L'INTEGRATORE

O

PLANIMETRO DEI MOMENTI

DI

I. AMSLER-LAFFON

MEMORIA

DELL'INGEGNERE SCIPIONE CAPPA

Assistente alla R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri in Torino

Colla presente Memoria mi accingo ad esporre la descrizione, la teoria e l'uso dell'**Integratore** o **Planimetro dei momenti** di **Amsler** di cui fu acquistato recentemente un esemplare dalla R^a Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri di Torino.

1. — *Scopo dell'integratore.* - L'integratore di Amsler, inventato e costrutto dallo stesso Professore di Sciaffusa a cui siamo debitori dell'ingegnoso ed altrettanto utile planimetro polare, è destinato a fornire con speditezza e sufficiente approssimazione, l'*area*, il *momento statico*, ed il *momento d'inerzia* di una figura piana qualunque. Conseguentemente esso serve a facilitare di molto le risoluzioni dei varii problemi pei quali occorrono le quantità menzionate.

2. — *Descrizione delle varie parti dell'integratore.* - L'integratore si compone essenzialmente di tre parti distinte che sono : il regolo, il carrello ed il rotismo. Al rotismo trovansi poi unite due aste portanti i calcatoi destinati a percorrere i contorni delle figure, ed una rotella graduata che sviluppandosi sul piano del disegno fa rotare un disco pure graduato il quale serve a noverare i giri dati dalla rotella medesima.

Il carrello ed il rotismo debbono adattarsi l'uno all'altro differentemente secondochè si tratta di valutare l'area, il momento statico, od il momento d'inerzia di una figura piana, e sul regolo deve moversi il carrello mentre uno dei calcatoi percorre il contorno della figura data.

Le diverse parti dell' integratore sono rappresentate in vera grandezza nella prima delle tre tavole che accompagnano questa relazione.

Regolo. — Il regolo che è rappresentato nella *Fig. 1* della *Tav.* 1^a mediante la sua proiezione orizzontale AA ed una sua sezione trasversale, è costituito da un'asta rettilinea di ferro avente la lunghezza di $7^{dm},30$ e la sezione trasversale rettangolare. Esso presenta sopra la faccia rettangolare maggiore opposta a quella con cui si deve appoggiare sul piano del disegno, e secondo la mediana più lunga della faccia medesima, una scanalatura *aa* a sezione trapezia entro la quale debbono scorrere le rotelle del carrello. Questo regolo serve a guidare nel suo movimento il carrello e quindi l'intiero strumento, che si può così spostare parallelamente a se stesso sul piano del disegno.

Carrello. — Il carrello è rappresentato nella *Tav.* 1^a mediante le *Fig.* 2_a 2_b 2_c le quali ne danno rispettivamente l'elevazione, la proiezione orizzontale ed un fianco. Esso presenta un'intelaiatura di ottone B, foggiata a doppia forcella nelle cui braccia stanno infisse quattro punte di acciaio *b* destinate a trattenere i perni degli alberi *e* di due rotelle C poste in un medesimo piano e girevoli attorno ai loro assi.

Le punte *b* sono a loro volta ritenute nelle braccia della forcella mediante le viti *d* munite di piccole rosette che penetrano in scanalature praticate nelle punte medesime e di più sono fissate per mezzo di altre quattro viti *e* che contro di esse si appoggiano.

Le rotelle C hanno alla loro periferia un tagliente col quale possono penetrare e scorrere facilmente nella scanalatura *aa* praticata nel regolo AA.

All' intelaiatura B trovasi ancora unita una piastra D mobile attorno all' asse di due viti *f* che la trattengono contro l'intelaiatura stessa. Questa piastra D presenta sopra una delle sue faccie laterali tre sporgenze *g* a sezioni rettangolari, ed è munita di due piuoli *h e k* i quali sono destinati a fissare, come si vedrà in seguito, le posizioni delle aste che portano i calcatoi. Nel centro della piastra D avvi per ultimo una vite E, mobile a mano e munita di molla , destinata a spingere contro la piastra medesima un' altra piastrina *i* piegata ad angolo retto. Questa piastrina *i* può rotare attorno all' asse della vite E essendoché fra le sporgenze *g* sonvi due intervalli *l* che lasciano libero il passaggio al suo braccio minore, e serve a trattenere contro la piastra D e quindi a collegare al carrello, una o l'altra delle due aste che portano i calcatoi.

Finalmente in una delle facce laterali dell'intelaiatura B del carrello è praticato un foro *m* nel quale deve penetrare l'estremità *n* del gambo di un contrappeso cilindrico di ottone. Questo contrappeso che è rappresentato nella *Fig. 4 Tav.* 1^a è destinato ad equilibrare una parte del peso dello strumento per modo che la pressione venga ad esercitarsi per mezzo delle rotelle del carrello quasi tutta sul regolo AA e quindi resti agevolato il movimento dell'apparecchio.

Rotismo. — Questa parte dello strumento è rappresentate dalle *Fig.* 3_a 3_b della *Tav.* 1^a che ne danno rispettivamente l'elevazione e la proiezione orizzontale ed è costituita di due ruote piane di ottone F e G armate di denti elicoidali che ingranano fra di loro ed i raggi delle cui circonferenze primitive stanno nel rapporto di 2:1. Queste due ruote F e G sono rispettivamente munite dei due alberi I ed L ai quali è congiunta mediante le rosette a vite *r* ed in direzione ad essi perpendicolare l'asta o braccio H che all' estremità libera porta il calcatoio *p.* Il piano passante per l'asse dell'asta H e per quello della ruota maggiore F passa pure per *V* asse della ruota minore G ed è mantenuto in tale posizione dalle tre viti *s.*

Allo stesso albero I portato dalla ruota maggiore F trovasi poi ancora congiunta per un suo estremo un'altra asta o braccio K avente direzione pure perpendicolare all'albero I e munita anch' essa verso l'altra sua estremità di un calcatoio *q.* Le unioni delle aste H e K cogli alberi I ed L delle ruote F e G, come risulta dalla *Fig.* 3^a stessa, sono fatte a snodo, per cui le ruote F e G possono rotare liberamente attorno ai loro assi, senza che partecipino a questa rotazione le aste H e K medesime ; ma però queste si possono rendere solidali alla ruota F nel modo che ora indicheremo.

Alle due aste H e K sono rispettivamente unite le due caviglie *t* ed *u* che terminano a poca distanza dalla ruota F , e questa ruota F porta sulla sua faccia superiore un nottolino M (loquet dei Francesi) girevole attorno all' asse della vite *v* che lo unisce alla ruota stessa, il quale presenta nel suo braccio più lungo un'intaccatura *w* semicircolare con cui può abbracciare l'una o l'altra delle due caviglie *t* ed *u.*

Contro lo stesso nottolino e verso l'estremità del suo braccio minore si appoggia una molla N piegata ad arco di circolo e fissata anch'essa per un suo estremo con viti sulla faccia superiore della ruota F. In virtù dell' elasticità di questa molla il nottolino è obbligato ad appoggiarsi coll'estremità del braccio maggiore contro un piuolo *z* fisso esso pure sulla ruota F ; ma se si preme nel punto *x* di contatto della molla col braccio minore del nottolino contro questo braccio medesimo , il nottolino rotando attorno all' asse della vite *v* si distacca dal piuolo *z* e si può allora far venire in corrispondenza dell'intaccatura w, l'una o l'altra delle due caviglie *t* ed *u.* Se si abbandona allora il nottolino all' azione della molla questa lo spinge contro la caviglia, la quale resta cosi impigliata nell' intaccatura *w.* In tal modo la caviglia e per conseguenza l'asta a cui essa va unita, rimane rigidamente legata alla ruota F.

Nella disposizione dello strumento rappresentata dalle *Fig.* 3_a 3_b, è il braccio H quello che ha la sua caviglia *t* impigliata nella cavità del nottolino e che quindi è solidale alla ruota F.

La lunghezza dell'asta H misurata dal centro della ruota maggiore F, alla punta del calcatoio *p* da essa portato è di 2^{dc} e quella dell' asta K misurata pure dal centro della ruota F alla punta del suo calcatoio *q* è di $1^{dm},66$.

Queste due aste H e K presentano poi ancora sopra due, loro facce laterali i fori *a* e *b* destinati a ricevere rispettivamente i piuoli *h* e *k* della piastra D del carrello quando si debbono collegare a questo per potere usare lo strumento.

La ruota dentata minore G porta poi una rotella P perpendicolare al suo piano , la quale presenta verso una delle sue basi un orlo , ed è divisa verso l' altra base sulla sua superficie convessa in cento parti eguali. Innanzi alla rotella graduata P avvi un nonio fisso Q, il quale comprende nove divisioni della rotella ed è diviso in dieci parti uguali; con questo nonio Q si può quindi valutare la decima parte di ogni divisione della rotella.

La rotella graduata P è calettata sopra un alberetto *y* posto al disotto della ruota G parallelo al piano della medesima ed i cui perni si appoggiano contro due punte *y* infisse nelle due sporgenze *d* che la ruota G presenta sull'orlo della sua faccia inferiore. Questo albero *y* è munito di una vite perpetua *e* la quale ingrana con un piccolo rocchetto *j* il cui asse che è perpendicolare al piano della ruota G, porta alla sua estremità superiore un disco graduato R. L'asse del rocchetto j è sostenuto da una piastrina y piegata ad angolo retto, la quale è unita con viti alla faccia inferiore della ruota G. Tanto l'imbocco del rocchetto colla vite perpetua, quanto questa piastra y, vedonsi nella *Fig.* 3_c che rappresenta la sezione fatta attraverso all'albero del rocchetto dal piano della faccia inferiore della ruota G.

Pertanto in virtù dell'accennata disposizione, girando la rotella P attorno al proprio asse, mentre si sviluppa sul piano del disegno, il disco R rota esso pure attorno al suo asse, e siccome questo disco è diviso in dieci parti uguali ed il rocchetto j ha dieci denti, ad ogni rivoluzione intera della rotella passa dinanzi ad un indice fisso c segnato sulla ruota G, una divisione del disco ; ed ogni giro intero del disco corrisponde a dieci rivoluzioni della rotella graduata P.

Giova qui notare che allorquando si adopera lo strumento, l'asta che è unita al carrello le cui rotelle trovansi nella scanalatura del regolo, riesce sempre perpendicolare al regolo stesso, e che il rotismo rimane sollevato ad una certa altezza sul piano orizzontale del disegno in virtù dell'orlo verticale della rotella graduata, che ora striscia ed ora si sviluppa sopra il detto piano mentre uno dei calcatoi percorre il perimetro della figura che si considera.

Le *Fig.* 5_a e 5_b della *Tav.* 1^a rappresentano per ultimo un'asta S di ottone la quale serve a disporre il regolo parallelamente all'asse rispetto al quale si vuole avere il momento statico od il momento d'inerzia di una figura piana.

Quest'asta presenta perciò ad una delle sue estremità una traversa q con tagliente il quale può penetrare nella scanalatura del regolo ed all' altra estremità porta una punta t, la quale, se il regolo è parallelo all' asse dei momenti, deve percorrere questo asse quando l'asta S si sposta parallelamente a se stessa mantenendo sempre il tagliente della sua traversa nella scanalatura del regolo stesso. Vedesi pertanto che per tentativi si può assai facilmente rendere parallelo all'asse dei momenti, il regolo AA, spostandolo per modo che per qualunque posizione dell' asta S, mentre il tagliente della traversa q si trova nella sua scanalatura, la punta t sia sull'asse suddetto.

Valutazione dell'area di una figura piana

3. — *Disposizione dell'integratore.* - Onde valutare per mezzo dell'integratore, l'area di una figura piana qualunque, si disponga sul piano di questa, che dovrà essere orizzontale, il regolo AA a distanza conveniente dalla figura data. In seguito si colleghi l'asta K (*Fig*^{re} *Tav.* 1^a) col carrello nella posizione determinata dal piuolo k facendo penetrare questo piuolo nel foro corrispondente b dell'asta medesima e fissando questa alla piastra D del carrello per mezzo della piastrina i che la tratterrà contro la piastra D stessa in virtù della pressione che si può esercitare colla vite E.

Al carrello si adatti inoltre il contrappeso cilindrico introducendo l'estremità n del suo gambo nel foro corrispondente m praticato sopra una faccia laterale dell' intelaiatura del carrello medesimo. Dopo di ciò si renda l'asta H solidale alla ruota maggiore F facendo impigliare nel modo indicato la caviglia t, che è rigidamente fissa a quest'asta nella cavità w del nottolino M portato dalla stessa ruota F.

Essendo così l'asta H fissa alla ruota F, questa e la ruota G resteranno legate tra di loro per modo che potranno partecipare insieme al movimento di rotazione che prenderà necessariamente l'asta H attorno all'asse della ruota F mentre la punta del calcatoio p di cui quest'asta va munita percorrerà il contorno dell'area da valutarsi.

Per ultimo si facciano entrare le rotelle C del carrello nella scanalatura aa praticata nel regolo AA che serve a guidare il movimento dell' integratore, il quale resterà per tal modo appoggiato colle rotelle C sul regolo AA e toccherà il piano del disegno per mezzo dell' orlo verticale della rotella P e della punta del calcatoio p.

Disposto così lo strumento, esso sarà apparecchiato per la valutazione dell'area della figura data.

La *Fig.* 1^a della *Tav.* II^a rappresenta nella scala di $^1/_2$ la disposizione ora indicata dell' integratore, necessaria per la valutazione di un'area qualunque W che sul disegno si suppose essere quella della sezione trasversale di un ferro a doppio T.

4. — *Teoria.* - Sia W una figura chiusa qualunque di cui si voglia avere mediante l'integratore l'area (*Fig.* 2^a *Tav.* III^a).

Supponendo perciò disposto lo strumento sul piano di questa figura nel modo anzi indicato, rappresentino: AA il regolo nella cui scanalatura scorreranno le rotelle sul carrello B, K l'asta che sarà collegata al carrello B e perciò perpendicolare al regolo AA, H l'altro braccio che sarà solidale alla ruota F ed il cui calcatoio p deve percorrere il contorno della figura, e finalmente P la rotella graduata unita alla ruota G.

Dovendo riferire la figura a due assi coordinati, assumeremo per asse delle ascisse la retta

XX parallela al regolo AA e passante pel centro I della ruota maggiore F, e per asse delle ordinate una perpendicolare qualunque YY all'asse XX.

Supponendo poi che la punta del calcatoio di cui va munita l'asta H sia in un punto qualunque p di coordinate x ed y del contorno della figura W, diciamo a e b gli angoli fatti rispettivamente coll'asse XX dal braccio H, e dall'asse della rotella graduata P.

Ciò posto vediamo come si possa trovare l'arco lineare del quale si sviluppa la rotella graduata mentre il calcatoio percorre l'intero perimetro della figura data.

Immaginiamo perciò fatto percorrere al calcatoio p un archetto infinitamente piccolo pp' che indicheremo con ds del contorno della figura data, e cerchiamo il valore del cammino fatto dalla rotella graduata P durante questo spostamento del calcatoio. Il movimento subito dal calcatoio nel percorso dell' archetto ds si può considerare come risultante dalla combinazione di due altri movimenti, uno fatto secondo il tratto $pp''=dx$ parallelamente all'asse delle x e l'altro secondo il tratto $p''p'=dy$ parallelamente all' asse delle y ; quindi potremo sostituire allo spostamento ds subito dal calcatoio , le sue due componenti dx e dy secondo i due assi coordinati.

In virtù dello spostamento $pp''=dx$ del calcatoio mentre il carrello avrà preso a scorrere colle rotelle nella scanalatura del regolo andando in B", l'asta K solidale al carrello si sarà spostata parallelamente a se stessa in K", il braccio H si sarà trasportato pure parallelamente a se stesso nella posizione H" e la rotella graduata P avrà subita una traslazione PP" parallela all'asse XX ed eguale a dx, sviluppandosi ad un tempo sopra il piano della figura.

Per ottenere la lunghezza dell'arco di cui si sarà sviluppata la rotella sul piano del disegno, basterà scomporre la sua traslazione PP" nelle due componenti PP''' e P" P''' perpendicolare l'una e parallela l'altra all'asse della rotella medesima. I valori di queste componenti come ricavansi dal triangolo rettangolo PP"P''' sono:

$$PP'''=PP''\ sen\ b = dx\ sen\ b.$$
$$P''P'''=PP''\ cos\ b = dx\ cos\ b.$$

La componente P" P''' della traslazione subita dalla rotella essendo diretta secondo l'asse della medesima, evidentemente non avrà prodotta alcuna rotazione nella rotella stessa e quindi si potrà trascurare. Per causa invece della componente PP''' la rotella girando attorno al proprio asse, si sarà sviluppata sul piano del disegno di un arco la cui lunghezza è data appunto da $PP'''=dx\ sen\ b$.

Vedesi adunque da ciò che, in virtù della componente dx sullo spostamento ds subito dal calcatoio, la rotella graduata si sarà svolta, scorrendo sul piano del disegno di un arco lineare che indicheremo con du_1 la cui espressione è :

$$du_1=dx\ sen\ b. \qquad (1)$$

Assumeremo sempre positivi gli sviluppi della rotella che avvengono per rotazioni fatte nel senso diretto , cioè nel senso per cui dinanzi all'indice fisso vengono a passare successivamente le divisioni della graduazione indicate coi numeri progressivi 0, 1, 2, 3, . . . e negativi quelli che avvengono per rotazioni fatte nel senso retrogrado cioè nel senso contrario al precedente ; quindi attesochè durante lo spostamento dx del calcatoio la rotazione della rotella si fa nel senso diretto, il du_1 dovrà avere il segno positivo.

Resta ora a considerarsi la componente dy dello spostamento ds subito dal calcatoio.

Di questa componente dy però è inutile tenerne conto non avendo essa alcuna influenza sullo sviluppo totale della rotella, inquantochè mentre la punta del calcatoio si sposterà della quantità dy, la rotella subirà è vero una certa rotazione attorno al proprio asse sviluppandosi sul piano del disegno , ma è facile riconoscere che questa rotazione sarà eliminata da un'altra eguale e di segno contrario che dovrà subire la rotella stessa nell' intero percorso del contorno della figura.

Consideriamo infatti i punti p p_1 p' p_1' del perimetro della figura W, i quali hanno rispettivamente le stesse ordinate y, $y+dy$; supposto il calcatoio nel punto p_1' gli è evidente che per causa del braccio K solidale al carrello, il quale è obbligato a scorrere nella scanalatura del regolo AA parallelo all'asse delle x, l'asta H farà coll' asse XX lo stesso angolo da essa fatto col medesimo asse quando il calcatoio era in p', ed analogamente quando il calcatoio sarà in p_1 l'asta H farà coll'asse XX lo stesso angolo da essa fatto coll'asse XX medesimo allorquando il calcatoio si trovava in p. Gli angoli adunque fatti dall'asse della rotella graduata coll'asse XX corrispondentemente alle posizioni p_1' e p_1 del calcatoio saranno rispettivamente eguali a quelli fatti dallo stesso asse della rotella coll'asse XX corrispondentemente alle posizioni p' e p del calcatoio. Segue da ciò che quando il calcatoio giunto che sia nel punto p_1' passerà da questo al punto p_1 , la rotazione che la rotella graduata subirà in virtù dello' spostamento $p_1'p_1'' = -dy$ sarà eguale e di segno contrario a quella subita dalla rotella medesima durante il passaggio del calcatoio dal punto p al punto p' in virtù dello spostamento $p''\ p'=dy$.

Per conseguenza la somma algebrica degli archi elementari descritti dalla rotella graduata durante il percorso di tutto il contorno dell'area data in virtù degli spostamenti del calcatoio paralleli all'asse YY, sarà la somma di archi due a due eguali e di segno contrario e perciò si ridurrà a zero.

Lo sviluppo totale della rotella, avvenuto durante il percorso di tutto il contorno della figura *W*, per essere la somma degli archi di cui andò svolgendosi la rotella medesima in virtù di tutti gli spostamenti *dx* e *dy* presi dal calcatoio, resterà quindi dato dall' integrale dell' espressione (1) esteso all'intero perimetro della figura stessa.

È ora facile il riconoscere che nella disposizione attuale dello strumento, attesochè esso è costrutto in modo che vincolando l' asta H alla ruota maggiore F, la rotella P viene a disporsi coll'asse suo nel piano verticale passante per quello del braccio H, l' angolo *b* fatto dall' asse della rotella graduata coll' asse XX è sempre eguale al corrispondente angolo *a* fatto dall'asta H coll'asse XX stesso.

Dicendo pertanto *a* la lunghezza dell'asta H misurata dal centro I della ruota F alla punta *p* del calcatoio che vi è unito, e T il piede della perpendicolare calata dal punto *p* del contorno dell'area *W* sull'asse delle *x*, dal triangolo rettangolo *IpT* si ricava :

$$\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{pT}{Ip}$$

ossia per essere *pT=y* ed *Ip=a* ed *a=b* :

$$\mathrm{sen}\,\beta = \frac{y}{a}$$

quindi sostituendo questo valore nell' espressione (1) si avrà :

$$du_1 = \frac{y}{a}\,dx.$$

Lo sviluppo totale della rotella graduata avvenuto durante lo scorrimento del calcatoio su tutto il contorno della figura essendo l'integrale di du_1 esteso a tutto il perimetro della figura medesima, chiamandolo con w, sarà espresso da :

$$u_1 = \int \frac{y}{a}\,dx = \frac{1}{a}\int y\,dx.$$

Di qui si ricava :

$$\int y\,dx = a u_1$$

ma $\int y\,dx$ non è altro che l'area, che diremo A, della figura *W* di cui si percorse col calcatoio il contorno, quindi si avrà :

$$A = a u_1$$

Osservando ora che lo sviluppo totale u_1, della rotella è anche dato dal prodotto del numero dei giri, che diremo N_1, fatti dalla medesima durante lo scorrimento del calcatoio sull'intero perimetro della figura, per lo spazio lineare percorso dalla rotella durante ogni giro, ossia per la lunghezza *l* della circonferenza dell'orlo della rotella stessa, si avrà :

$$A = a N_1 l. \qquad (2)$$

Affinchè lo strumento sia maggiormente comodo, conviene che le lunghezze *a* e *l* abbiano valori tali che ad ogni giro della rotella graduata, ossia ad ogni divisione del disco graduato, corrisponda una determinata unità superficiale. Il Costruttore prese per questa unità di superficie il decimetro quadrato e siccome diede ad *a* il valore di *2* decimetri, ricavò quello da assegnarsi a l dalla forinola (2) dopo aver fatto in essa : $A=1^{dq}$ $a=2^{dm}$ ed $N=1$.

Fatte pertanto queste sostituzioni si ricava :

$$l = 0^{dm},5.$$

Essendo questo il valore della lunghezza della circonferenza dell' orlo della rotella, se ne può trovare il raggio *r* dall'eguaglianza :

$$2pr = 0^{dm},5$$

che dà :

$$r = 0^{dm},0795.$$

Avendo dunque il Costruttore dell'apparecchio fatto $a=2^{dm}$, e $l=0^{dm}$, 5 si ha che ad ogni giro della rotella e quindi ad ogni divisione del disco graduato corrisponde un decimetro quadrato di area, e poichè la rotella è divisa in 100 parti eguali, ad ogni divisione di questa corrisponde l'area di un centimetro quadrato. Essendovi poi il nonio che abbraccia nove divisioni della rotella ed è diviso in 10 parti eguali, con esso si possono valutare i decimi di centimetro quadrato.

5. — *Uso dell'integratore.* - Riesce ora facile il vedere come si debba adoperare praticamente l'integratore nella valutazione delle aree. Disposto l' apparecchio nel modo indicato al N° 3 si segni sul contorno della figura di cui si vuole valutare l' area, un punto qualunque e messa la punta del calcatoio *p* portata dall'asta H *(Fig. 1ª Tav. IIª)* esattamente in quel punto, si faccia la lettura del numero delle divisioni segnate sul disco graduato R e sulla rotella P.

Sia n_1 questa prima lettura.

Per mezzo della punta del calcatoio *p* si percorra allora il contorno della figura procedendo nel senso della rotazione delle lancette degli orologi. Quando si sarà ritornati esattamente al punto di partenza, si faccia la nuova lettura sul disco graduato e sulla rotella; sia n_1' il numero così ottenuto.

L' area della figura di cui si sarà percorso nel modo indicato il contorno, espressa in decimetri quadrati verrà data dalla formola :

$$A = n_1' - n_1.$$

Attesoché la più piccola quantità che si può leggere direttamente col nonio, è un decimo di centimetro quadrato si vede che nella valutazione di aree piccole si può commettere un errore relativo abbastanza considerevole, giacché ad es. per un area di 10^{cmq} si può fare l'errore di circa l'uno per cento.

Questo errore però si potrà diminuire percorrendo col calcatoio per la stessa area da valutarsi più volte il contorno e ripetendo anche l'operazione cambiando di posizione lo strumento, precisamente come si procede allorquando si adopera il planimetro polare. Il numero delle volte da percorrersi il contorno della medesima area da valutarsi varia evidentemente coll' ampiezza dell'area stessa.

L'integratore poi, dà il valore dell'area della figura che è rappresentata sul disegno e di cui si percorre il contorno col calcatoio ; per conseguenza se la figura che si ha sul disegno è la sola rappresentazione della figura di cui si vuole avere effettivamente F area , fatta in una certa scala, per ottenere il vero valore di quest'area bisognerà dividere quella ottenuta coll'integratore operando sul disegno, per il quadrato della frazione che indica la scala in cui il disegno fu eseguito.

Per ultimo si può dire che se la figura di cui si cerca l'area è molto grande, essa si potrà scomporre in aree minori tali da ammettere dei contorni che si possano facilmente percorrere col calcatoio e quindi sommare queste aree parziali fra di loro.

L'integratore, nella valutazione delle aree, si può anche adoperare come un planimetro polare. In questo caso non si userà più nè il regolo nè il carrello, ma basterà rendere solidale Fasta H alla ruota F impigliandone la sua caviglia *t* nella cavità *w* del nottolino M e quindi fare servire la punta *q* portata dall' asta K come polo, mentre col calcatoio *p* del braccio H si percorrerà il contorno dell'area da misurarsi.

La teoria dell' integratore adoperato nella valutazione delle aree come planimetro polare , reputo inutile riportarla, coincidendo essa con quella svolta già da molti autori pel planimetro polare medesimo.

6. — *Verifica dell' integratore.* - Dovendo pel caso dell'area essere $b = a$, quando sarà $a=0°$ si dovrà avere pure $b=0°$, cioè quando l'asta H si troverà sull'asse XX anche l'asse della rotella dovrà trovarsi sulla retta XX, il suo orlo dovrà per conseguenza giacere in un piano perpendicolare ad XX e quindi se col calcatoio si percorrerà questo asse la rotella non dovrà subire alcuna rotazione.

Si può adunque verificare l'esattezza dello strumento portando lo zero della graduazione della rotella in corrispondenza dello zero del nonio ed osservando se percorrendo colla punta del calcatoio *p* l'asse XX, lo zero della graduazione della rotella si mantenga in corrispondenza dello zero del nonio.

Valutazione del momento statico di una figura piana rispetto ad un asse

7. — *Disposizione dell'integratore.* - Per potere trovare il momento statico di una figura piana rispetto ad un asse qualunque contenuto nel piano della medesima per mezzo dell' integratore, s'incominci a disporre il regolo AA *(Figre Tav. Iª)* su questo piano, che deve essere orizzontale, per modo che esso risulti parallelo all'asse dei momenti. Serve a tale scopo, come già si disse, l'asta S; messo perciò il tagliente della traversa *q* che trovasi ad una delle estremità di quest'asta S, nella scanalatura del regolo AA, si sposterà questo finché siasi giunti ad ottenere una sua posizione tale, che facendo scorrere il tagliente della traversa nella scanalatura, la punta *t* che trovasi all'altra estremità dell'asta percorra l'asse dei momenti.

Disposto così il regolo parallelamente all'asse dei momenti, si colleghi l'asta H al carrello nella posizione determinata dal piuolo *h* che trovasi sulla piastra D del carrello, facendo penetrare questo piuolo nel foro corrispondente a dell'asta medesima e fissando questa alla suddetta piastra D per mezzo della piastrina *i* e della vite di pressione E.

In seguito si renda l'asta K solidale alla ruota maggiore F impigliandone nel solito modo la sua caviglia *u* nella cavità *w* del nottolino M.

In grazia di questa disposizione, il braccio K girando attorno all'asse della ruota maggiore F, trascinerà nel suo movimento anche la ruota F stessa e siccome questa ingrana colla ruota minore G, obbligherà pure quest'altra ruota G a girare attorno all'asse proprio.

Finalmente si portino le rotelle del carrello, a cui si sarà ancora unito il contrappeso, nella scanalatura del regolo AA e così l'integratore, che verrà ad appoggiarsi sul piano del disegno per mezzo dell'orlo della rotella graduata e della punta del calcatoio *q*, sarà disposto per la valutazione del momento statico della figura data.

Giova pertanto qui l' osservare che in virtù della conveniente distanza fra la punta *t* dell'asta S che serve a disporre il regolo AA parallelo all'asse dei momenti ed il tagliente della traversa *q* dell' asta medesima, il centro della ruota maggiore F allorquando si sarà messo a posto lo strumento nel modo suddetto, verrà a trovarsi verticalmente al disopra dell' asse dei momenti, e vi si manterrà anche durante il movimento dello strumento.

La *Fig. 2ª* della *Tav. IIª* rappresenta nella scala di $^1/_2$ la disposizione indicata dell'integratore, necessaria per la valutazione del momento statico rispetto all'asse XX della sezione trasversale dello stesso ferro a doppio T che già si considerò nel caso dell'area, e di più indica una posizione dell'asta S che serve a disporre il regolo parallelamente all'asse dei momenti.

8. — *Teoria*. - Sia *W* (*Fig. 3ª Tav. IIIª*) una figura chiusa qualunque della quale si voglia avere il momento statico rispetto ad un asse qualsiasi XX del suo piano. Supponiamo perciò collocato sul piano di questa figura l'integratore nella disposizione anzi indicata e siano : AA il regolo parallelo all'asse dei momenti XX, B il carrello le cui rotelle debbono scorrere nella scanalatura del regolo AA, H l'asta che in questo caso sarà collegata al carrello e perciò perpendicolare al regolo, e K l'altro braccio solidale alla ruota F, il cui centro I, per quanto si disse precedentemente si troverà sempre sopra l'asse XX. Per ultimo siano : *q* il calcatoio portato dal braccio K e che deve percorrere il contorno della figura e P la rotella graduata unita alla ruota minore G.

Anche in questo caso prenderemo l'asse XX per asse delle ascisse ed una sua perpendicolare qualunque YY per asse delle ordinate.

Supponendo che la punta del calcatoio portata dal braccio K si trovi in un punto qualunque *q* di coordinate *x* ed *y* del contorno della figura *W*, diciamo ancora *a* 1' angolo fatto dal braccio K coll' asse XX e *b* l'angolo fatto dall' asse della rotella P nella posizione che essa occupa corrispondentemente a quella *q* del calcatoio, collo stesso asse XX.

Ciò premesso vediamo di trovare l' arco del quale si svolgerà la rotella graduata mentre il calcatoio percorrerà l'intero contorno della figura.

Supponiamo perciò che al calcatoio *q* si faccia percorrere un archetto infinitamente piccolo *qq'* che diremo *ds* del perimetro della figura; la rotella si svilupperà sul piano del disegno di un certo arco la cui lunghezza si può facilmente ottenere, sostituendo, come pel caso dell' area, allo spostamento *ds* le sue due proiezioni *dx* e *dy* fatte rispettivamente sopra i due assi XX ed YY. In virtù dello spostamento *dx* del calcatoio, il carrello si sarà trasportato in B'' , l' asta H sarà venuta parallelamente a se stessa in H'' , il braccio K in K'' e la rotella P si sarà trasportata pel tratto PP'' parallelo all'asse XX ed eguale a *dx*.

In questa traslazione la rotella girando attorno al proprio asse si sarà sviluppata sul piano del disegno di un arco la cui lunghezza è data dalla proiezione PP''' del tratto PP'' sopra una perpendicolare al suo asse; e siccome dal triangolo rettangolo PP''P''' si ha :

PP'''=PP'' sen(b—P)=— PP'' senb=— *dxsenb* così lo sviluppo della rotella subito in virtù dello spostamento *dx* dei calcatoio, chiamandolo con du_2 sarà espresso da :

$$du_2 = -dx\, \mathrm{sen}\, b. \qquad (1)$$

Anche qui avvertiremo che il du_2 ha il segno positivo attesochè la rotazione della rotella graduata si fa nel senso diretto (N° 4).

Ripetendo ora lo stesso ragionamento fatto pel caso dell' area, si vedrà facilmente come dello spostamento *dy* del calcatoio non se ne debba tener conto, non avendo esso alcuna influenza sullo sviluppo totale della rotella che avverrà durante il percorso dell'intiero perimetro della figura data.

Segue da ciò che la lunghezza dell' arco di cui si sarà sviluppata la rotella graduata durante il percorso di tutto il perimetro della figura, sarà dato dall' integrale dell'espressione (1) esteso a tutto il contorno della figura stessa.

È facile ora riconoscere che nella disposizione attuale dell' integratore , fra i due angoli *a* e *b* che in una posizione qualunque dello strumento fanno coll' asse XX rispettivamente il braccio K che porta il calcatoio *q* e l'asse della rotella graduata, si ha sempre la relazione:

$$b=\frac{\pi}{2}+2a.$$

Ed invero per essere 2:1 il rapporto dei raggi delle circonferenze primitive delle due ruote dentate F e G, mentre il braccio K roterà colla ruota maggiore attorno all' asse, della medesima di un angolo *a*, la ruota minore in un colla rotella P girerà attorno al proprio asse di un angolo 2 *a* .

D'altra parte essendo lo strumento costrutto per modo che quando l'asta H ha la sua caviglia

impigliata nella cavità del nottolino (caso dell'area) l'asse della rotella graduata si trova nel piano verticale passante per quello dell'asta H medesima, è evidente che se disposta l'asta K perpendicolarmente all'asta H, si svincolerà la caviglia dell'asta H dal nottolino e mantenendo fermi i due bracci H e K si farà rotare la ruota maggiore attorno al proprio asse di 90°, per modo che il nottolino venga ad abbracciare colla sua cavità la caviglia dell' asta K, la ruota minore G, girando di un angolo doppio , cioè di 180°, porterà la rotella graduata P nella posizione diametralmente opposta a quella che aveva prima, e quindi l'asse della rotella verrà ancora a fare un angolo di 90° colla direzione dell' asta K.

Segue da ciò, che se l' asta H è collegata al carrello B, avente le rotelle nella scanalatura del regolo AA, e l'asta K è solidale alla ruota maggiore F, che cioè se lo strumento è nella disposizione indicata per la valutazione del momento statico di una figura, quando l' asta K andrà a collocarsi in K_0 sulla direzione dell'asse XX, che è perpendicolare all'asta H, la rotella graduata verrà in P_0, dove il suo asse farà un angolo di 90° colla direzione dell' asta K_0, ossia coll' asse XX stesso. Se ora l'asta K si sposterà dalla posizione K_0 rotando attorno all' asse della ruota maggiore di un angolo *a*, l'asse della rotella graduata girando dell'angolo 2*a* attorno a quello della ruota minore, verrà a fare coll'asse XX un angolo $b=\frac{\pi}{2}+2a$.

Sostituendo a *b* il suo valore nell' espressione (1) si avrà :

$$du_2=-dx\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2a\right)$$

ossia per essere :

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2a\right)=\cos 2a=1-2\,\mathrm{sen}^2 a$$

$$du_2=-dx(1-2\,\mathrm{sen}^2 a).$$

Dicendo ora *b* la lunghezza dell'asta K misurata dal centro I della ruota maggiore alla punta del calcatoio *q*, di cui essa è munita, e T il piede della perpendicolare calata dal punto *q* del contorno della figura che si considera sull'asse XX, dal triangolo rettangolo IqT si ha :

$$\mathrm{sen}\, a=\frac{qT}{Iq}$$

ossia per essere.

$$qT=y \text{ ed } Iq=b:$$

$$\mathrm{sen}\, a=\frac{y}{b}$$

e quindi:

$$du_2=-dx\left(1-2\frac{y^2}{b^2}\right).$$

Lo sviluppo totale della rotella graduata corrispondente al percorso dell'intero contorno della figura, sarà adunque dato dall'integrale di quest' ultima espressione di du_2, esteso all' intero perimetro della figura stessa, e quindi indicandolo con u_2 sarà espresso da :

$$u_2=\int\left(2\frac{y^2}{b^2}-1\right)dx=\frac{2}{b^2}\int y^2dx-\int dx$$

ma $\int dx$ esteso a tutto il contorno della figura data evidentemente si annulla, perciò sarà :

$$u_2=\frac{2}{b^2}\int y^2dx.$$

Da questa espressione si ricava :

$$\frac{1}{2}\int y^2dx=\frac{b^2}{4}u_2$$

ma $\frac{1}{2}\int y^2dx$ esteso a tutto il contorno della figura è il momento statico della figura stessa rispetto all'asse XX, quindi rappresentandolo con S si avrà :

$$S=\frac{b^2}{4}u_2.$$

Ora lo sviluppo totale u_2 della rotella graduata avvenuto durante l'intero percorso del contorno della figura data, è evidentemente eguale al prodotto della lunghezza l. della circonferenza dell'orlo della rotella pel numero N_2 dei giri dati dalla rotella medesima durante il movimento del calcatoio, e perciò sarà :

$$S=\frac{b^2}{4}l\,N_2.$$

La lunghezza *b* dell'asta K fu scelta dal Costruttore dello strumento, come già si disse, di $1^{dm},66$, e siccome fu già trovato nel caso dell' area: $l=0^{dm},5$, così sostituendo questi valori nella formola precedente si avrà :

$$S=0{,}34445N_2.$$

9. — *Uso dell'integratore*. - Data adunque una figura qualunque, per la quale si voglia valutare il momento statico rispetto ad un asse del suo piano, disposto lo strumento nel modo indicato al N° 7, si segni sul perimetro della figura un punto qualunque e messa la punta del calcatoio *q*, portata dal braccio K (*Fig. 2ª, Tav. IIª*), esattamente in questo punto si faccia la lettura del numero delle divisioni segnate sul disco graduato R e sulla rotella P. — Sia n_2 questa lettura.

Si percorra in seguito per mezzo del calcatoio *q* il contorno della figura, procedendo sempre nel senso della rotazione delle lancette degli orologi. Quando si sarà ritornati esattamente al punto donde si era partiti, si faccia una nuova lettera sul disco graduato e sulla rotella ; sia n_2' il numero cosi ottenuto.

Il momento statico della figura, di cui si percorse il contorno, rispetto all'asse dato, sarà espresso dalla formola

$$S=0{,}34445\ (n_2'-n_2).$$

Anche per questo caso avvertiremo che se la figura che si ha sul disegno non è che la rappresentazione fatta in una certa scala di quella per cui si vuole avere il momento statico, rispetto ad un certo asse, onde ottenere il vero valore di questo momento, bisognerà dividere quello dato dall' integratore operando sul disegno, pel cubo della frazione che rappresenta la scala.

Atteso poi che l'unità di lunghezza presa per lo strumento è il decimetro, gli è facile vedere che volendosi riferire al metro, bisognerà dividere il valore del momento statico ottenuto coll'integratore per 10^3.

10. — *Verifica dell'integratore.* - La relazione $b=p/2+2a$, che deve esistere costantemente nel caso del momento statico fra gli angoli *a* e *b*, dà a vedere che per $a=45°$ dovrà essere $b=180°$, che cioè se l'asta K farà un angolo di 45° coll' asse XX, l' asse della rotella graduata dovrà riescire parallelo alla direzione dell'asse XX medesimo. Il bordo della rotella dovrà giacere in un piano perpendicolare all'asse XX, e quindi se col calcatoio *q* si percorrerà una parallela a quest'asse, mantenendo sempre l'asta K, inclinata a 45° sull'asse XX stesso, evidentemente la rotella non dovrà subire alcuna rotazione. Si potrà perciò verificare per questo caso lo strumento, portando lo zero della graduazione della rotella in corrispondenza dello zero del nonio, ed osservando se percorrendo col calcatoio *q* una parallela all'asse XX, distante da questo di una quantità data da:

$$b \operatorname{sen} 45° = 1,^{\mathrm{dm}} 66 \times \sqrt{\frac{1}{2}}$$

quantità che in via di approssimazione si può ritenere eguale a $1,^{\mathrm{dm}}17$, lo zero della graduazione della rotella si mantenga in corrispondenza di quello del nonio.

11. — *Determinazione del centro di gravità di una figura piana qualunque.* - Per mezzo dell' integratore si può determinare assai facilmente il centro di gravità di una figura piana qualunque. Basta infatti per la figura data, trovare con questo strumento l'area ed i momenti statici rispetto a due assi qualunque del suo piano, non paralleli tra di loro e dividere questi momenti statici per l'area ; evidentemente i quozienti che così si otterranno, rappresenteranno i valori delle distanze dai due assi dei momenti del centro di gravità che si cerca, il quale sarà perciò pienamente determinato.

Se la figura ammetterà un asse di simmetria, come è appunto la sezione trasversale di un ferro a doppio T, rappresentata nella *Fig. 2ª, Tav. IIª*, il centro di gravità *g* si troverà su questo asse e quindi per determinarlo basterà cercare la sua distanza da un altro asse qualunque non parallelo a quello di simmetria. Lo stesso si dica se la figura ammette un diametro.

Valutazione del momento d'inerzia di una figura piana rispetto ad un asse

13. — *Disposizione dell'integratore.* - Per trovare il momento d'inerzia di una figura piana rispetto ad un asse qualunque del suo piano, si disponga ancora sul piano di questa figura, il quale dovrà essere orizzontale , il regolo AA, *(Figᵉ Tav. Iª)* parallelamente all' asse dei momenti. Questo si farà impiegando l'asta S e procedendo nello stesso modo indicato pel caso della ricerca del momento statico. Si colleghi in seguito l'asta K al carrello nella posizione determinata dal piuolo *k*, facendo entrare questo piuolo nel foro corrispondente *b* dell'asta medesima, e fissando questa, secondo il solito, alla piastra D del carrello per mezzo della piastrina *i* e della vite di pressione E.

Dopo di ciò si renda solidale alla ruota maggiore F lo stesso braccio K che si unì al carrello impigliandone la caviglia *u* nella cavità *w* del nottolino M. In virtù di questa disposizione e per essere la ruota G unita all' asta H per mezzo del suo albero, quando questo braccio H roterà attorno all' asse della ruota maggiore F, trascinerà seco nel suo movimento anche la ruota G, la quale si svilupperà ad un tempo sulla ruota F, rotando attorno all'asse proprio di un angolo doppio di quello descritto dall'asta H medesima.

Si portino per ultimo le rotelle del carrello, come pei casi precedenti, nella scanalatura *aa* del regolo AA, e l'integratore che verrà per tal

modo a toccare il piano del disegno per mezzo dell'orlo della rotella graduata P e della punta del calcatoio *p*, sarà apparecchiato per la valutazione del momento d'inerzia della figura che si considera rispetto all'asse dato.

Anche in questo caso osserveremo che in virtù sempre della conveniente distanza fra il tagliente della traversa *q*, di cui va munita l'asta S che serve a disporre il regolo parallelamente all' asse dei momenti e la punta *t* dell'asta medesima, allorquando lo strumento sarà messo a posto nel modo testè indicato, il centro della ruota maggiore F verrà a trovarsi verticalmente al disopra dell' asse dei momenti e vi si manterrà sempre durante il movimento dell'apparecchio.

Nella *Fig. Iª Tav. IIIª* è rappresentata nella scala di 1/2 la disposizione dell'integratore necessaria per la valutazione del momento d'inerzia della sezione trasversale W del solito ferro a doppio T, rispetto all'asse XX passante pel centro di gravità della sezione medesima.

13. — *Teoria.* Sia W *(Fig. 4ª Tav. IIIª)* una figura chiusa qualunque, della quale si voglia valutare per mezzo dell' integratore il momento d'inerzia rispetto all' asse XX del suo piano. Supponendo perciò disposto lo strumento sul piano della figura nel modo anzi indicato, rappresentino secondo il solito : AA il regolo parallelo all' asse dei momenti XX, B il carrello che avrà le rotelle nella scanalatura del regolo, K l'asta che sarà collegata al carrello B e nello stesso tempo solidale alla ruota maggiore F, H l'altro braccio il cui calcatoio *p* deve percorrere il contorno della figura che si considera, e finalmente P la rotella graduata unita alla ruota minore G.

Anche per quest'ultimo caso prenderemo per asse delle ascisse l' asse XX dei momenti, sul quale, come già si disse, cade costantemente il centro della ruota maggiore F, e per asse delle ordinate una sua perpendicolare qualunque YY. Supponendo poi che la punta del calcatoio portato dal braccio H sia in un punto qualunque *p* di coordinate *x* ed *y* del contorno dell'area data, indichiamo ancora con *a* e *b* gli angoli fatti rispettivamente coll'asse XX, dal braccio H e dall'asse della rotella graduata.

Ciò posto vediamo come si possa trovare anche per questo caso, l'arco del quale andrà svolgendosi la rotella graduata, mentre il calcatoio percorrerà l'intero perimetro della figura data.

Immaginiamo perciò, come pei casi precedenti, che si faccia percorrere al calcatoio un tratto infinitamente piccolo *pp'*, che diremo *ds* del contorno della figura ; lo strumento si sposterà sul piano di questa e la rotella graduata subirà una certa rotazione che si può valutare, sostituendo al solito allo spostamento *ds* del calcatoio, le sue due componenti $pp''=dx$ $p''p'=dy$, prese secondo i due assi delle coordinate.

Di queste due componenti però si considererà anche qui solamente quella diretta secondo l'asse delle *x*, perchè l'altra componente che é diretta secondo l' asse delle *y* non ha, sempre per la già nota ragione, influenza alcuna sullo sviluppo totale della rotella che avviene durante il percorso di tutto il contorno della figura data.

Per causa dello spostamento $pp''=dx$ del calcatoio, il carrello avrà percorso un tratto della scanalatura del regolo andando in B", l'asta K si sarà portata parallelamente a se stessa in K", il braccio H sarà venuto in H" e la rotella graduata P si sarà spostata parallelamente all'asse XX del tratto PP" eguale a *dx*.

La lunghezza dell'arco di cui si sarà sviluppata la rotella in questo movimento , sarà dato ancora dalla proiezione PP'" del tratto PP" sopra una perpendicolare al suo asse, e siccome dal triangolo rettangolo PP"P'" si ricava :

$$PP'''=PP''\operatorname{sen} b$$

così indicando con du_3 questo sviluppo della rotella si avrà :

$$-du_3=dx \operatorname{sen} b. \qquad (1)$$

Si prese il du_3 col segno negativo perché in questo caso durante lo spostamento *dx* del calcatoio , la rotazione della rotella P avviene nel senso retrogrado (N° 4).

Lo sviluppo totale della rotella graduata che avverrà durante il percorso di tutto il perimetro della figura W, sarà quindi dato dall' integrale dell'espressione (1), esteso all'intero perimetro della figura medesima.

Esaminando ora lo strumento , si può riconoscere facilmente che nell'attuale sua disposizione, fra i due angoli a e b fatti coll'asse XX rispettivamente dal braccio H e dall'asse della rotella graduata, sussiste sempre la relazione:

$$b=3a.$$

Infatti, essendosi visto nel caso del momento statico, che allorquando il braccio K è solidale alla ruota F , se lo si dispone perpendicolarmente all' altro H, l'asse della rotella graduata viene a fare un angolo di 90° col braccio K medesimo, è evidente che nella disposizione attuale dello strumento se si porterà l'asta H in H_0 sull'asse XX, che è perpendicolare all'asta K collegata al carrello, la rotella graduata P andrà in P_0, dove il suo asse giacerà sulla direzione dell'asse XX medesimo.

Se quindi si immagina che l'asta H si sposti dalla posizione H_0 rotando attorno all'asse della ruota F dell'angolo a, la ruota minore G in un colla rotella graduata partecipando al movimento di rotazione dell'asta H, girerà dall'angolo a attorno all'asse della ruota maggiore, e nello stesso tempo si svilupperà su questa dell' angolo *2a*. Per conseguenza l'asse della rotella graduata che prima era sulla direzione XX, ora verrà a fare coll'asse XX un angolo $b=a+2a=3a$.

Sostituendo questo valore di b nell' espressione (1) avremo:

$$-du_3=dx\,sen3a.$$

Ora:

$$sen3a=3sena-4sen^3a$$

e siccome :

$$sen\,a=\frac{y}{a}$$

come risulta dal triangolo rettangolo I*p*T, la cui ipotenusa *Ip* è la lunghezza, che abbiamo già nel caso dell'area indicata con *a*, dell'asta H misurata dal centro I della ruota F alla punta del calcatoio *p*, ed il cateto *p*T, l'ordinata *y* del punto qualunque *p* del contorno della figura W, così sostituendo si avrà :

$$-du_3=\left(3\frac{y}{a}-4\frac{y^3}{a^3}\right)dx.$$

Lo sviluppo totale della rotella graduata essendo l'integrale dell'espressione di — du_3 esteso a tutto il contorno della figura W, sarà espresso da:

$$-u_3=\int\left(3\frac{y}{a}-4\frac{y^3}{a^3}\right)dx=\frac{3}{a}\int ydx-\frac{4}{a^3}\int y^3dx.$$

Avvertendo ora che $\int ydx$ è l'area della figura data e che allorquando si considerò questo caso si trovò :

$$\int ydx=au_1$$

avremo :

$$-u_3=3u_1-\frac{4}{a^3}\int y^3dx$$

donde si ricava :

$$\frac{1}{3}\int y^3dx=\frac{a^3}{4}\left(u_1+\frac{1}{3}u_3\right)$$

ma $\frac{1}{3}\int y^3dx$ è il momento d'inerzia, che indicheremo con I, della figura data rispetto all' asse XX, quindi sarà :

$$I=\frac{a^3}{4}\left(u_1+\frac{1}{3}u_3\right).$$

Essendo poi $u_1=N_1l$ ed $u_3=N_3l$ indicando con N_3 il numero dei giri dati dalla rotella graduata durante l'intero percorso del contorno della figura W fatto dal calcatoio *p* coll'attuale disposizione dello strumento, avremo :

$$I=\frac{a^3l}{4}\left(N_1+\frac{1}{3}N_3\right)$$

e poichè $a=2^{dm}$ e $l=0^{dm},5$, così sarà:

$$I=N_1+\frac{1}{3}N_3.$$

14. — *Uso dell' integratore.* - Volendosi quindi valutare per mezzo dell'integratore il momento d'inerzia di una figura rispettoad un asse del suo piano, disposto lo strumento nel modo indicato (N. 12), e segnato secondo il solito sul contorno della figura un punto qualunque, si metta la punta del calcatoio *p* portata dal braccio H *(Fig. I^a, Tav. III^a)* esattamente in questo punto, e quindi si faccia la lettura, che indicheremo con n_3, del numero delle divisioni segnate sul disco graduato R e sulla rotella P.

Si percorra in seguito il contorno della figura per mezzo del calcatoio *p*, procedendo ancora nel senso della rotazione delle lancette degli orologi. Quando si sarà ritornati esattamente nel punto di partenza, si faccia la nuova lettura sul disco graduato R e sulla rotella P, e sia n'_3 questa lettura.

Se $n_1'-n_1$ è la differenza delle letture che ci somministra l' area della figura di cui si cerca il momento d'inerzia, questo si avrà colla formola :

$$I=(n_1'-n_1)+\frac{1}{3}(n_3'-n_3).$$

Si vede pertanto che per ottenere per mezzo dell'integratore il momento d'inerzia di una figura piana bisogna pure conoscere la differenza $(n_1'-n_1)$. Questo però non riesce di grave incomodo, poiché avendosi già lo strumento nella disposizione colla quale si ottenne la differenza $(n_3'-n_3)$, per avere quest'altra $(n_1'-n_1)$, supposto che non si conosca già precedentemente, basterà svincolare la ruota F del braccio K e renderla solidale invece al braccio H, lasciando tutte le altre parti dello strumento nella disposizione che avevano prima. Gli è evidente che l'integratore verrà per tal modo ad avere la disposizione indicata al N° 3, e che è appunto quella atta a somministrarci la differenza che si cerca.

Avvertiremo ancora che se la figura che si ha sul piano del disegno, e sulla quale si opera coll'integratore, non è che la rappresentazione fatta in una certa scala di quella per cui si vuole valutare il momento di inerzia, per ottenere il vero valore di questa quantità, basterà dividere il momento d'inerzia della figura che si ha sul disegno e che si sarà ottenuto coll' integratore, per la quarta potenza della frazione che rappresenta la scala in cui la figura fu eseguita.

Finalmente anche per questo caso, ricordando sempre che l' unità di lunghezza scelta per lo strumento è il decimetro, è facile riconoscere che volendosi riferire al metro, bisognerà dividere il valore del momento d'inerzia trovato coll' integratore per 10^4.

15. — *Verifica dell'integratore.* - La relazione $b=3a$ che deve esistere sempre nel caso del momento d'inerzia fra gli angoli a e b, ci fa vedere che per $a=60°$ dovrà essere 3=180°. Se quindi col calcatoio *p* si percorrerà una parallela ali' asse XX, mantenendo sempre 1' asta H inclinata a 60° sull' asse XX stesso, la rotella dovendo avere il suo asse parallelo alla direzione XX, non dovrà subire alcuna rotazione.

Si potrà perciò verificare per questo caso lo strumento portando lo zero della graduazione della rotella in corrispondenza dello zero del nonio, ed osservando se facendo scorrere la punta del calcatoio *p* sopra una parallela all'asse XX distante da questo della quantità :

$$a\,sen60°=2^{dm}\times\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

che si può ritenere eguale ad $1^{dm},73$, i zeri delle due graduazioni si mantengano sempre in corrispondenza.

16. — *Costruzione dell'ellisse centrale d'inerzia di una figura piana qualunque.* - Riesce ora facile vedere come coll' integratore si possa assai speditamente costruire l'ellisse centrale d'inerzia di una figura piana qualunque. Ed invero procedendo nei modi spiegati rispettivamente ai N[i] 5 e 9, si troveranno dapprima l' area della figura data ed i momenti statici della medesima rispetto a due assi qualunque del suo piano non paralleli tra di loro. Dividendo questi momenti statici per l'area, si avranno le distanze da questi due assi, del centro di gravità della figura, centro che resterà per conseguenza completamente determinato. Si troveranno in seguito usando lo strumento, come s'indicò al N° 14, i momenti d'inerzia della figura rispetto a diversi assi passanti pel suo centro di gravità. Dividendo questi momenti d'inerzia per l'area della figura si otterranno i quadrati dei raggi di girazione o d'inerzia dell' area data rispetto a quegli stessi assi, e quindi se si condurranno delle parallele a questi assi distanti di essi, di quantità eguali ai corrispondenti raggi di girazione, si avranno in queste parallele tante rette, il cui inviluppo sarà l' ellisse centrale d'inerzia cercata. Conoscendosi il centro di quest' ellisse, onde determinarla basterà evidentemente cercare tre soli dei raggi d'inerzia suddetti.

Questa costruzione quindi che procedendo per via analitica o per mezzo della statica grafica, è sempre lunga e laboriosa, stante la speditezza con cui si possono avere i raggi di girazione, trovasi realmente di molto agevolata coll'impiego dell'integratore.

17. — *Determinazione del momento d'inerzia polare di uma figura piana qualunque.* - Coll'integratore si può ancora ottenere agevolmente il momento d'inerzia polare I_p di una figura piana qualunque. Infatti basta cercare con questo strumento i momenti d'inerzia I_x ed I_y della figura data, rispetto a due assi perpendicolari tra di loro posti nel piano della figura e passanti pel centro di gravità della medesima, e quindi sommare questi due momenti d'inerzia così ottenuti.

In virtù della nota relazione:

$$I_p=I_x+I_y$$

il valore di questa somma sarà il momento d'inerzia polare cercato, cioè il momento d'inerzia della figura rispetto ad un asse perpendicolare al suo piano e passante pel suo centro di gravità.

18. — *Avvertenze necessarie per l'uso dell'integratore.* - 1[a] Durante il movimento dello strumento bisognerà osservare se la rotazione del disco graduato avvenga nel senso diretto, cioè, come già si disse, nel senso per cui dinanzi all' indice fisso vengono a passare successivamente le divisioni della graduazione indicate coi numeri progressivi 0, 1, 2, 3, . . . ovvero in quello retrogrado.

Se la rotazione avverrà nel senso retrogrado, la differenza *n'—n* delle letture fatte dopo e prima di avere percorso col calcatoio il contorno della figura, sarà negativa e tale si dovrà introdurre nella formola corrispondente. Inoltre onde eliminare ogni errore nella valutazione di questa differenza, ossia nel noverare i giri e le frazioni di giro dati dalla rotella graduata, bisognerà ogni qualvolta lo zero del disco graduato passerà dinanzi all' indice fisso nel senso diretto, aggiungere al numero *n'*, che si leggerà sul disco stesso dopo di avere percorso il contorno della figura, 10 unità, e quando invece lo zero del disco passerà dinanzi all' indice fisso nel senso retrogrado, aggiungere 10 unità al numero *n* che si sarà letto prima di avere percorso il contorno della figura.

2[a] Sarà utile portare a zero la graduazione del disco e quindi anche quella della rotella prima di percorrere col calcatoio il contorno della figura su cui si opera ; in questo modo il numero n che si deve leggere prima del percorso, sarà rispettivamente eguale a 0 od a 10, secondochè la rotazione del disco graduato avverrà nel senso diretto od in senso retrogrado.

Risultati ottenuti coll'integratore

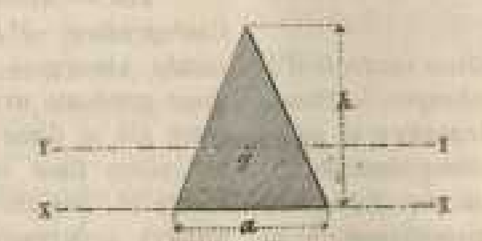
Daremo per ultimo i valori dell'area, del momento statico e del momento d'inerzia di alcune figure piane ottenuti coll'integratore, onde potere dal confronto di questi valori con quelli corrispondenti ricavati per mezzo delle formole che ci fornisce il calcolo, formarsi un concetto dell'approssimazione di cui è capace l'integratore medesimo, e meglio chiarire il procedimento da seguirsi nella valutazione delle suaccennate quantità.

Per ogni figura piana considerata, trovansi perciò nella colonna di sinistra del relativo quadro, le formole date dal calcolo che ne esprimono rispettivamente l'area, il momento statico ed il momento d'inerzia, ed in seguito i valori di queste quantità ottenuti, sostituendo nelle formole suddette i dati della figura che sono registrati immediatamente sotto il disegno della figura stessa ed espressi in decimetri.

Nella colonna di destra del medesimo quadro trovansi invece notate le letture fatte sull' integratore dopo e prima di avere, per ognuno dei tre casi, percorso col calcatoio il contorno della figura considerata, le differenze delle letture stesse e poscia i valori dell' area, del momento statico e del momento d'inerzia della figura ottenuti colle formole relative allo strumento.

Giova notare che avendo sempre avuto cura di portare a zero le graduazioni dell'integratore prima di percorrere col calcatoio il contorno della figura considerata, le letture fatte sullo strumento al principio di ogni operazione sono sempre rispettivamente eguali a 0 od a 10, secondochè la rotazione della rotella graduata avvenne nel senso diretto, oppure in quello retrogrado; e finalmente avvertiremo che il momento statico indicato con S_x è sempre valutato rispetto all' asse XX segnato sul disegno, e che il momento d'inerzia indicato con I_y è sempre relativo all' asse baricentrico YY, pure segnato sul disegno della figura.

1° Triangolo.

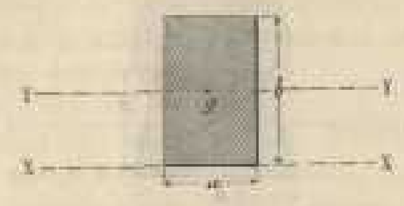


Scala $\frac{1}{5}$

$a=1 \qquad h=1,2$

$A=\frac{1}{2}ah$	$n_1'=0,600 \quad n_1=0 \quad n_1'-n_1=0,600$
$S_x=\frac{1}{6}ah^2$	$n_2'=0,695 \quad n_2=0 \quad n_2'-n_2=0,695$
$I_y=\frac{1}{36}ah^3$	$n_3'=8,343 \quad n_3=10 \quad n_3'-n_3=-1,657$
$A=0^{dq},60$	$A=(n_1'-n_1)=0^{dq},60$
$S_x=0,24$	$S_x=0,34445(n_2'-n_2)=0,239393$
$I_y=0,048$	$I_y=(n_1'-n_1)+\frac{1}{3}(n_3'-n_3)=0,047667$

2° Rettangolo.

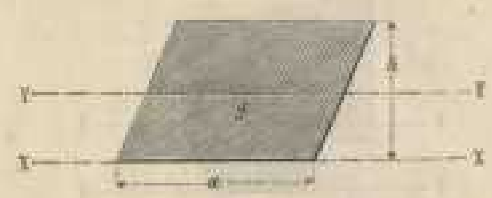


Scala $\frac{1}{5}$

$a=0,6 \qquad b=1$

$A=ab$	$n_1'=0,600 \quad n_1=0 \quad n_1'-n_1=0,600$
$S_x=\frac{1}{2}ab^2$	$n_2'=0,869 \quad n_2=0 \quad n_2'-n_2=0,869$
$I_y=\frac{1}{12}ab^3$	$n_3'=8,349 \quad n_3=10 \quad n_3'-n_3=-1,651$
$A=0^{dq},60$	$A=(n_1'-n_1)=0^{dq},60$
$S_x=0,30$	$S_x=0,34445(n_2'-n_2)=0,299327$
$I_y=0,05$	$I_y=(n_1'-n_1)+\frac{1}{3}(n_3'-n_3)=0,04966\dot{7}$

3° Parallelogramma.

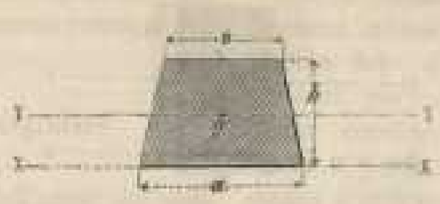


Scala $\frac{1}{5}$

$a=1,3 \qquad h=0,9$

$A=ah$	$n_1'=1,170 \quad n_1=0 \quad n_1'-n_1=1,170$
$S_x=\frac{1}{2}ah^2$	$n_2'=1,527 \quad n_2=0 \quad n_2'-n_2=1,527$
$I_y=\frac{1}{12}ah^3$	$n_3'=6,725 \quad n_3=10 \quad n_3'-n_3=-3,275$
$A=1^{dq},17$	$A=(n_1'-n_1)=1^{dq},17$
$S_x=0,5265$	$S_x=0,34445(n_2'-n_2)=0,525975$
$I_y=0,078975$	$I_y=(n_1'-n_1)+\frac{1}{3}(n_3'-n_3)=0,078334$

4° Trapezio.



Scala $\frac{1}{5}$

$a=1$ $b=0,8$ $h=0,7$

$A=\frac{h}{2}(a+b)$

$S_x=\frac{h^2}{3}\left(\frac{a}{2}+b\right)$

$I_y=\frac{h^3}{36}\,\frac{a^2+4ab+b^2}{a+b}$

$A=0^{mq},63$

$S_x=0,212333$

$I_y=0,025610$

$n_1'=0,630$ $n_1=0$ $n_1'-n_1=0,630$

$n_2'=0,615$ $n_2=0$ $n_2'-n_2=0,615$

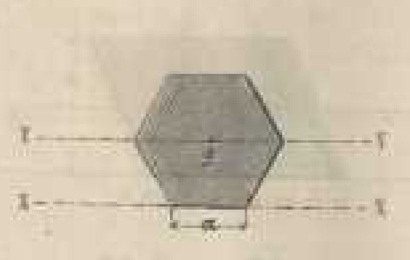
$n_3'=8,186$ $n_3=10$ $n_3'-n_3=-1,814$

$A=(n_1'-n_1)=0^{mq},63$

$S_x=0,34445(n_2'-n_2)=0,211837$

$I_y=(n_1'-n_1)+\frac{1}{3}(n_3'-n_3)=0,025334$

5° Esagono.



Scala $\frac{1}{4}$

$a=0,4$

$A=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$

$S_x=\frac{9}{4}a^3$

$I_y=\frac{5\sqrt{3}}{16}a^4$

$A=0^{mq},415680$

$S_x=0,144$

$I_y=0,013857$

$n_1'=0,415$ $n_1=0$ $n_1'-n_1=0,415$

$n_2'=0,417$ $n_2=0$ $n_2'-n_2=0,417$

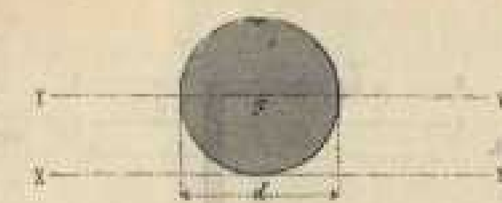
$n_3'=8,796$ $n_3'=10$ $n_3'-n_3=-1,204$

$A=(n_1'-n_1)=0^{mq},4150$

$S_x=0,34445(n_2'-n_2)=0,143636$

$I_y=(n_1'-n_1)+\frac{1}{3}(n_3'-n_3)=0,013667$

6° Circolo.



Scala $\frac{1}{5}$

$d=1$

$A=\frac{\pi d^2}{4}$

$S_x=\frac{\pi d^3}{8}$

$I_y=\frac{\pi d^4}{64}$

$A=0^{mq},7854$

$S_x=0,3927$

$I_y=0,049087$

$n_1'=0,785$ $n_1=0$ $n_1'-n_1=0,785$

$n_2'=1,139$ $n_2=0$ $n_2'-n_2=1,139$

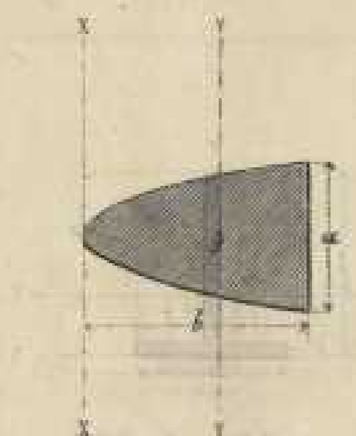
$n_3'=7,791$ $n_3=10$ $n_3'-n_3=-2,209$

$A=(n_1'-n_1)=0^{mq},7850$

$S_x=0,34445(n_2'-n_2)=0,392329$

$I_y=(n_1'-n_1)+\frac{1}{3}(n_3'-n_3)=0,048067$

7° Segmento parabolico.



Scala $\frac{1}{5}$

$a=1$ $b=1,5$

$A=\frac{2}{3}ab$

$S_x=\frac{2}{5}ab^2$

$I_y=\frac{8}{175}ab^3$

$A=1^{mq}$

$S_x=0,9$

$I_y=0,154236$

$n_1'=1$ $n_1=0$ $n_1'-n_1=1$

$n_2'=2,611$ $n_2=0$ $n_2'-n_2=2,611$

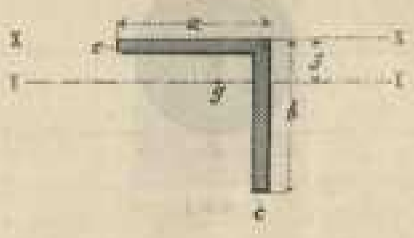
$n_3'=7,462$ $n_3=10$ $n_3'-n_3=-2,538$

$A=(n_1'-n_1)=1^{mq}$

$S_x=0,34445(n_2'-n_2)=0,899359$

$I_y=(n_1'-n_1)+\frac{1}{3}(n_3'-n_3)=0,154$

8° Sezione trasversale di un ferro d'angolo.



Scala $\frac{1}{4}$

$a=0,8 \qquad b=0,8 \qquad c=0,06$

$A=c(a+b-c)$

$S_x=\frac{c}{2}(ac+b^2-c^2)$

$I_y=\frac{c}{3}(ac^2+b^3-c^3)-f^2c(a+b-c) \ldots f=\frac{ac+b^2-c^2}{2(a+b-c)}$

$A=0^{mq},0924$

$S_x=0,020532$

$I_y=0,005832$

$n_1'=0,092 \quad n_1=0 \quad n_1'-n_1=0,092$

$n_2'=0,050 \quad n_2=0 \quad n_2'-n_2=0,050$

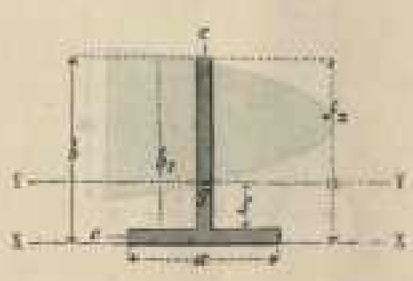
$n_3'=9,740 \quad n_3=10 \quad n_3'-n_3=-0,260$

$A=(n_1'-n_1)=0^{mq},0920$

$S_x=0,34445(n_2'-n_2)=0,020323$

$I_y=(n_1'-n_1)+\frac{1}{3}(n_3'-n_3)=0,005334$

9° Sezione trasversale di un ferro a T.



Scala $\frac{1}{4}$

$a=0,8 \qquad b_1=0,94$
$b=1 \qquad c=0,06$

$A=c(a+b_1)$

$S_x=\frac{c}{2}(ac+b^2-c^2)$

$I_x=\frac{1}{3}\left[a(f_1^3-f^3)+c(f^3+f_2^3)\right] \quad f=\frac{b_1^2-ac}{2(a+b_1)} \quad \begin{cases} f_1=f+c \\ f_2=b-f_1 \end{cases}$

$A=0^{mq},1044$

$S_x=0,031332$

$I_x=0,010650$

$n_1'=0,104 \quad n_1=0 \quad n_1'-n_1=0,104$

$n_2'=0,090 \quad n_2=0 \quad n_2'-n_2=0,090$

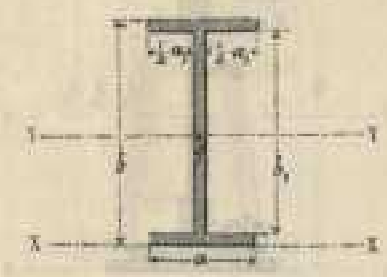
$n_3'=9,719 \quad n_3=10 \quad n_3'-n_3=-0,281$

$A=(n_1'-n_1)=0^{mq},1040$

$S_x=0,34445(n_2'-n_2)=0,031001$

$I_x=(n_1'-n_1)+\frac{1}{3}(n_3'-n_3)=0,010334$

10° Sezione trasversale di un ferro a doppio T.



Scala $\frac{1}{4}$

$a=0,6 \qquad b=1,2$
$a_1=0,55 \qquad b_1=1,1$

$A=ab-a_1b_1$

$S_x=\frac{b}{2}(ab-a_1b_1)$

$I_y=\frac{1}{12}(ab^3-a_1b_1^3)$

$A=0^{mq},1150$

$S_x=0,069$

$I_y=0,025306$

$n_1'=0,115 \quad n_1=0 \quad n_1'-n_1=0,115$

$n_2'=0,200 \quad n_2=0 \quad n_2'-n_2=0,200$

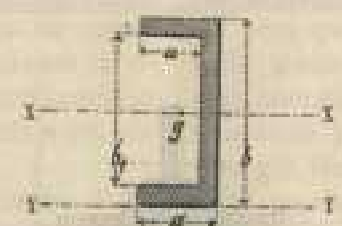
$n_3'=9,730 \quad n_3=10 \quad n_3'-n_3=-0,270$

$A=(n_1'-n_1)=0^{mq},1150$

$S_x=0,34445(n_2'-n_2)=0,068890$

$I_y=(n_1'-n_1)+\frac{1}{3}(n_3'-n_3)=0,025$

11° Sezione trasversale di un ferro ad U.



Scala $\frac{1}{4}$

$a=0,4 \qquad b=1$
$a_1=0,3 \qquad b_1=0,8$

$A=ab-a_1b_1$

$S_x=\frac{b}{2}(ab-a_1b_1)$

$I_x=\frac{1}{12}(ab^3-a_1b_1^3)$

$A=0^{mq},16$

$S_x=0,08$

$I_x=0,020533$

$n_1'=0,160 \quad n_1=0 \quad n_1'-n_1=0,160$

$n_2'=0,231 \quad n_2=0 \quad n_2'-n_2=0,231$

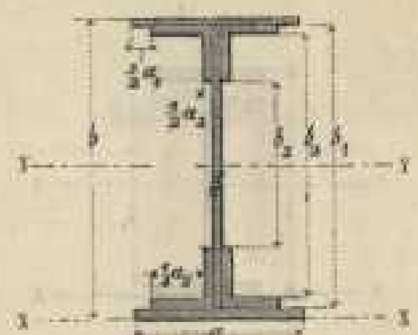
$n_3'=9,581 \quad n_3=10 \quad n_3'-n_3=-0,419$

$A=(n_1'-n_1)=0^{mq},16$

$S_x=0,34445(n_2'-n_2)=0,079568$

$I_x=(n_1'-n_1)+\frac{1}{3}(n_3'-n_3)=0,020334$

12° Sezione trasversale di una trave composta.



Scala $\frac{1}{10}$

NB. Coll'integratore si è operato sopra un disegno eseguito nella scala di $\frac{1}{4}$, quindi per ottenere i veri valori di A, S_x ed I_y bisogna dividere quelli di A', S_x', I_y' ottenuti coll'integratore e relativi al disegno, rispettivamente per $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{1}{4}\right)^3$, $\left(\frac{1}{4}\right)^4$.

$a=2,2 \qquad b=4$

$a_1=0,52 \qquad b_1=3,84$

$a_2=1,4 \qquad b_2=3,04$

$a_3=0,2 \qquad b_3=2,24$

$$A=(ab-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)$$

$$S_x=\frac{b}{2}(ab-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)$$

$$I_y=\frac{1}{12}(ab^3-a_1b_1^3-a_2b_2^3-a_3b_3^3)$$

$A=1^{q},2592$

$S_x=2,5184$

$I_y=3,405678$

$n_1'=0,078 \quad n_1=0 \quad n_1'-n_1=0,078$

$n_2'=0,113 \quad n_2=0 \quad n_2'-n_2=0,113$

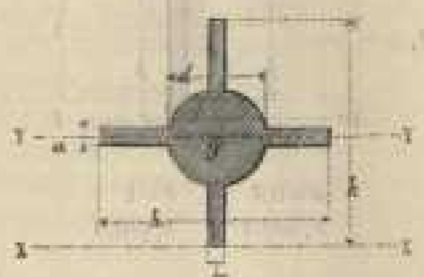
$n_3'=9,806 \quad n_3=10 \quad n_3'-n_3=-0,194$

$A'=(n_1'-n_1)=0,078 \qquad A=\frac{A'}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}=1^{q},2480$

$S_x'=0,34445(n_2'-n_2)=0,038923 \qquad S_x=\frac{S_x'}{\left(\frac{1}{4}\right)^3}=2,491072$

$I_y'=(n_1'-n_1)+\frac{1}{3}(n_3'-n_3)=0,013334 \qquad I_y=\frac{I_y'}{\left(\frac{1}{4}\right)^4}=3,413504$

13° Sezione trasversale di un albero di ghisa.



Scala $\frac{1}{5}$

$a=0,1 \qquad d=0,6 \qquad h=1,5$

$$A=\frac{\pi d^2}{4}+2a(h-d)$$

$$S_x=\frac{\pi d^2 h}{8}+ah(h-d)$$

$$I_y=\frac{1}{12}\left[\frac{3\pi d^4}{16}+a(h^3-d^3)+a^3(h-d)\right]$$

$A=0^{q},462744$

$S_x=0,347058$

$I_y=0,32762$

$n_1'=0,462 \quad n_1=0 \quad n_1'-n_1=0,462$

$n_2'=1,006 \quad n_2=0 \quad n_2'-n_2=1,006$

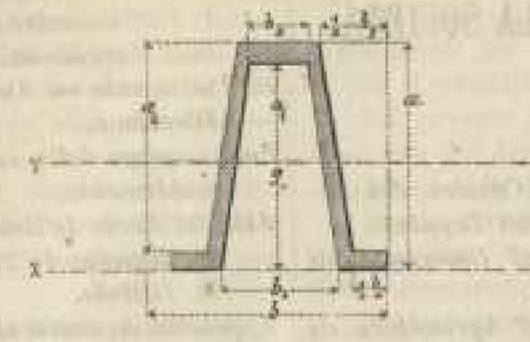
$n_3'=8,711 \quad n_3=10 \quad n_3'-n_3=-1,289$

$A=(n_1'-n_1)=0^{q},4620$

$S_x=0,34445(n_2'-n_2)=0,346517$

$I_y=(n_1'-n_1)+\frac{1}{3}(n_3'-n_3)=0,032334$

14° Sezione trasversale di un ferro Zorès.



Scala $\frac{1}{5}$

$a=1,5 \qquad b_1=0,8$

$a_1=1,35 \qquad b_2=0,4$

$a_2=1,4 \qquad b_3=0,94$

$b=1,5 \qquad b_4=0,52$

$$A=ab-\frac{a_1}{2}(b_1+b_2)-\frac{a_2}{2}(b_3+b_4)$$

$$S_x=\frac{a^2b}{2}-\frac{a_1^2}{6}(b_1+2b_2)-\frac{aa_2}{2}(b_3+b_4)+\frac{a_2^2}{6}(b_3+2b_4)$$

$$I_y=\frac{a^3b}{3}-\frac{a_1^3}{12}(b_1+3b_2)-\frac{a_2^3}{12}(b_3+3b_4)-\frac{a^2a_2}{2}(b_3+b_4)+\frac{aa_2^2}{3}(b_3+2b_4)-\frac{S_x^2}{A}$$

$A=0^{q},4180$

$S_x=0,315301$

$I_y=0,108836$

$n_1'=0,418 \quad n_1=0 \quad n_1'-n_1=0,418$

$n_2'=0,914 \quad n_2=0 \quad n_2'-n_2=0,914$

$n_3'=9,071 \quad n_3=10 \quad n_3'-n_3=-0,929$

$A=(n_1'-n_1)=0,418$

$S_x=0,34445(n_2'-n_2)=0,314827$

$I_y=(n_1'-n_1)+\frac{1}{3}(n_3'-n_3)=0,108334$

Dalla teoria esposta emerge chiaramente quanto semplice ed ingegnoso ad un tempo sia questo strumento, col quale l' Amsler raggiunse la risoluzione del problema della determinazione meccanica delle aree, dei momenti statici e dei momenti d'inerzia delle figure piane.

È da notarsi ancora che l'integratore di cui ci occupammo è una semplificazione di un altro più complesso inventato dallo stesso Amsler nell'anno 1856 (1), il quale per essere munito di tre rotelle convenientemente disposte può dare contemporaneamente i valori dell'area, del momento statico e del momento d'inerzia di una figura piana, percorrendo una volta sola per mezzo di un calcatoio il contorno della figura medesima.

La speditezza e l'approssimazione con cui si possono compiere le indicate valutazioni, impiegando quest' altro planimetro dei momenti più complicato, sono sicuramente maggiori di quelle che si hanno coll'integratore da noi considerato, ma però questo è più che sufficiente pei bisogni della pratica, come lo provano i risultati con esso ottenuti, ed inoltre stante la sua maggiore semplicità presenta sull'altro il vantaggio di essere più facilmente maneggevole.

Il planimetro dei momenti fu per molti anni quasi trascurato ; attualmente però esso trovasi citato in alcuni trattati di Statica grafica (1) ed adoperato già dagli Ingegneri delle Ferrovie dell'Alta Italia.

Porrò termine a questo scritto diretto a mettere in evidenza le pregevoli doti di questo strumento ed a facilitarne l'impiego, augurando che l'integratore di Amsler abbia ad entrare vieppiù nel dominio della pratica dell'Ingegnere, al quale potrà rendere in molti casi non lievi servigi.

Torino, Dicembre 1882.

S. CAPPA.

(1) AMSLER — *Ueber die mechanische Bestimmung des Flàcheninhaltes der statischen Momente und der Tràgheitsmomente ebener Figuren insbesondere ùber einen neuen Planimeter* — Schaffhausen 1856.

(1) CULMANN— *Statique Graphique*, Trad. Franc. 1880 — FAVARO. *Lezioni di Statica Grafica* — 1877.

Società degli Ingegneri e degli Industriali di Torino. Anno XVI. 1882 - Tav. I

Fig. 1.

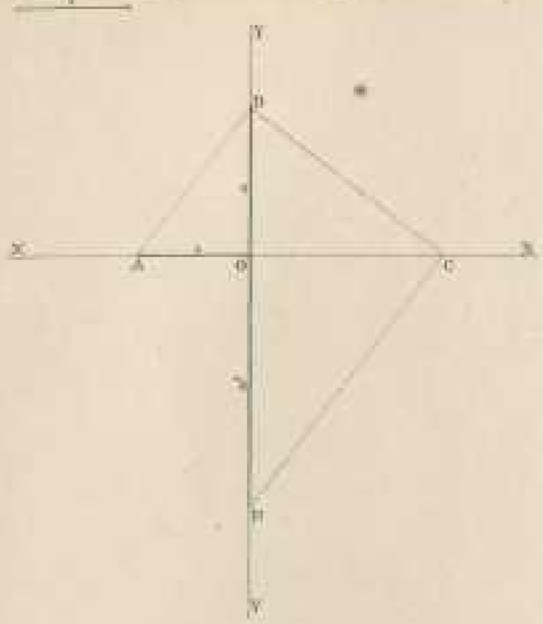


Fig. 2.

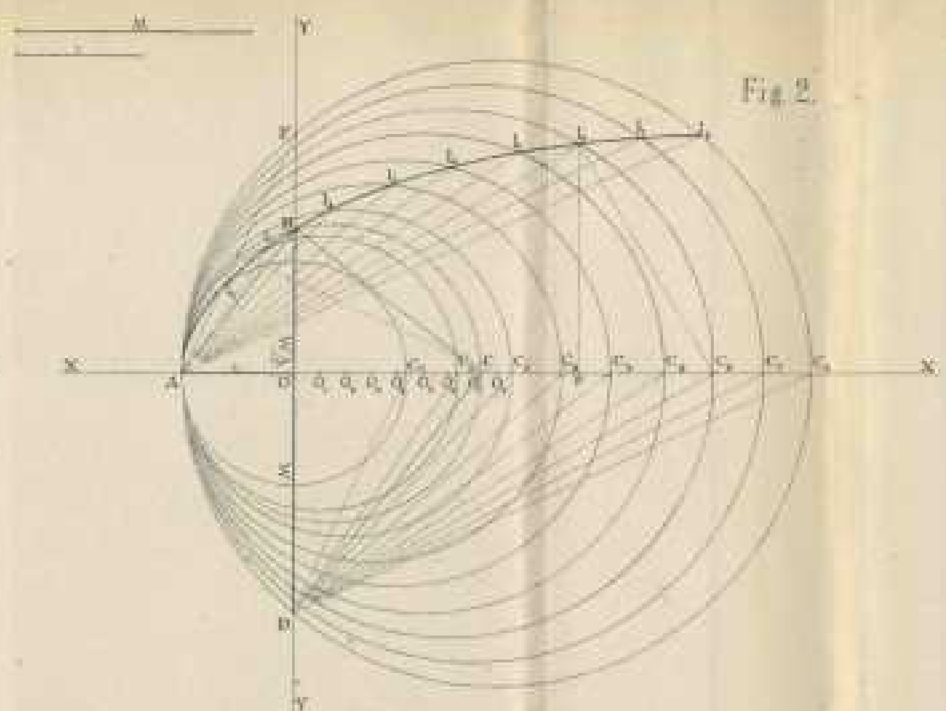


Fig. 3.

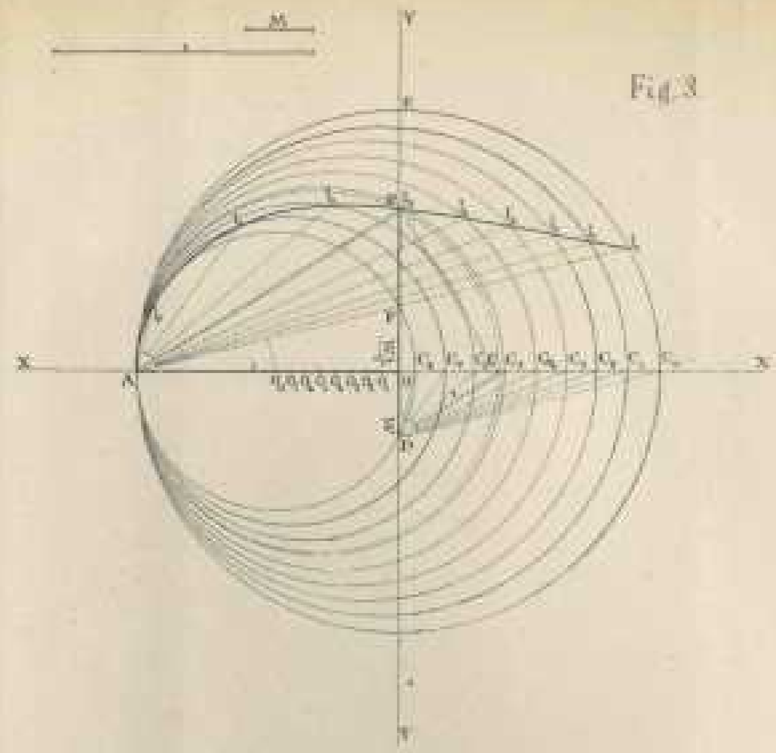


Fig. 4.

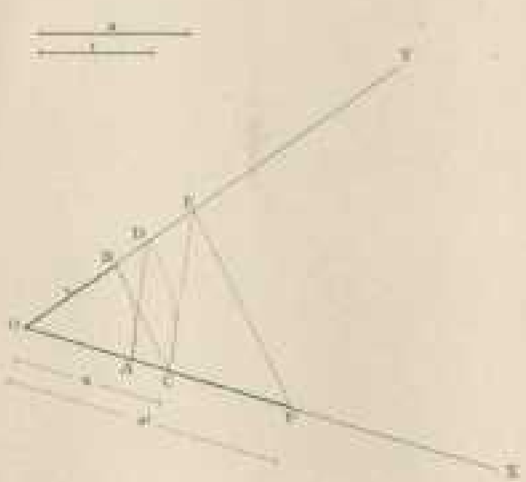


Fig. 5.

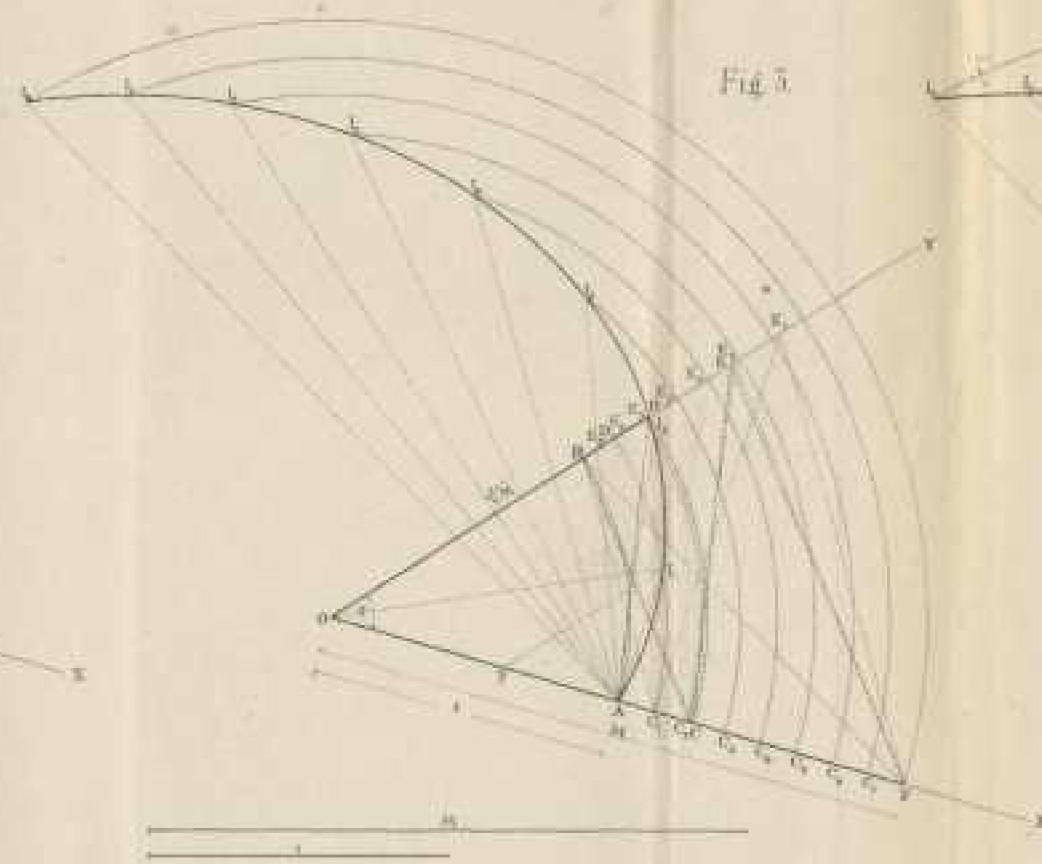
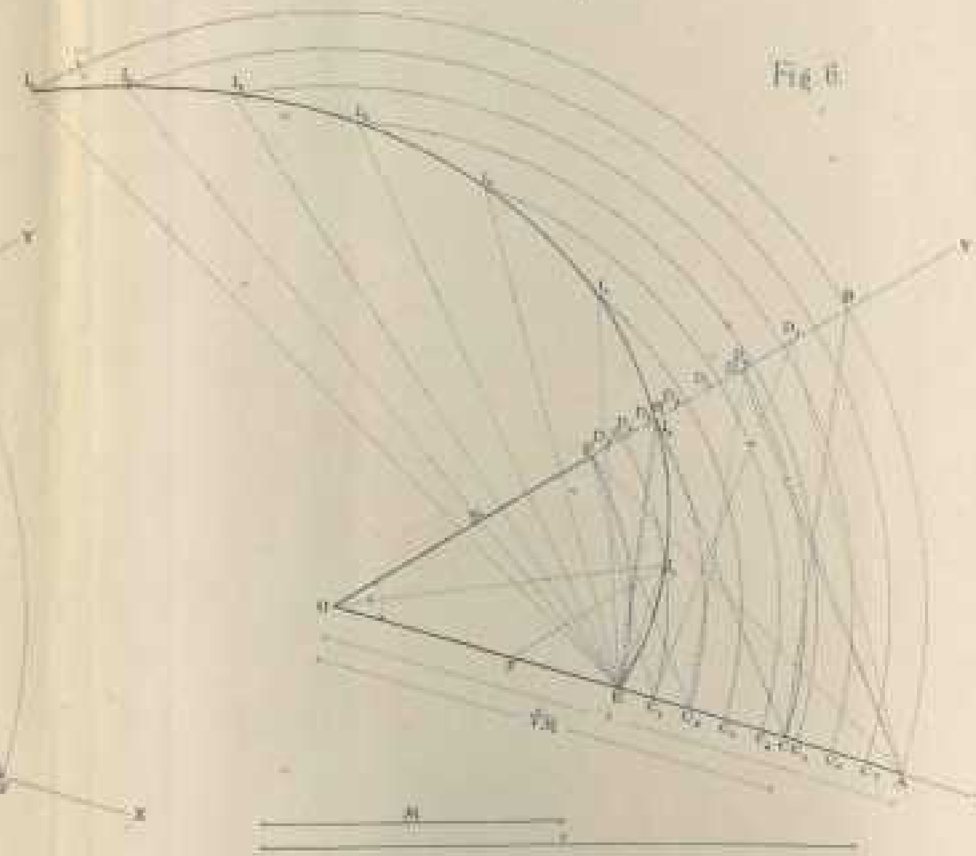
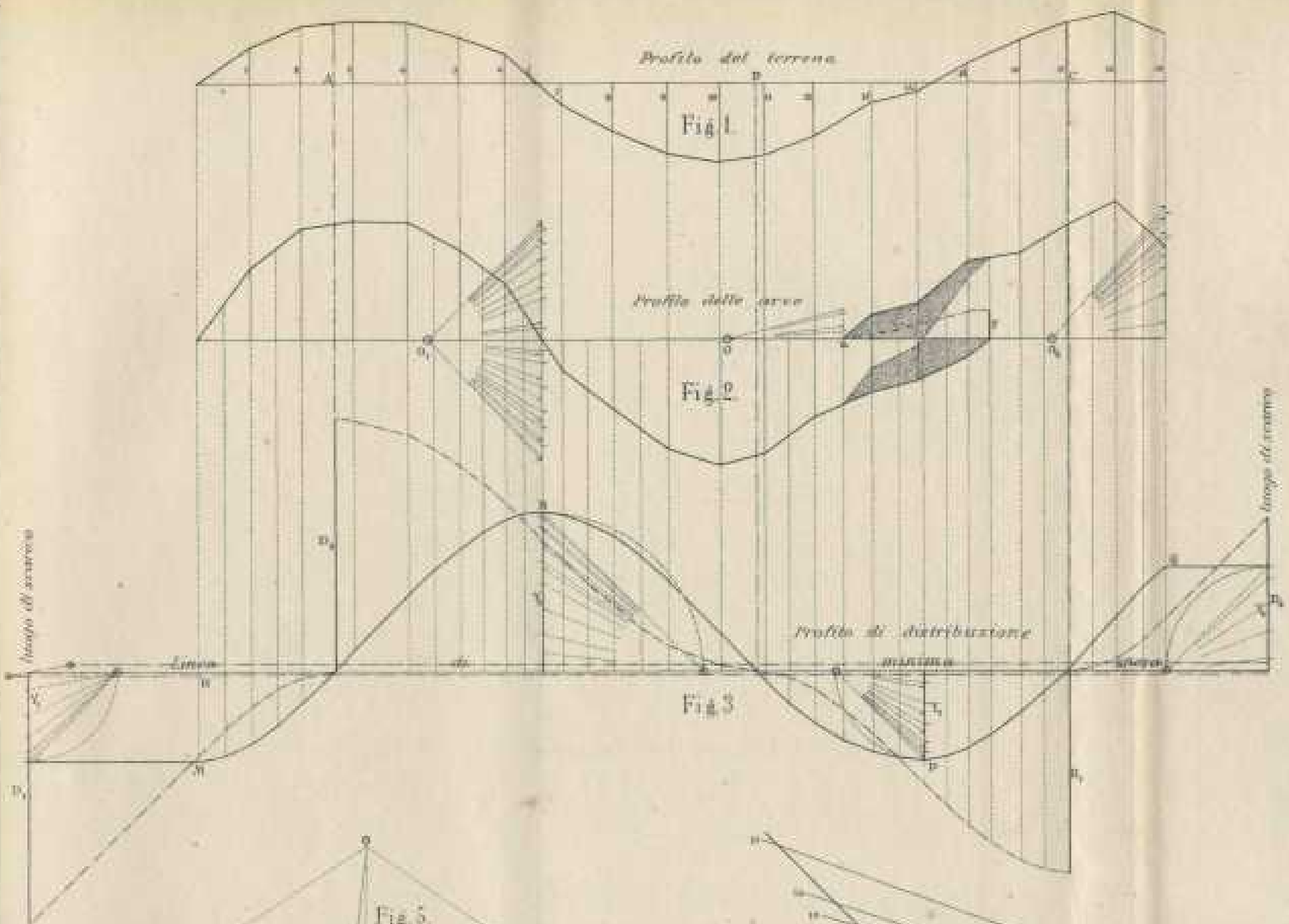
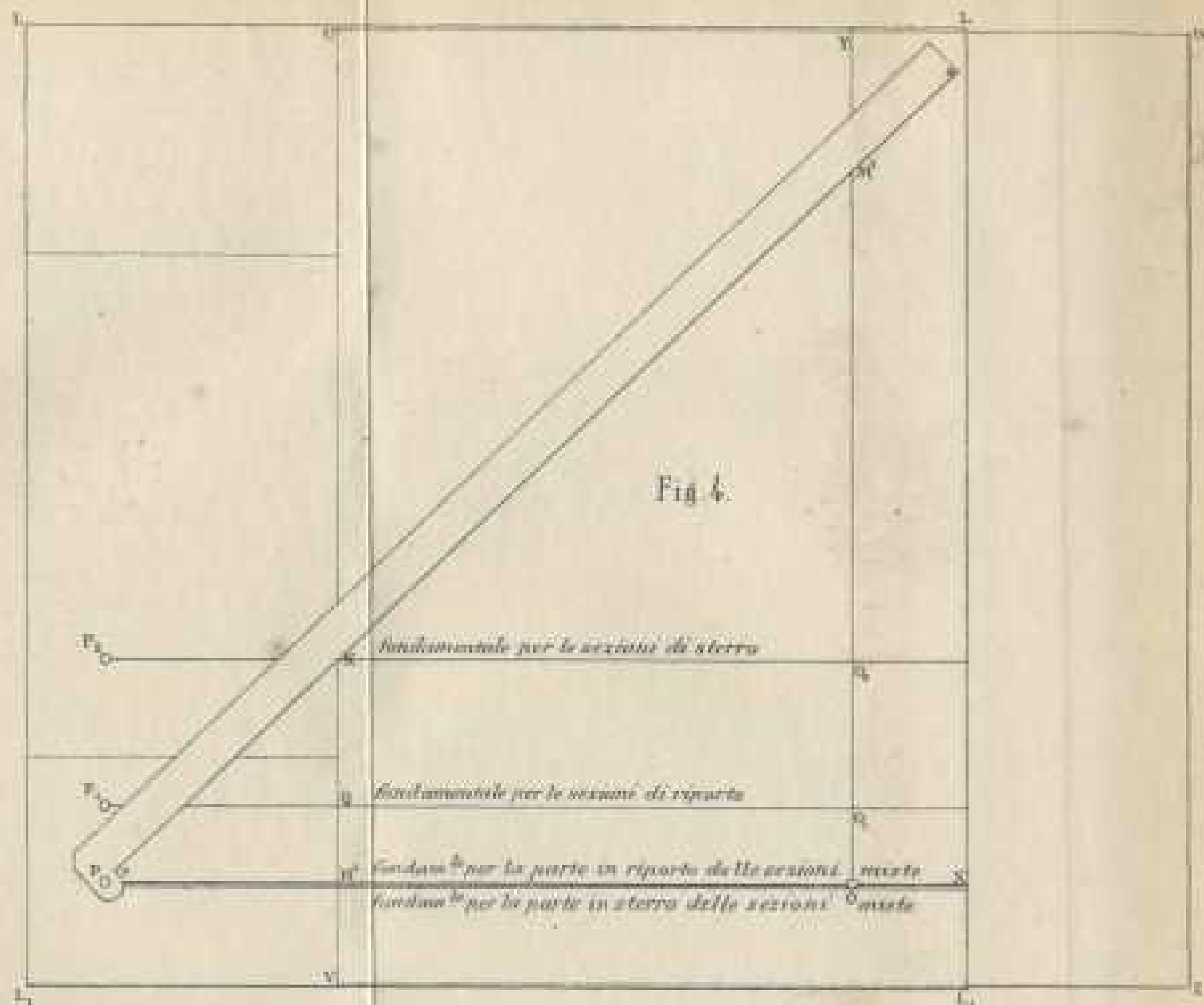


Fig. 6.



Società degli Ingegneri e degli Industriali di Torino. Anno XVI. 1882 - Tav. II





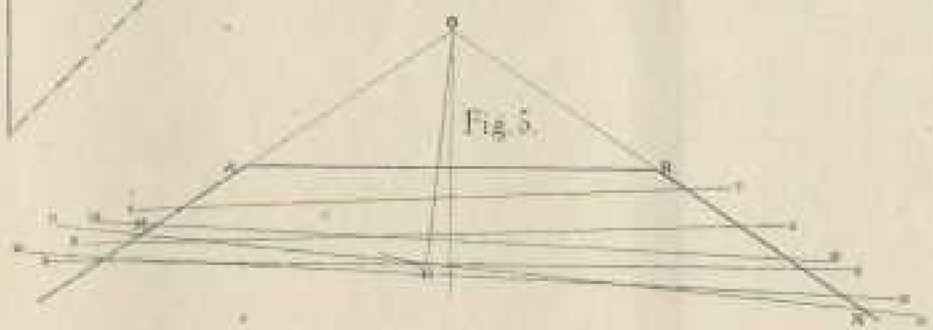


Fig. 5.

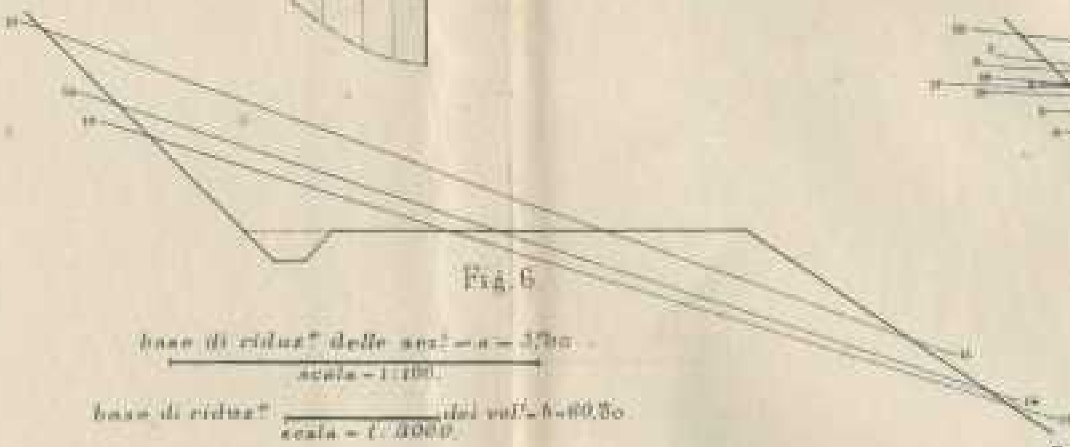


Fig. 6

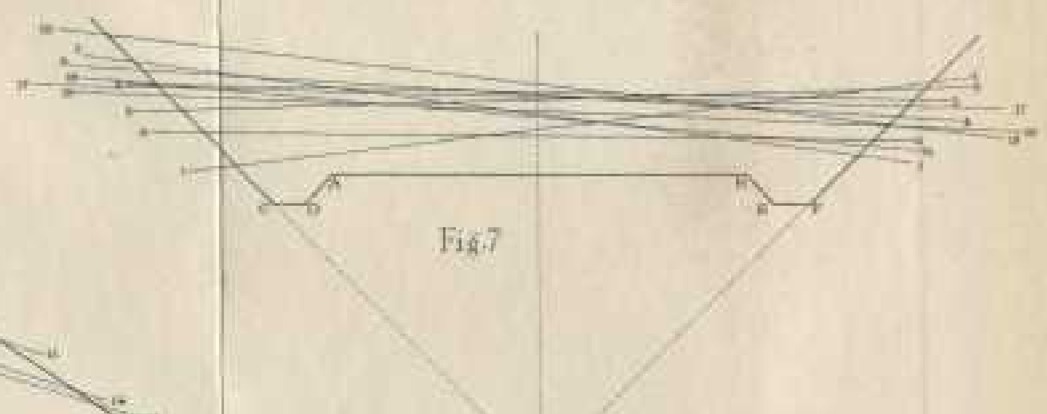


Fig. 7

Scala delle lunghezze per le Fig. 1.2.3. = 1:3000
Scala delle altezze per le Fig. 1.2.3. = 1:100
Scala per le Fig. 5.6.7 = 1:100

base di riduz.e delle aree = a = 3,00
scala = 1:100

base di riduz.e dei vol.i = b = 60,00
scala = 1:3000

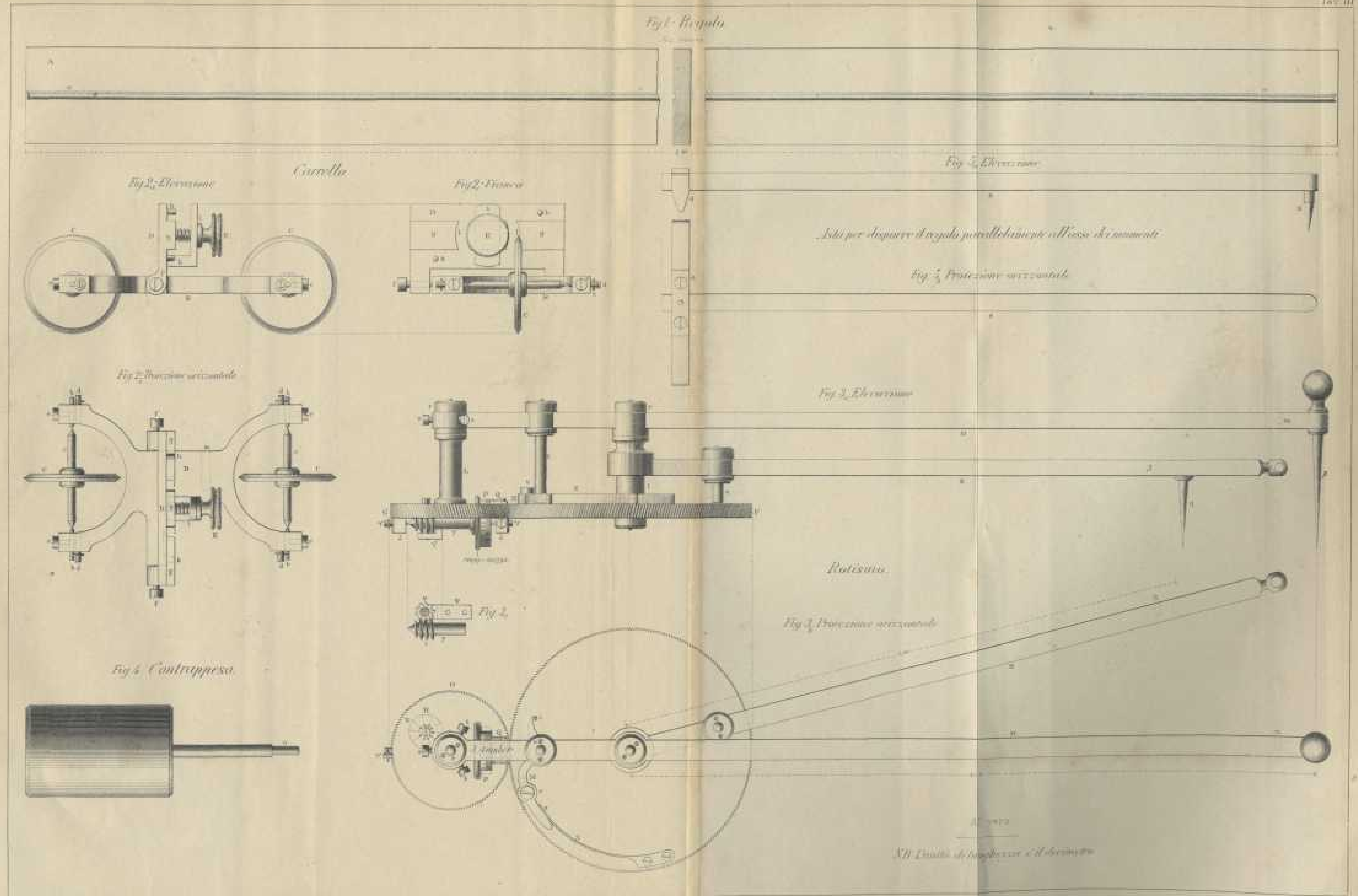
Spesa = ab (αy + βΣY + γΣYD) = α 150 m³ + β 32 322 m⁴ + γ 260 893,5 m⁵

Ing. C. Guidi

Lit. F. Salussolia - Torino

INTEGRATORE DI AMSLER

Tav. III



INTEGRATORE DI AMSLER

Fig. 1. Disposizione dell'Integratore per la valutazione di un area Ω.

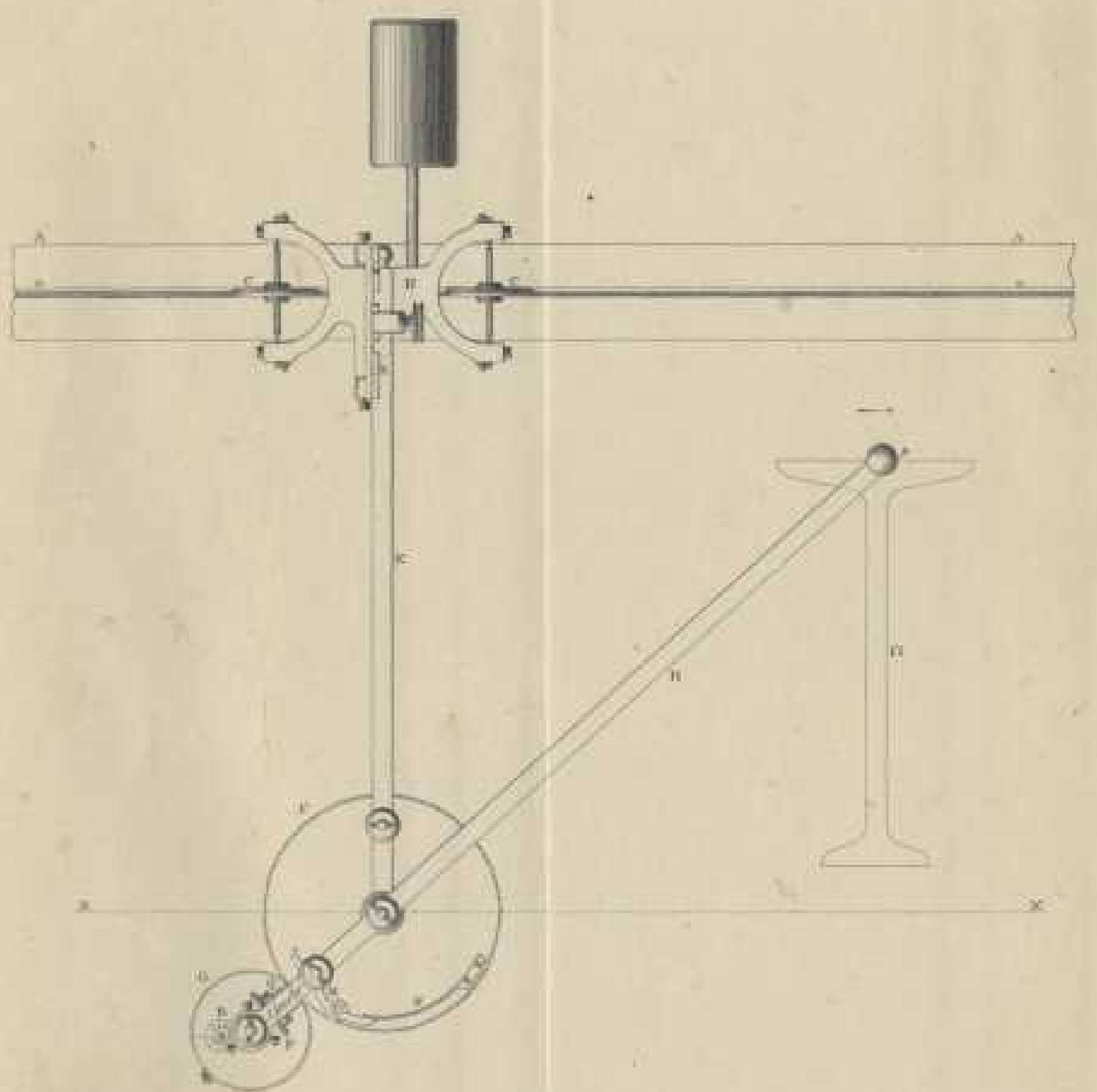
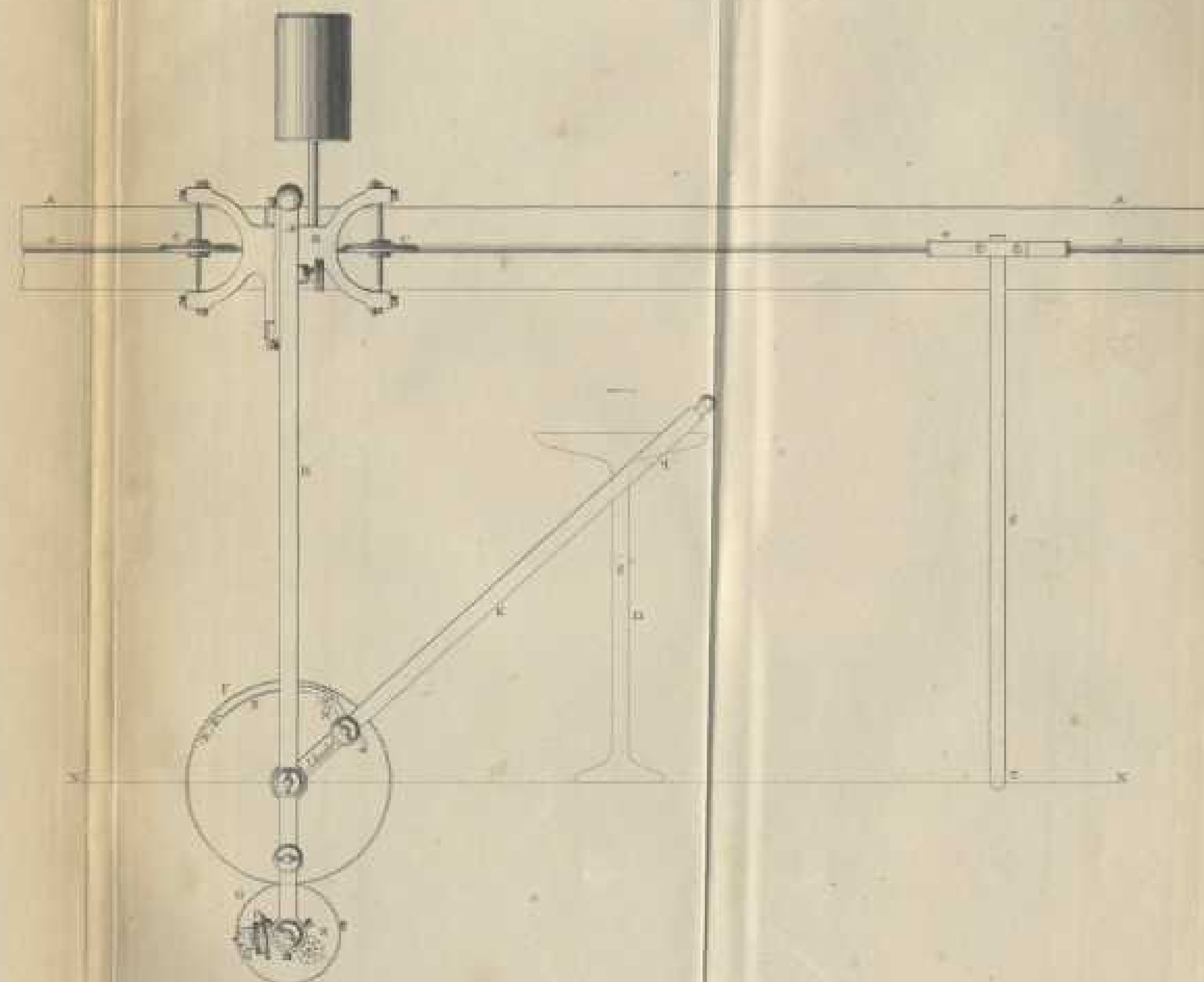


Fig. 2. Disposizione dell'Integratore per la valutazione del momento statico dell'area Ω rispetto all'asse XX.

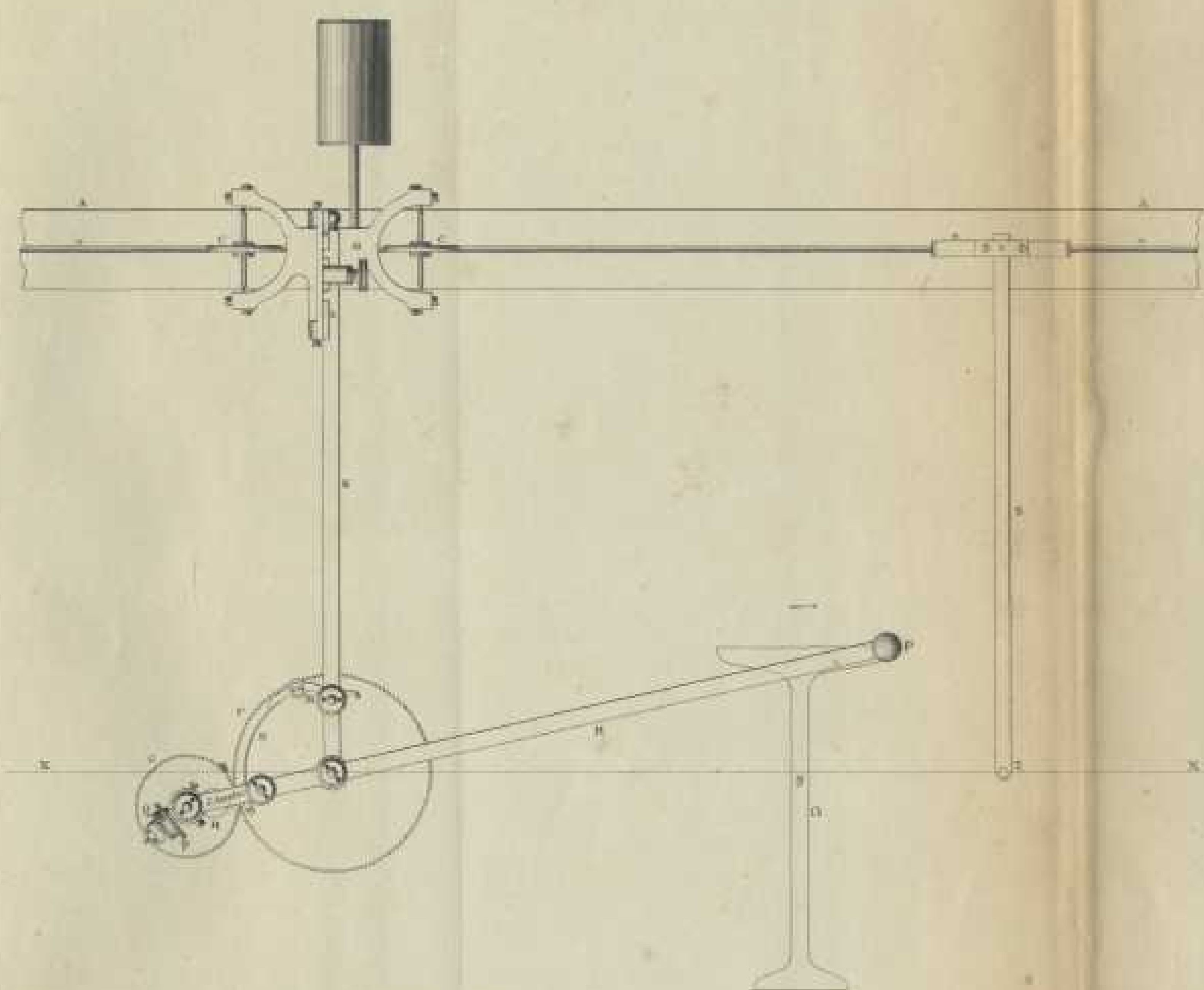


Ing. S. Cappa dis.

Lit. P. Salussolia - Torino

INTEGRATORE DI AMSLER

Fig. 1. Disposizione dell'Integratore per la valutazione del momento d'inerzia dell'area Ω rispetto all'asse XX.



Scala ½

Fig. 2.

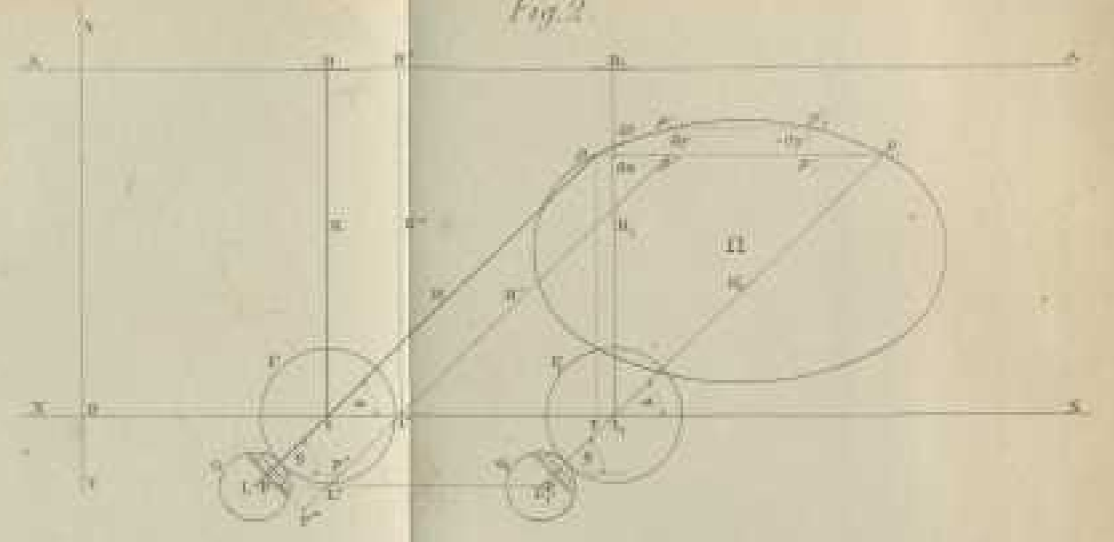


Fig. 3.

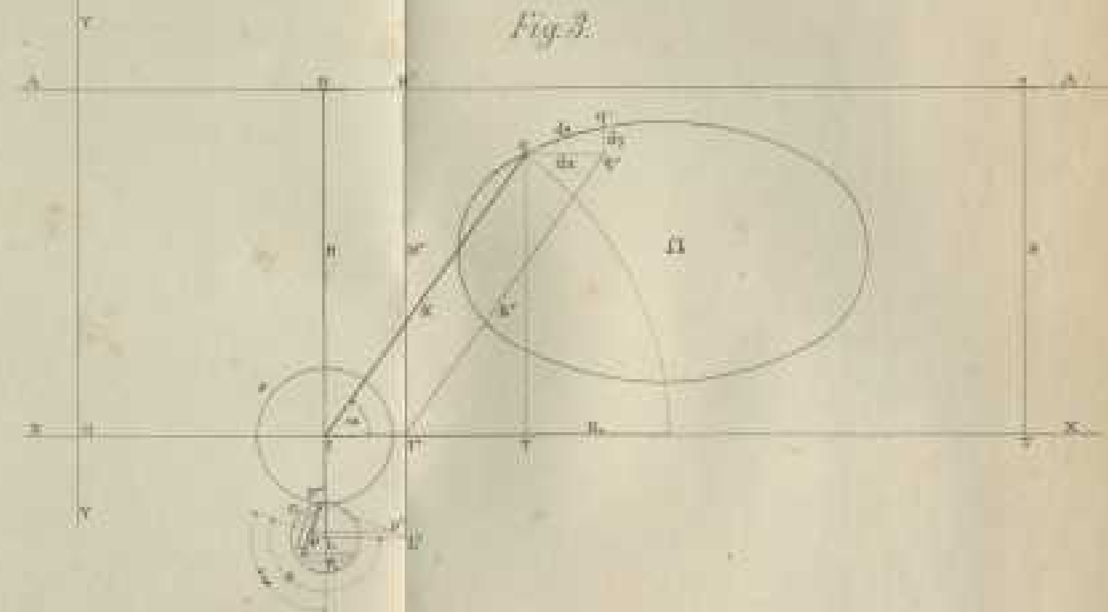
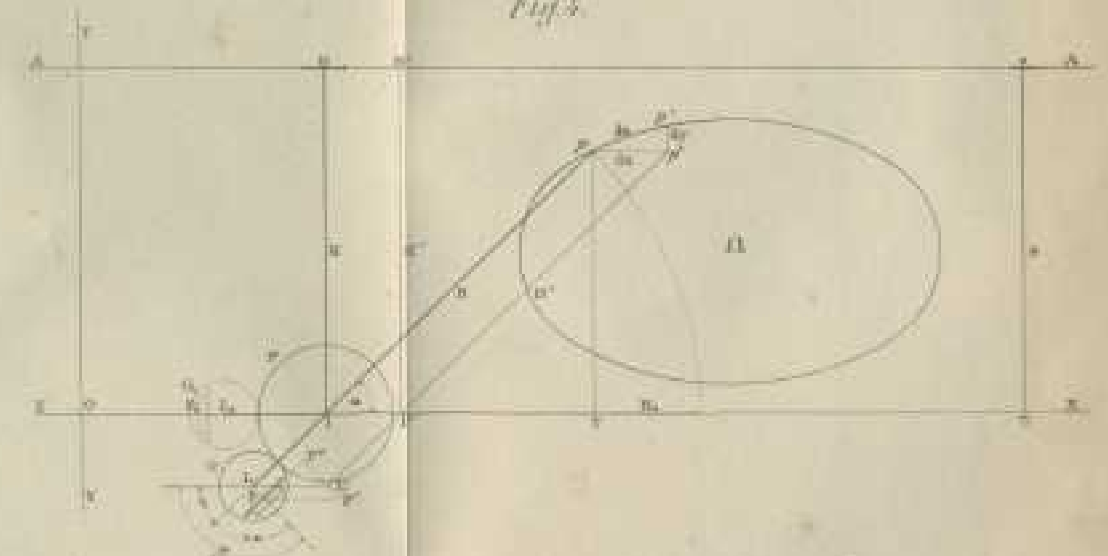


Fig. 4.



Ing. S. Cappa dis.

Lit. F. Salussolia - Torino