vue de déterminer des points par recoupement, des stations, des trisections, etc. Ils comprennent aussi les diverses opérations à faire pour la détermination des quantités nécessaires à la comprobation de l'exactitude des travaux, le calcul des surfaces agraires, des déblais, des remblais, etc.

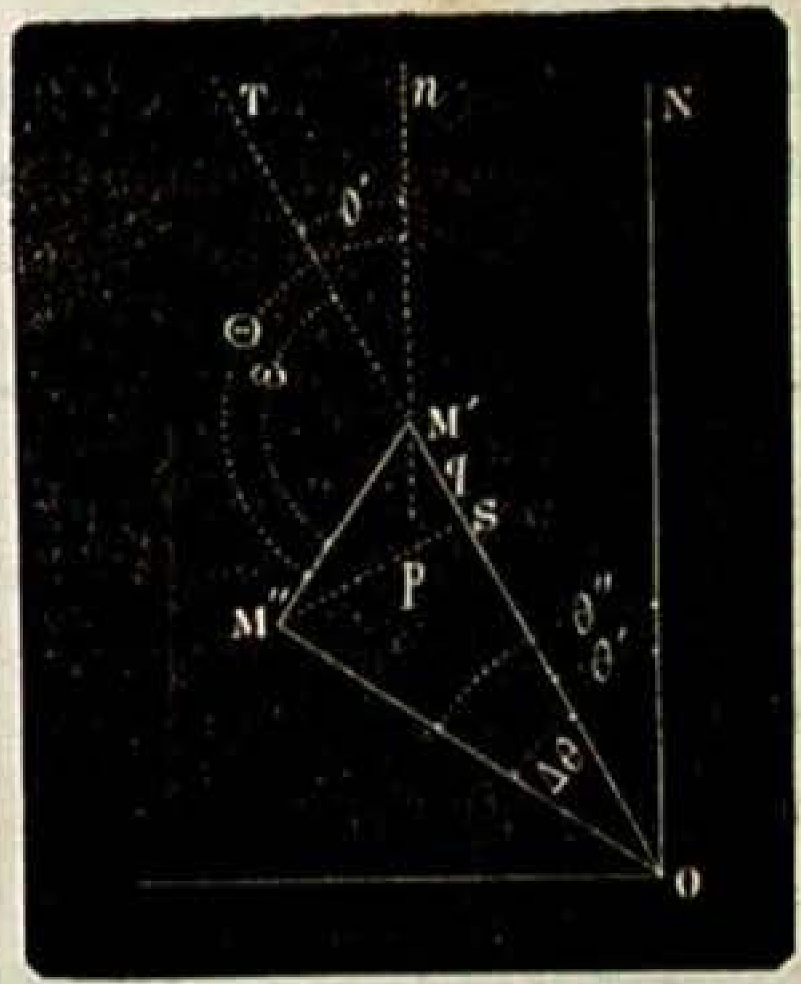
Dans ce traité purement pratique, on trouvera sous la forme trigonométrique ordinaire, mais sans démonstration, les formules théoriques ; leur usage est mis en évidence par des exemples numériques, exposés de manière à pouvoir être compris et pratiqués même sans le secours de l'algèbre et de la trigonométrie (1).

(1) On trouvera la démonstration des formules dans le Traité de tachéométrie, Paris, 1858 et éditions précédentes.

PREMIER PROBLÈME.

52. De la station O (fig. 11) on a observé deux points M', M'' et on a obtenu les distances horizontales OM', OM'' et leurs directions azimutales par rapport à une orientation quelconque de l'instrument exacte ou arbitraire ON. Trouver la longueur M' M'' de la distance horizontale qui joint les points M' M'' ainsi que sa direction en azimut rapportée à la même orientation.

Fig. 11.



53. Abaissons du point M'' sur OM' une perpendiculaire et posons

$$OM' = \mathscr{D}',\ OM'' = \mathscr{D}'',\ M'M'' = D,\ M''S = p,\ M'S = q$$
$$TM'M'' = \omega,\ nM'M'' = \Theta,$$

Pour la solution de ce problème, on emploie des quantités auxiliaires. Les quantités connues sont : $\mathscr{D}'$; $\mathscr{D}''$; θ'; θ''; les inconnues sont D ; Θ. Les quantités auxiliaires sont ω; p; q.

Les conditions qui lient toutes ces quantités sont exprimées par les formules suivantes :

$$p = \mathscr{D}'' \sin \Delta\theta$$
$$q = \mathscr{D}' - \mathscr{D}'' \cos \Delta\theta$$

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{p}{q}$$
$$\Theta = \theta' + \omega$$

$$D = \frac{p}{\sin \omega} = \frac{q}{\cos \omega}$$

54. Supposons qu'on ait recueilli sur le terrain avec l'instrument les quantités indiquées dans les colonnes D et θ du tableau suivant :

STATIONS	POINTS	D	θ	P	Q	ω
(1) 0	M′	75,20	30,00	−29,3	+16,6	132,83
	M″	65,50	59,50			
Différence des azimuts $\Delta\ \theta$ = 370,50						

Les quantités à trouver sont Θ et D.

(1) Cette disposition des quantités données et auxiliaires dans le tableau peut se conserver telle quelle sur le carnet de campagne.

Pour trouver l'azimut Θ on opére de la manière suivante :

On prend sur l'échelle des sinus, numération supérieure, une ouverture de compas s'étendant depuis l'extrémité à droite jusqu'à la division 170,50 qu'on obtient en retranchant 200 grades de la différence 370,50 des azimuts, mais on se rappellera que le résultat sera négatif. (§ 45); cette ouverture de compas on la porte dans son sens, ici de droite à gauche, sur l'échelle des nombres à partir de la division 65,50 = $\mathscr{D}''$: on trouve pour résultat 29,3 qui est la valeur de p, qu'on prendra négativement; on aura donc

$$p = -29,3$$

On a ici opéré par complément; si on avait opéré par logarithmes, on serait parti, pour prendre 170,50 sur l'échelle des sinus, de la caractéristique 9 et on aurait eu, en portant l'ouverture de compas ainsi obtenue dans son sens, une valeur de p identique.

Une opération analogue sur les mêmes quantités, seulement en prenant la numération inférieure de l'échelle troisième donne + 58,6 valeur qui déduite de 75,2 = $\mathscr{D}''$ donne

$$q = +16,6$$

Le quotient de la division de p par q qui nous donne la valeur de la tangente trigonométrique de ω, abstraction faite du signe, s'obtient en prenant sur l'échelle des nombres l'intervalle compris entre les divisions 16,6 et 29,3. — Nous ferons remarquer ici que, toutes les fois qu'on a à prendre le logarithme d'une fraction, on commence par le dénominateur et on prend sur l'échelle en avant ou en arrière, suivant que l'on veut opérer par logarithme ou par complément. — Dans le cas qui nous occupe, en opérant par complément, on porte l'ouverture de compas obtenue dans son sens sur l'échelle des tangentes à partir de son extrémité à droite, et on lira sur la numération supérieure 32,83; mais le quotient de p par q étant négatif, la tangente cherchée correspond à un angle compris dans le deuxième ou le quatrième cadran; dans le cas de la figure, on aura :

$$\omega = 132^{gr},83.$$

Ajoutant à cette valeur de ω celle de θ', on aura pour l'azimut cherché :

$$\Theta = 162^{gr},83.$$

On trouvera ensuite la distance D, en prenant sur l'échelle des sinus l'intervalle compris entre son extrémité à droite et la division 132,83, numération supérieure si on opère sur p, ou numération inférieure si on opère sur q, et on porte cet intervalle sur l'échelle des nombres en sens inverse, puisqu'il s'agit d'un dénominateur, à partir de la division correspondante : ce qui donne dans l'un et l'autre cas :

$$D = 33,6.$$

On verra, dans la pratique du levé, que ce problème est d'un usage très-fréquent, pour vérifier l'exactitude des points de rattachement des stations, et pour transmettre, quand on en a besoin, l'orientation de station en station.

PROBLÈME DEUXIÈME.

55. — Les coordonnées rectangulaires de deux points étant données, trouver l'azimut et la longueur de la projection horizontale de la ligne qui les joint.

Fig. 12.

56. — Soient M′, M″ (fig. 12) les deux points donnés M′ M″ = D la distance cherchée et Θ = NM′M″ son azimut ; on a entre ces quantités et les coordonnées X′, Y′, X″Y″ connues les relations suivantes :

$$tang\ \Theta = \frac{\Delta X}{\Delta Y}$$

$$D = \frac{\Delta X}{\sin \Theta} = \frac{\Delta Y}{\cos \Theta}$$

57. — Soit, comme exemple la position des deux points donnés, comme dans le tableau suivant :

POINTS	X	Y
M′	+ 136,2	+ 185,4
M″	+ 47,3	+ 35,8
Différences	+ 88,9	+ 149,6

Pour trouver l'azimut Θ, il faut commencer par remarquer dans quel quart de cercle il doit se trouver et savoir d'avance s'il en dépasse ou non la moitié : ce qui est ordinairement manifeste à l'aspect de la figure ou à la vue des lieux si on est sur le terrain : loin des lieux et en absence de figure, on y parvient, dans tous les cas, par les règles du tableau suivant :

Tableau régulateur des signes dans la recherche de l'azimut d'une ligne par la différence des coordonnées de ses extrémités

SIGNES DE		L'AZIMUT SE TROUVE SI			
		$\Delta X < \Delta Y$		$\Delta X > \Delta Y$	
ΔX	ΔY	entre	et	entre	et
		gr	gr.	gr.	gr.
−	−	0	50	50	100
−	+	150	200	100	150
+	+	200	250	250	300
+	−	350	400	300	350

Dans l'exemple ci-dessus les différences ΔX et ΔY étant positives et $\Delta X < \Delta Y$ l'azimut se trouve entre 200 et 250 degrés.

La solution du problème s'obtient en opérant comme suit :

On prend sur l'échelle des nombres l'intervalle compris entre les deux divisions qui correspondent aux deux termes de la fraction $\frac{\Delta X}{\Delta Y}$ en partant du dénominateur ; on porte cette ouverture de compas dans le même sens sur l'échelle des tangentes à partir de son extrémité à droite ; on trouve 34,13 qui donne pour la valeur de l'azimut cherché,

$$\Theta = 234^{gr},13.$$

Pour trouver maintenant la distance M′ M″, nous avons deux manières de procéder qui consistent à combiner l'angle azimutal trouvé ci-dessus soit avec ΔX soit avec ΔY : en faisant les deux opérations on a un contrôle de l'exactitude du résultat.

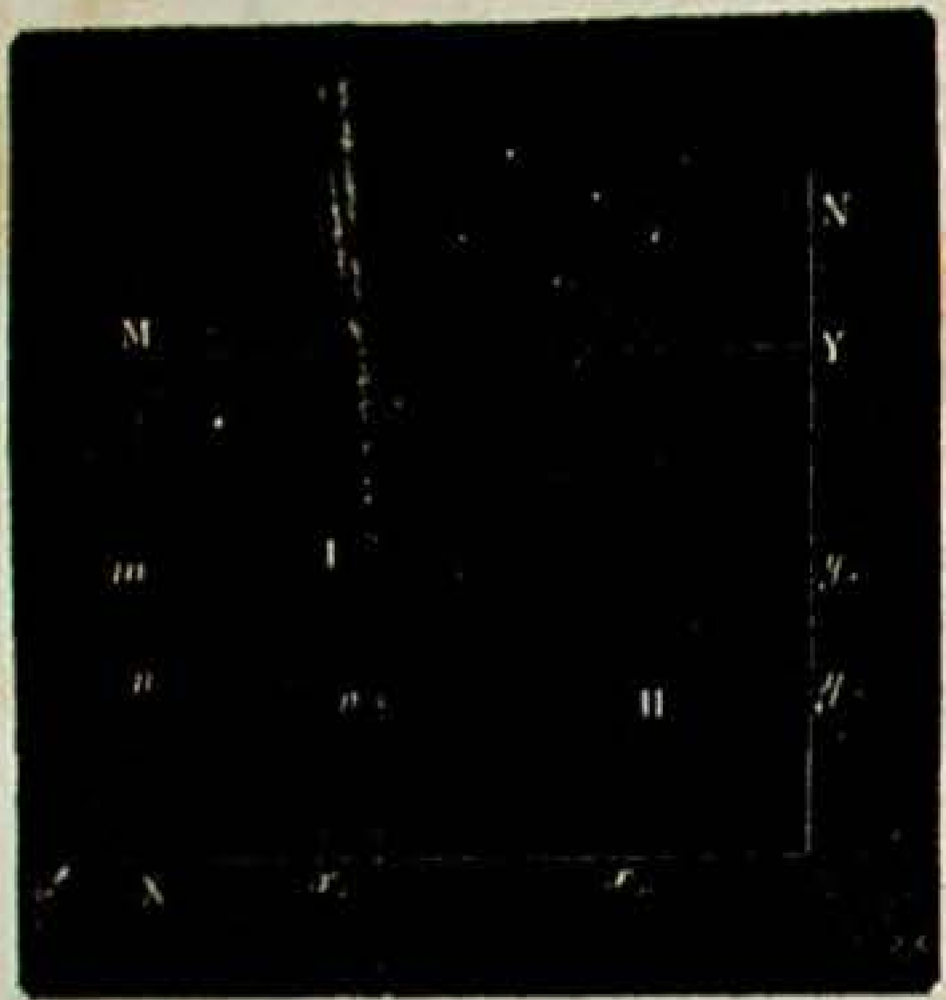
Pour opérer par ΔX on prend sur l'échelle des sinus l'intervalle compris depuis l'extrémité de l'échelle à droite jusqu'à la division correspondante à Θ ; c'est ici la division 34,13. On porte cet intervalle en sens contraire sur l'échelle des nombres depuis la division correspondante à ΔX et on obtient la distance cherchée :

$$D = 173,6.$$

Il est facile de voir que pour opérer par ΔY on eût dû prendre 34,13 sur l'échelle des cosinus et on aurait obtenu le même résultat.

PROBLÈME TROISIÈME.

Fig. 13.



58. — Les coordonnées de deux stations I et II (fig. 13) étant données par rapport aux axes principaux, ainsi que les azimuts θ', θ'' sous lesquels le point M a été observé sur l'horizon de chacune d'elles, trouver les coordonnées de ce point.

59. — Soient x', y' les coordonnées inconnues du point M par rapport à la station I ; entre elles et les données du problème on a les relations :

$$x' = -\Delta X \frac{\sin\theta'}{\sin\Delta\theta} \cos\theta'' + \Delta Y \frac{\sin\theta'}{\sin\Delta\theta} \sin\theta''$$

$$y' = x' \cos\theta' \quad (\cdot)$$

60. — Soient les données du problème comme dans le tableau suivant :

(·) Vedi annotazione a pag.a 70

(·) La formola deve essere $y' = x' \cot\theta'$

ORDRE PROGRESSIF		ORDONNÉES			ANGLES	
Stations	Points	X	Y	Z	θ	ω
I. . .	. . . .	+ 90,0	+ 202,3	+ 30,0		
	M. . .	. . . .	. . . .	. . . .	72,97	90,96
II. . .	. . . .	+ 130,0	+ 152,0	+ 35,8		
	M. . .	. . . .	. . . .	. . . .	26,96	95,57
Différences		— 40,0	+ 50,3	— 5,8	46,01	

Pour trouver la valeur de x' on opère sur l'échelle de la manière suivante :

On prend sur l'échelle des sinus depuis la division 46,01 jusqu'à la division 72,97 une ouverture de compas qu'on porte dans le même sens sur l'échelle des nombres depuis la division $40{,}0 = \Delta X$; on a pour résultat

$$55{,}2 = -\Delta X \frac{\sin\theta'}{\sin\Delta\theta}\ .$$

La même ouverture de compas portée sur la même échelle depuis la division $50{,}3 = +\Delta Y$ on a ;

$$69{,}3 = +\Delta Y \frac{\sin\theta'}{\sin\Delta\theta}$$

On prend ensuite sur l'échelle des cosinus le complément log. *cos* 26,96 depuis son extrémité à droite jusqu'à cette division, numération inférieure ; on le porte en *arrière* sur l'échelle des nombres à partir de la division 53,2 et on obtient 50,3 valeur de

$$\Delta X \frac{\sin \theta'}{\sin \Delta\theta} \cos \theta'';$$

en opérant d'une manière analogue sur 69,3 et *sin* 26,96 on trouve 28,5 pour la valeur de

$$\left[\Delta X\right] \frac{\sin \theta'}{\sin \Delta\theta} \sin \theta''.$$

Eu égard aux signes, on a donc :

$$x' = + 50{,}3 + 28{,}5 = + 78{,}8$$

abscisse du point M par rapport à la station I.

La valeur de x une fois calculée, on peut trouver la valeur de y' ; on prend pour cela sur l'échelle des [contangentes] l'intervalle compris entre 50 et 72,97, et on le porte dans le même sens sur l'échelle des nombres à partir de la division 78,8; on trouve :

$$y' = + 35{,}7.$$

Le point M se trouve ainsi complétement déterminé de position par rapport à la station I. Si on voulait avoir les coordonnées x'', y'' du même point donné par rapport à la station II, une simple addition suffirait. On a en effet par la figure :

$$n\,\mathrm{II} = nn' + n'\,\mathrm{II} \quad , \quad n\mathrm{M} = m\mathrm{M} + mn;$$

ou bien

$$x'' = x' + \Delta X \quad , \quad y'' = y' + \Delta Y.$$

[+] La formola corrispondente § 59 sarebbe $y' = x' \cos \theta'$
$y' = x' \cot \theta'$; da qual parte l'errore
Questa annotazione è ora inutile

Mais on peut, pour contrôler l'opération, tenir pour bonne seulement la valeur de x'' et déduire celle de y'' par l'échelle logarithmique, en faisant, au moyen de l'azimut du point M par rapport à la station II, une opération semblable à celle qu'on a faite pour obtenir la valeur de y', ce qui donne :

$$y'' = 86{,}00.$$

Si on a bien opéré, on doit trouver

$$y'' = y' + \Delta Y \quad \text{ou} \quad \Delta y = - \Delta Y.$$

Ce qui se vérifie exactement dans l'exemple traité.

Il nous reste à déterminer la troisième coordonnée z.

Pour cela, on commencera par résoudre la deuxième partie du problème deuxième par rapport à la station I, et on trouvera :

$$\mathrm{M\,I} = \mathrm{D}' = 86{,}50.$$

En prenant ensuite sur l'échelle des cotangentes, depuis son extrémité à droite, une ouverture de compas correspondante au complément log. *cos* 90,96 apozénith observé, et en la portant sur l'échelle des nombres depuis la division 86,50 en arrière, on a

$$z' = 12{,}36.$$

Le terme h n'existe pas ici (§ 31).

Pour avoir une preuve de l'exactitude du résultat et de l'observation, on calculera encore z'' par rapport à la station II. En répétant les opérations ci-dessus pour z' et en employant les données correspondantes, on obtient :

$$\mathrm{D}'' = 94{,}1 \quad , \quad z'' = 6{,}55,$$

valeur qui, en vérifiant exactement l'équation $\Sigma z = \Delta Z$ fournit la preuve de l'exactitude de toute l'opération.

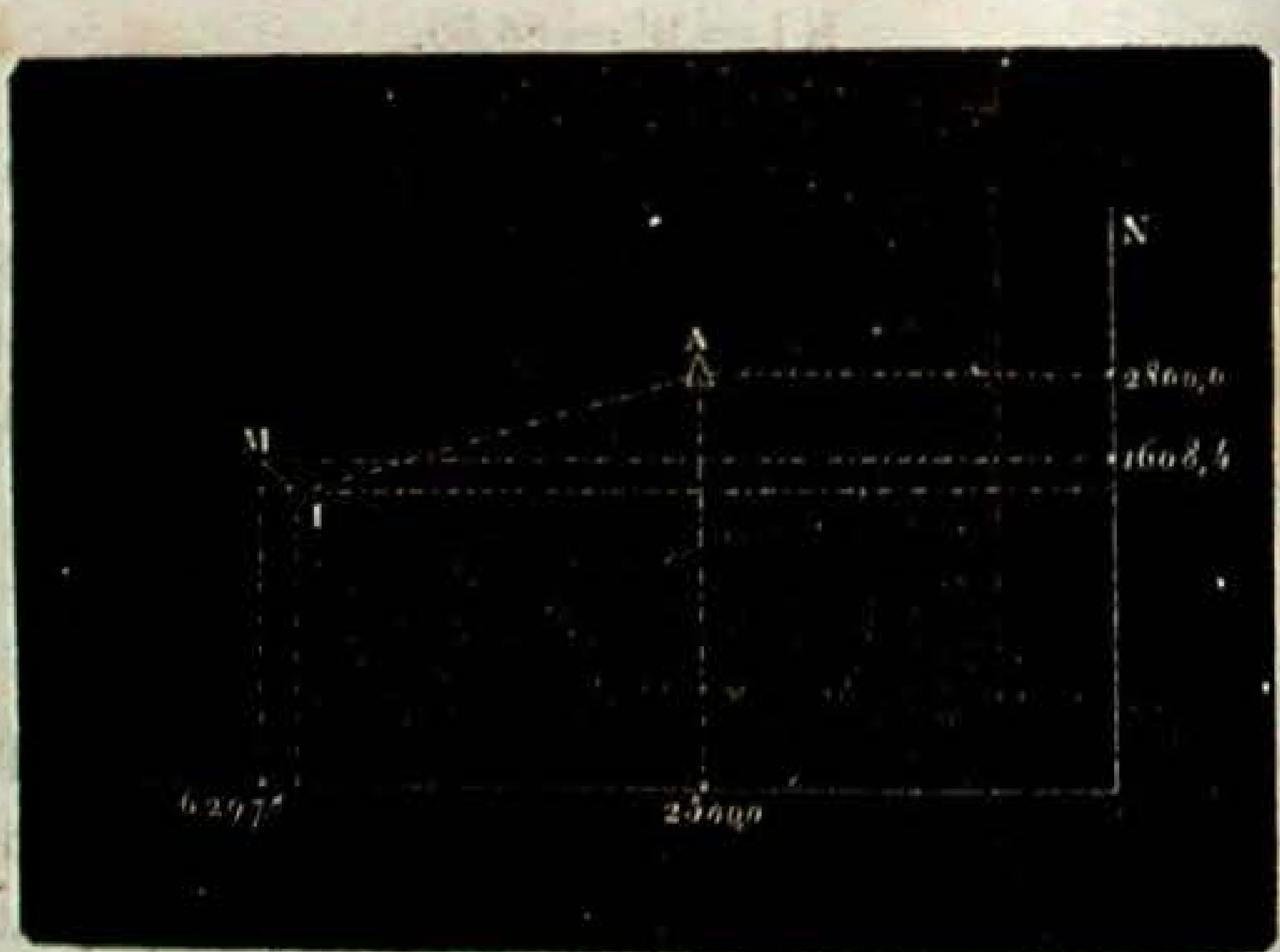
Si l'on veut ensuite rapporter ces points aux axes principaux, on n'a qu'à ajouter ces coordonnées partielles aux coordonnées de la station à laquelle elles appartiennent, et on obtiendra en dernier résultat :

$$X = x' + X' = 168{,}80$$
$$Y = y' + Y' = 238{,}00$$
$$Z = z' + Z' = 42{,}36$$

PROBLÈME QUATRIÈME.

61. — L'orientation du diamètre zéro de l'instrument dans une station I (fig. 14) étant connue approximativement, on a

Fig. 14.



observé un point trigonométrique A fort éloigné, et on s'est rattaché en même temps, par une observation complète, à un

point bien déterminé ; on demande une vérification de l'orientation et, au besoin, la correction que l'on doit y apporter.

62. — Au moyen de l'observation complète qu'on a faite de la station I pour le point M dont on connaît les coordonnées $X^{\square}$, $Y^{\square}$ rapportées aux axes principaux, on calcule par les problèmes précédents ses coordonnées x, y, par rapport à la station I ; on les ajoute avec les signes changés aux coordonnées connues $X^{\square}$, $Y^{\square}$ du point M, et on a ainsi les coordonnées X^{I}, Y^{I} de la station I rapportées aux axes principaux.

Il suffira alors de trouver l'azimut de la ligne qui joint la position approchée de la station et le point trigonométrique par la règle du premier problème, et le comparer à Θ^{Δ}, qui est l'azimut sous lequel on l'a observé de la station I. S'il y a accord parfait, c'est une preuve que la station est bien orientée. Dans le cas contraire, la différence représente la correction azimutale de la station ; car on sent que, si le point trigonométrique est fort éloigné, la petite incertitude existant sur la position de la station n'influera pas sensiblement sur l'azimut sous lequel le point trigonométrique est vu.

L'azimut approché de la ligne AI s'obtient par la règle du deuxième problème au moyen des différences $X^{\Delta}-X^{I}$; $Y^{\Delta}-Y^{I}$: on aura ensuite par une première approximation les coordonnées rectangulaires de la station I. On peut, si on le juge nécessaire, répéter les opérations en deuxième approximation, en y employant les valeurs x et y, corrigées d'après la première, mais, si l'opérateur a eu l'adresse de bien choisir sur le terrain ses points et ses directions, on obtiendra presque toujours du premier coup un résultat satisfaisant.

On a dans le tableau suivant un exemple numérique indiquant la marche des opérations à faire, telles qu'on vient de les expliquer.

Désignation		Nombres générateurs			Résultats				Positions définitives		
Stations	Points	S	θ	φ	$\mathcal{D}$	x	y	z	X	Y	Z
I	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . . .	. . .
	A$^{\Delta}$		321,16	101,46					+2500,0	+2800,0	223,7
	M□	140,0	32,10	100,00	140,0	+67,8	+122,2	— 1,4	+6297,8	+1608,4	155,3
									— 67,8	— 122,2	+ 1,4
								(*)	+6230,0	+1486,2	156,7
									+2500,0	+2800,0	223,7
								Diff.	—3730,0	+1313,8	+ 67,0
			321,56								
			321,16								
		(**)	0,40			+68,2	+122,1		+6297,8	+1608,4	
									— 68,2	+ 122,1	
								(***)	+6229,6	+1486,3	

On voit par les opérations ci-dessus que :

1° Les coordonnées approchées de la station I résultent (*);

$$X = +\ 6230,0 \quad ; \quad Y = +\ 1486,2$$

2° D'après ces coordonnées et celles du point trigonométrique A on a obtenu $0^{gr},40$ pour correction azimutale (**);

3° Avec cette correction azimutale on a eu en première approximation pour les coordonnées de la station I (***).

$$X = 6229,6 \quad ; \quad Y = 1486,3$$

Si l'on craignait que l'opération ne fût pas assez exacte, on pourrait tenter une seconde approximation en partant de ces coordonnées; mais on aurait lieu de voir que la différence entre la première et la seconde opération pour l'exemple ci-dessus donnerait à peine 18″ centésimales sur l'azimut, quantité tout à fait négligeable dans ce genre d'opération.

Il y aurait à la rigueur à tenir compte de la courbure de la terre; et cela se ferait par les formules connues, dans le cas où la longueur et la direction des côtés employés l'exigerait. La correction qui résulte de cette cause reste de l'ordre des quantités à négliger, tant qu'il ne s'agit que de coordonnées topographiques (distance à la méridienne et à la perpendiculaire), et de l'étendue de pays qui permet d'en faire usage.

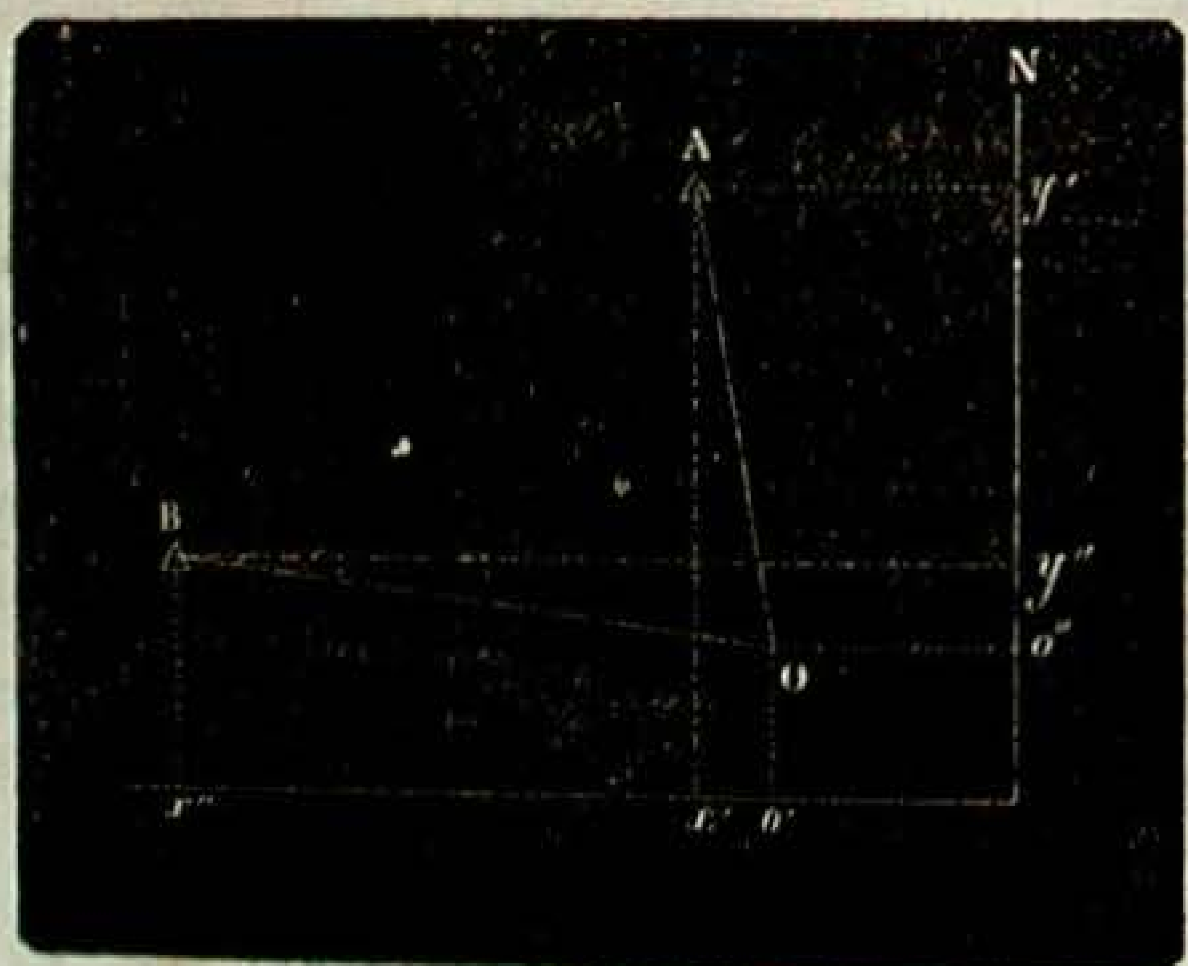
Quand les opérations se font sur tout un grand pays de plusieurs grades d'étendue en latitude et en longitude, les points trigonométriques du premier ordre sont ordinairement rapportés aux coordonnées géographiques (latitude et longitude); le remplissage des triangles peut néanmoins toujours se faire de proche en proche, d'après des coordonnées topographiques, parce que l'erreur très-petite qui en résulte disparaît dans les polygonations, comme on verra plus loin; mais quand on veut comparer directement à l'azimut tachéométrique local l'azimut déduit de l'observation d'un point trigonométrique très-éloigné, ou bien quand on veut contrôler en azimut, moyennant les observations astronomiques, la marche d'une opération très-étendue en longitude, il devient nécessaire d'introduire dans les calculs les modifications indiquées (§ 17).

PROBLÈME CINQUIÈME.

63. — Deux points trigonométriques étant donnés de position, ainsi que les azimuts exacts observés sur l'horizon d'un point de station, on peut, par les formules du problème deuxième, déterminer les coordonnées de ce dernier point; mais, si les points trigonométriques sont fort éloignés, l'échelle logarithmique ne les fournit pas généralement avec une exactitude suffisante; cependant dans le cas où les deux azimuts observés sont fort près de deux points cardinaux consécutifs, l'échelle logarithmique suffit moyennant un artifice qui fait l'objet du problème suivant.

64. — Deux points trigonométriques A, B (fig. 15) sont donnés de position par leurs coordonnées X', Y' ; X'', Y''; ces points ont été observés d'une station O, où ils se présentent respectivement par les azimuts θ' et θ'' fort proches de deux points cardinaux consécutifs. On demande les coordonnées X, Y de la station. (On suppose ici qu'elle est bien orientée.)

Fig. 15.



65. Soient A, B (fig. 15) les points trigonométriques donnés : O la station : soient x', y', x'', y'', les coordonnées encore inconnues des points A, B, par rapport à la station; c'est par la méthode des approximations successives que l'on peut arriver à la solution du problème:

De la circonstance particulière que θ' et θ'' ont pour différence un angle à peu près droit, et que les rayons qui joignent la station aux points trigonométriques s'éloignent peu des axes, il s'en suit que deux des coordonnées inconnues sont très-petites par rapport aux deux autres. Dans le cas de la figure, ce sont x' et y''.

Soient les données du problème comme dans la figure ci-contre et le tableau suivant :

ORDRE PROGRESSIF		θ	X	Y
Stations	Points			
O	....	....	....	....
	A	5,22	+ 2790,0	+ 6510,3
	B	96,30	+ 4514,8	+ 3985,0
Différences		308,92	— 1724,8	+ 2525,3

On commencera par attribuer à x' une valeur approximative par estime, qu'on peut représenter par x'_a (1). On ajoutera ou on retranchera cette valeur de ΔX suivant les diverses

(1) En désignant l'ordre des approximations successives par les indices a, b, c, placés en-dessous.

positions de la station par rapport aux points trigonométriques, le résultat représentera une valeur de x''_a en première approximation. Traduisant en nombre ce que nous venons d'expliquer, et faisant par estime $x'_a = 300$ mètres pour une première approximation, on a, d'après la figure :

$$x''_a = \Delta X - x'_a = -2024{,}8$$

De cette valeur de x''_a et de l'azimut observé en O, on peut déduire par la formule,

$$y''_a = x''_a \cot \theta''$$

la valeur de y''_a en employant l'échelle logarithmique.

On prend, pour ça, sur l'échelle des tangentes à partir de la caractéristique 9 avec le compas, l'intervalle, depuis cette caractéristique jusqu'à la division 96,30. On porte cette ouverture sur l'échelle des nombres, à partir de la division 2024,8, dans le sens inverse à la numération, et on trouve, pour résultat, + 118,00, et par suite :

$$y'_a = y''_a + \Delta Y = 2733{,}30$$

On détermine maintenant x' en employant cette valeur de y'_a et l'azimut observé, 5,22, en faisant, sur l'échelle logarithmique, une opération semblable à celle que nous avons faite pour trouver y'_a, et on a pour résultat :

$$x'_b = 224{,}6$$

On a ainsi accompli un cercle d'opérations, et on peut suivre la même marche pour en faire un second, dont les résultats approchent encore plus de la vérité. On se bornera,

ici, à indiquer la valeur de x' qui va en résulter, et on laisse au lecteur le soin de l'essayer lui-même ; cette valeur est :

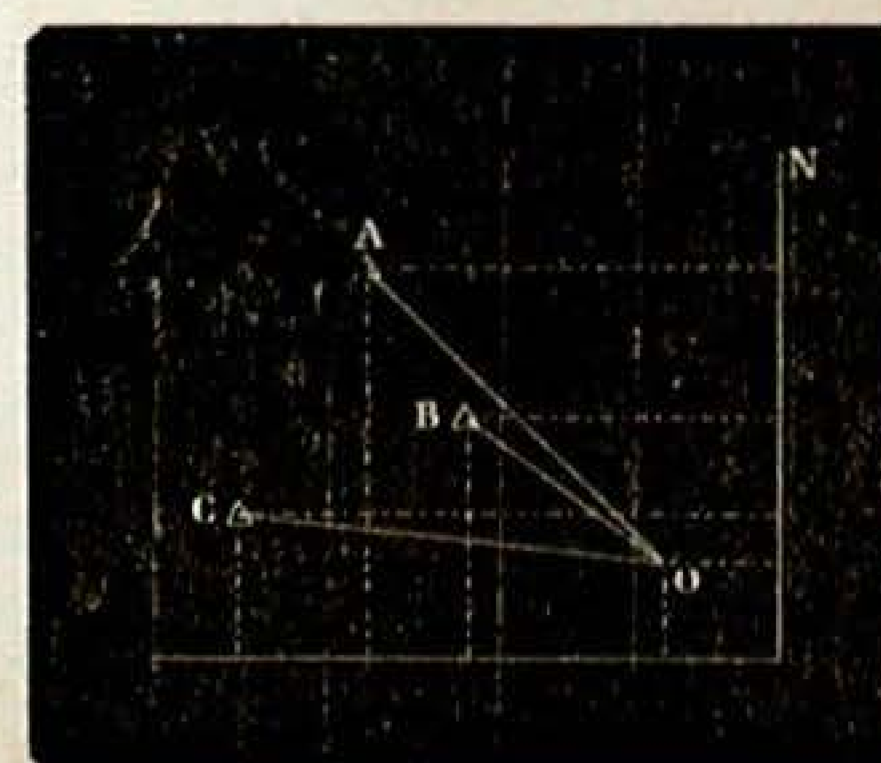
$$x'_c = 224{,}5$$

On ne peut s'empêcher, de prime abord, d'un sentiment de surprise en voyant la rapidité avec laquelle les approximations successives convergent *vers* la vérité, et on aura quelque peine à comprendre comment il se fait qu'une supposition aussi éloignée du vrai (300 au lieu de 225), eût pu conduire, du premier coup, à un décimètre près, au résultat cherché, mais le praticien, en se familiarisant avec les ressources de la tachéométrie, acquérera bientôt le tact nécessaire à le diriger dans l'emploi de cette méthode, et la confiance qu'elle mérite dans les applications.

PROBLÈME SIXIÈME.

66. — D'une station quelconque O (fig. 16), dont la position est inconnue, et où l'orientation du diamètre zéro a été déduite de l'aimant seulement, dans le cas où l'on craint des influences locales, ou bien même dont l'orientation est tout-à-fait inconnue, on a observé des angles azimutaux, sous lesquels on aperçoit trois points trigonométriques, A, B, C; trouver l'orientation, c'est-à-dire l'azimut vrai de l'axe arbitraire.

Fig. 16.



positions de la station par rapport aux points trigonométriques, le résultat représentera une valeur de x''_a en première approximation. Traduisant en nombre ce que nous venons d'expliquer, et faisant par estime $x'_a = 300$ mètres pour une première approximation, on a, d'après la figure :

$$x''_a = \Delta X - x'_a = -2024,8$$

De cette valeur de x''_a et de l'azimut observé en O, on peut déduire par la formule,

$$y''_a = x''_a \cot \theta''$$

la valeur de y''_a en employant l'échelle logarithmique.

On prend, pour ça, sur l'échelle des tangentes à partir de la caractéristique 9 avec le compas, l'intervalle, depuis cette caractéristique jusqu'à la division 96,30. On porte cette ouverture sur l'échelle des nombres, à partir de la division 2024,8, dans le sens inverse à la numération, et on trouve, pour résultat, + 118,00, et par suite :

$$y'_a = y''_a + \Delta Y = 2733,30$$

On détermine maintenant x' en employant cette valeur de y'_a et l'azimut observé, 5,22, en faisant, sur l'échelle logarithmique, une opération semblable à celle que nous avons faite pour trouver y'_a, et on a pour résultat :

$$x'_b = 224,6$$

On a ainsi accompli un cercle d'opérations, et on peut suivre la même marche pour en faire un second, dont les résultats approchent encore plus de la vérité. On se bornera,

ici, à indiquer la valeur de x' qui va en résulter, et on laisse au lecteur le soin de l'essayer lui-même ; cette valeur est :

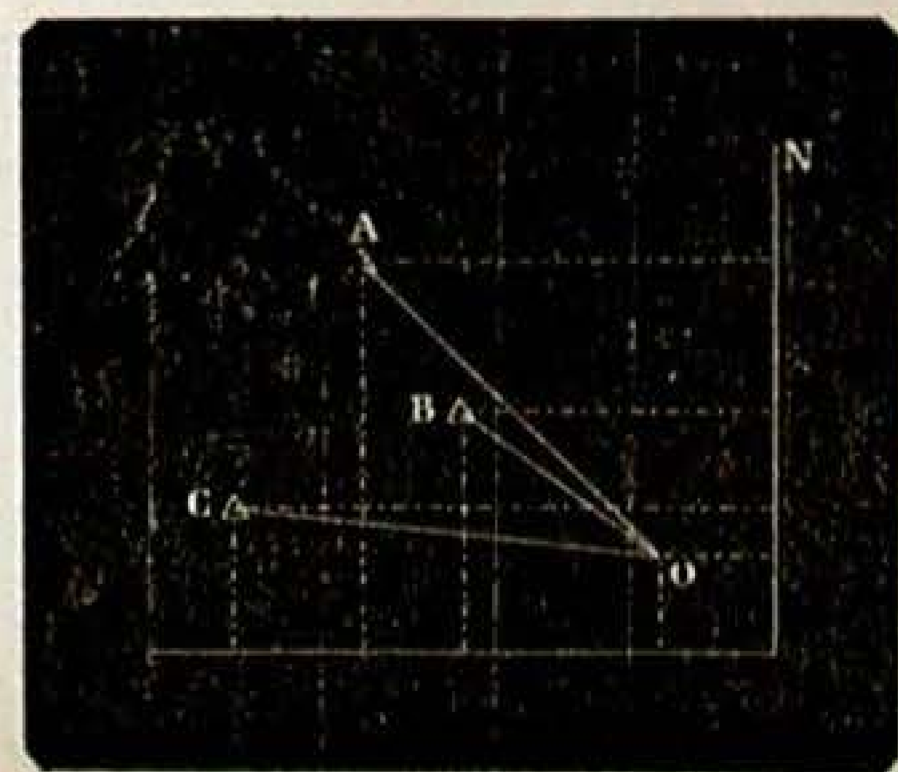
$$x'_c = 224,5$$

On ne peut s'empêcher, de prime abord, d'un sentiment de surprise en voyant la rapidité avec laquelle les approximations successives convergent *vers* la vérité, et on aura quelque peine à comprendre comment il se fait qu'une supposition aussi éloignée du vrai (300 au lieu de 225), eût pu conduire, du premier coup, à un décimètre près, au résultat cherché, mais le praticien, en se familiarisant avec les ressources de la tachéométrie, acquérera bientôt le tact nécessaire à le diriger dans l'emploi de cette méthode, et la confiance qu'elle mérite dans les applications.

PROBLÈME SIXIÈME.

66. — D'une station quelconque O (fig. 16), dont la position est inconnue, et où l'orientation du diamètre zéro a été déduite de l'aimant seulement, dans le cas où l'on craint des influences locales, ou bien même dont l'orientation est tout-à-fait inconnue, on a observé des angles azimutaux, sous lesquels on aperçoit trois points trigonométriques, A, B, C; trouver l'orientation, c'est-à-dire l'azimut vrai de l'axe arbitraire.

Fig. 16.



67. — Soient les données du problème comme dans le tableau suivant :

ORDRE PROGRESSIF		Lettres de la figure	θ	X	Y
Stations	Points				
O		O			
	′	A	16,50	+ 3150,00	+ 4205,50
	″	B	130,00	+ 5756,70	+ 126,20
	‴	C	258,00	+ 1259,30	+ 840,00

L'azimut vrai θ'_1 de l'axe arbitraire étant donné par la formule

$$\cot \theta'_1 = \frac{+ \Delta'_{\prime\prime} Y \cot \Delta'_{\prime\prime}\theta - \Delta'_{\prime\prime\prime} Y \cot \Delta'_{\prime\prime\prime}\theta + \Delta''_{\prime\prime\prime} X}{- \Delta'_{\prime\prime} X \cot \Delta'_{\prime\prime}\theta - \Delta'_{\prime\prime\prime} X \cot \Delta'_{\prime\prime\prime}\theta - \Delta''_{\prime\prime\prime} Y}$$

on commencera par déduire du tableau les différences des coordonnées et des azimuts qui sont comprises dans la formule; ces différences, on les ordonnera comme il est indiqué dans le tableau suivant :

Désignation des différences	$\Delta\theta$	ΔX	DÉNOMINATEURS			ΔY	NUMÉRATEURS		
			signes de la formule	PRODUITS			signes de la formule	PRODUITS	
				positifs	nég			positifs	négat.
′ ″	286,50	—2606,7	—	560,0		+ 4079,3	+	875,0	
′ ‴	158,50	+ 1890,7	—	2480,0		+ 8365,5	—	4408,0	
″ ‴			—	713,8		— 713,8	+	4497,4	
				3753,8				9780,4	

Les éléments qui doivent servir à la solution du problème étant ainsi préparés, on procède à la formation des divers produits indiqués.

On prend pour cela, sur l'échelle des cotangentes, le complément du logarithme de *cot* 286,50, c'est depuis son extrémité à droite jusqu'à la division 86,50 : on porte cette ouverture sur l'échelle des nombres, à partir des divisions 2606,70 et 4079,30, en sens inverse de la numération, et on a pour résultats 560,00 et 875,00.

On a obtenu, de cette manière, les produits $\Delta'_{\prime\prime}X\ cot.\Delta'_{\prime\prime}\theta$ et $\Delta'_{\prime\prime}Y\ \Delta'_{\prime\prime}\ cot.\Delta'_{\prime\prime}\theta$; on en fait de même par rapport à $\Delta'_{\prime\prime\prime}X$ et $\Delta'_{\prime\prime\prime}Y$ et en y employant $cot.\Delta'_{\prime\prime\prime}\theta$ ou 158,50, on obtient les nombres 2480,00 et 4408,00, qu'on écrit encore à leur place dans le tableau.

C'est ensuite $\Delta''_{\prime\prime\prime}X$ qui doit être inscrit dans la colonne des produits provenant des ΔX, et $\Delta''_{\prime\prime\prime}Y$ dans la colonne analogue; après cela, on fait la somme algébrique de chacune des deux colonnes, et on obtient le numérateur et le dénominateur de la fraction qui exprime la cotangente de l'azimut cherché θ'_{I}.

Pour obtenir θ'_{I}, on n'a donc qu'à prendre sur l'échelle des nombres la distance comprise du dénominateur 9788,4 au numérateur 3758,8, et la porter sur l'échelle des tangentes à partir de la division 50. On trouve, dans ce cas, pour θ_{I} l'angle 16°25, qui sera, en conséquence, l'azimut vrai du point A sur l'horizon de la station. Mais ce point a été observé avec l'orientation approchée par 16,50; on voit donc que la correction azimutale à appliquer est dans ce cas négative et égale à — 0^{gr},25; mais comme on a adopté de ne pas admettre en pratique d'angles négatifs, la correction cherchée sera le complément à 400 grades de 0^{gr},25 ou 399,75 : c'est là la quantité à ajouter à tous les azimuts qui auront été observés de la station en question. Cet azimut une fois connu, on peut, par la solution du problème 3, obtenir les coordonnées de la station.

Dans la pratique, il convient d'employer autant que l'on peut trois points, dont un au moins soit très-éloigné, dans lequel cas la solution s'obtient plus simplement par la méthode des approximations successives au moyen d'une position estimée de la station qui permet de déterminer la correction azimutale en première approximation par la solution du problème 4. Cette correction appliquée provisoirement permet d'obtenir, par la solution du problème 6, au moyen des deux autres points, une position déjà fort exacte de la station, po-

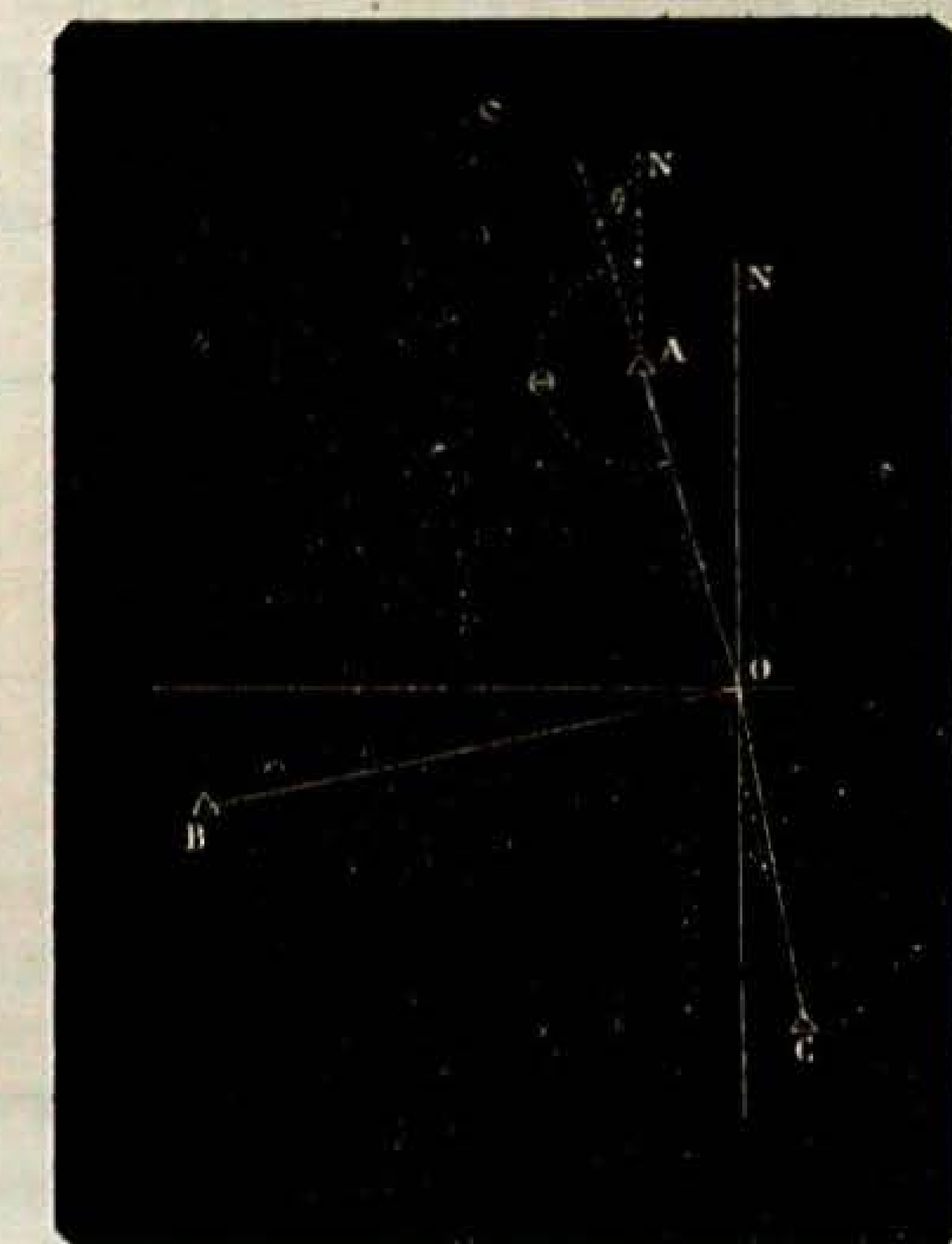
sition qui, employée dans un second tour d'opérations, conduit à un résultat à peu près irréprochable.

Dans le cas particulier, que les opérateurs savent souvent amener dans leurs opérations, où la station inconnue est faite en proximité de l'alignement qui joint deux des points trigonométriques, on peut aussi employer une méthode abrégée qui fait l'objet du problème suivant.

PROBLÈME SEPTIÈME.

68. Résoudre le problème précédent dans le cas où la station est faite en proximité de l'alignement qui joint deux des points trigonométriques donnés.

Fig. 17.



69. Soit la station O (fig. 17) voisine de l'alignement qui joint les deux points trigonométriques A C, on pourra dans ce cas arriver à la connaissance de l'orientation exacte de la station et de ses coordonnées par la méthode des approximations successives, et par le moyen des deux formules suivantes :

$$\alpha' = \frac{(200^{gr} - \Delta'_{,,,}\theta)\, D'''}{D' + D'''} \; ; \; \theta' = \Theta - 200 + \alpha'$$

Θ étant l'azimut connu de la ligne AC.

$$\alpha' = OAC,\ \alpha''' = OCA,\ D' = OA,\ D''' = OC$$

il est facile de voir qu'on a, à peu de chose prè, $D' + D''' = AC$, quantité connue, puisque les coordonnées des points A et C sont données, et qu'il suffit de connaître, par une approximation grossière, la valeur de D' et D''' pour arriver si près de la vérité dans la détermination de α', et qu'il ne reste plus rien à désirer.

70. Soient les coordonnées des points trigonométriques, comme l'indique le tableau suivant :

ORDRE PROGRESSIF		Lettres de la figure	X	Y	θ
Stations	Points				
I		O			
	′	A	+ 2387,0	+ 4500,0	38,90
	″	B	+ 4636,8	+ 2255,7	115,27
	‴	C	+ 145,2	+ 1040,0	235,40

Si par estime on a jugé :

$$OA = \frac{3}{4}\, OC$$

on pourra écrire :

$$\alpha''' = \frac{3}{4}\, \alpha'$$

On a aussi

$$\Delta'_{,,,}\theta = 203{,}50$$

$$\alpha' + \alpha''' = 3{,}50$$

d'où l'on tire :

$$\alpha' = \frac{4}{7}\, 3{,}50 = 2^{gr},00$$

D'autre part l'azimut du point C sur l'horizon du point A, d'après la règle du problème premier, se trouve $236^{g},60$; ajoutant α' il vient $238^{g},60$: ce qui, pour une première correction azimutale, donne $0^{g},30$: cette quantité doit être retranchée de tous les azimuts observés de la station O.

En appliquant la règle donnée par le troisième problème, on trouve pour les coordonnées de la station par rapport au point A :

$$x' = 1014{,}1 \quad , \quad y' = 1462{,}3$$

et par suite

$$X = 1373{,}9 \qquad Y = 3037{,}7$$

Maintenant que l'on connaît, avec cette première approximation, les coordonnées de la station O, on peut obtenir les rayons OA, OC par le problème deuxième, et tenter, si on le juge à propos, une seconde approximation qui donne ici

$$x' = 1014,1 \qquad y' = 1463,2$$

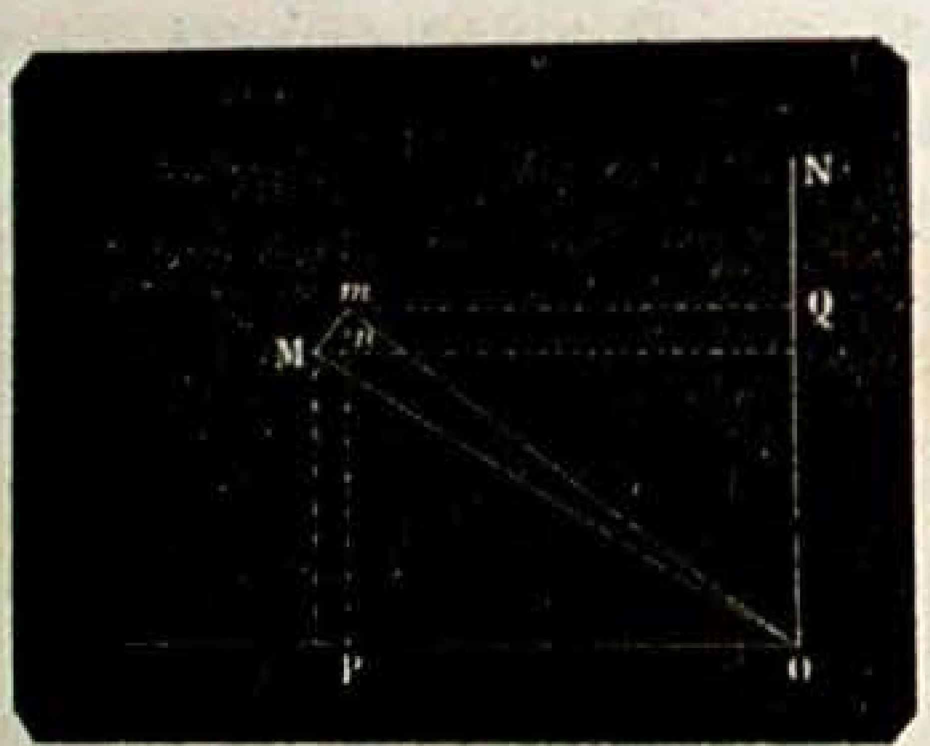
$$X = 1373,9 \qquad Y = 3036,8$$

Une troisième approximation ne produirait qu'une variation de quelques secondes sur l'orientation cherchée, et n'arriverait pas à faire varier d'un décimètre les coordonnées ; et si, pour la première estime, on s'aide de la feuille graphique qu'on a ordinairement sous les yeux, la première approximation sera suffisante.

PROBLÈME HUITIÈME.

71. Sur une orientation approchée, on a déterminé les coordonnées rectangulaires d'un point ; trouver la correction de ces coordonnées d'après la connaissance de la correction d'orientation.

Fig. 18.



72. Soit M (fig. 18) le point qui a été déterminé par une orientation approchée, d'après laquelle il se présente en m ; x et y ses coordonnées rectangulaires ; θ l'azimut de Om : les corrections à apporter à chacune de ces quantités étant représentées par $\delta\theta$, δx, δy, les formules

$$\delta x = + y \sin \delta\theta$$

$$\delta y = - x \sin \delta\theta$$

donnent la valeur de δx et δy.

73. Les coordonnées du point donné calculées sur l'orientation douteuse sont :

$$x = 145,20 \qquad y = 87,30$$

On a trouvé ensuite par une des méthodes précédentes que la correction de l'orientation est de $0_g,27$. Pour trouver la correction qu'on doit apporter aux cordonnées, comme il s'agit d'un angle plus petit qu'un grade, on opérera sur l'échelle de la manière suivante :

On prendra sur l'échelle des nombres, à partir de la caractéristique 7, un intervalle correspondant à la division 0,27.numération supérieure : on ajoutera cette ouverture à 87,30 sur la même échelle numération inférieure : le résultat $0^m,37$ sera la correction en x.

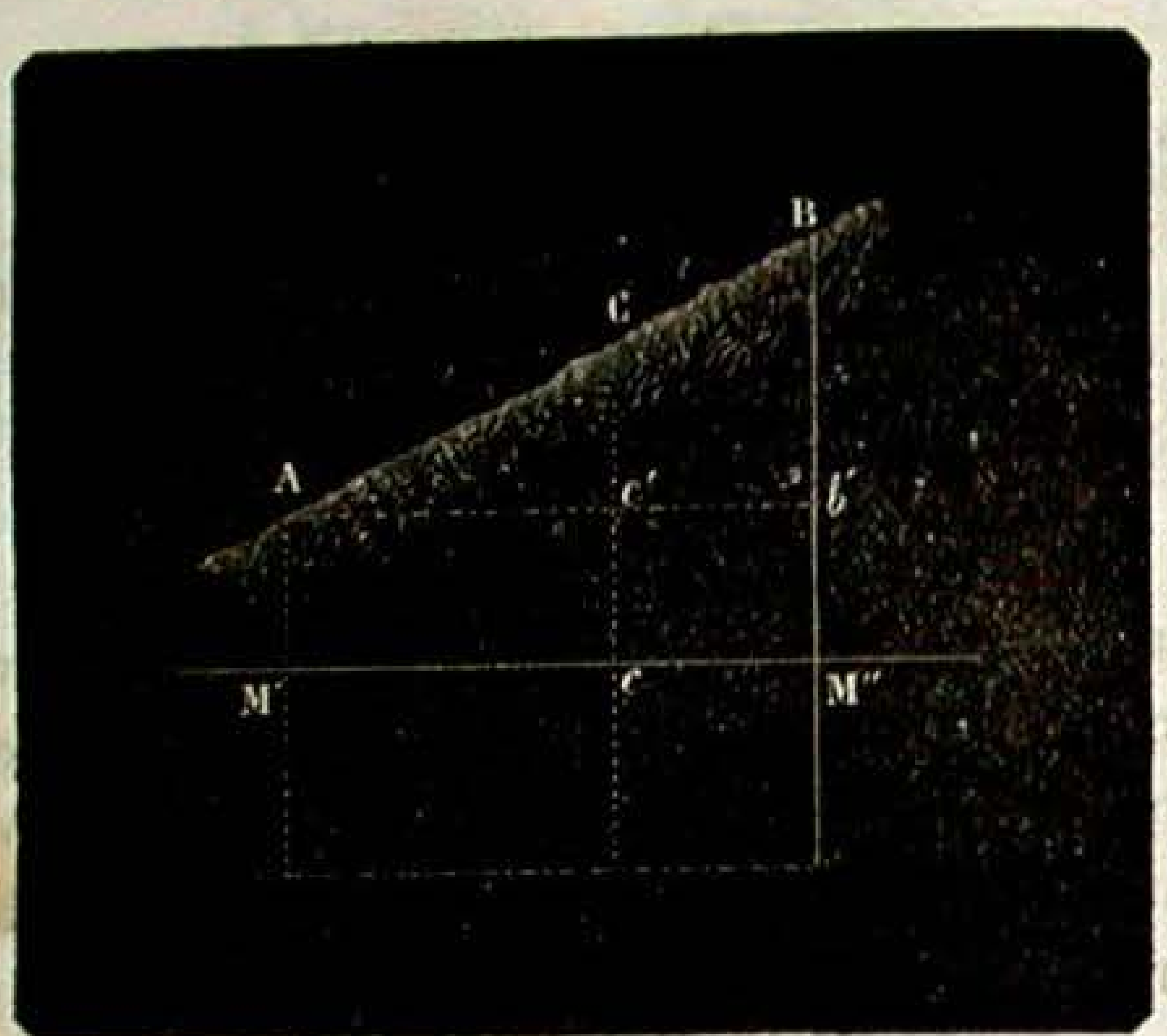
La correction en y s'obtient de la même manière ; en ayant égard aux signes, elle vient $= - 0^m, 61$, d'où les coordonnées corrigées deviendront :

$$x = 145,60 \qquad y = 86,70$$

PROBLÈME NEUVIÈME

74. La projection horizontale d'une ligne de pente du terrain étant donnée, ainsi que les cotes du niveau de ses extrémités, déterminer la projection d'un point de cette ligne, qui se trouve à une hauteur donnée.

Fig. 19.



75. Soient (fig. 19) M', M'' les projections des points A, B, appartenant au terrain, dont la surface est supposée ici présenter une pente uniforme; soient z', z'' les cotes de niveau AM', BM'' des deux points donnés. Soit proposé de trouver la projection c d'un point C dont la cote de hauteur est donnée $= z' + h$. Soit M'M'' $=$ D; la distance cherchée M'c est donnée par l'équation

$$M\,c' = \frac{D\,.\,h}{\Delta\,z}$$

Si les coordonnées horizontales x', y'; x'', y'' des points A et B étaient données, et si l'on demandait les coordonnées du point C, on pourrait agir directement sur chacune de ses coordonnées, suivant la même formule, en mettant successivement $\Delta'_{\prime\prime}x$ et $\Delta'_{\prime\prime}y$ au lieu de D.

En posant $\frac{h}{\Delta\,z} = n$ et si x, y représentent les coordonnées du point cherché C, par rapport au point M, on a :

$$M'\,c = n\,D$$

$$x = n\,\Delta'_{\prime\prime}x$$

$$y = n\,\Delta'_{\prime\prime}y$$

La recherche des coordonnées du point C se réduit donc à multiplier respectivement $\Delta'_{\prime\prime}x$ et $'_{\prime\prime}y$ par $\frac{h}{\Delta z}$, et à ajouter les résultats à x' et à y'.

76. Dans ce problème, on peut considérer deux cas :

1° Le premier cas, c'est celui dans lequel on n'a pas besoin d'une exactitude supérieure à celle du tracé graphique, comme quand il s'agit du tracé des courbes horizontales. Le second cas est celui où la détermination cherchée doit être d'une exactitude égale à celle des données du problème.

Exemple du premier cas.

Soit proposé le cas suivant :

POINTS	Z	D
M'	+ 39,2	139,7
M''	+ 116,9	
Différence	— 77,3	

On demande à connaître, sur la projection horizontale qui joint les deux points, le lieu de la projection d'un point C appartenant au terrain dont la cote de hauteur est $60^m,00$.

Dans le premier cas on mesurera directement sur le plan avec le compas et l'échelle la distance D, qu'on trouvera 139,7 : et on aura :

$$M'c = 139,7 \frac{60,0 - 39,2}{77,3} = 37^m,4$$

C'est ce que l'on obtient sur l'échelle logarithmique en prenant sur l'échelle des nombres l'intervalle compris entre les divisions 77,3 et 20,8 et en le portant sur la même échelle depuis la division 139,7 dans le sens inverse à la numération.

Cette distance portée sur la ligne M'M'' depuis le point M' donne le lieu de la projection du point C.

Exemple du deuxième cas.

Si les points M', M'' étaient donnés par leurs coordonnées comme dans le tableau suivant :

POINTS	X	Y	Z
M'	+ 546,2	+ 245,7	+ 84,2
M''	+ 727,3	+ 1024,2	+ 146,3
Différence	— 180,4	— 78,5	— 62,1

On demande les coordonnées horizontales d'un point situé à 100 mètres de hauteur sur la ligne qui joint dans l'espace les deux points donnés.

On prend sur l'échelle des nombres l'intervalle compris de-

puis la division 62,1, jusqu'à la division 15,8 (ce qui manque à z pour arriver à 100) : en portant cet intervalle sur l'échelle des nombres, à partir des divisions $140,4 = -\Delta X$, et $78,5 = -\Delta Y$ successivement et en sens contraire à celui de la numération, on trouve pour x_c et y_c :

$$x_c = 45,9 \qquad y_c = 20,0$$

et par suite,

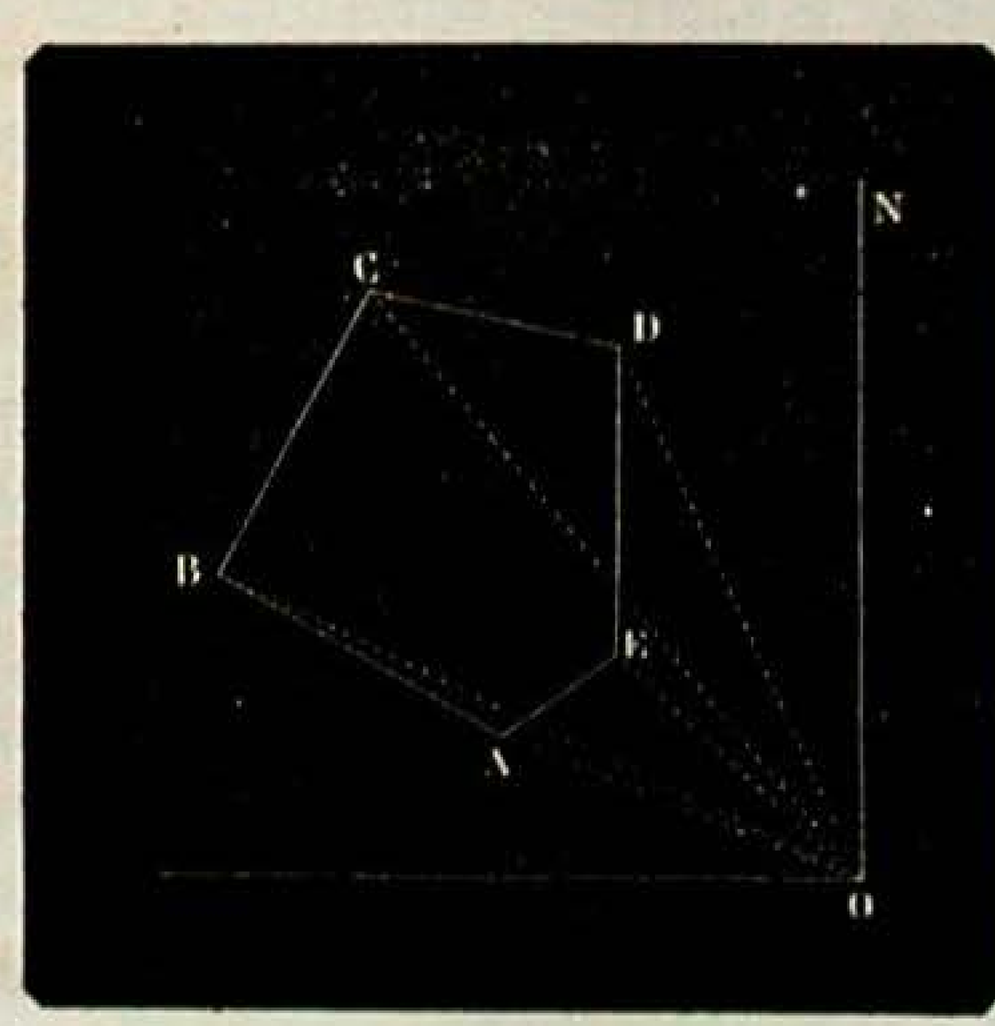
$$X_c = 773,20 \qquad Y_c = 965,70$$

telles sont les coordonnées du point du terrain dont la cote de hauteur est 100 mètres.

PROBLÈME DIXIÈME

77. Les angles d'un polygone étant donnés par leurs coordonnées polaires, déterminer l'aire du polygone.

Fig. 20.



78. Soit un polygone (fig. 20) dont les sommets A, B, C, D, E, des angles relevés du point O ont donné les résultats enregistrés dans les cinq premières colonnes du tableau suivant ; dans lequel on trouve le point A écrit deux fois, pour plus de clarté, dans l'ordre des différences $\Delta\theta$.

Ordre progr.		Lettres de la figure	Données déduites de l'observation		$\Delta\theta$	Produits	
Stations.	Points		$\mathcal{D}$	θ		positifs	négatifs
O					gr.		
	′	A	45,0	76,00			
					4,20	0,0252	
	″	B	85,0	71,80			
					27,35	0,3227	
	‴	C	91,60	44,45			
					16,95	0,1680	
	⁗	D	69.5	27,50			
					374,70		
	′′′′′	E	39,5	52,80			0,1056
					376,80		
	′	A	45,0	76,00			0,0639
				Sommes.		0,5159	0,1695
				Différence des som.		0,3464	
				Demi-différence. .		0,1732	

Désignant respectivement par $\mathcal{D}^a$, $\mathcal{D}^b$, $\mathcal{D}^c$, etc... et θ^a, θ^b, θ^c, etc. . . les distances et les azimuts observés du point O, l'aire du poligone est donnée par la formule :

$$A = \frac{1}{2}\,\mathcal{D}^a\mathcal{D}^b \sin \Delta_b^a\,\theta + \frac{1}{2}\,\mathcal{D}^b\mathcal{D}^c \sin \Delta_c^b\,\theta + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{2}\,\mathcal{D}^n\mathcal{D}^a \sin \Delta_a^n\,\theta \ldots\ldots$$

Le signe algébrique de chaque terme de la formule est réglé par le signe du *sin.* $\Delta\theta$.

On forme d'abord des différences azimutales successives indiquées par la formule, et on les inscrit dans la colonne $\Delta\theta$.

Pour trouver le premier terme de la formule, on prendra sur l'échelle logarithmique des sinus l'intervalle compris entre la caractéristique 9 et la division 4,20 : on portera cette ouverture sur l'échelle des nombres dans son sens à partir de la division 85,0 : on trouvera 56,20, nombre auquel on ne fait pas attention, mais en arrêtant le compas on allonge jusqu'à la caractéristique la plus proche (ici 2) ; l'ouverture résultante portée dans son sens depuis la division 4,50 donne le produit cherché qu'on lit sur l'échelle être de 252 mètres carrés, soit 2 ares 52 mètres carrés.

On trouve de la même manière tous les produits qu'on écrit à leurs colonnes. On fait la somme des produits positifs, celle des produits négatifs, et la demi différence de ces deux sommes donne l'aire cherchée en hectares $= 0^{\text{hect.}}17^{\text{ares}}32^{\text{cent.}}$

Si l'on avait un grand nombre de figures toutes levées du point O à calculer, on calculerait alors, à la suite les uns des autres, tous les triangles du plan donné qui ont pour base les côtés des figures et le sommet en O, et, après avoir ainsi traité tous les côtés de toutes les parcelles, il ne resterait plus qu'à faire séparément, pour chaque parcelle, la somme algébrique de tous les produits qui lui appartiennent. Il n'y aura jamais d'incertitude quant aux signes, si, en prenant les différences $\Delta\theta$ et en considérant les côtés de chaque parcelle, on suit l'ordre convenable.

Du reste, la seule inspection du plan fera toujours connaître à vue d'œil quelles sont les aires à ajouter ou à retrancher pour chaque cas particulier.

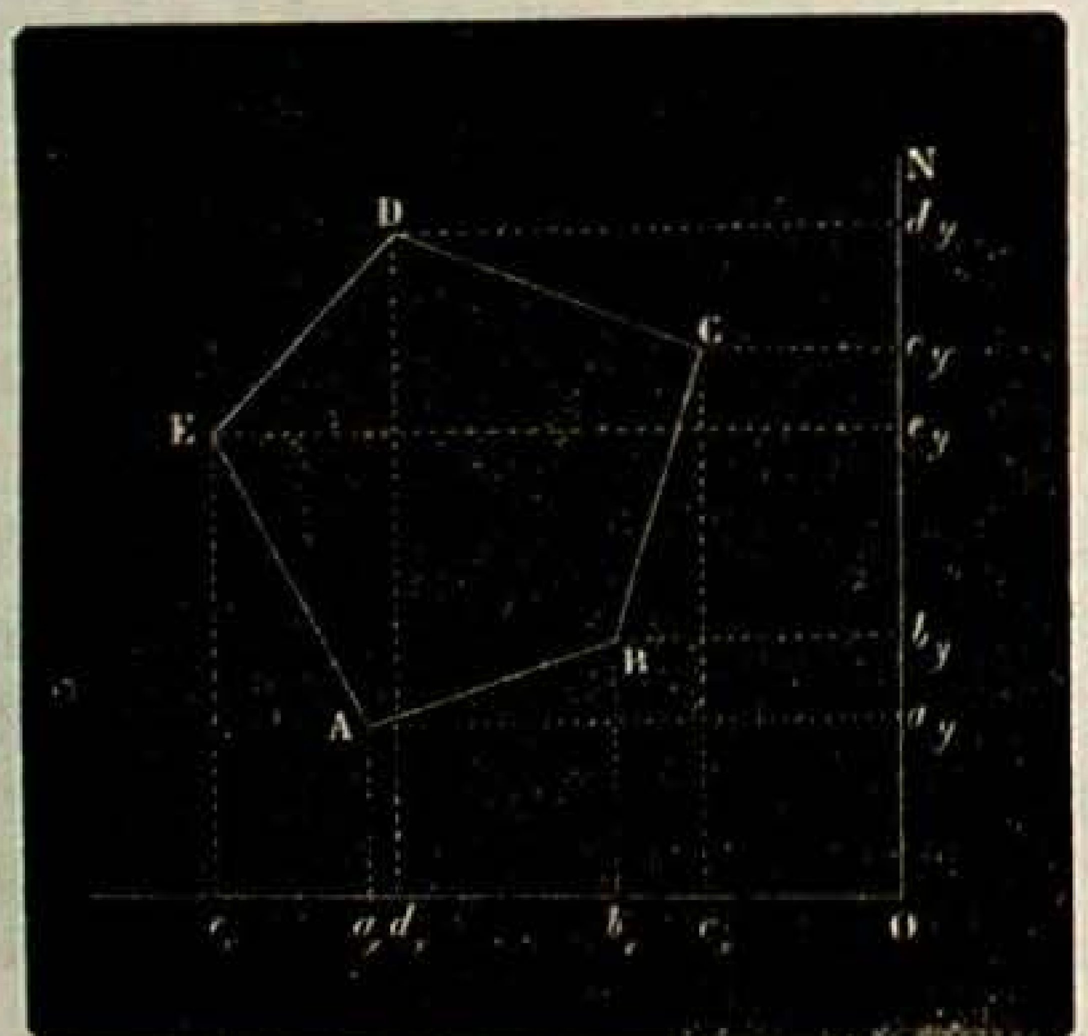
Si le point O était pris dans l'intérieur du polygone, toutes les aires partielles seraient de même signe. Le point O étant extérieur comme dans la fig. 20, les signes résulteront du signe des sinus de l'angle au sommet qui entre comme élément de l'aire de chaque triangle, à la condition de suivre le périmètre sans interruption dans tout son parcours.

Si le point O était lui-même au sommet d'angle, on économiserait dans le calcul deux triangles, parce qu'on aurait un rayon vecteur = 0.

PROBLÈME ONZIÈME.

79. Les coordonnées rectangulaires des angles d'un polygone étant données, trouver l'aire de ce polygone.

Fig. 21.



80. Soit (fig. 21) un polygone quelconque dont on connaît es coordonnées des angles. Il est évident que l'aire A du poly-

gone sera égale à la somme des trapèzes qui le traversent, moins la somme des trapèzes qui ne le traversent pas et qui ont leurs bases sur le même axe.

Si on désigne par X′, Y″, X″ Y′ les coordonnées des angles du polygone, l'aire cherchée est donnée par la formule

$$A = \frac{1}{2}\left[\Sigma'_{II} X.\ \Delta'_{II} Y + \Sigma''_{III} X.\ \Delta''_{III} Y + \Sigma'''_{IV} X.\ \Delta'''_{IV} Y + \right.$$
$$\left. + \Sigma^{IV}_{V} X.\ \Delta^{IV}_{V} Y + \Sigma^{V}_{I} X.\ \Sigma^{V}_{I} Y \right]$$

Cette formule s'arrête au cinquième terme puisque le polygone proposé a cinq côtés ; mais on voit facilement d'après la loi de formation des termes comment on devrait la modifier pour tout autre polygone.

Dans cette formule on peut changer X en Y et réciproquement ; ce qui change entièrement les nombres sur lesquels on doit opérer, et conduit, en dernier résultat, à la même valeur cherchée A.

C'est donc là le véritable moyen d'avoir, dans l'application, surtout au cadastre, un contrôle infaillible des opérations pratiques par lesquelles on détermine les aires des polygones, et c'est sur ce mode d'opérer que se fonde la tachéométrie pour la comprobation du calcul des aires : de toutes les solutions connues du problème des aires pour le cadastre, celle de la formule adoptée, vérifiée de cette manière, est pratiquement la plu avantageuse sous tous les rapports. Il est vrai qu'elle serait au contraire la plus longue à calculer, s'il ne s'agissait que d'une seule parcelle triangulaire dont les côtés et les angles fussent donnés.

81. Soit à déterminer l'aire d'un polygone dont les coordonnées rectangulaires des angles sont celles du tableau suivant :

Angles du polygone	Coordonnées		Calcul par ΣX et ΔY				Calcul par ΔX et ΣY			
	X	Y	ΣX	ΔY	Produits		ΔX	ΣY	Produits	
					+	−			+	−
A	+ 96,3	+ 16,5								
			+ 138,8	− 20,0		0,2776	+ 53,8	+ 53,0	0,2851	
B	+ 42,5	+ 36,5								
			+ 67,3	− 50,9		0,3425	+ 17,7	+ 123,9	0,2193	
C	+ 24,8	+ 87,4								
			+ 78,8	− 52,6		0,2569	− 29,2	+ 207,4		0,6056
D	+ 54,0	+ 120,0								
			+ 157,0	+ 22,0	0,3454		− 49,0	+ 218,0		1,0682
E	+ 103,0	+ 98,0								
			+ 199,3	+ 81,5	1,6243		+ 6,7	+ 114,5	0,0767	
A	+ 96,3	+ 16,5								
			Sommes. . .		1,9677	0,8770			0,5811	1,6738
			Sommes algéb.		1,0927					1,0927
			Aire cherchée.		0,5463					0,5463

Dans les trois premières colonnes, on a l'indication des sommets des angles du polygone et leurs coordonnées. La quatrième colonne est destinée aux sommes successives $X' + X''$, $X' + X'''$.. etc., jusqu'à $X'' + X'$. La cinquième colonne reçoit les différences successives en Y; on inscrit pareillement aux colonnes huitième et neuvième les différence en X et les sommes en Y. En formant ces sommes et ces différences, il faut avoir égard aux signes algébriques, et c'est pour faciliter la formation de la dernière ligne de sommes et de différences qu'on répète à la fin le premier angle du polygone.

Après avoir ainsi disposé tout le calcul, on procède par l'échelle logarithmique ou par les tables, ou, si l'on veut, par la multiplication ordinaire, à la formation des produits que l'on

écrit dans leurs colonnes respectives comme le tableau l'indique.

L'arpenteur ordinaire, travaillant pour les particuliers, n'a souvent qu'un petit nombre de parcelles à évaluer: alors il pourra s'en tenir à la solution du problème 10, quand toutefois il n'aura pas d'autres motifs pour passer aux coordonnées rectangulaires, mais il ne jouira pas alors de l'avantage du second calcul qui vérifie le premier, avantage précieux dans les opérations de grande étendue.

CHAPITRE VI

BORNAGE ET LEVÉ DES COURBES PAR LA MÉTHODE DES CERCLES OSCULATEURS.

82. Les praticiens ont l'habitude de lever le plan des contours curvilignes, en substituant à la ligne courbe une ligne polygonale rectiligne d'un nombre de côtés d'autant plus grand qu'ils veulent approcher davantage du vrai; cette méthode, admissible en général pour les levés topographiques, présente, pour les levés qui exigent beaucoup de précision, l'un ou l'autre des deux inconvénients suivants : ou bien il faut multiplier beaucoup les points de levé, ce qui exige en conséquence beaucoup de temps sur le terrain et aussi dans les bureaux, principalement pour le calcul des aires : ou bien, si on économise les points, on attribue sensiblement plus de surface à la propriété qui est du côté de la convexité aux dépens de la confinante située du côté de la concavité de la courbe.

Mais il n'y a pas de courbe, tant irrégulière et sinueuse qu'on voudra, qu'on ne puisse représenter avec une rigueur mathématique par une série de cercles osculateurs, et avec une grande approximation pratique, au moyen d'une suite d'arcs de cercle de différents rayons, à la manière des *anses de panier* des architectes, et on voit tout d'abord que le nombre d'arcs de cercle nécessaires pour obtenir ainsi une limite de précision donnée sera bien moindre que le nombre des côtés d'un polygone rectiligne remplissant le même but.

On comprendra aussi que le sens pratique de l'opérateur jugera tout aussi bien à vue des quelques points qu'il convient de lever pour opérer ainsi, que des nombreux points qu'il faudrait lever d'après le système usuel. Mais il ne suffira pas de lever les points de naissance ou de raccordement des arcs successifs en lesquels on aura jugé convenable de décomposer la courbe donnée, il faudra encore prendre entre deux, possiblement vers le milieu de chaque arc, un point subsidiaire, car il faut trois points pour déterminer complétement un arc de cercle.

Les lignes sinueuses fortement contournées, qu'affectent en général les cours d'eau, sont le plus souvent assez exactement représentées par un petit nombre d'arcs de cercle fort développés, raccordés par des lignes droites à l'endroit des inflexions, et les arcs de cercle qu'on serait tenté d'admettre dépassent souvent la demi-circonférence; mais il n'est pas prudent en pratique d'admettre de si grandes amplitudes, surtout quand, pour en juger, l'œil de l'opérateur ne peut pas en saisir tout l'ensemble d'un seul coup; il vaut mieux alors lever quelques points de plus et décomposer chacune des circonvolutions en trois ou cinq arcs, en sorte qu'aucun arc n'excède 100 ou 120 grades d'amplitude, ce qui, avec un peu d'exer-

cice, ne présente aucune difficulté : le plus souvent cependant une grande circonvolution des plus contournées n'exigera pas plus de sept à huit points pour être parfaitement définie. Telle sera donc la règle à suivre pour le bornage, et partant pour le levé des contours sinueux des propriétés.

On devra toujours indiquer au registre les points dont la suite détermine la courbe proposée et distinguer les points de raccordement des points intermédiaires, ce qui se fait par des accolades en marge, en forme de parenthèse dont les extrémités correspondent aux points de raccordement, le point subsidiaire étant enregistré entre les deux.

DOUZIÈME PROBLEME.

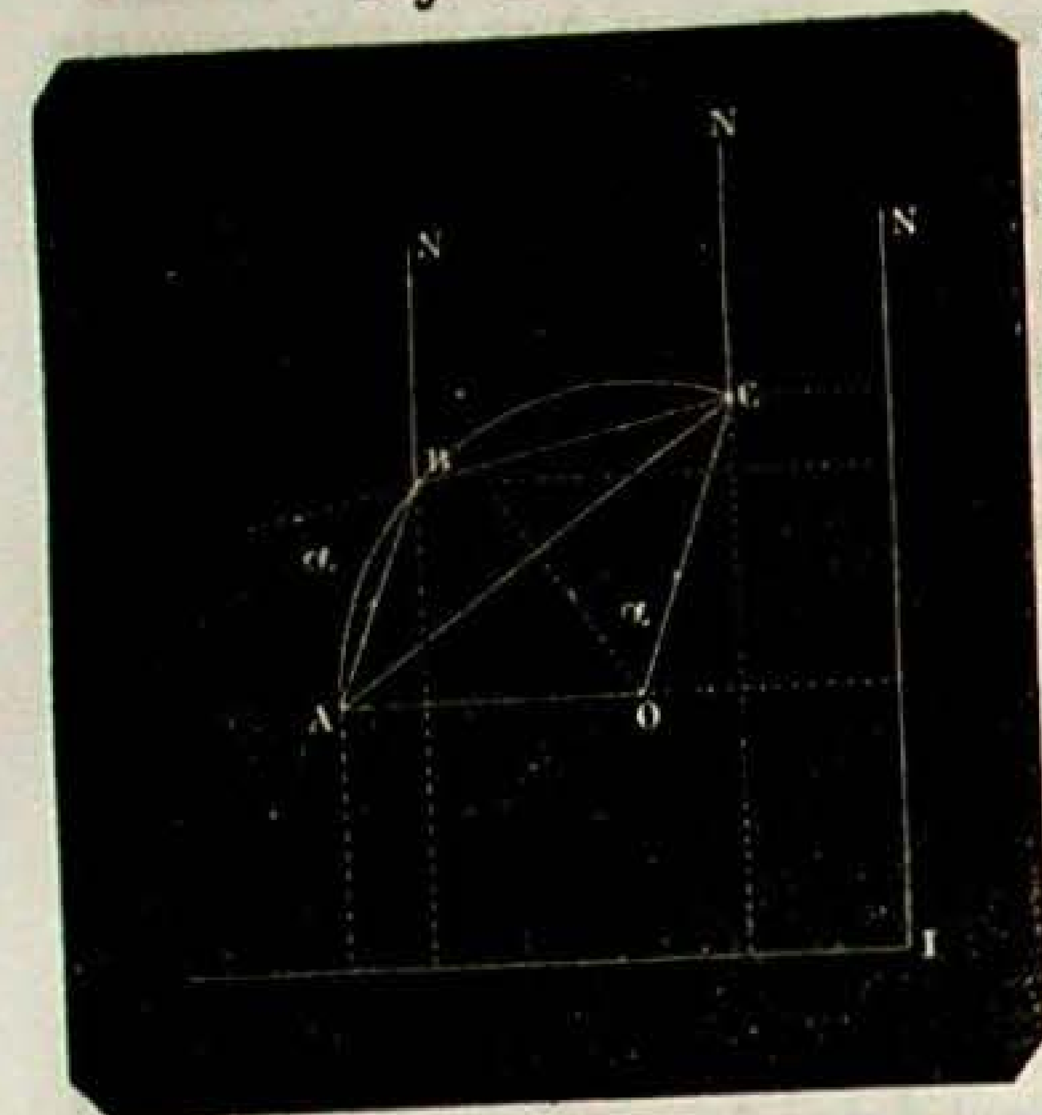
83. Un arc de cercle étant donné de grandeur et de position par les coordonnées de ses extrémités et d'un point intermédiaire, déterminer la surface comprise entre l'arc et sa corde.

84. Le levé étant ainsi fait, il sera bien facile au dessinateur de figurer exactement la courbe en faisant passer par ces points la suite d'arcs de cercle désignés par le géomètre; mais pour le calcul numérique des aires, on a recours à la méthode suivante :

Soit ABC l'arc de cercle donné de grandeur et position par les coordonnées des trois points A, B, C, de son contour (fig. 22), on trouve la longueur de sa corde $AC = c$ en résolvant le problème deuxième; sa demi-amplitude α en grades sera évidemment égale à la différence des azimuts des côtés AB, BC, qu'on détermine en résolvant la première partie du même problème par rapport à ces deux côtés.

Supposons maintenant connu le lieu du centre que nous désignerons par O, menons les rayons OA, OC et proposons-

Fig. 22.



nous de déterminer l'aire s du segment, en fonction de la corde et de la demi-amplitude; indiquons par r le rayon.

En considérant le triangle OCA, on trouve :

$$r = \frac{c}{2 \sin \alpha}$$

Les surfaces du secteur OABC et du triangle AOC sont représentées par :

$$\text{Surface du secteur} = \pi r^2 \frac{\alpha}{200^g}$$

$$\text{Surface du triangle} = \frac{cr}{2} \cos \alpha$$

Substituant la valeur de r donnée par la première, dans les deux autres équations, et pour π sa valeur numérique, et observant que le segment est égal à la différence entre le secteur et le triangle ci-dessus, on arrive à :

$$s = c^2 \left(0{,}003927 \frac{\alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{4} \cot \alpha\right)$$

Cette formule ne serait pas commode à calculer par logarithmes, mais en observant que :

$$c^2 = \overline{\Delta^4_c X}^2 + \overline{\Delta^4_c Y}^2$$

et représentant par K le facteur de c^2, on pourra écrire :

$$s = (\overline{\Delta^4 X}^2 + \overline{\Delta^4_c Y}^2)\,K$$

formule dont le facteur K calculé de grade en grade pour α, variant de zéro à cent grades, se trouve dans la table suivante.

Table donnant la valeur du facteur K
en fonction de l'amplitude α dans la formule

$$s = (\overline{\Delta X}^2 + \overline{\Delta Y}^2)\,K$$

calculée de grade en grade de 0^{gr} à 100^{gr}.

Demi-amplitude en grades	2K	Diff.	Demi-amplitude en grades	2K	Diff.	Demi-amplitude en grades	2K	Diff.	Demi-amplitude en grades	2K	Diff.
1	0,0054	52	26	0,1392	56	51	0,2922	68	76	0,4924	98
2	0,0106	»	27	0,1448	»	52	0,2990	70	77	0,5022	98
3	0,0158	»	28	0,1504	»	53	0,3060	70	78	0,5120	100
4	0,0210	»	29	0,1562	»	54	0,3130	70	79	0,5220	102
5	0,0262		30	0,1618		55	0,3200		80	0,5322	
		52			58			72			104
6	0,0314	»	31	0,1676	»	56	0,3272	72	81	0,5426	106
7	0,0368	»	32	0,1736	»	57	0,3314	72	82	0,5532	108
8	0,0418	»	33	0,1792	»	58	0,3416	74	83	0,5640	108
9	0,0472	»	34	0,1852	»	59	0,3490	76	84	0,5748	112
10	0,0526		35	0,1910		60	0,3566		85	0,5860	
		52			60			76			114
11	0,0578	»	36	0,1970	»	61	0,3642	78	86	0,5974	116
12	0,0632	»	37	0,2028	»	62	0,3720	78	87	0,6090	120
13	0,0684	»	38	0,2088	»	63	0,3798	80	88	0,6210	120
14	0,0736	»	39	0,2150	»	64	0,3878	80	89	0,6330	124
15	0,0792		40	0,2210		65	0,3958		90	0,6454	
		52			62			82			126
16	0,0844	»	41	0,2272	»	66	0,4040	82	91	0,6580	130
17	0,0900	»	42	0,2336	»	67	0,4122	84	92	0,6710	132
18	0,0952	»	43	0,2396	»	68	0,4206	84	93	0,6842	134
19	0,1008	»	44	0,2462	»	69	0,4290	86	94	0,6976	138
20	0,1062		45	0,2526		70	0,4376		95	0,7114	
		54			64			88			142
21	0,1116	»	46	0,2590	»	71	0,4464	90	96	0,7256	144
22	0,1170	»	47	0,2656	»	72	0,4554	90	97	0,7400	148
23	0,1226	»	48	0,2720	»	73	0,4644	92	98	0.7548	152
24	0,1282	»	49	0,2786	»	74	0,4736	94	99	0,7700	154
25	0,1336		50	0,2854		75	0,4830		100	0,7854	

Toutes les aires de trapèzes (rectilignes) se trouvant dans les registres multipliées par 2, il faut qu'il en soit de même de celles des segments ; on a, pour cela, mis dans la table la valeur de 2 K au lieu de celle de K.

Au moyen de cette table, le calcul de l'aire s du segment proposé est aussi prompt que facile, en sorte que les trapèzes terminés par un côté curviligne ne demandent pour le calcul des aires presque pas plus de temps que les autres.

85. On peut désirer quelquefois de connaître les coordonnées du centre de l'arc de cercle qu'on a substitué à la courbe donnée, ne fût-ce que pour s'en servir au tracé du plan, surtout quand cette courbe, ayant une amplitude un peu considérable, porte parfois sur deux feuilles contiguës. Pour résoudre ce problème, on observera que, le triangle ACO étant isoscèle les angles A, C sont égaux entre eux et à $100^g - \alpha$; cette quantité, combinée avec l'azimut du côté AC déterminé par la solution du problème 6, donnera les azimuts du centre vu de chacun des angles A, C; tandis que la formule

$$r = \frac{c}{2 \sin \alpha}$$

donne la valeur de r : on aura donc tout ce qu'il faut pour calculer, par deux voies différentes, les coordonnées du point O: ceci trouve surtout son application dans le levé des grandes courbes souvent circulaires des chemins de fer.

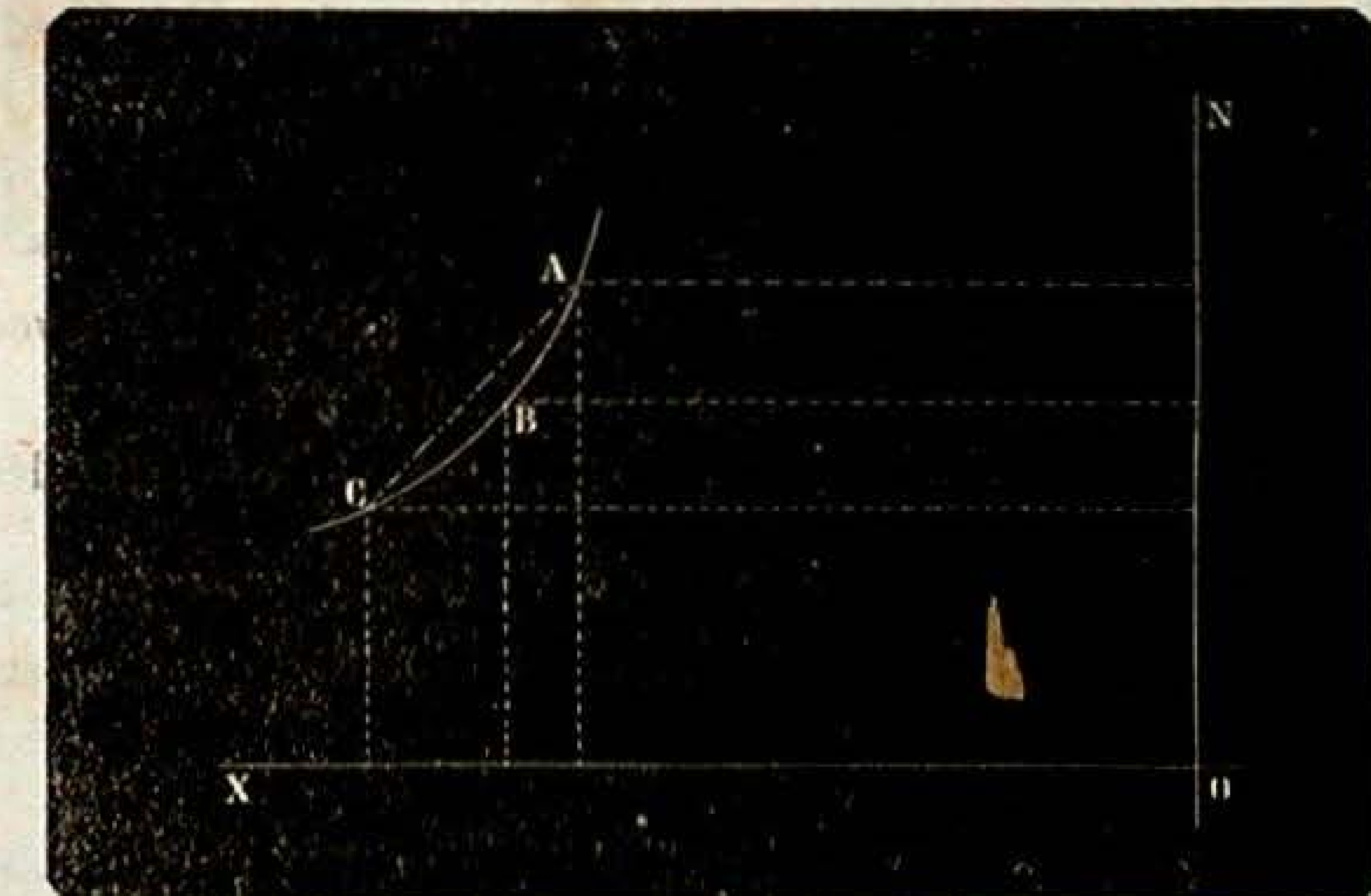
Exemple numérique du calcul de l'aire d'un trapèze aboutissant à un côté curviligne.

86. Soit A, B, C, fig. 23, une portion curviligne du contour d'une parcelle, qui d'après la méthode exposée peut être considérée comme un arc de cercle : les points A, B, C, étant

donnés par leurs coordonnées conformément à l'état suivant, colonnes X et Y ;

Désig^on. des sommets	ÉLÉMENTS DU CALCUL DES AIRES CURVILIGNES					
	en X			en Y		
	X	ΣX	ΔX	Y	ΣY	ΔY
A	+ 411,40			+ 322,20		
			49,00			79,90
B	+ 460,40			+ 242,40		
		964,35	141,55		494,30	150,10
B						
			92,55			74,20
C	+ 532,95			+ 172,10		

Fig. 23.



On remplira les colonnes ΣX, ΔX, ΣY, ΔY par les sommes et les différences exigées pour la solution du problème telle qu'elle a été expliquée problème 11.

On procédera ensuite à la recherche des azimuts Θ_B^A, Θ_C^B des côtés AB, BC, qu'on écrira à leur place dans la forme que présente l'état suivant:

ÉLÉMENTS DU CALCUL des aires curvilignes			TRAPÈZES REPOSANT SUR la méridienne $\Sigma X \cdot \Delta Y$			TRAPÈZES REPOSANT SUR la perpendiculaire $\Delta X \cdot \Sigma Y$		
Azimuts	$\overline{\Delta X}^2 + \overline{\Delta Y}^2$	K	hectares	ares	centiares	hectares	ares	centiares
Θ_A^B 364,98	20036,40			53	55		53	55
$\Delta\Theta$ 23,67	22530,00	0,0629	14	47	49	6	99	68
Θ_C^B 341,31	42566,40		13	93	94	6	46	13

La différence $23^{gr}, 67$ de ces azimuts est la valeur α : avec cette valeur, on trouve dans la table 2 K=0,1262.

Multipliant par cette valeur de K la somme des carrés des différences

$$\overline{\Delta_C^A X}^2, \quad \overline{\Delta_C^A Y}^2, \quad \text{ou} \quad 42566,40$$

on trouve :

$$2s = 0^{\text{hect.}} 53^{\text{ar}}, 55^{\text{cent}}$$

qu'on écrit à sa place dans le registre.

Le signe de l'aire du segment, négatif dans l'exemple ci-dessus, peut devenir positif et même être différent par rapport aux deux axes, mais il sera toujours facile, aidé du plan qu'on a sous les yeux, quand on calcule les contenances des parcelles, de voir quel est le signe dont l'aire du segment doit être affectée.

Les éléments de ces opérations se trouvent dans le registre des aires de trapèzes, calculées d'après les règles des problèmes 11 et 12, et dans le registre des coordonnées de tous les points du levé.

87. *Déblais et remblais.* — Le calcul des déblais et des remblais peut se faire comme à l'ordinaire, c'est-à-dire en décomposant le terrain en prismes : chaque prisme a pour base un triangle ou un polygone quelconque et pour arrêtes les cotes de niveau des points du terrain dont la projection horizontale constitue les sommets de ces polygones.

Dans un mémoire spécial sur l'application de la tachéométrie aux travaux de grande communication, on trouvera une méthode de calcul de terrassement par les sections horizontales, qui présente plusieurs avantages sur la méthode ordinaire.

CHAPITRE VII.

LEVÉ ET NIVELLEMENT COMPLETS D'UN TERRAIN DONT TOUS LES POINTS SONT VISIBLES D'UN SEUL POINT DE STATION.

88. Le géomètre qui doit procéder au levé d'une étendue de terrain limitée à la portée de l'instrument (12 hectares en moyenne) placerait, s'il opérait par la méthode ordinaire, des jalons sur tous les points qu'il apercevrait de la station : par

la nouvelle méthode, il doit opérer de la manière suivante :

Il doit d'abord considérer si son travail est destiné à se rattacher à d'autres levés, ou bien s'il ne doit consister qu'en une seule opération isolée.

Dans le premier cas, le géomètre doit avant tout s'occuper de ses coups d'arrière, c'est-à-dire de ses moyens de rattachement, soit aux points du levé déjà déterminés, soit aux points trigonométriques, quand il y en a de visibles de la station. Il doit soigner son orientation de manière qu'elle soit la plus exacte possible.

Dans le second cas, l'orientation exacte ne sera pas nécessaire. Il suffira toujours d'une orientation approchée, telle que l'aiguille aimantée peut la fournir sans avoir égard aux variations diurnes. On pourrait même, à la rigueur, ne faire aucun cas de l'orientation, et diriger le diamètre zéro de l'instrument d'une manière quelconque; mais il sera toujours bon de tenir compte de l'orientation donnée par l'aiguille, puisque cela est très-facile à faire et que l'on a une idée plus exacte de la localité quand on en connait l'orientation. Cela est d'ailleurs conforme à l'usage universellement reçu qui veut qu'on rapporte les plans avec le nord en tête.

89. Après avoir placé l'instrument sur son pied, et l'avoir orienté et mis de niveau, le géomètre examine d'un coup d'œil le terrain sur lequel il va opérer et donne au porte-mire les instructions qu'il juge convenables. Le porte-mire se rend successivement sur tous les points indiqués par le géomètre, et s'y tient avec la mire jusqu'à ce qu'il ait reçu le signal de passer outre. Le géomètre fait sur chaque point l'observation complète, comme il a été expliqué, et son aide inscrit sur le carnet, chacun à sa colonne, les nombres générateurs résultant de ses observations.

Il est bon de prescrire un ordre que l'on suivra autant que possible ; par exemple, de commencer toujours par le nord, et d'avancer en tournant par l'est ou par l'ouest, en commençant par les points les plus éloignés et en se resserrant peu à peu en spirale par un second et même par un troisième tour d'horizon, de manière que le porte-mire à la fin de l'opération se trouve près de la station. Ce sont, au reste, les obstacles que le terrain présente qui règlent et modifient la marche du porte-mire, pour la plus grande économie de temps.

Si l'on relève les périmètres des parcelles, comme pour le cadastre, il convient de suivre ces périmètres de parcelle en parcelle, parce qu'alors ce n'est pas seulement le temps du porte-mire qu'il faut économiser, mais encore celui des indicateurs et des propriétaires ou fermiers qui se trouvent là pour les renseignements.

90. Quand on a pour but l'étude de projets de routes, de chemins de fer, de canaux, de fortifications ou autres grands travaux quelconques, pour lesquels il est important d'avoir le relief le plus complet du terrain, il ne suffit plus de lever les divisions de propriété, on doit encore prendre dans l'intérieur des parcelles autant de points qu'il en faut pour déterminer en tout sens la figure altimétrique du terrain.

On a vu, page 97, que pour lever, en planimétrie, le cours sinueux d'un ruisseau ou une ligne courbe quelconque, on lui substituait (ancienne méthode) réellement soit un *polygone inscrit* d'un nombre de côtés suffisant pour représenter la courbe donnée avec une approximation suffisante, soit une suite de cercles osculateurs : semblablement, pour lever la surface conchoïde du terrain, il faut y substituer par la pensée un *polyèdre inscrit* à faces triangulaires d'autant plus nombreuses que l'on veut approcher d'avantage du vrai, et lever ensuite les sommets des angles de ce polyèdre ou bien une suite de surfaces sphériques, cylindriques et coniques sensiblement osculatrices de la surface donnée : le premier de ces deux moyens suffit ordinairement en pratique. Sur un terrain nu, cette substitution se fait assez facilement à vue ; on doit y apporter quelques soins de plus quand le terrain est couvert de végétation : il va sans dire qu'on fait entrer dans cette décomposition arbitraire tous les périmètres des parcelles, et, en général, tous les points qu'on aurait levés, s'il n'eût été question que de la planimétrie ; il n'est nullement nécessaire de marquer les points avec des jalons, parce que le point est complétement déterminé quand le pied de la mire y a été une fois, et, si un point n'est pas quelque chose qui doive figurer dans la planimétrie, il suffit de savoir qu'il appartient à la surface du terrain et d'en avoir les coordonnées ; un porte-mire un peu intelligent acquiert en peu de jours le tact nécessaire pour décomposer convenablement la surface du terrain et pour *donner les points* à l'opérateur avec ordre et sans omission.

Tous les points doivent être désignés sur le carnet par un numéro d'ordre, et l'on doit en outre s'attacher à bien décrire, quoique le plus succinctement possible, le point observé.

91. Il est bon d'avoir des carnets imprimés pour la clarté et l'uniformité des opérations sur le terrain ; le modèle que nous avons adopté porte sept colonnes dont les quatre premières, intitulées dimensions linéaires, sont destinées aux lectures du micromètre ; les exemples de lecture sur la mire, au § 29, en disent assez pour faire voir la méthode à suivre pour l'inscription des quantités dans cette première partie : les trois dernières colonnes sont destinées à recevoir les dimensions angulaires.

92. Après avoir inscrit au carnet les résultats de l'observation, le géomètre a encore à faire les croquis de la localité en y figurant les accidents du terrain ; tels que les chemins, les canaux, les limites de propriété, etc. C'est là ce qu'on nomme le *type eidographique*, ou simplement le figuré.

93. Si quelque partie du terrain présente quelque détail que le géomètre ne juge pas convenable de lever avec l'instrument, c'est son aide qui doit en faire un petit croquis à part, sur lequel il cotera les dimensions qu'il aura mesurées au double mètre. Bien entendu qu'il ne s'agit ici que de détails et de petites dimensions isolées, n'ayant aucune influence sur l'ensemble des opérations, tels que largeurs de fossés, épaisseurs de murs, etc.

94. L'opération sur le terrain étant accomplie, on n'a qu'à remplir dans le cabinet les colonnes restantes ; et on a ainsi tout ce qu'il faut pour résoudre toutes les questions, pour satisfaire à tous les besoins qui peuvent avoir déterminé le levé du terrain.

Si on veut ensuite avoir un dessin au net à une échelle quelconque, on peut le faire avec une promptitude très-grande en plaçant sur le papier quadrillé, d'après les coordonnées rectangulaires, les points un à un, et en figurant ensuite le terrain d'après le type eidographique. Cela revient absolument à ce qu'on ferait pour un levé exécuté à l'équerre d'arpenteur, à cela près que l'on a ici de plus les cotes de niveau que l'équerre ne donne pas, et que, tout en opérant avec plus d'exactitude, on obtient une économie de temps considérable.

95. Quand il y a des points préalablement déterminés, il faut s'y rattacher. On trouvera plus loin la manière de se rattacher à des points quelconques accessibles ou inaccessibles.

CHAPITRE VIII.

LEVÉ ET RATTACHEMENT DE DEUX OU PLUSIEURS STATIONS : VÉRIFICATION DES RATTACHEMENTS.

96. Si l'étendue ou la disposition du terrain sont telles que deux stations deviennent nécessaires, voici comment on doit procéder :

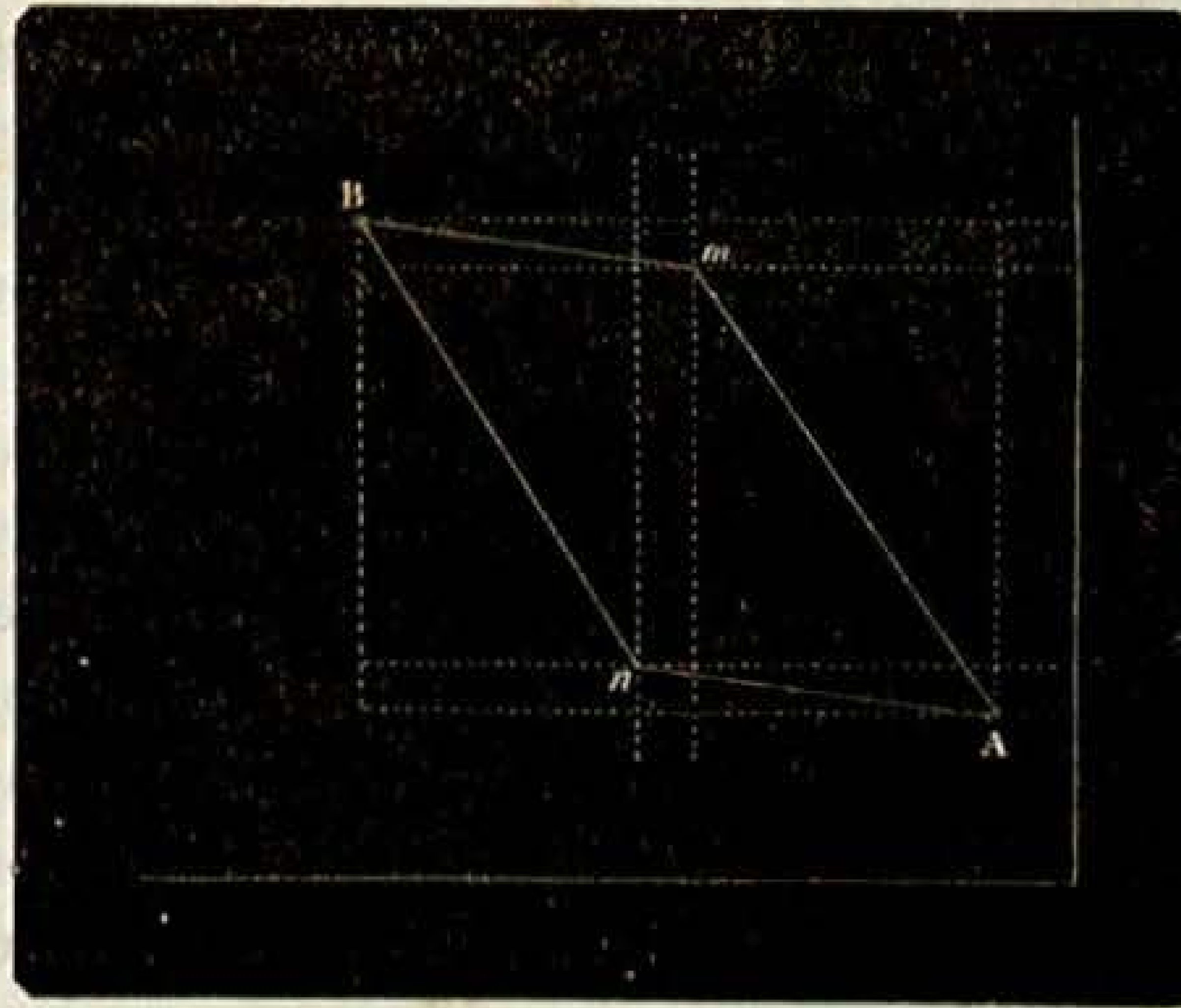
On commence par exécuter la première station comme on l'a expliqué dans le paragraphe précédent, et on a soin de se ménager deux points au moins qui soient visibles de la seconde station. Ces points doivent être choisis de manière que la distance qui les sépare ne soit pas trop différente de celle qui séparera les deux stations à rattacher.

97. Après avoir accompli tout le travail possible de la première station, on transporte l'instrument sur le point choisi pour la deuxième station. On s'y oriente avec attention, et l'on observe ensuite les deux points susdits qui doivent servir à rattacher les deux stations entre elles. C'est ce qu'on appelle *donner le coup d'arrière* dans les nivellements ordinaires. On sent qu'un seul coup d'arrière, si l'on avait l'orientation exacte, serait suffisant mais on donne toujours deux coups d'arrière pour être sûr de ne pas avoir à revenir sur ses pas, et pour avoir le moyen de contrôler le parallélisme du diamètre *zéro* de l'instrument dans les deux stations.

98. On continue alors le levé de la deuxième station jusqu'à ce que l'on en ait accompli tout le travail, comme si cette station était seule, et on en fait obtenir séparément le type eidographique. Ce n'est que dans la mise au net, au cabinet, que l'on s'occupe d'assembler les deux types en un seul dessin.

Si l'on n'a pas besoin du plan au net, on se borne à réduire les coordonnées des points à un seul système d'axes, comme on le montrera plus tard, afin de s'en servir à déterminer les dimensions des projets pour lesquels le relèvement a été fait, ou à calculer la surface agraire, etc. Voici comment on s'y prend pour s'assurer de l'exactitude des observations qui lient les deux stations entre elles.

Fig. 24.



99. Examinons d'abord les conditions géométriques du quadrilatère ABmn (*fig.* 24) résultant des deux stations A et B, et des deux points de rattachement m et n. Si on ne consi-

dère que sa projection horizontale, on trouve qu'on y connaît deux angles A et B et les quatre côtés, on a donc une condition de plus qu'il ne faudrait pour le construire, c'est-à-dire qu'on a un moyen de vérification. Mais ce quadrilatère existe dans l'espace; donc la troisième coordonnée z de chaque angle serait déjà donnée, si, outre la projection horizontale, on avait l'inclinaison de trois des côtés. Or cette inclinaison (l'angle φ) est donnée pour les quatre côtés; on a donc encore ici une condition de plus qu'il n'en faudrait pour déterminer ce quadrilatère dans l'espace; c'est là une seconde vérification. Si on considère ensuite les conditions algébriques qui lient les coordonnées aux nombres générateurs, on verra facilement qu'une compensation d'erreurs est très-peu probable, parce que chacun des éléments, l'azimut excepté, entre dans la détermination des trois coordonnées. Il suit de là que, si une erreur d'observation existe dans chacune des deux stations sur quelqu'un des nombres générateurs, il pourrait bien se faire qu'une compensation trompeuse eût lieu dans le sens de l'un des axes; mais il est presque impossible que cette compensation ait lieu dans les trois sens.

100. Si a, b, c, etc., m représentent les angles d'un polygone quelconque formé dans l'espace; si x^b, y^b, z^b ; x^c, y^c, z^c ....., etc., sont respectivement les coordonnées du point b par rapport à a, de c par rapport à b, et ainsi de suite jusqu'à x^m, y^m, z^m, pour les coordonnées du point $m^{ème}$ par rapport au point m^{-1}; et x^a, y^a, z^a, pour les coordonnées du point a par rapport au point m, on aura évidemment :

$$\Sigma x = 0\,, \quad \Sigma y = 0\,, \quad \Sigma z = 0.$$

Cette condition, dans le quadrilatère que l'on considère ici, est très-facile à vérifier, puisqu'on n'a qu'à changer alternativement de signes les coordonnées qui résultent de l'observation, et faire la somme algébrique dans les trois sens. On pourra donc en un instant s'assurer si la deuxième station est exactement déterminée par rapport à la première, en vérifiant numériquement les trois conditions ci-dessus.

101. Ce mode de vérification exige qu'on ait préalablement calculé les coordonnées rectangulaires des points de rattachement par rapport à chacune des deux stations. On trouvera donc généralement plus commode de procéder de la manière suivante :

Le quadrilatère peut être considéré comme composé de deux triangles, dans chacun desquels on connaît deux côtés et l'angle compris, et dont le troisième côté est la distance qui sépare les deux points de rattachement. On peut immédiatement calculer cette distance par rapport à la première; puis par rapport à la seconde station, par les formules du problème 1er. Il est évident que les deux calculs doivent conduire à deux résultats identiques, tant pour la longueur du troisième côté que pour son orientation.

Si la distance en question seule était identique, la différence des deux azimuts serait la correction d'orientation à appliquer à la seconde station, pour en rendre le diamètre *zéro* parallèle à celui de la première. Si la distance trouvée était différente, alors on aurait certainement commis quelque erreur dans quelques-uns des éléments de l'observation, et il faudrait revenir sur ses pas pour vérifier et corriger, si toutefois la vérification résultant de la troisième coordonnée ne faisait pas de suite connaître quel est l'élément fautif.

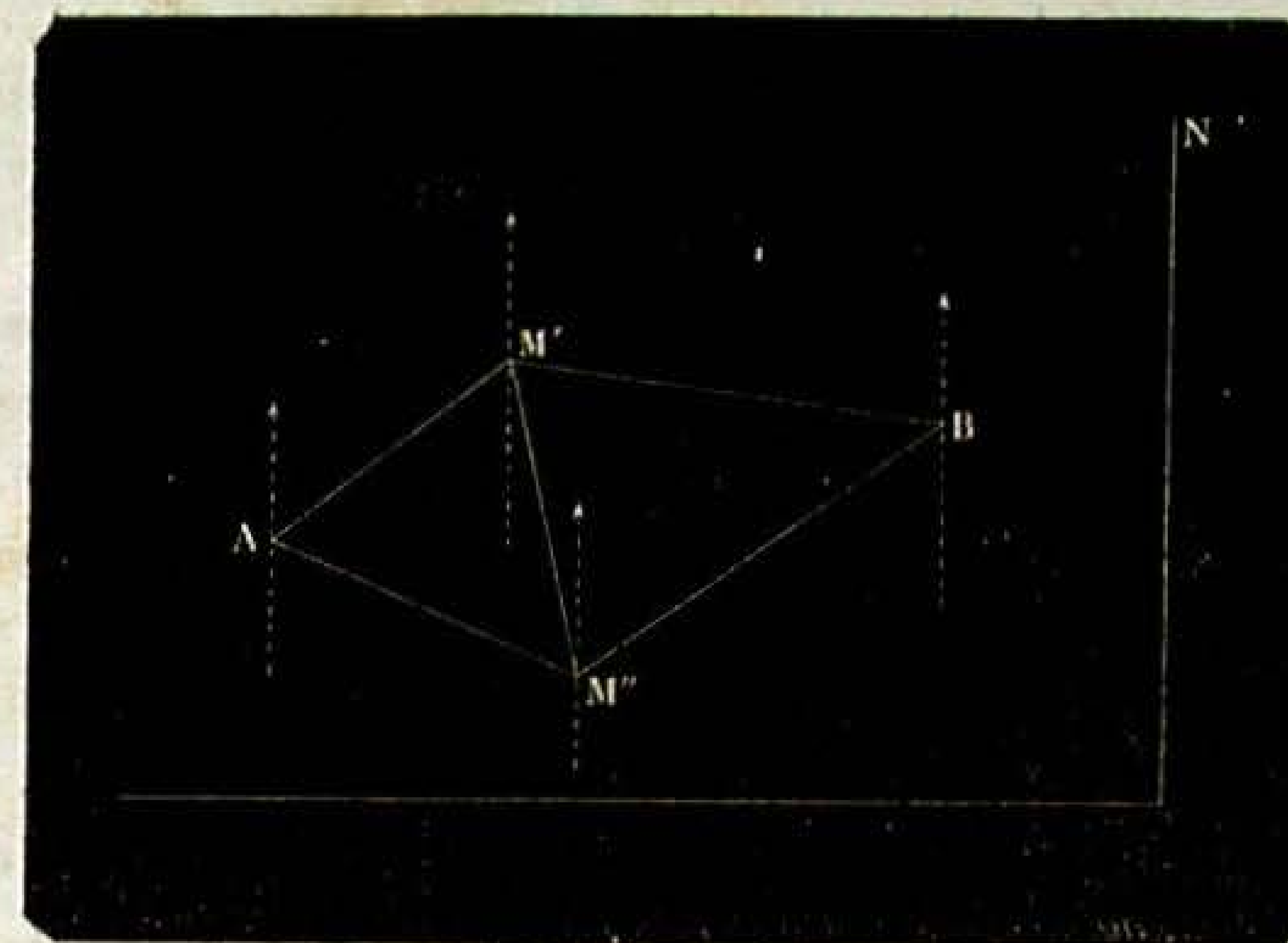
Si la discordance des résultats dévoile seulement une différence d'orientation, on peut, quand l'on n'a pas commencé à observer, retoucher à l'instrument. Mais il est presque toujours convenable de continuer l'opération avec l'orientation où l'on se trouve, fût-elle entièrement arbitraire, sauf à apporter plus tard à tous les azimuts, la correction nécessaire. C'est sur le terrain que le temps est précieux, et il faut réserver pour le cabinet tout ce qu'il n'est pas indispensable de faire sur les lieux. Il est prudent cependant de faire toujours, avant de quitter le terrain, les opérations de vérification ci-dessus indiquées, afin d'être assuré qu'on n'aura pas à revenir sur ses pas.

102. Voici un exemple numérique de rattachement de deux stations :

Soient A, B (fig. 25) les deux stations, M′, M″ les deux point de rattachement, et les données de l'observation comme dans le tableau suivant.

STATIONS	POINTS	$\mathcal{D}$	θ	$\Delta\theta$
A	. . . .	. . . .	. . . .	
	M′	185,00	340,50	51,91
	M″	170,50	288,59	
B	. . . .	. . . .	. . . .	
	M′	225,50	89,75	359,65
	M″	228,80	130,10	

Fig. 25.



En résolvant par rapport à la première station le premier problème, on trouve pour les quantités p', q', et ω' les valeurs suivantes :

$$p' = +\,124{,}12\ ,\quad q' = +\,68{,}10 \qquad \omega = 68{,}02$$

d'où en appelant Θ l'azimut de la ligne $M\,M'' = D$, on a

$$\Theta = 208^{gr},50\ ,\quad D = 141{,}60$$

En opérant d'une manière analogue par rapport à la deuxième station, on trouve

$$p'' = -\,135{,}50\ ,\quad q'' = +\,41{,}15\ ,\quad \omega' = 118{,}77$$

et par suite

$$\Theta = 208^{gr},50\ ,\quad D = 141{,}58$$

La petite différence en D est, on le voit, négligeable ; et l'égalité des azimuts prouve que l'orientation est bonne.

Après avoir ainsi assemblé deux stations du levé, toutes les coordonnées partielles de tous les points peuvent être calculées par rapport aux stations respectives, et ensuite réduites à trois axes principaux, de la même manière qu'on a l'habitude de réduire à une même horizontale tous les points d'un nivellement.

103. Pour procéder graduellement du simple au composé, on va examiner maintenant le cas où un levé isolé de moyenne étendue donnerait lieu à un ensemble de plusieurs stations.

Le géomètre doit, dans ce cas aussi, choisir ses stations et ses points de rattachement, de manière que chaque station soit rattachée à celles qui l'avoisinent par deux points au moins, en prenant, s'il en est besoin, quelque point auxiliaire. On n'est pas astreint à commencer dans un endroit plutôt que dans un autre, pourvu que, le travail terminé, on ait un nombre suffisant de points de rattachement entre toutes les stations voisines en tous sens, pour faire toutes les combinaisons possibles de vérification. Avant de quitter une station, on effectue les vérifications numériques indiquées précédemment, et on ne quitte le terrain qu'assuré de l'exactitude de tous les rattachements.

104. On aura un contrôle de plus, qui est très-utile, en choisissant d'avance un ou plusieurs points visibles de la plupart des stations, tels que clochers ou autres, compris ou non compris dans l'étendue à lever, mais toujours très-éloignés de la station à laquelle ils vont appartenir comme *points directeurs*. Un point directeur sera levé en commençant le travail de chaque station et sera vérifié à la fin, pour constater si l'instrument s'est maintenu invariable pendant toute la durée des observations. Les points directeurs et les points de rattachement concourent à manifester les déviations d'o-

rientation qui pourraient s'être glissées dans les opérations. C'est en faisant l'application du problème 6 qu'on utilise les points directeurs comme contrôle de l'orientation, après avoir déterminé leur position au moyen des trois stations qui en sont le plus près. Cette opération et celle qu'on fait en appliquant la méthode du problème 5 constituent ce qu'on appelle *trisections* et *déterminations* par recoupements.

Ces opérations remplacent avantageusement sous tous les rapports les triangulations de troisième et de quatrième ordre.

Si les conditions précédemment énoncées ont été vérifiées exactes, il est clair qu'en appliquant à l'un quelconque des polygones qu'on peut imaginer à volonté dans un ensemble de stations et de points de rattachement entre ces stations, le mode de vérification indiqué au § 100, on doit le trouver exact; car les polygones ne se composent que d'éléments déjà reconnus exacts; il en serait réellement ainsi dans la limite de nos sens et des opérations graphiques, si en suivant une sage méthode de construction on procédait à la mise au net en commençant par ces éléments rectifiés, et surtout par les points directeurs.

Les géomètres qui, par les meilleurs procédés graphiques, relèvent leurs plans à la planchette ou à la boussole, et ne s'épargnent pas les retours sur le terrain, procèdent *du grand au petit;* ils s'assurent ainsi de la concordance *graphique* de leurs lignes polygonales *de plusieurs ordres*, et ils arrivent à un ensemble qui ne laisse plus rien *apercevoir* de discordant, ce qui leur fait dire que, pour eux, la *tolérance* est nulle (1).

(1) V. *Études sur le Cadastre des terres*, appendice au 2me Mémoire. Neuilly, 1860. Observons en outre que cette assertion téméraire ne saurait

Pour nous, qui vérifions tout avec la rigueur des nombres, nous devons découvrir par nos moyens de vérification les inexactitudes qui auraient échappé aux sens dans les opérations graphiques; nous devons admettre, au-delà de l'exactitude graphique, un coefficient de tolérance plus ou moins rigoureux, et nous devons obtenir, en battant le terrain une seule fois (c'est là un grand point d'économie de temps et d'argent), tous les ordres de lignes polygonales et toutes les combinaisons géométriques possibles, nécessaires ou utiles, non-seulement à vérifier si le travail reste dans les limites de la tolérance accordée, mais encore à annuler d'après le système de compensations adopté dans la haute géodésie l'effet des erreurs comprises dans les limites de la tolérance. Nous approchons ainsi le plus possible de la vérité mathématique dans la détermination des coordonnées définitives des stations et des points levés.

105. Quant à l'orientation, il est évident que l'on n'est pas astreint jusqu'ici à l'orientation absolue, et qu'une orientation arbitraire suffit, pourvu qu'elle soit la même pour toutes les stations. On a vu aussi qu'il est facile de transmettre l'orientation d'une station à la suivante, par le moyen des points de rattachement et de l'azimut du côté qui les joint. En sorte qu'on pourrait opérer tout aussi bien sans aiguille aimantée.

106. On a parlé, § 98, de tolérance et d'erreurs, il est bon de faire, à cet égard, les remarques suivantes :

On distingue dans une opération quelconque de géométrie pratique deux espèces d'erreurs : les erreurs matérielles,

être victorieusement combattue, faute de moyens comprobateurs existant dans le travail même, lequel par conséquent ne présente aucune garantie sérieuse.

fautes réelles de l'opérateur, et les erreurs qui tiennent à la limite d'acuité de nos sens et à la précision des instruments.

Les déductions purement mathématiques qui expriment les relations existant entre les quantités employés en géodésie peuvent être rigoureusement exactes ou seulement approchées; quand, par exemple, une formule mathématique rigoureuse contient des termes dans lesquels une quantité déjà très-petite se trouve élevée à une puissance supérieure à la première, on néglige ces termes, qui sont sans influence sur les déductions pratiques.

Ainsi, dans la formule (1), on néglige en pratique le second terme qui n'arrive jamais, dans le cas le plus défavorable, à acquérir une valeur supérieure à $0^m,05$ sur la distance.

De même dans la partie arithmétique de nos opérations, nous sommes convenu de négliger sur les résultats linéaires toutes les quantités moindres qu'un décimètre, et sur l'évaluation des surfaces les quantités moindres qu'un centiare.

Observons encore que le mécanisme des opérations et des instruments, ainsi que l'imperfection de nos sens, mettent des bornes au degré d'exactitude des résultats que ces opérations et ces instruments doivent nous fournir.

L'expérience a prouvé, par exemple, que le chaînage à travers des terrains plus ou moins accidentés présente une incertitude moyenne d'un centième, tandis que l'évaluation des distances à la mire parlante ne laisse qu'un millième d'incertitude; et les appareils les plus exquis pour le mesurage des bases trigonométriques atteignent la précision d'un millimètre par kilomètre, soit le millionième.

Toutes ces causes ne produisent localement que des effets négligeables, mais qui en se répétant progressivement pourraient prendre l'importance de véritables *erreurs*.

On est dans l'habitude d'appeler *erreur* tout ce qui n'est pas la vérité, et, à ce titre, 1/100 dans le chaînage comme un millonième dans la mesure d'une base trigonométrique est une erreur.

Nous éprouvons néanmoins le besoin d'indiquer avec un nom différent deux choses de nature très-différente ; autre chose est en effet ce centième, ce millième, ce millionième qui tient à l'imperfection inévitable de nos sens, de nos instruments et de nos méthodes, autre chose est le résultat d'une négligence ou d'une distraction, ou de toute cause qui ferait lire sur un cercle ou sur la mire un chiffre pour un autre, ou compter dans un chaînage une fiche ou une portée de plus ou de moins.

107. Nous restreindrons donc, dans tout le cours de cet ouvrage à cette dernière espèce d'*erreurs* le mot *erreur*, et nous désignerons par le mot *incertitude* les différences définies plus haut entre le résultat de l'opération et la réalité.

Pour rendre bien claire la signification que nous entendons attacher à ces deux mots, considérons un chainage de cent kilomètres de grande route fait pour le placement des bornes kilométriques, et admettons par hypothèse que cette longueur totale de 100 kilomètres ait été *a priori* rigoureusement déterminée par des opérations trigonométriques d'une exactitude incontestable : l'opération du chainage a marché au naturel, les incertitudes qui tiennent à sa nature (un centième) ont eu lieu tantôt en plus, tantôt en moins : dans cette supposition, il arrivera que la position de chaque borne kilométrique pourra bien présenter une incertitude d'une dizaine de mètres ; mais, d'après la théorie des probabilités, les cent kilomètres ne présenteront qu'une incertitude proportionnellement moindre dans le rapport de la racine carrée de 100, (nombre des kilomètres

mesurés) soit 100 mètres sur la totalité, au lieu du centième de la distance totale qui serait de 1,000 m. Si donc les choses se passent ainsi, l'opération sera reçue et approuvée pour bonne.

108. Supposons maintenant que ce que nous avons appelé les *incertitudes* ait produit pour la longueur totale de la ligne un résultat trop fort de 100 mètres, et qu'en même temps le conducteur ait compté quelque part une portée (1) de moins ; on aurait alors localement un kilomètre trop court de 100 mètres ; outre cela toutes les bornes kilométriques à partir de là seraient déplacées d'à peu près autant, et néanmoins la longueur totale se trouverait mathématiquement exacte.

Ici donc *une erreur locale* aurait compensé la somme de toutes les *incertitudes rémanentes*, elle se trouverait dissimulée malgré sa gravité incontestable, et les chaineurs recevraient les compliments des admirateurs vulgaires.

Cet exemple démontre clairement : qu'il est indispensable 1° de distinguer ces deux natures d'erreurs par des noms différents, ainsi que nous le faisons plus haut ; 2° de se ménager des moyens de découvrir dans un grand ensemble d'opérations les *erreurs* dans les lieux précis où elles ont été commises et de les distinguer nettement des *incertitudes* qui se produisent petit à petit sur toute la ligne ; ces *incertitudes* font naître entre le résultat et la vérité des différences qui ne seraient pas négligeables, si elles devaient affecter la position absolue du point d'arrivée. Par conséquent, dans ce dernier cas, il est inévitable d'appliquer les déductions de la

(1) Une portée dans le chaînage est de 100 mètres, elle est indiquée par la restitution des fiches du chaîneur de l'arrière au chaîneur de l'avant, la chaîne est de 10 mètres, il y a dix fiches, cela fait une erreur de 100 mètres.

probabilité pour refouler, pour ainsi dire jusqu'à leur origine, ces différences que nous avons désignées sous le nom d'*incertitudes* et auxquelles s'applique nécessairement un certain rapport de *tolérance au premier degré* (voir plus loin, page 126).

La limite de grandeur de ces incertitudes et partant de la tolérance au premier degré dépend de l'aptitude des opérateurs, de l'acuité de leur vue et de la bonté des instruments employés.

109. Quand un levé doit avoir une étendue médiocre, par exemple de 500 à 1,000 hectares, ou bien quand il ne s'étend que dans un sens, comme les plans de routes, canaux, etc., on peut procéder en toute sécurité sans triangulation proprement dite, en multipliant suffisamment les points directeurs. On peut même laisser en quelques points convenablement choisis des jalons, que l'on considère ensuite comme points directeurs pour d'autres stations. On obtient ainsi les éléments d'une espèce de triangulation qui avance en même temps que le levé, et que l'on peut calculer si l'on veut par la méthode ordinaire avant de travailler à la mise au net. Cette espèce de triangulation diffère des triangulations ordinaires en ce qu'elle a un grand nombre de bases qui se contrôlent les unes les autres, et il ne serait question que d'en effectuer le calcul avant d'arrêter les positions définitives des stations. Ce ne serait là qu'une extension du cas que l'on a considéré dans les paragraphes précédents, et on disposerait d'un plus grand nombre de combinaisons à faire pour arriver à la vérification la plus complète de toutes les opérations sans retourner sur le terrain.

110. Mais quand il s'agit d'un levé de grande étendue, soit pour le cadastre soit pour la carte d'une vaste contrée, et qu'on veut arriver à une grande exactitude d'ensemble, il est indispensable d'avoir une triangulation exacte qui s'étende en

tous sens, qui procure au géomètre les points de repère dont il a besoin pour rattacher les opérations qui se font alors en même temps sur plusieurs points.

Un avantage en cela de la nouvelle méthode sur la méthode usuelle est de n'avoir pas besoin, à beaucoup près, d'un aussi grand nombre de points trigonométriques, et de pouvoir opérer aussitôt que les signaux sont placés, sans attendre que les observations des angles soient faites, sauf à ne s'occuper de la détermination définitive des coordonnées, et de la mise au net, qu'après le travail trigonométrique fini et calculé.

Or la seule différence que cette circonstance introduit dans les opérations sur le terrain est qu'au lieu de créer des points directeurs, on se sert pour cela des signaux trigonométriques.

111. En opérant entre les points trigonométriques, on n'est pas plus gêné pour le choix des stations et des points, que dans les levés qui ne comprennent qu'une petite étendue, et on n'a pas plus de conditions à remplir quant au mode de rattachement des stations entre elles : seulement, quand on arrive près du signal trigonométrique, on y envoie la mire, et on le lève tout comme un autre point. Si c'est un clocher, une tour ou un autre édifice au centre duquel on ne puisse pas placer la mire, on le lève par intersection, on y applique le procédé du problème 6, en ayant soin de choisir pour cela trois stations parmi celles qui avoisinent le plus le point trigonométrique.

112. On aura soin de commencer, si cela se peut, par un point trigonométrique, ou bien on résoudra le problème 5 par rapport aux premières stations qu'on fera, afin d'obtenir de suite les coordonnées approchées de chacune des stations ; ou bien encore, si l'on commence très-loin des points trigonométriques, on appliquera la solution des problèmes 5 et 6.

Mais cela est nécessaire seulement quand on est pressé de tracer de suite, sur le terrain même, le figuré du travail dans le cavenas trigonométrique ; car autrement, il suffit qu'on soit arrivé aux points trigonométriques avant d'entreprendre le travail du cabinet qui doit précéder la mise au net.

113. Ce qui est le plus essentiel, c'est de prendre de chaque station des directions aux points trigonométriques visibles ; quand on en voit plusieurs, il n'est pas nécessaire de les observer tous, mais il est bien d'en choisir de préférence un des plus éloignés, et deux autres des plus proches. On verra plus loin la manière de tirer parti de ces observations. Il suffit ici d'avoir indiqué la marche de l'opération sur le terrain, de manière qu'il ne reste aucune incertitude et que tout puisse être contrôlé d'après les mêmes principes.

114. Si dans quelque lieu bas ou encaissé, ou bien dans les bois, on avait des stations d'où il fût impossible de découvrir un point trigonométrique, on choisirait alors un point directeur que l'on déterminerait à l'aide des stations successives. Si le passage du cheminement dans le lieu en question, tout en ne présentant pas à la vue les points trigonométriques, permettait cependant de choisir un point directeur très-éloigné, quoiqu'en dehors du levé à faire, on serait dispensé d'en déterminer la position, pourvu que les changements de stations aient lieu à peu près sur l'alignement du point directeur, ce qui est souvent praticable.

115. Si l'on a jugé convenable de faire faire au bureau central des observations magnétiques correspondantes, on tiendra aussi compte de l'heure à laquelle on a orienté l'instrument en commençant la station, ainsi que de l'heure de la vérification de l'orientation avant de la quitter.

CHAPITRE IX.

TOLÉRANCE ; POLYGONATION ; ÉTABLISSEMENT DES COORDONNÉES GÉNÉRALES ; EXEMPLES.

116. Les opérations que nous désignons ici collectivement du nom de polygonations constituent la méthode générale de comprobation du degré d'exactitude des résultats, la recherche et l'extirpation des erreurs proprement dites, et le système de compensation des petites incertitudes des opérations du levé ; elles conduisent à l'établissement des positions définitives, lesquelles ainsi obtenues ne présenteront plus que des incertitudes *rémanentes* (1) très-petites, comprises dans des limites de tolérance très-restreintes, et partant tout-à-fait négligeables.

117. Examinons d'abord quelle est la nature des incertitudes tant *primitives* que *rémanentes*, et quelle sera par conséquent la loi de la tolérance à accorder aux deux degrés.

On obtient sur le terrain des mesures affectées d'une incer-

(1) On a vu déjà ce qu'on doit entendre par le mot *incertitude*, on a vu aussi, § 108, qu'on doit appliquer aux incertitudes un mode rationnel de compensation, mais il ne faut pas espérer encore d'atteindre aussi la *certitude mathématique*; ce qui restera donc d'incertitude après l'application des compensations sera désigné par l'appellatif *incertitude rémanente*.

titude que nous désignerons en l'appelant primitive, laquelle dépend de la méthode d'opérer, de la précision des instruments et de l'aptitude de l'opérateur ; l'expérience a prouvé, d'accord en cela avec la théorie, que la formule qui exprime ces incertitudes, et donne par conséquent la valeur de la tolérance *au premier degré*, se compose de deux termes, dont l'un, constant, a sa raison d'être dans la manière de fixer le point sur le terrain et d'y revenir ; l'autre, proportionnel à la distance, résume l'effet de toutes les autres causes ci-dessus énumérées.

La pratique a démontré, en outre, qu'en tachéométrie on peut aujourd'hui admettre pour la tolérance au premier degré, tolérance que l'opérateur s'accorde lui-même, la formule :

$$t = 0^{m},2 + 0,002\,\mathcal{D}$$

jusqu'à l'étendue d'un kilomètre en carré, mais que cette tolérance doit décroître pour des distances plus grandes, pour lesquelles on doit admettre la formule :

$$t = 0^{m},2 + \sqrt{0,002\,\mathcal{D}} \qquad (1)$$

118. Les résultats des mesures prises sur le terrain étant soumis au mode de comprobation qui fait l'objet de ce chapitre, il en résultera la grandeur de l'incertitude qu'ils présentent à l'état brut ; ainsi, quand on mesure les trois angles d'un triangle, on doit trouver pour leur somme, mais on ne trouve jamais, deux angles droits. La différence constitue la somme algébrique de l'incertitude *primitive* de ces angles,

(1) Ce degré d'exactitude est très-facile à obtenir ; un opérateur habile dépassera rarement la moitié de cette tolérance.

mais on ne les emploie pas à l'état brut dans le calcul des côtés, on les soumet au contraire à un système de compensations qui les fait approcher de plus en plus de la vérité, sans toutefois jamais atteindre la certitude absolue d'être dans le vrai.

L'incertitude qui reste après les compensations opérées est de celles que nous désignons en les appelant incertitudes rémanentes.

Employés dans le calcul des côtés, ces angles mènent à des résultats qu'on donne pour bons, sans toutefois qu'on puisse jamais les dire mathématiquement parfaits.

119. La suite d'opérations ici décrite, entièrement refaite sur de nouvelles mesures prises sur le terrain, les compensations opérées à nouveau, les calculs faits, on obtiendra encore des résultats sensiblement différents des premiers ; c'est à ces différences que s'applique la tolérance au second degré.

La théorie des probabilités donne des règles pour compenser encore ces différences et approcher indéfiniment de la vérité mathématique, en répétant un grand nombre de fois les opérations.

Le but qu'on se propose, quand on entreprend un levé, fixe seul sous ce rapport la limite où l'on peut s'arrêter sans inconvénients, c'est-à-dire la tolérance au second degré, la tolérance que doit admettre l'inspecteur appelé à examiner un travail donné comme définitif par son auteur.

La loi mathématique des incertitudes, et partant de la tolérance au second degré, est la même que pour le premier degré, mais les coefficients numériques seront naturellement de plus en plus petits ; rien ne s'oppose (que le temps et la dépense) à la réduction presque indéfinie de cette tolérance ; l'art possède donc les moyens d'atteindre une précision suffisante pour tous les cas.

120. Les cartes agrimétriques, par exemple, quand elles sont destinées à la constitution du titre de propriété, peuvent admettre une tolérance au second degré, exprimée par

$$t = 0^m,1 + 0,001\ \mathscr{D}$$

et au delà d'un kilomètre :

$$t = 0^m,1 + \sqrt{0,001\ \mathscr{D}}$$

mais dans les villes où la propriété a une grande valeur, il faudrait réduire encore à leur moitié les coefficients numériques de ces deux formules.

Il peut y avoir d'autres opérations pour lesquelles il soit nécessaire de restreindre encore davantage la tolérance, l'art peut y arriver moyennant une bonne méthode, même avec des instruments très-ordinaires, en répétant un assez grand nombre de fois les opérations et n'adoptant les résultats moyens que d'après la théorie des probabilités sainement appliquée (1).

121. Après que l'opération sur le terrain est accomplie, si l'on n'a eu qu'une station à faire, et si rien ne décide à un choix particulier d'axes des coordonnées, il ne reste qu'à remplir, à l'aide des formules avec l'échelle logarithmique, les colonnes du registre des coordonnées. On arrive ainsi, pour une ou pour un petit nombre de stations, à un résultat semblable à celui que l'on aurait obtenu avec l'équerre d'arpenteur, en opérant sur une base orientée de l'est à l'ouest, et pour les cotes de niveau avec le niveau ordinaire. On peut donc, sans effectuer la mise au net, déterminer l'aire des diverses parcelles levées.

(1) Voir Appendice au 2e mémoire, etc.

122. Si l'on se propose aussi de parler aux yeux avec un dessin matériellement exécuté à une échelle quelconque, on effectue ce dessin sur une feuille quadrillée divisée en nombre rond de mètres à l'échelle proposée, en rapportant les points d'après leurs coordonnées. On imite ensuite le type eidographique fait sur le terrain, et, après avoir vérifié le tout, on le passe à l'encre à la manière ordinaire.

123. Si l'on a deux stations au lieu d'une, on fait d'abord, par rapport aux points de rattachement, les vérifications du § 101, et on rectifie l'orientation de la deuxième station d'après celle de la première, s'il y a lieu, c'est-à-dire qu'avant de former les coordonnées des points observés de la seconde station, on apporte aux azimuts la correction qu'on a trouvée en résolvant, pour le cas donné, le problème 1er par rapport aux deux stations. On n'altère pas pour cela les angles azimutaux observés sur le terrain et enregistrés ; mais, en leur ajoutant la correction déterminée, on les transforme en azimuts vrais qu'on écrit à leur colonne dans le registre. Après quoi, si le quadrilatère, formé par les points de rattachement et les stations, ne satisfait pas à la condition

$$\Sigma x = 0, \quad \Sigma y = 0, \quad \Sigma z = 0,$$

il ne s'en écartera cependant que d'une si petite quantité qu'on pourra la négliger. Néanmoins, on pourra évidemment bien plus approcher de la vérité en adoptant, pour la distance des deux stations, suivant les trois axes, une moyenne qui satisfasse à la condition

$$\Sigma x = 0, \quad \Sigma y = 0, \quad \Sigma z = 0.$$

C'est là ce qu'on appelle compenser les résultats (1).

124. On se donnera ensuite un système d'axes, auquel on rapportera toutes les coordonnées. Si l'on n'est en cela lié par aucune condition, on les choisit de manière que toutes les coordonnées soient positives ; ce qu'on obtient en fixant l'origine à l'angle à droite et au bas de la feuille sur laquelle le dessin sera fait. Cela revient numériquement à ajouter une quantité constante à toutes les coordonnées.

L'opération du dessin, qui vient après, rentre absolument dans les règles ordinaires et ne présente rien de particulier.

125. Augmentant encore le nombre de stations, et passant au cas considéré dans le chapitre précédent, la nature des opérations de cabinet ne change pas, mais les moyens de vérification deviennent plus nombreux ; et si l'on veut, pour acquérir la plus grande certitude, les appliquer tous, il devient nécessaire de suivre un certain ordre pour arriver promptement au but, sans se perdre dans des calculs inutiles. Voici de quelle manière il convient de procéder.

126. Premièrement, on vérifie la condition des quadrilatères dont il est parlé chapitre VIII. Si on la trouve remplie dans les limites de la tolérance qu'on s'est donnée au premier degré, on adopte provisoirement pour distance en x, en y et en z, entre les stations successives, la moyenne de celles qui résultent de deux ou de plusieurs points de rattachement comparés ; ce qui rend alors satisfaite dans chaque quadrilatère la condition

$$\Sigma x = 0, \quad \Sigma y = 0, \quad \Sigma z = 0.$$

(1) La limite de grandeur permise pour négliger ou pour compenser cette petite quantité constitue la *tolérance au premier degré*. Voir Appendice au deuxième mémoire, etc., déjà cité.

127. Si, au contraire, on découvre par là des déviations d'orientation, on cherche la correction par les méthodes précédemment données, et on corrige ensuite les positions relatives des stations qui ont présenté cette sorte de différence.

128. La correction d'orientation étant appliquée, on forme les coordonnées partielles de tous les points de rattachement et on passe à leur comparaison, qui conduit, après les moyennes prises, à des *distances orthogonales* entre les stations comparées, telles que l'*incertitude rémanente* dont elles peuvent encore être affectées se trouve au-dessous de la limite de tolérance au premier degré.

Il arrive parfois que deux stations ne sont rattachées directement entre elles que par un seul point, mais elles le sont encore indirectement par l'intermédiaire d'une ou deux autres stations (ce cas se présente assez souvent dans les forêts). Ce qui est à faire pour arriver néanmoins à la comparaison des résultats de ces sortes de rattachements est assez simple pour ne pas exiger ici un développement spécial.

Les polygones formés de quatre, six ou huit côtés, aboutissant à deux, trois ou quatre stations et autant de points de rattachement, sont appelés *anneaux*.

129. Tant que rien ne manifeste dans quel sens et dans quelle quantité chacune des deux déterminations de la position relative des deux stations diffère de la véritable, il est conforme à la règle des probabilités d'adopter la moyenne arithmétique ; mais, si une nouvelle condition vient s'introduire dans le problème et modifier cette probabilité, il faut en tenir compte et adopter, au lieu de la moyenne arithmétique, celle des valeurs intermédiaires, ou *même latérales*, aux valeurs primitivement obtenues, qui réunit la plus grande probabilité. On dit *même latérales*, bien entendu dans les limites des moin-

dres déviations qu'on est convenu de tolérer dans les opérations élémentaires. Il est facile de démontrer, d'ailleurs, que, dans bien des cas, et notamment dans l'application du problème sixième pour le cas où l'on dispose de trois rayons, qu'on combine deux à deux pour avoir trois résultats se contrôlant l'un l'autre, il arrive fréquemment que le lieu géométrique vrai cherché est *latéral* à la moyenne des résultats partiels, c'est-à-dire qu'il est en dehors du petit triangle qui résulterait des intersections mutuelles des rayons pris deux à deux, triangle dont le centre est ordinairement, mais par erreur, adopté par les praticiens, comme le lieu vrai du point cherché.

Si l'on avait fait un *levé* composé de plusieurs stations, à la suite les uns des autres, ne se rattachant que deux à deux, ne tenant et n'aboutissant à rien de déterminé à l'avance, ainsi qu'il arrive souvent dans les levés des routes, canaux, etc., on n'aurait pas d'autre parti à prendre que d'adopter les moyennes successives. Mais si la suite des rattachements est telle que le cheminement se replie sur lui-même, il se forme alors des polygones dont les coordonnées successives d'angle à angle sont en partie données par les opérations précédentes, et qui doivent en même temps satisfaire à la condition

$$\Sigma x = 0, \quad \Sigma y = 0, \quad \Sigma z = 0.$$

Cette nouvelle condition étant mise à l'épreuve, on ne pourra trouver que des différences qui seront au-dessous de la tolérance adoptée au premier degré.

130. On a dit dans le paragraphe précédent que le vrai n'est pas toujours dans la moyenne arithmétique et qu'il faut quelquefois adopter une valeur *latérale* à la moyenne; nous

allons indiquer par quelques exemples comment cela peut arriver, afin de mettre en garde les opérateurs contre l'abus des moyennes, et leur indiquer comment ils pourront distinguer nettement l'influence des différentes causes qui produisent quelquefois ce phénomène géométrique.

PREMIER EXEMPLE.

Supposons par exemple une ligne polygonale rattachée par un bout à un point trigonométrique, dans laquelle toutes les stations sont désorientées d'une même quantité $\delta\theta$; ce cas pourrait avoir lieu si un cheminement longeait un filon ferrugineux polarisé, ou bien si l'amplitude de la déclinaison sur l'instrument se trouvait altérée par quelque accident.

Il est évident que dans ce cas les quadrilatères de rattachement ne manifesteraient aucune erreur, mais que la ligne polygonale se trouverait déviée de telle manière, qu'on aurait d'après le *huitième problème*

$$\begin{aligned} dx &= - \ \Sigma y \sin \delta\theta \\ dy &= + \ \Sigma x \sin \delta\theta \\ dz &= \text{zéro.} \end{aligned}$$

L'erreur en z serait nulle parce que la différence de niveau ne dépend pas de l'azimut.

Si deux lignes polygonales partant des deux points trigonométriques, affectées de la même erreur $\delta\theta$, mais exactes sous tous les rapports, aboutissent à un même point, le lieu vrai de ce point se trouverait évidemment sur l'intersection de deux arcs de cercle, dont les centres seraient dans les points trigonométriques respectifs de départ et dont les rayons seraient égaux aux longueurs rectilignes respectives des deux lignes polygonales, longueurs qu'on pourrait déterminer en y appliquant la solution du problème premier : l'intersection de ces deux arcs serait généralement *latérale* au point que la moyenne arithmétique indiquerait, et cette moyenne ne serait acceptable que dans le cas où le point qu'il s'agit de déterminer se trouverait par hasard placé entre les deux points trigonométriques et à peu près au milieu de la ligne qui les joint.

DEUXIÈME EXEMPLE.

Supposons maintenant une ligne polygonale dont les orientations sont toutes parfaitement exactes, mais dans laquelle, soit par un dérangement survenu au micromètre, soit par toute autre cause, les distances sont affectées d'une erreur constante dont le rapport est m ; cette ligne polygonale satisfera exactement à toutes les conditions des rattachements, mais elle donnera évidemment sur le point auquel elle aboutit une erreur exprimée par :

$$\delta x = m\Sigma x$$
$$\delta y = m\Sigma y$$
$$\delta z = m\Sigma z.$$

Et, si deux lignes polygonales parties de points trigonométriques aboutissent à un même point à déterminer et sont affectées de la même espèce d'erreur, c'est encore un cas où le vrai ne se trouve pas généralement dans le point correspondant à la moyenne arithmétique : cette moyenne n'est acceptable que pour autant que la position du point à déterminer est intermédiaire et à peu près au milieu de l'alignement des points trigonométriques de départ ; dans le cas contraire, le vrai se trouve par rapport à la moyenne arithmétique *plus loin ou plus près*

de la ligne qui joint les deux points de départ, tandis que, dans le cas de l'exemple précédent, le vrai se trouve à *droite* ou à *gauche* de la position représentée par la moyenne arithmétique.

En général quand une *centrale* à déterminer est placée dans l'intérieur du triangle ou du quadrilatère formé par les points trigonométriques desquels on la fait dépendre, la moyenne arithmétique pourra être adoptée avec confiance : dans le cas contraire qui, à la vérité, ne se présente que vers les limites de l'opération, il est important de bien vérifier les orientations des stations non-seulement de proche en proche par la comparaison des points de rattachement, mais encore par les directions aux points trigonométriques et par le soleil si on l'a observé, afin de distinguer nettement la part de déviation qui peut provenir des orientations, de celle qui peut avoir d'autres causes.

Il faut surtout ne pas oublier que les *incertitudes rémanentes* (1) qu'il s'agit d'éliminer pourraient dans certains cas paraître nulles, si on se bornait à un seul genre d'épreuve, malgré qu'il existe une désorientation considérable.

Supposons par exemple que, vers les confins de la carte levée, on ait entouré d'un anneau de stations un étang ou une petite forêt impénétrable et que l'une ou l'autre des causes supposées dans les exemples précédents ait eu lieu alors, l'anneau de station pourra bien n'avoir manifesté aucune erreur à la vérification des rattachements et satisfaire même à la condition :

$$\Sigma x = 0$$
$$\Sigma y = 0$$
$$\Sigma z = 0$$

sans que pour cela il puisse être considéré comme exact : affecté

(1) Voir Appendice au deuxième mémoire déjà cité.

de l'influence que suppose l'exemple premier, l'anneau serait déplacé circulairement autour du point par lequel il est rattaché à l'opération principale : affecté de la deuxième espèce d'erreur, il serait trop petit ou trop grand.

131. Bien que ces combinaisons fortuites extrêmes qui servent de base à ces raisonnements soient excessivement rares dans la pratique, il n'en faut pas moins conclure d'utiles avertissements pour le géomètre opérateur sur le choix de ses points de rattachements et sur l'importance des points directeurs et des directions aux points trigonométriques, et pour les vérificateurs sur le choix des lignes sur lesquelles il convient de faire porter les vérifications, ainsi que sur la manière d'établir les moyennes pour leur donner le plus grand poids probable.

Quand par exemple une ligne polygonale arrive d'un point trigonométrique à un autre point trigonométrique et que les déviations en x et en y sont de signe contraire, il y a toujours lieu à examiner si elles sont dues tout ou partie à une influence locale magnétique, par conséquent à réviser les orientations de toutes les stations par les directions aux points trigonométriques éloignés, et, si sur la troisième coordonnée z on trouve en même temps une déviation nulle ou très-petite, la probabilité de l'influence magnétique acquiert un très-grand poids.

Par des considérations qui découlent de semblables raisonnements, le geomètre vérificateur pourra toujours arriver non-seulement à découvrir toutes les *erreurs* proprement dites, si erreurs il y a, mais encore à se donner la certitude quasi-mathématique que les résultats qu'il admet sont aussi près du vrai qu'il est possible et probable d'y arriver dans les opérations de ce genre.

132. Si l'on a des points non trigonométriques directeurs pour rectifier les orientations, on détermine leurs positions

par les observations voisines, comme on l'a déjà expliqué; on forme ensuite les distances orthogonales de chaque station au point directeur le plus éloigné qu'on a, et on s'en sert pour obtenir la correction d'orientation ; ce n'est qu'après avoir appliqué cette correction que l'on procède à l'ensemble des comprobations et des compensations ici développées qu'on désigne collectivement par le nom de *polygonation*.

133. Après avoir arrêté ainsi toutes les distances orthogonales des stations entre elles, on se donne le système d'axes auquel on doit tout rapporter : et, après avoir formé les coordonnées de tous les points, on en donne le registre au dessinateur, qui opère à la manière ordinaire.

134. Les opérations du cabinet, qui précèdent le dessin, peuvent donc se résumer ainsi :

1° La comparaison des points de rattachement pour découvrir les déviations d'orientation, s'il y en a, ainsi que les erreurs réelles que le géomètre pourrait avoir commises sur le terrain ;

2° La correction des orientations, s'il y a lieu ;

3° La polygonation ou fixation définitive des coordonnées des stations, par rapport aux axes principaux adoptés ;

4° Le calcul des coordonnées définitives de toutes les stations et de tous les points du levé.

135. Les points isolés, qui ne sont levés que d'une seule station, sont établis par les éléments de l'observation complète, c'est-à-dire la distance, l'azimut, l'apozénith ; la distance est éprouvée par les rapports des intervalles du micromètre, ainsi qu'on l'a vu au § 29. L'azimut et l'apozénith sont mis à l'abri de toute erreur grossière par le type eidographique, et des erreurs d'estime par la double lecture, ainsi qu'on le verra dans la description spéciale de l'instrument.

Les coordonnées des stations rapportées aux axes principaux étant données, on y ajoute respectivement les coordonnées partielles de tous les points levés, et on obtient ainsi leurs coordonnées rapportées aussi aux axes principaux.

Quand il s'agit d'une grande étendue de pays et qu'une triangulation a précédé le levé, la seule et unique modification, si c'en est une, que doivent subir les opérations sur le terrain, c'est qu'il faut se relier aux points trigonométriques, comme à tout autre point, par des observations complètes ou bien par des observations d'intersection. Mais pour le travail de cabinet, c'est bien différent en ce qui regarde la polygonation.

136. Supposons qu'on ait levé, dans un triangle d'environ 5,000 mètres de côté, un réseau de soixante à quatre-vingts stations (c'est à peu près ce qu'on fait dans un espace pareil), et admettons qu'on doive procéder à la détermination des coordonnées définitives de toutes les stations, on s'y prendra pour cela de la manière suivante :

Premièrement, on s'assurera, par la comparaison des points de rattachement des stations, qu'aucune erreur n'a été commise dans les levés, et de plus que toutes les orientations sont bonnes. On rectifiera celles qui ne se trouvent pas exactes, soit par le problème 1er, soit en cherchant la correction par les directions aux points trigonométriques observés ; on donnera pour cela la préférence aux plus éloignés. Il faut, pour y arriver, connaître les coordonnées de chaque station par rapport aux axes principaux ; mais il suffit d'obtenir approximativement ces coordonnées par des additions de proche en proche des distances orthogonales non corrigées, comme on l'a déjà démontré, ou même de les prendre au compas sur la feuille de polygonation ou sur la synérographie au deci-millième, si on l'a tracée.

On voit par là que, sur le terrain, il pourrait bien être indifférent de commencer près du point trigonométrique ou non ; mais qu'au cabinet il faut nécessairement partir des points trigonométriques.

Ensuite, on observera que si ΔX, ΔY, ΔZ expriment les distances en X, en Y, et en Z entre deux points trigonométriques, et si ces deux points sont réunis par un cheminement polygonal d'un nombre quelconque de côtés, dont les coordonnées successives de proche en proche sont x', y', z', x'', y'', z'', etc., on devra trouver :

$$\Sigma x = \Delta X$$
$$\Sigma y = \Delta Y$$
$$\Sigma z = \Delta Z.$$

137. Si la vérification des conditions dont il a été question dans les paragraphes précédents n'a dévoilé aucune erreur, cette dernière condition ne saurait se trouver trop mal remplie ni hors des limites de la tolérance au premier degré ; d'où il suit que le plan et le relief du terrain, tracés sans aucune considération ultérieure, ne sauraient être que bons. Mais en tachéométrie tout est numérique, et rien n'est si facile que de répartir, suivant les lois de la probabilité, des différences minimes résidues qu'on rencontrerait, pour approcher ainsi de plus en plus de la vérité par le système des moyennes numériques, qui ne diffèrent que par leur plus grande précision des moyennes graphiques qu'on prend, à vue, au compas, quand on rapporte les levés faits par les méthodes ordinaires.

On choisit pour cela un point de station à peu près central dans l'espace levé, et on en obtient les coordonnées par l'addition successive des distances orthogonales des stations qui composent un cheminement polygonal entre cette station centrale et un point trigonométrique, et on y ajoute les coordonnées du point de départ. Cela conduit, pour la station centrale, à trois coordonnées α', β', γ'. On fait la même chose en partant d'un second et d'un troisième point trigonométriques, et d'un quatrième, si l'on est dans un quadrilatère, et on obtient d'autres valeurs, α'', β'', γ'', etc., peu différentes des premières. Comme les incertitudes qui restent à ce point d'avancement du travail sont déjà nécessairement dans les limites de la tolérance au premier degré, on sera sûr d'atteindre le plus près possible du vrai, en adoptant, pour les coordonnées de la station centrale, la moyenne des trois ou des quatre résultats ainsi obtenus.

Une station centrale ainsi établie par des cheminements polygonaux, qui partent directement des points trigonométriques, sera désignée par l'appellatif de *centrale de premier ordre* : les centrales de premier ordre peuvent ensuite concourir entre elles et avec les points trigonométriques à la détermination d'autres stations qui seraient à leur tour centrales dans les espaces devenus plus petits et qu'on désignera de l'appellatif *centrales du deuxième ordre*, et ainsi de suite, de manière que toutes les stations se trouveront déterminées de position par les moyennes de tous les cheminements qui les relient en tous sens.

138. Quand un levé s'étend seulement en longueur et très-peu en largeur, ainsi qu'il arrive pour les projets de chemins de fer, canaux, etc., on se trouve quelquefois n'avoir qu'une ligne de stations entre deux points trigonométriques; alors évidemment la détermination des *centrales* de tous les ordres revient à la répartition des *incertitudes rémanentes* en x, en y, en z, sur la ligne polygonale unique ; l'expérience a prouvé que la répartition proportionnelle au nombre des côtés, non à leurs longueurs, est la plus convenable.

139. Avec les anciens instruments d'arpentage, la méthode qu'on suit pour le remplissage des triangles d'une grande opération consiste à procéder du grand au petit par des triangulations de troisième ordre faites au graphomètre ou même des triangulations graphiques faites à la planchette, soit encore par des lignes polygonales de plusieurs ordres qu'on lève à la boussole : cette manière d'opérer exige d'abord que les points trigonométriques des ordres supérieurs soient calculés et donnés aux géomètres avant de les mettre en campagne ; ceux-ci doivent ensuite faire et rapporter leur triangulation ou leurs lignes polygonales principales ou de premier ordre, et doivent les avoir arrêtées sur la mise au net, avant de pouvoir s'en servir comme point de départ pour y rattacher les opérations de l'ordre suivant, ce qui force les opérateurs à alterner entre les opérations de campagne et celles de cabinet et à perdre souvent ainsi une partie précieuse de la saison ; et de toute manière reconnaissance, triangulation, lignes polygonales de deux ordres au moins, piquetages, périmètres des parcelles et levé des détails, sont autant d'opérations qui doivent avoir lieu et qui obligent à battre autant de fois à peu près tout le terrain, avant d'avoir la planimétrie seulement.

Si ensuite on demande les nivellements, de nouvelles opérations ont lieu pour profils en long, profils en travers, nouveaux piquetage et chaînage, qui exigent que les opérateurs parcourent une ou deux autres fois le terrain en tous sens.

Les procédés tachéométriques au contraire permettent de tout recueillir d'un seul coup en ne battant qu'une seule fois le terrain. Les triangulations secondaires, les lignes polygonales de tous les ordres, se composent d'éléments qui, en tachéométrie, ne se distinguent pas (du moins sur le terrain) du levé de détail ; le nivellement se trouve tout fait, sans qu'il en coûte, et n'est pas borné à telle ou telles lignes de profil en long ou en travers ; il s'étend en tous sens sur toute la surface du terrain.

Ce qu'on appelle les polygonations en tachéométrie ne sont donc pas chose nouvelle, seulement on les fait numériquement dans les bureaux ; on y peut employer des personnes autres que celles qui sont sur le terrain et qui peuvent découvrir, sans connaître les localités, toutes les erreurs que les opérateurs pourraient avoir commises. Il n'y a que les omissions qui ne peuvent pas se reconnaître sans aller sur le terrain.

Cette manière d'instituer les polygonations permet de pousser l'exactitude plus loin, en répartissant, suivant des lois conformes aux probabilités, les petites *incertitudes* qu'on vient à découvrir, et qui échapperaient aux procédés graphiques ; ou qu'on y ferait disparaître par ce qu'on appelle le *coup de pouce*, qui consiste à faire supporter arbitrairement aux derniers côtés d'un cheminement la somme des déviations résidues partielles de tout le cheminement, par conséquent à convertir sciemment ces petites déviations, imperceptibles tant qu'elles sont isolées, en une véritable erreur locale par leur accumulation en un seul point.

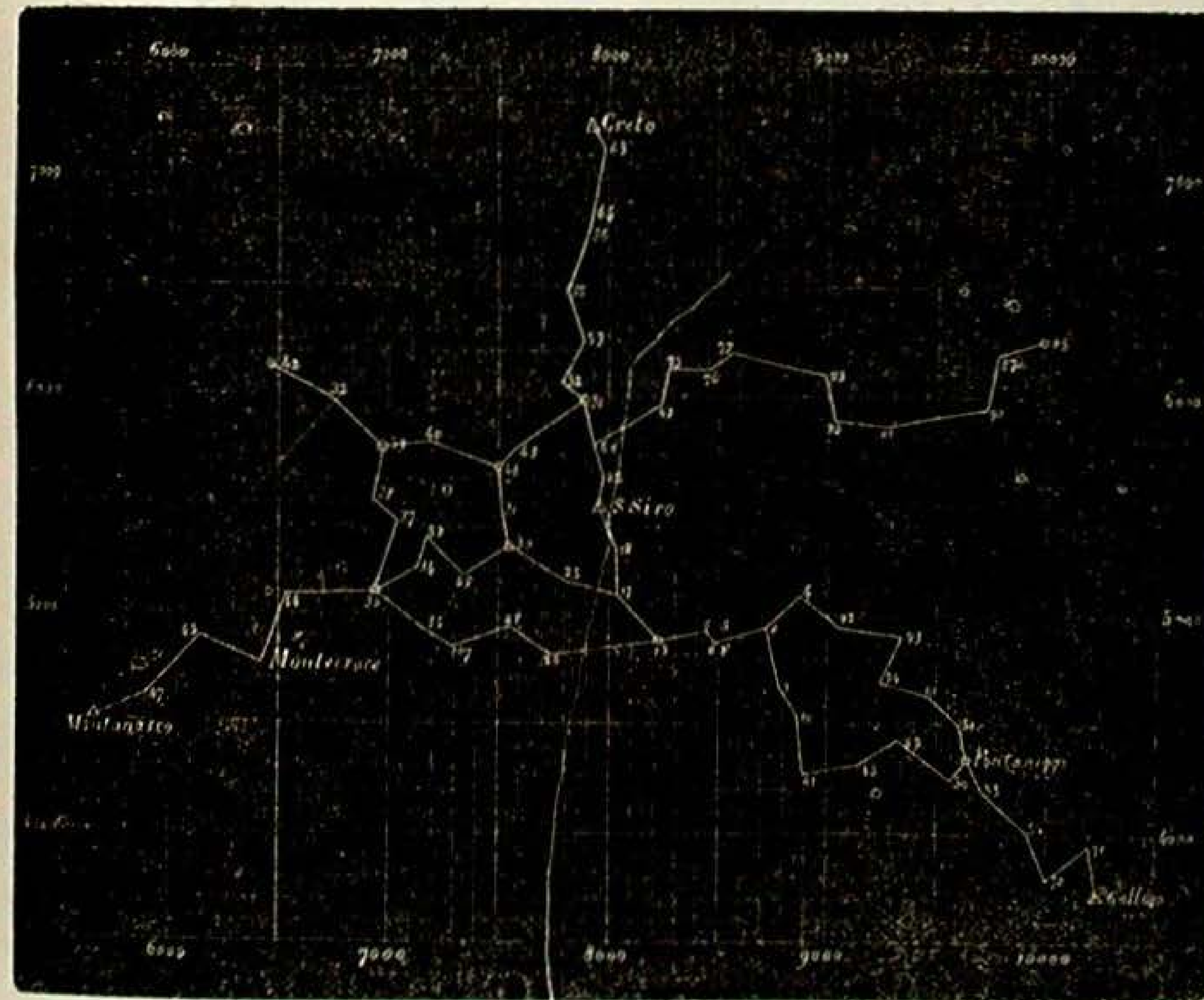
La polygonation en tachéométrie a, au contraire, pour but et pour propriété de ne laisser échapper aucune *erreur* proprement dite ; de la reconnaître, de la confiner en son véritable lieu pour l'y corriger ; de séparer nettement les erreurs des *incertitudes* localement imperceptibles, qui ne deviennent sensibles qu'à la longue, et de renvoyer pour ainsi dire ces dernières à leurs sources dans la même proportion qu'elles en sont dérivées.

140. L'exemple de polygonation, *représenté fig.* 26, est puisé dans un levé réel fait en pays très-difficile, celui du

duché de Gènes et plus précisément dans la vallée du Bisagno.

Le triangle géodésique qui servira ici d'exemple a un sommet sur une culmination absolue du *displuvium* primordial de l'Apennin appelée ***Monte-Creto*** ; les deux autres sommets *Gallego* et ***Montanasco*** sont de l'autre côté de la vallée, sur un massif de montagnes qui s'étend au sud jusqu'à la mer.

Fig. 26.



Les positions de ces signaux données par les opérations trigonométriques sont

	X	Y	Z
Gallego	— 10219,6	+ 3715,8	+ 650,0
Creto	— 7919,6	+ 7238,9	+ 618,9
Montanasco	— 5644,3	+ 4507,0	+ 335,3

On ajoutera ici, pour compléter l'exemple, deux centrales de premier ordre dérivées de deux des triangles latéraux :

42.	— 6472,1	+ 6134,8	+ 219,4
86.	— 9985,7	+ 6259,7	+ 371,1

On suppose dans ce qui va suivre que la tolérance au premier degré accordée soit réglée par les formules :

$$t = \mathcal{C} + m\,\mathcal{D} \qquad \text{et} \qquad t = \sqrt{m\,\mathcal{D}}$$

dans lesquelles on fait

$$\mathcal{C} = 0{,}20 \qquad m = 0{,}002 \text{ (1)}$$

(1) Voir l'Appendice au 2me mémoire déjà cité.

Du registre général de vérification des anneaux de rattachement, on déduit les suivants :

DISTANCES ORTHOGONALES BRUTES

de	à	X		Y		Z	
Gallego	70	23	4	30	4	11	8
70	71	7	0	208	2	90	0
71	72	195	0	151	2	80	7
72	55	102	2	205	9	67	0
55	53	187	4	180	7	81	5
53	Fontaneggi	75	5	154	4	13	1
Fontaneggi	51	43	4	153	0	53	7
51	88	164	5	134	4	59	3
88	94	193	2	56	9	53	8
94	93	86	9	215	4	51	5
93 Font.	92 Font.	273	0	41	6	2	5
92	4	173	3	145	3	20	3
4	8	164	6	150	0	22	6
8	6 Font.	235	7	55	1	2	9
6 Font.	6 Strop	45	5	30	6	1	5
6 Strop	15	231	4	17	6	15	2
15	17	167	5	200	8	22	9
17	18	2	9	202	7	22	2
18	S. Siro	84	1	181	6	59	4
S. Siro	22	35	9	131	3	8	9
22	48	47	0	167	8	91	6
48	51	43	1	188	5	101	5
51	43	323	5	224	0	66	7
43	46	72	5	63	1	39	5
46	40	305	7	105	3	43	3
40	39	232	0	25	5	15	5
39	38	36	9	246	2	84	5
38	37	108	3	91	2	14	8
37	36	88	5	334	3	54	8
51	48	43	1	188	5	101	5
30	31	34	1	156	5	27	3
31	46	11	6	216	6	81	0
42	32	269	2	159	9	7	9
32	39	221	6	211	1	11	7
46	50	305	6	106	0	42	8
17	25	213	0	47	4	4	0
75	49	36	7	152	8	68	6
25	30	279	1	165	8	46	6
Montanasco	47	251	2	107	6	11	9
47	45	235	2	284	6	14	2
45	Monte-Croce	290	5	118	3	74	4

DISTANCES ORTHOGONALES BRUTES

de	à	X		Y		Z	
Monte-Croce	44	108	8	314	6	224	9
44	36	416	1	2	8	96	1
36	34	188	5	115	5	56	5
34	33	49	6	144	1	44	0
33	29	156	9	166	9	38	3
29	30	206	2	125	8	42	6
Creto	63	58	6	102	9	48	2
63	64	149	5	286	6	10	0
64	56	73	9	101	2	79	8
56	55	87	0	287	6	46	7
55	53	82	7	227	6	27	5
53	52	102	9	163	2	18	1
52	51	101	6	98	8	100	0
Fontaneggi	50	83	1	105	6	45	5
50	89	233	2	181	1	62	0
89	43	178	4	112	2	35	7
43	41	250	0	20	4	9	5
41	10	37	1	249	5	23	7
10	9	70	5	142	2	41	0
9	8	73	4	261	5	23	7
15	26	461	1	84	4	11	2
26	27	190	3	145	6	2	3
27	167	264	3	106	6	13	1
167	35	122	8	80	1	1	0
35	36	221	0	160	0	2	6
86	87	206	1	62	3	20	2
87	90	52	1	251	2	34	2
90	91	460	3	79	6	10	2
81	92	248	5	29	6	63	6
92	93	23	8	191	7	57	9
93	77	438	7	104	7	61	4
77	76	107	2	70	0	16	1
76	75	175	5	6	3	89	0
49	48	197	5	180	2	7	1

A l'inspection de la figure représentant l'ensemble de ces rattachements, on peut voir qu'il convient de choisir pour centrale de premier ordre le point de station 15 et successivement les 51, 36, 30, 46, 59, etc., pour des centrales des ordres suivants.

L'exemple sera assez complet en s'arrêtant dans cet ordre à

la station 59 ; on ajoutera néanmoins encore le point de S. Siro, point qui est le centre d'une boule qui surmonte le clocher du village de ce nom.

Les cheminements suivis pour déterminer la position définitive de la station 15, centrale du premier ordre, sont les suivants.

Détermination de la station 15 comme centrale de 1^er^ ordre en partant de Gallego.

CHEMINEMENTS

Sommets	X +		X −		Y +		Y −		Z +		Z −	
A Gallego			10219	6	3715	8			650			
70	23	4			30	4					11	8
71			7	0	208	2					90	0
72	195	0					151	2			80	7
55	102	2			205	9					67	0
53	187	4			180	7					81	5
Fontaneggi	75	5			154	4					13	1
51	43	4			153	0					53	7
88	164	5			134	4					59	3
94	193	2			56	9					53	8
93			86	9	215	4					51	5
92	273	0			41	6					2	5
4	173	3			145	3			20	3		
8	164	6					150	0			22	6
6 Fontaneggi	235	7					55	5			2	9
6 Stroppa	45	5			30	6					1	5
15	231	4					17	6	15	2		
	2108	1	10313	5	5272	6	373	9	685	5	591	9
			2108	1	373	9			591	9		
			8205	4	4898	7			93	6		

La même en partant de Creto :

CHEMINEMENTS												
Sommets	X				Y				Z			
	+		−		+		−		+		−	
B Creto			7919	6	7238	9			618	9		
63			58	6			102	9			48	2
64	149	5					286	6			10	0
56			73	9			101	2			79	8
55	87	0					287	6	46	7		
53			82	7			227	6			27	5
52	102	9					163	2			18	1
51			101	6			98	8			100	0
48			43	1			188	5			101	5
22			47	0			167	8			91	6
S. Siro	35	9					131	3	8	9		
18			84	1			181	6			59	4
17			2	9			202	7			22	2
15			167	5			200	8			22	9
	375	3	8581	0	7238	9	2340	6	674	5	581	2
			375	3	2340	6			581	2		
			8205	7	4898	3			93	3		

La même en partant de Montanasco :

C Montanasco												
			5644	3	4507	0			335	3		
47			251	2	107	6					11	9
45			235	2	284	6					14	2
Monte-Croce			290	5			118	3	74	4		
44			108	8	314	6					224	9
36			416	1			2	8			96	1
35			221	0			160	0	2	6		
167			122	8			80	1	1	0		
27			264	3	106	6			13	1		
26			190	3			145	6	2	3		
15			461	1	84	4			11	2		
			8205	6	5404	8	506	8	439	9	347	1
					506	8			347	1		
					4898	0			92	8		

Le résultat de ces trois opérations conduit pour la position de la station 15 aux trois valeurs suivantes :

	$\Sigma x + X$	$\Sigma y + Y$	$\Sigma z + Z$
Par Gallego.	8205,4	4898,7	93,6
Par Creto.	8205,7	4898,3	93,3
Par Montanasco. . . .	8205,6	4898,0	92,8
Somme	24616,7	14695,0	279,7
Moyenne	X = 8205,6	Y = 4898,3	Z = 93,2

Les développements respectifs de ces trois cheminements et les tolérances respectives admises au premier degré sont :

Par Gallego.	Σ D = 3300^m	t = 2^m,57
« Creto.	2800	2 ,36
« Montanasco	3000	2 ,45

Les écarts des résultats partiels comparés à la moyenne et partant les diagonales des parallélépipèdes correspondants formés par les trois déviations en X, en Y et en Z sont :

	en X	en Y	en Z	diagonales
Par Gallego.	0^m,2	0^m,4	0^m,4	0^m,60
« Creto	0 ,1	0 ,0	0 ,1	0 ,14
« Montanasco	0 ,0	0 ,3	0 ,4	0 ,50

toutes trois considérablement inférieures à la tolérance *accordée* ; la position ci-dessus est donc adoptée pour bonne.

En opérant de même pour les stations 51, 36, 30, 39, 46 et pour S. Siro, on arrive aux positions définitives contenues dans le tableau suivant :

Extrait du registre des positions définitives de la carte du duché de Gênes.

POSITIONS DÉFINITIVES							
DÉSIGNATION	X		Y		Z		OBSERVATIONS
15 Cent. de 1er ordre	—8205	6	+3898	3	+ 93	2	
51 » 2me »	—7896	7	+5971	2	+ 381	5	
36 » 2me »	—6946	0	+5092	6	+ 62	7	
30 » 3me »	—7546	5	+5311	5	+ 167	1	
39 » 3me »	—6963	0	+5764	3	+ 216	5	
46 » 4me »	—7500	7	+5684	5	+ 275	4	
S. Siro.	—7951	0	+5483	5	+ 197	5	Sommet du clocher

La station 51 a été déterminée comme centrale de deuxième ordre par rapport aux stations 42, 86, 15 déjà déterminées et par rapport au point trigonométrique *Creto*.

La station 36 a été déterminée comme centrale de deuxième ordre en partant des stations 15 et 51, et du point trigonométrique *Montanasco*.

La station 30 a été déterminée comme centrale de troisième ordre par rapport aux stations 36, 51, 15 déjà déterminées.

La station 39 a été déterminée comme centrale de troisième ordre par rapport aux stations 36, 51, 42.

La station 46 a été déterminée comme centrale de quatrième ordre en partant des stations 39, 51, 30.

La position du point de S. Siro, enfin, a été déterminée en partant des stations 15 et 51.

141. Tous les calculs relatifs aux polygonations sont, comme on le voit, de la plus grande simplicité, et n'exigent que l'emploi de l'arithmétique élémentaire. Il est cependant essentiel

de mettre beaucoup d'ordre dans la tenue des cahiers, afin d'apercevoir plus facilement les fautes numériques que l'on pourrait avoir commises, mais qui ne sauraient passer inaperçues, vu le nombre de combinaisons dans lequel doivent entrer toutes les stations. Il sera donc à propos de préparer des modèles imprimés à l'avance, où l'on n'aura plus qu'à inscrire les nombres dans leurs colonnes respectives (1).

142. Le choix des stations centrales et des cheminements que l'on doit employer dans les polygonations peut être facilité en traçant *à vue* et à petite échelle une figure démonstrative de l'ensemble du réseau. C'est avec cette figure sous les yeux que l'on choisit promptement les stations et les cheminements qui conviennent pour la polygonation, c'est par là qu'on peut reconnaître les erreurs matérielles qui pourraient avoir été commises en équivoquant sur les points de rattachement. Cette figure est une espèce de tableau synoptique de toutes les opérations de vérification auxquelles on peut vouloir soumettre le travail, et peut servir de guide au jugement par lequel on parvient à répartir les moindres différences résidues, de la manière la plus conforme à la probabilité des événements qui peuvent les avoir motivées, c'est-à-dire à appliquer au levé de détails le même système de compensations qu'on applique aux grandes opérations géodésiques. C'est cette feuille que nous appelons feuille de polygonation ou feuille synairéographique des opérations.

143. Quand on dirige une grande opération qu'une triangulation a précédée, on demande aux opérateurs, chacun pour sa section, le tracé de la polygonation de tout le travail de la semaine. Le géomètre la trace sur des feuilles préparées pour

(1) Voir chap. XI.

contenir le travail d'un ou deux mois, et il envoie à la fin de chaque semaine au bureau de la directio n un calque des stations qu'il a ajoutées audit tracé pendant la même semaine ; cela facilite aux géomètres vérificateurs la construction de la carte synairéographique qui doit leur servir de guide dans leurs opérations.

144. L'échelle approximative qu'il convient d'adopter pour ce travail auxiliaire est le déci-millième ou même le demi-décimillième, mais il faut moins s'attacher à l'exactitude linéaire qu'à démontrer clairement, par les numéros d'ordre de référence au carnet, la position relative des stations et leur mode de rattachement.

145. Il n'est douteux pour personne qu'il serait avantageux que les levés et nivellements qui se font pour tous les services spéciaux fussent rattachés entre eux et à la grande triangulation du pays, mais les points trigonométriques sont ordinairement des sommets d'édifices très-élevés ou des signaux construits sur des hauteurs, et ces points sont inaccessibles au mode de nivellement ordinaire.

Par la nouvelle méthode, au contraire, toutes les opérations sont rattachées suivant les *trois axes* aux points trigonométriques près desquels on passe si souvent, et qui, étant euxmêmes rapportés au niveau de la mer, permettent de rapporter tous les nivellements à ce même niveau.

Les repères auxquels on rattache les nivellements partiels ne seront plus, comme d'habitude, des seuils de porte d'église ou autres points analogues qu'il faut aller chercher péniblement quand il est nécessaire de rattacher des opérations les unes aux autres ; ce sont les points trigonométriques, ce sont les sommets des clochers, tours et autres édifices qui sont employés comme repères ; plusieurs de ces points sont souvent

visibles en même temps d'un ou plusieurs points d'une ligne d'opérations, et fournissent ainsi des moyens de vérification aussi fréquents que précieux.

Les positions définitives de toutes les stations, étant ainsi déterminées on procède à l'établissement des coordonnées générales de tous les points du levé.

On fait pour cela par rapport à chaque station la somme algébrique des petites coordonnées (calculées par rapport au centre de l'instrument) avec les coordonnées définitives de la station qu'on écrit dans le registre : ce registre ne présente pas seulement la position de tous les points du levé, comme on vient de le dire, mais encore celle de toutes les stations et des points trigonométriques.

C'est de ce registre, et non des plans, qu'on tire les éléments du calcul des aires des trapèzes pour servir au calcul des contenances des parcelles, les éléments géométriques des bulletins de propriété et ensuite du grand livre parcellaire, ainsi que tous les éléments de précision quelconques nécessaires à tous les services.

CHAPITRE X.

DESSINS DES PLANS, TRACÉ DES COURBES DE NIVEAU.

146. A l'exception des croquis dessinés à vue sur le terrain, et du canevas-guide des polygonations, le travail n'a rien présenté jusqu'ici de graphique, et pourtant il est déjà substantiellement complet sous tous les rapports; il est apte à tous les services, il ne lui manque que cette indispensable manifestation synoptique qui est le propre du dessin, et qui seule peut donner instantanément une idée complète de la grandeur, de la position, de la configuration de toutes les parties du levé et de la bosse du terrain.

147. Les dessins agraires en tachéométrie se font sur des feuillets de papier quadrillé, généralement à l'échelle du double déci-millième, pour les cartes agrimétriques; on adopte des échelles plus grandes pour les terrains très-minutieusement parcellés, pour les villes et villages, etc.; et des échelles de dix en dix fois plus petites..., pour les cartes d'assemblage et pour les plans représentant les grandes divisions territoriales du pays.

148. Les courbes de niveau, destinées à reproduire la forme du terrain, ainsi que l'étude des projets de canaux, routes, chemins de fer, etc., sont tracées par points sur les mêmes feuilles au moyen de la troisième coordonnée Z de tous les points levés, et espacées ordinairement de dix en dix mètres dans le sens vertical; on les resserre davantage dans quelques cas particuliers.

Si le but du levé est purement topographique, on peut se contenter pour le tracé des courbes de niveau de l'exactitude des moyens graphiques : le géomètre qui a décomposé à vue le terrain en faces planes et triangulaires n'aura autre chose à faire, pour le tracé des courbes de niveau sur le dessin, qu'à diviser la projection horizontale des côtés de chacun de ces triangles proportionnellement aux pentes, d'après la règle du problème 9, opération qui peut se faire graphiquement par les moyens connus. Cette opération, qui n'est autre chose que le

tracé des échelles de pente, se fait facilement sur les dessins, en employant un feuille de papier transparent, sur lequel on a tracé des lignes parallèles numérotées 0, 5, 10, etc., espacées d'une quantité arbitraire, mais plus ou moins en rapport avec l'échelle du plan. Supposons, par exemple, qu'on veuille marquer le point correspondant à la courbe de niveau 100, point qui doit se trouver sur l'alignement de deux autres points dont les côtés sont, par exemple, 94,50 et 103,30.

On fait pour cela coincider un point quelconque de la parallèle 4,50 avec le premier point coté 94,50, en faisant tourner le papier transparent autour de ce point jusqu'à ce que la parallèle 13,30 passe par le deuxième ,dont la cote est 103,30, on marque la rencontre de la parallèle 10 avec la ligne qui joint les deux points donnés. Ce point appartient à la courbe de niveau 100.

Si l'opération doit remplir un but plus élevé, l'exactitude de la solution graphique n'étant plus suffisante, on doit suivre la méthode du problème 9, qui donne le moyen de trouver numériquement tous les éléments nécessaires pour le calcul des terrassements d'un projet quelconque.

CHAPITRE XI.

CONSIDÉRATIONS SUR LE LEVÉ D'UNE VASTE CONTRÉE ; EXPLICATION DES MODÈLES DE CARNETS ET REGISTRES DIVERS.

149. On a eu des cartes géographiques plus ou moins bien faites, on a eu même des cadastres (1) avant d'avoir des cartes générales des grands Etats aux échelles topographiques maintenant en usage, avec le relief du terrain exprimé par des courbes de niveau et avec l'abondance de détails que tous les services publics ont tour à tour réclamée.

De grandes opérations trigonométriques ont, d'autre part, été faites sur différents points du globe pour la mesure de la terre et la détermination des systèmes métriques (2). Ces grandes opérations sont sur le point d'être reliées entre elles, si bien que l'Europe entière sera bientôt couverte d'un réseau

(1) La Chine a précédé l'Europe dans cette voie.

(2) M. Plana a démontré que le *trabucco*, ancienne unité de mesure italienne, a été probablement le résultat d'une véritable mesure de la terre, dont le souvenir est perdu dans la nuit des temps ; cette unité de mesure est exactement égale au dixième de la seconde sexagésimale, comme le mètre est le dixième de la seconde centésimale du quart de méridien : ce qui ne saurait être l'effet du hasard.

trigonométrique parfait donnant les éléments de la mesure de la terre avec la plus haute précision.

On a ensuite travaillé à remplir les triangles par des levés faits aux échelles topographiques, et on a déterminé, par différents moyens, les accidents du terrain pour les figurer sur les cartes topographiques.

D'autre part, on a fait des levés de détails très-étendus pour le cadastre, c'est-à-dire pour la *constatation de la propriété foncière* et pour la répartition des impôts : mais on a trop souvent négligé de relier ces travaux aux opérations trigonométriques existantes, et d'en faire où il n'en existait pas, de manière que plusieurs des cadastres européens manquent d'ensemble et sont même entachés de graves erreurs.

Dans les pays où le cadastre a précédé la carte générale topographique, on a essayé de réduire le cadastre à l'échelle topographique pour avoir la planimétrie de la carte, et quant au relief, on a cherché à l'obtenir par des levés à vue ou à l'éclimètre, par des cotes barométriques ou autrement, ce qui n'a pas conduit ni toujours, ni partout, à un résultat satisfaisant.

Si l'on fait l'addition du temps et de la dépense que les opérations ainsi faites ont coûté, on trouvera un chiffre énormément élevé.

150. Si, au contraire les grandes opérations trigonométriques du premier ordre une fois faites, on procédait au levé du cadastre parcellaire par la tachéométrie, toutes les autres espèces de cartes du pays ne seraient plus que des réductions illustrées, dont la dépense serait minime, et le cadastre lui-même, quoique comprenant le relief complet du terrain, coûterait beaucoup moins cher que n'a coûté le cadastre ordinaire. On trouverait sur les cartes topographiques ainsi obtenues,

par la réduction du cadastre, les éléments pour l'étude des avant-projets des grandes voies de communication, et sur le cadastre même les éléments les plus complets pour l'étude des projets définitifs. L'économie qui résulterait de cette manière de procéder pour un pays comme la France, si elle en était au commencement, pourrait s'estimer par centaines de millions. En marchant à la tête du progrès, sous ce rapport, la France n'a pas pu profiter, pour la confection de son cadastre et de ses cartes, de la tachéométrie, venue trop tard, mais les avantages qu'elle a retirés des beaux travaux qu'on y a faits par les méthodes ordinaires habilement employées lui ont permis d'oublier la dépense qu'ils ont coûtée; cependant les levés et les nivellements que nécessite tous les jours tous les services, et notamment les grands travaux publics, pourront être faits désormais par le tachéomètre et être partout reliés, dans les trois sens, aux grandes opérations géodésiques. Ils formeront ainsi peu à peu le complément des magnifiques travaux déjà faits, et la rectification de ce qu'il pourrait y avoir encore de moins parfait.

Désormais, tout grand pays qui en est encore à tout faire, c'est par le cadastre levé tachéométriquement qu'il doit commencer.

151. La *péréquation*, c'est-à-dire la répartition équitable de l'impôt foncier, a été le premier des besoins publics qui ait fait sentir la nécessité du cadastre, mais on n'a pas tardé à reconnaître que le cadastre joue un rôle bien plus étendu dans le bien en général.

Sans parler des anciens compoix ni même des cadastres par masse, il ne peut être douteux aujourd'hui que le cadastre parcellaire, partout où il est à faire ou à refaire, ne doit plus avoir pour objet unique la répartition de l'impôt. Le cadastre est un

moyen *de constater et de garantir à perpétuité la propriété foncière* dans toute l'étendue de l'acception du mot. Il doit consister en un *livre descriptif*, dans lequel toutes les dimensions, l'ubication, les cohérences, les servitudes et droits réels..., ainsi que la valeur relative de chaque parcelle, s'y trouvent décrites avec vérité entière; un tel livre doit être tenu au courant de toutes les mutations non-seulement de propriétaires, mais aussi de celles intrinsèques au fonds lui-même: si bien qu'en tout temps, il puisse servir de base à tout acte relatif à la propriété, soit légal et judiciaire, soit de transaction privée. Un tel livre serait cependant très-difficile à faire, et plus encore à tenir au courant des mutations et interpréter à l'avenir, s'il n'était illustré de figures dessinées à une grandeur convenable, dont le rôle est de présenter la figure semblable de leur périmètre.

Que les plans doivent désormais être réduits à un rôle purement figuratif, que les dimensions doivent être enregistrées numériquement, et que la tolérance doit être la plus restreinte possible, il est facile de s'en convaincre si l'on met en parallèle la haute valeur que prend de plus en plus la propriété, surtout aux environs des grandes villes et le long des grandes lignes de communication; et dans tous les cas, les questions judiciaires sans nombre relatives aux *distances légales*, avec les inexactitudes inévitables de l'échelle, du compas, du retrait du papier, de la détérioration des cartes, et si l'on considère la nécessité de conserver inaltérablement le fruit de ces longues et coûteuses opérations : souvent des questions de contenance, d'usurpation, de distance légale, pour lesquelles un décimètre suffit à faire pencher la balance de l'un ou de l'autre côté, ne peuvent se décider que par la comparaison de dimensions prises sur un plan avec leurs homologues remesurées sur le terrain. Une dimension qui a pu, à l'origine, avoir, par exemple, 1 mètre de tolérance, prise sur un plan usé, sur lequel un mètre n'est représenté que par quelques dixièmes de millimètre, ne pourra jamais donner le décimètre fatal de la question.

Il découle de là deux conséquences essentielles : la première, c'est qu'il faut avoir des résultats numériques ; la deuxième, que la tolérance accordée aux géomètres par les réglements du cadastre devrait être bien plus resserrée, et telle que le tachéomètre seul peut la supporter tout en opérant avec la promptitude et l'économie qui rendent possible une opération cadastrale.

L'altitude, on l'a vu, ne coûte rien en tachéométrie ; mais il est juste de remarquer ici que si le levé du cadastre doit ensuite fournir aux autres services le modelé le plus complet du terrain, il sera souvent nécessaire de lever un bon nombre de points dans l'intérieur des parcelles pour déterminer toutes les inflexions de la surface du sol ; ce qui, du reste, n'augmentera pas d'un dixième la dépense, mais le cadastre lui-même profitera de ces déterminations ; car il est évident que la valeur des propriétés dépend beaucoup de l'acclivité du sol, de l'exposition des pentes, même très-minimes ; de la possibilité des irrigations, de l'écoulement des eaux pluviales, du dessèchement possible des lieux marécageux, etc., toutes choses qu'on n'arrivera à connaître et à apprécier que par l'altimétrie générale.

152. Ces principes une fois posés, voici comment on doit procéder pour faire la carte agrimétrique d'un pays d'après la méthode nouvelle, et dans le but d'obtenir ensuite de cette seule opération tous les avantages dont on a parlé.

Premièrement, s'il s'agit d'une grande contrée, et si l'on n'a pas une triangulation du premier ordre, il sera bon de placer

de suite les signaux pour la faire, mais il n'est pas nécessaire d'attendre qu'elle soit faite et calculée pour commencer les opérations du levé sur le terrain ; il suffit pour cela, ainsi qu'on l'a vu, que les signaux soient placés, afin que les géomètres puissent les voir et les prendre de préférence comme points directeurs.

La triangulation générale du pays étant faite, ou du moins préparée par l'établissement des signaux, les géomètres auront soin de rattacher leurs opérations aux points trigonométriques. Il n'est pas nécessaire que les côtés des triangles descendent guère au dessous de 20,000 mètres ; car dans les méthodes tachéométriques les triangles de 3e et de 4e ordre sont avantageusement remplacés par la solution du problème 6 appliquée à un nombre suffisant de stations.

On fixera ensuite, en raison du temps qu'on veut employer à l'opération et de l'étendue du pays, le nombre d'instruments qu'il faudra mettre en campagne. On répartira le terrain en sections d'une étendue suffisante pour occuper, si cela se peut, chaque géomètre durant toute la campagne (1), et aussitôt les opérations pourront commencer.

Opérations du levé sur le terrain. — On a suffisamment expliqué, en tant qu'il s'agit des procédés d'art, comment on lève un plan en tachéométrie ; il n'y a donc à ajouter aux instructions à donner aux géomètres que les prescriptions réglementaires spéciales au but pour lequel l'opération est ordonnée.

Explication et usage du carnet. — Les éléments (nom-

(1) Une section pourra comprendre plus d'une commune, partout où les communes ont une étendue moindre que le travail que peut faire un géomètre dans une campagne. Quant à la répartition en feuille, elle ne se fait pas par section quand on emploie le système rectangulaire adopté en tachéométrie.

sur le terrain. Une dimension qui a pu, à l'origine, avoir, par exemple, 1 mètre de tolérance, prise sur un plan usé, sur lequel un mètre n'est représenté que par quelques dixièmes de millimètre, ne pourra jamais donner le décimètre fatal de la question.

Il découle de là deux conséquences essentielles : la première, c'est qu'il faut avoir des résultats numériques ; la deuxième, que la tolérance accordée aux géomètres par les réglements du cadastre devrait être bien plus resserrée, et telle que le tachéomètre seul peut la supporter tout en opérant avec la promptitude et l'économie qui rendent possible une opération cadastrale.

L'altitude, on l'a vu, ne coûte rien en tachéométrie ; mais il est juste de remarquer ici que si le levé du cadastre doit ensuite fournir aux autres services le modelé le plus complet du terrain, il sera souvent nécessaire de lever un bon nombre de points dans l'intérieur des parcelles pour déterminer toutes les inflexions de la surface du sol ; ce qui, du reste, n'augmentera pas d'un dixième la dépense, mais le cadastre lui-même profitera de ces déterminations ; car il est évident que la valeur des propriétés dépend beaucoup de l'acclivité du sol, de l'exposition des pentes, même très-minimes ; de la possibilité des irrigations, de l'écoulement des eaux pluviales, du dessèchement possible des lieux marécageux, etc., toutes choses qu'on n'arrivera à connaître et à apprécier que par l'altimétrie générale.

152. Ces principes une fois posés, voici comment on doit procéder pour faire la carte agrimétrique d'un pays d'après la méthode nouvelle, et dans le but d'obtenir ensuite de cette seule opération tous les avantages dont on a parlé.

Premièrement, s'il s'agit d'une grande contrée, et si l'on n'a pas une triangulation du premier ordre, il sera bon de placer

de suite les signaux pour la faire, mais il n'est pas nécessaire d'attendre qu'elle soit faite et calculée pour commencer les opérations du levé sur le terrain ; il suffit pour cela, ainsi qu'on l'a vu, que les signaux soient placés, afin que les géomètres puissent les voir et les prendre de préférence comme points directeurs.

La triangulation générale du pays étant faite, ou du moins préparée par l'établissement des signaux, les géomètres auront soin de rattacher leurs opérations aux points trigonométriques. Il n'est pas nécessaire que les côtés des triangles descendent guère au dessous de 20,000 mètres ; car dans les méthodes tachéométriques les triangles de 3e et de 4e ordre sont avantageusement remplacés par la solution du problème 6 appliquée à un nombre suffisant de stations.

On fixera ensuite, en raison du temps qu'on veut employer à l'opération et de l'étendue du pays, le nombre d'instruments qu'il faudra mettre en campagne. On répartira le terrain en sections d'une étendue suffisante pour occuper, si cela se peut, chaque géomètre durant toute la campagne (1), et aussitôt les opérations pourront commencer.

Opérations du levé sur le terrain. — On a suffisamment expliqué, en tant qu'il s'agit des procédés d'art, comment on lève un plan en tachéométrie ; il n'y a donc à ajouter aux instructions à donner aux géomètres que les prescriptions réglementaires spéciales au but pour lequel l'opération est ordonnée.

Explication et usage du carnet. — Les éléments (nom-

(1) Une section pourra comprendre plus d'une commune, partout où les communes ont une étendue moindre que le travail que peut faire un géomètre dans une campagne. Quant à la répartition en feuille, elle ne se fait pas par section quand on emploie le système rectangulaire adopté en tachéométrie.

bres générateurs, § 32) recueillis sur le terrain s'inscrivent dans le carnet de campagne, modèle *A*; on inscrit dans les premières colonnes, intitulées *micromètre*, les lectures de la mire en suivant, pour leur disposition dans les différents cas de lecture, les règles observées dans les exemples du § 29. Dans les colonnes qui suivent, on écrit les ***résultats*** provenant de ces lectures. La seconde partie de la page du carnet portant le titre de *cercles* reçoit, aux colonnes respectives, les ***azimuts*** et les *apozéniths* observés, leurs corrections, s'il y a lieu, et la désignation des points de rattachement et de recoupement, désignation qu'on fait en y indiquant par leur lettre ordinale toutes les stations desquelles le point a été visé.

La désignation de chaque point s'écrit sur le réglage du carnet, sans avoir égard aux lignes verticales.

Eidographie ou figuré de station. — Le type éidographique de chaque station, qui accompagnera toujours le carnet de campagne, sera fait à vue; on y indiquera les contours des propriétés et les détails locaux (1).

Coordonnées provisoires. — La première opération à faire dans les bureaux est celle de transcrire les éléments du carnet sur le grand registre du levé, modèle A′. Ce registre se compose d'une première colonne dans laquelle on désigne les stations par des lettres, et les points par leurs numéros d'ordre progressifs, avec leurs types ou désignation graphique, s'il y a lieu; et ceci dans le petit carré quadrillé dont le point levé occupe le *point central :* ce type est fait d'après les éidographies des stations.

A la colonne suivante, partie blanche, on met la désignation

(1) On a fait des instruments qui, par un mécanisme spécial, facilitent le tracé des types éidographiques des stations.

écrite de chaque point qui sera directement copié du carnet de campagne. La partie grisée, même colonne, reçoit l'indication de l'objet des mesures locales, enregistrées en mètres à la colonne suivante, partie grisée. Les autres colonnes de ce registre, distribuées en deux compartiments intitulés ***dimensions linéaires*** et ***dimensions angulaires***, sont la copie exacte du carnet de campagne, avec la seule addition d'une partie grisée dans laquelle seront écrites plus tard les petites coordonnées x, y, z de tous les points par rapport au centre de l'instrument, à leur place, et les grandes coordonnées X, Y, Z mais celles-ci après les opérations suivantes de vérification.

Comporbation.—La comprobation, en tachéométrie, se fait dans les bureaux par la polygonation; cet argument est donc épuisé. La comprobation n'exige aucune opération spéciale sur le terrain, sauf les cas d'omission; au surplus les omissions, s'il y en avait, seraient sans doute un objet de réclamation de la part des particuliers, lors de la communication des bulletins.

Voici l'ordre à suivre dans ces opérations et la manière de les figurer dans les registres modèles *C* et *D*.

Le registre *C* (comparaison des rattachements et des orientations) contient à la première colonne les indications des points et des stations par leurs lettres et numéros d'ordre progressifs.

La deuxième colonne reçoit les petites coordonnées x, y, z des points de rattachement par rapport à leurs stations respectives, qu'on puise dans le grand registre du levé. Les moyennes qu'on obtient par cette opération sont transcrites à la colonne suivante avec leurs signes algébriques respectifs; elles constituent la *valeur moyenne de la distance entre les stations suivant les trois axes;* tel est le titre de cette colonne.

On inscrit à la quatrième colonne, intitulée *vérification de* *l'orientation et de la ligne de jonction des points*, les résultats fournis par la solution du deuxième problème (chap. V).

La dernière colonne reçoit la *correction de l'azimut* (orientation des stations), s'il y a lieu, qui résulte des opérations précédentes.

La première colonne du registre *D* contient l'indication progressive des positions dont les distances orthogonales sont données par le registre précédent. Ces distances orthogonales s'inscrivent dans le compartiment intitulé *cheminements* à leur colonne respective, eu égard aux signes algébriques dont elles sont affectées. Les valeurs des moyennes qui résultent des opérations inscrites dans ces colonnes sont transcrites aux colonnes suivantes intitulées *résultats :* ces valeurs ne sont plus passibles d'aucune correction et servent à former les *positions définitives* au moyen des positions de points trigonométriques et de celles des centrales des différents ordres, déjà déterminées. On inscrit ces quantités (grandes coordonnées) aux dernières colonnes X, Y, Z de ce registre, et aux colonnes X, Y, Z, partie grisée, du registre du levé.

Calcul des contenances. — On a vu comment le calcul des contenances se fait en tachéométrie (chap. V. Problèmes 11 et 12), et on a vu aussi que la vérification du calcul a lieu parcelle par parcelle, par la solution des mêmes problèmes.

Ces calculs se font sur des registres réglés exprès, modèles *F*, *G*.

Sur le registre *F*, on met les calculs des aires des trapèzes tels qu'ils sont indiqués (chap. V). Ce registre porte à sa première colonne la *désignation des sommets* qui constituent les côtés des trapèzes aboutissant aux parcelles du plan. Le compartiment suivant contient les *éléments du calcul des aires rectilignes et curvilignes.*

Les produits $\Sigma X . \Delta Y$ et $\Delta X . \Sigma Y$, qui résultent de la combinaison des quantités inscrites aux colonnes précédentes et qui représentent respectivement les aires des trapèzes reposant sur les deux axes, trouvent leur place aux dernières colonnes du registre intitulées *hectares*, *ares*, *centiares*.

Vient ensuite le calcul des aires des parcelles, qui se fait sur des registres modèle *G*; les éléments de ce calcul se trouvent dans le registre précédent, et on n'a qu'à les combiner convenablement, pour arriver à la détermination de la surface de toutes les parcelles de propriété.

La première colonne de ce registre doit désigner les nom et prénoms du propriétaire de chaque parcelle.

On met aux deux colonnes suivantes l'*ubication du centre* (1) de la parcelle au moyen de ses coordonnées X, Y, de son centre, mais seulement en nombres ronds de mètres sans fraction, et la désignation des côtés au moyen des numéros d'ordre de leurs extrémités.

Les dernières colonnes du registre reçoivent enfin les aires rectilignes et curvilignes avec leurs signes respectifs par rapport aux deux axes; on a ainsi pour chaque parcelle l'expression de sa surface en double; c'est le plus parfait de tous les moyens de comprobation du calcul des aires.

Telle est la composition des registres la plus convenable pour une grande opération de cadastre.

Plans. — On rédige les cartes agrimétriques sur du papier quadrillé, en y plaçant d'abord tous les points d'après les coor-

(1) L'ubication du centre écrite sous forme de fraction $\left(\frac{X}{Y}\right)$ remplace avantageusement le n° d'ordre désignatif des parcelles employé dans les cadastres; il a l'avantage de se prêter indéfiniment aux mutations intrinsèques.

données, et dessinant ensuite le remplissage d'après les types éidographiques.

On obtient de la même manière des cartes à des échelles de dix en dix fois plus petites, qui pourront être placées en tête des atlas pour servir de cartes d'assemblages, et on rédige de même des atlas topographiques et géographiques, en les dessinant sur des feuilles quadrillées, de la même manière. Ces cartes auront tout le mérite de dessins originaux; elles n'auront aucun des défauts et inexactitudes qui entachent d'ordinaire les copies et les réductions.

TABLES DE RÉFRACTION CENTÉSIMALES

TABLES POUR CONVERTIR LES GRADES CENTÉSIMAUX

EN TEMPS SEXAGÉSIMAL ***et vice versa***

EXPLICATION ET USAGE

Des tables de réfraction centésimales

Ces tables sont calculées d'après les formules des pages 264 et 271 de la *Mécanique céleste* (4ᵉ volume). La notation adoptée par nous est celle-ci :

φ Distance zénithale en grades centésimaux.

$\varphi\delta$ Réfraction en secondes (millionième du quadrant).

H Hauteur du baromètre en millimètres.

T Température de l'air en grades centésimaux.

La première partie est calculée en supposant le baromètre à 500 millimètres, et le thermomètre à + 35 grades.

Afin de n'avoir à opérer que sur des nombres positifs, on a retranché de tous les logarithmes des termes de la première partie la plus grande valeur négative du logarithme de $(1 + y)$, et la plus grande valeur négative du terme dépendant de la hauteur du thermomètre, prise chacune positivement, et on les a ajoutées aux logarithmes respectifs des termes de la deuxième et de la troisième partie.

Il s'ensuit qu'en nommant a le nombre qui correspond à φ dans la première partie, b celui qui correspond à **H** dans la deuxième partie, c celui qui correspond à **T** dans la troisième, on aura pour un cas quelconque $\log \delta\varphi = a + b + c$.

La quatrième partie correspond au quatrième terme de la formule de la page 271 ; elle donne directement en secondes une petite correction soustractive : l'argument est φ.

Tables de réfraction centésimales.

PREMIÈRE PARTIE.

Log de la réfraction, le baromètre étant à 500ᵐᵐ et le thermomètre à + 35 gr.

φ	Log $\delta\varphi$	Différences	φ	Log $\delta\varphi$	Différences	φ	Log $\delta\varphi$	Différences
1	0,1945	3245	36	1,8352	151	71	2,3412	172
2	0,5190	1855	37	1,8503	148	72	2,3584	179
3	0,7045	1296	38	1,8651	147	73	2,3763	185
4	0,8341	942	39	1,8798	145	74	2,3948	188
5	0,9283	773	40	1,8943	144	75	5,4136	195
6	1,0056	696	41	1,9087	142	76	2,4331	199
7	1,0752	600	42	1,9229	141	77	2,4530	206
8	1,1352	526	43	1,9370	139	78	2,4736	216
9	1,1878	455	44	1,9509	138	79	2,4952	221
10	1,2333	439	45	1,9647	137	80	2,5173	234
11	1,2772	386	46	1,9784	137	81	2,5407	245
12	1,3158	355	47	1,9921	136	82	2,5652	257
13	1,3513	328	48	2,0057	137	83	2,5909	269
14	1,3841	305	49	2,0194	136	84	2,6178	285
15	1,4146	285	50	2,0330	136	85	2,6463	300
16	1,4431	272	51	2,0466	137	86	2,6763	316
17	1,4703	260	52	2,0603	137	87	2,7079	336
18	1,4963	248	53	2,0740	136	88	2,7415	360
19	1,5211	287	54	2,0876	137	89	2,7775	388
20	1,5448	227	55	2,1013	139	90	2,8163	431
21	1,5675	218	56	2,1152	139	91	2,8594	472
22	1,5893	211	57	2,1291	139	92	2,9066	521
23	1,6104	206	58	2,1430	141	93	2,9587	579
24	1,6310	199	59	2,1571	142	94	3,0166	623
25	1,6509	193	60	2,1713	144	95	3,0789	733
26	1,6702	186	61	2,1857	145	96	3,1522	842
27	1,6888	180	62	2,2002	147	97	3,3364	974
28	1,7068	174	63	2,2149	149	98	3,3338	1127
29	1,7242	169	64	2,2298	151	99	3,4465	1282
30	1,7411	165	65	2,2449	154	100	3,5747	
31	1,7576	161	66	2,2603	155			
32	1,7737	158	67	2,2758	159			
33	1,7895	154	68	2,2917	163			
34	1,8049	152	69	2,3080	166			
35	1,8201	151	70	2,3246	166			

DEUXIÈME PARTIE.

Log du facteur dépendant de la hauteur du baromètre = **H**.

H	Log	H	Log	H	Log	H	Log
mm.		mm.		mm.		mm.	
500	0,0000	540	0,0334	580	0,0645	620	0,0934
1	9	1	342	1	652	1	941
2	17	2	350	2	660	2	948
3	26	3	358	3	667	3	955
4	35	4	366	4	674	4	962
505	0,0043	545	0,0374	585	0,0682	625	0,0969
6	52	6	382	6	689	6	976
7	60	7	390	7	697	7	983
8	69	8	398	8	704	8	090
9	77	9	406	9	711	9	997
510	0,0086	550	0,0414	590	0,0719	630	0,1004
1	35	1	422	1	726	1	1011
2	103	2	430	2	734	2	1017
3	111	3	438	8	741	3	1024
4	120	4	445	4	748	4	1031
515	0,0128	555	0,0453	595	0,0755	935	0,1038
6	137	6	461	6	763	6	1045
7	145	7	469	7	770	7	1052
8	154	8	477	8	777	8	1059
9	162	9	484	9	785	9	1065
520	0,0170	560	0,0492	600	0,0792	640	0,1072
1	179	1	500	1	799	1	1079
2	187	2	508	2	806	2	1086
3	195	3	515	3	813	3	1092
4	204	4	523	4	821	4	1099
525	0,0212	565	0,0531	605	0,0828	645	0,1106
6	220	6	538	6	835	6	1113
7	228	7	546	7	842	7	1119
8	237	8	554	8	849	8	1126
9	245	9	561	9	856	9	1133
530	0,0253	570	0,0569	610	0,0864	650	0,1139
1	261	1	577	1	871	1	1146
2	269	2	584	2	878	2	1153
3	278	3	592	3	885	3	1159
4	286	4	599	4	892	4	1166
535	0,0294	575	0,0607	615	0,0899	655	0,1173
6	302	6	615	6	906	6	1179
7	310	7	622	7	913	7	1186
8	318	8	630	8	920	8	1193
9	326	9	637	9	927	9	1199

Suite de la **DEUXIÈME PARTIE.**

Log du facteur dépendant de la hauteur du baromètre = **H**.

H	Log	H	Log	H	Log	H	Log
mm.		mm.		mm.		mm.	
660	0,1206	700	0,1461	740	0,1703	780	0,1931
1	1212	1	1467	1	1704	1	1931
2	1219	2	1474	2	1714	2	1942
3	1225	3	1480	3	1720	3	1948
4	1232	4	1486	4	1726	4	1953
665	0,1239	705	0,1492	745	0,0732	785	0,1959
6	1245	6	1498	6	1738	6	1765
7	1252	7	1504	7	1744	7	1970
8	1258	8	1511	8	1749	8	1976
9	1265	9	1517	9	1755	9	1981
670	0,1271	710	0,1523	750	0,1761	790	0,1987
1	1278	1	1529	1	1767	1	1992
2	1284	2	1535	2	1772	2	1998
3	1290	3	1541	3	1778	3	2003
4	1297	4	1547	4	1784	4	2009
675	0,1303	715	0,1553	755	0,1790	795	0,2014
6	1310	6	1559	6	1796	6	2019
7	1316	7	1565	7	1801	7	2025
8	1323	8	1572	8	1807	8	2030
9	1329	9	1576	9	1813	9	2036
680	0,1335	720	0,1581	760	0,1818	800	0,2041
1	1342	1	1590	1	1824	1	2047
2	1348	2	1596	2	1830	2	2052
3	1355	3	1602	3	1836	3	2057
4	1361	4	1608	4	1841	4	2063
685	0,1367	725	0,1614	765	0,1847	805	0,2068
6	1374	6	1620	6	1853	6	2074
7	1380	7	1626	7	1858	7	2079
8	1386	8	1632	8	1864	8	2084
9	1392	9	1638	9	1870	9	2090
690	0,1399	730	0,1644	770	0,1875	810	0,2095
1	1405	1	1649	1	1881	1	2101
2	1411	2	1655	2	1886	2	2106
3	1418	3	166	3	1892	3	2111
4	1424	4	1667	4	1898	4	2117
695	0,1430	735	0,1673	775	0,1903	815	0,2122
6	1436	6	1679	6	1909	6	2127
7	1443	7	1681	7	1915	7	2133
8	1449	8	1691	8	1920	8	2138
9	1445	9	1699	9	1926	9	2143

DEUXIÈME PARTIE.

Log du facteur dépendant de la hauteur du baromètre = **H**.

H	Log	H	Log	H	Log	H	Log
mm.		mm.		mm.		mm.	
500	0,0000	540	0,0334	580	0,0645	620	0,0934
1	9	1	342	1	652	1	941
2	17	2	350	2	660	2	948
3	26	3	358	3	667	3	955
4	35	4	366	4	674	4	962
505	0,0043	545	0,0374	585	0,0682	625	0,0969
6	52	6	382	6	689	6	976
7	60	7	390	7	697	7	983
8	69	8	398	8	704	8	090
9	77	9	406	9	711	9	997
510	0,0086	550	0,0414	590	0,0719	630	0,1004
1	35	1	422	1	726	1	1011
2	103	2	430	2	734	2	1017
3	111	3	438	8	741	3	1024
4	120	4	445	4	748	4	1031
515	0,0128	555	0,0453	595	0,0755	935	0,1038
6	137	6	461	6	763	6	1045
7	145	7	469	7	770	7	1052
8	154	8	477	8	777	8	1059
9	162	9	484	9	785	9	1065
520	0,0170	560	0,0492	600	0,0792	640	0,1072
1	179	1	500	1	799	1	1079
2	187	2	508	2	806	2	1086
3	195	3	515	3	813	3	1092
4	204	4	523	4	821	4	1099
525	0,0212	565	0,0531	605	0,0828	645	0,1106
6	220	6	538	6	835	6	1113
7	228	7	546	7	842	7	1119
8	237	8	554	8	849	8	1126
9	245	9	561	9	856	9	1133
530	0,0253	570	0,0569	610	0,0864	650	0,1139
1	261	1	577	1	871	1	1146
2	269	2	584	2	878	2	1153
3	278	3	592	3	885	3	1159
4	286	4	599	4	892	4	1166
535	0,0294	575	0,0607	615	0,0899	655	0,1173
6	302	6	615	6	906	6	1179
7	310	7	622	7	913	7	1186
8	318	8	630	8	920	8	1193
9	326	9	637	9	927	9	1199

Suite de la **DEUXIÈME PARTIE.**

Log du facteur dépendant de la hauteur du baromètre = **H**.

H	Log	H	Log	H	Log	H	Log
mm.		mm.		mm.		mm.	
660	0,1206	700	0,1461	740	0,1703	780	0,1931
1	1212	1	1467	1	1704	1	1931
2	1219	2	1474	2	1714	2	1942
3	1225	3	1480	3	1720	3	1948
4	1232	4	1486	4	1726	4	1953
665	0,1239	705	0,1492	745	0,0732	785	0,1959
6	1245	6	1498	6	1738	6	1765
7	1252	7	1504	7	1744	7	1970
8	1258	8	1511	8	1749	8	1976
9	1265	9	1517	9	1755	9	1981
670	0,1271	710	0,1523	750	0,1761	790	0,1987
1	1278	1	1529	1	1767	1	1992
2	1284	2	1535	2	1772	2	1998
3	1290	3	1541	3	1778	3	2003
4	1297	4	1547	4	1784	4	2009
675	0,1303	715	0,1553	755	0,1790	795	0,2014
6	1310	6	1559	6	1796	6	2019
7	1316	7	1565	7	1801	7	2025
8	1323	8	1572	8	1807	8	2030
9	1329	9	1576	9	1813	9	2036
680	0,1335	720	0,1581	760	0,1818	800	0,2041
1	1342	1	1590	1	1824	1	2047
2	1348	2	1596	2	1830	2	2052
3	1355	3	1602	3	1836	3	2057
4	1361	4	1608	4	1841	4	2063
685	0,1367	725	0,1614	765	0,1847	805	0,2068
6	1374	6	1620	6	1853	6	2074
7	1380	7	1626	7	1858	7	2079
8	1386	8	1632	8	1864	8	2084
9	1392	9	1638	9	1870	9	2090
690	0,1399	730	0,1644	770	0,1875	810	0,2095
1	1405	1	1649	1	1881	1	2101
2	1411	2	1655	2	1886	2	2106
3	1418	3	166	3	1892	3	2111
4	1424	4	1667	4	1898	4	2117
695	0,1430	735	0,1673	775	0,1903	815	0,2122
6	1436	6	1679	6	1909	6	2127
7	1443	7	1681	7	1915	7	2133
8	1449	8	1691	8	1920	8	2138
9	1445	9	1699	9	1926	9	2143

TROISIÈME PARTIE.

Log du facteur dépendant du thermomètre $=$ T.

T	Log	T	Log	T	Log	T	Log
+35	0,0000	+17	0,0282	— 0	0,0564	—18	0,0882
34	15	16	298	1	581	19	900
33	30	15	0,0314	2	598	20	0,0918
32	46	14	330	3	615	21	937
31	61	13	346	4	633	22	955
30	0,0077	12	363	5	0,0650	23	974
29	92	11	379	6	667	24	993
28	108	10	0,0396	7	685	25	0,1011
27	123	9	412	8	703	26	1030
26	139	8	429	9	720	27	1049
25	0,0154	7	446	10	738	28	1068
24	170	6	462	11	756	29	1087
23	186	5	0,0479	12	773	30	0,1106
22	202	4	496	13	791	31	1125
21	248	3	513	14	809	32	1145
20	0,0234	2	530	15	0,0827	33	1164
19	249	1	546	16	845	34	1183
18	266	0	564	17	863	35	1203

QUATRIÈME PARTIE.

Correction soustractive en secondes.

φ	Secondes	φ	Secondes	φ	Secondes
100	»	88	1,31	76	0,17
99	»	87	1,03	75	0,15
98	»	86	0,83	74	0,14
97	84,20	85	0,67	73	0,12
96	35,47	84	0,55	72	0,11
95	18,18	83	0,47	71	0,10
94	13,26	82	0,40	70	0,09
93	6,63	81	0,35	69	0,08
92	4,44	80	0,29	68	0,07
91	3,12	79	0,25	67	0,06
90	2,27	78	0,23	66	0,06
89	1,71	77	0,20		

EXPLICATION ET USAGE DES TABLES

Pour convertir les grades centésimaux en temps sexagésimal et *vice versa*.

On a écrit dans la première colonne de chaque table le chiffre à réduire. On trouve la réduction relative dans la colonne dont le titre est ce que le chiffre représente.

Un exemple éclaircira cela.

Soit $84^{g},3539$ à convertir en temps sexagésimal.

Vis-à-vis de 8	je trouve dans les dizaines de grades.	$4^{h},48'$
4	je trouve dans les grades.	$14',24''$
3	je trouve dans les dizaines de minutes	$1',\ 4''\ 8$
5	je trouve dans les minutes. . . .	$10'',80$
3	eu égard à la position de la	$0'',648$
9	ligne.	$0'',1944$
843539	=	$5^{h}.\ 3'.40'',4424$

Réciproquement :

Soit $5^{h}.3'.40'',4424$ convertir en grades centésimaux.

Vis-à-vis de 5^{h}	je trouve dans la colonne des heures.	83,3333333
$3'$	je trouve dans la colonne des minutes	0,8333333
$40''$	je trouve des secondes eu égard à la position de la virgule.	0,1851852
4		0,0018518
4		0,0001851
2		0,0000093
4		0,0000019
$5^{h}.3'.40'',4424$	=	84,3539000

Table pour convertir les grades centésimaux en temps sexagésimal.

CHIFFRE à réduire	DIZAINES de grades	GRADES	DIZAINES de minutes	MINUTES
1	0h,36′	3′,36″	0′,21″,6	2″,16
2	1 ,12	7 ,12	0 ,43 ,2	4 ,32
3	1 ,48	10 ,48	1 ,04 ,8	6 ,48
4	2 ,24	14 ,24	1 ,26 ,4	8 ,64
5	3 ,00	18 ,00	1 ,48 ,0	10 ,80
6	3 ,36	21 ,36	2 ,09 ,6	12 ,96
7	4 ,12	25 ,12	2 ,31 ,2	15 ,12
8	4 ,48	28 ,48	2 ,52 ,8	17 ,28
9	5 ,24	32 ,24	3 ,14 ,4	19 ,44

On traitera les autres chiffres comme des minutes et on reculera la virgule vers la gauche d'autant de places que le cas exigera.

Table pour convertir le temps sexagésimal en grades centésimaux.

CHIFFRE à réduire	HEURES	MINUTES	SECONDES
1	$16^g,\overline{6}$	$0,2\overline{7}$	$0,00\overline{4629}$
2	$33\ \overline{3}$	$0,\overline{5}$	$0,00\overline{925}$
3	$50\ 0$	$0,8\overline{3}$	$0,01\overline{38}$
4	$66\ \overline{6}$	$1,\overline{1}$	$0,0\overline{185}$
5	$83\ ,\overline{3}$	$1,3\overline{8}$	$0,023\overline{148}$
6	$100\ ,0$	$1,\overline{6}$	$0,02\overline{7}$
7	$116\ ,\overline{6}$	$1,9\overline{4}$	$0,03240\overline{6}$
8	$133\ ,\overline{3}$	$2,\overline{2}$	$0,03\overline{703}$
9	$150\ ,0$	$2,50$	$0,04\overline{16}$

Les nombres donnés par cette table étant nécessairement périodiques, on a superligné le chiffre ou les chiffres qui forment la période.
Pour les fractions de secondes, on se sert de la dernière colonne en transportant la virgule vers la gauche comme ci-dessus.

TABLE DES MATIÈRES

Typ. de GUIRAUDET, place de la Mairie, 2, à Neuilly.

Modèle A

Année	Mois	Jour	Heures	État du ciel	Canton	Commune	Kilomètre
							X= Y=

N° d'ordre et types des Points	Stations	Désignation locale	Dimensions linéaires: Micromètre, Fils supérieurs: Dimensions	Diff.	Fils inférieurs: ± x	Diff.	Résultats: ± y		± z	Dimensions angulaires: Azimut observé: X	Azimut corrigé: Y	Apozenit φ: Z	ψ: H	Ind^ces des rattach^ts et des recoup^ts
								S						
								$\mathcal{D}$						
								h						
								S						
								$\mathcal{D}$						
								h						
								S						
								$\mathcal{D}$						
								h						
								S						
								$\mathcal{D}$						
								h						
								S						
								$\mathcal{D}$						
								h						
								S						

Comparaison des rattachements et les orientations.

Modèle C

Indication des		Comparaison en			Valeur moyenne de la distance entre les stations en			Vérification de l'orientation et de la ligne de jonction des points			Correction de l'Azimut
Points	Stations	x	y	z	X	Y	Z	D	Θ	Résultats	

Calcul des aires des trapèzes.

Modèle F

Désignon des Sommets	Eléments du calcul des aires									Trapèzes reposant sur					
	Rectilignes.						Curvilignes			la méridienne			la perpendiculaire		
	en X			en Y						$\Sigma X \cdot \Delta Y$			$\Delta X \cdot \Sigma Y$		
	X	Σ X	Δ X	Y	Σ Y	Δ Y	Θ	$\overline{\Delta X}^2 + \overline{\Delta Y}^2$	K	Hectares	Ares	Centres	Hectares	Ares	Centres

Calcul des aires des parcelles.

Propriétaire	Ubication du centre		Désignation des côtés	Calcul des Aires			
				Par $\Sigma X \cdot \Delta Y$		Par $\Delta X \cdot \Sigma Y$	
	X	Y		+	—	+	—

Calcul des aires des parcelles.

Propriétaire	Ubication du centre		Désignation des côtés	Calcul des Aires			
				Par $\Sigma X \cdot \Delta Y$		Par $\Delta X \cdot \Sigma Y$	
	X	Y		+	—	+	—

Vérification des lignes polygonales (Polygonation).

Modèle D

Indication des Sommets	Cheminements						Résultats			Positions définitives.		
	X		Y		Z		X	Y	Z	X	Y	Z
	+	—	+	—	+	—						

Modèle A

Micromètre. | Cercles.

Modèle A

Année	Mois	Jour	Heures	Etat du ciel	Canton	Commune	Kilomètre
							X= Y=

N° d'ordre et types des Points	Stations	Désignation locale	Dimensions linéaires: Micromètre, Fils supérieurs, Dimensions	Diff.	Fils inférieurs $\pm x$	Diff.	Resultats $\pm y$		$\pm z$	Dimensions angulaires: Azimut observé X	corrigé Y	Apozenit φ Z	ψ H	Indon des rattachts et des recoupts
								S						
								$\mathscr{D}$						
								h						
								S						
								$\mathscr{D}$						
								h						
								S						
								$\mathscr{D}$						
								h						
								S						
								$\mathscr{D}$						
								h						
								S						
								$\mathscr{D}$						
								h						
								S						