

Il candidato legga attentamente il testo riportato nel seguito e risponda al maggior numero di domande. Il testo è organizzato in modo tale che sia possibile rispondere separatamente alle singole domande, ed è previsto che ogni candidato, sulla base del proprio curriculum di studi, affronti solo una parte di esse. È quindi possibile consegnare un elaborato in cui siano presenti, ad esempio, le risposte alle domande 1, 4.2 e 5.1.

Lo standard ADSL (Asymmetric Digital Subscriber Line) è stato definito negli ultimi anni al fine di consentire la ricezione di film, l'accesso ad Internet, ecc. con elevati "bit rate" nelle case, utilizzando il normale doppino telefonico. Poiché in questo scenario l'utente scarica molta informazione dalla rete, ma ne invia poca, si è deciso di usare una trasmissione asimmetrica, in cui l'utente ha a disposizione una velocità massima in ricezione pari a 6 Mbit/s, e massima in trasmissione pari a 64 kbit/s. La velocità effettiva di trasmissione/ricezione dipende poi dalla lunghezza della linea, dalle scelte dell'operatore, ecc.

Il canale trasmissivo (con banda definita pari a 1.1 MHz) viene suddiviso in 256 sottocanali di banda  $B = 4.3125$  kHz ciascuno, numerati da 0 (in banda base) a 255. Il sottocanale 0 non è utilizzato ed è lasciato a disposizione della normale telefonia (POTS, plain old telephone service), in modo che l'utente possa contemporaneamente telefonare e vedere un film sul proprio computer. Un filtro, denominato "splitter", provvede a separare il segnale telefonico dal segnale ADSL. I sottocanali 1-5 non vengono usati a loro volta, per mantenere la compatibilità con i servizi ISDN. I restanti sottocanali (da 6 a 255) sono invece usati tutti per il sistema ADSL.

Sono previsti due modi per separare i due flussi di informazione ("upstream", dall'utente alla rete, e "downstream", dalla rete all'utente):

- tecnica FDD (Frequency Division Duplexing): i sottocanali 6-31 sono usati per il flusso di "upstream", mentre i sottocanali 32-255 per il flusso di "downstream";
- tecnica a cancellazione d'eco (ECH): il flusso di "upstream" continua ad usare i sottocanali 6-31, mentre il flusso di "downstream" usa i canali 6-255, creando così una sovrapposizione di bande; il segnale generato dall'utente  $s_u(t)$  viaggia sul cavo in direzione opposta rispetto al segnale proveniente dalla rete  $s_r(t)$ , ma il ricevitore dell'utente si trova in ingresso  $s_r(t)$  più un'eco distorta  $s'_u(t)$  di  $s_u(t)$ : il cancellatore d'eco stima l'interferente  $s'_u(t)$  e lo sottrae al segnale ricevuto per ottenere il solo  $s_r(t)$ .

Ogni terminale ADSL (denominato ATU: ADSL Terminal Unit) ha implementate entrambe le tecniche e si adatta al segnale ricevuto. La tecnica a cancellazione d'eco è più complessa, ma consente di utilizzare anche per il flusso di downstream le basse frequenze, dove è minore l'attenuazione del canale e l'eventuale interferenza radio.

La funzione di trasferimento del canale non è piatta, ma presenta attenuazione fortemente crescente al crescere della frequenza, ed è variabile da caso a caso (dipende dalla lunghezza della connessione, ad esempio). Inoltre il segnale trasmesso subisce forti interferenze:

- crosstalk dovuto al fatto che i doppini non sono schermati e sono affasciati, quindi il segnale che viaggia su un cavo può interferire con il segnale di un altro cavo,
- interferenza da segnali radiofonici broadcast trasmessi in AM,
- rumore impulsivo, ecc.

che possono localizzarsi solo su determinate frequenze. Per ovviare ai problemi trasmissivi dovuti alle particolari caratteristiche del canale, è stata proposta la modulazione DMT (Discrete Multi Tone). Nello standard è previsto anche l'utilizzo di altre tecniche di modulazione (CAP, QAM), ma nel seguito si farà riferimento

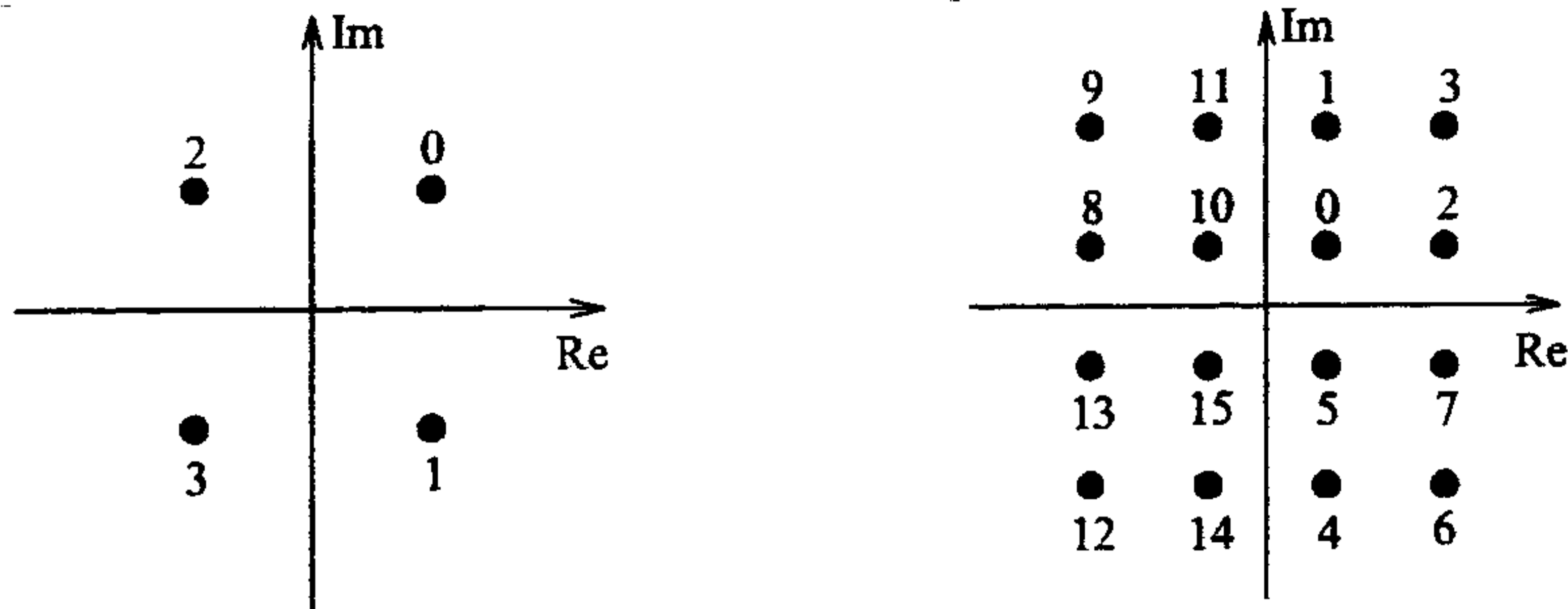


Figura 1: Associazione tra etichette  $v_k$  e numeri complessi  $c_k$  per  $n_k = 2$  (sinistra) e  $n_k = 4$  (destra).

solo alla modulazione DMT, più comunemente adottata. Nell'intervallo di tempo  $[0, T]$ ,  $T = 1/B$  (circa 0.232 ms), i bit da trasmettere vengono separati in  $K$  gruppi di  $n_k$  bit,  $k = 0, \dots, K-1$  (in genere  $n_k$  non è costante al variare di  $k$ , ma è comunque compreso tra 0 e 8). La  $k$ -esima stringa  $\underline{b}^{(k)}$  di  $n_k$  bit  $(b_{n_k-1}^{(k)}, \dots, b_1^{(k)}, b_0^{(k)})$  viene associata all'etichetta  $v_k$  nel seguente modo:

$$v_k = \sum_{i=0}^{n_k-1} 2^i b_i^{(k)}$$

(quindi la stringa di bit è la rappresentazione binaria del numero  $v_k$ ). All'etichetta  $v_k$  viene fatto corrispondere un numero complesso  $c_k$  che rappresenta il  $k$ -esimo simbolo da trasmettere. Due esempi di associazione tra etichetta  $v_k$  e simbolo complesso sono indicati nella figura 1, per i casi  $n_k = 2$  e  $n_k = 4$ : come si può notare dalla figura, i simboli  $c_k$  corrispondono ai punti di una costellazione QAM. Analoghe corrispondenze esistono per gli altri valori di  $n_k$  (si avranno costellazioni  $N_k$ -QAM con  $N_k = 2^{n_k}$ , con  $n_k = 0, 2, 3, \dots, 8$ , valori dispari inclusi). A partire dai simboli  $c_k$  si costruisce il segnale trasmesso  $x(t)$  nell'intervallo di tempo  $[0, T]$ :

$$x(t) = \Re \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} c_k \exp \left( j \frac{2\pi k t}{T} \right) \right\} \quad (1)$$

Il numero di bit trasmessi nell'intervallo  $[0, T]$  è dunque

$$n = \sum_{k=0}^{K-1} n_k.$$

**Problema 0:** Si verifichi che i segnali  $\exp(j \frac{2\pi k t}{T})$  con  $k = 0, \dots, K-1$  sono ortogonali tra loro nell'intervallo di tempo  $[0, T]$ .  $\square$

L'espressione del segnale trasmesso, valida per  $-\infty < t < \infty$  sarà dunque

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Re \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} c_k(n) \exp \left( j \frac{2\pi k (t - nT)}{T} \right) u_T(t - nT) \right\}, \quad (2)$$

$$= \sum_{k=0}^{K-1} \Re \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k(n) \exp \left( j \frac{2\pi k (t - nT)}{T} \right) u_T(t - nT) \right\}, \quad (3)$$

$$= \sum_{k=0}^{K-1} x_k(t) \quad (4)$$

essendo  $u_T(t) = 1$  per  $t \in [0, T]$  e  $u_T(t) = 0$  altrove. Si intuisce che il segnale  $x_k(t)$ , che trasporta i simboli  $c_k(n)$  ( $-\infty < n < \infty$ ) ed è un segnale del tipo  $N_k$ -QAM, viene trasmesso a frequenza  $k/T = kB$ , cioè all'interno del  $k$ -esimo sottocanale. Per rispettare i vincoli legati ai servizi POTS e ISDN, si avrà pertanto:

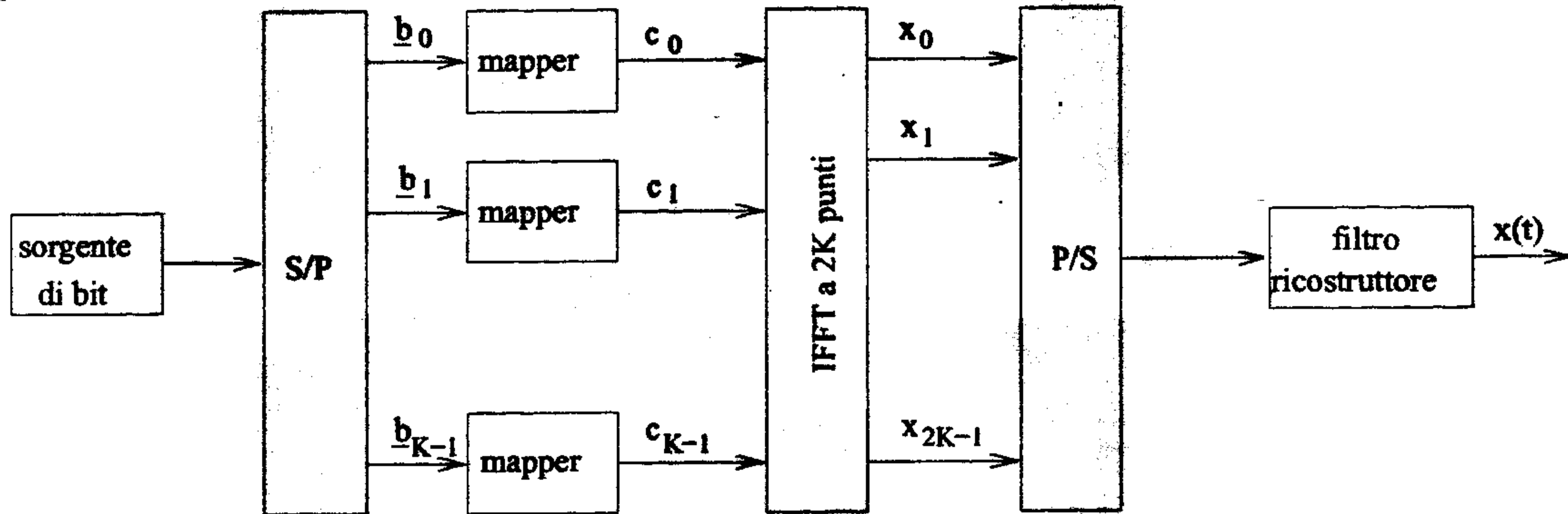


Figura 2: Realizzazione del trasmettitore ADSL tramite IFFT.

- per il flusso di "upstream":  $n_k = 0$  per  $k = 0, \dots, 5$  e  $K = 32$
- per il flusso di "downstream":  $K = 255$  e  $n_k = 0$  per  $k = 0, \dots, 31$  nel caso FDD, mentre  $n_k = 0$  per  $k = 0, \dots, 5$  nel caso ECH.

**Problema 1:** Si immagini che sia  $n_k = 2$  per  $k = I, K - 1$  (ad esempio  $I = 6$  e  $K = 32$ ) e che sia  $c_k \in \{\pm\sqrt{E_b} \pm j\sqrt{E_b}\}$  (pari potenza per ogni sottocanale utile), e che le sequenze  $c_k(n)$  siano costituite da simboli statisticamente indipendenti ed equiprobabili. Si calcoli lo spettro di potenza del processo casuale ciclostazionario  $x(t)$ , e si verifichi che è sostanzialmente piatto nell'intervallo di frequenze  $[IB, (K - 1)B]$ .  $\square$

**Problema 2:** Si scriva l'espressione dei campioni  $x(mT + MT/(2K))$ ,  $-\infty < m < \infty$ ,  $0 \leq M < 2K - 1$ , e si verifichi che è possibile ottenerli eseguendo una IFFT a  $2K$  punti a partire dai simboli  $c_k(m)$   $k = 0, \dots, K - 1$ , in modo che lo schema del trasmettitore risulti quello di figura 2.  $\square$

**Problema 3:** Il numero di bit da associare a ciascun sottocanale dipende dal rapporto segnale/disturbo che si ha in quello specifico sottocanale, e questo dipende sia dalla frequenza (perché il canale attenua maggiormente le frequenze più alte) sia dall'interferenza che, in un certo intervallo di tempo, può essere presente nel sottocanale. Si trasmetteranno meno bit in corrispondenza dei sottocanali con minor rapporto segnale/disturbo. Nel sistema ADSL l'associazione tra numero di bit e sottocanale viene effettuata dinamicamente, usando informazioni sul canale (tempo-variante) inviate dal ricevitore. Oltre a cambiare il numero di bit, sarebbe anche possibile trasmettere potenza diversa per ciascun sottocanale, ma questa possibilità non è prevista dallo standard. Si assuma che il canale sia tempo-invariante, con la funzione di trasferimento indicata nella figura 3 (semplificata rispetto alla realtà), che non esistano interferenze, che il rumore additivo sia bianco con spettro di potenza  $N_0/2$ , e che si desideri una probabilità d'errore sul bit  $P_b(e)$  per ciascun sottocanale minore o uguale a  $10^{-7}$ . Si stabiliscano i valori di  $n_k$  per  $k = 6, \dots, 31$ , e la potenza trasmessa in ciascun sottocanale (in funzione di  $N_0$ ) per il flusso di "upstream". Si assuma che il ricevitore sia ideale (in particolare, si assuma che i sincronismi siano perfetti e che le soglie dei decisori siano calibrate correttamente), e si utilizzino quindi le curve di probabilità d'errore sul bit in funzione di  $E_b/N_0$  della figura 4. (Nota: esistono diverse soluzioni, se ne dia almeno una.)  $\square$

**Problema 4:** Lo schema di principio del ricevitore DMT è indicato nella figura 5, ed esegue le funzioni inverse del trasmettitore, con l'aggiunta dell'equalizzazione: se il canale ha funzione di trasferimento  $H(f) \simeq \alpha_k$  (numero complesso) per  $f \in [(k - 1)B, kB]$ , allora significa che i campioni all'uscita del blocco FFT non saranno i  $c_k(n)$  trasmessi, ma  $c_k(n)\alpha_k$  (approssimativamente). Moltiplicando per  $a_k = 1/\alpha_k$  i campioni all'uscita del blocco FFT del ricevitore, si elimina dunque l'effetto distortore introdotto dal canale e si realizza molto semplicemente l'equalizzazione.

In realtà la trasmissione del segnale  $x(t)$  generato secondo la figura 2 (corrispondente all'equazione 2), non consente di effettuare l'equalizzazione semplice appena descritta, ed occorre modificare leggermente lo schema del trasmettitore. Si immagini che la risposta all'impulso del canale sia  $h(t)$  di durata  $0 < \Delta < T$ : allora i simboli  $c_k(n)$  trasmessi nell'intervallo di tempo  $[nT, nT + T]$  interferiscono con i simboli  $c_k(n + 1)$  trasmessi nel successivo intervallo temporale  $[nT + T, nT + 2T]$  (interferenza inter-blocco), e non c'è modo

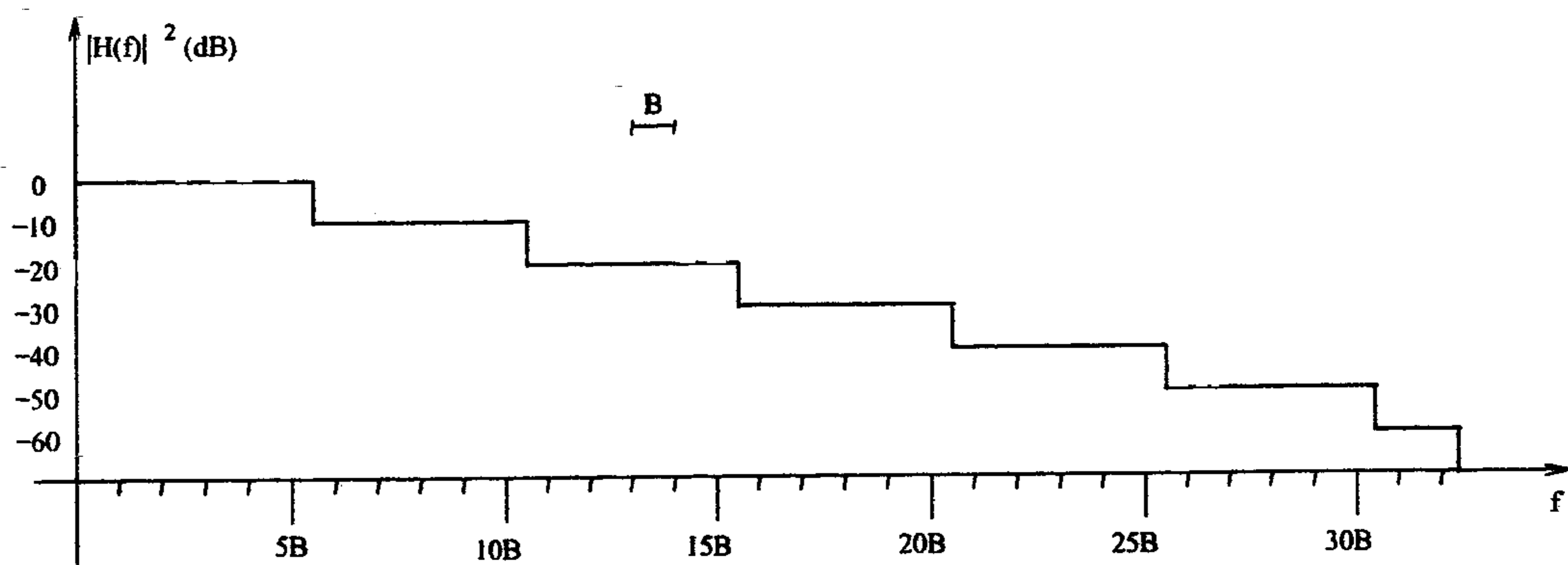


Figura 3: Funzione di trasferimento (in modulo quadro) del canale. Si assuma, per semplicità che la fase di  $H(f)$  sia nulla a tutte le frequenze.

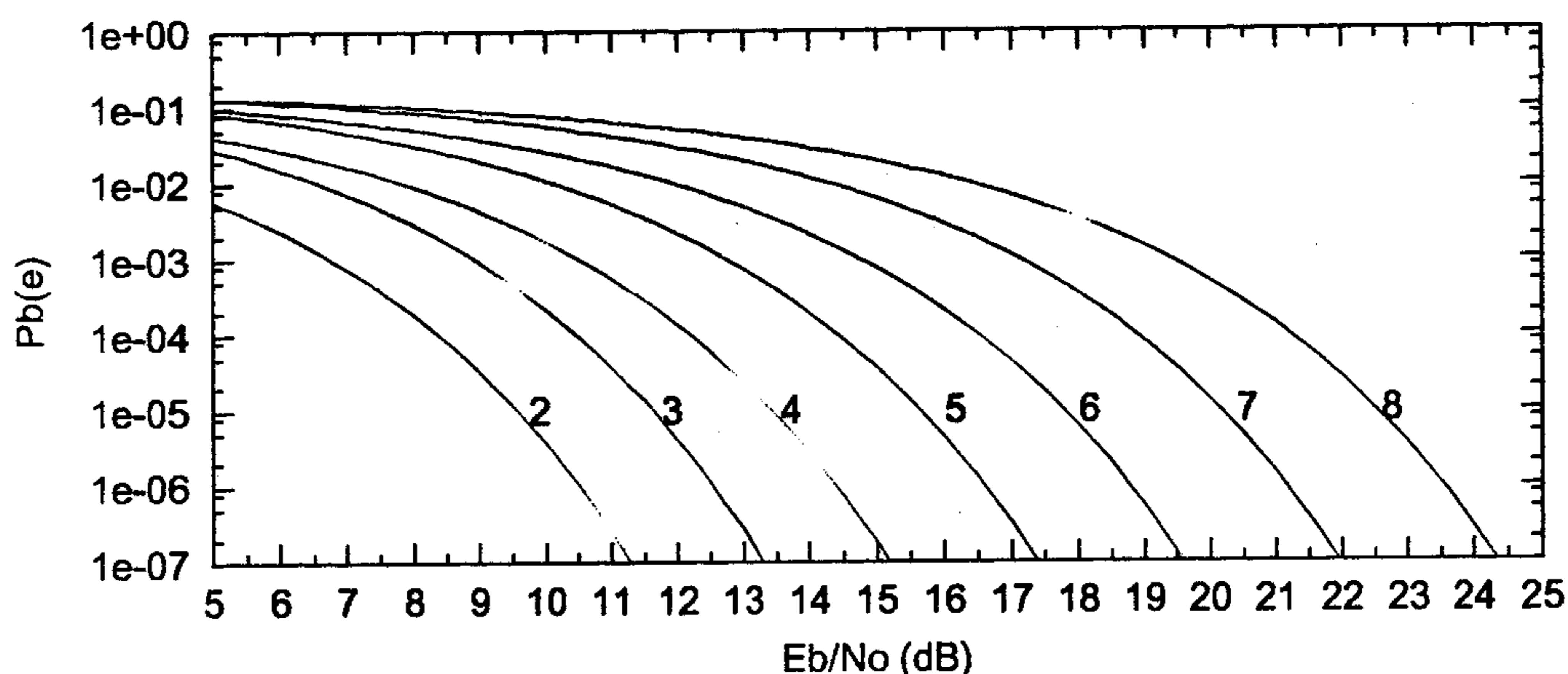


Figura 4: Probabilità d'errore sul bit  $P_b(e)$  in funzione di  $E_b/N_0$  per le modulazioni QAM. L'etichetta associata a ciascuna curva indica il numero di bit trasportati dal simbolo QAM.

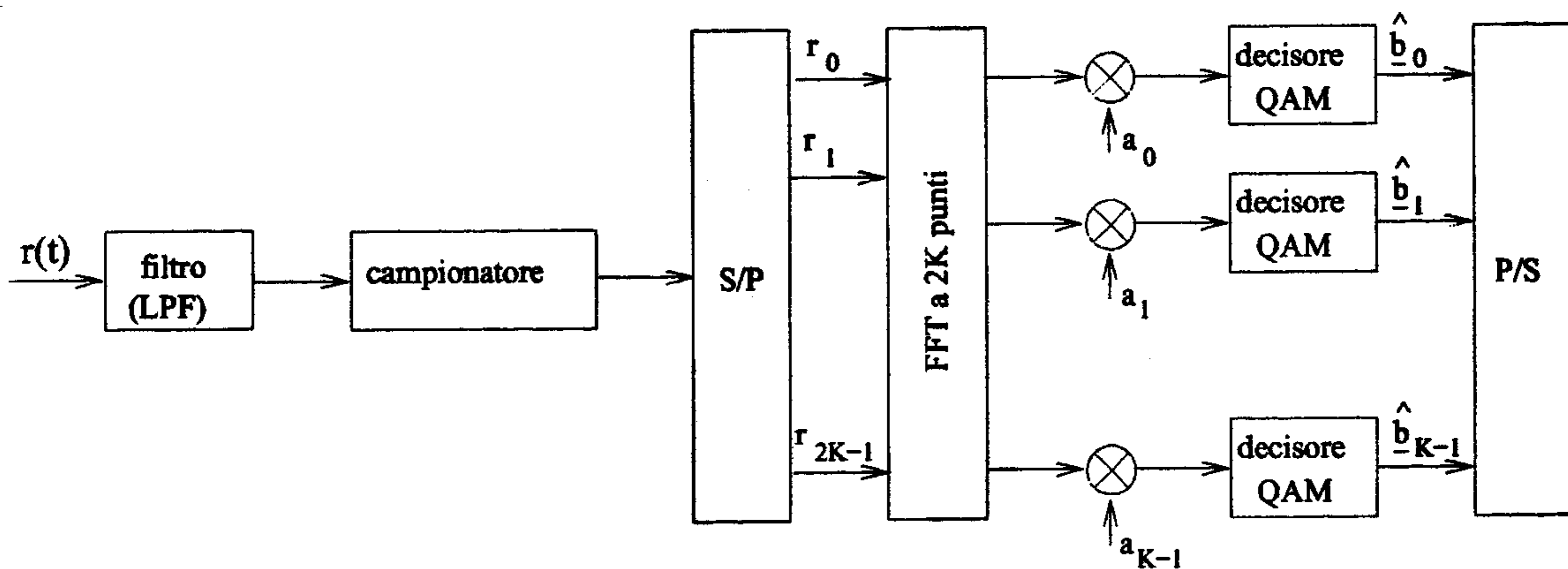


Figura 5: Schema del ricevitore ADSL.

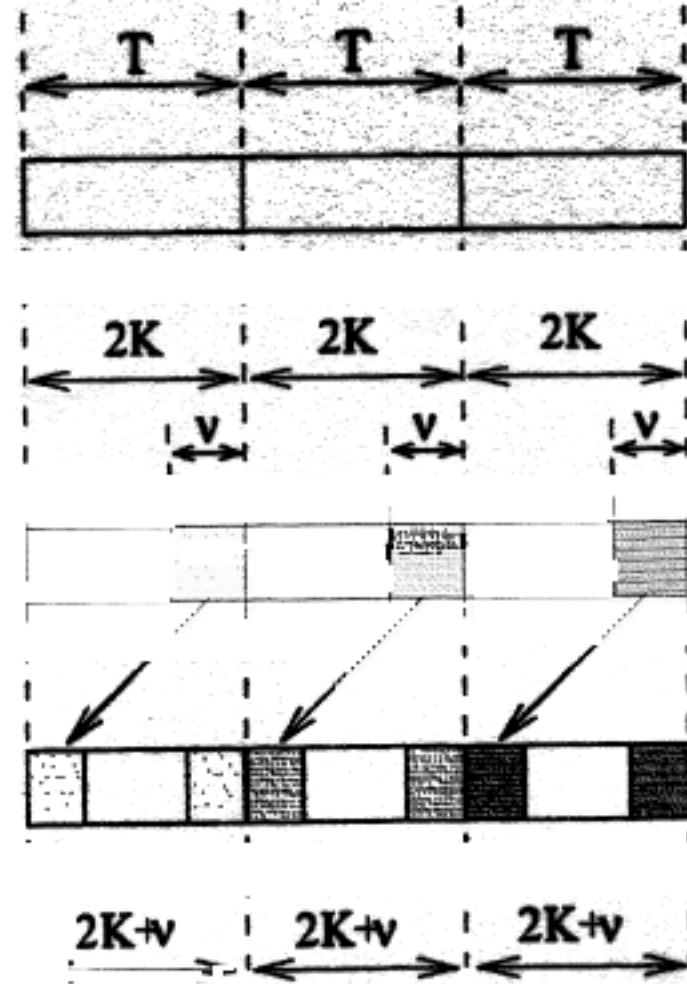


Figura 6: Schema della gestione del prefisso ciclico.

di eliminare questa interferenza con l'equalizzazione semplice presente nello schema del ricevitore di figura 5. Per evitare che due blocchi successivi interferiscano tra loro, è necessario inserire un intervallo di guardia di durata minima pari a  $\Delta$  tra i due blocchi, ed occorre inoltre riempire l'intervallo con la copia dell'ultima parte del segnale del blocco (tecnica del prefisso ciclico, "cyclic prefix"). Facendo riferimento ai campioni all'uscita del blocco IFFT del trasmettitore di figura 2, si ha che gli ultimi  $\nu$  campioni del blocco (di  $2K$  campioni) vengono aggiunti all'inizio del blocco, generando così  $2K + \nu$  campioni per ogni blocco di simboli  $c_k(n)$  ( $k = 0, \dots, K - 1$ ) (cfr. fig. 6). I  $2K + \nu$  campioni vengono trasmessi nell'intervallo di tempo  $[0, T]$ . Per il flusso di "upstream"  $\nu = 4$ , per quello di "downstream"  $\nu = 32$ . Il ricevitore elimina poi i campioni inseriti in trasmissione nell'intervallo di guardia ed esegue le operazioni indicati nello schema di figura 5.

Rispetto alle figure 2 e 5,

- il trasmettitore effettivo ADSL come ingresso del blocco P/S (parallelo/serie) non  $x_0, \dots, x_{2K-1}$ , ma  $x_{2K-\nu}, \dots, x_{2K-1}, x_0, \dots, x_{2K-1}$
- il ricevitore effettivo ADSL all'uscita del blocco S/P (serie/parallelo) ha i campioni  $r_0, \dots, r_{2K+\nu-1}$ , ma passa al successivo blocco FFT solo i  $2K$  campioni  $r_{\nu}, \dots, r_{2K+\nu-1}$  eliminando i primi  $\nu$  campioni.

Lo schema di trasmissione così ottenuto consente di eliminare gli effetti del canale distorto fintantoché la risposta all'impulso del canale ha durata inferiore o uguale a  $\nu$  campioni. Se il canale ha risposta all'impulso di durata maggiore di  $\nu$  campioni, allora è necessario utilizzare un ulteriore equalizzatore (nel dominio del tempo) per ridurre la durata a  $\nu$  campioni. Questo ulteriore equalizzatore può essere ad esempio progettato con la tecnica zero-forcing.

**Sottoproblema 4.1:** Si verifichi che il sistema funziona nel caso in cui la risposta all'impulso del canale abbia durata pari a  $\nu$  campioni. Si usi la seguente notazione:

$$\underline{x} = [x_0, x_1, \dots, x_{2K-1}] \quad \text{campioni del blocco (senza prefisso) = uscita IFFT}$$

$$\underline{x}' = [x_{2K-\nu}, \dots, x_{2K-1}, x_0, x_1, \dots, x_{2K-1}] = [x'_0, \dots, x'_{2K+\nu}] \quad \text{campioni del blocco (con prefisso) = uscita P/S}$$

$$\underline{h} = [h_0, \dots, h_{\nu-1}] \quad \text{campioni della risposta all'impulso del canale}$$

$$\underline{r} = [r_0, \dots, r_{2K+\nu-1}], \quad r_n = x'_n * h_n \quad \text{uscita del canale}$$

$$\underline{w} = [r_\nu, r_{\nu+1}, \dots, r_{2K+\nu-1}] = [w_0, \dots, w_{2K-1}], \quad \text{parte utile dell'uscita del canale (senza prefisso) = ingresso FFT}$$

e si scriva l'espressione di  $w_n$ ,  $n = 0, \dots, 2K - 1$  in funzione di

-  $X(k)$ , FFT a  $2K$  punti di  $\underline{x}$

-  $H(k)$ , FFT a  $2K$  punti di  $\underline{h}$  (con zero padding)

Si deduca che, in assenza di rumore ed ulteriori interferenze, è possibile ottenere esattamente i simboli trasmessi  $c_k$ , calcolando la FFT  $W(k)$  di  $\underline{w}$  e moltiplicando  $W(k)$  per  $1/H(k)$ .  $\square$

**Sottoproblema 4.2:** Si verifichi che è possibile sostituire il blocco FFT a  $2K$  punti con un blocco FFT a  $K$  punti.  $\square$

**Problema 5:** All'interno dello standard è prevista una struttura a trame e supertrame, come indicato nella figura 7:

- La supertrama ha durata pari a 17 ms, ed è costituita da 69 trame, ciascuna di 250  $\mu$ s.
- La trama 68 serve per la sincronizzazione, mentre le trame 0-67 trasportano dati utili.
- All'interno di ciascuna trama utile, un byte (8 bit) viene utilizzato per portare o il CRC di supertrama (8 bit), o informazioni legate al cosiddetto Embedded Operations Channel (EOC) (24 bit), o byte di sincronizzazione.
- Ciascuna trama è suddivisa in due parti da 125  $\mu$ s ciascuna.

La prima parte è detta "fast" ed è utilizzata per quelle applicazioni in cui l'utente non desidera avere eccessivi ritardi. I dati utili vengono codificati usando un codice di Reed-Solomon  $(n, k, d)$  con  $n = 255$  (quindi un simbolo di Reed-Solomon è costituito da 8 bit). Il rapporto di codifica  $k/n$  è variabile e dipende dallo stato del canale (si ha  $k + d = 256$  e  $d = 2t + 1$ , essendo  $t$  il numero di byte errati che il codice è in grado di correggere). Inoltre si usa un codice accorciato: se i byte da codificare sono  $k_1 < k$ , si genera la parola con i  $k_1$  byte di informazione, seguiti da  $k - k_1$  byte nulli, questi vengono codificati con il codice di Reed-Solomon  $(n, k, d)$  per generare  $n - k$  byte di parity check, vengono quindi trasmessi i  $k_1$  byte di informazione, seguiti dagli  $n - k$  byte di controllo, per un totale di  $k_1 + (n - k)$  byte. Tipicamente si usa  $k_1 = 224$  e  $n - k = 16$ .

La seconda parte della trama è detta "interleaved": i dati trasmessi su questo canale logico vengono codificati esattamente come i dati "fast", ma vengono anche interlacciati. L'operazione di interlacciamento introduce ritardi piuttosto elevati, ma riduce drasticamente l'effetto del rumore impulsivo, e consente di ridurre la probabilità d'errore. Di conseguenza la parte "interleaved" è adatta per la trasmissione di film (il ritardo non importa, mentre è necessario che la probabilità d'errore sia molto piccola, in modo da evitare errori nella ricostruzione dell'immagine da parte del decompressore in ricezione).

Durante una trasmissione, è possibile che la trama contenga due parti "fast", o due parti "interleaved", o una parte "fast" e l'altra "interleaved".

**Sottoproblema 5.1:** Si verifichi che la velocità di trasmissione dei simboli utili  $c_k$  a livello fisico è di 4 ksimboli/s (ogni simbolo QAM  $c_k$  può poi portare un numero diverso di bit, a seconda del valore di  $k$ ).  $\square$

**Sottoproblema 5.2:** Si immagini che l'utente desideri vedere un film, che il flusso di dati da scaricare dalla rete abbia velocità pari a 2 Mbit/s, e che il canale abbia funzione di trasferimento costante ( $H(f) = c$  reale). Si individui una possibile soluzione in termini di:

1. numero totale di bit  $n$  da trasmettere in ogni intervallo di tempo  $T$
2. numero di bit  $n_k$  da associare al  $k$ -esimo simbolo QAM
3. numero di byte di parity check  $(n - k)$  e di byte di informazione ( $k_1$ ) presenti nella sottotrama
4. velocità di trasmissione in bit/s per il livello fisico

nei due casi di trasmissione con tecnica FDD e con tecnica ECH.  $\square$

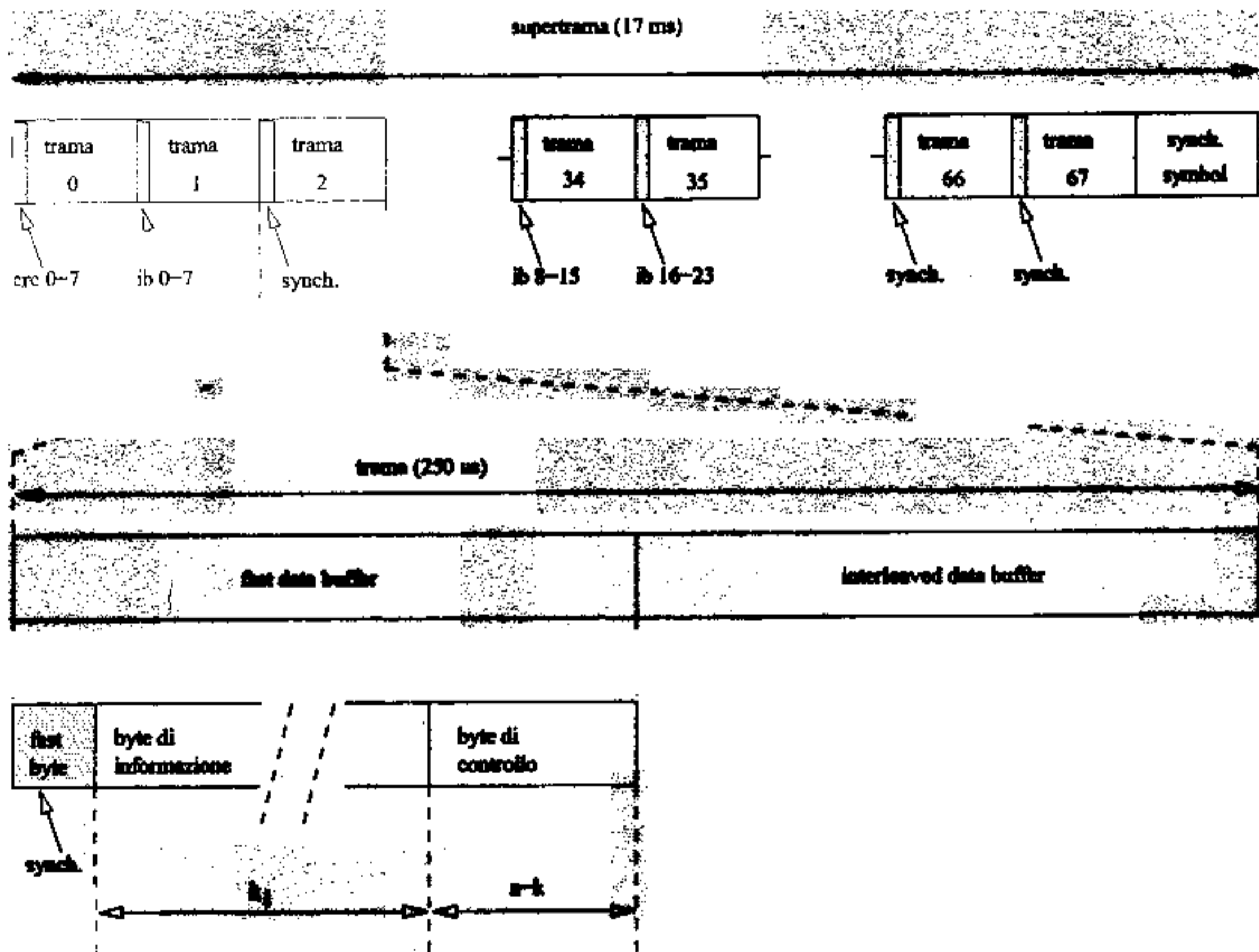


Figura 7: Struttura della supertrama.